התמרת Z הפוכה

מטרה: בהינתן $X(z) \leftarrow x[n]$

ההתמרה ההפוכה (הגדרה 3.8): מוגדרת כדלקמן:

עבודה לפי הגדרה לא נוחה ומסורבלת.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

כאשר מסלול האינטגרציה כלשהו מוכל בתחום ההתכנסות.

שיטה מקובלת: שימוש בטבלאות ותכונות

דוגמה 3.9: נתונים האותות

דוגמה מהרצאה קודמת:

$$x_1[n] = u[n]$$
$$x_2[n] = a^n u[n]$$

חשב $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$

פתרון: התמרות הן

התמרת מתוך טבלה

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad ROC = |z| > 1$$
$$X_2(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad ROC = |z| > |a|$$

ביטוי מטבלה

$$Y(z) = X_1(z) X_2(z) = \boxed{\frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - az^{-1}}} \xrightarrow{\text{שברים חלקיים}} = A_1 \frac{1}{1 - z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 - a z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1-a} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{a}{1 - az^{-1}} \right]$$

$ROC = |z| > \max(|a|, 1)$

תזכורת: עבור אותות סיבתיים ROC הוא מחוץ לקוטב הגדול ביותר

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \frac{1}{1-a} \left[u[n] - a \left(a^n u[n] \right) \right]$$
$$= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n]$$

מטרה: חשב A_1, A_2

קוטב

$$A_1 = Y(z) \cdot \left(1 - p_1 z^{-1}\right) \Big|_{z = p_1}$$

$$\frac{z}{z-1} \Rightarrow p_1 = 1$$

$$= \frac{1}{\cancel{1 - z^{-1}}} \cdot \frac{1}{1 - a z^{-1}} \cdot \cancel{1 - (1) z^{-1}} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1-a}$$

$$A_2 = Y(z) \left(1 - \cancel{a z^{-1}}\right) \Big|_{z=a} = \frac{1}{1 - a^{-1}} = \frac{a}{a-1} = -a \cdot \frac{1}{1-a}$$

$$p_2 = a$$

$$\left(1 - p_2 z^{-1}\right)$$

דוגמה מספרית :

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$ $|z|>\frac{1}{3}$

$$X(z)=\frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$P_1=\frac{1}{4}$ $P_2=\frac{1}{3}$

$$A_1=X(z)\left(1-p_1z^{-1}\right)\Big|_{z=p_1=\frac{1}{4}}=\frac{\left(3-\frac{5}{6}z^{-1}\right)\cancel{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}}{\cancel{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=1/4}=1$$

