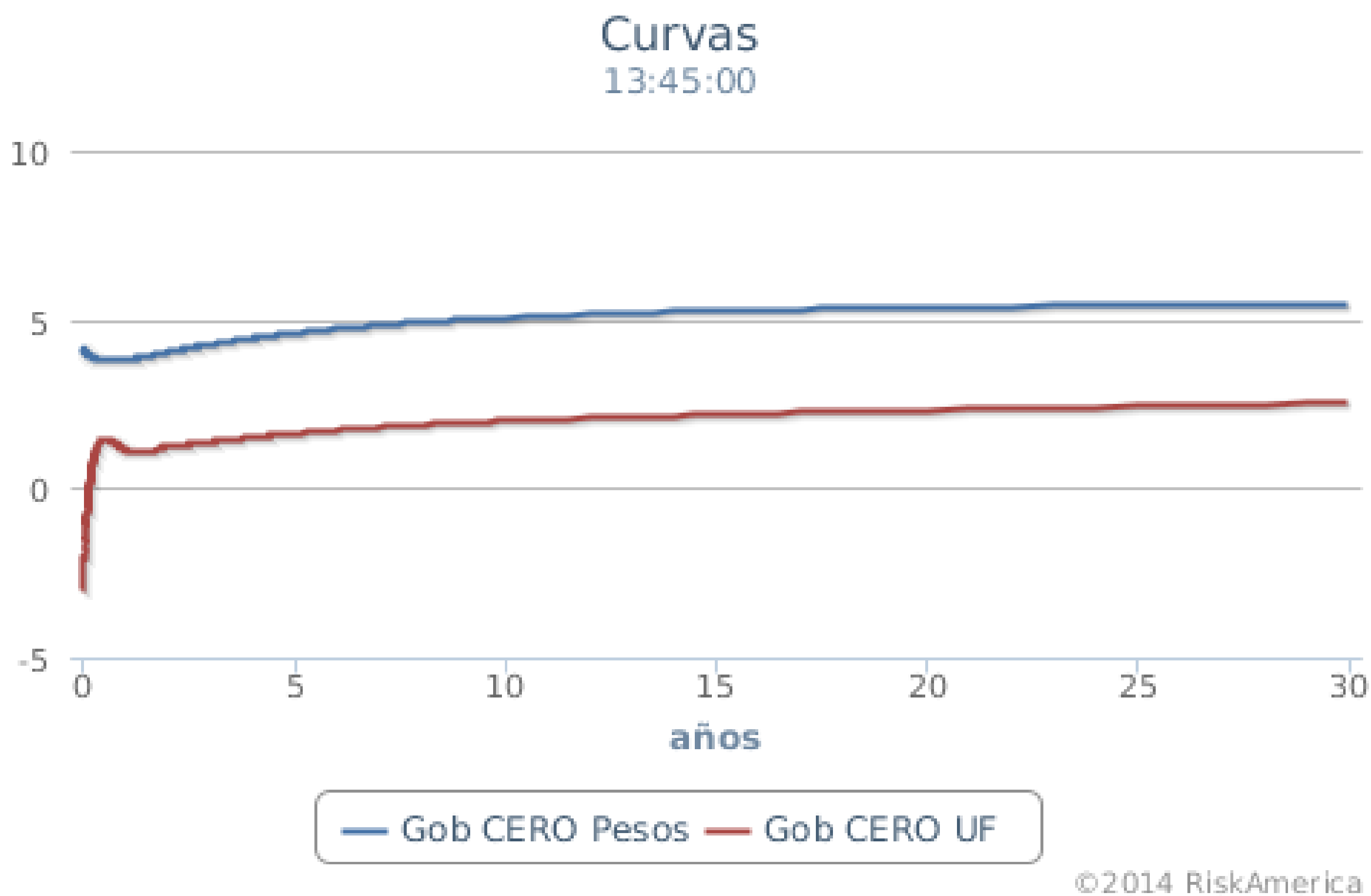
ESTRUCTURAS DE TASAS DE INTERÉS

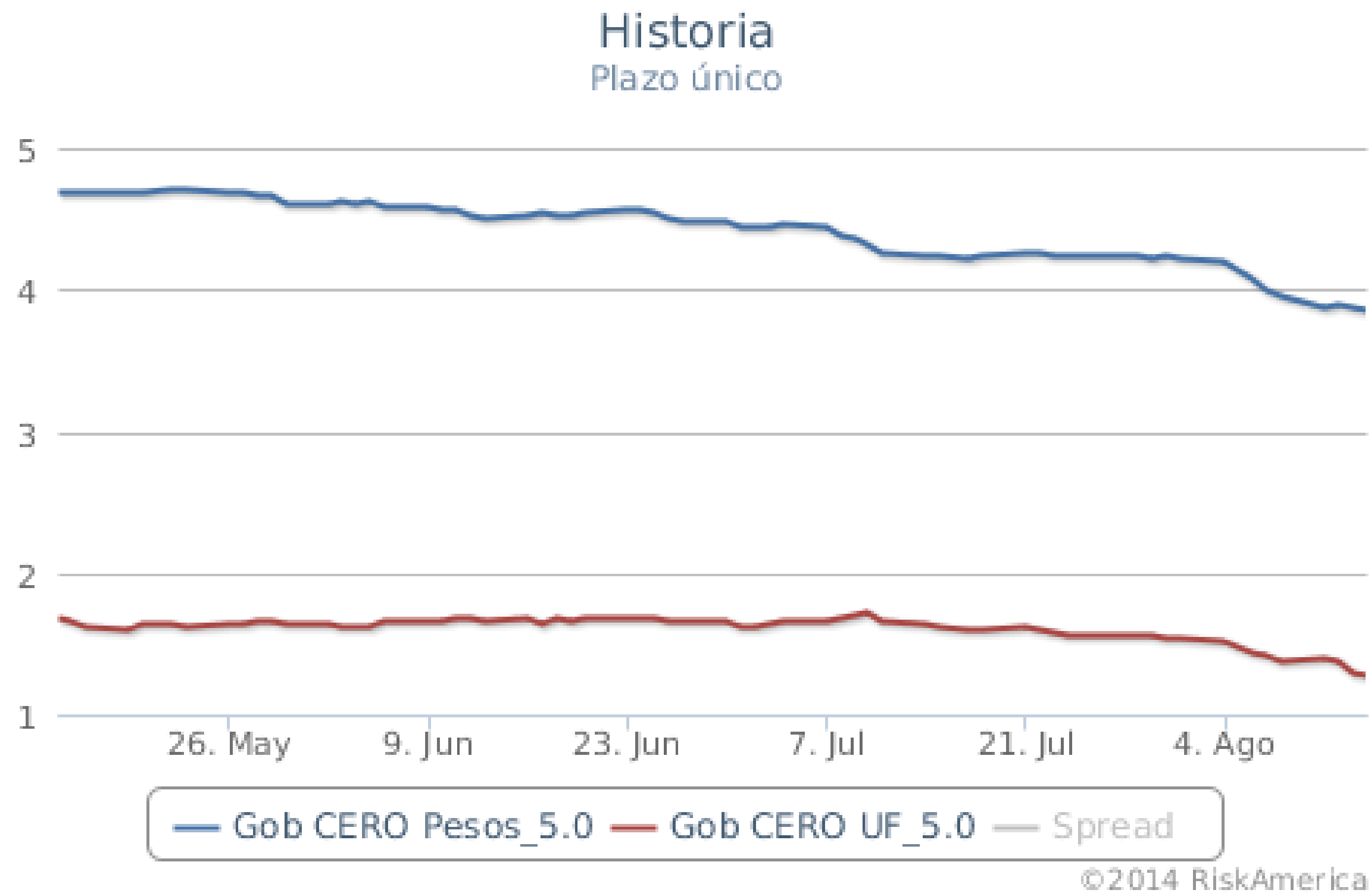
Estructuras de Tasas de Interés

- Las tasas de interés cambian todos los días.
- La estructura de tasas define las tasas de interés vigentes para distintos plazos en una fecha dada.
- Las tasas de interés para distintos plazos no necesariamente son las mismas.

Estructuras de Tasas de Interés



Estructuras de Tasas de Interés



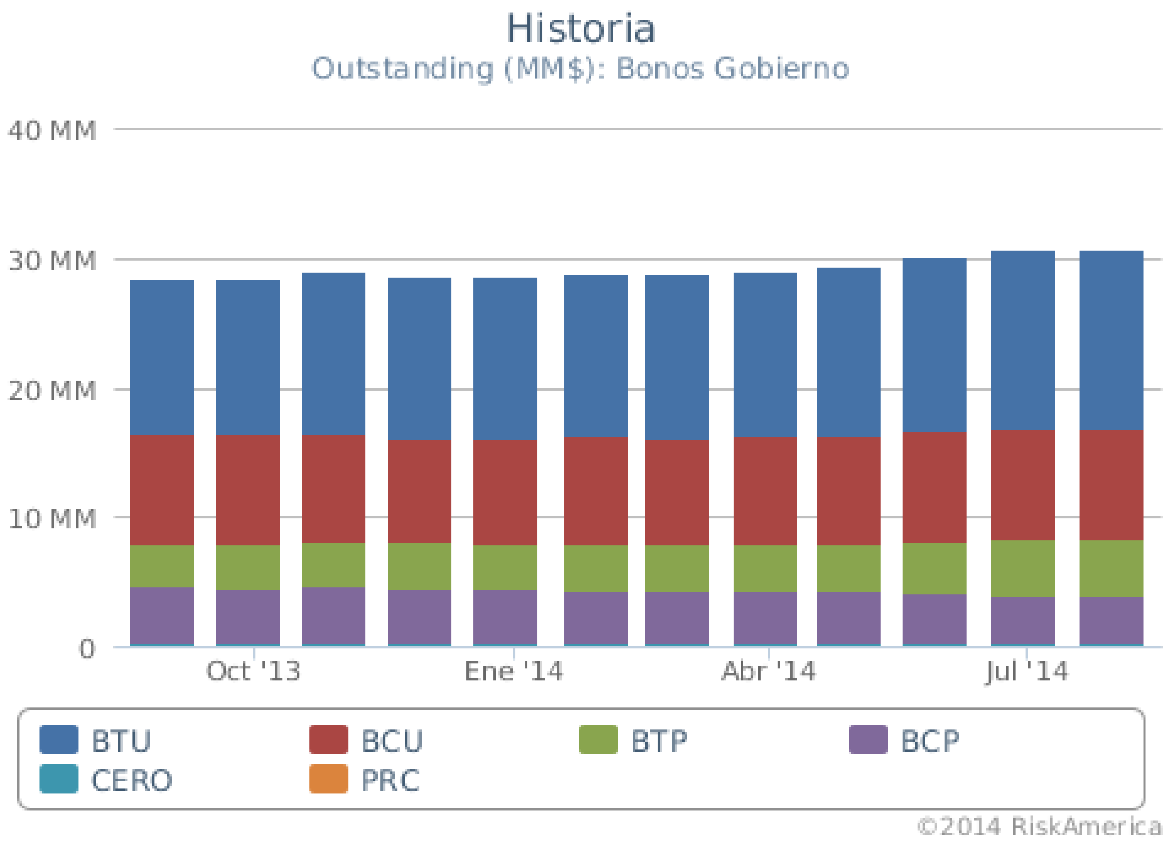
Estructuras de Tasas de Interés

- Al hablar de estructura de tasas de interés nos referimos, por lo general, a tasas cero (spot).

