DTFT - התמרת פוריה בזמן בדיד

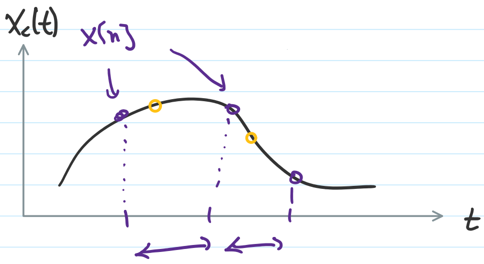
מטרה: קשר בין התמרת פוריה בזמן בדיד להתמרת פוריה בזמן רציף

אותות "ספרתיים" אותות "אנלוגיים"

הקדמה: דגימה $x[n] = x_c(nT)$

continous

רציף



דוגמה: נתון את $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$

> הבהרה: $\underbrace{F\,[Hz]}_{\text{תדר}}$ $= 2\pi F$ $\Omega_0 \left[\frac{rad}{sec}\right]$ תדירות זוויתית של האות
>
> תדר דגימה $F_s = \frac{1}{T}\ \{Hz\}$
>
> $\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F_s$

$$x[n] = x_c(nT) = \cos(n\underbrace{\Omega_0 T}_{\omega_0=\Omega T}) = \cos(\omega_0 n)$$

> הבהרה: $\omega\,[rad]$ - תדירות זוויתית בזמן בדיד

דוגמה מספרית: $T = 1sec$

$x_1(t) = \cos(0.6\pi t) \rightarrow x_1[n] = \cos(0.6\pi n)$

$\Omega_0 = 0.6\pi$ $\omega_0 = 0.6\pi$

$x_2(t) = \cos(2.6\pi t) \rightarrow x_2[n] = \cos(2.6\pi n) = \cos(0.6\pi n + 2\pi n) = x_1[n]$

$= \cos(0.6\pi n)$

התקבלו 2 אותות דגומים זהים, למרות שאותות המקוריים היו שונים

> תזכורת: **משפט Nyquist**
>
> בגלל דרישה של תדר דגימה להיות ליתר מפעמיים תדר האות המקסימלי.

$\rightarrow$ aliasing :תופעה

$x_c(t)$ את מקורי בזמן רציף $\rightarrow \otimes \rightarrow x_s(t) = \sum_n x[nT]\,\delta(t-nT) \rightarrow$

דגימה:

$x[n] = x_c(nT)$

אות מקורי בזמן רציף $x_c(t) \to \otimes \to x_s(t) = \sum_n x(nT)\delta(t-nT) \to$ דגימה: $x[n] = x_c(nT)$

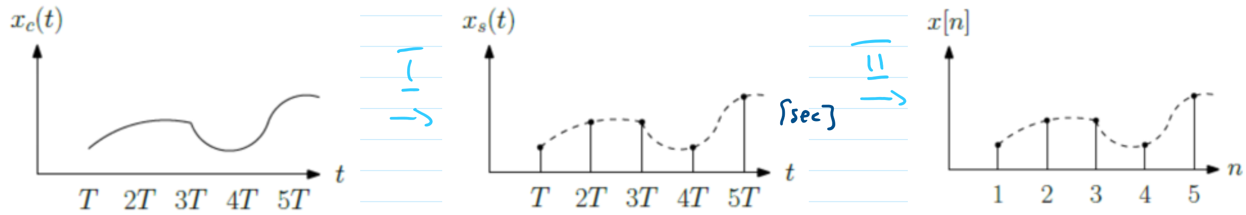
$s(t)$ רכבת הלמים

Sampled — אות דגום בזמן רציף

אות דגום בזמן בדיד

אותות ומערכות

נושא בקורס זה



מטרה: ניתוח מעברים I, II במישור התדר

$\boxed{\text{מעבר I}}$

רכבת הלמים:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(j\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

תזכורת: התמרת פורייה

$$X(j\Omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t) \overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} X(j\Omega)$$

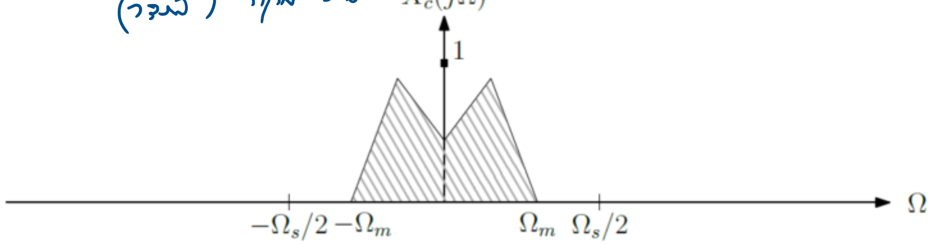
מישור הזמן

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t)s(t) \\ &= x_c(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t-kT) \end{aligned}$$

