



Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

An Introduction to Lambda Calculus

ラ ム ダ 計 算 入 門

川向薰

はしがき

本書はひとつのラムダ計算の入門書です。本書では型なしラムダ計算を扱います。

目次

はしがき	<i>i</i>
第1章 型なしラムダ計算	I
§1.1. 構文.....	I
§1.2. 長さ.....	I
§1.3. 自由変数	2
§1.4. 束縛変数	2
§1.5. 変数.....	2
§1.6. 代入.....	2
§1.7. α -変換	3
§1.8. β -変形	5
§1.9. 並行簡約	8
§1.10. 合流性定理	10
あとがき	16

第1章 型なしラムダ計算

§1.1. 構文

定義 1.1.1. 変数 (*variable*)

$$\begin{array}{rcl} x_1, x_2, \dots & ::= & x_1 \\ & | & x_2 \\ & | & \vdots \end{array}$$

定義 1.1.2. 項 (*term*)

$$\begin{array}{rcl} e_1, e_2, e_3, \dots & ::= & x_1 \\ & | & (e_1 e_2) \\ & | & (\lambda x_2 e_3) \end{array}$$

x_1 や x_2 は (具体的な) 変数ですが x_1 や x_2 は変数を表すメタ変数です。 e_1 や e_2 は項を表すメタ変数です。 メタ変数が出現する項をメタ項と呼びます。 たとえば $(\lambda x_1(\lambda x_2 x_1))$ は (具体的な) 項ですが $(\lambda x_1(\lambda x_2 x_1))$ はメタ項です。 (具体的な) 項を書くことはほとんどありませんので、メタ項を指して単に項と呼びますが、(具体的な) 項を指しているわけではないことに注意してください。 このような区別をしばしばメタ (*meta*) レベルや対象 (*object*) レベルと呼びます。

e_1 の構造についての帰納法を e_1 の定義による帰納法と呼び、まず基礎ケース (*base case*) すなわち命題 $P(x_1)$ が成り立つことを証明し、帰納ステップ (*induction step*) すなわち e_1, e_2, e_3 について命題 $P(e_1), P(e_2), P(e_3)$ が成り立つという仮定——帰納法の仮定 (*induction hypothesis*)——のもとで命題 $P(e_1 e_2), P(\lambda x_2 e_3)$ が成り立つことを証明します。 それで命題 $\forall e_4 P(e_4)$ が証明されたことになります。 再帰に似ていますが、Coq の Fixpoint のように “構造的に小さな” ものでしか帰納法の仮定は成立しません。

§1.2. 長さ

定義 1.2.1. 項の長さ (*length*)

$$\text{length}(e_1) := \begin{cases} 1 & e_1 = x_1 \\ \text{length}(e_2) + \text{length}(e_3) + 1 & e_1 = (e_2 e_3) \\ \text{length}(e_2) + 1 & e_1 = (\lambda x_2 e_2) \end{cases}$$

$\text{length}(e_1) = n$ についての帰納法を e_1 の長さに関する帰納法と呼びます。 長さに関する帰納法では、まず $\text{length}(e_1) = 1$ となるような e_1 すなわち x_1 について命題 $P(x_1)$ が成り立つことを証明し、 $\text{length}(e) \leq k$ となるようすべての e について命題 $P(e)$ が成り立つと仮定したうえで $\text{length}(e_1) = k+1$ となるような e_1 すなわち $(e_2 e_3), (\lambda x_2 e_4)$ について命題 $P(e_2 e_3), P(\lambda x_2 e_4)$ が成り立つことを証明します。 ここで $\text{length}(e_2) \leq k$ かつ $\text{length}(e_3) \leq k$ かつ $\text{length}(e_4) \leq k$ なので $P(e_2), P(e_3), P(e_4)$ が成り立つことは仮定してよいのです。 $\text{length}(e) \leq k$ であることさえ証明できれば仮定できるので、“構造的に小さくとも” 再帰できる点で定義による帰納法とは異なります。

§1.3. 自由変数

定義 1.3.1. 自由変数の集合

$$\text{FV}(e_1) := \begin{cases} \{x_1\} & e_1 = x_1 \\ \text{FV}(e_2) \cup \text{FV}(e_3) & e_1 = (e_2 e_3) \\ \text{FV}(e_2) \setminus \{x_1\} & e_1 = (\lambda x_1 e_2) \end{cases}$$

§1.4. 束縛変数

定義 1.4.1. 束縛変数の集合

$$\text{BV}(e_1) := \begin{cases} \emptyset & e_1 = x_1 \\ \text{BV}(e_2) \cup \text{BV}(e_3) & e_1 = (e_2 e_3) \\ \text{BV}(e_2) \cup \{x_1\} & e_1 = (\lambda x_1 e_2) \end{cases}$$

§1.5. 変数

定義 1.5.1. 変数の集合

$$V(e_1) := \text{FV}(e_1) \cup \text{BV}(e_1)$$

§1.6. 代入

定義 1.6.1. 代入 (*substitution*)

$$[e_1/x_1]e_2 := \begin{cases} e_1 & e_2 = x_2 \wedge x_1 = x_2 \\ e_2 & e_2 = x_2 \wedge x_1 \neq x_2 \\ ([e_1/x_1]e_3[e_1/x_1]e_4) & e_2 = (e_3 e_4) \\ e_2 & e_2 = (\lambda x_2 e_3) \wedge x_1 = x_2 \\ (\lambda x_3 [e_1/x_1][x_3/x_2]e_3) & e_2 = (\lambda x_2 e_3) \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_3 \notin V(e_1) \wedge x_3 \notin V(e_2) \end{cases}$$

補題 1.6.1. $\forall x_1 \forall x_2 \forall e_1 (\text{length}([x_1/x_2]e_1) = \text{length}(e_1))$.

証明. x_1, x_2, e_1 を固定し, $[x_1/x_2]e_1$ の定義による帰納法で証明する.

