

## Jukselapp

Rekkefølgen på disse notatene følger tidligere eksamener i MAT1110 (2015 først, 2014, ...). Ettersom noen emner dukker opp i flere eksamener, og jeg nå har bynt på konteeksamener, er rekkefølgen noe tilfeldig.

Jeg skriver kun opp de teknikkene jeg faktisk bruker. Det finnes f.eks. flere konvergenstester enn jeg har skrevet ned.

## Stasjonære punkter

Finn de stasjonære punktene til  $f$ . Avgjør om de er sadelpunkter, maksimum- eller minimumspunkter.

### Finn punktene

Stasjonære punkter er flate punkter, uten forandring. Da må de partiellderiverte være null.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \dots = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots = 0$$

Hva må  $x$  og  $y$  være da? Dette er punktene dine. Husk  $x$  og  $y$  kan begge være null!

### Avgjør sadel, max, min

ADVARSEL\*

Hessematrisen

$$Hf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Det første tallet i  $Hf(\vec{a})$  avgjør typen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \implies \text{min}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \implies \text{max}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \implies \text{sadel}$$

\*det kan hende at dette bare gjelder for et spesialtilfelle. Se neste avsnitt.

**Sadel, max, min (fullstendig)**

Regn ut determinanten til Hessematrisen.

$$\det H > 0 \implies \text{min?}$$

$$\det H < 0 \implies \text{sadel}$$

$$\det H = 0 \implies \text{max?}$$

**Konvergensområde til rekke****Konvergensradius**

Bruk en konvergenstest for å finne absoluttverdi mindre enn én.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\text{konv.test}| < 1$$

Hva må  $x$  være for å oppfylle dette?

$$\text{konvergensområde} = (x_0, x_1)$$

**Endepunktene**

Skal intervallet være åpent eller lukket? Sett  $x_0$  og  $x_1$  inn i rekken og se om det konvergerer eller ikke. Hvis endepunktet fører til konvergens, skal intervallet lukkes i den enden.

**Areal av parametrisert kurve**

Gitt en parametrisert kurve:  $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$ ,  $t \in [0, \pi]$

Legg merke til om den er orientert i positiv eller negativ retning. Danner kurven en fullstendig form eller om den er åpen?

**Areal**

$$A = \int_C x \, dy$$

$x$  er bokstavelig talt  $x(t)$  fra parametriseringen.

$dy$  er den deriverte av  $y(t)$ .

$$A = \int_0^\pi x(t) \cdot y'(t) \, dt$$

## Volum begrenset av paraboloider

Volumet  $V$  er avgrenset av 2 paraboloider

$$z = \text{polynom}$$

### Hva er området $D$ ?

Bruk kvadrering etc til å få polynomet på form som sirkel (eller ellipse, parabel eller hyperbel?).

Finn sentrum og radius.

### Integrere over areal

Test  $z_1$  og  $z_2$  med sentrumsverdiene. Hvilken er øverst?

Sett opp integralet med den øverste minus den nederste.

$$\int_D (z_2 - z_1) \, dx dy$$

For å regne ut kan det hjelpe å bytte til polarkordinater (eller sirkel-, kule- eller sylinderkoordinater).

NB! Noen ganger bruker man ikke polarkordinater, men vanlig  $x, y, z$ .

## Symmetriske matriser og egenvektorer

### Basis

En basis er et set med vektorer som kan kombineres for å gjenskape rommet det er i.

### Eigenverdi og egenvektor

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$$

### Eigenrom og multiplisitet

Én eigenverdi kan ha flere tilhørende egenvektorer. Rommet utspent av egenvektorer med felles eigenverdi kalles eigenrom. Dimensjonen til dette rommet kalles multiplisitet.

## Matriser og ligningssett

### Lineær uavhengighet

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  er vektorer, og matrisen  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ . A radreduseres til B. Vektorene er lineært uavhengige hvis alle søylene i B er pivotsøyer.

### Løsning av ligningssett

Pass på om matrisen inkluderer høyre siden eller ikke! Bruk den reduserte trappeformen til å se hva  $x, y, z, w$  skal være.

### En vektor som lineærkombinasjon av de andre

Gitt variablene  $x, y, z, w$  og matrisen A redusert til B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da kan man skrive  $a_4$  (w sin søyle) som

$$2\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 + 1\vec{a}_3 = \vec{a}_4$$

## Lagrange metode og max/min under bibetingelse

Gitt en funksjon

$$f = f(x, y, z)$$

Og en bibetingelse

$$g(x, y, z) = \text{uttrykk}$$

Finn min/max punkter til f under bibetingelsen

### Med konstanten lambda

Det finnes en  $\lambda$  s.a.

