

# MAT1120

Robin A. T. Pedersen

November 19, 2016

## Contents

<b>1</b>	<b>Forord</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Kpt.4 - Vektorrom</b>	<b>5</b>
4.1	Vektor rom og underrom . . . . .	5
4.1.1	Definisjon - vektorrom . . . . .	5
4.1.2	Definisjon - underrom . . . . .	5
4.1.3	Teorem 1 . . . . .	5
4.2	Nullrom, kolonnerom og lineærtransformasjoner . . . . .	5
4.2.1	Definisjon - nullrom . . . . .	5
4.2.2	Teorem 2 . . . . .	6
4.2.3	Definisjon - kolonnerom . . . . .	6
4.2.4	Teorem 3 . . . . .	6
4.2.5	Definisjon - lineærtransformasjon . . . . .	6
4.2.6	Begrep - kjerne (kernel) . . . . .	6
4.3	Lineært uavhengige mengder: basiser . . . . .	6
4.3.1	Teorem 4 . . . . .	6
4.3.2	Definisjon - basis . . . . .	6
4.3.3	Teorem 5 - utspennende mengde teoremet . . . . .	7
4.3.4	Teorem 6 . . . . .	7
4.4	Koordinatsystemer . . . . .	7
4.4.1	Teorem 7 - unik representasjon teoremet . . . . .	7
4.4.2	Definisjon - $\mathcal{B}$ -koordinater . . . . .	7
4.4.3	Begrep - koordinatskiftematrise . . . . .	7
4.4.4	Teorem 8 . . . . .	7
4.4.5	Begrep - isomorfi . . . . .	8
4.5	Dimensjon av vektorrom . . . . .	8
4.5.1	Teorem 9 . . . . .	8
4.5.2	Teorem 10 . . . . .	8
4.5.3	Definisjon - dimensjon . . . . .	8
4.5.4	Teorem 11 . . . . .	8
4.5.5	Teorem 12 - basisteoremet . . . . .	8
4.5.6	Observasjon - DimNul og DimCol . . . . .	8

4.6	Rang . . . . .	9
4.6.1	Definisjon - radrom . . . . .	9
4.6.2	Teorem 13 . . . . .	9
4.6.3	Definisjon - rang . . . . .	9
4.6.4	Teorem 14 - rangteoremet . . . . .	9
4.6.5	Teorem - invertibel matrise teoremet (fortsatt) . . . . .	9
4.7	Basisskifte . . . . .	10
4.7.1	Teorem 15 . . . . .	10
4.7.2	Begrep - koordinatskiftematrise . . . . .	10
4.7.3	Observasjon - Invers av koord.skiftematr. . . . .	10
4.8	Ikke eksamensrelevant . . . . .	10
4.9	Anvendelser til Markovkjeder . . . . .	10
4.9.1	Begrep - sannsynlighetsvektor . . . . .	10
4.9.2	Begrep - stokastisk matrise . . . . .	10
4.9.3	Begrep - markovkjede . . . . .	10
4.9.4	Begrep - tilstandsvektor . . . . .	10
4.9.5	Begrep - ekvilibriumsvektor . . . . .	11
4.9.6	Begrep - regulæritet . . . . .	11
4.9.7	Teorem 18 . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Kpt.5 - Egenverdier og Egenvektorer</b>	<b>11</b>
5.1	Egenvektor og egenverdier . . . . .	11
5.1.1	Definisjon - egenvektor og egenverdi . . . . .	11
5.1.2	Begrep - egenrom . . . . .	11
5.1.3	Teorem 1 . . . . .	11
5.1.4	Teorem 2 . . . . .	11
5.1.5	. . . . .	12
5.2	Den karakteristisk ligningen . . . . .	12
5.2.1	Teorem - IMT fortsatt . . . . .	12
5.2.2	Teorem 3 - egenskaper til determinanter . . . . .	12
5.2.3	Begrep - karakteristisk ligning . . . . .	12
5.2.4	Teorem 4 . . . . .	12
5.2.5	. . . . .	12
5.3	Diagonalisering . . . . .	13
5.3.1	Teorem 5 - diagonaliseringsteoremet . . . . .	13
5.3.2	Metode - diagonalisering . . . . .	13
5.3.3	Teorem 6 . . . . .	13
5.3.4	Teorem 7 . . . . .	13
5.4	Egenvektorer og lineærtransformasjoner . . . . .	13
5.4.1	Metode - relativ transformasjonsmatrise . . . . .	13
5.4.2	Metode - lin.transformasjon fra $V$ til $V$ . . . . .	14
5.4.3	Teorem 8 - Diagonal matrise representasjon . . . . .	14
5.4.4	. . . . .	14
5.5	Komplekse egenverdier . . . . .	14
5.5.1	Teorem 9 . . . . .	14
5.5.2	Metode - Spesielt tilfelle . . . . .	14