- $[x_1/x_2]e_1 = x_1$ の場合. $e_1 = x_2$ なので,

$$\begin{aligned} \text{length}([x_1/x_2]e_1) &= \text{length}(x_1) \\ &= 1 \\ &= \text{length}(x_2) \\ &= \text{length}(e_1) \end{aligned}$$

- $[x_1/x_2]e_1 = e_1$ の場合. 明らかに $\text{length}([x_1/x_2]e_1) = \text{length}(e_1)$.
- $[x_1/x_2]e_1 = ([x_1/x_2]e_2[x_1/x_2]e_3)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$\begin{aligned} \text{length}([x_1/x_2]e_2) &= \text{length}(e_2) \\ \text{length}([x_1/x_2]e_3) &= \text{length}(e_3) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
 \text{length}([x_1/x_2]e_1) &= \text{length}([x_1/x_2]e_2[x_1/x_2]e_3) \\
 &= \text{length}([x_1/x_2]e_2) + \text{length}([x_1/x_2]e_3) + 1 \\
 &= \text{length}(e_2) + \text{length}(e_3) + 1 \\
 &= \text{length}(e_2e_3) \\
 &= \text{length}(e_1)
 \end{aligned}$$

- $[x_1/x_2]e_1 = (\lambda x_4[x_1/x_2][x_4/x_3]e_2)$ の場合。帰納法の仮定：

$$\begin{aligned}
 \text{length}([x_1/x_2][x_4/x_3]e_2) &= \text{length}([x_4/x_3]e_2) \\
 \text{length}([x_4/x_3]e_2) &= \text{length}(e_2)
 \end{aligned}$$

したがって、 $e_1 = (\lambda x_3 e_2)$ なので、

$$\begin{aligned}
 \text{length}([x_1/x_2]e_1) &= \text{length}(\lambda x_4[x_1/x_2][x_4/x_3]e_2) \\
 &= \text{length}([x_1/x_2][x_4/x_3]e_2) + 1 \\
 &= \text{length}([x_4/x_3]e_2) + 1 \\
 &= \text{length}(e_2) + 1 \\
 &= \text{length}(\lambda x_3 e_2) \\
 &= \text{length}(e_1)
 \end{aligned}$$

□

補題 1.6.2. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall e_1 ([x_1/x_2][x_2/x_3]e_1 = [x_1/x_3]e_1)$.

証明。証明は簡単。

□

§1.7. α -変換

定義 1.7.1. α -同値 (α -congruence)

$$e_1 \equiv e_2 \coloneqq \begin{cases} x_1 = x_2 & e_1 = x_1 \wedge e_2 = x_2 \\ e_3 \equiv e_5 \wedge e_4 \equiv e_6 & e_1 = (e_3 e_4) \wedge e_2 = (e_5 e_6) \\ [x_3/x_1]e_3 \equiv [x_3/x_2]e_4 & e_1 = (\lambda x_1 e_3) \wedge e_2 = (\lambda x_2 e_4) \wedge x_3 \notin V(e_1) \wedge x_3 \notin V(e_2) \end{cases}$$

$e_1 \equiv e_2$ が定義されないことを単に $e_1 \not\equiv e_2$ と書きます。 $e_1 \equiv e_2$ は簡単には変数名の違いを無視した同値関係です。たとえば $(\lambda x_1 x_1) \neq (\lambda x_2 x_2)$ ですが $(\lambda x_1 x_1) \equiv (\lambda x_2 x_2)$ です。

補題 1.7.1. $\forall e_1 \forall e_2 (e_1 \equiv e_2 \rightarrow \text{length}(e_1) = \text{length}(e_2))$.

証明。証明は簡単。

□

簡単のため $e_1 \equiv e_2$ のとき、 e_1, e_2 両方の長さに関する帰納法で証明することができます。2重帰納法ではありませんので注意してください。帰納法は基本的にひとつの自然数や構造に対してしかできませんが、項の n -組 (n -tuple) (e_1, \dots, e_n) というひとつの構造を考えれば、 $e_1 \equiv e_2$ かつ…かつ $e_{n-1} \equiv e_n$ という前提なら $\text{length}(e_1) = \dots = \text{length}(e_n)$ ですから、

$$\text{length}_n(e_1, \dots, e_n) \coloneqq \text{length}(e_1)$$

を与えれば、項の n -組の長さに関する帰納法ができます。

補題 1.7.2. $\forall f \forall e_1 \forall e_2 (e_1 \equiv e_2 \rightarrow f(e_1) \equiv f(e_2))$.

証明. 証明は簡単. □

補題 1.7.3. α -同値は反射的である. すなわち, $\forall e_1 (e_1 \equiv e_1)$.

証明. e_1 を固定し, e_1 の長さに関する帰納法で証明する.

- $\text{length}(e_1) = 1$ の場合.
 - $e_1 = x_1$ の場合. $x_1 = x_1$ なので, α -同値の定義により $e_1 \equiv e_1$ である.
- $\text{length}(e_1) = k + 1$ の場合.
 - $e_1 = (e_2 e_3)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$\begin{aligned} e_2 &\equiv e_2 \\ e_3 &\equiv e_3 \end{aligned}$$

したがって $e_2 \equiv e_2 \wedge e_3 \equiv e_3$ なので, α -同値の定義により $e_1 \equiv e_1$ である.

- $e_1 = (\lambda x_1 e_2)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$e_2 \equiv e_2$$

また補題 1.6.1 により帰納法の仮定は $[x_2/x_1]e_2 \equiv [x_2/x_1]e_2$ と変形できるから, α -同値の定義により $e_1 \equiv e_1$ である.

□

補題 1.7.4. α -同値は対称的である. すなわち, $\forall e_1 \forall e_2 (e_1 \equiv e_2 \rightarrow e_2 \equiv e_1)$.

