התמרת $\mathcal{Z}$ ההפוכה

תזכורת

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

מטרה: בהינתן $X(z) \rightarrow x[n]$

הגדרה:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

כאשר מסלול האינטגרציה כלשהו מוכל בתחום ההתכנסות.

הערה: עבודה עם הגדרה מסורבלת ולא נוחה

שיטה: שימוש בתכונות וההתמרות המוכרות, ופירוק בשברים חלקיים.

תזכורת: דוגמה לשימוש בתכונות הקונבולוציה מהרצאה קודמת

דוגמה: **דוגמה 3.9:** נתונים האותות

$$x_1[n] = u[n] \longrightarrow \text{כמו } x_2 \text{ עם } a=1$$

$$x_2[n] = a^n u[n]$$

חשב $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$

פתרון: התמרות הן

$$\mathcal{Z}\{x_1[n]\} = X_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad ROC = |z| > 1$$

$$\mathcal{Z}\{x_2[n]\} = X_2(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad ROC = |z| > |a|$$

שימוש בשברים חלקיים

טבלה

$$\begin{aligned} Y(z) = X_1(z)X_2(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az^{-1}} \\ &= \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right] \quad ROC = |z| > \max(|a|, 1) \\ y[n] = x_1[n] * x_2[n] &= \frac{1}{1-a}\left[u[n] - a\left(a^n u[n]\right)\right] \\ &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u[n] \end{aligned}$$

שימוש בשברים חלקיים (שיטה נוספת)

$A_1 = ?$

$A_2 = ?$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az^{-1}} \\ &= \left[\frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1-az^{-1}}\right] \quad ROC = |z| > \max(|a|, 1) \end{aligned}$$

$$A_1 = Y(z)\underbrace{\left(1-z^{-1}\right)}_{\text{קוטב ב } z=1}\Big|_{z=1} = \frac{1}{1-az^{-1}}\Big|_{z=1} = \frac{1}{1-a}$$

$$A_2 = Y(z)\underbrace{\left(1-az^{-1}\right)}_{\text{קוטב ב- } a}\Big|_{z=a} = \frac{1}{1-a^{-1}} = \frac{a}{a-1} = -\frac{a}{1-a}$$

קוטב

דוגמה מספרית נוספת:

מחוץ לקוטב הגדול ביותר

$|z| > \frac{1}{3}$

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{\cdots}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{\cdots}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\cdots}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$x[n] = A_1\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + A_2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

טבלה

$p_1 = \frac{1}{4}$

$$A_1 = X(z)\left(1-p_1 z^{-1}\right)\Big|_{z=p_1} = \frac{\left(3-\frac{5}{6}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=1/4} = 1$$

$$A_2 = X(z)\left(1-p_2 z^{-1}\right)\Big|_{z=p_2} = 2,$$

$p_2 = \frac{1}{3}$

DTFT - Discrete-time Fourier Transform

$\boxed{\text{התמרת Fourier בזמן בדיד}}$

כמו שהתמרת פורייה "רגילה" היא מקרה של התמרת Laplace, כך התמרת פורייה בזמן בדיד היא מקרה פרטי של התמרת Z.

הגדרה:

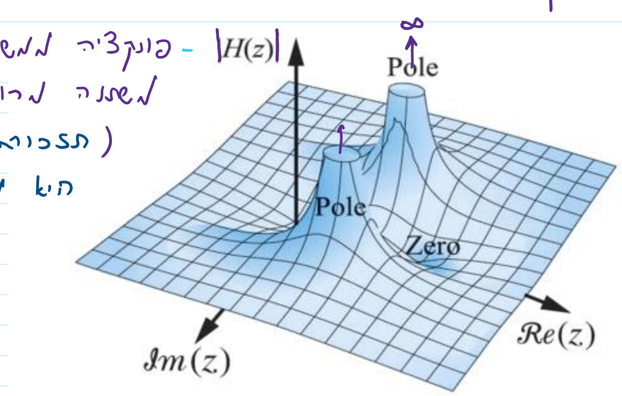
התמרת DTFT (הגדרה 4.4): נתון אות בדיד $x[n]$, עבורו מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]| < \infty$.
התמרת DTFT מוגדרת ע"י

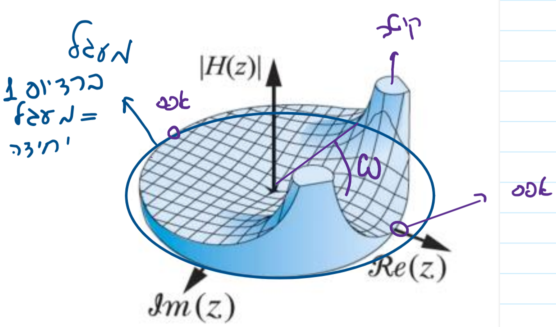
$$X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \qquad (4.10)$$