5.6	Diskrete dynamiske systemer . . . . .	15
5.6.1	Metode - følger . . . . .	15
5.6.2	Observasjon - origos natur . . . . .	15
5.6.3	. . . . .	15
5.7	Anvendelser til differensialligninger . . . . .	15
5.7.1	Repetisjon - Diffliigninger . . . . .	15
5.7.2	Metode - initialverdiproblem . . . . .	15
5.7.3	Observasjon - frastøter, sadel, attraktor . . . . .	16
5.7.4	Metode - avkobling av dynamiske systemer . . . . .	16
5.7.5	Komplekse egenverdier . . . . .	16
5.8	Iterative estimer for egenverdier . . . . .	17
5.8.1	Metode - potensmetoden . . . . .	17
5.8.2	Metode - invers potensmetode . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Kpt.6 - Ortogonalitet og Minstekvadrater</b>	<b>18</b>
6.1	Indre produkt, lengde og ortogonalitet . . . . .	18
6.1.1	Teorem 1 . . . . .	18
6.1.2	Definisjon - norm . . . . .	18
6.1.3	Definisjon - distanse . . . . .	18
6.1.4	Definisjon - ortogonalitet . . . . .	19
6.1.5	Teorem 2 - pytagoras teorem . . . . .	19
6.1.6	Begrep - ortogonalt komplement . . . . .	19
6.1.7	Teorem 3 . . . . .	19
6.2	Ortogonale mengder . . . . .	19
6.2.1	Teorem 4 . . . . .	19
6.2.2	Teorem 5 . . . . .	19
6.2.3	Metode - ortogonal projeksjon . . . . .	20
6.2.4	Teorem 6 . . . . .	20
6.2.5	Teorem 7 . . . . .	20
6.2.6	. . . . .	20
6.3	Ortogonal projeksjon . . . . .	20
6.3.1	. . . . .	20
6.4	Gram-Schmidt prosessen . . . . .	20
6.4.1	. . . . .	20
6.5	Minstekvadraters problem . . . . .	20
6.5.1	. . . . .	20
6.6	Anvendelser til lineære modeller . . . . .	21
6.6.1	. . . . .	21
6.7	Indreproduktrom . . . . .	21
6.7.1	. . . . .	21
6.8	Anvendelser til indreproduktrom . . . . .	21
6.8.1	. . . . .	21