- Cualquier bono simple se puede valorizar si se dispone de la curva cero o estructura de tasas de interés. Basta con descontar los flujos de cada cupón a la tasa cero para cada vencimiento.

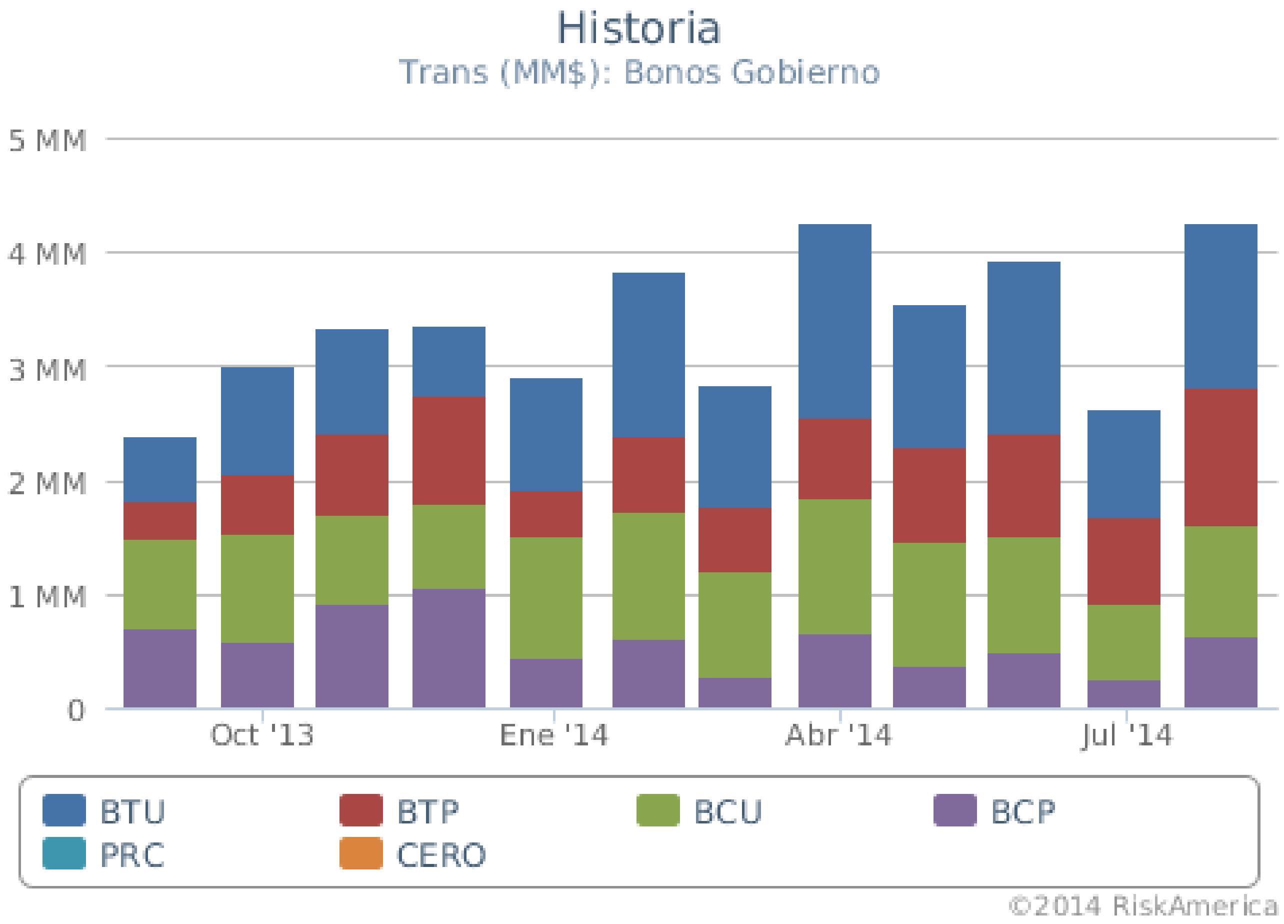
Estructuras de Tasas de Interés

- En Chile existen bonos cero emitidos por el Banco Central pero son poco líquidos.



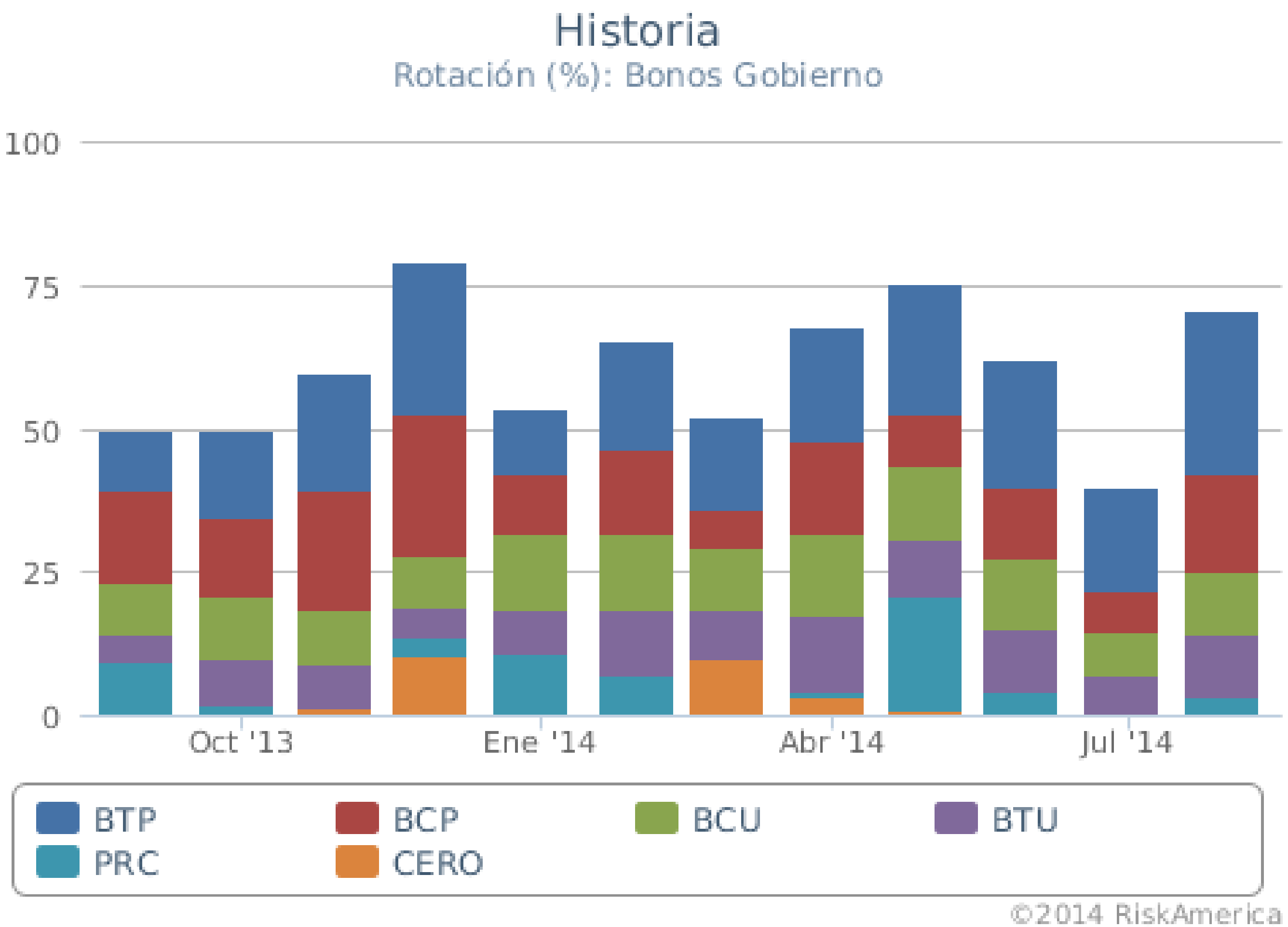
Estructuras de Tasas de Interés

- Transacciones.