証明. e_1, e_2 を固定し, e_1, e_2 の長さに関する帰納法で証明する. 前提:

$$e_1 \equiv e_2$$

- $\text{length}(e_1) = \text{length}(e_2) = 1$ の場合.
 - $e_1 = x_1, e_2 = x_2$ の場合. 前提を計算すれば $x_1 = x_2$ となるので, $x_2 = x_1$. したがって α -同値の定義により $e_2 \equiv e_1$ である.
- $\text{length}(e_1) = \text{length}(e_2) = k + 1$ の場合.
 - $e_1 = (e_3 e_4), e_2 = (e_5 e_6)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$\begin{aligned} e_3 &\equiv e_5 \rightarrow e_5 \equiv e_3 \\ e_4 &\equiv e_6 \rightarrow e_6 \equiv e_4 \end{aligned}$$

また前提を計算すれば $e_3 \equiv e_5 \wedge e_4 \equiv e_6$ となるので, $e_5 \equiv e_3 \wedge e_6 \equiv e_4$ であり, α -同値の定義により $e_2 \equiv e_1$ である.

- $e_1 = (\lambda x_1 e_3), e_2 = (\lambda x_2 e_4)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$e_3 \equiv e_4 \rightarrow e_4 \equiv e_3$$

また前提を計算すれば $[x_3/x_1]e_3 \equiv [x_3/x_2]e_4$ となり, 補題 1.6.1 により帰納法の仮定は

$$[x_3/x_1]e_3 \equiv [x_3/x_2]e_4 \rightarrow [x_3/x_2]e_4 \equiv [x_3/x_1]e_3$$

と変形できるから, $[x_3/x_2]e_4 \equiv [x_3/x_1]e_3$ である. したがって α -同値の定義により $e_2 \equiv e_1$ である.

- $\text{length}(e_1) \neq \text{length}(e_2)$ の場合. 前提と補題 1.7.1 が矛盾するので, このような場合は起こりえない.

□

今回は最後の $\text{length}(e_1) \neq \text{length}(e_2)$ の場合を明示しましたが, 今後は省略します.

補題 1.7.5. α -同値は推移的である. すなわち, $\forall e_1 \forall e_2 \forall e_3 (e_1 \equiv e_2 \rightarrow e_2 \equiv e_3 \rightarrow e_1 \equiv e_3)$.

証明. e_1, e_2, e_3 を固定し, e_1, e_2, e_3 の長さに関する帰納法で証明する. 前提:

$$\begin{aligned} e_1 &\equiv e_2 \\ e_2 &\equiv e_3 \end{aligned}$$

- $\text{length}(e_1) = \text{length}(e_2) = \text{length}(e_3) = 1$ の場合.
 - $e_1 = x_1, e_2 = x_2, e_3 = x_3$ の場合. 前提を計算すれば $x_1 = x_2$ かつ $x_2 = x_3$ となる. したがって $x_1 = x_3$ なので, α -同値の定義により $e_1 \equiv e_3$ である.
- $\text{length}(e_1) = \text{length}(e_2) = \text{length}(e_3) = k + 1$ の場合.
 - $e_1 = (e_4 e_5), e_2 = (e_6 e_7), e_3 = (e_8 e_9)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$\begin{aligned} e_4 &\equiv e_6 \rightarrow e_6 \equiv e_8 \rightarrow e_4 \equiv e_8 \\ e_5 &\equiv e_7 \rightarrow e_7 \equiv e_9 \rightarrow e_5 \equiv e_9 \end{aligned}$$

また前提を計算すれば $e_4 \equiv e_6 \wedge e_5 \equiv e_7$ かつ $e_6 \equiv e_8 \wedge e_7 \equiv e_9$ となるので, $e_4 \equiv e_8 \wedge e_5 \equiv e_9$ であり, α -同値の定義により $e_1 \equiv e_3$ である.

- $e_1 = (\lambda x_1 e_4), e_2 = (\lambda x_2 e_5), e_3 = (\lambda x_3 e_6)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$e_4 \equiv e_5 \rightarrow e_5 \equiv e_6 \rightarrow e_4 \equiv e_6$$

また前提を計算すれば $[x_4/x_1]e_4 \equiv [x_4/x_2]e_5$ かつ $[x_5/x_2]e_5 \equiv [x_5/x_3]e_6$ となり, 補題 1.7.2 により $[x_6/x_4][x_4/x_1]e_4 \equiv [x_6/x_4][x_4/x_2]e_5$ かつ $[x_6/x_5][x_5/x_2]e_5 \equiv [x_6/x_5][x_5/x_3]e_6$ すなわち補題 1.6.2 により $[x_6/x_1]e_4 \equiv [x_6/x_2]e_5$ かつ $[x_6/x_2]e_5 \equiv [x_6/x_3]e_6$ である. 補題 1.6.1 によりにより帰納法の仮定は

$$[x_6/x_1]e_4 \equiv [x_6/x_2]e_5 \rightarrow [x_6/x_2]e_5 \equiv [x_6/x_3]e_6 \rightarrow [x_6/x_1]e_4 \equiv [x_6/x_3]e_6$$

と変形できるから, $[x_6/x_1]e_4 \equiv [x_6/x_3]e_6$ である. ゆえに α -同値の定義により $e_1 \equiv e_3$ である.

□

$e_1 \equiv e_2$ のとき, e_1 を e_2 で置きかえることを α -変換 (α -conversion) と呼びます. 以後, とくに断りがなければ $e_1 = e_2$ のときは常に $e_1 \equiv e_2$ であり, また $e_1 \neq e_2$ のときは常に $e_1 \not\equiv e_2$ であるものとします.

§1.8. β -変形

定義 1.8.1. 式 (expression)

e_1, e_2 が項ならば $e_1 \triangleright_1 e_2$ と $e_1 \triangleright e_2$ を β -変形の式 (expression) と呼ぶ.

