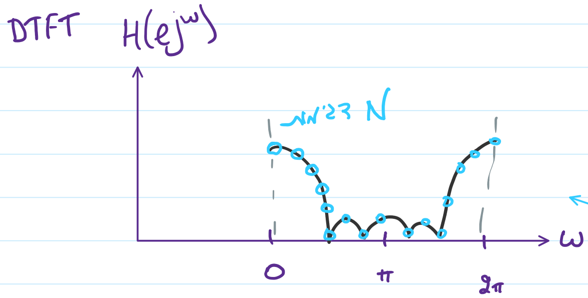
התמרת פוריה בדידה

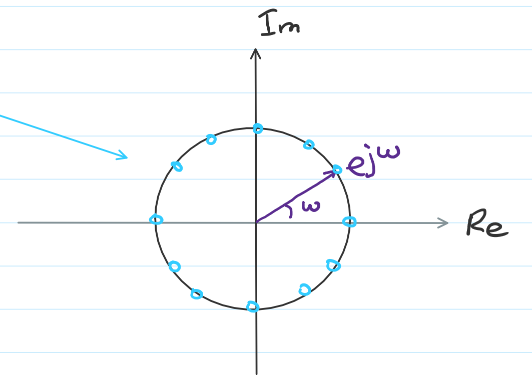
תזכורת: DTFT · התמרת פוריה בזמן בדיד ותדר רציף

מטרה: DFT התמרת פוריה בזמן בדיד ובתדר בדיד, הניתן לחישוב מספרי.

Discrete Fourier Transform

שיטה: לעשות N דגימות בתדר הרציף ω.





התמרת DTFT היא ערכים של התמרת Z
ע"ג מעגל היחידה

סיכום ביניים:

N - מספר דגימות בתדר = מספר דגימות בזמן

2π - סה"כ תדר ω

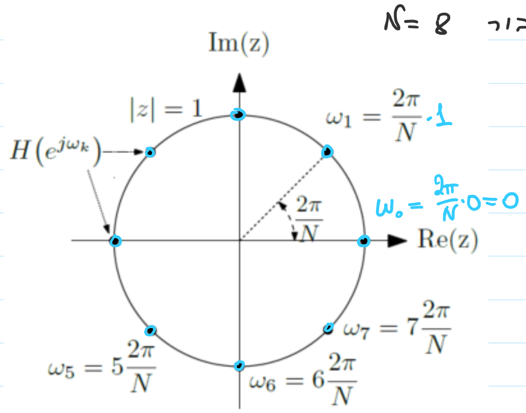
$\frac{2\pi}{N}$ מרווחים בתדר בין הדגימות

$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ נקודת דגימה בתדר

$k=0,\dots,N-1$

k "מספר סידורי" של הדגימה

דוגמה עבור $N=8$



הגדרה:

$$X[k] = H(e^{j\omega})\Big|_{\omega_k=\frac{2\pi k}{N}} = X(z)\Big|_{z_k=e^{j\frac{2\pi k}{N}} = e^{j\omega_k}}$$

הערה: תנאי לקיום התמרת DFT
היא קיום של התמרת DTFT
בפועל, תמיד מדובר בסדרה
סופית ⇐ אנרגיה סופית

הצבה של הדגימות בתדר בתוך Z/DTFT

$$X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left\{-j\frac{2\pi}{N}kn\right\}$$

התמרה הפוכה

$$x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\exp\left\{j\frac{2\pi}{N}kn\right\}$$

דוגמה: נתון אות $x[n] = \{1,1,1,1\}$

$X(z), X(e^{j\omega}) \rightarrow X[k]$

חישוב - ראה הרצאה 2
$$X(z)=\frac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}},\quad z\neq 0$$