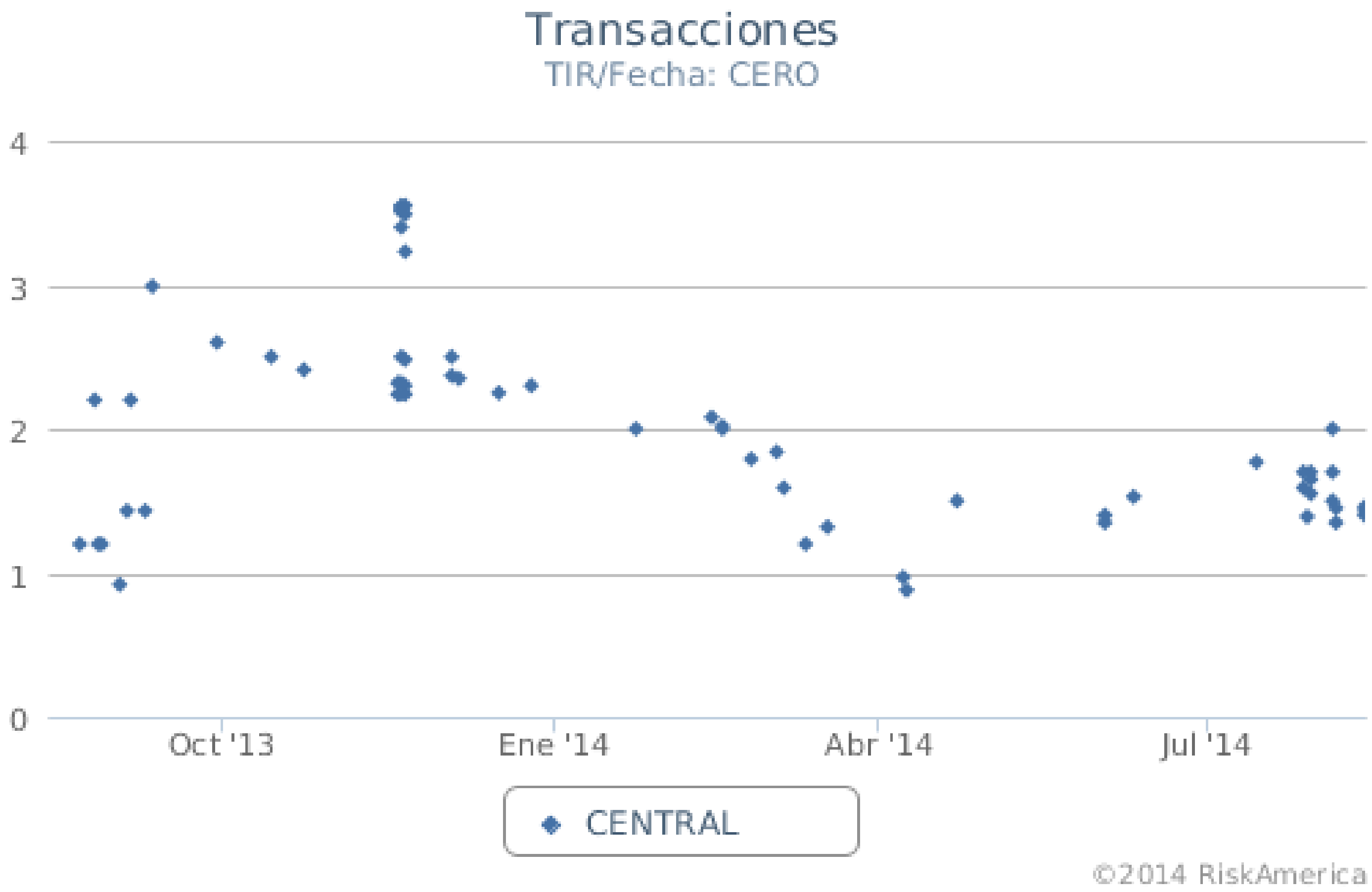
Estructuras de Tasas de Interés

- Rotación(%).



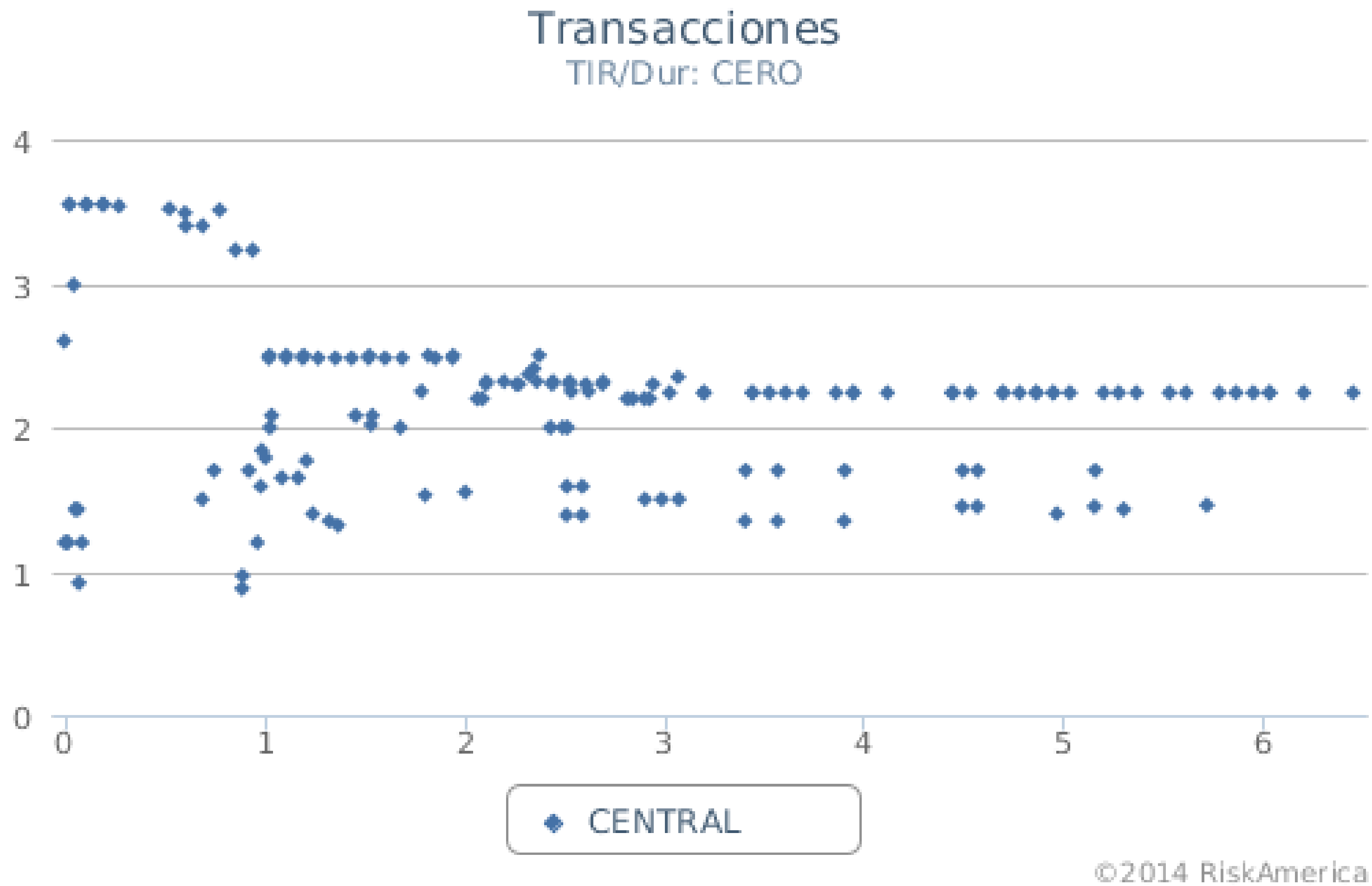
Estructuras de Tasas de Interés

- En Chile existen bonos cero emitidos por el Banco Central pero son poco líquidos.