מישור התדר

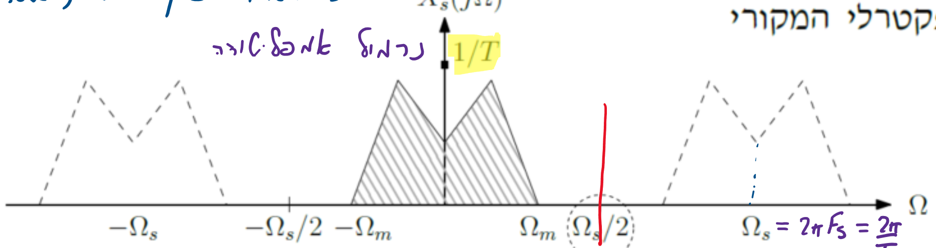
$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \mathscr{F}\{x_c(t)s(t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega) * S(j\Omega) \\ &\boxed{= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega - k\Omega_s\right)\right)} \end{aligned}$$

$X_c(j\Omega)$ - אות מקורי (בתדר)

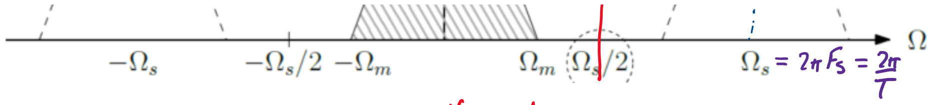


$X_s(j\Omega)$ - אות דגום בזמן רציף (בתדר)

נרמול אמפליטודה



שכפולים של המידע הספקטרלי המקורי



תנאי Nyquist $\underbrace{\Omega_m}_{\text{תדר מקסימלי של האות } X_c(t)} < \frac{\Omega_s}{2}$

$\boxed{\text{מעבר II}}$

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t-kT)$$

$$X_s(j\Omega) = \mathscr{F}\{x_s(t)\}$$

התמרת פורייה לפי הגדרה

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t-kT)e^{-j\Omega t}dt$$

ניתן לשנות סדר סכימה ואינטגרציה

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\underbrace{\Omega T}_{\omega}n} \leftarrow \begin{cases}\omega = \Omega T \\ x[n] = x_c(nT)\end{cases}$$

התמרת DTFT

$$\boxed{\begin{aligned} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= X\left(e^{j\omega}\right)\end{aligned}}$$

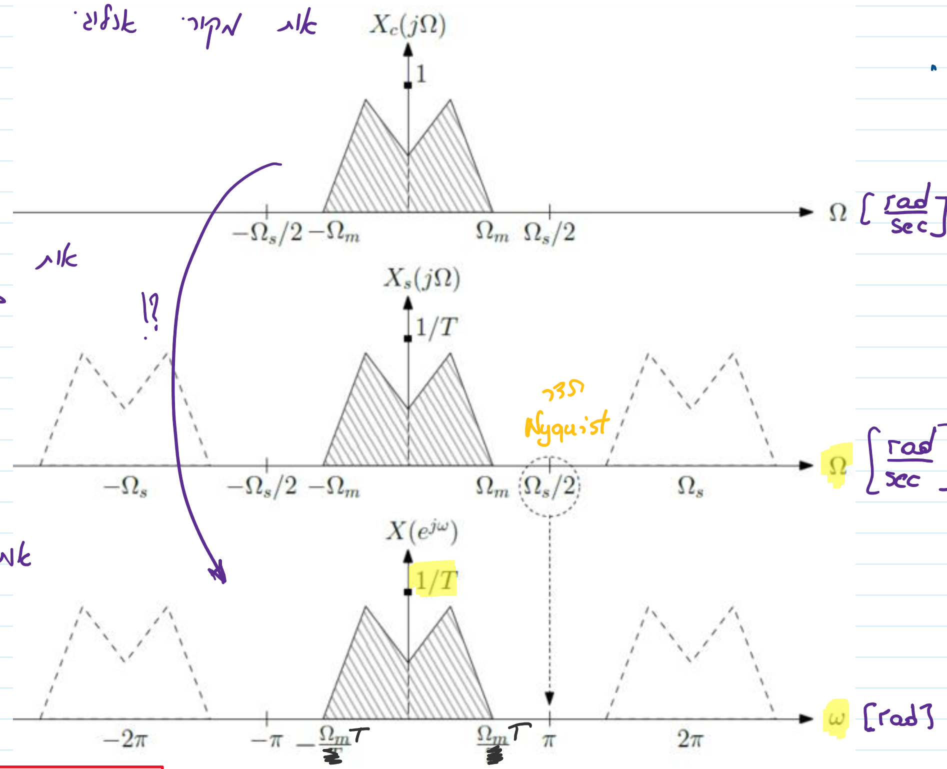
$\mathscr{F}\{x_c(t)\}$ אות מקורי אנלוגי