$$=\frac{3-\frac{5}{6}\cdot 4}{1-\frac{1}{3}\cdot 4}$$

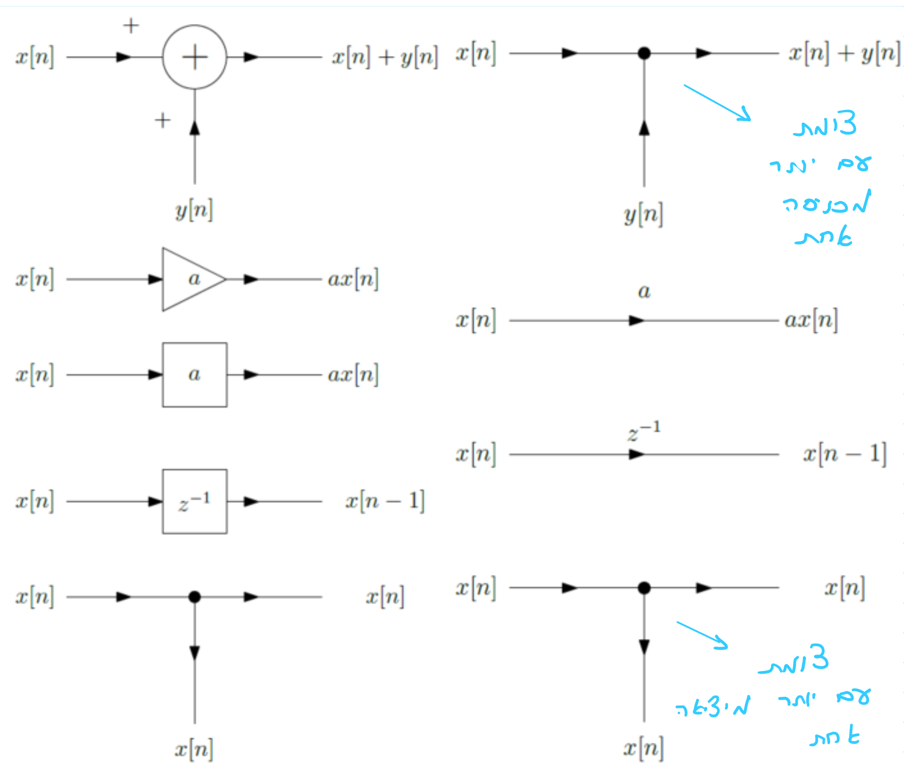
$\Rightarrow z^{-1}=4$

$$A_2=X(z)\left(1-p_2z^{-1}\right)\Big|_{z=p_2=\frac{1}{3}}=2,\qquad =\frac{3-\frac{5}{6}\cdot 3}{1-\frac{1}{4}\cdot 3}$$

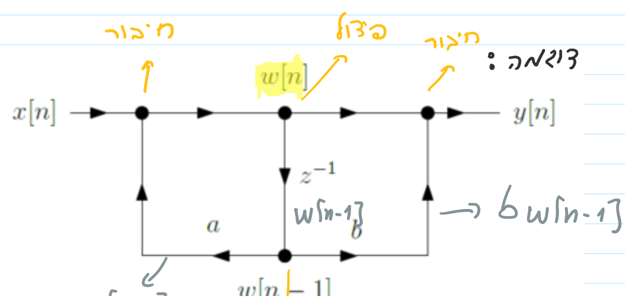
$$x[n]=\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]}+\underbrace{2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]}_{\text{מל בלאות}}$$

תשובה סופית :

$\boxed{\text{מיצוג מערכות}}$



דוגמה :



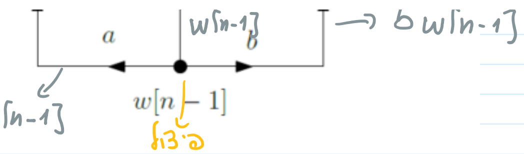
$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$, משוואת הפרשים

$w[n]=x[n]+a\,w[n-1]$

$W(z)=X(z)+a z^{-1}W(z)$

$$w[n] = x[n] + a\,w[n-1]$$

$$(1)\quad W(z) = X(z) + a z^{-1} W(z)$$



$$y[n] = w[n] + b\,w[n-1]$$

$$(2)\quad Y(z) = W(z) + b z^{-1} W(z)$$

דגש: הפתרון:

* נקודת עבר ע״פ הציר
* שימוש בהתמרת Z ע״פ הציר

תזכורת:

עתיד	הווה	עבר
$n+1$	n	$n-1$

$$(1) \rightarrow \quad X(z) = W(z)\left[1 - a z^{-1}\right]$$

$$(2) \rightarrow \quad Y(z) = W(z)\left[1 + b z^{-1}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + b z^{-1}}{1 - a z^{-1}} \rightarrow$$

$$|z| > |a|$$

$$Y(z) - a z^{-1} Y(z) = X(z) + b z^{-1} X(z)$$

משוואת הפרשים $y[n] - a y[n-1] = x[n] + b\,x[n-1]$

$$y[n] = a y[n-1] + x[n] + b\,x[n-1]$$

התמרת פוריה בזמן בדיד DTFT Discrete-Time Fourier Transform

הקדמה: התמרת DTFT היא מקרה פרטי של התמרת Z

מטרה: תגובת תדר / אמפליטודה / פאזה של מערכת / אות

התמרת DTFT (הגדרה 4.4): נתון אות בדיד $x[n]$, עבורו מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$.
התמרת DTFT מוגדרת ע״י

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega} \qquad (4.10)$$

ערכים של z על גבי מעגל ברדיוס 1 (מעגל יחידה)

הביטוי $X\left(e^{j\omega}\right)$ נקרא גם **תגובת תדר**.