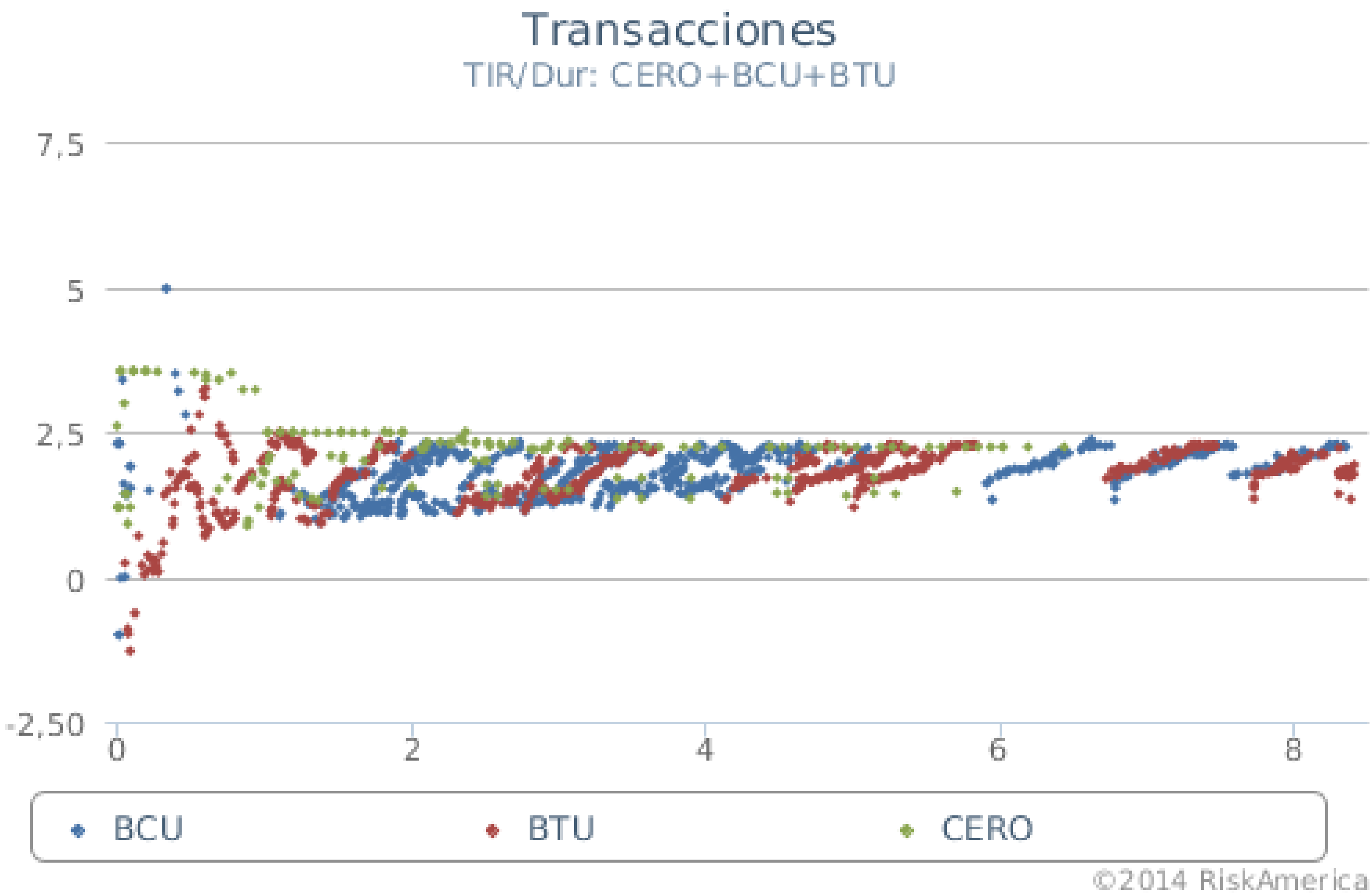
Estructuras de Tasas de Interés

- Transacciones por duración



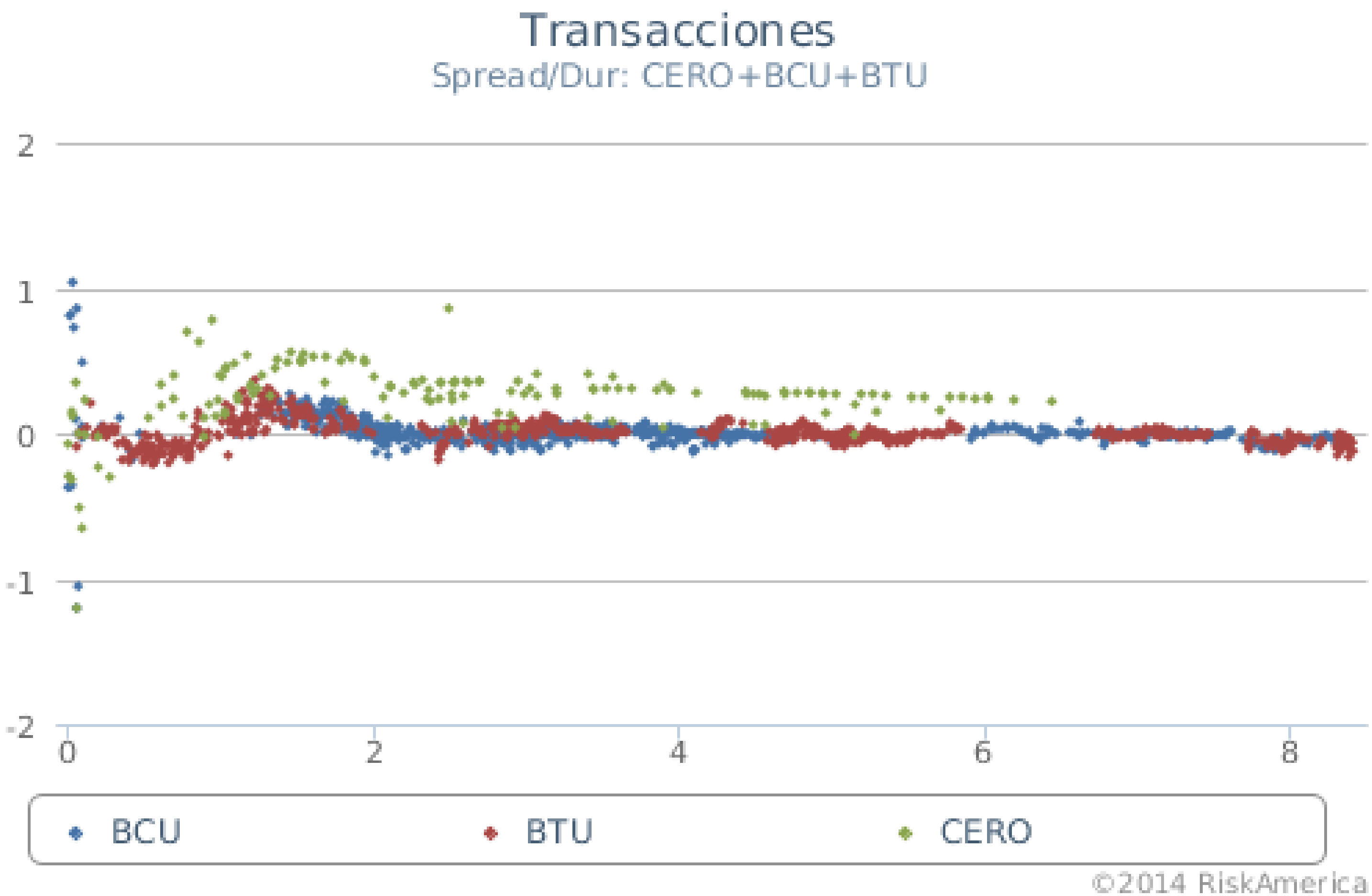
Estructuras de Tasas de Interés

- Esto hace que se transen a tasas mas altas que los instrumentos libres de riesgo.



Estructuras de Tasas de Interés

- Spread de transacciones:



Estructuras de Tasas de Interés

- Los bonos CERO se transan con spread: no son representativos de una curva libre de riesgo. (Poca Liquidez)

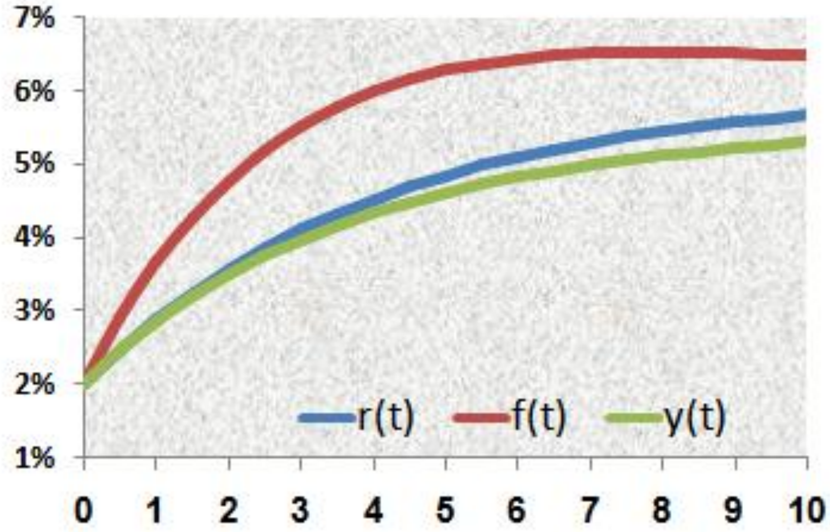
- En los mercados financieros, las estructuras de tasas se determinan en función de bonos con cupones.

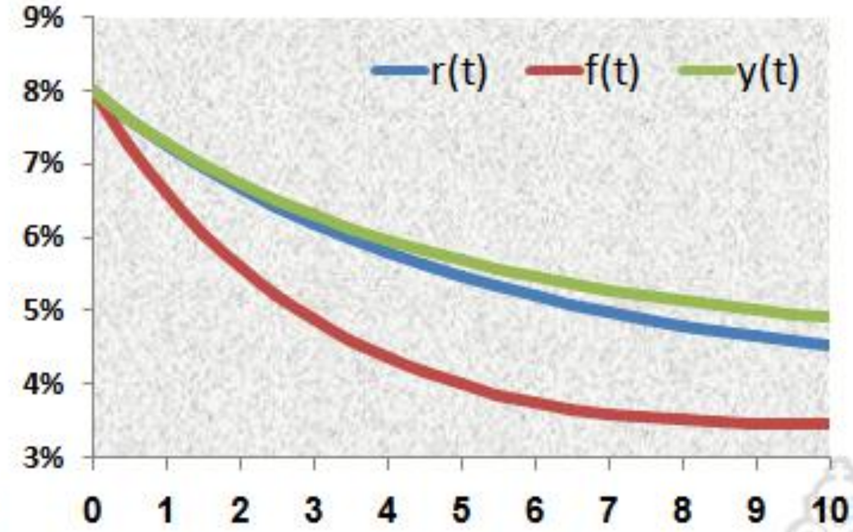
Estructuras de Tasas de Interés

- Las curvas las podemos clasificar según:
  - Spot Curve: Es la curva cero cupón. Las estructuras de tasas están generalmente expresadas en tasa cero o spot
  - Yield Curve: Es la curva construida con TIR de los instrumentos a los distintos plazos (Curva BCU/BCP)
  - Par Curve: Es la curva construida con TIR de instrumentos que están a la par (Curva Swap)

Estructuras de Tasas de Interés

- Ejemplos yield curve - curva cero - curva forward





- Si la curva cero es nominal se debe cumplir que f(t)>0. Esto presenta serias restricciones de suavidad o “smoothness” a la curva cero y la yield curve.
- Es fácil demostrar que si r(t) es cte $\Leftrightarrow$ y(t) = r(t) = f(t)

Estructuras de Tasas de Interés

- ¿Cómo obtener curvas cero cupón a partir de instrumentos con cupones?
- Métodos:
  - Bootstrapping (más simple)
  - Modelos Estáticos: Nelson & Siegel; Svensson; Splines
  - Modelos Dinámicos: Vasicek; CIR.

Estructuras de Tasas de Interés

- Principio General: El valor presente de un bono se puede obtener descontando los cupones a la TIR o descontándolos a las tasas cero cupón correspondientes a cada plazo.

$$B = \frac{C_i}{(1+TIR)} + \frac{C_i}{(1+TIR)^2} + \frac{C_i}{(1+TIR)^3} \cdots \frac{C_i}{(1+TIR)^N} = \frac{C_i}{(1+r_1)} + \frac{C_i}{(1+r_2)^2} + \frac{C_i}{(1+r_3)^3} \cdots \frac{C_i}{(1+r_N)^N}$$

O bien

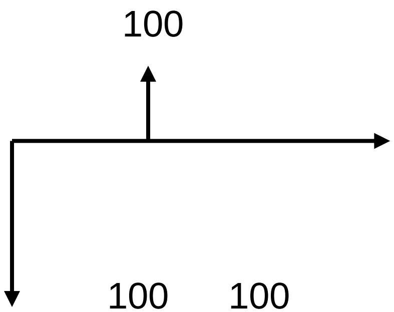
$$B = \frac{C_i}{(1+TIR)^1} + \frac{C_i}{(1+TIR)^2} + \frac{C_i}{(1+TIR)^3} \cdots \frac{C_i}{(1+TIR)^N} = C_i * FD(1) + C_i * FD(2) + C_i * FD(3) \cdots C_i * FD(N)$$

donde

$$FD(T) = \frac{1}{(1+r)^T}$$

Estructuras de Tasas de Interés

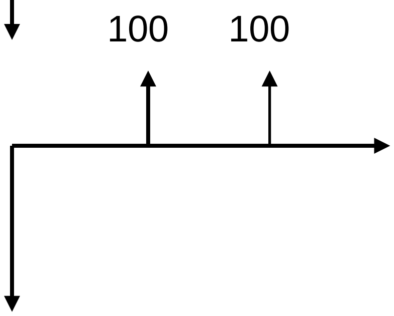
- Ejemplo: Bootstrapping
  - Se tienen 3 bonos:
    - » Bono A: Tiene 1 cupón en t=1
    - » Bono B: Tiene 2 cupones en t=1 y t=2
    - » Bono C: Tiene 3 cupones en t=1, t=2 y t=3



$TIR_A = 10\%$

$r_1 = 10\%$

$$\frac{100}{(1+TIR_A)^1} = \frac{100}{(1+r_1)^1} \Rightarrow TIR_A = r_1$$



$TIR_B = 10\%$

$$\frac{100}{(1+TIR_B)^1} + \frac{100}{(1+TIR_B)^2} = \frac{100}{(1+r_1)^1} + \frac{100}{(1+r_2)^2}$$

