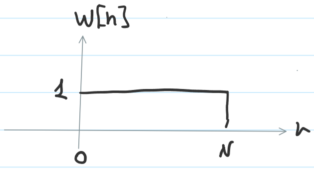
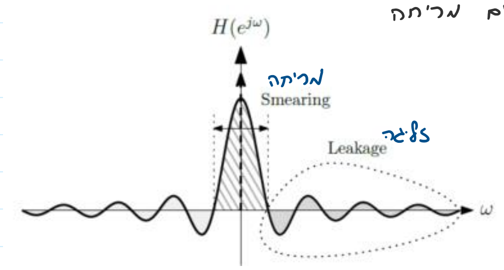
חלונות



רקע: כל אות סופי בזמן (באורך N+1) ניתן להתייחס אליו כאילו הוכפל בחלון מלבני

מטרה: חלונות נוספים, שמקטינים זליגה ומגדילים מריחה



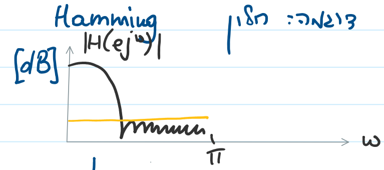
* ניתוח אותות בתדר
* תכנון מסננים

משפחות של חלונות (ע"פ סוג הזליגה)

גליות קבוע בקירוב equiripple

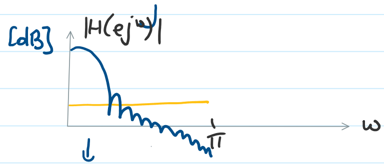
גליות דועכת משמעותית (בקצוות)

