

# התמרת פוריה בדידה

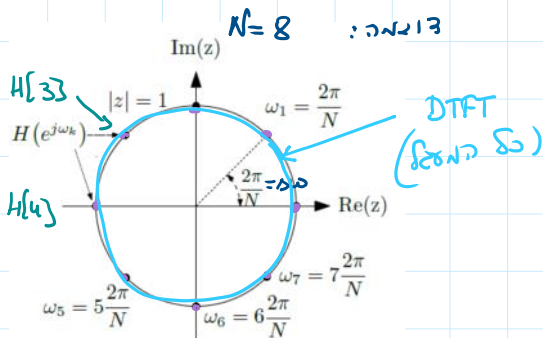
מטרה: התמרת פוריה בדידה  
 הרכבה של התמרת DTFT  
 הרכבה: נמצאים תחומי תצורה  $N$  בקווצה

2π תצורה  
 N נקודות  
 =  $\frac{2\pi}{N}$  מרחק בין נקודות

ω<sub>k</sub> =  $\frac{2\pi}{N}k$   
 k מספר תצורה  
 k = 0, ..., N-1

$$X[k] = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = X(z) \Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

ע"י הצבה, מקבל  
 מספר "ס" תצורה



$$X[k] = \text{DFT} \{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} kn \right\} \quad k = 0, \dots, N-1$$

התמרה

$$x[n] = \text{IDFT} \{X[k]\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp \left\{ j \frac{2\pi}{N} kn \right\} \quad n = 0, \dots, N-1$$

התמרה  
 היפוכה

x[n] = {1, 1, 1, 1} : 4 נקודות

$$X(z) = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}, \quad z \neq 1$$

(א) חשב התמרת DTFT של האות.

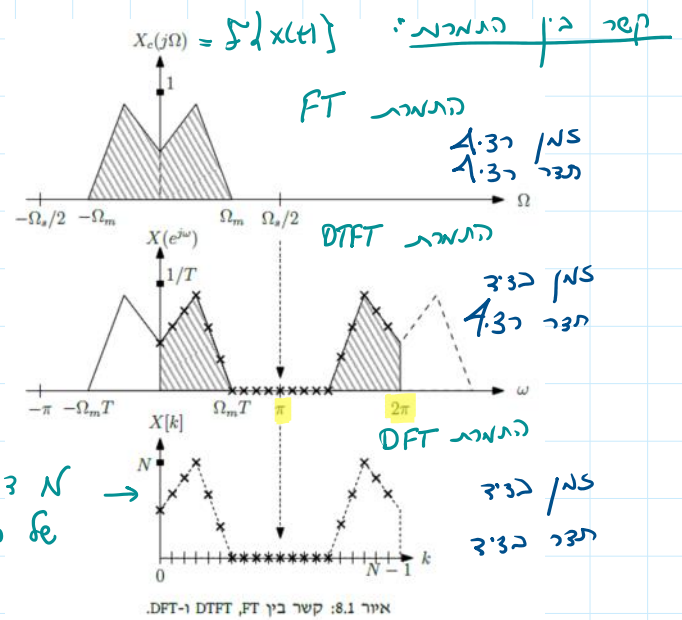
(ב) חשב התמרת DFT של האות.

$$X(e^{j\omega}) = X(z = e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{(e^{-j2\omega} - e^{-j4\omega})}{(e^{-j2\omega} - e^{-j4\omega})} = e^{-j3\omega/2} \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} = \frac{\sin(0)}{\sin(0)} = 0$$