אות אחרי הכפלה ברכבת הלמים

!?

אות בזמן בדיד

$DTFT\{x[n]\}$



עדיין "רגיל"

עדיין מחזורי

תדר מקסימלי ספרתי

$$\boxed{\omega = \Omega T}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\pi = \frac{\Omega_s}{2}\cdot T = \overbrace{\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{1}{2}\right)}^{\Omega_s}T$$

$\boxed{\text{תכונות מערכת}}$

תזכורת: תגובת תדר

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big| = \sum^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

מערכת עם הגבר לינארי

תזכורת: תגובת תדר

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

$|X(e^{j\omega})|$ תגובת אמפליטודה

$\measuredangle X(e^{j\omega})$ תגובת פאזה

מערכות עם פאזה ליניארית

הקדמה: השה"ה

דוגמה מספרית: נתונה תגובה להלם של מערכת:

$a = 0.9$

$$h[n] = a^n u[n] \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = \underbrace{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|}_{\text{אמפליטודה}} \cos\left(\omega_0 n + \underbrace{\angle H\left(e^{j\omega_0}\right)}_{\text{פאזה}}\right)$$

$x[n] = \cos(\omega_0 n)$

ערכי ω_0
אותם
נבחן

$\omega_0 = 0$

$\omega_0 = \frac{\pi}{20}$

$\omega_0 = \frac{\pi}{10}$

תזכורת: מעגלי RC/RL במעבדת מבוא

$$\omega_0 \rightarrow H(e^{j\omega_0}) \rightarrow |H(e^{j\omega_0})|$$

$$\searrow \measuredangle H(e^{j\omega_0})$$

DC

$\omega_0 = 0$

$$H\left(e^{j0}\right) = \frac{1}{1-0.9e^{j0}} = 10$$

$x[n] = 1$

$y[n] = 10$

$$\omega_0 = 0.05\pi \rightarrow H\left(e^{j\omega_0}\right) = \frac{1}{1-0.9e^{j\frac{\pi}{20}}} = \underbrace{5.576}_{|H(e^{j\omega_0})|}e^{\overbrace{-j0.91}^{\measuredangle H(e^{j\omega_0})}}$$

הפרש בפאזה

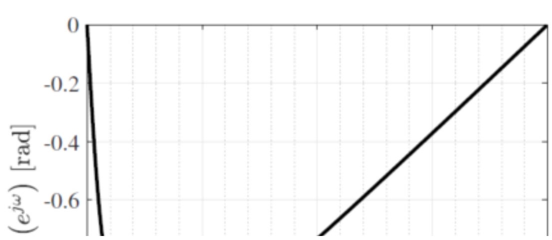
$$y[n] = 5.576\cos(\underbrace{0.05\pi}_{\omega_0} n - 0.91)$$

$$= 5.576\cos(0.05\pi\,[n - 5.75])$$

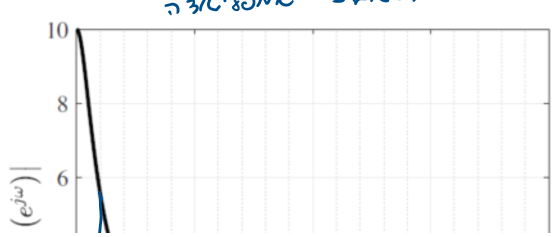
השה"ה

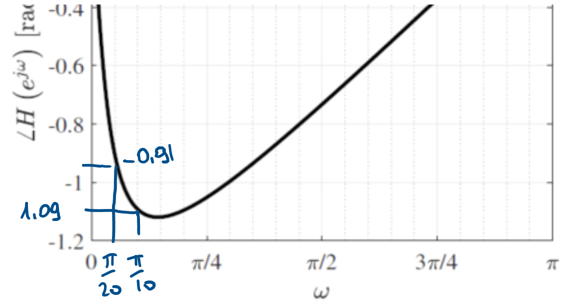
$$\omega_0 = 0.1\pi \rightarrow y[n] = 3.19\cos(0.1\pi\,[n - 3.48])$$