דוגמה: חלון Hamming



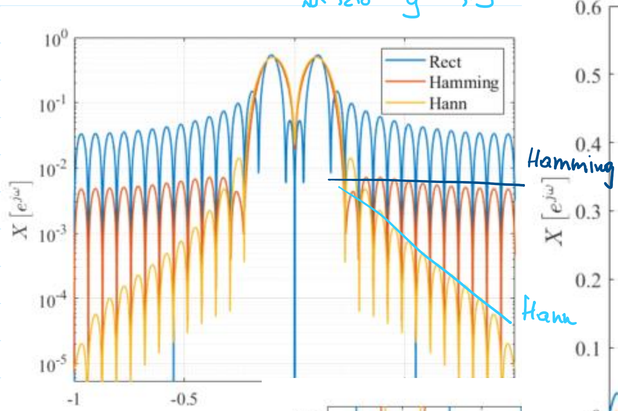
ירידה יחסית מהירה

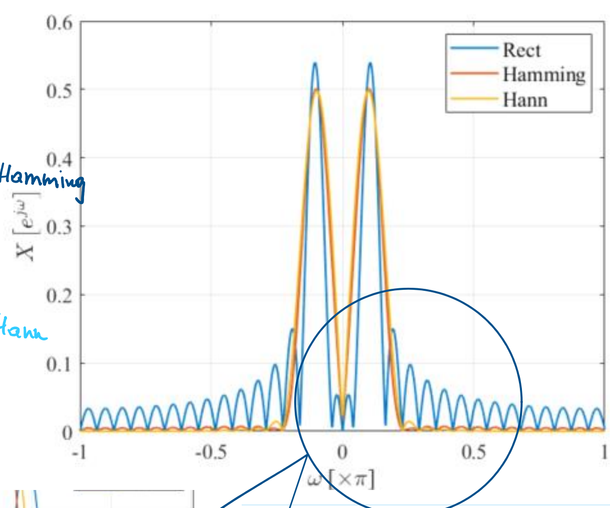
דוגמה: חלון Hann

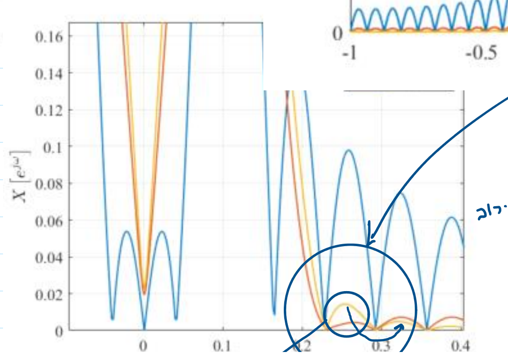


ירידה קצת פחות מהירה + פיצוי ע"י גליות דועכת

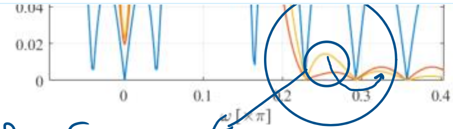
ציר y לוגריתמי







חלון Hamming: צר יותר
גליות קבועה בקירוב
Hann: רחב יותר



חיסרון של חלון Hann - קפיצת גליות משמעותית יחסית

תכנון מסננים בשיטת החלון

תזכורת:

מסנן באורך סופי מתוך מסנן אידיאלי (תכונה 9.1): נדרש מסנן, שבאופן אידיאלי הינו בעל $H_d\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{DTFT}\left\{h_d[n]\right\}$. ניתן להוכיח, שמסנן בעל אורך סופי הקרוב עליו ביותר מכיל $2M+1$ דגימות מרכזיות, מהצורה:

1. חישוב התמרת DTFT הפוכה עבור תגובה להלם של מסנן אידיאלי

$$h[n]w[n] = \begin{cases} h_d[n] & -M \leqslant n \leqslant M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{9.11}$$

כאשר החלון $w[n]$ הינו אחד החלונות מהטבלה 9.1. לדוגמה, חלון מלבני הוא

$$w[n] = \begin{cases} 1 & n = -M, \ldots, M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{9.12}$$

2. הכפלה בחלון באורך $2M+1$
\+ הזזה $M \to$

לאחר הוספת השהייה מתאימה כדי להפוך את המסנן לסיבתי, מתקבל מסנן מקורב

$$h[n] = h_d\left[n-M\right]w[n-M], \quad n = 0, \ldots, 2M \tag{9.13}$$

דוגמה מספרית: מסנן LPF אידיאלי

1\. בתדר / התמרה הפוכה

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \xRightarrow{\text{DTFT}} h_d[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

$-\infty < n < \infty$
$\downarrow$
$-50 \leq n \leq 50$

2\. $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ $\quad N = 101$ אורך כולל

אורך כולל

```
N = 101;
%w_p = .2*pi;
%w_s = .3*pi;

w_c = pi/4;

n = (0:N-1) - N/2+1/2;
h_d  = sin(w_c * n)./(pi*n);
h_d(N/2+1/2) = w_c/pi; % solve the limit problem
```

תדר קטעון

$n = -50:50$

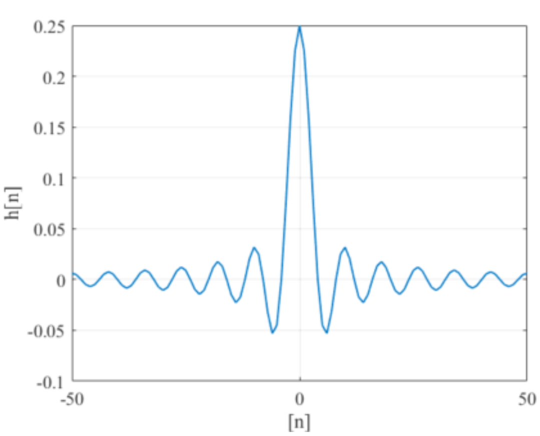
$\frac{\sin(\omega_c \cdot n)}{\pi \cdot n} = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \underbrace{\frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n}}_{\mathrm{sinc}(\omega_c n)}$

