# 수학자들

저자: John von Neumann, 역자: 유병수, 원문 링크

April 17, 2021

지적 산물의 본질을 논하는 것은 어떤 분야에서든 어렵다. 심지어 수학처럼 인간의 공통된 지적인 노력의 중심으로부터 멀리 떨어져 있지 않더라도. 지적 노력의 본질을 논하는 것 역시 그 자체로, 특정한 지적인 노력을 기울이기보다 어렵다. 비행기의 메커니즘, 그리고 그것을 들어 올리고 그것을 추진하는 힘에 대한 이론들을 이해하는 것은 단순히 비행기를 타는 것이나, 심지어 조종하는 것보다 어렵다. 어떤 절차를, 그것을 실행하고 사용하면서 얻게 되는 경험적이고 본능적인 동화에 따른 익숙함 없이 이해하는 것을 매우 예외적인 일이다.

따라서 어떤 분야에서든, 지적 노력의 본질에 대한 어떠한 논의도, 그 분야에 대해 쉽고 일상적인 친숙함을 전제하지 않는 한 어렵다. 수학에서 이런 제약들은, 논의가 비 수학적인 장에서 유지될 때 매우 심각해진다. 그런 논의들은 반드시 다음 몇 가지의 몹시 나쁜 특징들을 보여준다. 논의에서 다뤄진 논점들을 문서화 할 수 없거나 전반적인 논의 자체가 피상적이거나.

나 역시 내가 앞으로 말할 것들에 생길 이런 단점들을 매우 잘 알고 있기에, 말하기 전에 미리 사과드리고자 한다. 게다가, 내가 말하고자 하는 관점은 아마도 다른 많은 수학자들이 전적으로 동의하지 않을 수 있다. 당신은, 내 글에서 어떤 사람의 그다지 체계화되지 인상들과 해석들만을 보게 될 것이다. 게다가, 지적 노력의 본질에 관한 논의의 요점을 이해하는 데에 있어 내가 당신에게 줄 수 있는 도움은 매우 작을 것이다.

그러나 이러한 모든 장애에도 불구하고, 나는 수학에서 지적 노력의 본질에 대해 여러분에게 말하고 시도하는 것이 흥미롭고 도전적인 과제라는 것을 인정해야 할 것이다. 단지 내가 너무 많이 실패하지 않기를 바랄 뿐이다.

내 생각에는, 수학에 대한 가장 중요한 특징적인 사실은 수학이 자연과학, 일반적으로 순수한 기술(記述) 이상으로 경험을 해석하는 어떤 과학과도 상당히 독특한 관계에 있다는 것이다.

대부분의 사람은, 수학자건 아니건, 수학은 경험적 과학이 아니고, 최소한 경험적 과학과 몇 가지 결정적으로 다른 방식으로 행해진다는 것에 동의할 것이다. 그런데도, 수학의 발전은 자연과학과 매우 밀접하게 연관되어 있다. 주요 분야 중 하나인 기하학은 사실 자연과학이자 경험 과학으로 출발했다. 내 생각에, 현대 수학의 가장 좋은 영감 중 일부는 분명히 자연과학에서 비롯되었다고 생각한다. 수학의 방법론들은 "이론적" 측면의 자연과학에 널리 스며들어서 이를 지배하고 있다. 현대의

경험 과학이 수학적 방법 혹은 수학에 가까운 물리학적 방법을 이용할 수 있는지는 점점 더 성공의 주요 기준이 되었다. 실제로, 자연과학 전반에 걸쳐서, 성공적으로 끊기지 않고 이어져 온 환골탈태 (pseudomorphoses)의 순간들은 모두 수학을 향해 달려갔고, 그럴 때마다 과학의 진보와 동일시되었다는 것은 명백하다. 생물학에는 화학과 물리학이, 화학에는 실험 물리학과 이론 물리학이, 물리학에는 매우 수학적인 형태의 이론 물리학이 점점 더 많이 스며들어왔다.

수학의 본질에는 상당히 독특한 이중성이 있다. 누군가는 이 이중성을 깨달아야 하고, 그것을 받아들여야 하며, 그것을 지적 산물의 본질에 대한 자기 생각에 동화시켜야 한다. 이는 수학 자체의 양면이어서, 이를 무시하는 어떤 종류의 단순화되고 일원화된 관점은 수학의 본질적인 부분을 생략하게 된다고 생각한다.

그러므로 나는 당신에게 일원화된 관점을 제시하려 하지 않을 것이다. 대신, 나는 수학이라 불리는 다양한 현상들을 최대한 묘사하려고 노력할 것이다.

수학에서 가장 좋은 영감 중 일부는 – 상상가능한 가장 순수한 수학에서 나온 것 역시– 자연과학에서 나왔다는 것은 부인할 수 없는 사실이다. 여기서 가장 기념비적인 사실 두 가지를 언급할 것이다.