DTFT הוא מקרה פרטי
של הצבה של $z=e^{j\omega}$ התמרת Z

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(z=e^{j\omega}\right)=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$\boxed{=\frac{e^{j2\omega}\left(e^{+j2\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{e^{j\frac{\omega}{2}}\left(e^{+j\frac{\omega}{2}}-e^{j\frac{\omega}{2}}\right)}=\underbrace{\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}}_{\text{ממשי}}\underbrace{e^{-j\frac{3}{2}\omega}}_{\text{פאזה לינארית}}}$$

תזכורת

DFT הוא מקרה פרטי
של DTFT

$$k=0,\dots,N-1\Rightarrow \overbrace{0,\dots,3}^{\text{סה"כ 4 ערכים}} \qquad X[k]=X\left(e^{j\omega_k}\right)$$

$$\omega_k=\frac{2\pi}{N}\cdot k \qquad \begin{aligned}\omega_0&=\tfrac{2\pi}{4}\cdot 0=0\\ \omega_1&=\tfrac{2\pi}{4}=\tfrac{\pi}{2}\\ \omega_2&=\pi\\ \omega_3&=\tfrac{2\pi}{4}\cdot 3=\tfrac{3}{2}\pi\end{aligned} \Rightarrow \left.\begin{aligned}X[0]&=X\left(e^{j0}\right)=4\\ X[1]&=X\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)=0\\ X[2]&=0\\ X[3]&=0\end{aligned}\right]$$

דרך א'
חישוב ע"י מקרה
פרטי של
התמרת DTFT
בנקודות ω_k

$x[n]=\{1,1,1,1\}$
$\Rightarrow X[k]=\{4,0,0,0\}$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\exp\left\{-j\frac{2\pi}{N}kn\right\}$$

$$X[0]=\sum_{n=0}^{3}x[n]\underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{4}(k=0)\cdot n}}_{=1}=1+1+1+1$$

$$X[1]=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{4}(k=1)\cdot n}$$
$$=1+e^{-j\frac{2\pi}{4}}+e^{-j\frac{2\pi}{4}2}+e^{-j\frac{2\pi}{4}3}$$
$$=1+e^{j\frac{\pi}{2}}+e^{j\pi}+e^{j\frac{3\pi}{2}}$$
$$=1-j-1+j=0$$

