

## Jukselapp

Rekkefølgen på disse notatene følger tidligere eksamener i MAT1110 (2015 først, 2014, ...).

Jeg skriver kun opp de teknikkene jeg faktisk bruker. Det finnes f.eks. flere konvergenstester enn jeg har skrevet ned.

## Stasjonære punkter

Finn de stasjonære punktene til  $f$ . Avgjør om de er sadelpunkter, maksimum- eller minimumspunkter.

### Finn punktene

Partiellderivate må være null.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \dots = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots = 0$$

Hva må  $x$  og  $y$  være da? Dette er punktene dine. Husk  $x$  og  $y$  kan begge være null!

### Avgjør sadel, max, min

Hessematrisen

$$Hf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Det første tallet i  $Hf(\vec{a})$  avgjør typen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \implies \text{min}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \implies \text{max}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \implies \text{sadel?}$$

## Konvergensområde til rekke

### Konvergensradius

Bruk en konvergenstest for å finne absoluttverdi mindre enn én.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\text{konv.test}| < 1$$

Hva må  $x$  være for å oppfylle dette?

$$\text{konvergensområde} = (x_0, x_1)$$

### Endepunktene

Skal intervallet være åpent eller lukket? Sett  $x_0$  og  $x_1$  inn i rekken og se om det konvergerer eller ikke. Hvis endepunktet fører til konvergens, skal intervallet lukkes i den enden.

## Areal av parametrisert kurve

Gitt en parametrisert kurve:  $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$ ,  $t \in [0, \pi]$

Legg merke til om den er orientert i positiv eller negativ retning. Danner kurven en fullstendig form eller om den er åpen?

### Areal

$$A = \int_C x \, dy$$

$x$  er bokstavelig talt  $x(t)$  fra parametriseringen.  
 $dy$  er den deriverte av  $y(t)$ .

$$A = \int_0^\pi x(t) \cdot y'(t) \, dt$$

## Volum begrenset av paraboloider

Volumet  $V$  er avgrenset av 2 paraboloider

$$z = \text{polynom}$$

### Hva er området $D$ ?

Bruk kvadrering etc til å få polynomet på form som sirkel (eller ellipse, parabel eller hyperbel?).

Finn sentrum og radius.

### Integrere over areal

Test  $z_1$  og  $z_2$  med sentrumsverdiene. Hvilken er øverst?

Sett opp integralet med den øverste minus den nederste.

$$\int_D (z_2 - z_1) \, dx dy$$

For å regne ut kan det hjelpe å bytte til polarkordinater (eller sirkel-, kule- eller sylinderkoordinater).

## Symmetriske matriser og egenvektorer

### Basis

En basis er et set med vektorer som kan kombineres for å gjenskape rommet det er i.

### Eigenverdi og egenvektor

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$$

### Eigenrom og multiplisitet

En eigenverdi kan ha flere tilhørende egenvektorer. Rommet utspent av egenvektorer med felles eigenverdi kalles eigenrom. Dimensjonen til dette rommet kalles multiplisitet.

## Matriser og ligningssett

### Lineær uavhengighet

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  er vektorer, og matrisen  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ . A radreduseres til B. Vektorene er lineært uavhengige hvis alle søylene i B er pivotsøyler.

### Løsning av ligningssett

Pass på om matrisen inkluderer høyre siden eller ikke! Bruk den reduserte trappeformen til å se hva x, y, z, w skal være.

### En vektor som lineærkombinasjon av de andre

Gitt variablene x, y, z, w og matrisen A redusert til B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da kan man skrive  $a_4$  (w sin søyle) som

$$2\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 + 1\vec{a}_3 = \vec{a}_4$$

## Lagrange metode og max/min under bibetingelse

Gitt en funksjon

$$f = f(x, y, z)$$

Og en bibetingelse

$$g(x, y, z) = \text{uttrykk}$$

Finn min/max punkter til  $f$  under bibetingelsen

### Med konstanten lambda

Det finnes en  $\lambda$  s.a.

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

Løs ligningene som følger for å finne forskjellige  $\lambda$ .

Sett de forskjellige lambda inn i ligningene og finn  $x, y, z$ .

Prøv alle kombinasjoner av  $\lambda$  og  $x, y, z$  i  $f$  for å se hva som er max og min.

Note: ved flere bibetingelser, bruk flere lambda og lin.komb.

### Alternativ metode

Husker at det fantes en metode uten  $\lambda$ , men ikke hvordan den er.