<b>7</b>	<b>Kpt.7 - Symmetriske Matriser og Kvadratisk Form</b>	<b>21</b>
7.1	Diagonalisering av symmetriske matriser . . . . .	21
7.1.1	Begrep - symmetrisk matrise . . . . .	21
7.1.2	Teorem 1 . . . . .	21
7.1.3	Begrep - ortogonalt diagonaliserbar . . . . .	21
7.1.4	Teorem 2 . . . . .	21
7.1.5	Teorem 3 - spektralteoremet for symmetriske matriser . .	22
7.1.6	Observasjon - spektral dekomposisjon . . . . .	22
7.2	Kvadratisk form . . . . .	22
7.2.1	Definisjon - kvadratisk form . . . . .	22
7.2.2	Metode - koeffisienter fra matrisen . . . . .	22
7.2.3	Metode - kryssproduktledd . . . . .	22
7.2.4	Metode - variabelskifte . . . . .	23
7.2.5	Teorem 4 - prinsipalakseteoremet . . . . .	23
7.2.6	Observasjon - geometrisk tolkning . . . . .	23
7.2.7	Definisjon - definit . . . . .	23
7.2.8	Teorem 5 - kvadratisk form og egenverdier . . . . .	24
7.3	Begrenset optimalisering . . . . .	24
7.3.1	Metode 1 - . . . . .	24
7.3.2	Teorem 6 . . . . .	24
7.3.3	Teorem 7 . . . . .	24
7.3.4	Teorem 8 . . . . .	24
7.4	Singulærverdidekomposisjon . . . . .	25
7.4.1	Begrep - singulærverdier . . . . .	25
7.4.2	Teorem 9 . . . . .	25
7.4.3	Teorem 10 - singulærverdidekomposisjon . . . . .	25
7.4.4	Metode - singulærverdidekomposisjon . . . . .	25
7.4.5	Teorem - IMT konkludert . . . . .	26
7.4.6	. . . . .	26
7.5	Ikke pensum? TODO . . . . .	26
<b>8</b>	<b>Notat 1</b>	<b>26</b>
8.0.1	. . . . .	26
<b>9</b>	<b>Notat 2</b>	<b>26</b>
9.0.2	. . . . .	26

## 1 Forord

Dette er en oversikt over alle definisjoner, teoremer og lignende fra læreboka i MAT1120.

NB! Noen steder har jeg skrevet  $c \in \mathbb{R}$ , men det kan hende at  $\mathbb{C}$  hadde fungert like fint. Lignende ”*feil*” kan finnes andre steder.

NB! Noen av kapitlene er mangelfulle. Jeg har selv skrevet observasjoner og metoder.

## 4 Kpt.4 - Vektorrom

### 4.1 Vektor rom og underrom

#### 4.1.1 Definisjon - vektorrom

Et vektorrom er en ikketom mengde  $V$ . Den består av såkalte *vektorer*. Disse vektorene må være beskrevet av 2 operasjoner: Addisjon og skalarmultiplikasjon.

De to operasjonene defineres av følgende aksiomer: La  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

1.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4.  $\exists \mathbf{0} \in V$  s.a.  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5.  $\forall \mathbf{u} \in V, \exists -\mathbf{u} \in V$  s.a.  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
6.  $c\mathbf{u} \in V, c \in \mathbb{R}$
7.  $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8.  $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
9.  $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
10.  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

#### 4.1.2 Definisjon - underrom

Et underrom  $H$  er en delmengde av  $V$ .  $H$  er et underrom av  $V$ .

To egenskaper må være oppfylt:

1.  $H$  er lukket under addisjon.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$
2.  $H$  er lukket under skalarmultiplikasjon.  $c\mathbf{u} \in H, \forall c \in \mathbb{R}$

#### 4.1.3 Teorem 1

Hvis  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  er i et vektorrom  $V$ , så er  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  et underrom av  $V$ .

### 4.2 Nullrom, kolonnerom og lineærtransformasjoner

#### 4.2.1 Definisjon - nullrom

Nullromet til en  $m \times n$  matrise  $A$ , er mengden av alle løsninger av  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

$$\text{Nul}(A) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

#### 4.2.2 Teorem 2

Nullrommet til  $A$   $m \times n$ , er et underrom av  $\mathbb{R}^n$ .

Med andre ord:  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  har  $m$  homogene lineære ligninger, med  $n$  ukjente. Mengden av løsninger er et underrom av  $\mathbb{R}^n$ .

#### 4.2.3 Definisjon - kolonnerom

Kolonnerommet til  $m \times n$  matrisen  $A$ , er mengden av alle lineærkombinasjoner av kolonnene i  $A$ .