הסבר ויזואלי

ω - תדירות זוויתית ספרתית

z - מספר מרוכב

$H(z)$ - פונקציה מרוכבת של z

$|H(z)|$ - פונ׳ ממשית של z

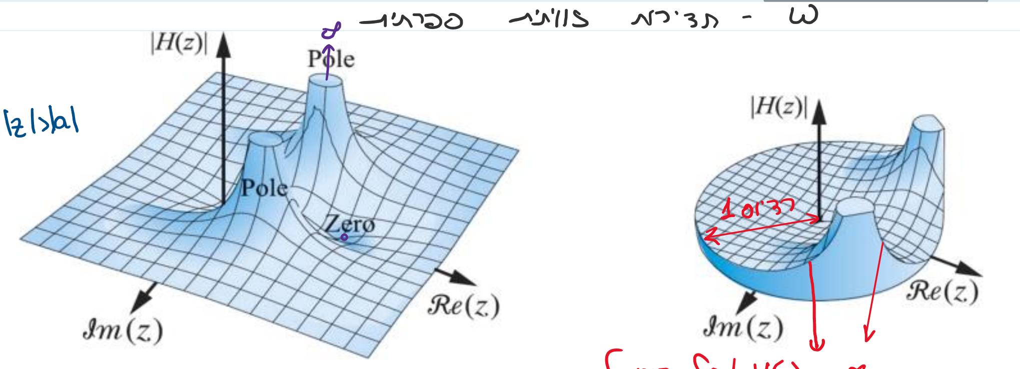
ל-z ערך ממשי ומדומה:

$z = a + jb$

$\Downarrow$

$|H(z)| = |H(a,b)|$

$|z| > |a|$



ערכי $H(z)$ מעל המעגל ברדיוס 1 נתון ע״י

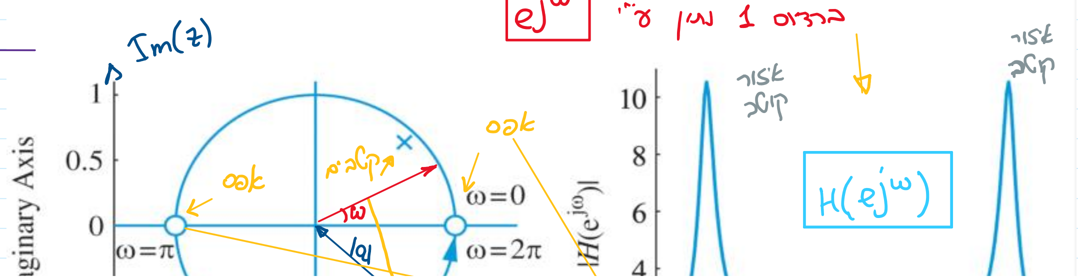
$\boxed{e^{j\omega}}$

---

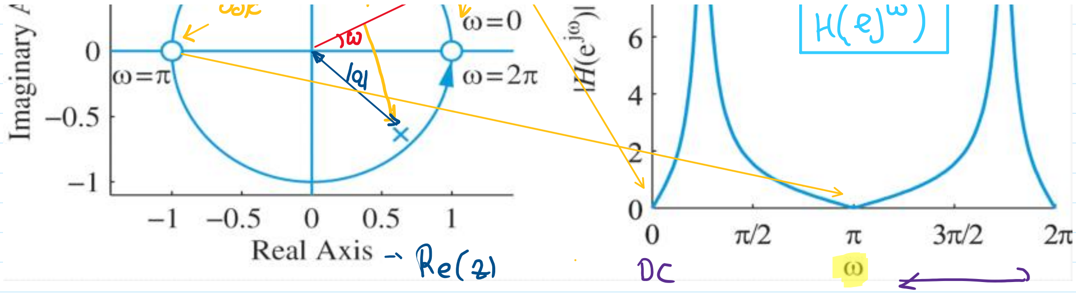
* קוטב $H(z) \rightarrow \infty$
* אפס $H(z) = 0$