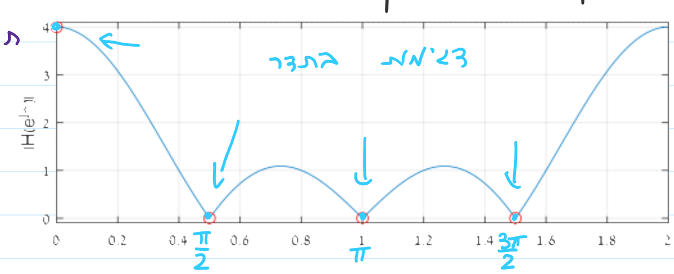
דרך ב': חישוב
מספרי ישיר
ע"פ הגדרה

$\boxed{\text{חישוב מספרי!}}$

FFT = Fast Fourier Transform
מימוש יעיל לחישובית
של התמרת DFT

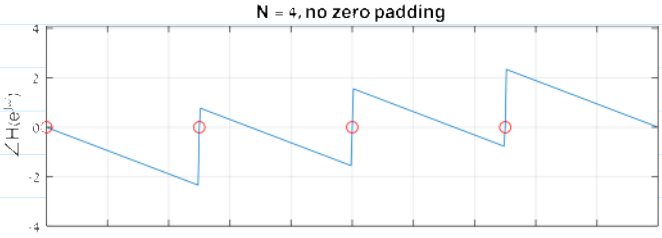
קשר בין גרפי DFT ל DTFT
$\omega_0=0$

תגובת
אמפליטודה
$|H(e^{j\omega})|$



N = 4, no zero padding

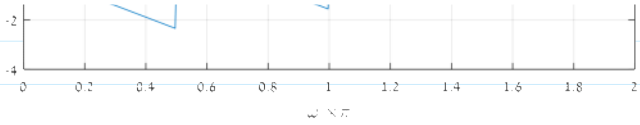
תגובת
פאזה
$\angle H(e^{j\omega})$



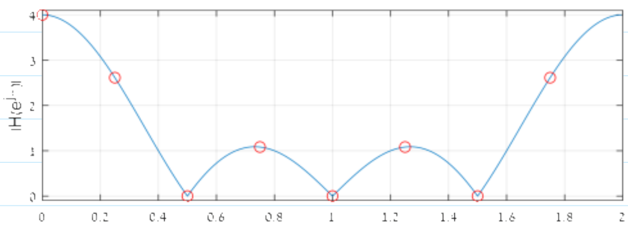
בעיה:
מספר דגימות קטן מדי

פתרון: הגדלה של כמות
הדגימות

ש.ב.: להגדיל את N
תזכורת: N = מספר דגימות של האות
בפועל ⇐ הגדלה של N
פירושה הוספה אפסים

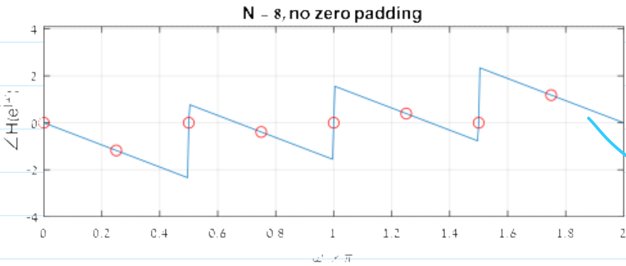


בעצם ⇐ הגדלה של N
פירושה הוספת אפסים
מ-33 ימין של האות



$N=8$

$$x[n]=\{\underbrace{1,1,1,1}_{\text{את המקורי}},\underbrace{0,0,0,0}_{\text{הוספת אפסים עד לאורך } N \text{ הנדרש}}\}$$



תזכורת: משמעות הסימון

$$x[n]=\{\underbrace{\quad}_{\text{אפסים}}\ \underset{n=0}{1},1,1,1\ \underbrace{\quad}_{\text{אפסים סיבתיים}}\}$$

הגרף של DTFT הוא בעצם DFT
עם $N=512$ (הוספת 508 אפסים סיבתיים)

freqz

סיכום: ניתן להציג גרפית התמרת DTFT ע"י הוספת מספיק אפסים

תכונות DFT

DTFT היא מחזורית ב-2π ⇐ DFT מחזורי ב-N וזה משפיע על כל התכונות

* הקדמה: פעולת mod(ulo)

הגדרה: פעולה $a \bmod b$ היא שארית חיובית של החלוקה של מספר a במספר b.

$1+\frac{2}{3}$	$5 \bmod 3 = 2$
	$4 \bmod 3 = 1$
$1+\frac{0}{3}$	$3 \bmod 3 = 0$
$0+\frac{2}{3}$	$2 \bmod 3 = 2$
	$1 \bmod 3 = 1$
	$0 \bmod 3 = 0$
$-\frac{1}{3}=-1+\frac{2}{3}$	$-1 \bmod 3 = 2$
$-\frac{2}{3}=-1+\frac{1}{3}$	$-2 \bmod 3 = 1$

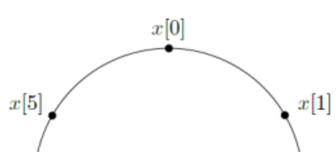
תכונה: מחזוריות של DFT

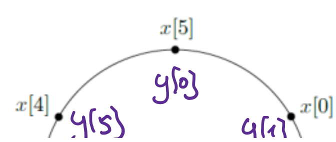
* הגדרה: $X[k] = X[\underbrace{k \bmod N}]$