定義 1.8.2. 1 ステップの β -変形 (β -reduction)

$$\overline{((\lambda x_1 e_1) e_2) \triangleright_1 [e_1/x_1]e_2}$$

$$\frac{\frac{e_1 \triangleright_1 e_2}{(e_1 e_3) \triangleright_1 (e_2 e_3)} \quad \frac{e_1 \triangleright_1 e_2}{(e_3 e_1) \triangleright_1 (e_3 e_2)}}{\frac{e_1 \triangleright_1 e_2}{(\lambda x_1 e_1) \triangleright_1 (\lambda x_1 e_2)}}$$

定義 1.8.3. 複数ステップの β -変形

$$\frac{\overline{e_1 \triangleright e_1} \quad e_1 \triangleright_1 e_2 \quad e_2 \triangleright e_3}{e_1 \triangleright e_3}$$

横線より上の部分を前提 (premise), 下の部分を結論 (conclusion) と呼びます. 推論規則をいくつか組みあわせた図を推論図 (deduction) と呼びます.

定義 1.8.4. 推論図 (deduction)

- 式 A は推論図である. この形の推論図を仮定 (assumption) と呼び, 前提は $\{A\}$ で結論は A である.
- Π_1, \dots, Π_n を推論図とし, それぞれの結論を A_1, \dots, A_n とする. A_1, \dots, A_n を前提とする推論規則が存在し, その結論が B ならば,

$$\frac{\Pi_1 \quad \dots \quad \Pi_n}{B}$$

は推論図である. この形の推論図の前提は Π_1 の前提 $\cup \dots \cup \Pi_n$ の前提 であり, 結論は B である.

推論図の概念は, 帰納的に定義するより例示したほうがわかりやすいかもしれません. つぎの推論図は, $((\lambda x_1 (\lambda x_2 x_1)) x_3) x_4$ という項が複数ステップの β -変形で x_3 になるということを表しています. 読みやすくするために代入はあらかじめ等価な項で置きかえてありますが, 厳密には代入が出現する場所もあることに注意してください.

例 1.8.1.

$$\frac{\frac{\overline{((\lambda x_1 (\lambda x_2 x_1)) x_3) \triangleright_1 (\lambda x_2 x_3)} \quad \frac{\overline{((\lambda x_2 x_3) x_4) \triangleright_1 x_3} \quad x_3 \triangleright x_3}{((\lambda x_2 x_3) x_4) \triangleright x_3}}{(((\lambda x_1 (\lambda x_2 x_1)) x_3) x_4) \triangleright x_3}$$

このように 1 ステップの β -変形と複数ステップの β -変形を別々に定義する意味論を Small Step Semantics と呼びます. Small Step Semantics の関心は 1 ステップの β -変形にありますので, 複数ステップの β -変形を定義しないこともあります. 1 ステップの β -変形を定義せず, いきなり複数ステップの β -変形を定義する意味論を Big Step Semantics と呼びます. Big Step Semantics では \Downarrow という記号をもちいることが一般的です. Big Step Semantics のほうがより実際の実装に近い意味論なのでプログラム言語の形式化ではよくもちいられます, 理論的な計算模型を考える場合には Small Step Semantics がよくもちいられます.

Π の前提が $\{A_1, \dots, A_n\}$ で結論が B のとき, Π を B に至る推論図と呼び, $\Gamma = A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}$ を Π の仮定と呼びます. 仮定は集合と同様に, 順序や重複は気にしませんし, 前提がない式が仮定に含まれていてもかまいません. さらに $\Gamma \vdash B$ と書き, 仮定 Γ から B ができると読みます. とくに $n = 0$ かつ $m = 0$ すなわち Π の仮定が空のとき Π を証明図と呼び, B は証明可能 (provable) であるといいます. $e_1 \triangleright_1 e_2$ が証明できるような e_2 が存在しないとき, e_1 は β -正規形 (β -normal form) であるといいます. $e_1 \triangleright e_2$ が証明でき, かつ e_2 が正規形であるとき, e_1 は正規形をもつといいます. 正規形をもたない項が存在することに注意してください. たとえば, $((\lambda x_1 x_1)(\lambda x_1 x_1))$ は正規形をもちません.

定義 1.8.5. 推論図の長さ (length)

$$\text{length}(\Pi) := \begin{cases} 1 & \Pi = A \\ \text{length}(\Pi_1) + \dots + \text{length}(\Pi_n) + 1 & \Pi = \frac{\Pi_1 \ \dots \ \Pi_n}{A} \end{cases}$$

補題 1.8.1. $(\vdash e_1 \triangleright_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_1 \triangleright e_2)$.

証明.

$$\frac{\overline{e_1 \triangleright_1 e_2} \quad \overline{e_2 \triangleright e_2}}{e_1 \triangleright e_2}$$

□

補題 1.8.2. 複数ステップの β -変形は推移的である. すなわち, $(\vdash e_1 \triangleright e_2) \rightarrow (\vdash e_2 \triangleright e_3) \rightarrow (\vdash e_1 \triangleright e_3)$.

証明. $e_1 \triangleright e_2$ に至る証明図を Π とし, Π の長さに関する帰納法で証明する.

- $\text{length}(\Pi) = 1$ の場合. $e_1 \triangleright e_3$ に至る証明図は

$$\frac{\overline{e_1 \triangleright e_1} \quad \frac{\Pi_1 \ \dots \ \Pi_n}{e_1 \triangleright e_3}}{e_1 \triangleright e_3}$$

という形をしているから, Π はいわば“むだな”証明図なので, 単にはぶけば

$$\frac{\Pi_1 \ \dots \ \Pi_n}{e_1 \triangleright e_3}$$

と变形できるからよい.