הביטוי $X\left(e^{j\omega}\right)$ נקרא גם תגובת תדר. $z = e^{j\omega} \Rightarrow |z| = 1$

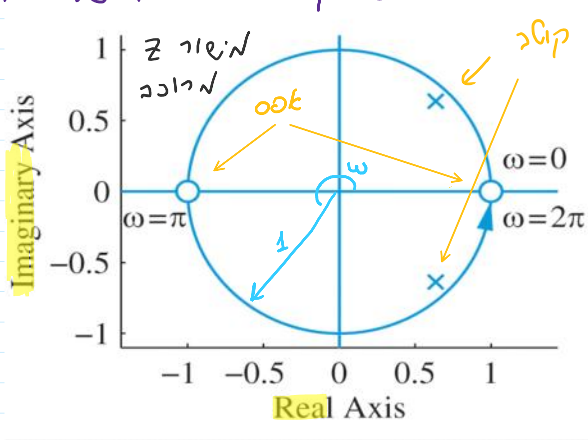
הצגה גרפית של $|H(e^{j\omega})|$ מתוך $|H(z)|$

$|H(z)|$ - פונקציה ממשית של משתנה מרוכב (תמונות z היא מרוכב)



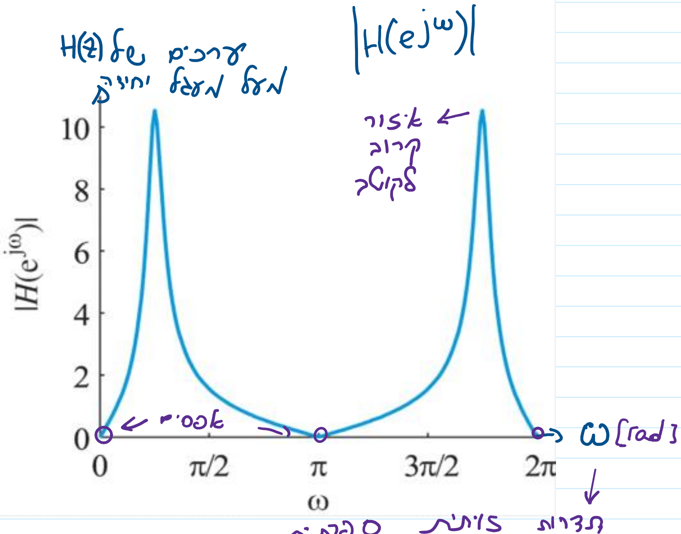


מפת קטבים ואפסים של $H(z)$



ערכים של $H(z)$ מעל מעגל יחידה

$|H(e^{j\omega})|$

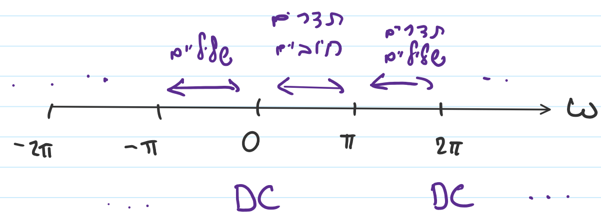


תדירות זוויתית ספרתית מנורמלת

תדרים

[illegible] [illegible] ספרתית
מנורמלת

ציר התדר



* התמרה מחזורית ב- 2π
בגלל $e^{j\omega}=e^{j(\omega+2\pi)}$

התמרת פוריה:

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt,$$

$\Omega\left[\frac{rad}{sec}\right]$ תדירות זוויתית

הערה:

הערה 4.2 ! קיימת הגדרה נוספת נפוצה להתמרת פוריה,

תדר

$$X(jF)=\mathscr{F}\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi Ft}dt,$$

כאשר F הוא תדר "אנלוגי" ביחידות $[Hz]$. ההגדרה המשלימה של DTFT היא

$$X\left(e^{jf}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{j2\pi f},$$

דוגמה: מצא התמרת DTFT של האות $h[n]=\delta[n-1]+\delta[n]+\delta[n+1]$

$h[n]=\{1,\underset{n=0}{\underset{\uparrow}{1}},1\}$

דרך א' - לפי הגדרה

$$\text{DTFT}\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{j\omega n}=1+2\cos(\omega).$$