אופן רישום של
מחזוריות ב-N

* פעולות ציקליות – הזזה / שיקוף
מחזוריות

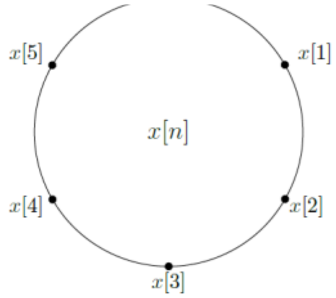
דוגמה: $y[n]=x[(n-1) \bmod N]$

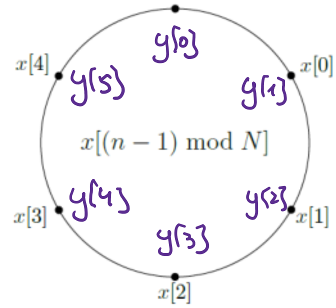




דרך א'

דרך א' להצגה





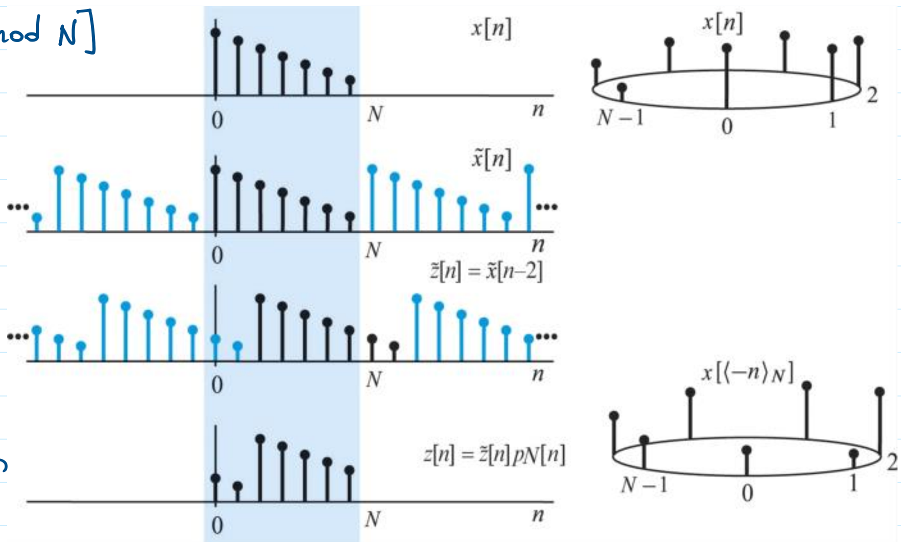
דרך ב' להצגה

$y[n]= x[(n-2) \bmod N]$

← הרחבה מחזורית

← מזיזים ב-2

← לוקחים N איברים $n=0,..,N-1$

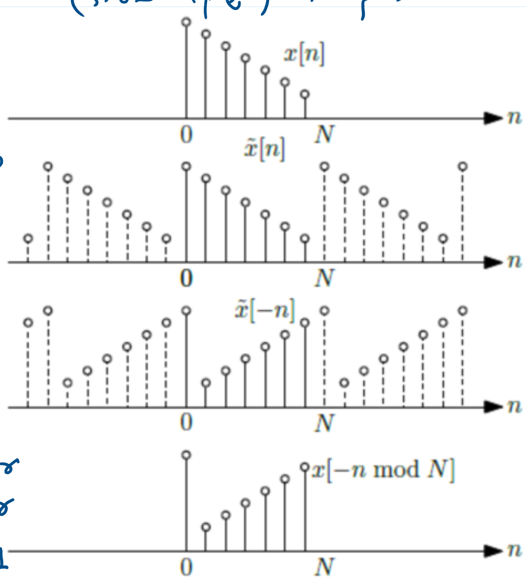


דרך ב' (שיקוף בלבד)

