

מסנן מתואם

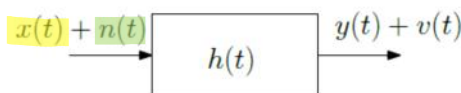
הגדרת הבעיה

נתונה מערכת LTI בעלת סכום כניסות הבאות (איור 12.1):

□ $x(t)$ - אות בעל צורה ידועה

□ $n(t)$ - רעש בעל $S_n(F)$ ידועה.

ניתן למתח אחר
וידעם בנבד
(גבולות של זמן)



הספק ממוצע של הרעש נתון ע"י

$$P_v = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H(F)|^2 dF$$

הספק האות בזמן הנתון $t = t_0$ הוא $P_{y_0} = y^2(t_0)$

למצוא מערכת $h(t)$ בעלת יחס אות לרעש מקסימלי

$$\max_{h(t)} SNR = \frac{P_y}{P_v} \Big|_{t=t_0} = \frac{P_{y_0}}{P_v}$$

המערכת הזאת תקרא מסנן מתואם.

ביטוח למסן

אי-שיוויון Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) g^*(\theta) d\theta \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\theta)|^2 d\theta \int_{-\infty}^{\infty} |g(\theta)|^2 d\theta$$

① = ④ ② ③

קשר מס-מזר

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(F) e^{j2\pi Ft} dF \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(F) H(F)}_{Y(F)} e^{j2\pi Ft} dF \end{aligned}$$

מזכר מתזר

סכום שלבים 1, 2, 3

$$P_{y_0} = y^2(t_0) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) g^*(\theta) d\theta \right|^2 \leq P_v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(F)|^2}{S_n(F)} dF$$

$$SNR = \frac{P_{y_0}}{P_v} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(F)|^2}{S_n(F)} dF \quad (*)$$

SNR מקסימלי מתקבל עבור המקרה שבו אי-שיוויון הופך לשיוויון.

$$f(\theta) = \alpha g(\theta) \quad \text{תנאי שיוויון}$$

$$H(F) \sqrt{S_n(F)} = \alpha \frac{X^*(F)}{\sqrt{S_n(F)}} e^{-j2\pi Ft_0}$$

הצבה של $g(\theta)$ ו $f(\theta)$

$$H(F) = \alpha \frac{X^*(F)}{S_n(F)} e^{-j2\pi Ft_0}$$

למסן / למואם
עבור רעש
 $S_n(F)$ בעל
שכיחות

רעש לבן גאוס

מקרה פרטי של רעש לבן גאוזי הוא גם שימושי וגם נוח יחסית לניתוח.

$n(t)$ הוא רעש לבן גאוזי בעל צפיפות הספק ספקטראלית $S_n(F) = N_0/2$, $\alpha = N_0/2$ **נבחר ערך**

הנחה **ניתוח**

$$H(F) = X^*(F)e^{-j2\pi Ft_0} \xleftrightarrow{F} h(t) = x(t_0 - t)$$

שיקוף ציר הזמן והסטה - t_0

$$\begin{aligned} Y(F) &= X(F)H(F) \\ &= X(F)X^*(F)e^{-j2\pi Ft_0} \\ &= S_x(F)e^{-j2\pi Ft_0} \end{aligned}$$

$a \cdot a^* = |a|^2$
 $S_x(F) = |X(F)|^2$

ניתוח המקרה - מה ה-SNR?