דרך ב' - דרך התמרת Z והצבה $z=e^{j\omega}$

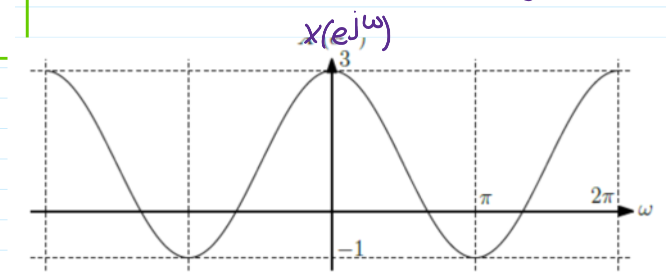
$H(z)=z+1+z^{-1}$

$H(e^{j\omega})=e^{j\omega}+1+e^{-j\omega}$

$2\cos\omega$

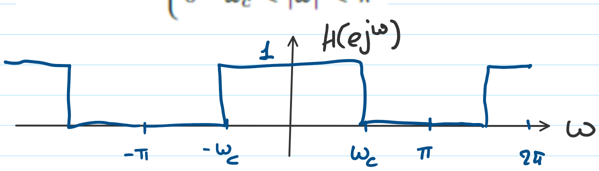
תזכורת

$$\cos(\alpha)=\frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$$



דוגמה: מסנן LPF אידיאלי

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|<\pi\end{cases}$$



$$h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{jn\omega}d\omega$$

→ sinc( )

תזכורת

$$\sin(\alpha)=\frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j}$$

התמרת DTFT הפוכה

הגדרה:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega$$

אינטגרל ע"פ קטע של 2π

הערות לדוגמה:

תשובה המתקבלת:

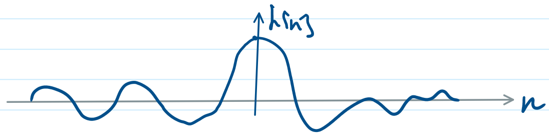
* לא סיבתית

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega}d\omega$$
$$= \frac{1}{2j\pi n}\left[e^{jn\omega_c} - e^{-jn\omega_c}\right] = \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n}$$

$\to$ sinc( )

תזכורת

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$



תגובה המתקבלת:

* לא סיבתית
* אינסופית בזמן

$\Downarrow$

לא ניתן לממש מסנן אידיאלי.

בהמשך נראה, שניתן להתקרב למסנן אידיאלי באופן הנדרש, כאשר תעדוף היא אורך המסנן/סיבוכיות חישוב

תכונות

* **מחזוריות** (תכונה 4.2): בניגוד להתמרת פורייה בזמן רציף, ה-DTFT תמיד תהיה מחזורית במחזור 2π:

$$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk(\omega+2\pi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\omega} = X\left(e^{j\omega}\right) \quad (4.14)$$

* ממשית במקרה של סימטריה:

האות	ה-DTFT
ממשי, זוגי	ממשית, זוגית
ממשי, אי-זוגי	מדומה, אי-זוגית
מדומה, זוגי	מדומה, זוגית
מדומה, אי-זוגי	ממשית, אי-זוגית

⊛ הרבה תכונות הם דומות מאוד לאלו של התמרת Z

* הזזה בזמן

תזכורת

$$\mathcal{Z}\left\{x[n-n_0]\right\} = z^{-n_0}X(z)$$

$z=e^{j\omega}$

$$\text{DTFT}\left\{x[n-n_0]\right\} = e^{-j\omega n_0}X\left(e^{j\omega}\right)$$

* **הזזה בתדר** (תכונה 4.5): בהינתן אות $x[n]$ בעל התמרה $X\left(e^{j\omega}\right)$, מתקיים

$$\text{DTFT}\left\{e^{j\omega_0 n}x[n]\right\} = X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

* **מכפלה בזמן** (תכונה 4.7): התמרת DTFT של $x[n]y[n]$ היא:

$$\text{DTFT}\left\{x[n]y[n]\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

* משפט Parseval: שימור אנרגיה

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|x[k]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

מקטע של 2π

* קונבולוציה

$$\text{DTFT}\{h[n]*x[n]\} = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

תגובת אמפליטודה/ פאזה

$|H(e^{j\omega})|$ - תגובת אמפליטודה

$\measuredangle H(e^{j\omega})$ - תגובת פאזה

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}{\text{Re}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}\right)$$

דוגמה:

נתון מסנן המוגדר על ידי התגובה להלם מהצורה $h[n] = \alpha^n u[n]$, $|\alpha| < 1$.