- $\text{length}(\Pi) = k + 1$ の場合. $e_1 \triangleright e_3$ に至る証明図は

$$\frac{\frac{\Pi_1 \ \Pi_2}{e_1 \triangleright e_2} \quad \frac{\Pi_3 \ \dots \ \Pi_{n+2}}{e_2 \triangleright e_3}}{e_1 \triangleright e_3}$$

という形をしていて, Π_1 の結論は $e_1 \triangleright_1 e_4$ で, Π_2 の結論は $e_4 \triangleright e_2$ である. 帰納法の仮定により $(\vdash e_4 \triangleright e_2) \rightarrow (\vdash e_2 \triangleright e_3) \rightarrow (\vdash e_4 \triangleright e_3)$ だから, $e_1 \triangleright e_3$ に至る証明図は

$$\frac{\Pi_1 \quad \frac{\Pi_2 \quad \frac{\Pi_3 \ \dots \ \Pi_{n+2}}{e_2 \triangleright e_3}}{e_4 \triangleright e_3}}{e_1 \triangleright e_3}$$

と变形できるからよい.

□

補題 1.8.2 により, $\vdash e_1 \triangleright e_2$ かつ $\vdash e_2 \triangleright e_3$ ならば

$$\frac{e_1 \triangleright e_2 \quad e_2 \triangleright e_3}{e_1 \triangleright e_3}$$

という推論規則を β -変形の体系に加えても, 証明できる式が増えないことがわかります. このような推論規則を許容規則 (*admissible rule*) といいます. このような許容規則は, β -変形の推論規則のみを使って直接導

くことはできません。先の証明では証明図自体の変形をともなっています。いわば Lisp のマクロのようなメタプログラミングによる証明をしているわけです。推論規則のみを使って直接に導ける推論規則は派生規則 (*derivable rule*) といいます。より一般には

$$A_1, \dots, A_n \vdash B$$

のとき

$$\frac{A_1 \quad \dots \quad A_n}{B}$$

を派生規則といい、

$$(\vdash A_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\vdash A_n) \rightarrow (\vdash B)$$

のとき

$$\frac{A_1 \quad \dots \quad A_n}{B}$$

を許容規則といいます。派生規則ならば許容規則です。先に述べたように派生規則や許容規則を体系に加えても証明できる式は増えませんので、体系の性質を壊さずに短く書けるようになります。

§1.9. 並行簡約

定義 1.9.1. 並行簡約の式 (*expression*)

e_1, e_2 が項ならば $e_1 \sqsupseteq_1 e_2$ と $e_1 \sqsupset e_2$ を並行簡約の式 (*expression*) と呼ぶ。

定義 1.9.2. 1 ステップの並行簡約 (*parallel reduction*)

$$\begin{array}{c} \overline{x_1 \sqsupseteq_1 x_1} \\ \overline{\begin{array}{c} e_1 \sqsupseteq_1 e_2 \quad e_3 \sqsupseteq_1 e_4 \\ (e_1 e_3) \sqsupseteq_1 (e_2 e_4) \end{array}} \\ \overline{\begin{array}{c} e_1 \sqsupseteq_1 e_2 \\ (\lambda x_1 e_1) \sqsupseteq_1 (\lambda x_1 e_2) \end{array}} \\ \overline{\begin{array}{c} e_1 \sqsupseteq_1 e_2 \quad e_3 \sqsupseteq_1 e_4 \\ ((\lambda x_1 e_1) e_3) \sqsupset [e_4/x_1] e_2 \end{array}} \end{array}$$

定義 1.9.3. 複数ステップの並行簡約

$$\overline{\begin{array}{c} \overline{e_1 \sqsupset e_1} \\ \overline{\begin{array}{c} e_1 \sqsupset_1 e_2 \quad e_2 \sqsupset_1 e_3 \\ e_1 \sqsupset e_3 \end{array}} \end{array}}$$

補題 1.9.1. $(\vdash e_1 \sqsupseteq_1 e_1)$.

証明. e_1 の定義による帰納法で証明する。

- $e_1 = x_1$ の場合.

$$\overline{x_1 \sqsupseteq_1 x_1}$$

- $e_1 = (e_2 e_3)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$\frac{\begin{array}{c} (\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_2) \\ (\vdash e_3 \sqsupseteq_1 e_3) \end{array}}{\frac{e_2 \sqsupseteq_1 e_2 \quad e_3 \sqsupseteq_1 e_3}{(e_2 e_3) \sqsupseteq_1 (e_2 e_3)}}$$

- $e_1 = (\lambda x_1 e_2)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$\frac{(\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_2)}{\frac{\overline{e_2 \sqsupseteq_1 e_2}}{(\lambda x_1 e_2) \sqsupseteq_1 (\lambda x_1 e_2)}}$$

□

補題 1.9.2. $(\vdash e_1 \sqsupseteq_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_1 \sqsupseteq e_2)$.

証明.

$$\frac{\overline{e_1 \sqsupseteq_1 e_2} \quad \overline{e_2 \sqsupseteq e_2}}{e_1 \sqsupseteq e_2}$$

□

補題 1.9.3. 複数ステップの並行簡約は推移的である. すなわち, $(\vdash e_1 \sqsupseteq e_2) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq e_3) \rightarrow (\vdash e_1 \sqsupseteq e_3)$.

証明. $e_1 \sqsupseteq e_2$ に至る証明図を Π とし, Π の長さに関する帰納法で証明する.

- $\text{length}(\Pi) = 1$ の場合. $e_1 \sqsupseteq e_3$ に至る証明図は

$$\frac{\overline{e_1 \sqsupseteq e_1} \quad \frac{\Pi_1 \dots \Pi_n}{e_1 \sqsupseteq e_3}}{e_1 \sqsupseteq e_3}$$

という形をしているから, Π はいわば“むだな”証明図なので, 単にはぶけば

$$\frac{\Pi_1 \dots \Pi_n}{e_1 \sqsupseteq e_3}$$

と変形できるからよい.