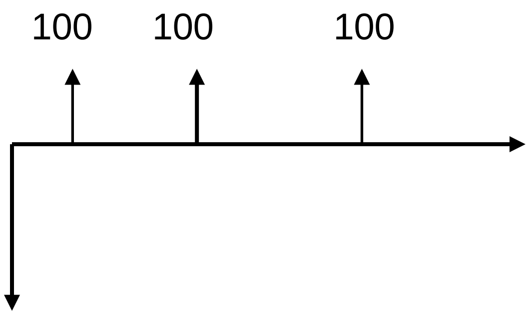
Conocidos

Despejamos r_2

Estructuras de Tasas de Interés

- Ejemplo: Bootstrapping

$TIR_C = 15\%$



$$\frac{100}{(1+TIR_C)^1}+\frac{100}{(1+TIR_C)^2}+\frac{100}{(1+TIR_C)^3}=\frac{100}{(1+r_1)^1}+\frac{100}{(1+r_2)^2}+\frac{100}{(1+r_3)^3}$$

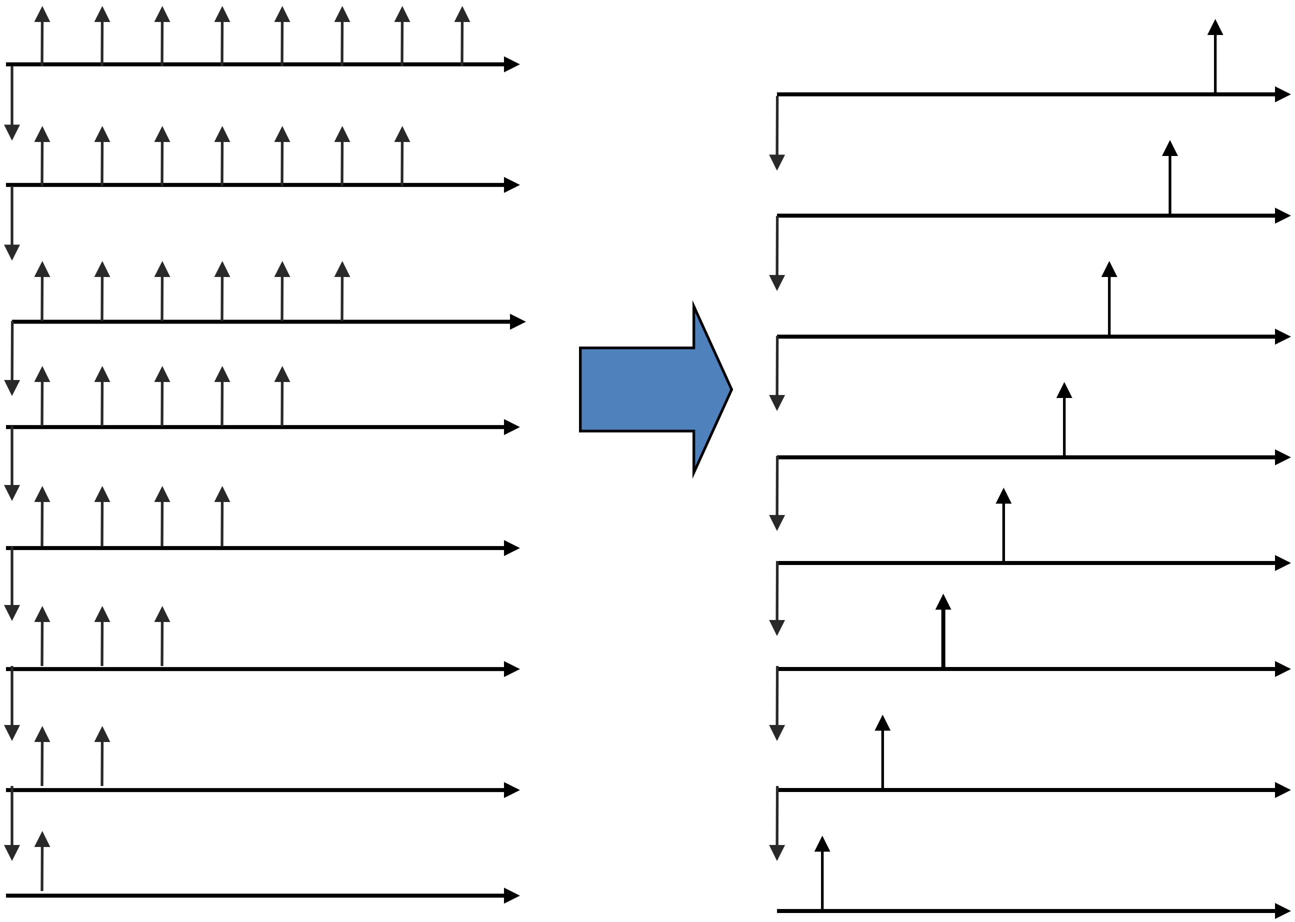
Conocidos

Despejamos r_3

Estructuras de Tasas de Interés

Bonos con Cupones

Bonos Cero Cupón



Estructuras de Tasas de Interés

- Ventajas del Bootstrapping:
  - Fácil de construir y de actualizar.
  - No requiere utilizar ningún tipo de solver numérico, ni cálculos iterativos ni estimación de parámetros.
  - No tiene restricciones de forma, ajusta todos los precios observados.
- Desventajas del Bootstrapping:
  - Se requiere que las fechas de los cupones coincidan para todos los instrumentos.
  - Las interpolaciones pueden producir serias irregularidades en la curva forward instantánea en los puntos de no diferenciabilidad.
  - Requiere yields observables a lo largo de toda la curva.

Estructuras de Tasas de Interés

- El Bootstraping necesita el mismo número de bonos como cupones.
- Si no se tiene el número suficiente de bonos. Se pueden utilizar otros métodos para obtener las curvas cero.
    - Métodos Paramétricos: Nelson y Siegel (1987); Svensson (1994)
    - Métodos No-paramétricos: Interpolación lineal; Splines
- Estos modelos son estáticos, es decir, se estiman considerando sólo las transacciones del día sin importar la historia.

Estructuras de Tasas de Interés

- Un modelo paramétrico de la estructura de tasas de interés se puede representar como:

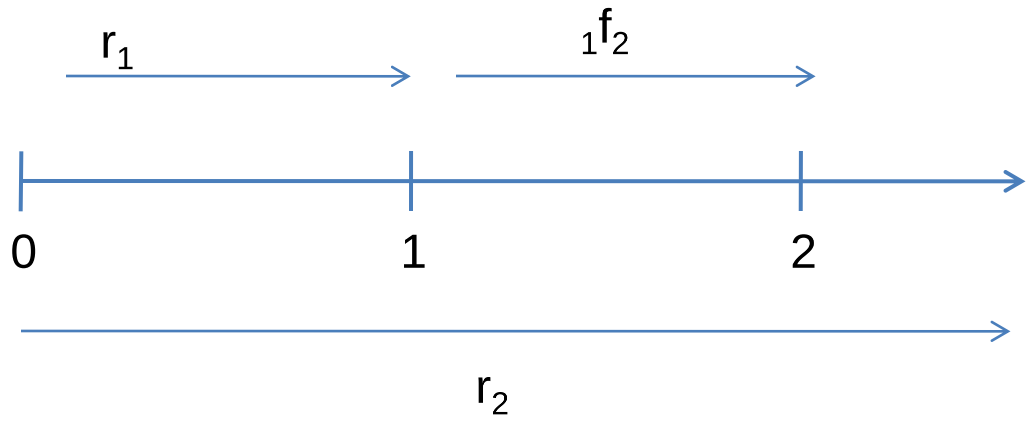
$$R(T) = R(T, \theta)$$

Donde θ es un vector de parámetros.

- En un modelo paramétrico la estructura de tasas R(T) se representa por una forma funcional que relaciona cada tasa cero a un plazo.

Tasa Forward

- Corresponde a una tasa futura definida desde una fecha inicial a una fecha final.
- Por ejemplo: La tasa vigente entre t y t+1 corresponde a la tasa forward entre t y t+1.



$$(1 + r_1)(1 + {}_1f_2) = (1 + r_2)^2$$

Tasas Forward

- Las distintas combinaciones de plazos nos dan como resultado una matriz de tasas forward

MATRIZ DE TASAS FORWARDS

Cero Real 07/08/12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**2,84**	2,62	2,42	2,36	2,34	2,35	2,37	2,39	2,42	2,44	2,47	2,50	2,53	2,56	2,58	2,61	2,64	2,66	2,68	2,71
2		**2,73**	2,22	2,23	2,25	2,28	2,32	2,35	2,39	2,42	2,46	2,49	2,52	2,55	2,58	2,61	2,64	2,66	2,69	2,71
3			**2,56**	2,24	2,27	2,30	2,34	2,38	2,42	2,45	2,49	2,52	2,55	2,58	2,61	2,64	2,67	2,69	2,72	2,74
4				**2,48**	2,30	2,34	2,38	2,41	2,45	2,49	2,52	2,56	2,59	2,62	2,64	2,67	2,70	2,72	2,75	2,77
5					**2,44**	2,38	2,41	2,45	2,49	2,53	2,56	2,59	2,62	2,65	2,68	2,71	2,73	2,76	2,78	2,80
6						**2,43**	2,45	2,49	2,53	2,56	2,60	2,63	2,66	2,69	2,71	2,74	2,77	2,79	2,81	2,84
7							**2,43**	2,53	2,57	2,60	2,63	2,66	2,69	2,72	2,75	2,77	2,80	2,82	2,84	2,87
8								**2,45**	2,61	2,64	2,67	2,70	2,72	2,75	2,78	2,80	2,83	2,85	2,87	2,89
9									**2,46**	2,66	2,70	2,73	2,75	2,78	2,80	2,83	2,85	2,88	2,90	2,92
10										**2,48**	2,74	2,76	2,78	2,81	2,83	2,86	2,88	2,90	2,92	2,94
11											**2,51**	2,78	2,81	2,83	2,86	2,88	2,90	2,93	2,95	2,97
12												**2,53**	2,83	2,86	2,88	2,91	2,93	2,95	2,97	2,99
13													**2,55**	2,89	2,91	2,93	2,95	2,97	2,99	3,01
14														**2,58**	2,92	2,95	2,97	3,00	3,01	3,03
15															**2,6**	2,98	3,00	3,02	3,04	3,06
16																**2,62**	3,02	3,04	3,06	3,07
17																	**2,65**	3,06	3,08	3,09
18																		**2,67**	3,09	3,11
19																			**2,69**	3,13
20																				**2,71**

Modelos Paramétricos de Tasas

- Nelson y Siegel (1987): Las tasas se representan por una suma de exponenciales.

