התמרת Z : התמרה כללית של משתנה מרוכב בזמן בדיד

DTFT : מקרה פרטי של התמרת Z, זמן בדיד, תדר רציף

הנושא של היום DFT : מקרה פרטי של DTFT : זמן בדיד ותדר בדיד ← ניתנת לחישוב מספרי

Discrete Fourier Transform (DFT)

שיטה: דגימה בתדר של ערכי התמרת DTFT $X(e^{j\omega})$

מושגים:

2π סה"כ תדרים של התמרת DTFT

N דגימות בתדר = מספר דגימות בזמן

$\frac{2\pi}{N}$ מרווח בין הדגימות בתדר

$K=0,\dots,N-1$ $\quad \omega_k = \frac{2\pi}{N}\cdot k$ תדרים ממוספרים דגומים, כאשר k הוא מספר סידורי של הדגימה בתדר

הגדרה:

$$X[k] = X(e^{j\omega_k})$$

תזכורת: $H(e^{j\omega}) = H(z=e^{j\omega})$, $z=\exp(j\omega)$

בהתאם לקשר להתמרת Z

$$= X(z=e^{j\omega_k})$$

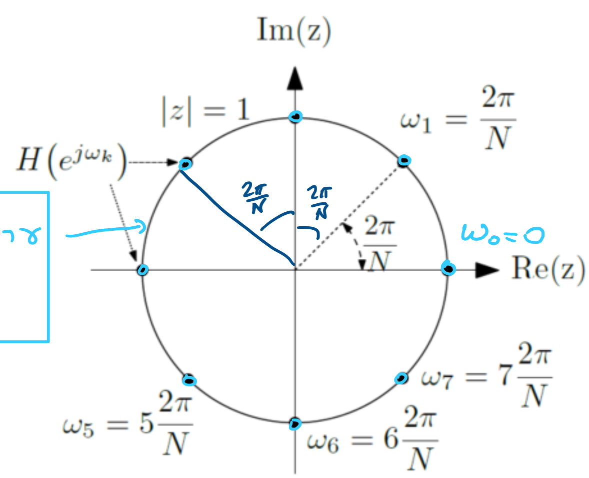
אחרי הצבה בהגדרה של התמרת DTFT מקבל הקשר:

$$X[k] = \mathrm{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left\{-j\frac{2\pi}{N}kn\right\} \qquad k=0,\dots,N-1$$

התמרת DFT ההפוכה ←

$$x[n] = \mathrm{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\exp\left\{j\frac{2\pi}{N}kn\right\} \qquad n=0,\dots,N-1$$

דרך נוספת להסבר:



ערכים ע"ג מעגל יחידה של מישור z ← $H(e^{j\omega})$ = DTFT

$N=8$

$K=0,\dots,7$

דוגמה מספרית: $x[n]=\{1,1,1,1\}$, $n=0,1,2,3$

משימה:

* $X(z),\ X(e^{j\omega}),\ X[k]$

1) $X(e^{j\omega})$ דרך 2) ישירות

* השפעה של N

חישוב מתוך הרצאה 2 (התחלה)

$$* \quad X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k}=\sum_{k=0}^{3}z^{-k}$$
$$=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}$$
$$=\frac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}} \qquad z\neq 0$$

$$* \quad X\left(e^{j\omega}\right)=X\Big(\underbrace{z=e^{j\omega}}_{\text{הצבה}}\Big)=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

תזכורת

$$\boxed{\mathrm{DFT}\left\{x[n]\right\}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\exp\left\{-j\frac{2\pi}{N}kn\right\}}$$

DFT 1)

$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k \qquad k=0,1,2,\overset{N-1}{3}$

$\omega_0=0 \qquad X[0]=X(z=e^{j0}=1)=4$

$\omega_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \qquad X[1]=X\Big(z=\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{j}\Big)=0$

$\omega_2=\frac{2\pi}{4}\cdot 2=\pi \qquad X[2] \qquad =0$

$\omega_3=\frac{2\pi}{4}\cdot 3=\frac{3}{2}\pi \qquad x[3] \qquad =0$

סיכום: $X[k]=\{4,0,0,0\}$

fft([1 1 1 1]) מימוש בMatlab

DFT 2)

$$X[0]=x[0]\underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{4}(k=0)(n=0)}}_{1}+x[1]e^{-j\frac{2\pi}{4}(k=0)(n=1)}+\dots$$
$$=x[0]+x[1]+x[2]+x[3]=4$$

$$X[1]=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n\cdot 1}$$
$$=1+e^{-j\frac{2\pi}{4}}+e^{-j\frac{2\pi}{4}2}+e^{-j\frac{2\pi}{4}3}$$
$$=1+e^{j\frac{\pi}{2}}+e^{j\pi}+e^{j\frac{3\pi}{2}}$$
$$=1-j-1+j=0$$
$$=X[2]=X[3]$$