- $\text{length}(\Pi) = k + 1$ の場合. $e_1 \sqsupseteq e_3$ に至る証明図は

$$\frac{\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{e_1 \sqsupseteq e_2} \quad \frac{\Pi_3 \dots \Pi_{n+2}}{e_2 \sqsupseteq e_3}}{e_1 \sqsupseteq e_3}$$

という形をしていて, Π_1 の結論は $e_1 \triangleright_1 e_4$ で, Π_2 の結論は $e_4 \triangleright e_2$ である. 帰納法の仮定により $(\vdash e_4 \sqsupseteq e_2) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq e_3) \rightarrow (\vdash e_4 \sqsupseteq e_3)$ だから, $e_1 \sqsupseteq e_3$ に至る証明図は

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\frac{\Pi_2}{\frac{\Pi_3 \dots \Pi_{n+2}}{e_2 \sqsupseteq e_3}}}{e_4 \sqsupseteq e_3}}{e_1 \sqsupseteq e_3}$$

と変形できるからよい.

□

§1.10. 合流性定理

定義 1.10.1.

$$e_1^* := \begin{cases} e_1 & e_1 = x_1 \\ (e_2 * e_3^*) & e_1 = (e_2 e_3) \wedge e_2 \neq (\lambda x e_4) \\ (\lambda x e_2^*) & e_1 = (\lambda x e_2) \\ ([e_3^*/x] e_2^*) & e_1 = ((\lambda x e_2) e_3) \end{cases}$$

補題 1.10.1. $\forall e_1 \forall e_2 ((\vdash e_1 \sqsupseteq_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_1^*))$

証明. e_1 を固定し, e_1 の長さに関する帰納法で証明する.

- $\text{length}(e_1) = 1$ の場合.

- $e_1 = x_1$ の場合. $e_1 \sqsupseteq_1 e_2$ の証明図は

$$\overline{x_1 \sqsupseteq_1 x_1}$$

という形をしている. したがって, $e_2 \sqsupseteq_1 e_1^*$ に至る証明図は

$$\overline{x_1 \sqsupseteq_1 x_1^*}$$

となるからよい.

- $\text{length}(e_1) = k + 1$ の場合.

- $e_1 = (e_3 e_4)$ かつ $e_3 = (\lambda x_1 e_5)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$\begin{aligned} \forall e_2 ((\vdash e_3 \sqsupseteq_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_3^*)) \\ \forall e_2 ((\vdash e_4 \sqsupseteq_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_4^*)) \end{aligned}$$

* $e_1 \sqsupseteq_1 e_2$ に至る証明図が

$$\frac{\Pi_1 \dots \Pi_n \quad \Pi_{n+1} \dots \Pi_{n+m}}{\frac{e_4 \sqsupseteq_1 e_6}{e_5 \sqsupseteq_1 e_7}} \quad \frac{((\lambda x_1 e_5) e_4) \sqsupseteq_1 [e_6/x_1] e_7}{}$$

という形をしている場合. $e_2 \sqsupseteq_1 e_1^*$ に至る証明図は

$$\frac{\Pi_1 \dots \Pi_n \quad \Pi_{n+1} \dots \Pi_{n+m}}{\frac{\frac{e_4 \sqsupseteq_1 e_6}{e_6 \sqsupseteq_1 e_4^*}}{\frac{[e_6/x_1] e_7 \sqsupseteq_1 [e_4^*/x_1] e_5^*}{e_5 e_7}}} \quad \frac{\frac{e_5 e_7}{e_7 \sqsupseteq_1 e_5^*}}{}$$

となるからよい.

* その他の場合は $e_3 \neq (\lambda x_1 e_5)$ の場合とまったく同様.

- $e_1 = (e_3 e_4)$ かつ $e_3 \neq (\lambda x_1 e_5)$ の場合. 帰納法の仮定:

$$\begin{aligned} \forall e_2 ((\vdash e_3 \sqsupseteq_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_3^*)) \\ \forall e_2 ((\vdash e_4 \sqsupseteq_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_4^*)) \end{aligned}$$

$e_1 \sqsupseteq_1 e_2$ に至る証明図は

$$\frac{\Pi_1 \dots \Pi_n \quad \Pi_{n+1} \dots \Pi_{n+m}}{\frac{e_3 \sqsupseteq_1 e_5}{e_4 \sqsupseteq_1 e_6}} \quad \frac{(\lambda x_1 e_5) \sqsupseteq_1 (\lambda x_1 e_6)}{(e_3 e_4) \sqsupseteq_1 (e_5 e_6)}$$

という形をしている。したがって、 $e_2 \sqsupseteq_1 e_1^*$ に至る証明図は

$$\frac{\begin{array}{c} \Pi_1 \cdots \Pi_n \\ \hline e_3 \sqsupseteq_1 e_5 \end{array}}{e_5 \sqsupseteq_1 e_3^*} \quad \frac{\begin{array}{c} \Pi_{n+1} \cdots \Pi_{n+m} \\ \hline e_4 \sqsupseteq_1 e_6 \\ e_6 \sqsupseteq_1 e_4^* \end{array}}{(e_5 e_6) \sqsupseteq_1 (e_3^* e_4^*)}$$

となるからよい。

- $e_1 = (\lambda x_1 e_3)$ の場合。帰納法の仮定：

$$\forall e_2 ((\vdash e_3 \sqsupseteq_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_3^*))$$

$e_1 \sqsupseteq_1 e_2$ に至る証明図は

$$\frac{\Pi_1 \cdots \Pi_n}{\frac{e_3 \sqsupseteq_1 e_4}{(\lambda x_1 e_3) \sqsupseteq_1 (\lambda x_1 e_4)}}$$

という形をしている。したがって、 $e_2 \sqsupseteq_1 e_1^*$ に至る証明図は

$$\frac{\begin{array}{c} \Pi_1 \cdots \Pi_n \\ \hline e_3 \sqsupseteq_1 e_4 \\ e_4 \sqsupseteq_1 e_3^* \end{array}}{(\lambda x_1 e_4) \sqsupseteq_1 (\lambda x_1 e_3^*)}$$

となるからよい。

□

補題 1.10.2. $\forall e_1 \forall e_2 \forall e_3 \exists e_4 ((\vdash e_1 \sqsupseteq_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_1 \sqsupseteq_1 e_3) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_4) \wedge (\vdash e_3 \sqsupseteq_1 e_4))$