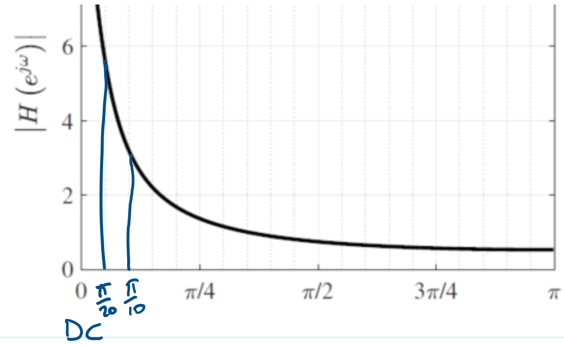
תדר שונה ← השה"ה שונה!!!



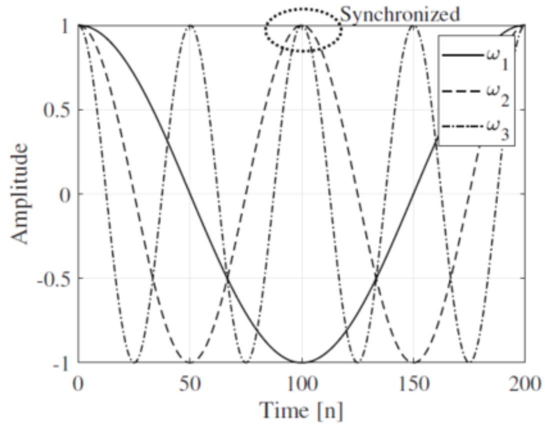
תגובת אמפליטודה



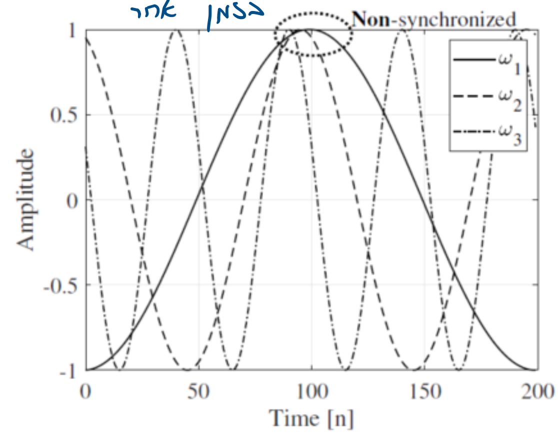


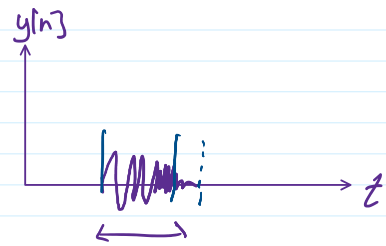


תיאור גרפי של השפעה של השהייה שונה:



כל אות יוצא בזמן אחר





התרחבות

תדרים מסוימים יעברו את המערכת יותר "מהר"

סיכום הקדמה (נושא השהייה)

השהייה (הגדרה 5.1): בהינתן אות כניסה מהצורה

$$x[n] = v[n]\cos(\omega n)$$

ואות מוצא לאחר מעבר דרך מערכת LTI בעלת תגובת תדר $H(e^{j\omega})$

$$y[n] = v[n-\tau_{gd}]\cos\Big(\omega\,[n-\tau_{pd}]\Big),$$

השהיית **פאזה** (phase delay) נתונה ע"י

$$\tau_{pd}(\omega) = -\frac{\angle H(e^{j\omega})}{\omega}$$

* מצב רצוי (לא נדרש לפעמים)

$\tau_{pd} = \tau_{gd} = const$

* דוגמה מספרית:

נתונה מערכת LPF אידיאלית:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-2j\omega} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\tau_{pd} = -\frac{-2\omega}{\omega} = 2$$

$\tau_{pd} = \omega - \alpha$

$$\tau_{pd}(\omega) = -\frac{\angle H(e^{j\omega})}{\omega}$$

והשהיית **חבורה** (group delay) נתונה ע"י

$$\tau_{gd}(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H\left(e^{j\omega}\right).$$

$\tau_{gd} = -\frac{d}{d\omega}(-2\omega) = 2$

בלתי תלוי בתדר !!!

