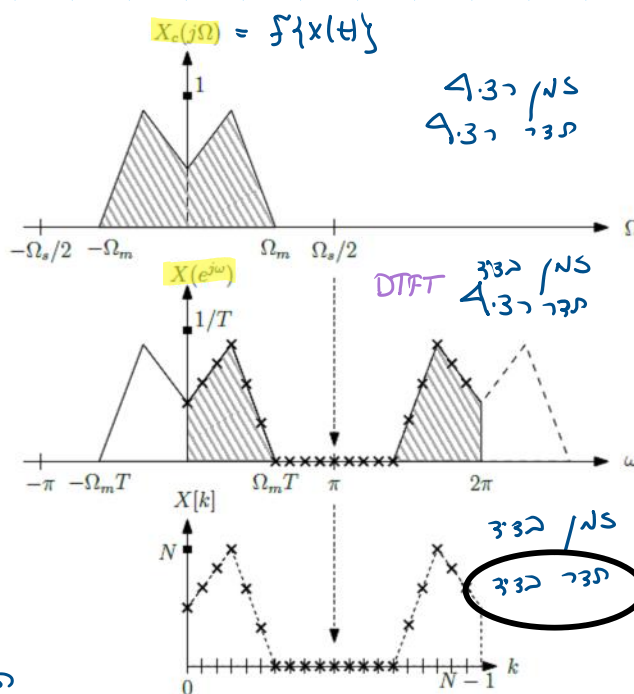


## Discrete Fourier Transform

DFT

הקצאה



$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$   
 $k=0, \dots, N-1$

$X[k] = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega_k = \frac{2\pi}{N}k} = X(z) \Big|_{z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$   
 $k=0, \dots, N-1$

הצבה במקום הצורה של DFT:

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left\{-j\frac{2\pi}{N}kn\right\}$$

התמרה הפוכה

$$x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left\{j\frac{2\pi}{N}kn\right\}$$

$$x[n] = \{1, 1, 1, 1\}$$

$$X(z) = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}, \quad z \neq 0.$$

פתרון:

(א) בהתאם להגדרה, מתקבל

(א) חשב התמרת DTFT של האות.

(ב) חשב התמרת DFT של האות.

$$X(e^{j\omega}) = X(z = e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j2\omega}(e^{j2\omega} - e^{-j2\omega})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} = \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{3}{2}\omega}$$

(ג) דיוק א'

(ד) זיג כי - ע"פ הצורה

$$X[k] = X(e^{j\omega_k}), \quad \omega_k = \left\{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$$

$$= [4, 0, 0, 0]$$

$$\omega_k = 0$$

$$H(e^{j0}) = H(1) = 4$$

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k=0, 1, 2, 3$$

$$X[0] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3] = 4$$

$$X[1] = 1 + e^{-j\frac{2\pi}{4}} + e^{-j\frac{2\pi}{4}2} + e^{-j\frac{2\pi}{4}3}$$

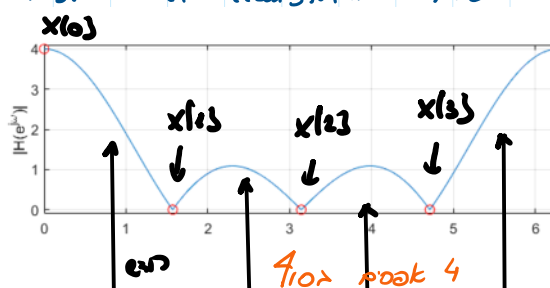
$$= 1 + e^{j\frac{\pi}{2}} + e^{j\pi} + e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 1 - j - 1 + j = 0$$

חישוב מספרי ישר

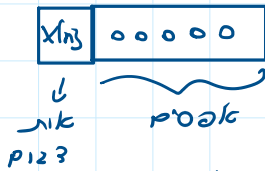
fast Fourier transform - FFT - אלגוריתם מהיר לחישוב של DFT