---

* ω קובע מיקום (זווית)

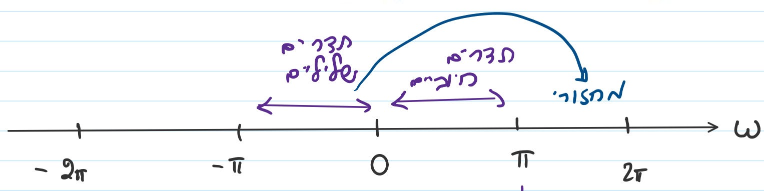


* ω קובע מיקום (זווית) ע"י "מעגל היחידה"



* **מחזוריות** (תכונה 4.2): בניגוד להתמרת פורייה בזמן רציף, ה-DTFT תמיד תהיה מחזורית במחזור 2π:

$$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-jk(\omega+2\pi)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-jk\omega}=X\left(e^{j\omega}\right) \tag{4.14}$$



* חשוב להסתכל בקטע באורך 2π בלבד, בד"כ $[-\pi,\pi]$ (יותר נוח) $[0,2\pi]$ (מעשית)

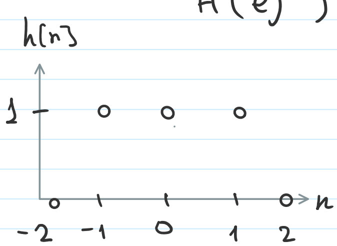
דוגמה 4.2: מצא התמרת DTFT של האות $h[n]=\delta[n-1]+\delta[n]+\delta[n+1]$.

$h[n]=\{1,\underset{n=0}{1},1\} \Rightarrow H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z^{-k}=z+1+z^{-1}$ $\quad z\neq 0,\infty$

דרך 1 - להציב $z=e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega})=e^{j\omega}+1+e^{-j\omega}=1+2\cos(\omega)$$

תזכורת: $\cos(\alpha)=\frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$



דרך 2 - חישוב ע"פ הגדרה:

$$\mathrm{DTFT}\left\{x[n]\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{j\omega n}$$

הערה: נתון אות בדיד $x[n]$, עבורו מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|<\infty$.

תנאי לקיום התמרת DTFT - אות $x[n]$ חסום/יציב

$\Leftarrow$ מעגל $|z|=1$ בתוך תחום ההתכנסות

התמרת DTFT הפוכה (הגדרה 4.5): ה-DTFT ההפוכה מוגדרת כדלקמן:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega.$$

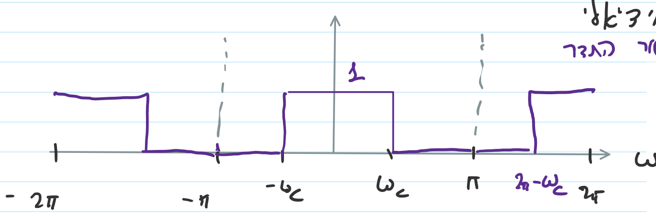
$H(e^{j\omega})$ - תגובת תדר

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega.$$

דוגמה: מסנן LPF אידיאלי

במישור התדר

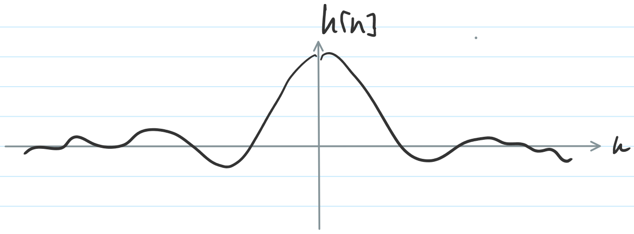
$H(e^{j\omega})$ - תגובת תדר



חישוב התמרה ע"פ הגדרה

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2j\pi n}\left[e^{jn\omega_c} - e^{-jn\omega_c}\right] = \underbrace{\frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n}}_{\text{סוג של sinc}}$$