그 첫 번째 예는, 당연하게도, 기하학이다. 기하학은 고대 수학의 주요 부분이었다. 여전히 현대 수학에서도, 기하학이 이룬 여러 성과들과 함께, 주요 부문 중 하나를 차지하고 있다. 고대에, 기하학의 기원이 경험적이라는 것과 그것이 오늘날의 이론물리학과 다르지 않은 학문으로서 시작되었다는 것에는 의심의 여지가 없다. 다른 모든 증거와는 별개로, 바로 "기하학"이라는 이름이 그걸 보여준다. 유클리드의 공리적 접근은 경험주의로부터의 큰 도약을 보여주긴 하나, 그 도약이 결정적이면서 동시에 최종적으로 경험주의에서 벗어나서, 경험주의와의 절대적으로 분리되었다고 옹호하는 것은 절대로 단순하지 않다. 유클리드의 공리화가 절대적인 공리적 엄정함에 대한 현대적인 기준을 충족하지 못한다는 게 문제라는 것은 아니다. 그보다 더 필수적인 부분은 다음과 같다; 역학(mechanics)이나 열역학 같은, 의심할 여지 없이 경험적인 다른 학문도 대개 다소 공리적인 논의를 통해 다뤄지는데, 이는 (몇몇 저자들의 경우엔 확실히) 유클리드의 (역주: 그가 기하학에 대해 취한) 방법과 거의 구분할 수 없다. 우리 시대 이론 물리학의 고전인, 뉴턴의 프린키피아는, 문헌적인 형식뿐 아니라, 가장 중요한 부분의 본질적 측면에서 유클리드와 매우 유사하다. 물론, 이 모든 사례에서, 이런 공리적 논의를 뒷받침하는 물리학적 통찰과 실험을 통한 검증이 항상 논의 뒤에 존재했다. 그러나, 고대의 관점에서 본다면 유클리드의 기하학 역시, 현재 2천 년의 안정성과 권위를 획득하기 이전에는, 물리학과 비슷하게 (역주: 현대 물리학처럼 경험적 통찰과 실험을 통한 검증이 있었다고) 다뤄졌다고 주장할 수 있다. 이런 권위는 확실히 현대적 체계의 이론물리학이 결여하고 있는 어떤 것이다.

게다가 유클리드 이후 기하학은 경험주의로부터 점점 멀어졌지만, 심지어 지금 시점에서 봐도 경험주의로부터 완전하게 떨어져 나오지는 못했다. 비유클리드 기하학에 대한 논의는 이에 대한 좋은 예시를 제공한다. 그것은 또한 수학적 사상의 양면성을 보여준다. 대부분의 토론이 매우 추상적인 평면에서 이루어졌기 때문에, 비유클리드 기하학에 대한 논의는 유클리드의 "평행선 공준"이 다른 공준에서 도출되는 명제인지 아닌지와 같은 순전히 논리적인 문제를 다루었다. 평행선 공준에 대한 공식적인 논쟁은 펠릭스 클라인(Klein)의 순수 수학적인 예제에 의해 종결되었다. 그 예제는, 기본

적인 개념들을 형식적으로 재정의함으로서, 각각 유클리드 평면의 조각들이 어떻게 비유클리드적 평면을 만드는지 보여주었다. 그런데도, 이 논쟁에서 경험적인 자극은 시작부터 끝까지 함께 했다. 유클리드의 모든 공준 중 평행선 공준에 의문을 품게 된 가장 중요한 이유는, 오직 평행선 공준에서만 무한 평면이라는 비 경험적인 특성이 개입했기 때문이다. 가장 위대한 수학자인 가우스의 마음속에서는, 이 모든 수리-논리적 분석들에도 불구하고, 유클리드의 공준에 대한 찬반 결정은 최소한 경험적인 논거가 하나는 있어야 한다는 생각이 있던 것으로 보인다. 그리고, 보여이(Bolyai), 로바쳅스키(Lobachevsky), 리만(Riemann), 그리고 클라인(Klein)이 더 추상적인 결과들을 얻어내고 나서도, 경험은 - 이젠 물리학이라 불러야겠지만 - 그런데도 우리가 현재 이 논쟁을 종결하며 얻게 된 형식적인 결과에 대해 최종 결정권을 가지게 되었다. 일반 상대성 이론의 발견은 기하학들 간의 관계에 관한 우리의 관점을, 순수 수학이 더 강조된 완전히 새로운 환경에 적응하도록 만들었다. 마지막으로, 이와 (역주: 비유클리드 기하학의 발전이 물리학의 지지를 받는 것과) 대조적인 그림 역시 동시에 완성되고 있었다. 사실 이 마지막 발전(역주: 비유클리드 기하학과 일반 상대성 이론)은, 현대의 공리-논리적 수학자들이 유클리드의 공리적 방법을 추상화하고 따라서 경험주의로부터 탈피가 완성되었음을 목격한 세대 안에서 동시에 일어났다. 이처럼, 두 가지 상반되는 것처럼 보이는 태도들은 수학적 사고방식에서 완벽하게 호환된다. 그래서 힐버트는 공리적 기하학과 일반상대성 이론 모두에 중요한 기여할 수 있었다.