מערכת עם $\boxed{\text{פאזה לינארית}}$ = השהייה קבועה בלתי תלויה בתדר

הגדרה: כל מסנני FIR (תגובה סופית להלם) בעלי סימטריה:

$h[n] = \pm h[\alpha - n]$

$n = 0,\dots,\alpha$

הם בעלי פאזה לינארית

$h[n]$ - תגובה להלם

4 אפשרויות: +/-

α: זוגי / אי זוגי

מקרה פרטי

דוגמה: α זוגי, סימן +

$h[n] = h[4-n] \Rightarrow h[0] = h[4],\ h[1] = h[3]$ סימטרי

$n = 0,\dots,4$

הוכחה, שמדובר במערכת בעלת פאזה לינארית:

תגובת תדר לפי הגדרה

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{4} h[k]e^{-jk\omega} = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega} + h[4]e^{-j4\omega}$$

$$= \underbrace{e^{-j2\omega}}_{\text{גורם משותף}}\left(h[0]e^{j2\omega} + h[1]e^{j\omega} + h[2] + \underset{h[1]}{h[3]}e^{-j\omega} + \underset{h[0]}{h[4]}e^{-j2\omega}\right)$$

תזכורת:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}}$$

$$= e^{-j2\omega}\left(h[0]e^{j2\omega} + h[1]e^{j\omega} + h[2] + h[1]e^{-j\omega} + h[0]e^{-j2\omega}\right)$$

$\cos(\omega)$ $\cos(2\omega)$

$2h[1]\left(\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}\right)$

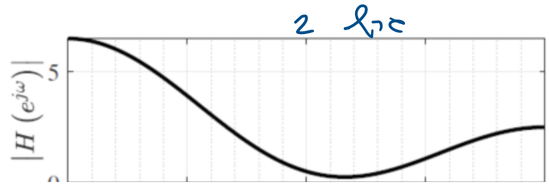
$$= \underbrace{e^{-j2\omega}}_{\text{פאזה לינארית}}\underbrace{\left(2h[0]\cos(2\omega) + 2h[1]\cos(\omega) + h[2]\right)}_{\text{ממשי}}$$

$h[0] = 1 = h[4]$ $h[1] = 1 = h[3]$

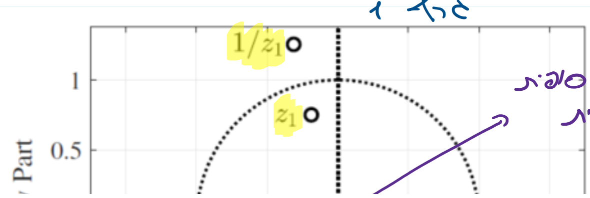
דוגמה למסנן בעל פאזה לינארית בעל תגובה להלם $h[n] = \{1, 1, 2.5, 1, 1\}$

תגובת אמפליטודה

סדר 2



סדר 1



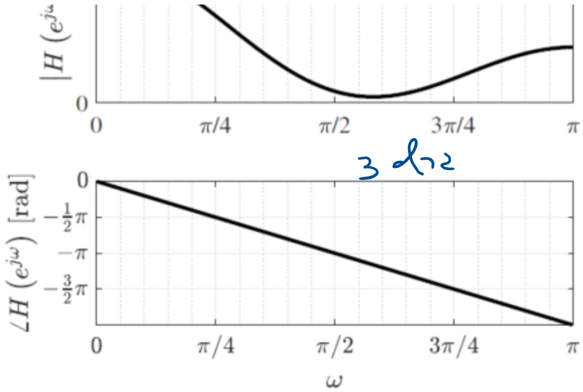
סדרה סופית סיבתית

⇓

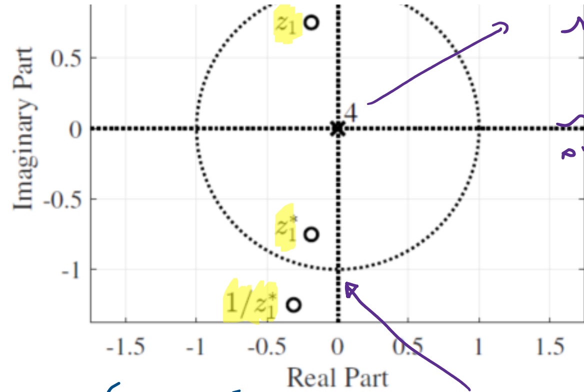
קטבים

תגובת אמפליטודה

תגובת פאזה



גרף 3



סיבתית ⇐ קטבים בראשית הצירים

אפסים בזוגות ברביעית: אפס(1 , 1/אפס(2

אפס(3 צמוד , 1/אפס(4 צמוד

$$H(z) = 1 + z^{-1} + 2.5z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}$$