* מסנן אינסופי בזמן } לא ניתן למימוש מדויק

* לא סיבתי

* ניתן למימוש באופן מקורב

תכונות התמרת DTFT

הערה: רב התכונות מקבילות לתכונות של התמרת Z

הזזה בזמן (תכונה 4.4): בהינתן אות $x[n]$ בעל התמרה $X(e^{j\omega})$, מתקיים

$$\text{DTFT}\left\{x[n-n_0]\right\} = e^{-j\omega n_0}X\left(e^{j\omega}\right)$$

תזכורת

$$\mathscr{Z}\left\{x[n-m]\right\} = z^{-m}X(z), \quad ROC = R \pm \{0,\infty\}.$$

הזזה בתדר (תכונה 4.5): בהינתן אות $x[n]$ בעל התמרה $X(e^{j\omega})$, מתקיים

$$\text{DTFT}\left\{e^{j\omega_0 n}x[n]\right\} = X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) \tag{4.16}$$

קונבולוציה (תכונה 4.6): כפי מה שראינו עבור התמרת Z, תכונת הקונבולוציה חשובה ביותר עבור מערכות LTI. אם נתונים שני אותות $h[n], x[n]$, בעלי אנרגיה סופית, $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h[k]\right| < \infty, \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|x[k]\right| < \infty$, מתקיים

קונבולוציה בזמן ← מכפלה בתדר

$$\text{DTFT}\left\{h[n] * x[n]\right\} = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \tag{4.17}$$

מכפלה בזמן (תכונה 4.7): התמרת DTFT של $x[n]y[n]$ היא:

מכפלה בזמן ← קונבולוציה בתדר

$$\text{DTFT}\left\{x[n]y[n]\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \tag{4.18}$$

משפט פרסבל (Parseval) (תכונה 4.8): משפט פרסבל מתאר את שימור אנרגיה (הגדרה 2.17) במישור הזמן ומישור התדר.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|x[k]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \tag{4.20}$$

$H(z)$ - פונקצית תמסורת

$H(e^{j\omega})$ - תגובת תדר

$|H(e^{j\omega})|$ - תגובת אמפליטודה

אפיון בדומה להתמרת פוריה "רגילה"

אפיון בדומה להתמרת פוריה "רגילה"

$H(e^{j\omega})$ - תגובת תדר

$|H(e^{j\omega})|$ - תגובת אמפליטודה

$\angle H(e^{j\omega})$ - תגובת פאזה

דוגמה: נתונה מערכת (יציבה) מוגדרת ע"י תגובה להלם $h[n]=\alpha^n u[n]$ $|\alpha|<1$

כלל $\quad H(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\cdot\frac{z}{z} \quad |z|>|\alpha| \;=\; \frac{z}{z-\alpha}$ פונ' תמסורת

$z=0$ אפס
$z=\alpha$ קוטב

$z=e^{j\omega}$ תגובת תדר

תזכורת
$e^{j\alpha}=cos(\alpha)+j\sin(\alpha)$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$-\alpha(\cos\omega - j\sin\omega)$
$= -\alpha\cos\omega + j\alpha\sin\omega$

$$=\frac{1}{1-\alpha\cos(\omega)+j\alpha\sin(\omega)}$$

$$=\frac{1}{[1-\alpha\cos(\omega)]+j\alpha\sin(\omega)}\cdot\frac{[1-\alpha\cos(\omega)]-j\alpha\sin(\omega)}{[1-\alpha\cos(\omega)]-j\alpha\sin(\omega)}$$

הכפלה בצמוד

$$=\underbrace{\frac{1-\alpha\cos(\omega)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}}_{\mathrm{Re}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}+j\underbrace{\frac{-\alpha\sin(\omega)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}}_{\mathrm{Im}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}$$

חלק ממשי   חלק מדומה

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\sqrt{H\left(e^{j\omega}\right)H^*\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)\left(1-\alpha e^{j\omega}\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}}$$