→ אף הנתאי קשר בין DFT ו FFT  
 הבה: אף של DFT נתן חיבה  
 יתר לניצול של האות



יותר מ'יצע על האות

פתיח: שיטת חיבור באפסים



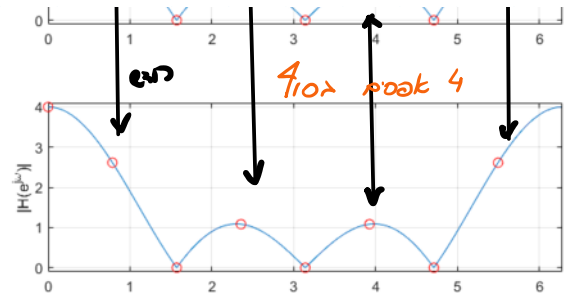
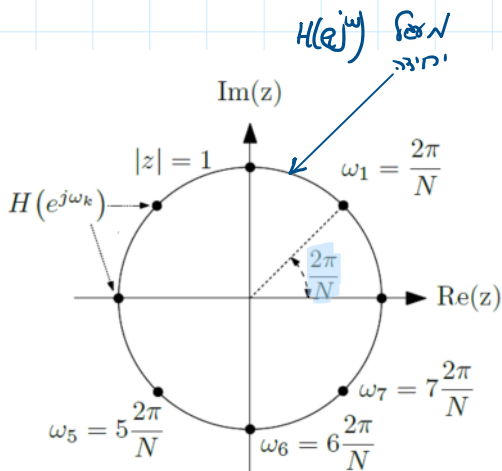
אות נחלף גאוק M:

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

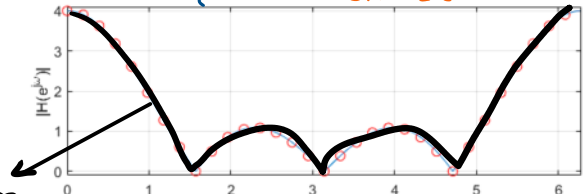
fft(x,M) ← נחלף

אוק  
חזק אחי  
חיבור באפסים

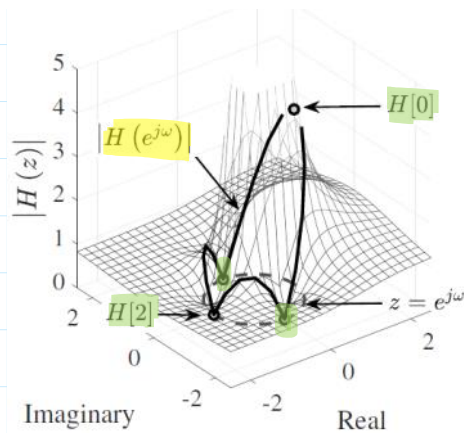
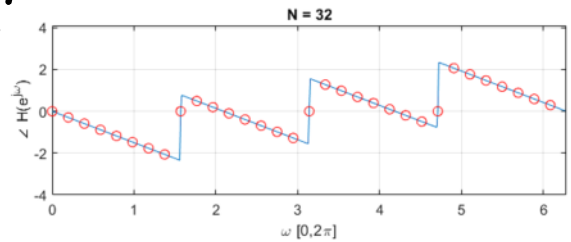
עיק ברירת לחצ  
הוא אוק של נחלף  
(על חיבור)



M=32 אוק ← אוק 28 אפסים



DTFT  
כעיו לאוק  
512



פכונות  
mod

פעולה a mod b היא שארית חיובית של החלוקה של מספר a במספר b.