גרף 1 : $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$

RoC $z \neq 0$

$H(z) = 0 \Rightarrow$ אפסים

$H(z) \to \infty \Rightarrow$ קטבים

גרף 2,3: $H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{h[n]\}$ $\rightarrow$

$|H(e^{j\omega})|$ גרף 2

$\angle H(e^{j\omega})$ גרף 3

דוגמה: α אי זוגי, סימן -

$n=0,\dots,3$ $\quad h[n] = -h[3-n]$

$\Rightarrow h[0] = -h[3]$, $h[1] = -h[2]$ סימטריה

מטרה: הוכחה של פאזה לינארית:

$$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega}$$

$$= \underbrace{e^{-j\frac{3}{2}\omega}}_{\text{גורם משותף}}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega} + h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega} + h[2]e^{-j\frac{1}{2}\omega} + h[3]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

סימטריה

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega} + h[1]e^{j\frac{1}{2}\omega} - h[1]e^{-j\frac{1}{2}\omega} - h[0]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

$\sin(\frac{1}{2}\omega)$

$\sin(\frac{3}{2}\omega)$

תזכורת:

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

$$\tau_{gd}(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H\left(e^{j\omega}\right)$$

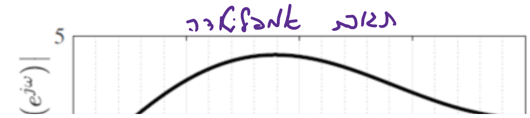
$e^{-j\left(\frac{3}{2}\omega - \frac{\pi}{2}\right)}$

$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

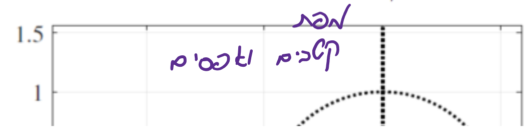
$$= \underbrace{e^{-j\frac{3}{2}\omega}j}_{\text{פאזה לינארית}}\underbrace{\left(2h[0]\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 2h[1]\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right)}_{\text{ממשי}}$$

דוגמה למסנן בעל פאזה ליניארית בעל תגובה להלם $h[n] = \{1, 2, -2, -1\}$

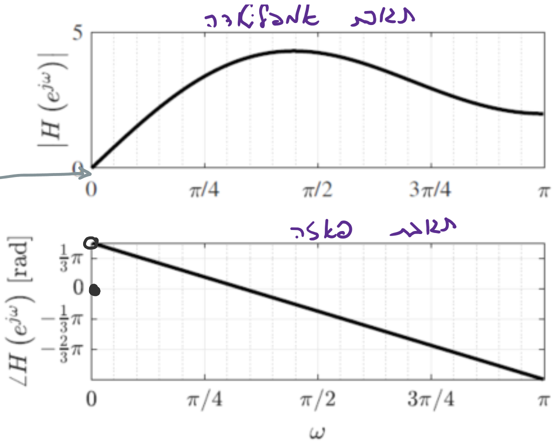
תגובת אמפליטודה

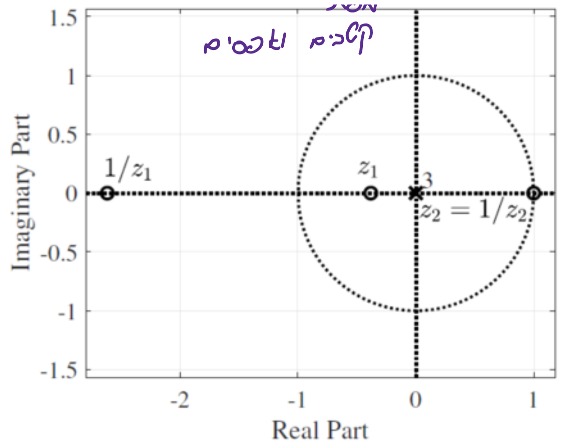


מפת קטבים ואפסים



אפס ב $z=1$





הערה: תנאי סימטריה היא מספק, אבל לא הכרחי:

סימטריה $\Rightarrow$ פאזה ליניארית

רק כיוון אחד בלבד