הרחבה מחזורית

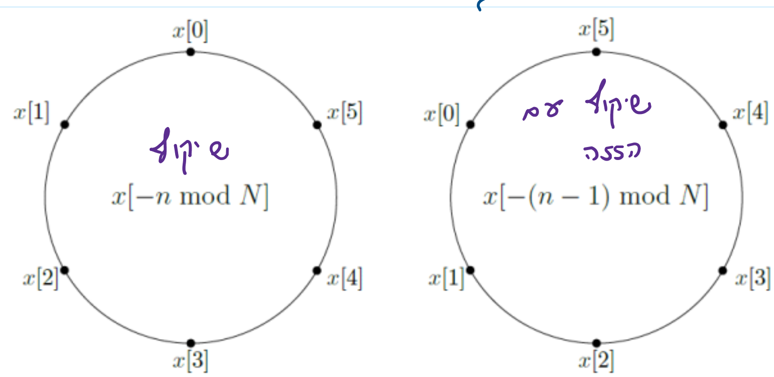
שיקוף "רגיל"

ערכים עבור $n=0,..,N-1$



דוגמה:

דרך א' לייצוג



שיקוף : רישום ע"י נוסחא :

$$x[-n \bmod N] = \begin{cases} x[0] & n=0 \\ x[N-n] & n=1,\dots,N-1 \end{cases}$$

פירוט תכונות של DFT

הערה: אם מרפדים באפסים, צריכים לוודא שמשווים $x_2[n]$, $x_1[n]$ באותו אורך

לינאריות (תכונה 7.2): עבור שני אותות סופיים בזמן $x_2[n], x_1[n]$, ובעלי התמרות
$X_1[k] = \text{DFT}\{x_1[n]\}, X_2[k] = \text{DFT}\{x_2[n]\}$

$$\text{DFT}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1[k] + bX_2[k]$$

$\text{DFT}\{x[(n-m) \bmod N]\} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot m} X[k]$ הזזה ...

באותו אורך

$$\mathrm{DFT}\{x[(n-m) \bmod N]\} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot m} X[k]$$ הזזה בזמן

$$\mathrm{DFT}\{e^{j\frac{2\pi}{N}mn} x[n]\} = X[(k-m) \bmod N]$$ הזזה בתדר

קונבולוציה ציקלית (הגדרה 7.7): עבור שני אותות סופיים בזמן, $x_1[n]$ באורך N_1 ו-$x_2[n]$ באורך N_2, כאשר $N \geqslant \max(N_1, N_2)$, ניתן להגדיר

$$x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m) \bmod N] \tag{7.16}$$

⇐ קונבולוציה מחזורית ציקלית בזמן

מכפלה בתדר (תכונה 7.7): עבור שני אותות סופיים בזמן, $x_1[n]$ באורך N_1 ו-$x_2[n]$ באורך N_2, כאשר $N \geqslant \max(N_1, N_2)$. מתקבל:

$$\mathrm{DFT}\left\{x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n]\right\} = X_1[k]X_2[k] \tag{7.17}$$

קונבולוציה ציקלית - הרחבה

$$\boxed{x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m) \bmod N]}$$

השוני מקונבולוציה רגילה

הערות: * אורך הקונבולוציה N היא חלק מהגדרה

$$\boxed{\text{חייב להתקיים} \quad N \geqslant \max(N_1, N_2)}$$

$x_1[n]$ באורך N_1

$x_2[n]$ באורך N_2

תמיד ניתן להוסיף אפסים עד לאורך N הרצוי

$$x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n] = x_2[n] \overset{N}{\circledast} x_1[n] \,*$$