אות לחצוני 3 קי.

$$x[k] = x[k \bmod N]$$

חיבור על עצמו כל  
N

תחום: k=0, ..., N-1

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{3} = 1 + \frac{0}{3}$$

$$-\frac{1}{3} = -1 + \frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} = -1 + \frac{1}{3}$$

צואה למסכית:

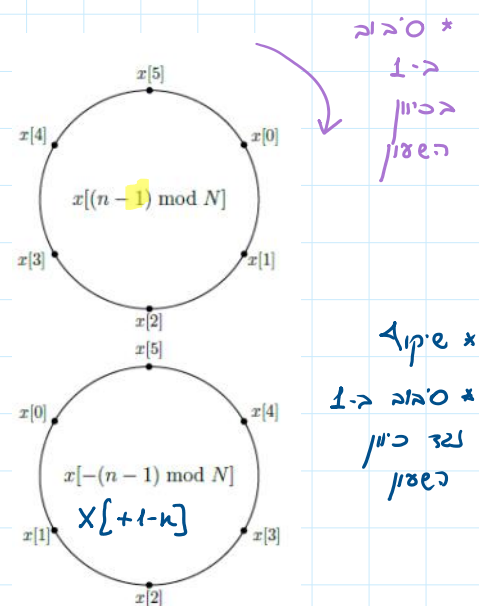
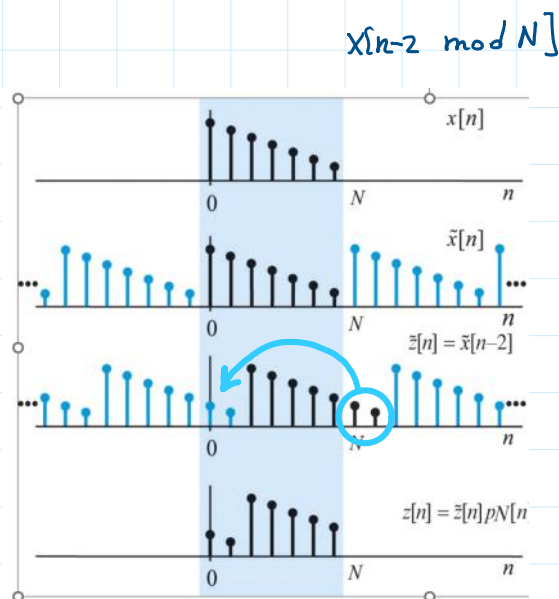
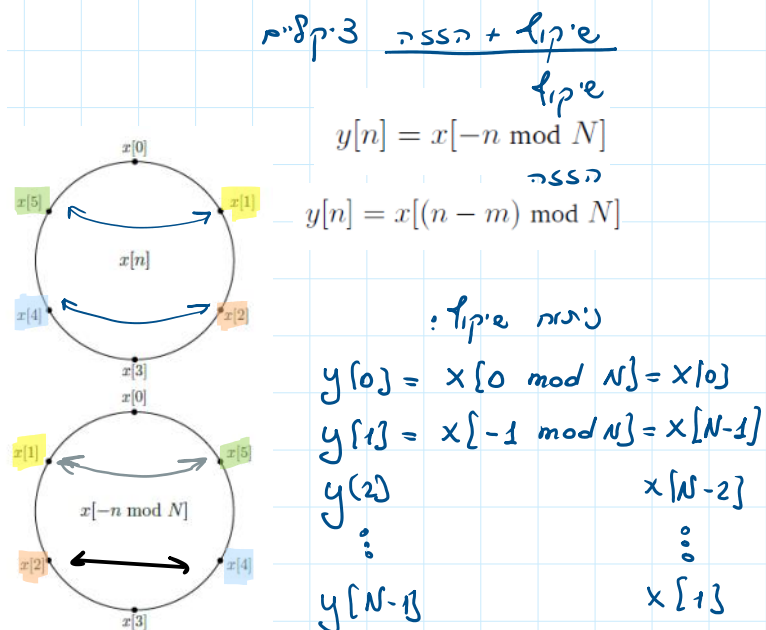
$$5 \bmod 3 = 2 \quad 1 \bmod 3 = 1$$

$$4 \bmod 3 = 1 \quad 0 \bmod 3 = 0$$

$$3 \bmod 3 = 0 \quad -1 \bmod 3 = 2 = -1 + 3$$

$$2 \bmod 3 = 2 \quad -2 \bmod 3 = 1 = -2 + 3$$

3-2



$$y[n] = \sum_m h[m]x[n-m] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

לכפלה בתור = קונקולוציה 3. קל

$$\text{DFT} \left\{ x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n] \right\} = X_1[k] X_2[k]$$