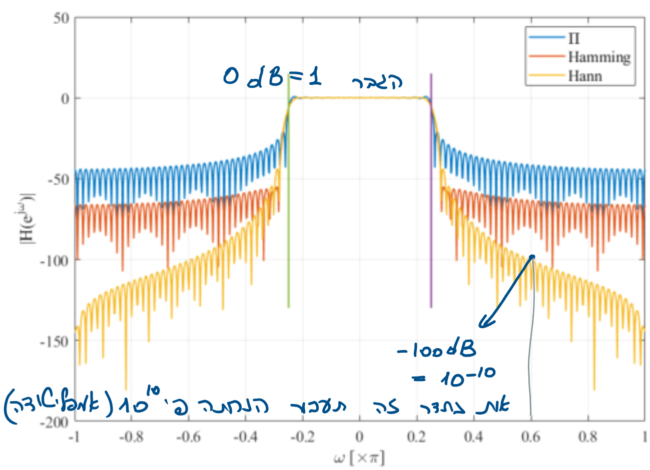
$\mathrm{sinc}(0) = 1$

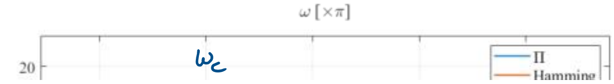
$\to n = 0 \Rightarrow h\_d = \mathrm{NaN} \leftrightarrow \frac{0}{0}$ לא יודע לחשב

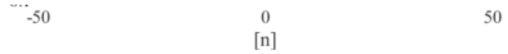
$h[0] = \frac{\omega_c}{\pi}$

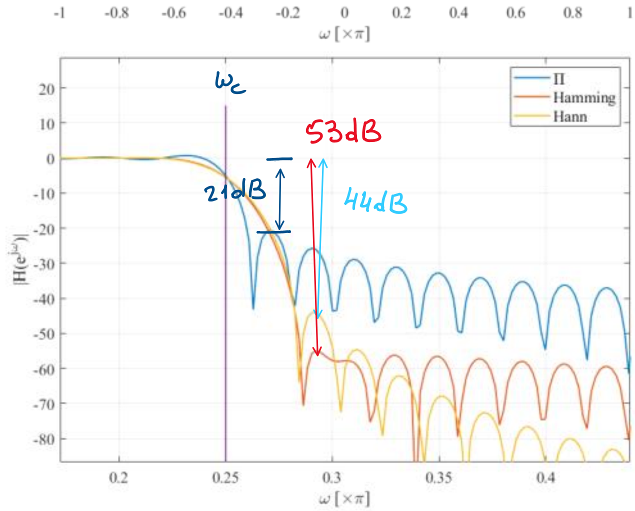
תגובה להלם של מסנן אידיאלי











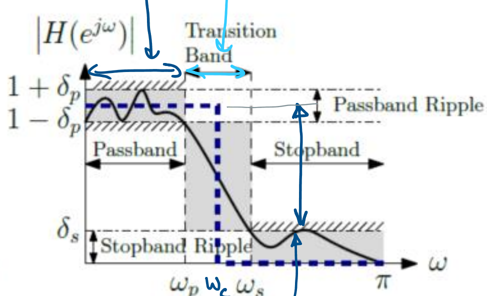
הסימון הוא של אמפליטודה של פיק גליות הכי גבוה.

הערות: תלויים באורך המסנן וניתנת לשינוי/תכנון ⇐ קובעים אורך מינימלי של המסנן

1. רוחב מינימלי של הפיק המרכזי ⇐ רוחב פס מינימלי של תחום העברה (passband)

2. רוחב מינימלי של תחום מעבר

3. תלוי בסוג חלון בלבד!