הערה: התמרת DFT ניתנת לחישוב מספרי מהיר/יעיל (מקביל) יחסית, ע"י אלגוריתם בשם FFT - Fast Fourier Transform

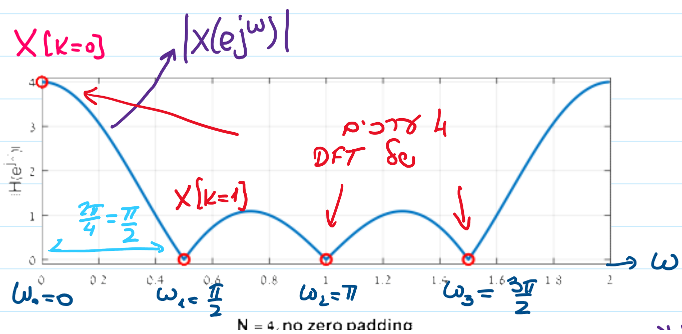
הערה 2:

n - מספר סידורי של דגימה בזמן = זמן בדיד
k - " " " תדר = תדר בדיד

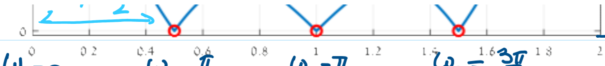
בעיה:

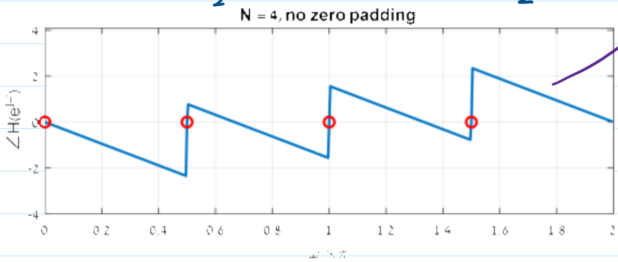
* ניתן לשים לב, שערכי $X[k]$ מייצגים את $X(e^{j\omega})$ בצורה מאוד חלקית

פתרון: לדגום יותר נקודות ע"י הגדלת N



פתרון: לדגום יותר נקודות ע"י הגדלת N





- איך מגדילים N?

תזכורת:

$x[n] = \underbrace{\dots 000}_{\text{אפסים}}\{1,1,1,1\}\underbrace{000\dots}_{\text{אפסים סיבתיים}}$

⇐ *הגדלת N = הגדלת מספר דגימות של האות מבחינה חישובית

* ע"פ הגדרה, כל האיברים סיבתיים מימין לאות הינם אפסים

סיכום: הגדלת N ע"י הוספת אפסים מימין

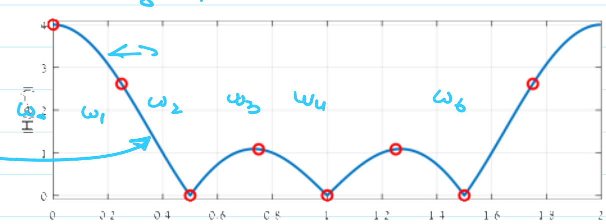
הסבר לדוגמא: $x[n] = \{1,1,1,1,0,0,0,0\}$ — הוספה של 4 אפסים ⇐ $N=8$

abs(fft([1 1 1 1],8))

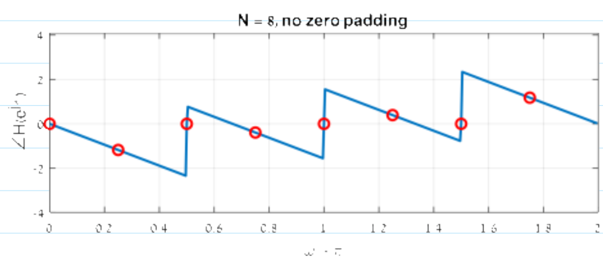
$x[n]$ מקורי — אורך N הנדרש

$\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

הערה: הגרף המקבל ע"י N=512 ⇓ צורה "מדוייקת" יותר של DTFT



הבהרה: התמרת DTFT היא פונקציה רציפה, מספר N קובע את מספר הנקודות/דגימות ע"י DTFT



תכונות של DTF

הקדמה: מאחר ו-DTFT הוא מחזורי ב-2π ⇐ DFT הוא מחזורי ב-N

$$X[k]=X[k+N]$$

$$\mathrm{DFT}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left\{-j\frac{2\pi}{N}kn\right\}$$