- Svensson (1994): Extensión de Nelson y Siegel. Agrega parámetros adicionales aumentando la flexibilidad de la curva.

Nelson y Siegel (1987)

- Plantean una forma funcional para la tasa forward instantánea:

$$f(T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{T}{\tau_1} e^{-\frac{T}{\tau_1}}$$

Nelson y Siegel (1987)

- Recordemos que la tasa forward entre dos plazos se define como:

$$\left(1+r(t_1)\right)^{t_1}(1+{}_1f_2)^{t_2-t_1}=\left(1+r(t_2)\right)^{t_2}$$

- En tasa continua:

$$r(t_1)t_1+f(0,t_1,t_2)(t_2-t_1)=r(t_2)t_2$$

- Entonces:

$$f(0,t_1,t_2)=\frac{r(t_2)t_2-r(t_1)t_1}{(t_2-t_1)}$$

Nelson y Siegel (1987)

- Para obtener la forward instantánea:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(0,t,t+\varepsilon) = \frac{r(t+\varepsilon)(t+\varepsilon) - r(t)t}{\varepsilon}$$

- Finalmente se obtiene:

$$f(t) = \frac{dr(t)t}{dt}$$

$$f(t) = r(t) + r'(t)t$$

- Si la curva de tasas es “normal”, la curva forward va por arriba de la curva cero.

Nelson y Siegel (1987)

- Para obtener la curva cero recordemos que:

$$r(T) \cdot T = \int_0^T f(s)ds$$

- Finalmente:

$$r(T) = \beta_0 + \beta_1 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)\frac{\tau}{T} + \beta_2 \left(\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)\frac{\tau}{T} - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)$$

Nelson y Siegel (1987)

- Se cumplen los siguientes límites matemáticos:

$$\lim_{T\to 0} f(T) = \beta_0 + \beta_1 \qquad \lim_{T\to \infty} f(T) = \beta_0$$

$$\lim_{T\to 0} R(T) = \beta_0 + \beta_1 \qquad \lim_{T\to \infty} R(T) = \beta_0$$

Svensson (1994)

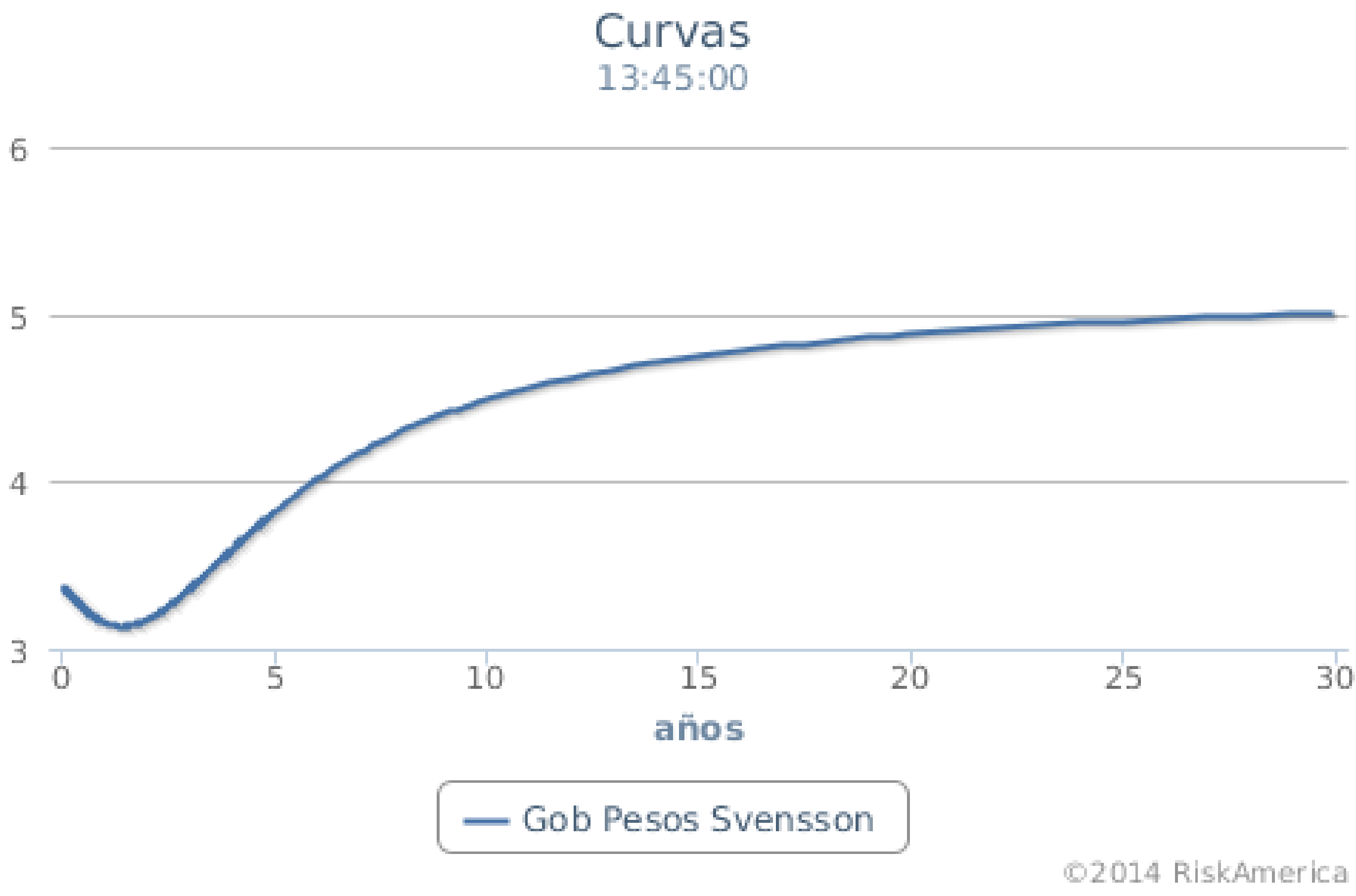
- Plantean la siguiente forma funcional para la tasa forward instantánea:

$$f(T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{T}{\tau_1} e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \beta_3 \frac{T}{\tau_2} e^{-\frac{T}{\tau_2}}$$

- A partir de esto la tasa cero para un plazo T es:

$$r(T) = \beta_0 + \beta_1 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}\right)\frac{\tau_1}{T} + \beta_2 \left(\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_1}}\right)\frac{\tau_1}{T} - e^{-\frac{T}{\tau_1}}\right)$$
$$+ \beta_3 \left(\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_2}}\right)\frac{\tau_2}{T} - e^{-\frac{T}{\tau_2}}\right)$$

Svensson (1994)



Splines

- Equivale a aproximar una función con pedazos de polinomios que cumplen ciertas condiciones de suavidad.
- Ventajas:
  - Relativamente fácil de construir
  - Mejor ajuste a los precios observados
- Desventajas:
  - Mayor inestabilidad
  - No permite la extrapolación de tasas fuera del intervalo de precios.

Estructuras de Tasas

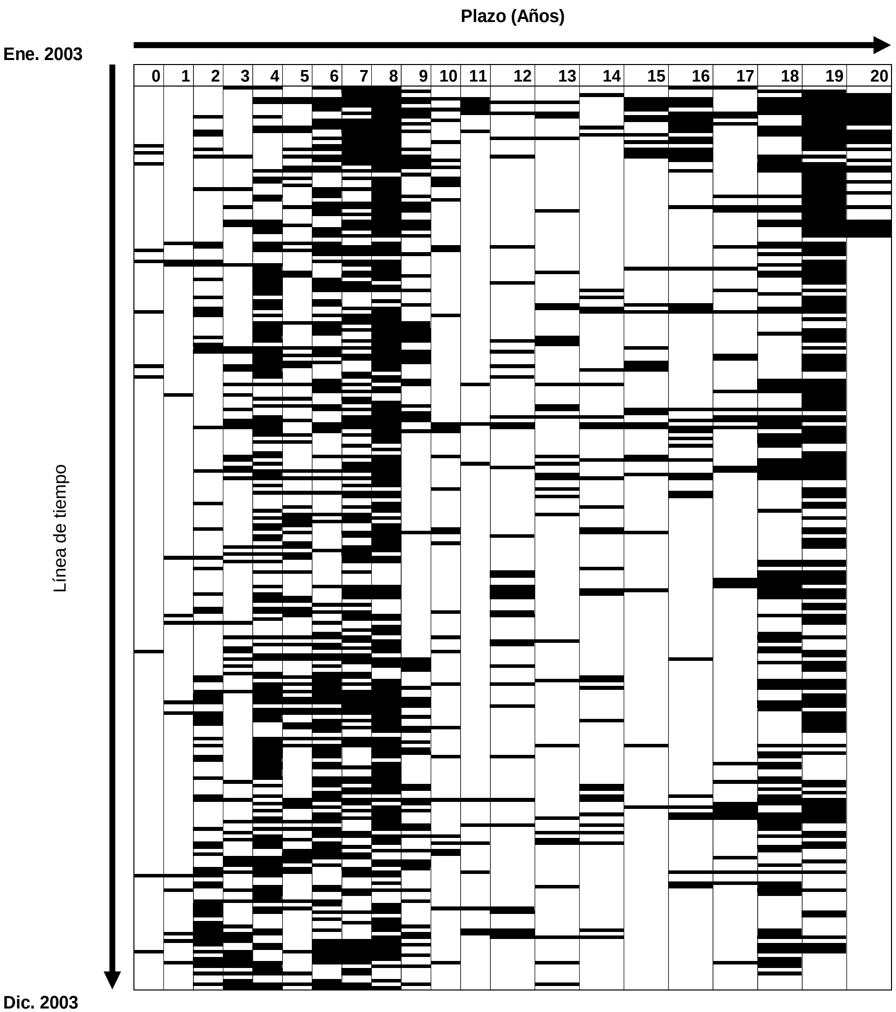
- En general, se puede analizar un método de ajuste de tasas de acuerdo a tres dimensiones:
  - Estabilidad: Que tan estable es el modelo frente a la eliminación o cambio en ciertos datos y su estabilidad en el largo plazo.
  - Suavidad: Que tan suaves son las estructuras de tasas, en particular las curvas de tasas forward.
  - Ajuste: Que tan bien se ajusta el modelo a los datos empíricos.

- La elección del modelo apropiado depende de la importancia relativa de cada uno de estos factores.