## Eigenverdier og egenvektorer

### Finn egenverdiene og egenvektorene

Gitt en matrise  $A$ .

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$$

Regn ut  $A\vec{v}_1$  og sett det lik  $(x, y, z)$ . Løs ligningssystemet for  $\lambda$ .

Når du har funnet egenverdien  $\lambda$ , bruk den for å finne  $(x, y, z)$ .

### Grenseverdi med A ganger vektor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \vec{w}$$

Skriv  $\vec{w}$  som en lineær kombinasjon av egenvektorene.

$$A^n \vec{w} = A^n (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3)$$

Da kan du erstatte  $A$  med egenverdiene og regne ut. Hvilke ledd forsvinner med stor  $n$ ?

## Konvergens og divergens av rekker

Mine favoritt konvergenstester.

### Forholdstesten

Gitt fra oppgaven, en rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Test

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Hvis  $a < 1$  konvergens.

Hvis  $a > 1$  divergens.

Hvis  $a = 1$  ??

### Sammenligningstesten

Oppgaven gir f.eks.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 + 4n}{8n^4 - 2} = \sum b_n$$

Man kan sammenligne med noe man vet svaret på

$$\sum \frac{1}{n^2} = \sum a_n$$

Sett opp og regn ut

Hvis  $\sum a_n$  konv. og  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty \implies \sum b_n$  konv.

Hvis  $\sum a_n$  div. og  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} > 0 \implies \sum b_n$  div.

### 1 over n i r sammenligning

$$\sum \frac{1}{n^r}$$

Hvis  $r < 1$  konvergens

ellers divergens.

## Variabelskifte i trippelintegral

Gitt én eller flere funksjoner som innskrenker et område  $f = f(x, y, z)$ . Finn trippelintegralet

$$\iiint_S g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

### Polarkoordinater

Hvis du har radius  $r$  og vet vinkelspennet  $\theta$  vurder polarkoordinater.

$dx dy dz$  byttes ut med  $r dr d\theta dz$  ( $dz$  hvis du har 3D).

I integralet, hva skal  $z$  gå fra og til? Det bestemmes av begrensningene gitt i oppgaven (sikkert et polynom eller to).

## Når er en matrise inverterbar?

### Hvordan invertere en matrise

Gitt en matrise  $A$ . Skjøl matrisen sammen med  $I_n$  s.a. du får en ny matrise  $(A, I_n)$ . Når er 'høyrematrisen' en identitetsmatrise, radreduser til 'venstrematrisen' er identitetsmatrisen.

### Hvis du synes invertering er slitsomt

Når en matrise er inverterbar er  $\det(A) \neq 0$ .

Man finner determinanten ved å radredusere til en triangulær matrise og gange sammen diagonalen.

### For hvilke verdier av $a$ er matrisen inverterbar?

Bruk en av de to måtene over til å se hva  $a$  kan være.

## Sum av rekker

### Potensrekke

(Disse oppgavene kan variere i form).

Eksponenten til  $x$  er som regel  $n$ ,  $n - 1$  eller no lignende.  $x$  er bare et tall, så man kan sette f.eks  $x^3$  utenfor summen s.a. eksponenten kan forkortes mot andre deler av uttrykket. (Man må kanksje endre startverdien til  $n$ ).

Forhåpentligvis er den modifiserte summen lik en av eksempelsummene i formelsamlingen.

## Lagrange metode og punkter nærmest et annet punkt

Gitt (eller funnet) en funksjon

$$f(x, y, z) = (x - 3)^2 + y^2 + z^2$$

og en bibetingelse

$$g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z$$

Finn minimumsverdien til  $f$ . Dette er det samme som å finne punktene på  $g$  som ligger nærmest  $(3, 0, 0)$ .

Løs på samme måte som Lagrange over.

Tips: Man kan ta utgangspunkt i "hva kan lambda være?" eller i "hva kan x,y,z være?".

## Vis at (avbildning) ...

Vis at  $F$  avbilder rutenett A til rutenett B.

Good luck, have fun.

Prøv å se om  $(x, y)$  er definert ved  $F(x, y) = (X_{ny}, Y_{ny})$ . De nye x,y kan passe inn i definisjonen av B.

## Jacobideterminant

Jacobideterminanten er Jacobimatrisen sin determinant.

$$\det J = \det \bar{F}'(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix}$$

Dette brukes i trippelintegraler ol.