$K=N \Rightarrow k=0$ מחזוריות

בגלל מחזוריות של exp מרוכב

הגדרה: mod (הגדרה 7.4): פעולה $a \bmod b$ היא שארית חיובית של החלוקה של מספר a במספר b.

דוגמה:

$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

$5 \bmod 3 = 2$

$4 \bmod 3 = 1$

דרך רישום ע"י mod

$X[k] = X[k \bmod N]$

$N+1 \bmod N = 1$

$X[k] = \tilde{X}[k \bmod N]$

$N+1 \bmod N = 1$

$N \bmod N = 0$

$N-1 \bmod N = N-1$

$\vdots$

$1 \bmod N = 1$

$0 \bmod N = 0$

$-\frac{1}{N} = -1 + \frac{N-1}{N} \quad -1 \bmod N = N-1$

$-2 \bmod N = N-2$

$\frac{N-1}{N}$

$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} \qquad 5 \bmod 3 = 2$

$4 \bmod 3 = 1$

$\frac{3}{3} = 1 + \frac{0}{3} \qquad 3 \bmod 3 = 0$

$2 \bmod 3 = 2$

$1 \bmod 3 = 1$

$0 \bmod 3 = 0$

$-\frac{1}{3} = -1 + \frac{2}{3} \qquad -1 \bmod 3 = 2$

$-\frac{2}{3} = -1 + \frac{1}{3} \qquad -2 \bmod 3 = 1$

$-\frac{5}{3} = -2 + \frac{1}{3} \qquad -5 \bmod 3 = 1$

הזזה ושיקוף מחזוריים / ציקליים

$y[n] = x[-n \bmod N]$

$y[0] = x[-0 \bmod N] = x[0]$

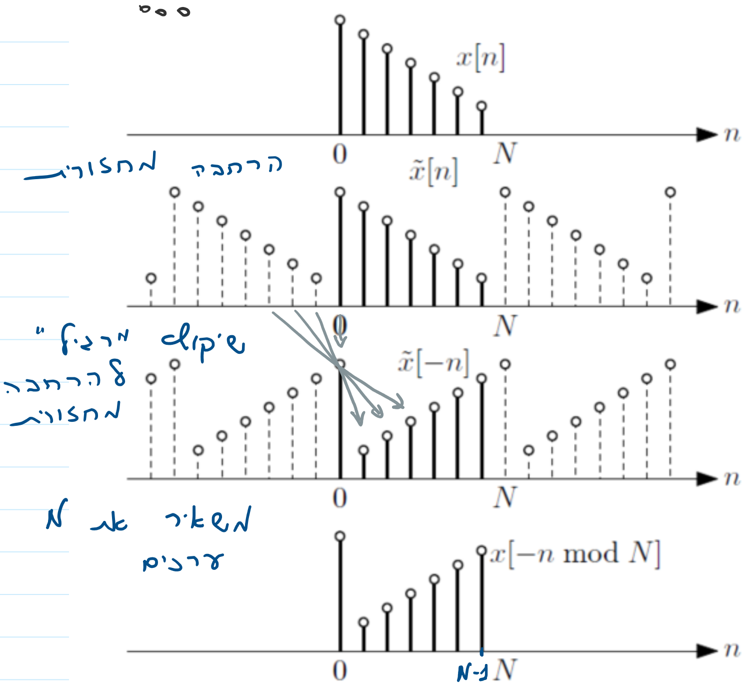
$y[1] = x[-1 \bmod N] = x[N-1]$

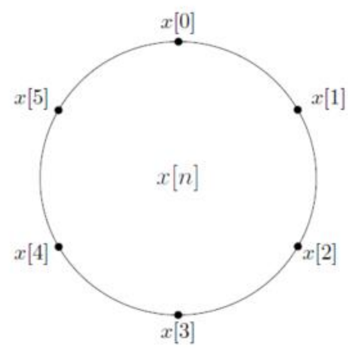
$y[2] = x[-2 \bmod N] = x[N-2]$

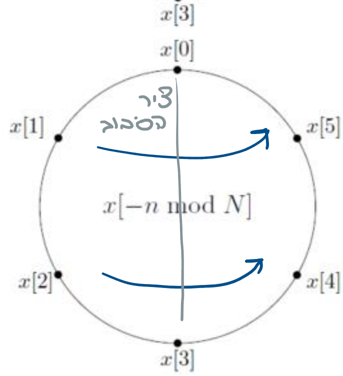
...