דוגמה: נתון $x[n] = \{x[0], x[1], x[2], x[3]\}$

$h[n] = \{y[0], y[1], y[2], y[3]\}$

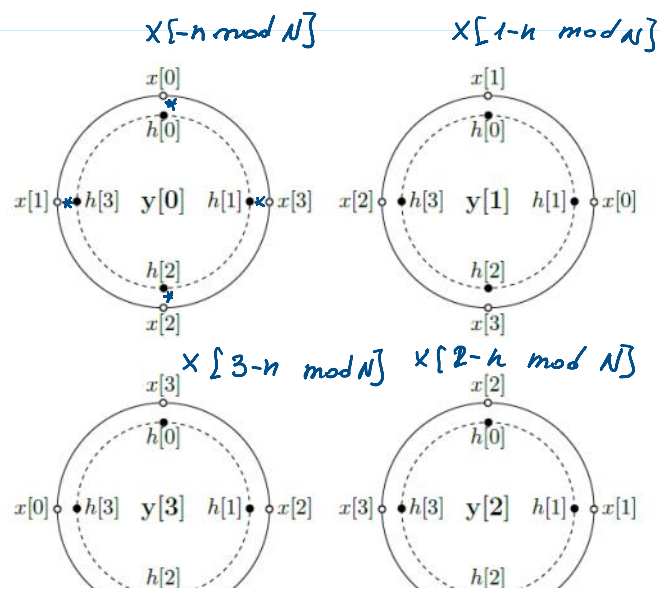
2 סדרות באורך $N = 4$

$$y[n] = x_1[n] \overset{N}{\circledast} h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]h[(n-m) \bmod N]$$

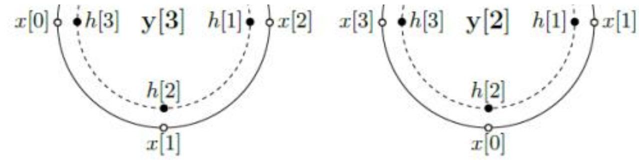
$$y[0] = \sum_{m=0}^{3} x[m]h[-m \bmod 4]$$

$$= x[0]h[0] + x[1]\underbrace{h[-1 \bmod 4]}_{3}$$

$$+ x[2]\underbrace{h[-2 \bmod 4]}_{2} + x[3]\underbrace{h[-3 \bmod 4]}_{1}$$



$+ x[2]\underbrace{[n-2 \bmod 4]}_{2} + x[3]\underbrace{[n-3 \bmod 4]}_{1}$



$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & x[3] & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0] & x[3] & x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] & x[3] \\ x[3] & x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & x[3] & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0] & x[3] & x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] & x[3] \\ x[3] & x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \end{bmatrix}$$

דוגמה מספרית: $x_2[n] = \{1, 2, 1\}$ $x_1[n] = \{4, 5, 7, 8\}$

$N=4$

$x_1[n]$	4	5	7	8	
$x_2[-n \bmod 4]$	1	0	1	2	$\to 4\cdot1 + 5\cdot0 + 7\cdot1 + 8\cdot2 = 27$
$x_2[1-n \bmod 4]$	2	1	0	1	$\to 4\cdot2 + 5\cdot1 + 7\cdot0 + 8\cdot1 = 21$
	1	2	1	0	21
	0	1	2	1	$\to 4\cdot0 + 5\cdot1 + 7\cdot2 + 8\cdot1 = 27$
	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	

חזרה לרשימת התכונות

דואליות (תכונה 7.5): עבור אות סופי בזמן $x[n]$, ובעל התמרה $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\}$;

$$\text{DFT}\{X[n]\} = Nx[(-k) \bmod N]$$

התמרה   זמן "רגיל"

מכפלה בזמן = קונבולוציה ציקלית בתדר

כפל (תכונה 7.8): עבור שני אותות סופיים בזמן, $x_1[n]$ באורך N_1 ו-$x_2[n]$ באורך N_2, כאשר $N \geqslant \max(N_1, N_2)$. מתקבל:

$$\text{DFT}\{x_1[n]x_2[n]\} = \frac{1}{N} X_1[k] \overset{N}{\circledast} X_2[k] \qquad (7.20)$$

שימור אנרגיה

משפט פרסבל (תכונה 7.9): נתון אות בדיד $x[n]$ סופי בזמן, באורך N, ובעל התמרה $X[k]$.
המשפט מתאר שימור אנרגיה (הגדרה 2.17) מהצורה

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \qquad (7.22)$$