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n] \quad \text{Col}(A) = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

#### 4.2.4 Teorem 3

Kolonnerommet til  $A$   $m \times n$ , er et underrom av  $\mathbb{R}^m$ .

Med andre ord: Kolonnene i  $A$  har  $m$  elementer i hver vektor. Kolonnerommet er alle lineærkombinasjoner av disse, og har derfor  $m$  elementer i hver vektor.

#### 4.2.5 Definisjon - lineærtransformasjon

En lineærtransformasjon  $T$  fra et vektorrom  $V$  til et annet vektorrom  $W$ , er en regel som gir hver  $\mathbf{x}$  i  $V$  en unik vektor  $T(\mathbf{x})$  i  $W$ .

To egenskaper må oppfylles

1.  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2.  $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}), \forall c \in \mathbb{R}^n$

#### 4.2.6 Begrep - kjerne (kernel)

Praktisk talt synonymt med nullrom.

### 4.3 Lineært uavhengige mengder: basiser

#### 4.3.1 Teorem 4

En mengde  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  (minst 2 vektorer) er lineært avhengig hvis (minst) en vektor kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre vektorene.

#### 4.3.2 Definisjon - basis

La  $H$  være et underrom av vektorrommet  $V$ . En mengde  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$  i  $V$ , er en basis for  $H$  hvis:

1.  $\mathcal{B}$  er lineært uavhengig
2. underrommet utspent av  $\mathcal{B}$  er det samme som  $H$ . Altså,  $H = \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$

### 4.3.3 Teorem 5 - utspennende mengde teoremet

La  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  være en mengde i  $V$ , og la  $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ .

1. Hvis  $\mathbf{v}_k$  er en lin.komb. av de andre vektorene, så kan man fjerne den fra mengden og den vil fremdeles utspenne  $H$ .
2. Hvis  $H \neq \{0\}$ , så er en delmengde av  $S$  en basis for  $H$ .

### 4.3.4 Teorem 6

Pivotkolonnene til en matrise  $A$ , utgjør en basis for  $\text{Col}(A)$ .

Man velger altså de kolonnene i  $A$  som er lineært uavhengige.

## 4.4 Koordinatsystemer

### 4.4.1 Teorem 7 - unik representasjon teoremet

La  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  være en basis for et vektorrom  $V$ .

Da fins en unik mengde  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  s.a.

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \mathbf{b}_n, \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

### 4.4.2 Definisjon - $\mathcal{B}$ -koordinater

Hvis  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  er en basis for  $V$ , og  $\mathbf{x} \in V$ .

Koordinatene til  $\mathbf{x}$  relativt til  $\mathcal{B}$ , er vektor  $c_1, \dots, c_n$  s.a.

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$$

Med andre ord:  $\mathcal{B}$ -koordinatene til  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (c_1, \dots, c_n)$ .

### 4.4.3 Begrep - koordinatskiftematrise

Koordinatskiftematrisen  $P_{\mathcal{B}}$ , tar en vektor fra  $\mathcal{B}$  til standardbasis i  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Hvor  $P_{\mathcal{B}}$  lages enkelt ved

$$P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$$

### 4.4.4 Teorem 8

La  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  være en basis for vektorrommet  $V$ . Da er koordinatavbildningen  $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$  en-til-en lineærtransformasjon fra  $V$  på  $\mathbb{R}^n$ .

#### 4.4.5 Begrep - isomorfi

En isomorfi er en *en-til-en* og *på* lineærtransformasjon.

Altså: den dekker hele  $V$  og enhver  $\mathbf{x}$  har en unik  $T(\mathbf{x})$ .

### 4.5 Dimensjon av vektorrom

#### 4.5.1 Teorem 9

Hvis et vektorrom  $V$  har en basis  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ , så er alle mengder i  $V$  med fler enn  $n$  vektorer lineært *avhengig*.

#### 4.5.2 Teorem 10

Hvis et vektorrom  $V$  har en basis med  $n$  vektorer, så må *alle* basiser for  $V$  ha nøyaktig  $n$  vektorer.