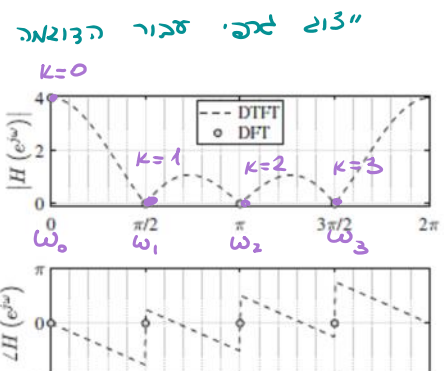
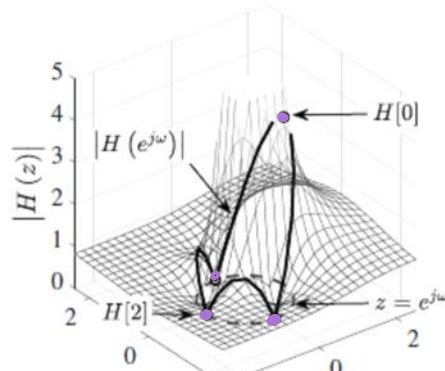
(ג)

N נקודות בתצורה  
 של התמרת DTFT



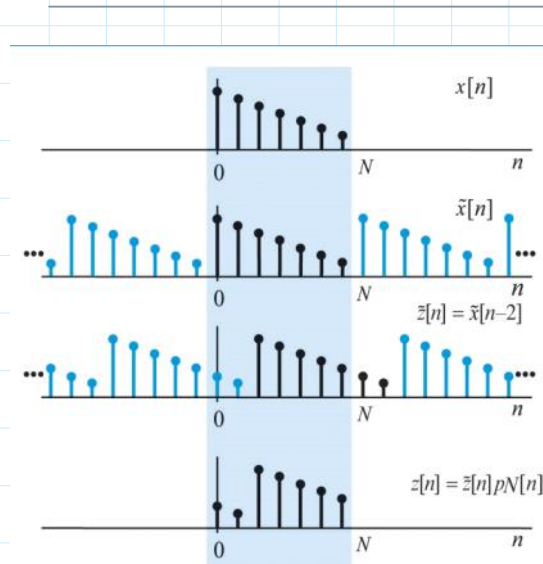
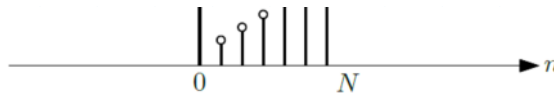
ω<sub>k</sub> =  $\frac{2\pi}{N}k = \frac{2\pi}{4}k = \frac{\pi}{2}k$   
 N - מספר תצורה  
 של האות  
 k = 0, 1, 2, 3  
 X[k] = X(e^{jω<sub>k</sub>}), ω<sub>k</sub> = {0,  $\frac{1}{2}\pi$ , π,  $\frac{3}{2}\pi$ }  
 = [4, 0, 0, 0]

k = 0 : חישוב ישר  
 $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} kn \right\}$   
 $X[0] = \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot 1 = 4$   
 $X[1] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}n} = 0$