עבור קטע באורך N :

$$y[n] = \begin{cases} x[0] & n=0 \\ x[N-n] & n = 1,\dots,N-1 \end{cases}$$

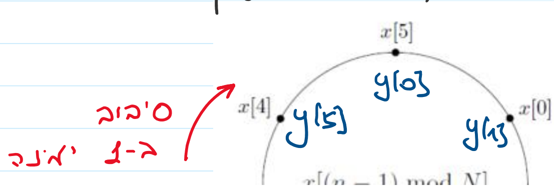






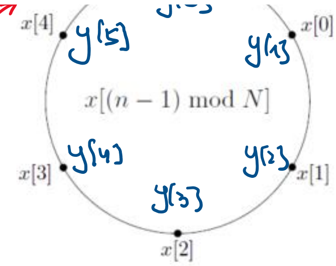
הזזה , הזזה + שיקוף

$y[n] = x[(n-1) \bmod N]$



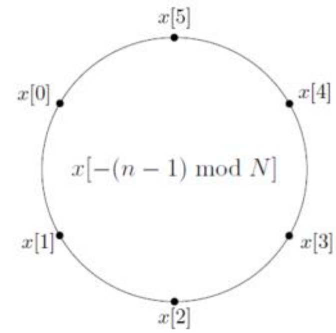
סיבוב ב-1 ימינה

$y[n] = x[(n-1) \bmod N]$



$y[n] = x[-(n-1) \bmod N]$

שיקוף של דוגמה על



תכונות של התמרת DFT

הערה: התכונות בדיון ירושה מ- DTFT.

* **ליניאריות** (תכונה 7.2): עבור שני אותות סופיים בזמן $x_1[n], x_2[n]$, ובעלי התמרות

$$X_1[k] = \text{DFT}\{x_1[n]\},\ X_2[k] = \text{DFT}\{x_2[n]\}$$

$$\text{DFT}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1[k] + bX_2[k]$$

$y[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$
$n = 0, \dots, N-1$

הערה: יש להוסיף אפסים ע"פ הצורך, ע"מ ש$x_1[n], x_2[n]$ יהיו באורך זהה לפני חישוב DFT

הערה: * מאחר והחישוב של DFT מבוסס exp מחזורי, ניתן להסתכל על האות בזמן באות מחזורי.

* הזזה בזמן:

$$\text{DFT}\{x[(n-m) \bmod N]\} = e^{-j\frac{2\pi}{N}km}X[k]$$

* לדוגמה: התמרה הפוכה

$x[n+N] \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X[k+N]$ כל

$\downarrow$

$x[n \bmod N]$

* הזזה בתדר

$$\text{DFT}\left\{e^{j\frac{2\pi}{N}km}x[n]\right\} = X[(k-m) \bmod N]$$

* מכפלה בתדר

$$Y[k] = X_1[k]X_2[k] \leftrightarrow y[n] = x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n]$$

קונבולוציה 3 קית/סיבובית:

$$x_1[n] \overset{N}{\circledast} x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m) \bmod N]$$