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

Løs ligningene som følger for å finne forskjellige  $\lambda$ .

Sett de forskjellige lambda inn i ligningene og finn  $x, y, z$ .

Prøv alle kombinasjoner av  $\lambda$  og  $x, y, z$  i f for å se hva som er max og min.

Note: ved flere bibetingelser, bruk flere lambda og lin.komb.

### Alternativ metode

Husker at det fantes en metode uten  $\lambda$ , men ikke hvordan den er.

## Eigenverdier og egenvektorer

### Finn egenverdiene og egenvektorene

Gitt en matrise  $A$ .

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$$

Regn ut  $A\vec{v}_1$  og sett det lik  $(x, y, z)$ . Løs ligningssystemet for  $\lambda$ .

For rask løsning, bruk:  $\det(\lambda I_n - A) = 0$ .

Når du har funnet egenverdien  $\lambda$ , bruk den for å finne  $(x, y, z)$ .

### Grenseverdi med $A$ ganger vektor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \vec{w}$$

Skriv  $\vec{w}$  som en lineær kombinasjon av egenvektorene.

$$A^n \vec{w} = A^n(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3)$$

Da kan du erstatte  $A$  med egenverdiene og regne ut. Hvilke ledd forsvinner med stor  $n$ ?

## Konvergens og divergens av rekker

Mine favoritt konvergenstester.

### Forholdstesten

Gitt fra oppgaven, en rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Test

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Hvis  $a < 1$  konvergens.

Hvis  $a > 1$  divergens.

Hvis  $a = 1$  ??

### Sammenligningstesten

Oppgaven gir f.eks.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 + 4n}{8n^4 - 2} = \sum b_n$$

Man kan sammenligne med noe man vet svaret på

$$\sum \frac{1}{n^2} = \sum a_n$$

Sett opp og regn ut

Hvis  $\sum a_n$  konv. og  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty \implies \sum b_n$  konv.

Hvis  $\sum a_n$  div. og  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} > 0 \implies \sum b_n$  div.

### 1 over n i r sammenligning

$$\sum \frac{1}{n^r}$$

Hvis  $r < 1$  konvergens  
ellers divergens.

### Alternerende rekker

En alternerende rekke  $\sum a_n$  konvergerer når

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

## Variabelskifte i trippelintegral

Gitt én eller flere funksjoner som innskrenker et område  $f = f(x, y, z)$ . Finn trippelintegralet

$$\iiint_S g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

### Polarkoordinater

Hvis du har radius  $r$  og vet vinkelspennet  $\theta$  vurder polarkoordinater.

$dx \, dy \, dz$  byttes ut med  $r \, dr \, d\theta \, dz$  (dz hvis du har 3D).

Husk å ta hensyn til sirkler som ikke er rundt origo med  $x = x_0 + r \cos \theta$  og  $y = y_0 + r \sin \theta$

I integralet, hva skal  $z$  gå fra og til? Det bestemmes av begrensningene gitt i oppgaven (sikkert et polynom eller to).

## Når er en matrise inverterbar?

### Hvordan invertere en matrise

Gitt en matrise  $A$ . Skjøl matrisen sammen med  $I_n$  s.a. du får en ny matrise  $(A, I_n)$ . Når er 'høyrematrisen' en identitetsmatrise, radreduser til 'venstrematrisen' er identitetsmatrisen.

### Hvis du synes invertering er slitsomt

Når en matrise er inverterbar er  $\det(A) \neq 0$ .

Man finner determinanten ved å radredusere til en triangulær matrise og gange sammen diagonalen.

**For hvilke verdier av  $a$  er matrisen inverterbar?**

Bruk en av de to måtene over til å se hva  $a$  kan være.

## Sum av rekker

### Potensrekke

(Disse oppgavene kan variere i form).

EkspONENTEN til  $x$  er som regel  $n$ ,  $n - 1$  eller no lignende.  $x$  er bare et tall, så man kan sette f.eks  $x^3$  utenfor summen s.a. eksponenten kan forkortes mot andre deler av uttrykket. (Man må kanskje endre startverdien til  $n$ ).

Forhåpentligvis er den modifiserte summen lik en av eksempelsummene i formelsamlingen.

## Lagrange metode og punkter nærmest et annet punkt

Gitt (eller funnet) en funksjon

$$f(x, y, z) = (x - 3)^2 + y^2 + z^2$$

og en bibetingelse

$$g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z$$

Finn minimumsverdien til  $f$ . Dette er det samme som å finne punktene på  $g$  som ligger nærmest  $(3, 0, 0)$ .