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(F)\}$$

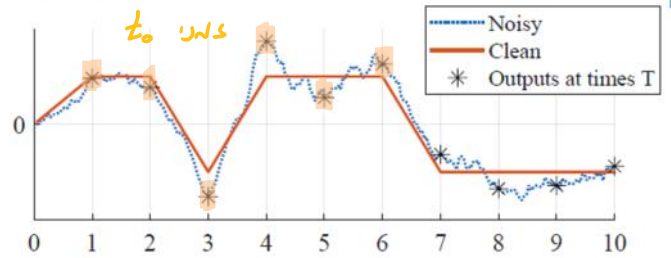
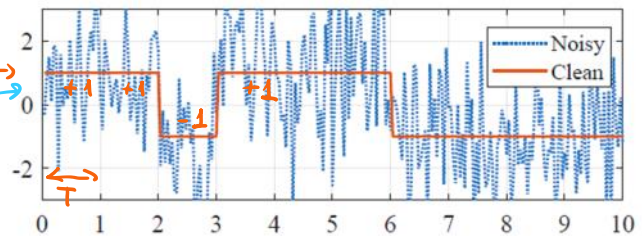
$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(F)e^{j2\pi Ft} dF \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(F)e^{j2\pi F(t-t_0)} dF = R_x(t-t_0) \end{aligned}$$

$y(t_0) = R_x(0) = P_x$ **ערך האות ממוצע במהלך הזמן = הספק הכוח**

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF \\ &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{2}{N_0} E_x \end{aligned}$$

הצבה \Rightarrow (5)

סימולציה של אות נקיטה



SNR=? **זוגית (מספרית)** **נתון פולס ברוחב T**

$$x(t) = u(t) - u(t-T) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מסנן המתואם עבור t_0 שרירותי נתון ע"י

$$\begin{aligned} h(t) &= x(t_0 - t) \\ &= u(t_0 - t) - u(t_0 - t - T) = \begin{cases} 1 & t_0 - T \leq t \leq t_0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) + v(t) &= h(t) * [x(t) + n(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)[x(s) + n(s)] ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s+t_0-t)[x(s) + n(s)] ds \\ &= \underbrace{\int_{t-t_0}^{t-t_0+T} x(s) ds}_{\text{signal } y(t)} + \underbrace{\int_{t-t_0}^{t-t_0+T} n(s) ds}_{\text{noise } v(t)} \end{aligned}$$

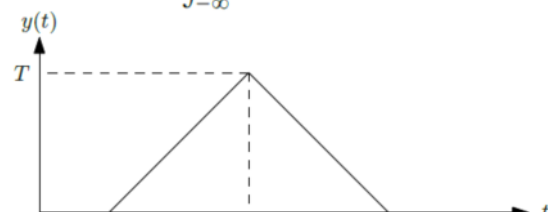
(5) $h(t-s) = x(t_0 - (t-s))$

$$\begin{aligned} &= x(s+t_0-t) \\ &= u(s+t_0-t) - u(s+t_0-t-T) \\ &= u(s-(t-t_0)) - u(s-(t-t_0+T)) \end{aligned}$$

$$x(t) + n(t) \rightarrow \int_{t-t_0}^{t-t_0+T} \rightarrow z(t) = y(t) + v(t)$$

אות ממוצע אחרי הצבה

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s+t_0-t)x(s) ds$$



הספק הרעש בממוצע

$$\begin{aligned} P_v &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(F) |H(F)|^2 dF \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(F)|^2 dF = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \end{aligned}$$

הצבה של $S_n(F)$

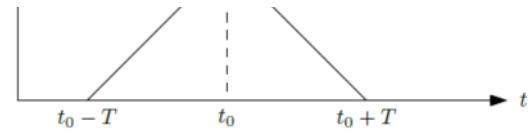
שילוב אנרגיה

שילור אנרגיה

הצבה של הביטוי
למשך (כחצי)

הצבה של אותו
לנושא
סיכום

$$\begin{aligned} &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t_0 - t)|^2 dt = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{t_0-T}^{t_0} dt = \\ &= \frac{N_0}{2} T = \frac{N_0}{2} E_x \end{aligned}$$



$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(s) ds = E_x = T$$

סיכום הנושא

$$SNR = \frac{y^2(t_0)}{P_v} = \frac{2}{N_0} E_x = \frac{2}{N_0} T$$