두 번째 예는 미적분학, 혹은 그것에서 나온 해석학 전체이다. 미적분은 현대 수학의 첫 번째 업적으로서, 그 중요성을 과대평가하기 어렵다. 나는 미적분이 현대 수학의 시작을 다른 무엇보다도 분명하게 정의한다고 생각한다. 또한, 해석학 역시 미적분으로부터 시작했는데, 이는 해석학이 미적분의 논리적인 발전형이고, 분석적 사고(exact thinking) 안에서 가장 큰 기술적 진보를 담당하고 있기 때문이다.

미적분의 기원은 분명히 경험적이다. 케플러의 첫 통합 시도는 “돌리코메트리(dolichometry)” 즉, 케그(역주:맥주 담는 술통)와 같은 표면이 구부러진 원통형을 이루는 물체의 부피 측정으로부터 공식화되었다. 이것은 기하학이지만, 유클리드 이후의 기하학이며, 당시의 시대적 배경 안에서는, 비-공리적이고, 경험적인 기하학이다. 물론 케플러 역시 이를 완전히 알고 있었다. (역주:기하학의) 명백한 물리적 기원이야말로, 뉴턴과 라이프니츠의 가장 주요한 발견이자 그들이 중요하게 노력해 왔던 것이었다. 뉴턴은, 사실 역학적 목적을 달성하기 위해 “유동의 미적분”을 발명했다. 사실, 미적분과 역학은 뉴턴에 의해 함께 개발되었다. 미적분의 첫 번째 공식은 사실 수학적으로 엄정하지(rigorous) 않았다. 뉴턴 이후 150년간, 부정확하고, 반만 물리적인 공식만이 (역주: 미적분에서) 이용 가능한 공식의 전부였다. 그런데도, 해석학의 가장 중요한 발전 중 일부는, 부정확하고 수학적으로 부적절한 배경을 가진 이 기간에 일어났다! 당시의 선도적인 수학적 정신들은, 오일러처럼, 엄정하지 않았다(Not rigorous). 물론 가우스나 야코비처럼, 그 반대편에 있는 (역주: 엄정한 수학을 따르는) 사람들도 있었지만. 수학적 발전은 가능한 한 혼란스럽고 모호했으며, 그들이 가졌던 경험주의와의 연관성은 (평행선 공준 사례에서 보았던 것처럼) 추상화와 수학적 엄정함으로부터 나온 것은 아니었다. 그렇지만 어떤 수학자도 그 기간을 최상의 수학적 발전이 있던 시대들 가운데서 제외하고 싶지 않을 것이다! 그 뒤 수학적 엄정함의 지배가 코시(Cauchy)에 의해 다시 확립된 뒤에도, 반 정도는 경험주의적인(semi-physical) 수학을 하려는 시도가 다시 한번 리만(Riemann)에 의해 일어났다. 리만의 과학자로서의 성정은, 바이

어슈트라스와의 논쟁에서 보여준 것처럼, 그 자체로 수학의 이중적인 본성을 보여주는 가장 빛나는 예제일 것이나, 이를 구체적으로 설명하기 위해선 너무 많은 기술적인 이야기들을 해야 하기에 이 지면에서는 생략할 것이다. 바이어슈트라스 이후, 해석학은 완전히 추상적이고, 엄정하며, 비 경험주의적인 학문이 된 것처럼 보였다. 그렇지만, 이런 견해가 무한정 옳다고 보기는 힘들다. 지난 두 세대 동안 벌어진 수학과 논리학의 "기초(foundation)"에 대한 논란은 이 (역주:수학적 엄정성과 비 경험주의적 토대)에 대한 많은 환상을 불식시켰다.

이런 견해는, 수학적 본성의 양면성에 관한 세 번째 예제를 불러들인다. 하지만 이 예제는, 자연과학보다는 철학이나 인식론과 수학의 관계를 다룬다. 이 예제는, "절대적인" 수학적 엄격성이라는 것이 변할 수도 있다는 것을 매우 충격적인 방식으로 보여준다. 수학적 엄정성(rigor)이 변할 수 있다는 사실은 수학적 구성물에 (수학적) 추상화 이외의 어떤 다른 추가적 요소가 필요하다는 것을 보여준다. "기초"에 대한 논란을 분석하면서, 나는 그 논란의 결론이 이 추가적 요소가 경험주의적인 본성을 가지고 있음을 지지한다는 점을 나 자신에게 납득시키기 어려웠다. 그런 해석은, 적어도 논의의 일부 단계에서는 상당히 강하게 받아들여졌다. 그러나, 나는 그것이 절대적으로 타당하다고 생각하지 않는다. 다만 두 가지는 분명하다. 첫째로, 비수학적이고, 경험 과학이나 철학 혹은 둘 다와 관련 있는 무언가가 수학 안에 본질적으로 들어와 있다는 것이다. 특히 그 무언가의 비-경험주의적 성질은, 철학(특히 인식론)이 경험과 독립적으로 존재한다고 가정했을 때에야 비로소 유지가 가능하다. (다만 나는 이 독립성에 대한 가정이 그 비-경험주의적 성질을 불러온다고 생각하지는 않는다) 둘째로, 수학의 경험적 기원은, "기초"에 대한 논쟁에 대한 최선의 해석이 무엇인지와 관계없이, 우리의 앞선 두 가지 예(기하학과 미적분학)와 같은 예에 의해 강하게 뒷받침된다는 것이다.