$|\alpha|<1 \leftarrow$ המעגל ברדיוס 1 אינו בתחום ההתכנסות

$\Downarrow$

אין התמרת DTFT

חשב: $H(z)$ $H(e^{j\omega})$ $|H(e^{j\omega})|$ $\measuredangle H(e^{j\omega})$

פוקציית תמסורת, תגובת תדר, תגובת אמפליטודה ותגובת פאזה

פתרון: $H(z) = \frac{z}{z-a}$

כללה $\rightarrow$
$$H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad |z| > |\alpha|$$

$z = e^{j\omega}$ הצבה של $\rightarrow$ בתוצאה קודמת

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha\cos(\omega) + j\alpha\sin(\omega)}$$

הכפלה בצמוד

$$= \frac{1}{[1-\alpha\cos(\omega)] + j\alpha\sin(\omega)} \cdot \frac{[1-\alpha\cos(\omega)] - j\alpha\sin(\omega)}{[1-\alpha\cos(\omega)] - j\alpha\sin(\omega)}$$

$$= \underbrace{\frac{1-\alpha\cos(\omega)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}}_{\text{Re}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}} + j\underbrace{\frac{-\alpha\sin(\omega)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}}_{\text{Im}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}$$

תזכורת

$$\boxed{e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)}$$

$$\boxed{x \cdot x^* = |x|^2}$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \sqrt{H\left(e^{j\omega}\right)H^*\left(e^{j\omega}\right)} = \sqrt{\left(\text{Re}\{H(e^{j\omega})\}\right)^2 + \left(\text{Im}\{H(e^{j\omega})\}\right)^2}$$

הכפלה בצמוד

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)\left(1-\alpha e^{j\omega}\right)}}$$

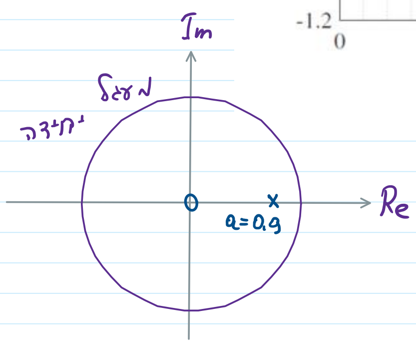
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}}}$$

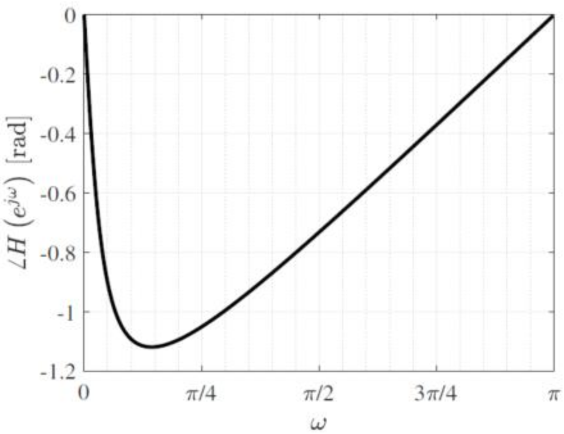
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}}$$

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}{\text{Re}\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}}\right) = -\arctan\left(\frac{\alpha\sin\omega}{1-\alpha\cos(\omega)}\right)$$