Problema en Chile

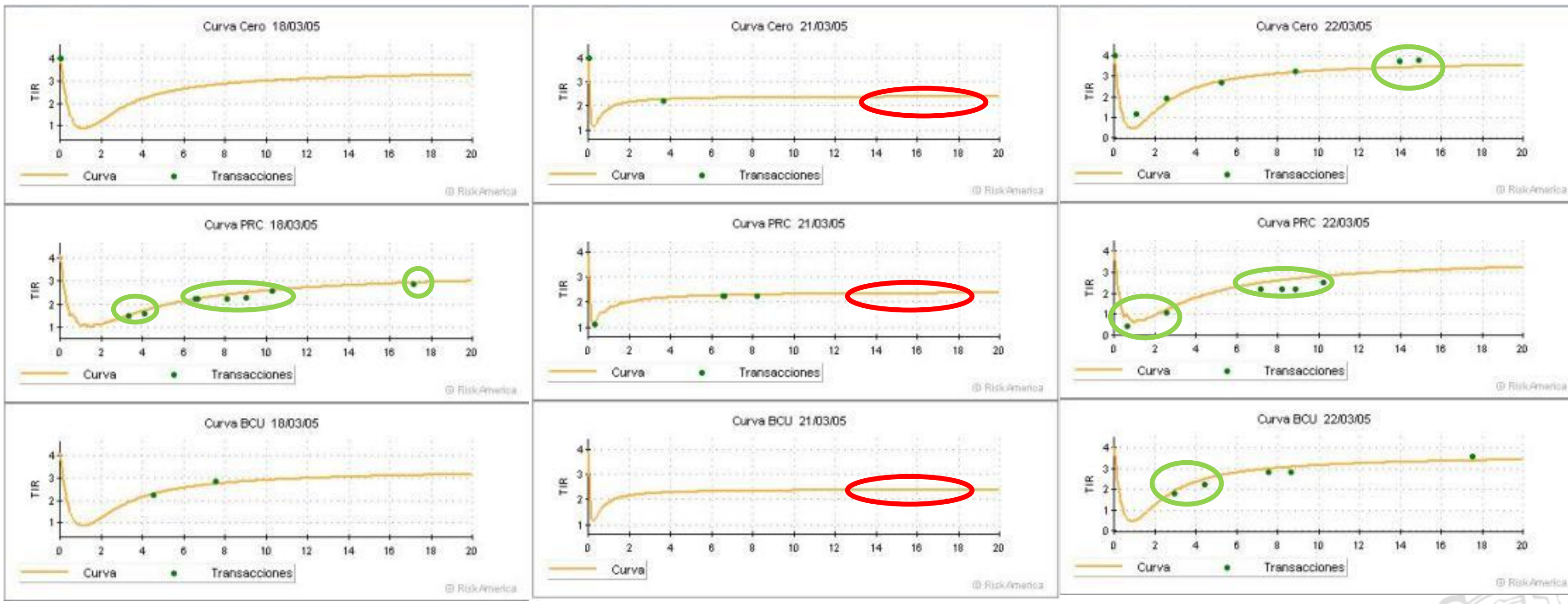
- El mercado chileno no tiene un número suficiente de transacciones diarias para ajustar un modelo estático para la estructura de tasas de interés.

Problema en Chile

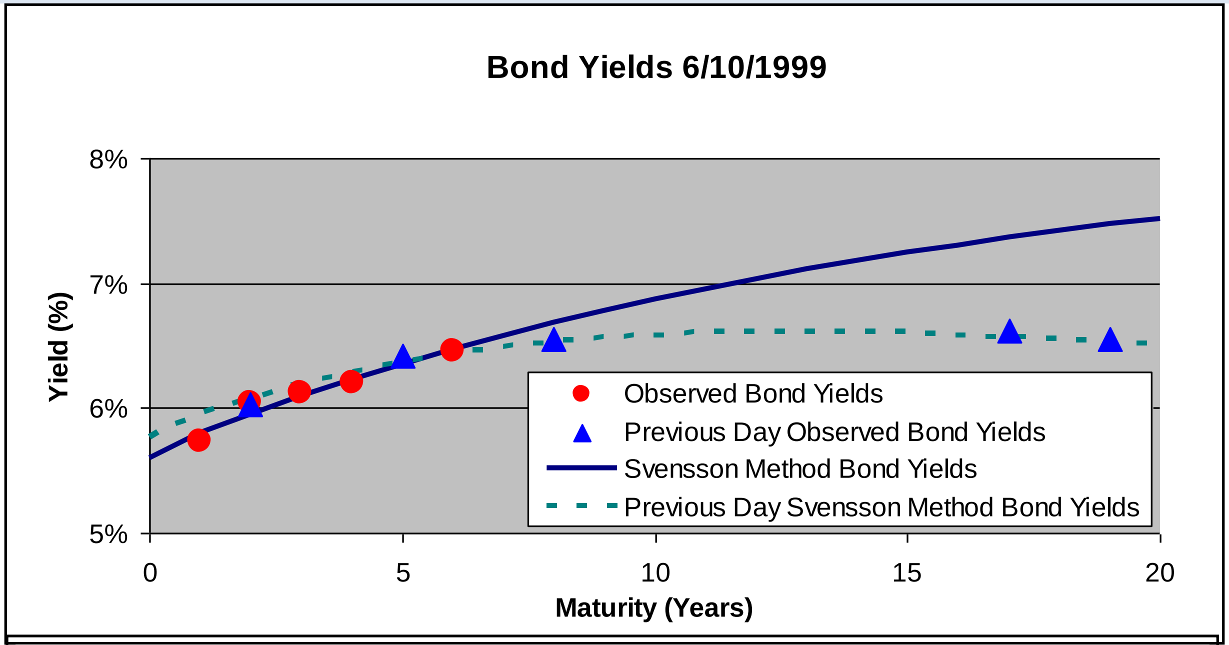


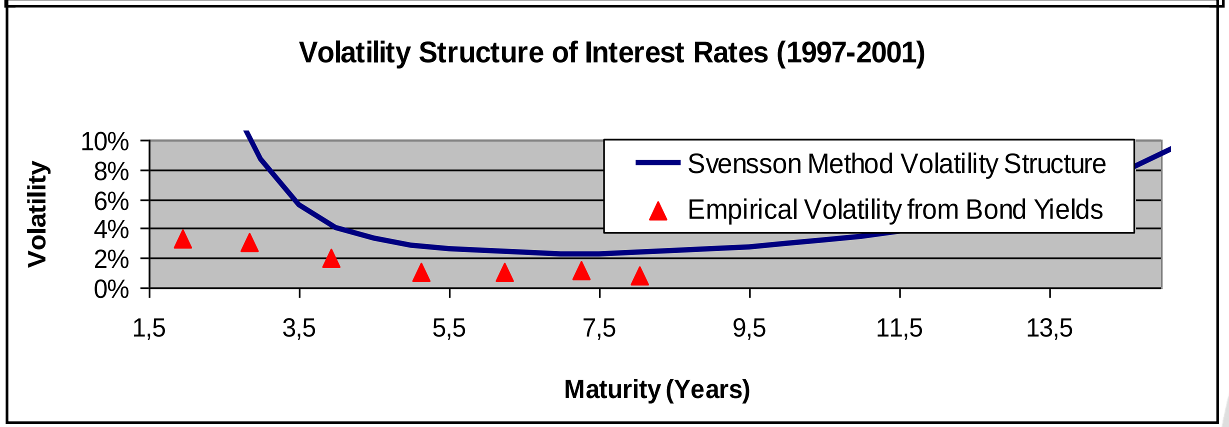
Problema en Chile

- Nelson & Siegel



Problema en Chile





Problema en Chile

- Como solución se utilizan modelos dinámicos de tasas de interés, que además de ajustar la estructura del día ofrecen una estructura de tasas consistente con la historia de las transacciones
- Los modelos dinámicos buscan ajustar los precios y las volatilidades de las tasas.
- Las tasas de interés tienen un comportamiento estocástico en el tiempo.

Modelos Dinámicos

- Modelo de Vasicek Generalizado:

$$r_t = 1' x_t + \delta$$

r_t : Tasa de interés instantánea

$$dx_t = -(\lambda + \mathrm{K} x_t)dt + \Sigma dw_t$$

$\mathbf{x}_t$: Vector de variables de estado

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_N \end{bmatrix}$$

Modelos Dinámicos

- Ecuación de un Bono de Descuento:

$$P(x_t, \tau) = exp\left(u(\tau)' x_t + v(\tau)\right)$$

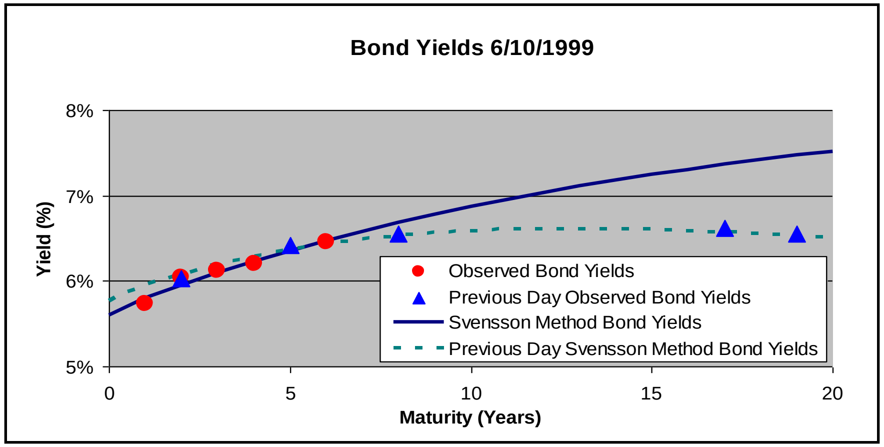
- donde

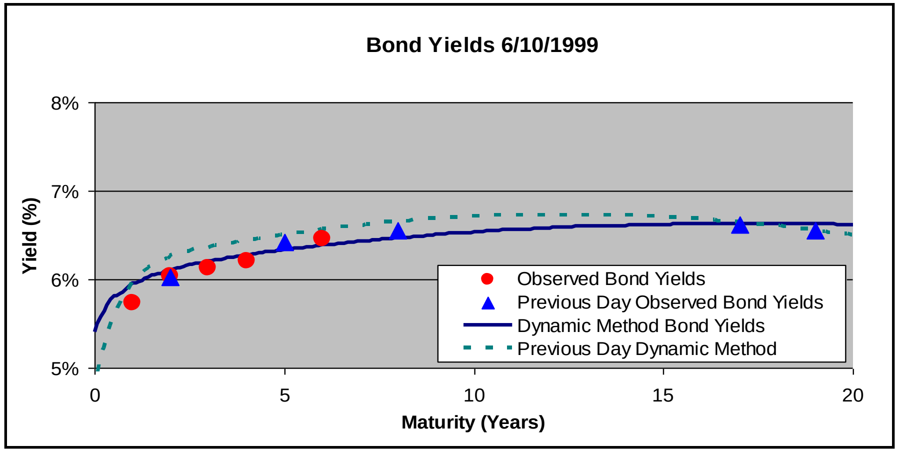
$$u(\tau) = \frac{1 - exp(-\kappa_i \tau)}{\kappa_i}$$