זכור



הצגה 3.1

$$y[n] = x[(n - m) \bmod N]$$

צגה 3.2

$$y[n] = x[(n-2) \bmod N]$$

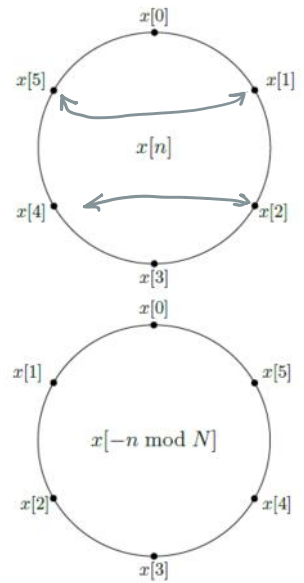
$$y[0] = x[-2 \bmod N] = x[N-2]$$

$$y[1] = x[N-1]$$

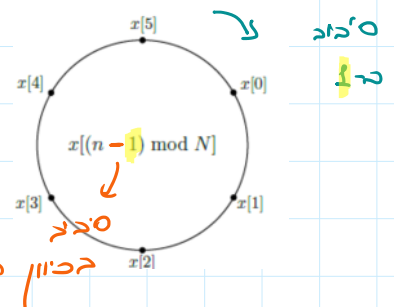
$$y[2] = x[0]$$

$$y[3] = x[1]$$

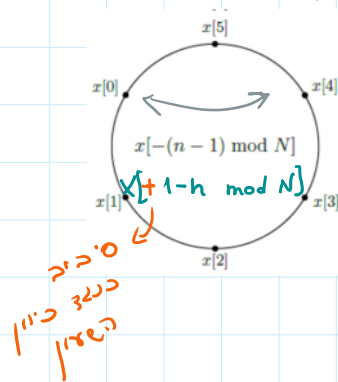
$$y[N-1] = x[N-3]$$



צגה 3.3: הצגה ב-1



צגה 3.4: שיקוף + הצגה



קונבולוציה

תכונה: אבסורב המצב היא קונבולוציה 3.5

קונבולוציה ציקלית (הגדרה 7.7): עבור שני אותות סופיים בזמן,  $x_1[n]$  באורך  $N_1$  ו- $x_2[n]$  באורך  $N_2$ , כאשר  $N \geq \max(N_1, N_2)$ , ניתן להגדיר

$$(7.16) \quad x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[(n-m) \bmod N]$$

מכפלה בתדר (תכונה 7.7): עבור שני אותות סופיים בזמן,  $x_1[n]$  באורך  $N_1$  ו- $x_2[n]$  באורך  $N_2$ , כאשר  $N \geq \max(N_1, N_2)$ , מתקבל:

$$(7.17) \quad \text{DFT} \left\{ x_1[n] \circledast x_2[n] \right\} = X_1[k] X_2[k]$$

צגה 3.5: נכון:  $x[n] = x[0], x[1], x[2], x[3]$

$h[n] = h[0], h[1], h[2], h[3]$

פיתרון: \* סיבוב הצגה

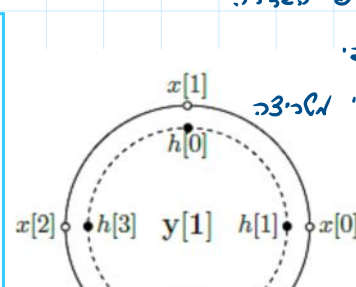
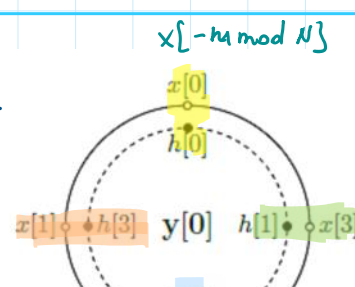
\* צגה

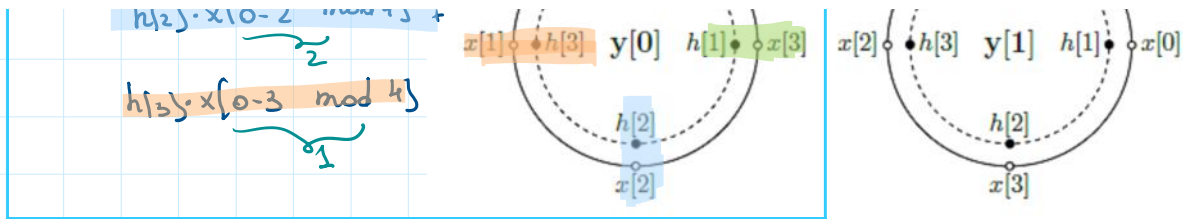
\* ע"א לציור

$$y[n] = x[n] \circledast h[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^3 h[m] x[(n-m) \bmod 4]$$

$$y[0] = h[0] \cdot x[0-0 \bmod 4] + h[1] \cdot x[0-1 \bmod 4] + h[2] \cdot x[0-2 \bmod 4] + h[3] \cdot x[0-3 \bmod 4]$$





סיבוכיות:  $O(N^2)$

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & x[3] & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0] & x[3] & x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] & x[3] \\ x[3] & x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \end{bmatrix}$$