$$= x_2[n] \overset{N}{\circledast} x_1[n]$$

אורך הקונבולוציה - N

N - אורך הקונבולוציה $= x_2[n] \circledast x_1[n]$

* יש להוסיף אפסים ע"פ הצורך, ע"מ ש$x_1[n], x_2[n]$ יהיו באורך N

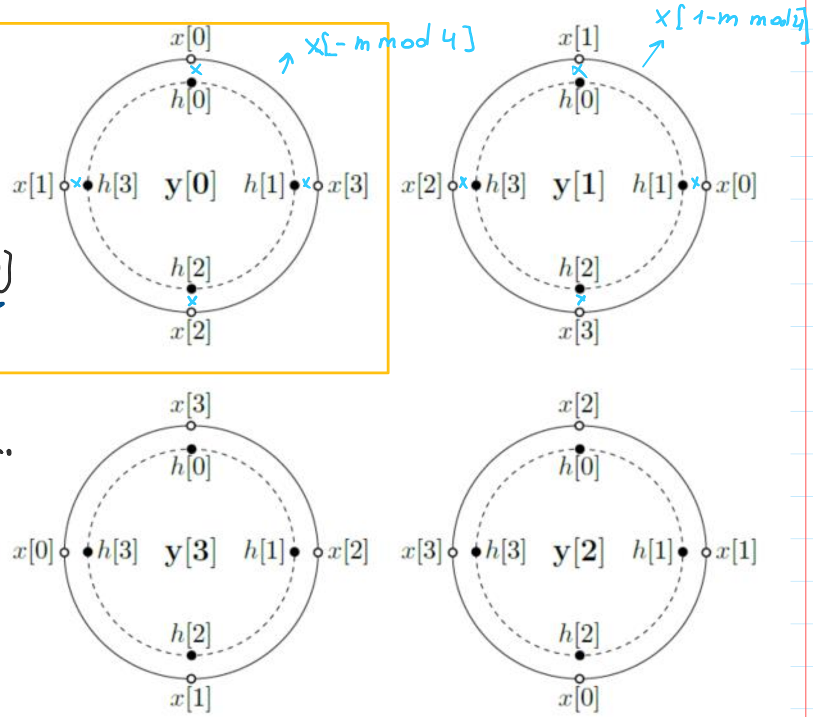
דוגמה: כוס אמאש באורך 4 $x[n] = x[0], x[1], x[2], x[3]$ $\quad y[n] = x[n] \overset{4}{\circledast} h[n]$

$h[n] = h[0], h[1], h[2], h[3]$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{3} h[m]\, x[(n-m) \bmod 4]$$

$$y[0] = \overset{n=0}{h[0]\, \underbrace{x[0-0 \bmod 4]}_{\substack{m=0 \\ x[0]}}} + h[1]\, \underbrace{x[(0-1) \bmod 4]}_{\substack{m=1 \\ x[3]}}$$

$$+ h[2]\, \underbrace{x[0-2 \bmod 4]}_{x[2]} + h[3]\, \underbrace{x[0-3 \bmod 4]}_{x[1]}$$



$$y[1] = h[0]\, \underbrace{x[1-0 \bmod 4]}_{x[1]} + h[1]\, \underbrace{x[1-1 \bmod 4]}_{x[0]} + \dots$$

דרך ייצוג נוספת:

x[-m mod N]

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & x[3] & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0] & x[3] & x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] & x[3] \\ x[3] & x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \end{bmatrix}$$

* דואליות $X[k] = \text{DFT}\{x[n]\} \rightarrow \text{DFT}\{\underbrace{X}_{\text{הצמדה}}[n]\} = N x[(-k) \bmod N]$

* כפל בזמן ← קונבולוציה ציקלית בתדר

$$\text{DFT}\{x_1[n]x_2[n]\} = \frac{1}{N} X_1[k] \overset{N}{\circledast} X_2[k]$$

* שימור אנרגיה $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$ משפט פרסבל

דוגמה מספרית לחישוב

$$\underbrace{\{4,5,6,3\}}_{x[n]} \overset{4}{\circledast} \underbrace{\{1,2,-2,-1\}}_{h[n]}$$

$x[0] = 4$

$x[1] = 5$

$x[2] = 6$

$x[3] = 3$

$$\begin{bmatrix} y[0] \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x[0] & x[3] & x[2] & x[1] \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} h[0] \end{bmatrix}$$

$x[2]=6$

$x[3]=3$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}}_{x[n]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{h[n]}$$

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & x[3] & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0] & x[3] & x[2] \\ x[2] & x[1] & x[0] & x[3] \\ x[3] & x[2] & x[1] & x[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ h[3] \end{bmatrix}$$

$y[0] = 4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 6(-2) + 5\cdot(-1) = -7$

$y[1] = 5\cdot 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot(-2) + 6(-1) = 1$

$y[2] = 5 \qquad y[3] = 1$

Matlab:

$$\text{ifft(fft(}\underbrace{\text{[4 5 6 3]}}_{x[n]}\text{).*fft(}\underbrace{\text{[1 2 -2 -1]}}_{h[n]}\text{))}$$

$$IDFT\{\underbrace{DFT\{x[n]\}}\cdot DFT\{h[n]\}\}$$

$$y[n] = IDFT\{X[k] \cdot H[k]\}$$