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[(n-m) \bmod N]$$

$$\text{DFT} \{x_1[n]x_2[n]\} = \frac{1}{N}X_1[k] \circledast X_2[k]$$

$$y[n] = x[n] \underset{3}{\overset{4}{\otimes}} h[n]$$

העצמה של קו' באור  $N$

$$y[n] = x[n] \otimes h[n]$$

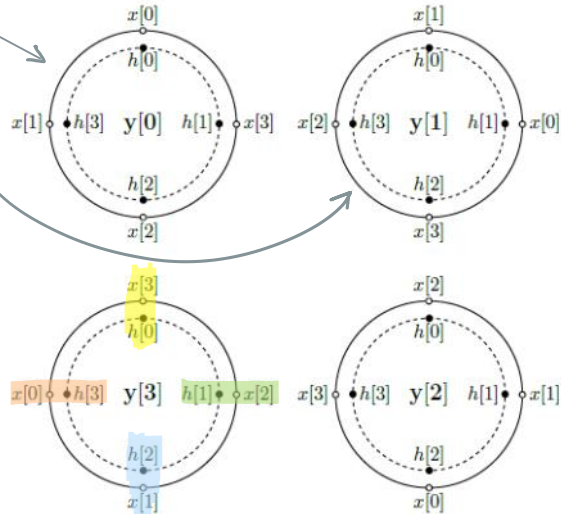
$$y[0] = \sum_{m=0}^3 h[m] x[-m \bmod 4]$$

$$y[1] = \sum_m h[m] x[1-m \bmod 4]$$

...

כוכב

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & x[3] & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0] & x[3] & x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] & x[3] \\ x[3] & x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \end{bmatrix}$$



כוכב  
ומכור  
של  
לסוגיים

$$y[3] = h[0]x[3] + h[1]x[2] + h[2]x[1] + h[3]x[0]$$

DFT נוסחה

$$\text{DFT} \{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1[k] + bX_2[k] \quad \text{ענאכית}$$

$$\text{DFT} \{x[(n-m) \bmod N]\} = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} X[k] \quad \text{הצבה בסמן}$$

$$\text{DFT} \{e^{j\frac{2\pi}{N}km} x[n]\} = X[(k-m) \bmod N] \quad \text{הצבה בסמן}$$

\* דואליות

$$\text{DFT} \{X[n]\} = Nx[(-k) \bmod N]$$

התמרה של סדרה בפנים

$$\text{DFT} \{x_1[n]x_2[n]\} = \frac{1}{N} X_1[k] \overset{N}{\otimes} X_2[k] \quad \text{* מכפלה בסמן היא קונבולוציה בסמן}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \quad \text{* שימור אנרגיה (פריס)}$$

Matlab נאמל

$$[36, 38, 36, 30] \leftarrow \text{ifft}(\text{fft}([1 \ 2 \ 3 \ 4]) \cdot \text{fft}([2 \ 3 \ 4 \ 5]))$$

x[n]

inverse

\* קונבולוציה  
בסמן

$$\text{IDFT} \{X[k]H[k]\} = x[n] \otimes h[n]$$

$$x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

\* נאמל

$$\text{DFT} \{ \text{DFT} \{x[n]\} / N \} = x[-k \bmod N]$$

$$\text{DFT} \{X[n]\} = Nx[(-k) \bmod N]$$

$$\text{fft}(\text{fft}(1:5))/5 \longrightarrow [1, 5, 4, 3, 2]$$



$\text{fft}(\text{fft}(1:5))/5 \longrightarrow [1,5,4,3,2]$