証明. $e_1 \sqsupseteq_1 e_2$ と $e_1 \sqsupseteq_1 e_3$ にそれぞれ補題 1.10.1 を適用すれば、 $e_2 \sqsupseteq_1 e_1^*$ かつ $e_3 \sqsupseteq_1 e_1^*$ となる。□

補題 1.10.3. $\forall e_1 \forall e_2 \forall e_3 \exists e_4 ((\vdash e_1 \sqsupseteq_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_1 \sqsupseteq_1 e_3) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_4) \wedge (\vdash e_3 \sqsupseteq_1 e_4))$

証明. $e_1 \sqsupseteq_1 e_2, e_1 \sqsupseteq_1 e_3$ に至る証明図をそれぞれ Π_1, Π_2 とし、 Π_1 の長さに関する帰納法で証明する。

- $\text{length}(\Pi_1) = 1$ の場合. Π_1 は

$$\overline{e_1 \sqsupseteq_1 e_1}$$

という形をしている。この場合は e_3 が存在するのでよい。

- $\text{length}(\Pi_1) = k + 1$ の場合. Π_1 は

$$\frac{e_1 \sqsupseteq_1 e_5 \quad e_5 \sqsupseteq_1 e_2}{e_1 \sqsupseteq_1 e_2}$$

という形をしている。帰納法の仮定：

$$\forall e_3 \exists e_4 ((\vdash e_5 \sqsupseteq_1 e_2) \rightarrow (\vdash e_5 \sqsupseteq_1 e_3) \rightarrow (\vdash e_2 \sqsupseteq_1 e_4) \wedge (\vdash e_3 \sqsupseteq_1 e_4))$$

補題 1.10.2 により $e_5 \sqsupseteq_1 e_6$ かつ $e_3 \sqsupseteq_1 e_6$ となるような e_6 が存在する。補題 1.9.2 により $e_5 \sqsupseteq_1 e_2$ かつ $e_5 \sqsupseteq_1 e_6$ だから帰納法の仮定により $e_2 \sqsupseteq_1 e_7$ かつ $e_6 \sqsupseteq_1 e_7$ となるような e_7 が存在する。 $e_3 \sqsupseteq_1 e_6$ かつ $e_6 \sqsupseteq_1 e_7$ だから補題 1.9.3 により $e_3 \sqsupseteq_1 e_7$ 。ゆえに $e_2 \sqsupseteq_1 e_7$ かつ $e_3 \sqsupseteq_1 e_7$ となるような e_7 が存在する。

□

補題 1.10.3 で複数ステップの並行簡約の合流性を示しました。肝心の β -変形の合流性の証明は、複数ステップの β -変形の体系が複数ステップの並行簡約と同値であることを示すことでおこないます。そこで β -変形の合流性の証明のために、まず、つぎの補題を示します：

補題 1.10.4. すべての 1 ステップの β -変形の証明図 $e_1 \triangleright_1 e_2$ には、それと等価な 1 ステップの並行簡約の証明図 $e_1 \sqsupset_1 e_2$ が存在する。

証明. $e_1 \triangleright_1 e_2$ に至る証明図を Π とし、 Π の長さに関する帰納法で証明する。

- $\text{length}(\Pi) = 1$ の場合. Π で最後に使われた推論規則は

$$\overline{((\lambda x_1 e_1) e_2) \triangleright_1 [e_1/x_1] e_2}$$

という形をしているから、これと等価な並行簡約の推論規則は

$$\frac{e_1 \sqsupset_1 e_1 \quad e_2 \sqsupset_1 e_2}{((\lambda x_1 e_1) e_2) \sqsupset_1 [e_1/x_1] e_2}$$

となるからよい。

- $\text{length}(\Pi) = k + 1$ の場合.

– Π で最後に使われた推論規則が

$$\frac{e_1 \triangleright_1 e_2}{(e_1 e_3) \triangleright_1 (e_2 e_3)}$$

という形をしている場合. これと等価な並行簡約の推論規則は

$$\frac{e_1 \sqsupset_1 e_2 \quad e_3 \sqsupset_1 e_3}{(e_1 e_3) \sqsupset_1 (e_2 e_3)}$$

となるからよい。

– Π で最後に使われた推論規則が

$$\frac{e_1 \triangleright_1 e_2}{(e_3 e_1) \triangleright_1 (e_3 e_2)}$$

という形をしている場合. これと等価な並行簡約の推論規則は

$$\frac{e_3 \sqsupset_1 e_3 \quad e_1 \sqsupset_1 e_2}{(e_3 e_1) \sqsupset_1 (e_3 e_2)}$$

となるからよい。

– Π で最後に使われた推論規則が

$$\frac{e_1 \triangleright_1 e_2}{(\lambda x_1 e_1) \triangleright_1 (\lambda x_1 e_2)}$$

という形をしている場合. これと等価な並行簡約の推論規則は

$$\frac{e_1 \sqsupset_1 e_2}{(\lambda x_1 e_1) \sqsupset_1 (\lambda x_1 e_2)}$$

となるからよい。

□

補題 1.10.5. すべての複数ステップの β -変形の証明図 $e_1 \triangleright e_2$ には、それと等価な複数ステップの並行簡約の証明図 $e_1 \sqsupset e_2$ が存在する。

証明. $e_1 \triangleright e_2$ に至る証明図を Π とし、 Π の長さに関する帰納法で証明する。

- $\text{length}(\Pi) = 1$ の場合. Π で最後に使われた推論規則は

$$\overline{e_1 \triangleright e_1}$$

という形をしているから、これと等価な複数ステップの並行簡約の推論規則は

$$\overline{e_1 \sqsupset e_1}$$

となるからよい。

- $\text{length}(\Pi) = k + 1$ の場合. Π で最後に使われた推論規則は

$$\frac{e_1 \triangleright_1 e_2 \quad e_2 \triangleright e_3}{e_1 \triangleright e_3}$$