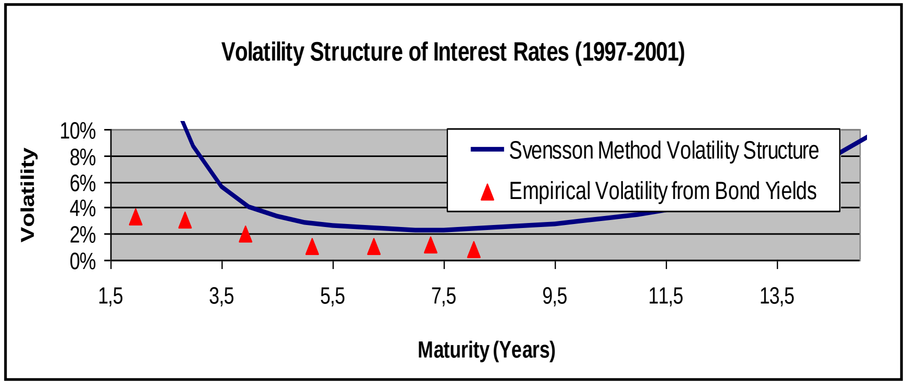
$$v(\tau) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\kappa_i}\left(\tau - \frac{1 - exp(-\kappa_i \tau)}{\kappa_i}\right) - \delta\tau$$

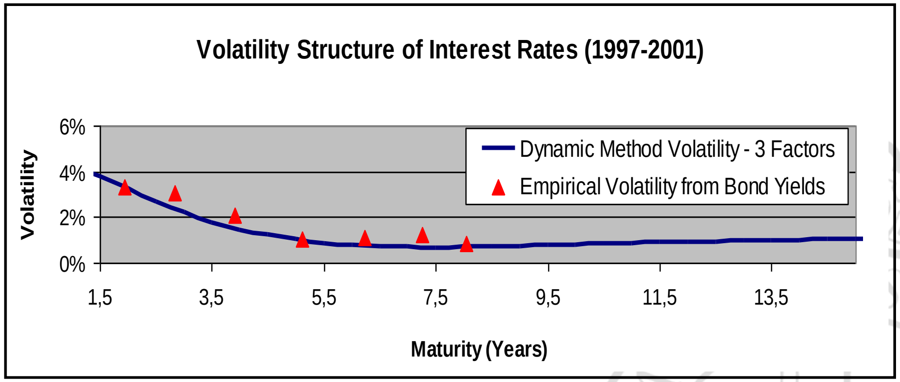
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}{\kappa_i \kappa_j}\left(\tau - \frac{1 - exp(-\kappa_i \tau)}{\kappa_i} - \frac{1 - exp(-\kappa_j \tau)}{\kappa_j} + \frac{1 - exp\left(-(\kappa_i + \kappa_j)\tau\right)}{\kappa_i + \kappa_i}\right)$$

Modelos Dinámicos



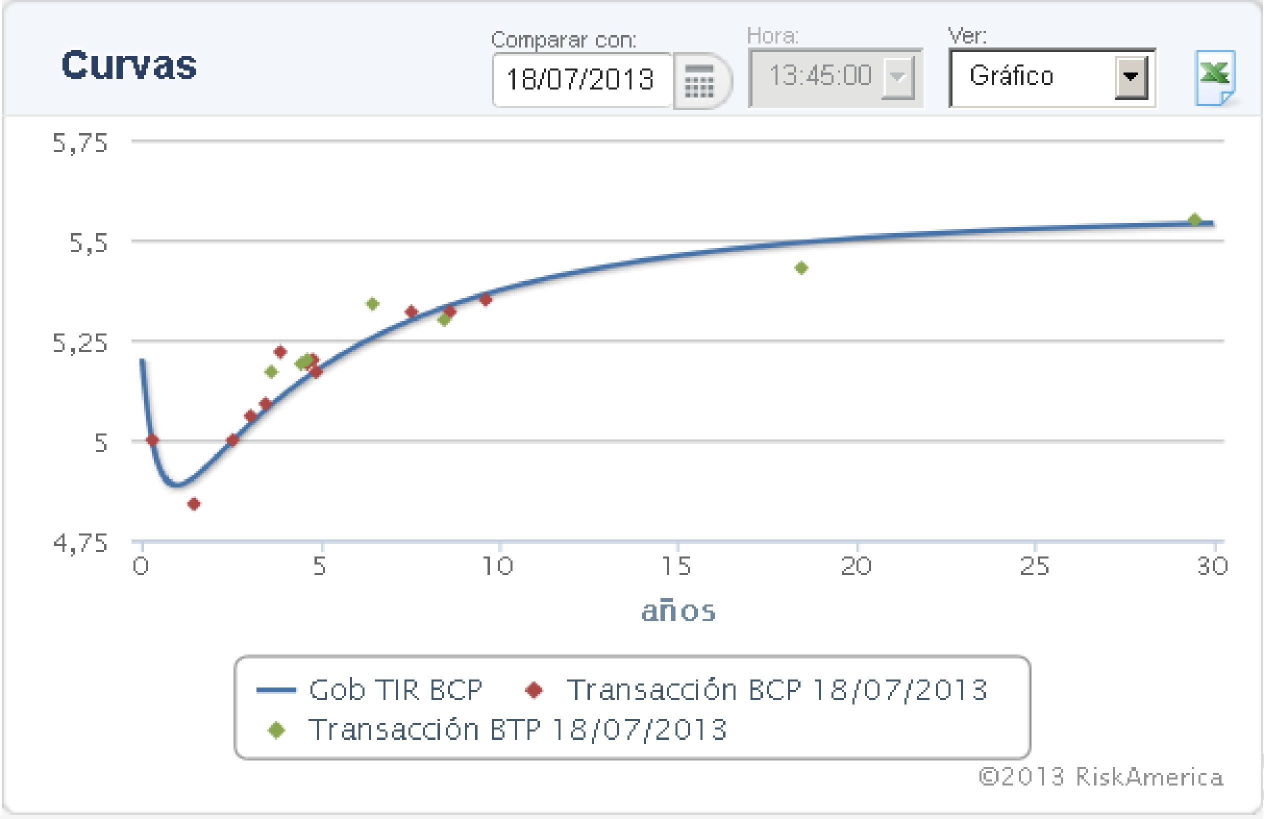






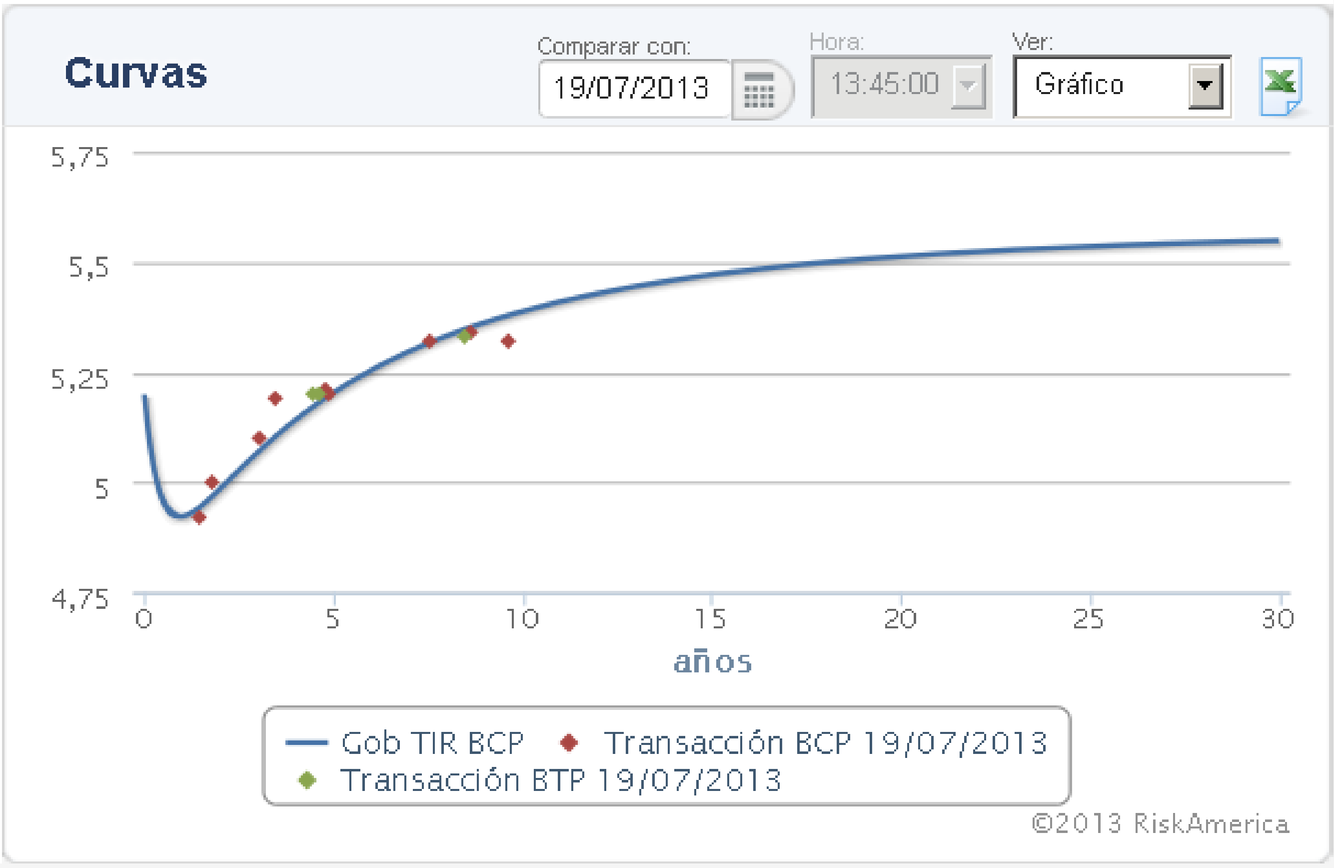
Modelos Dinámicos

- Ejemplo:



Modelos Dinámicos

- Ejemplo:



Modelos Dinámicos

- Ejemplo: