הרצאה 4 - ערב

יום שני 09 נובמבר 2020 17:04

מערכת עם פאזה לינארית

הקדמה: השהייה

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

$$x[n] = \cos(\omega_0 n)$$

$$y[n] = \underbrace{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|}_{\text{תגובת אמפליטודה}} \cos\left(\omega_0 n + \underbrace{\angle H\left(e^{j\omega_0}\right)}_{\text{תגובת פאזה}}\right)$$

תזכורת

$$\omega = \Omega T$$

תדירות זוויתית "אנלוגית" $\left[\frac{rad}{sec}\right]$

זמן דגימה

$\frac{1}{T}$ תדר דגימה.

דוגמה: עבור מערכת:

$$h[n] = a^n u[n] \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = H\left(e^{j\overset{\omega_0}{\omega}}\right)$$

מצא את מוצא $y[n]$ עבור

$\omega_0 = 0$ (DC)

$\omega_0 = \frac{\pi}{20}$

$\omega_0 = \frac{\pi}{10}$

$\boxed{\alpha = 0.9}$

פתרון:

$$\omega_0 = 0 \rightarrow H\left(e^{j\overset{\omega_0=0}{0}}\right) = \frac{1}{1-0.9e^{j0}} = 10$$

$$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \underbrace{H\left(e^{j\omega}\right)}_{\text{פונקציה של } \omega}$$

$$\measuredangle H(e^{j0}) = 0$$

עבור כניסה DC יש רק הגבר ללא שינוי פאזה

$$x[n] = 1 \Rightarrow y[n] = 10$$

תצפיות:
מערכת LTI
אינה משנה
תדר את כניסה

$$\omega_0 = 0.05\pi \rightarrow H\left(e^{j\omega_0}\right) = 5.576e^{-j0.91} = \frac{1}{1-0.9ej^{\frac{\pi}{20}}}$$

$$y[n] = \underbrace{5.576}_{\text{אמפליטודה}} \cos\left(\underbrace{0.05\pi}_{\omega_0} n - \underbrace{0.91}_{\text{פאזה}}\right)$$

$$= 5.576 \cos\left(\underbrace{0.05\pi}_{\omega_0}\left[n - \underbrace{5.75}_{\text{השהייה}}\right]\right)$$

השהייה בתוך מערכת ביחידות זמן בדיג' - אצל השהייה לא חייב להיות מספר שלם

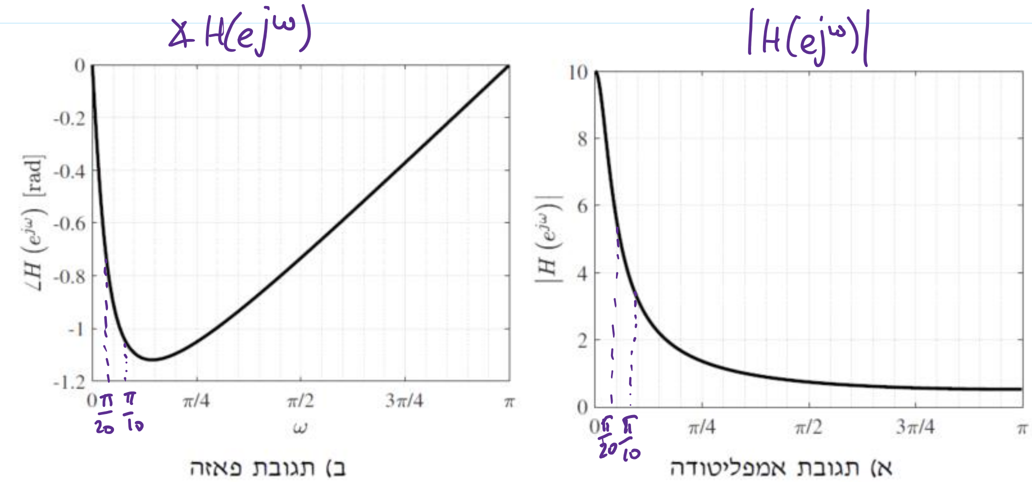
$$\omega_0 = 0.1\pi \rightarrow y[n] = 3.19 \cos\left(0.01\pi\left[n - \underbrace{3.48}_{\text{השהייה}}\right]\right)$$

שונה. בגלל התדר

השהייה

שונה, בגלל בתדר

בדומה לשינוי פאזה עם התדר



ב) תגובת פאזה   א) תגובת אמפליטודה

הגדרות:

השהייה (הגדרה 5.1): בהינתן אות כניסה מהצורה

$$x[n] = v[n]\cos(\omega n)$$

ואות מוצא לאחר מעבר דרך מערכת LTI בעלת תגובת תדר $H\left(e^{j\omega}\right)$

$$y[n] = v[n-\tau_{gd}]\cos\Big(\omega\left[n-\tau_{pd}\right]\Big),$$

השהיית **פאזה** נתונה ע"י

$$\tau_{pd}(\omega) = -\frac{\angle H\left(e^{j\omega}\right)}{\omega}$$

והשהיית **חבורה** נתונה ע"י

$$\tau_{gd}(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H\left(e^{j\omega}\right).$$

pd = phase delay

gd = group delay

מטרה: מערכת בעלת $\tau_{gd} = \tau_{pd} = \underbrace{const}_{\text{בלתי תלוי בתדר}}$. מערכת ללא עיוותים

מערכת עם פאזה לינארית.

דוגמה: מסנן מעביר נמוכים אידאלי הוא בעל פאזה לינארית. למעשה:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-2j\omega} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$\measuredangle H(e^{j\omega}) = -2\omega$

$\tau_{pd} = -\frac{-2\omega}{\omega} = 2$

$\tau_{gd} = -\frac{d}{d\omega}(-2\omega) = 2$

משפחה של מסנני FIR בעלי פאזה ליניארית

FIR – תגובה להלם סופית בזמן

תנאי לפאזה ליניארית:

$$h[n] = \pm h[\alpha - n], \quad \alpha \in \mathbb{N}$$

$n = 0, \dots, \alpha$

4 אפשרויות: α: זוגי או אי זוגי

סימן: $+$ או $-$

דוגמה: הוכח, שמסנן בעל סימטריה $h[n] = h[4-n]$, $\underbrace{n = 0, 1, 2, 3, 4}_{\text{5 ערכים}}$

היא בעל פאזה ליניארית $h[0] = h[4], h[1] = h[3]$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{4} h[k]e^{-jk\omega} = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega} + h[4]e^{-j4\omega}$$

מטרה: ניתוח תגובת תדר של המסנן

⇓

האם $\measuredangle H(e^{j\omega})$ הוא ליניארי?

DTFT - לפי הגדרה

הצבה של ערכי $h[0], \dots, h[4]$

$$= \underbrace{e^{-j2\omega}}_{\text{גורם משותף}} \left(h[0]e^{j2\omega} + h[1]e^{j\omega} + h[2] + h[3]e^{-j\omega} + h[4]e^{-j2\omega}\right)$$

$h[0] = h[4], h[1] = h[3]$

$$= e^{-j2\omega} \left(h[0]e^{j2\omega} + h[1]e^{j\omega} + h[2] + h[1]e^{-j\omega} + h[0]e^{-j2\omega}\right)$$

$$= \underbrace{e^{-j2\omega}}_{\text{פאזה ליניארית}} \underbrace{(2h[0]\cos(2\omega) + 2h[1]\cos(\omega) + h[2])}_{\text{ממשי}}$$

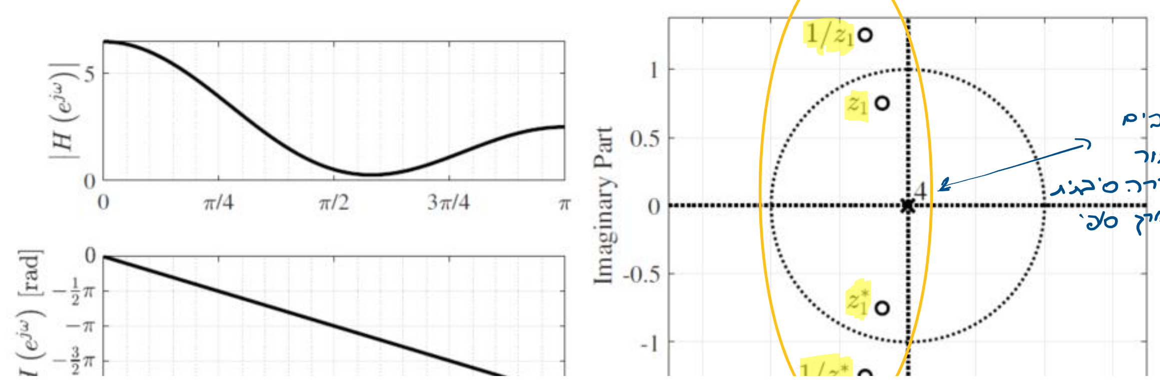
השה"ה = 2

תזכורת:

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

דוגמה מספרית:

דוגמה למסנן בעל פאזה ליניארית בעל תגובה להלם $h[n] = \{1, 1, 2.5, 1, 1\}$ מפיעה באיור 5.1.



קטבים עבור סדרה סיבתית באורך סופי

ב) תגובת אמפליטודה/פאזה

א) מפת כתבים ואפסים

סימטריה של אפסים

דוגמה: הוכח, שמסנן בעל סימטריה $h[n]=-h[3-n]$, $n=0,1,2,3$ (4 ערכים) היא בעל פאזה לינארית

$$h[0]=-h[3],\ h[1]=-h[2]$$

הוכחה דומה לדוגמה קודמת

$$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + h[3]e^{-j3\omega}$$

$$= \underbrace{e^{-j\frac{3}{2}\omega}}_{\text{גורם משותף}}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega} + h[1]e^{j\frac{2}{2}\omega} + h[2]e^{-j\frac{1}{2}\omega} + h[3]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

סימטריה

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}\left(h[0]e^{j\frac{3}{2}\omega} + h[1]e^{j\frac{2}{2}\omega} - h[1]e^{-j\frac{1}{2}\omega} - h[0]e^{-j\frac{3}{2}\omega}\right)$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega}(j)\left(2h[0]\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 2h[1]\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right)$$

תזכורת

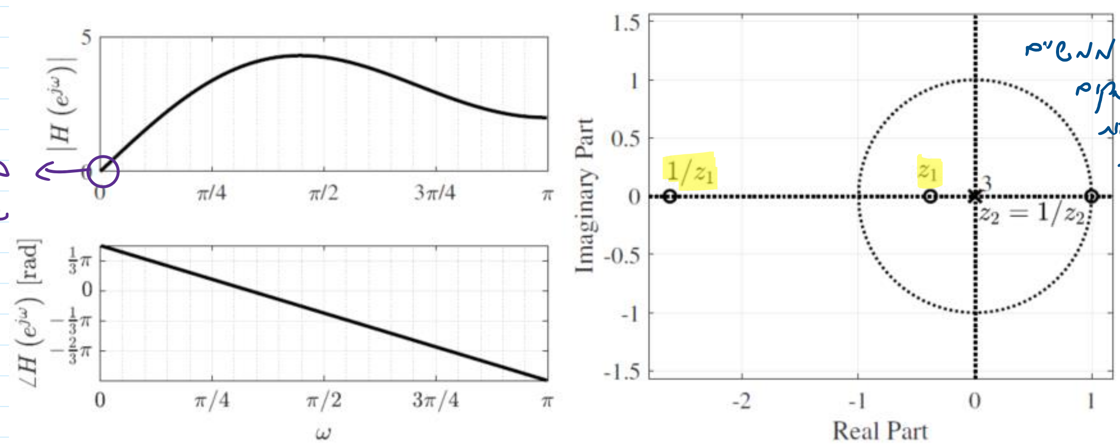
$$\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

שבר ולא מספר שלם

השהייה = $\frac{3}{2}$

$$e^{-j\left(\frac{3}{2}\omega+\frac{\pi}{2}\right)}$$

דוגמה מספרית: $h[n] = \{1, 2, -2, -1\}$



בסוג הזה של מסננים גם $H(e^{j0})=0$ בגלל פונ' $\sin(.)$ $\Leftarrow$ לא ניתן לממש בעזרתם מסנני LPF

אפסים ממשיים לכן במקום רביעה יש זוגות

הערה: התנאי של מסננים הוא מספיק, אבל לא הכרחי.

"יתכנו מסננים נוספים בעלי פאזה לינארית שלא מקיימים את התנאי לעיל.

מערכת הפיכה/הפוכה

הגדרה: מערכת הפיכה זה מערכת שיש לה מערכת הפוכה.

מטרה: לבדוק האם קיימת מערכת הפוכה!

במישור Z:

$$H(z)\cdot G(z)=1$$

$$\Rightarrow G(z)=\frac{1}{H(z)}$$

$$x[n] \to \boxed{h[n]} \to \boxed{g[n]} \to x[n]$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{H(z)}$$

$$x[n] \to \boxed{h[n]} \to \boxed{g[n]} \to x[n]$$

מערכת הפוכה

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \Rightarrow G(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{B(e^{j\omega})}{A(e^{j\omega})} \Rightarrow G(e^{j\omega}) = \frac{A(e^{j\omega})}{B(e^{j\omega})}$$

$$\underbrace{h[n]*g[n]}_{} = \delta[n]$$

השאלה המרכזית היא, האם קיימת מערכת $g[n]$, שהיא גם יציבה וסיבתית?

ניתוח: קטבים של $H(z)$ (פתרונות $A(z)=0$) ⇐ אפסים של $G(z)$

* עבור $H(z)$ יציבה כל הקטבים הם בתוך מעגל היחידה

⇐ האפסים של המערכת $G(z)$ הם בתוך מעגל היחידה

* אפסים של $H(z)$ (פתרונות של $B(z)=0$) ⇐ קטבים של $G(z)$

בשביל $G(z)$ יציבה כל האפסים של $H(z)$ צריכים להיות בתוך מעגל יחידה

סיכום ביניים: נדרוש קטבים ואפסים של $H(z)$ בתוך מעגל יחידה ונקבל קטבים ואפסים של $G(z)$ בתוך מעגל יחידה

* RoC: תחום ההתכנסות $RoC_h \cap RoC_g \neq \emptyset$

חיתוך בין תחומי RoC של $H(z)$, $G(z)$ הוא לא קבוצה ריקה

* $G(e^{j\omega}) = \frac{A(e^{j\omega})}{B(e^{j\omega})}$ ⇐ אפסים ע"ג מעגל יחידה של $H(z)$

משמעות $H(\underbrace{e^{j\omega_0}}_{\text{מיקום האפס}})=0$ ולא ניתן להפוך

דוגמה 3.8: נתונים האותות

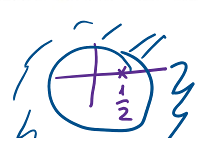
נחזור לדוגמה

$$x_1[n] = (0.5)^n u[n]$$
$$x_2[n] = \delta[n] - 0.5\delta[n-1]$$

חשב $x_1[n] * x_2[n]$.

פתרון: התמרות הן

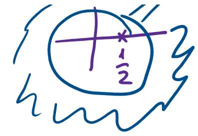
$$X_1(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}, \quad ROC = |z| > 0.5$$



$$X_1(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}, \quad ROC = |z| > 0.5$$

$$X_2(z) = 1-0.5z^{-1}, \quad ROC = \mathbb{C} - \{0\}$$

$$X_1(z)X_2(z) = 1 \xleftrightarrow{\mathscr{Z}} \delta[n]$$



$z \neq 0$

מסננים מעבירי הכל (All-Pass)

תכונה חשובה:

$|H(e^{j\omega})| = 1$, $H(e^{j\omega}) \neq$ קבוע

דוגמה:

$$H(z) = \frac{1-az}{1-az^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-ae^{j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$\underbrace{H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})}_{\text{הכפלה בצמוד}} = \frac{(1-ae^{j\omega})(1-ae^{-j\omega})}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})} = 1 = |H(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})|$$

כדי לקבל מערכת סיבתית

$$G(z) = z^{-1}\frac{1-az}{1-az^{-1}} = \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$$

$$G(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}H(e^{j\omega})$$

$$|G(e^{j\omega})| = 1$$

סיכום: כל מערכת מהצורה:

$$H(z) = z^{-N}\prod_{k=1}^{M_r}\frac{1-d_kz}{1-d_kz^{-1}}\prod_{k=1}^{M_c}\underbrace{\frac{(1-e_kz)(1-e_k^*z)}{(1-e_kz^{-1})(1-e_k^*z^{-1})}}_{\text{קטבים/אפסים הם זוגות מרוכבים}} \Rightarrow |H(e^{j\omega})| = 1$$

דרך נוספת לרישום:

$$H(z) = \frac{z^{-N}\left(1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_Nz^N\right)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\ldots+a_Nz^{-N}} = z^{-N}\frac{A(z^{-1})}{A(z)}$$

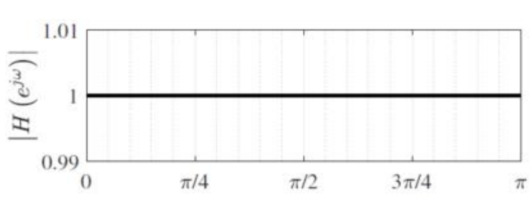
קשר בין כתבים ואפסים (תכונה 5.3): אם p הוא אפס של $H(z)$, הרי $\frac{1}{p}$ הוא קוטב של $H(z)$.

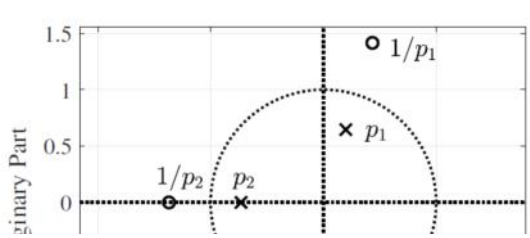
אם p הוא קוטב של $H(z)$, הרי $\frac{1}{p}$ הוא אפס של $H(z)$.

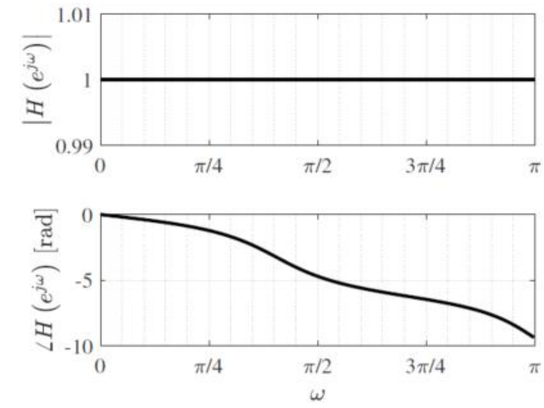
דוגמה מספרית

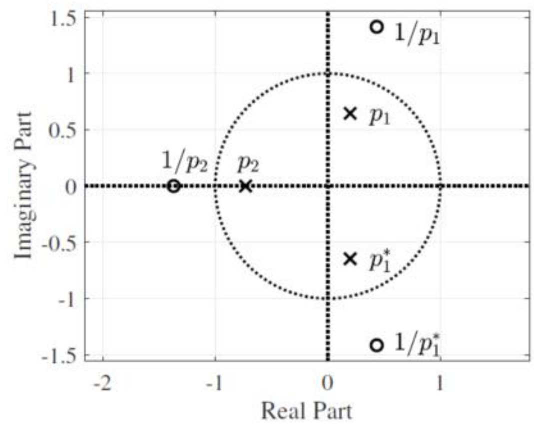
$$H(z) = z^{-3}\frac{3+z+\frac{1}{2}z^2+z^3}{3+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}+z^{-3}}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}+3z^{-3}}{3+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}+z^{-3}}$$









$\boxed{\text{עבודה עם Matlab}}$

זה הגדרה
שבה Matlab
מצפה לקבל מידע

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

1) וקטור ערכי b_i
2) וקטור ערכי a_i

בכל הפקודות (b,a)

דוגמה מספרית:

$$H(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$$

$b = 1$

$a = [1 \ \ -0.9]$