שיקוף והסבה

$$y[0] = \sum_m x[-m \bmod 4] \cdot h[m]$$

$$y[1] = \sum_m x[1-m \bmod 4] \cdot h[m]$$

$$y[2] = 2$$

$$y[3] = 3$$

$$\text{IDFT} \{ X[k] \cdot H[k] \} = [36, 38, 36, 30]$$

חישוב של  $x[n] \otimes h[n]$

תכונות חשובות

- \*  $\text{DFT} \{ ax_1[n] + bx_2[n] \} = aX_1[k] + bX_2[k]$  ליניאריות
- \*  $\text{DFT} \{ x[(n-m) \bmod N] \} = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} X[k]$  הזזה בזמן
- \*  $\text{DFT} \{ e^{j\frac{2\pi}{N}km} x[n] \} = X[(k-m) \bmod N]$  הזזה בתדר
- \*  $\text{DFT} \{ X[n] \} = Nx[(-k) \bmod N]$  דואליות
- \*  $\text{DFT} \{ x_1[n]x_2[n] \} = \frac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]$  מכפלה בזמן היא קונבולוציה בתדר
- \*  $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$  (פריס) שימור אנרגיה

## מבוא לשיעור ספקטרום

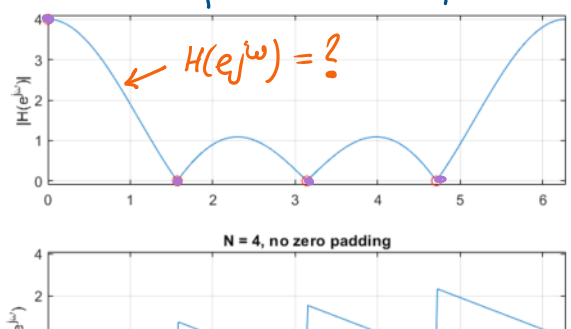
שיטת עקב התמרת פוריה של אלו רצף דלקוני

ריפוד באפסים

מטרה: עקב זהו יש קריב  $\delta$ -DFT. רוצים מספר של רצף ארוך יותר!

$$x[n] = \{1, 1, 1, 1\}$$

$$X[k] = \{4, 0, 0, 0\}$$



הערה: נכון את ציור באורך  $N$  יצר מ רצף ארוך יותר

הערה: נתון את  $x[n]$  באורך  $N$   
 יש  $M$  זימות בעד  
 פניון: הוספת אפסים

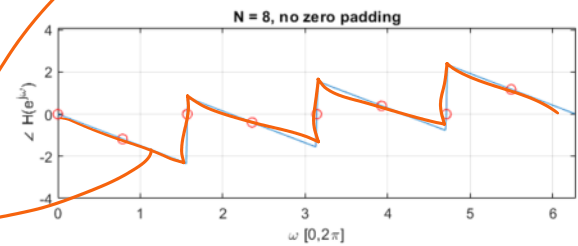
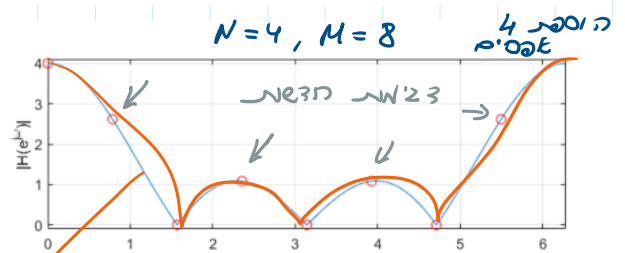
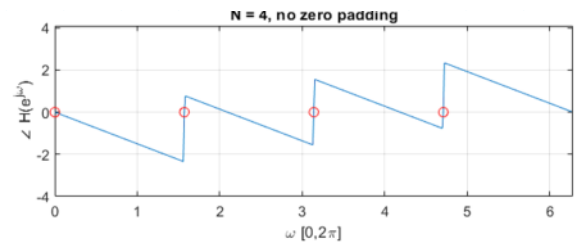


$$y[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

כיוון  
כיוון

תוצאה: הוספת זימות בעד  
 עד לאורך  $M$

$M=512$  הוספת אפסים עד לאורך 512



Matlab פקודת  $Y = \text{fft}(x, n)$   
 אורך

$n \leftarrow$  סדרת באפסים עד  
 לאורך  $n$

הערה: לשפר נראות בעד  
 מוסת אורך