수학적 엄정함이 변할 수 있다는 사실을 분석하는 데 있어서, 나는 위에서 언급한 것처럼 "기초" 논란에 주안점을 두고 싶다. 그러나 나는 우선 이 문제의 부차적인 측면을 간단하게 고려하고 싶다. 이 측면도 내 주장을 강화하기는 하지만, 아마도 "기초" 논란에 대한 분석보다는 덜 단정적이기 때문에, 나는 그것을 부차적인 것으로 생각한다. 바로 수학적 "스타일"의 변화이다. 수학적 증명을 쓰는 스타일은 상당한 변동을 겪었다는 것은 잘 알려진 사실이다. 어떤 면에서는 18세기나 19세기의 현재 작가와 특정 작가 사이의 차이가 현재와 유클리드의 차이보다 더 크기 때문에, 변화의 추세보다는 변화 그 자체에 대해 말하는 것이 더 낫다. 반면에, 다른 면에서는 주목할 만한 항상성이 있었다. 변화를 인식할 수 있는 분야에서는, 그런 차이들은 주로 표현의 차이점으로서, 새로운 아이디어와 관계없이 없어질 수 있는 것이다. 그러나, 많은 경우에서 이러한 차이는 너무 커서, 사람들은 그렇게 다른 방식으로 "자신의 사례를 제시하는" 저자들이 스타일, 취향, 교육의 차이만으로 분리될 수 있었는지, 즉 정말로 그들 각각이 수학적 엄정함에 대해서 공유하는 생각을 가질 수 있었는지 의심하기 시작했다. 마지막으로, 극단적인 경우(예: 18세기 후반, 위에서 언급한 해석학과 같이)에는 차이가 필수적이며, 서로 간의 수학적 표현의 차이를 해소하는 데에는 최대 100년에 걸쳐 새롭고 심오한 이론의 발전을 통한 도움을 받아야만 했던 경우도 있다. 엄정하지 않은 방법으로 일했던 수학자들 중 일부 (및 그들의 비-엄정함을 비판했던 동시대인들은) 자신들의 수학적 엄정함이 부족하다는 것을 잘 알고 있었다. 또는 좀 더 객관적으로 말해서, 수학적 절차가 어떻게 구성되어야 하는지에 관한 그들 자신의 욕망은 그들 자신의 행동보다는 우리의 현재 관점에 더 부합했다. 그러나 그 시대의 가장 위대한 거장인 오일러와 같은 다른 사람들은 완벽히 선의를 가지고 행동했고 (역주: 덜 엄정한 수학을 했고) 그들 자신의

기준에 꽤 만족했던 것으로 보인다.

그러나 나는 이 엄정성 논란을 더 파고들고 싶지는 않다. 대신 “수학의 기초”에 대한 논란이라는, 모든 게 완벽하게 분명한 사례로 눈을 돌릴 것이다. 19세기 후반과 20세기 초반, 추상 수학의 새로운 분야인 칸토어(Cantor)의 집합론은 난관으로 이어졌다. 즉, 어떤 추론들은 모순을 초래했다; 그리고 이러한 추론들은 집합론의 중심적이고 “유용한” 부분은 아니었고, 어떤 형식적인 기준에 의해 항상 발견하긴 쉽긴 했으나, 그런데도 왜 그 모순을 초래하는 추론들이 이론의 “성공적인” 부분보다 덜-집합론적인 것으로 여겨져야 하는지가 명확하지 않았다. 사실 그 추론들이 수학적 재앙을 초래했다는 사후적인 통찰과는 별개로, 어떤 선험적인 동기 혹은 그 상황에 대한 일관된 철학을 통해서 집합론에서 그 문제가 되는 부분을 갈라놓을 수 있을지는 명확하지 않았다. 러셀(Russell)과 바일(Weyl)은 모순을 초래하는 추론이 지닐 장점을 더 자세히 연구했고, 브라우어(Brouwer)와 더불어 그 연구는 집합론뿐 아니라 대부분의 현대 수학에서, “일반적 타당성”(general validity)과 “존재성(existence)”을 사용하는 방식은 사실 철학적으로 정당화할 수 없음을(objectionable) 밝혀내었다. “직관주의”라는 이름 아래 이런 바람직하지 않은 특성들을 없앤 수학적 체계가 브라우어에 의해 개발되었다. 그 체계에서는, 집합론의 어려움과 모순이 일어나지 않았다. 그러나, 현대 수학의 바람직한 50%는, 특히 그 필수적인 부분과 당시로선 의심의 여지가 없던 부분까지, 이런 숙청(purge)의 대상에 속하게 되었다. 정확히는, 그 50%는 무효가 되거나, 매우 복잡하고 부차적인 사유를 통해서 정당화되어야만 했다. 설령 정당화를 한다고 해도, 그 과정에서 일반적인 타당성과 추론의 우아함을 잃어버리게 된다. 이런 희생에도 불구하고, 브라우어와 바일은 이를 필수적이라 생각해서, 수학적 엄정함이란 개념이 더 엄격하게 수정되어야 한다고 생각했다.