1/sqrt(1+.9^2-2*.9)

$$\frac{1}{\sqrt{1+0.9^2-2\cdot 0.9}}$$

תזכורות:
עבור מספרים מרוכבים
$x\cdot x^*=|x|^2$
$x=a+jb \Rightarrow x\cdot x^*=a^2+b^2$

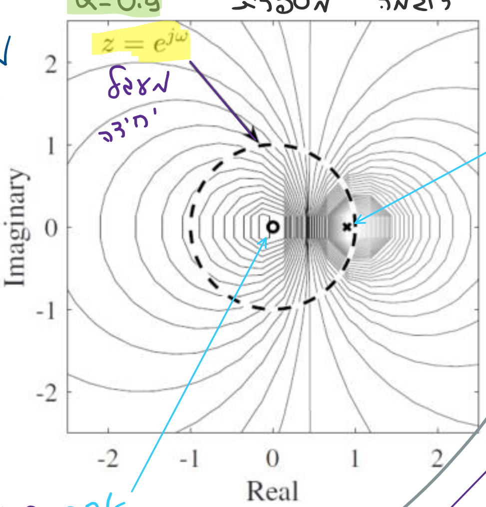
$$\angle H\left(e^{j\omega}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}{\mathrm{Re}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}\right)$$

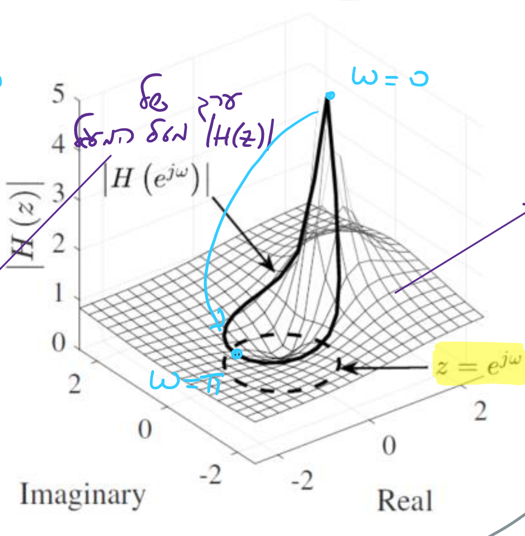
$$=-\arctan\left(\frac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos(\omega)}\right)$$

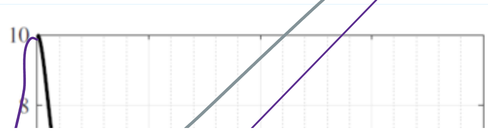
$h[n]=0.9^n u[n]$

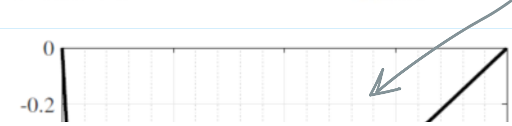
$\alpha=0.9$ דוגמה מספרית

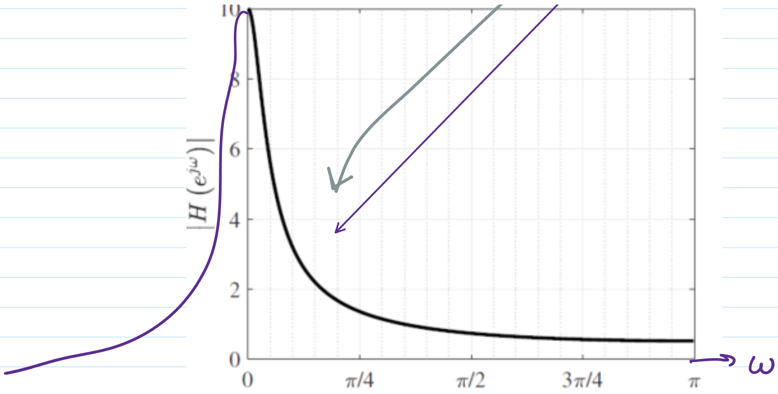
מבט-על על $|H(z)|$











א) תגובת אמפליטודה