Løs på samme måte som Lagrange over.

Tips: Man kan ta utgangspunkt i "hva kan lambda være?" eller i "hva kan  $x, y, z$  være?".

## Vis at (avbildning) ...

Vis at  $F$  avbilder rutenett  $A$  til rutenett  $B$ .

Good luck, have fun.

Prøv å se om  $(x, y)$  er definert ved  $F(x, y) = (X_{ny}, Y_{ny})$ . De nye  $x, y$  kan passe inn i definisjonen av  $B$ .

## Jacobideterminant

Jacobideterminanten er Jacobimatrisen sin determinant.

$$\det J = \det \bar{F}'(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix}$$

Dette brukes i trippelintegraler ol.

## Omvendt funksjon

**Vis at den omvendte finnes**

Vis at funksjonen  $\vec{F}(x, y)$  har en omvendt funksjon  $\vec{G}$  s.a.  $\vec{G}(\vec{a}) = \vec{b}$ .

Test at  $\vec{F}(\vec{b}) = \vec{a}$

**Deriverte av den omvendte**

Finn den inverse av  $\vec{F}'$  i 'motsatt punkt'.

$$\vec{G}'(\vec{a}) = \vec{F}'(\vec{b})^{-1}$$

## Kjerneregul

Gitt en parametrisert funksjon

$$\vec{r}(t) = [x(t), y(t), g(x(t), y(t))]$$

Da er den deriverte

$$\vec{r}'(t) = [x'(t), y'(t), \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \cdot x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \cdot y'(t)]$$

## Løsning av ligningssystemer

Gitt et ligningssystem, skriv det på matriseform og radreduser.

xyz-søylene er alle pivot  $\implies$  entydig løsning

Nederste rad bare null  $\implies$  uendelig mange

nest siste 0, men ikke siste  $\implies$  ingen løsning

## Konservative felt

**Vis at  $\mathbf{F}$  er konservativt**

Gitt et vektorfelt  $\vec{F}$ , vis at det er konservativt.

$$\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{F}_j}{\partial x_i}$$



### Finn en potensialfunksjon

Følgende kan være nyttig fordi integral og gradient 'dreper hverandre'.

$$\int \vec{F} = \int \nabla \Phi$$

Dette betyr at  $\vec{F} = \nabla \Phi$ . Finn  $\Phi$  ved å antiderivere  $\vec{F}$  med hensyn på  $x$  og  $y$ , og slå sammen resultatene.

## Variabelskifte ved doble integraler

Gitt noen kurver, f.eks.

$$y = \text{uttrykk1} \quad y = \text{uttrykk2} \quad x = \text{uttrykk3}$$

### Finn $u$ & $v$

Rydd på uttrykkene så  $x$  og  $y$  er alene på venstresiden, høyresiden er nå lik  $u$  eller  $v$ .

### Finn $x$ & $y$

$$\frac{v}{u}$$

Del den ene på den andre, eller motsatt, for å finne et uttrykk for  $x$  (eller  $y$ ). Kombinér resultatet med en av uttrykkene vi startet med for å finne et uttrykk for  $y$  (eller  $x$ ).

### Finn $dx$ & $dy$

$$\frac{dv}{dx}$$

Deriver  $v$  på  $x$  (eller  $y$ ), og tilsvarende for  $u$ , for å finne  $dx$  og  $dy$ .

### Sett inn og regn ut

Med integralet mellom de nye grensene, erstatt  $x$ ,  $y$ ,  $dx$ ,  $dy$  med det du fant. Regn ut.

## Implisitt funksjonsteorem

### Vis at det finnes en funksjon

$$z = g(x, y)$$

s.a.  $g = \text{uttrykk}$  med  $g(x, y)$ .

Skriv om med  $z$  istedenfor:  $z =$  uttrykk med  $z$ . Flytt rundt så uttrykket blir 0 og kall dette  $f(x, y)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}, g(\vec{a})) \neq 0$$

**deriverte**

$$\frac{\partial g}{\partial x(\vec{a})} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}, g(\vec{a}))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}, g(\vec{a}))}$$

og

$$\frac{\partial g}{\partial y(\vec{a})} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}, g(\vec{a}))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}, g(\vec{a}))}$$

## Linjeintegral og Green

Løs linjeintegralet

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Når  $C$  er en gitt form og

$$\vec{F} = [\text{uttrykk1}, \text{uttrykk2}]$$

Trikset ligger i å vite at

$$\vec{F} = [P, Q]$$

og at

$$\int_C P dx + Q dy$$

Løs på vanlig green måte

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy$$