3. הפרש אמפליטודה בין הפיק המרכזי לבין הגליות המקסימליות

תכונות של חלונות:

Window name	Math. form $n=0,\ldots,M$	① Transition Bandwidth $(\omega_s-\omega_p)$	② Mainlobe Bandwidth (ω_p)	③ Bandstop Attenuation (dB)
Rectangle	$w[n]=1$	$\frac{1.84\pi}{M}$	$\frac{4\pi}{M+1}$	21
Bartlett	$w[n]=nu[n]-2nu\left[n-\frac{M}{2}\right]$	$\frac{3.80\pi}{M}$	$\frac{8\pi}{M}$	25
Hanning	$w[n]=0.5\left[1-\cos\left(\frac{2\pi k}{M-1}\right)\right]$	$\frac{6.22\pi}{M}$	$\frac{8\pi}{M}$	44
Hamming	$w[n]=0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi k}{M-1}\right)$	$\frac{6.64\pi}{M}$	$\frac{8\pi}{M}$	53
Blackman	$w[n]=0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi k}{M-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi k}{M-1}\right)$	$\frac{11.12\pi}{M}$	$\frac{12\pi}{M}$	74

סיכום:

- ☐ תכנון מבוסס ביטוי אנליטי של תגובה להלם.
- ☐ ביצועים מושפעים מאורך וסוג החלון.
- ☐ ישנו תעדוף (trade-off) בין אורך המסנן וביצועים

* קושי להגדיר ω_p, ω_s מראש עבור אורך נתון וסוג נתון של חלון

תכנון מסנן IIR (Infinite Impulse Responce) - תגובה להלם אינסופית בזמן

תזכורת

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$k>0$ $a_k=0$ ⇐ FIR

$k>0$ $a_k = 0$ ⇐ FIR

אחרת ⇐ IIR המכיל משוב של מוצא מהעבר ($y[n-k]$) ⇐ קטבים, בעיית יציבות

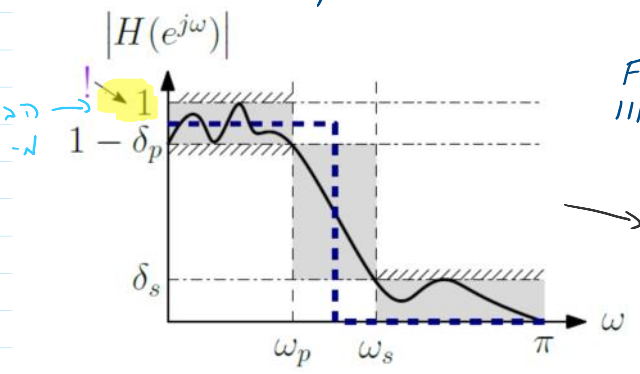
פונ' תמסורת של מערכת LTI

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

FIR = 1

IIR = פולינום

מפרט מסנן טיפוסי



סיכום המפרט

$$1-\delta_p \leqslant |H(e^{j\omega})| \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_p$$

$$|H(e^{j\omega})| \leqslant \delta_s, \qquad \omega_s \leqslant |\omega| \leqslant \pi$$

$$A_p = -20\log_{10}(1-\delta_p)$$

$$A_s = -20\log_{10}(\delta_s)$$

הבדלים בין FIR ל- IIR (מעבר לאורך תגובה להלם)

IIR: * פאזה לא ליניארית

* בד"כ דורש פחות חישובים מ- FIR עבור מפרט דומה (כפל וחיבור)

<u>סוגים נפוצים:</u>

Butterworth: מסנן ללא גלים (מונוטוני)

Chebyshev: Type I גלים בתחום העברה passband ומונוטוני ב Stopband

Type II הפוך סיבוכיות חישוב פחות מ- Butterworth

Elliptic: גליות בשני התחומים ← סיבוכיות פחותה מ- Chebyshev

פקודות שדברנו

filterDesigner

Hd = designfilt

* תכנון מסנני FIR על הנייר בשיטת החלונות

* שימוש בחלון Hamming ו/או Hann לניתוח אותות

* תכנון מסננים בשיטת הפשוטה (מופיע בפקודה designfilt)

יסנון את הותן

יסיגון את הזמן