이 사건들의 중요성을 과대평가하는 것은 어렵다. 20세기 초반 30년간, 두 명의 수학자들 - 가장 빛나는 수학자들 중 둘이며, 수학이 무엇이며, 무엇을 위한 것이고, 무엇에 관한 것인지 가능한 한 깊고 온전하게 인식했던 수학자들은 – 수학적 엄정성의 개념, 특히 딱 들어맞는 증명을 구성하는 것들이 무엇인지에 대한 개념을 바꾸자고 주장했다! 물론 그들이 주장한 이후의 수학적 발전도 마찬가지로 주목할 가치가 있다.

1. 오직 극소수의 수학자들만이 그들의 일상 용도를 위해 직관주의의 새롭고 무리한 기준을 기꺼이 받아들였다. 하지만, 많은 사람은 바일과 브라우어가 일견 옳다는 것을 인정하면서도, 그들은 자신의 수학을 “쉬운” 방식으로 하기 위해서 바일과 브라우어가 제시한 수학적 엄정성을 잘 지키지 않았다. 그건 아마 다른 누군가가, 다른 때에, 직관주의라는 비판에 대한 답을 찾고, 그래서 그들을 사후적으로 정당화시킬 수 있기를 바라는 마음에서였을 거라 생각한다.

2. 힐베르트(Hilbert)는 “고전적” (즉, 전-직관주의적(pre-intuitionistic)) 수학을 정당화하기 위해 다음과 같은 기발한 아이디어를 내놓았다. 그에 따르면, 직관주의적 수학 체계에서도 고전적 수학의 구성물들이 어떻게 작동하는지에 대한 엄정한 설명을 할 수 있다. 다만, 그 구성물들이 정말 작동하는지(역주:세계 안에서 참인 명제들인지)를 정당화 할 수 없을 뿐이다. 따라서 고전적 수학 간에 모순 혹은 갈등이 존재할 수 없다는 것 자체는 직관주의 안에서도 분명히 가능할 것이다. 물론 그런 증명이 매우 어렵다는 것은 확실했으나, 어떻게 시도할 수 있을지에 대해서는 확실한 조짐이 있었다. 만약 이 계획이 효과가 있었다면, 그것은 (역주:고전적 수학의 엄정성을) 반대하는 직관주의적 체계 자체에

기초해 고전 수학의 가장 주목할 만한 정당성을 제공했을 것이다! 최소한, 이러한 해석은 대부분의 수학자가 기꺼이 받아들이려고 하는 수리철학의 세계에서는 정당했을 것이다.

3. 이 프로그램을 수행하기 위한 약 10년간의 노력 끝에 괴델(Gödel)은 가장 주목할 만한 결과를 만들어냈다. 이 결과는 너무 기술적이어서 이 지면에서 정확하게 기술하기는 어렵다. 하지만, 그것의 본질적인 중요성은 다음과 같다: 수학 체계가 모순으로 이어지지 않는다면, 이 사실은 그 수학 체계의 절차로 증명될 수 없다. 괴델의 증명은 가장 엄밀한 수학적 엄정성의 기준 - 직관주의적인 기준- 을 만족시켰다. 힐베르트의 프로그램에 대한 그의 영향력은 다소 논란의 여지가 있는데, 여전히 너무 기술적인 관계로 이 지면에는 기술하지 않겠다. 내 개인적인 의견은, 다른 많은 사람과도 공유하고 있기도 한데, 괴델이 힐버트의 프로그램이 본질적으로 절망적이라는 것을 보여줬다는 것이다.

4. 힐베르트, 브라우어나 바일의 관점에서 고전 수학의 정당화에 대한 주된 희망은 사라졌지만, 대부분의 수학자는 어쨌든 그 시스템을 사용하기로 했다. 어찌 됐든, 고전 수학은 우아하고 유용한 결과를 만들어 내고 있었고, 비록 다시는 그것의 신뢰성을 절대적으로 확신할 수는 없지만, 최소한, 예를 들어 전자(electron)의 존재처럼, 견고한 기초 위에 서 있었다. 그러므로, 만일 누군가가 과학을 기꺼이 받아들인다면, 수학의 고전적인 체계를 받아들이는 것이 나을 것이다. 이러한 견해는 심지어 몇몇 직관주의의 옹호자들에게서도 받아들여졌다. 현재 “기초”에 대한 논란은 확실히 종결되지 않았지만, 소수의 사람 외에는 고전적 수학을 버려야 할 가능성은 거의 없어 보인다.