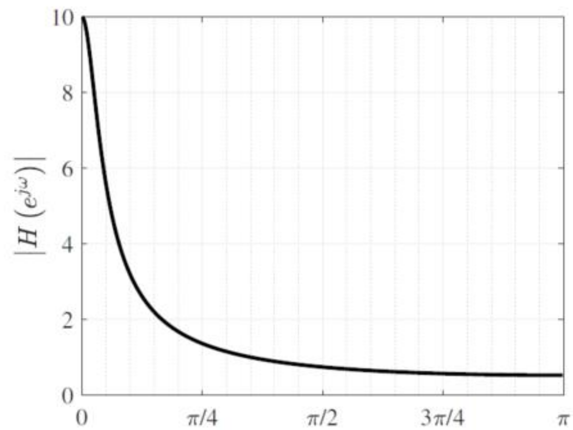
דוגמה מספרית

עבור $a=0.9$

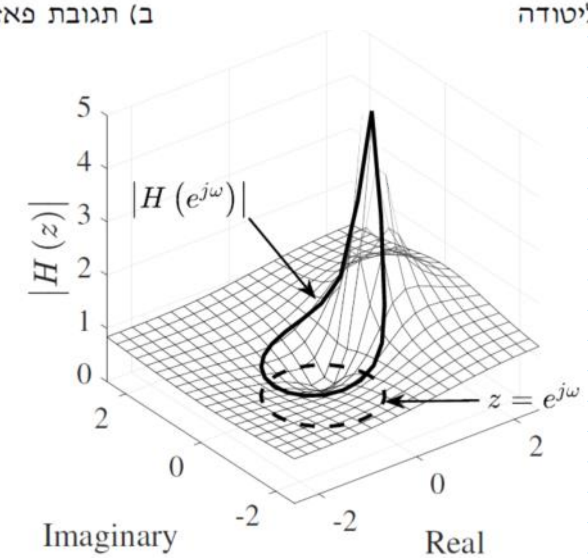




ב) תגובת פאזה



א) תגובת אמפליטודה



שאלה: מה הקשר בין DTFT לבין FT

התמרת פוריה "רגילה" בזמן רציף

א דגימה: $x_s(t) = \sum_n x(nT)\delta(t-nT)$

$x_c(t) \rightarrow$ דגימה $\rightarrow$

זמן רציף Continous

רכבת הלמים

את דגום בזמן רציף

$x[n] = x_c(nT)$

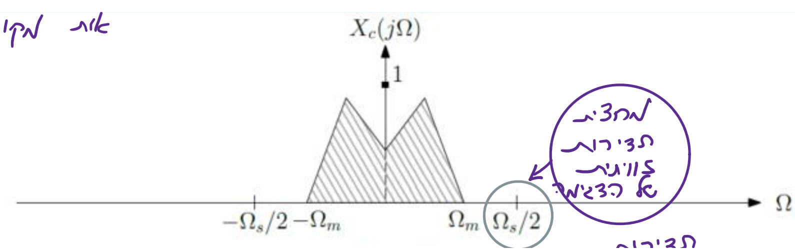
אות בזמן בדיד

$$X_c(j\Omega) \overset{?}{\longleftrightarrow} X_s(j\Omega) \overset{?}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

את מקורי (חסום בתדר ע"פ משפט Nyquist)

תזכורת

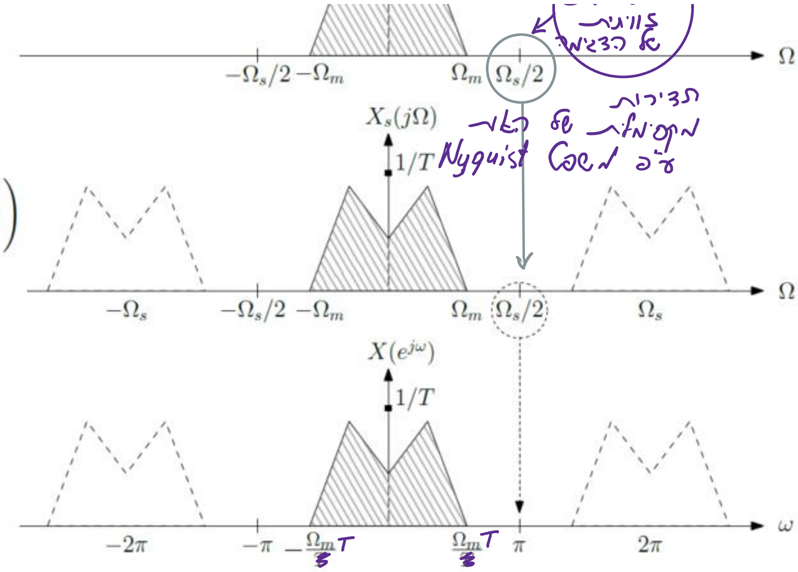
$X_s(j\Omega) = \mathscr{F}\{x_c(t)s(t)\}$



תזכורת

$$\begin{aligned}
X_s(j\Omega) &= \mathscr{F}\{x_c(t)s(t)\} \\
&= \frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega) * S(j\Omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}X_c(j\Omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(j\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\right) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j\Omega) * \delta\left(j\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\right) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\left(\Omega - k\Omega_s\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F_s}$$



הערה:

* צורה - נשמרת
* אמפליטודה - הכפלה ב- $\frac{1}{T}$
* תדרים

$$\boxed{\omega = \Omega T}$$

$\Omega_m \to \omega_m = \Omega_m T$

$\Omega_s/2 = \frac{\pi}{T} \to \omega = \frac{\Omega_s}{2}\cdot T = \frac{\pi}{T}\cdot T = \pi$

תחום תדרים "אנלוגיים" $\left[-\frac{\Omega_s}{2}, \frac{\Omega_s}{2}\right]$

מתמפה לתחום $[-\pi,\pi]$

באופן בלתי תלוי בתדר הדגימה Ω_s.