という形をしている。帰納法の仮定により $e_2 \triangleright e_3$ に至る推論図と等価な複数ステップの並行簡約の推論図が存在するし、補題 1.10.4 により $e_1 \triangleright_1 e_2$ に至る推論図と等価な 1 ステップの並行簡約の推論図が存在するから、これと等価な推論規則は

$$\frac{e_1 \sqsupset_1 e_2 \quad e_2 \sqsupset e_3}{e_1 \sqsupset e_3}$$

となるからよい。

□

補題 1.10.6. すべての 1 ステップの並行簡約の証明図 $e_1 \sqsupset_1 e_2$ には、それと等価な複数ステップの β -変形の証明図 $e_1 \triangleright e_2$ が存在する。

証明. $e_1 \sqsupset_1 e_2$ に至る証明図を Π とし、 Π の長さに関する帰納法で証明する。

- $\text{length}(\Pi) = 1$ の場合. Π で最後に使われた推論規則は

$$\overline{x_1 \sqsupset_1 x_1}$$

という形をしているから、これと等価な複数ステップの β -変形の推論図は

$$\overline{x_1 \triangleright x_1}$$

となるからよい。

- $\text{length}(\Pi) = k + 1$ の場合.

– Π で最後に使われた推論規則が

$$\frac{e_1 \sqsupset_1 e_2 \quad e_3 \sqsupset_1 e_4}{(e_1 e_3) \sqsupset_1 (e_2 e_4)}$$

という形をしている場合。これと等価な複数ステップの β -変形の推論図は

$$\frac{\frac{e_1 \triangleright_1 e_2}{(e_1 e_3) \triangleright_1 (e_2 e_3)} \quad \frac{e_3 \triangleright_1 e_4}{(e_2 e_3) \triangleright_1 (e_2 e_4)}}{(e_1 e_3) \triangleright (e_2 e_4)}$$

となるからよい。

- Π で最後に使われた推論規則が

$$\frac{e_1 \sqsupseteq_1 e_2}{(\lambda x_1 e_1) \sqsupseteq_1 (\lambda x_1 e_2)}$$

という形をしている場合. これと等価な複数ステップの β -変形の推論図は

$$\frac{e_1 \triangleright_1 e_2}{(\lambda x_1 e_1) \triangleright_1 (\lambda x_1 e_2)}$$

となるからよい.

- Π で最後に使われた推論規則が

$$\frac{e_1 \sqsupseteq_1 e_2 \quad e_3 \sqsupseteq_1 e_4}{((\lambda x_1 e_1) e_3) \sqsupseteq [e_2/x_1] e_4}$$

という形をしている場合. これと等価な複数ステップの β -変形の推論図は

$$\frac{\frac{e_1 \triangleright_1 e_2}{(\lambda x_1 e_1) \triangleright_1 (\lambda x_1 e_2)} \quad \frac{e_3 \triangleright_1 e_4}{((\lambda x_1 e_2) e_3) \triangleright_1 ((\lambda x_1 e_2) e_4)} \quad \Pi_1}{((\lambda x_1 e_1) e_3) \triangleright [e_2/x_1] e_4}$$

となるからよい. ただし

$$\Pi_1 = \frac{\frac{((\lambda x_1 e_2) e_4) \triangleright_1 [e_2/x_1] e_4}{((\lambda x_1 e_2) e_4) \triangleright [e_2/x_1] e_4} \quad \frac{[e_2/x_1] e_4 \triangleright [e_2/x_1] e_4}{((\lambda x_1 e_2) e_4) \triangleright [e_2/x_1] e_4}}{((\lambda x_1 e_1) e_3) \triangleright [e_2/x_1] e_4}$$

□

補題 1.10.7. すべての複数ステップの並行簡約の証明図 $e_1 \sqsupseteq e_2$ には, それと等価な複数ステップの β -変形の証明図 $e_1 \triangleright e_2$ が存在する.

証明. $e_1 \sqsupseteq e_2$ に至る証明図を Π とし, Π の長さに関する帰納法で証明する.

- $\text{length}(\Pi) = 1$ の場合. Π で最後に使われた推論規則は

$$\overline{e_1 \sqsupseteq e_1}$$

という形をしているから, これと等価な複数ステップの並行簡約の推論規則は

$$\overline{e_1 \triangleright e_1}$$

となるからよい.

- $\text{length}(\Pi) = k + 1$ の場合. Π で最後に使われた推論規則は

$$\frac{e_1 \sqsupseteq_1 e_2 \quad e_2 \sqsupseteq e_3}{e_1 \sqsupseteq e_3}$$

という形をしている. 帰納法の仮定により $e_2 \sqsupseteq e_3$ に至る推論図と等価な複数ステップの β -変形の推論図が存在するし, 補題 1.10.6 により $e_1 \sqsupseteq_1 e_2$ に至る推論図と等価な複数ステップの β -変形の推論図が存在する. さらに補題 1.8.2 により複数ステップの β -変形では推移律が成り立つから, これと等価な推論規則は

$$\frac{e_1 \triangleright e_2 \quad e_2 \triangleright e_3}{e_1 \triangleright e_3}$$

となるからよい.

□

補題 1.10.8. 複数ステップの β -変形と複数ステップの並行簡約は同値である.

証明. 補題 1.10.5, 補題 1.10.7 による. □

定理 1.10.1. $\forall e_1 \forall e_2 \forall e_3 \exists e_4 ((\vdash e_1 \triangleright e_2) \rightarrow (\vdash e_1 \triangleright e_3) \rightarrow (\vdash e_2 \triangleright e_4) \wedge (\vdash e_3 \triangleright e_4))$

証明. 補題 1.10.3, 補題 1.10.8 による. □

あとがき

Although you do not know that the bridge will fall if there are no contradictions, yet it is almost certain that if there are contradictions it will go wrong somewhere.