나는 이 논쟁에 대한 이야기를 너무 자세하게 했다. 왜냐하면, 이 논쟁은 수학적 엄정성이 불변의 진리가 아님을 경고하는 가장 좋은 예제라고 생각하기 때문이다. 이것은 나 자신의 일생에서 일어났고, 나는 이 에피소드 동안, 부끄럽게도, 절대적인 수학적 진리에 대한 나 자신의 관점이 얼마나 쉽게 세 번이나 연속해서 변했는지 알고 있다!

나는 위의 세 가지 예들이 내 주장의 반 - 많은 경우 최고의 수학적 영감은 경험에서 나왔고, 모든 인간의 경험에서 분리된 절대적이고 불변의 수학적 엄정함의 개념을 믿는 것은 불가능하다는 - 을 충분히 잘 보여주기를 바란다. 나는 이 문제에 대해 매우 겸손한 태도를 취하려고 노력하고 있다. 당신의 철학적 혹은 인식론적 선호가 무엇이든 간에, 수학의 동료들이 실제로 겪은 경험은, 수학적 엄정성은 선험적으로 존재한다는 주장을 뒷받침하지 않는다. 그러나, 내 주장의 후반부 (역주: 수학의 다른 면)을 이제부터 설명하고자 한다.

수학자의 입장에서는, 수학이 순전히 경험적 과학이라고 믿거나 모든 수학적 사상이 경험적 과목에서 비롯된다고 믿는 것은 매우 어렵다. 이전 문장의 후자부터 고려해보자. 현대 수학의 여러 중요한 부분 중에는 경험적 기원을 추적할 수 없거나, 추적할 수 있더라도 너무 멀리 떨어져 있어서 그 부분이 경험적 뿌리에서 단절된 이후 완전하게 변화되었다는 것을 알 수 있다. (역주:초등) 대수학의 기호들은 수학자들 사이의 사용을 위해 발명되었지만, 물론 그것들이 경험적 유래를 가지고 있다고 주장하는 것 역시 가능하다. 그러나 현대 “추상” 대수학은 전보다 더 적은 수의 경험적 연결을 가지는 방향으로 발전한다. 위상수학 역시 마찬가지이다. 그리고 이 모든 분야에서 수학자의 주관적인 성공의 기준이자, 그가 들인 노력의 가치를 평가하는 기준은 매우 자기 만족적이고 미학적이며, 경험적 연결에서 벗어난다. (이 문제에 대해 뒤에서 더 자세히 말해보도록 하겠다) 집합론에서 이것은 여전히 더 명확하다. 무한 집합의 “멱집합”과 “순서(ordering)”는 유한한 숫자 개념의 일반화일 수 있지만,

무한 형태(특히 “멱집합”)에서는 현실 세계와 거의 관계가 없다. 만약 내가 기술적인 문제를 피하고 싶지 않다면, 나는 “선택공리”, “무한 집합의 멱집합의 비교 가능성”, “연속성 공리 문제” 등을 들어서 설명했을 것이나, 이 지면에서는 생략하도록 한다. 같은 논평이 실해석학(real function theory and real point-set theory)에도 적용된다. 두 이상한 예제들을 각각 미분 기하와 군론에서 가져올 수 있다. 그 예제들은 확실히 추상적이고, 비-응용적인 지침(disciplines) 아래에서 배양되고 또 인식되었다. 둘 중 한 예제는 10년쯤 뒤에, 다른 한 예제는 100년쯤 뒤에서야 물리학에서 그들을 유용하게 쓸 수 있었다. 그렇지만, 여전히 그 예제들은 대부분 추상적이고 비응용적인 마인드로 탐구되곤 한다.

이 모든 조건과 그들의 다양한 조합들은 매우 많지만, 난 다시 위에서 설명한 첫 번째 논점으로 전환하고 싶다. 수학은 경험적 과학인가? 또는 더욱 정확하게: 수학은 실제로 경험적 과학이 행해지는 방식으로 행해지는가? 또는 더 일반적으로: 수학자와 그가 속한 분야의 정상적인 관계는 무엇인가? 수학자들의 성공과 만족의 기준은 무엇인가? 어떤 영향과 어떤 고려사항들이 수학자들의 노력을 통제하고 이끌었을까?

먼저, 어떤 점에서 수학자가 일반적으로 일하는 방법이 자연과학의 작업 방식과 다른지 알아보자. 다른 과학들과 수학의 차이는, 이론적 과학에서 실험적인 과학으로, 또 실험적인 학문에서 서술적인 학문으로 넘어갈 때 더 커지곤 한다. 따라서 수학과 가장 가까운 범주, 즉 이론적인 학문을 비교해 보자. 그리고 수학에 가장 가까운 것을 고르자. 이 선택이 내가 수학적으로 오만하게 구는 것처럼 보이더라도, 나를 너무 심하게 대하진 않았으면 한다. 어쨌든, 그것은 모든 이론과학들 중에서 가장 발달하여 있기 때문이다. 바로 이론 물리학이다. 수학과 이론 물리학은 사실 공통점이 많다. 내가 이전에 지적했듯이, 유클리드의 기하학 체계는 고전역학의 공리적 표현의 원형이었고, 그와 유사한 해결책이 맥스웰의 전기역학과 특수상대성이론의 특정 단계뿐만 아니라 현상학적 열역학을 지배하고 있다.

게다가, 이론물리학이 현상을 설명하지 않고 단지 분류하고 상관관계를 갖는다는 태도는 오늘날 대부분의 이론물리학자에 의해 받아들여지고 있다. 따라서, 물리 이론의 성공 기준은, 단순하고 우아한 분류체계를 통해서 얼마나 많은 현상을 다룰 수 있는지 - 특히 이 체계가 없다면 얼마나 그들이 이질적이고 복잡한 것처럼 보일지- 및 심지어 그 체계가 그 당시에 고려되지 않았거나 심지어 알려지지 않았던 현상까지 포함할 수 있는지가 될 것이다. (물론 이 두 개의 후자의 진술은 이론의 통일성과 예측력을 나타낸다) 자, 이 기준은, 여기 제시된 바와 같이, 분명히, 미학적 본성이 드러나 있다. 이런 이유로 물리 이론의 성공 기준은, 거의 전적으로 미학적일 수학적 기준과 매우 흡사하다. 따라서 우리는 이제 수학과 가장 가까운 곳에 있는 경험적 과학, 그리고 이론 물리학과의 공통점을 비교하고 있다. 그런데도 실제로 일을 수행하는 절차(modus procedendi)는 매우 크고 근본적이다. 이론물리학의 목적은 대부분 실험물리학의 필요에 의해 “외부”로부터 주어지는 것이다. 그들은 거의 항상 어려움을 해결해야 하는 필요성에서 비롯된다; 예측적이고 통일된 성공한 이론은 대개 실험 뒤에 온다. 만약 우리에게 직유법이 허용될 수 있다면, 이론의 발전(예측력과 통일성)은 반드시 일부 기존의 어려움(일반적으로 기존 시스템 내의 명백한 모순)을 해결하기 위한 전투를 벌이려고 마음을 먹었을 때 이뤄진다. 이론 물리학자들의 연구 중 일부는 그러한 장애물에 대한 탐색인데, 이런 장애물들은 “돌파구”(breakthrough)의 가능성을 약속한다. 내가 언급했듯이, 이러한 어려움은 대개 실험에서 비롯되지만, 때때로 그것들은 수용된 이론 간의 모순일 수도 있다. 물론, 예는 수없이 많다.

마이컬슨(Michelson)의 실험은 특수상대성이론, 특정 이온화 전위의 어려움, 양자역학으로 이어지는 특정 분광학적 구조의 문제가 실험에서 비롯된 경우를 잘 보여준다. 특수상대성이론과 일반상대성이론으로 이어지는 뉴턴 중력 이론 사이의 충돌은 이론들 간의 모순의 경우를 예시한다. 어쨌든, 이론물리학의 문제는 객관적으로 주어진다; 비록 성공을 측정하는 기준은 주로 미학적이긴 하지만, 문제의 일부 - 내가 "돌파구"라 불렀던 -는 어렵고 객관적이라는 것은 사실이다. 따라서, 이론물리학의 주제는 거의 항상 엄청나게 집중되었다; 거의 모든 이론물리학자의 대부분의 노력은, 1920년대와 1930년대 초의 양자 이론이나, 1930년대 중반의 기초 입자 및 핵의 구조와 같은 매우 날카롭게 제한된 분야에 집중되었다.

이는 수학의 상황과 완전히 다르다. 수학은 성격, 스타일, 목적, 영향력에 있어서 서로 크게 다른 세부분야로 나뉜다. 이론물리학의 극한집중과는 정반대이다. 훌륭한 이론 물리학자는 오늘날에도 그의 과목의 절반 이상에 대한 실무 지식을 가지고 있을 것이다. 나는 현재 사는 수학자가 1/4 이상과 관계가 있는지 의심스럽다. 물론, 설령 수학이 더 세분되었더라도, 심각하게 어려운 "객관적으로" 주어진 "중요한" 문제들이 발생할 수는 있다. 그러나, 수학자들은 물리학자에 비해서 자유롭게 그 문제를 택하거나 떠나거나 할 수 있다. 왜냐하면, 이론물리학에서 "중요한" 문제는 대개 갈등, 모순이며, "반드시" 해결되어야 하기 때문이다. 수학자는 그가 참여할 수 있는 다양한 분야를 가지고 있으며, 무엇과 같이 할 것인지를 정하는 데에 상당한 자유를 누리고 있다. 더 정확하게 이 점을 논의하기 위해, 나는 수학자의 선택 기준, 그리고 또한 성공의 기준들이 주로 미학적이라고 말하는 것이 옳다고 생각한다. 나는 이 주장이 논란이 되고 있다는 것을 알고 있고, 수많은 특정한 기술적인(technical) 사례를 분석하지 않고는 그것을 증명하거나 입증하는 것이 불가능하다는 것을 안다. 이것은 다시 고도의 기술적 유형의 토론이 요구될 수 있는데, 이 지면에서는 적절하지 않아 보인다. 다만 이론물리학의 경우보다는 수학의 경우에서 그 성공의 기준으로서 미학적 성격이 훨씬 더 두드러진다고만 말해두자. 사람들은 수학적 정리나 수학적 이론이 선험적으로 달라 보이는 사례들을 단순하고 우아한 방식으로 기술하고 분류하는 것만 기대하지는 않는다. 또한 그들은 "건축적인", 즉 수학의 구조적인 구성에서도 "우아함"이 있기를 기대한다. 예를 들어, 문제를 쉽게 진술할 수 있으나, 문제를 파악하고 풀기 위해 접근하는 모든 과정에서 큰 어려움이 있으나, 갑자기 놀랍게도 어떤 접근 방식의 일부가 쉽게 보이게 되는, 그런 종류의 것들을 말한다. 또한, 추론이 길거나 복잡한 경우, 어떤 간단한 일반 원칙이 관련되기를 바라는데, 이 일반원칙은 복잡성과 "설명"하고 또 그를 우회하며, 명백히 임의로 보이는 접근을 몇 가지 간단하고 해결책으로 안내하는 수학적 동기로 보이게 만든다. 이러한 기준은 분명히 어떤 창조적인 예술의 기준이며, 수학적 구성물 뒤편에 있는 - 주로 아주 외진 뒤편에 있는 - 경험주의적이고 세속적인 모티브는 미학적 발전에 의해 과도하게 발달하였고, 따라서 아주 많은 미궁과 같은 복잡한 변형들이 뒤따르게 되었다. 이 모든 것은 경험적 과학의 분위기보다는 순수하고 단순한 예술의 분위기와 훨씬 더 유사하다.

당신은 내가 수학과 실험 또는 기술 과학의 비교에 대해 언급조차 하지 않았다는 것을 알게 될 것이다. 여기서 방법과 일반적인 분위기의 차이는 너무 명백하다.

비록 계보가 길고 모호하지만, 수학적 발상이 경험론에서 비롯되었다는 것은 상당히 적절한 진리에 대한 근사치라 생각한다. 물론 그 진리는 사실 근사를 허용하기에는 너무 복잡하긴 하지만. 그러나, 한번 나온 수학적 발상들은, 그들 자신의 독특한 삶을 살기 시작하고, 다른 어떤 것보다도, 특히

경험과학보다도, 거의 전적으로 미적 동기들에 의해 지배되는 창조적인 예술과 비교될 수 있다고 생각한다. 그러나, 내가 생각하기에, 강조할 필요가 있는 더 중요한 점이 있다. 수학의 분야들이 그것의 경험적 근원에서 멀리, 아니 여전히 더 멀리 이동하기 때문에, 만약 그 분야들의 두 번째 혹은 세 번째 세대가 "현실"에서 오는 아이디어로부터 간접적으로만 영감을 받아 연구된다면, 그 분야는 그것은 매우 심각한 위험에 직면하게 된다. 그 분야들은 점점 더 순수하게 미학화되고, 점점 더 예술을 위한 예술이 되어버린다. 그렇다고 해도 여전히 다른 연관된 분야들이 경험적 연결성이 강하다거나, 혹은 예외적으로 잘 발달한 취향을 가진 사람들에 의해 연구된다면 꼭 나쁜 것만은 아니다. 하지만 그 주제들은 최소한의 (역주: 현실로부터의) 저항만을 받을 것이기에, 기원으로부터 멀어져 갈수록, 여러 가지 덜 중요한 분야들로 나뉘면서, 분야 전체가 복잡하고 무질서한 세부사항들의 덩어리가 될 가능성이 있다. 다른 말로 하면, 경험적 근원에서 멀리 떨어질수록, 혹은 많은 "추상적인" 교배 이후에, 수학적 주제들은 퇴화의 위험에 처하게 된다. 처음의 스타일은 대개 고전적이다.; 그것이 바로크가 될 조짐을 보이면, 위험 신호는 올라간다. 물론 예를 들어서, 특정한 진화가 바로크나 후기 바로크로 가는 것을 추적해볼 수도 있겠지만, 그렇게 한다면 지면과 맞지 않게 너무 기술적인 것이 될 것이다.

어쨌든, 바로크 단계에 도달할 때마다, 내가 보기에 유일한 해결책은 근원으로 돌아가서 젊어지게 만드는 것밖에 없어 보인다. 다른 말로 하면, 직접적인 경험에서 나온 발상들의 재주입이 될 것이다. 이런 재주입만이, 이제까지 수학 주제들의 신선함과 활력을 보존하기 위해 필요조건이었고 또 앞으로도 필요조건이 될 것이라 확신한다.