#### 4.5.3 Definisjon - dimensjon

Hvis  $V$  er utspent av en endelig mengde, så er  $V$  *endelig-dimensjonalt*. Dimensjonen til  $V$ ,  $\dim V$ , er antall vektorer i en basis for  $V$ .

Hvis  $V$  *ikke* er utspent av en endelig mengde, så er  $V$  *uendelig-dimensjonalt*. Dimensjonen til nullvektorrommet  $\{\mathbf{0}\}$  er null.

#### 4.5.4 Teorem 11

La  $H$  være et underrom av et endelig-dimensjonalt vektorrom  $V$ . Alle lineært uavhengige mengder i  $V$  kan utvides, hvis nødvendig, til en basis for  $H$ .

$H$  er også endelig-dimensjonalt.

$$\dim H \leq \dim V$$

#### 4.5.5 Teorem 12 - basisteoremet

La  $V$  være et  $p$ -dimensjonalt vektorrom,  $p \geq 1$ .

Alle lin.uavh. mengder med nøyaktig  $p$  elementer i  $V$ , er en basis for  $V$ .

Alle mengder som spenner  $V$  med nøyaktig  $p$  elementer, er en basis for  $V$ .

#### 4.5.6 Observasjon - DimNul og DimCol

Dimensjonen til  $\text{Nul}(A)$  er antall fri variable i  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Dimensjonen til  $\text{Col}(A)$  er antall pivot-kolonner i  $A$ .



## 4.6 Rang

### 4.6.1 Definisjon - radrom

Radrommet til  $A$ ,  $\text{Row}(A)$ , er mengden av alle lineærkombinasjoner av radvektorene i  $A$ .

### 4.6.2 Teorem 13

$A$  og  $B$  er radekvivalente hvis  $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$ .

Hvis  $B$  er på trappeform, så er ikke-null radene i  $B$  en basis for både  $\text{Row}(A)$  og  $\text{Row}(B)$ .

### 4.6.3 Definisjon - rang

Rangen til  $A$  er dimensjonen til kolonnerommet til  $A$ .

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A))$$

### 4.6.4 Teorem 14 - rangteoremet

Kolonne-rang er det samme som rad-rang:

$$\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$$

Rangen til  $A$  er lik antall pivotelementer i  $A$ .

Rangen til  $A$  oppfyller:

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A))$$

### 4.6.5 Teorem - invertibel matrise teoremet (fortsatt)

Med  $An \times n$ , så er følgende påstander ekvivalente

1.  $A$  er invertibel.
2. Kolonnene i  $A$  er en basis for  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^n$ .
4.  $\dim(\text{Col}(A)) = n$ .
5.  $\text{rank}(A) = n$ .
6.  $\text{Nul}(A) = \mathbf{0}$ .
7.  $\dim(\text{Nul}(A)) = 0$ .

## 4.7 Basisskifte

### 4.7.1 Teorem 15

La  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  og  $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$  være basiser for  $V$ .

Da finnes en unik  $n \times n$  matrise  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  s.a.

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Hvor

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [ [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} ]$$

### 4.7.2 Begrep - koordinatskiftematrise

Matrisen  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  kalles for koordinatskiftematrisen fra  $\mathcal{B}$  til  $\mathcal{C}$ .

### 4.7.3 Observasjon - Invers av koord.skiftematr.

$$\left( P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \right)^{-1} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$$

## 4.8 Ikke eksamensrelevant

Ikke eksamensrelevant.

## 4.9 Anvendelser til Markovkjeder

### 4.9.1 Begrep - sannsynlighetsvektor

En sannsynlighetsvektor: har ikke negative elementer, og summerer til 1.

### 4.9.2 Begrep - stokastisk matrise

En stokastisk matrise: en kvadratisk matrise med sannsynlighetsvektorer som kolonner.

### 4.9.3 Begrep - markovkjede

En markovkjede er en følge av sannsynlighetsvektorer, sammen med en stokastisk matrise  $P$  s.a.

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### 4.9.4 Begrep - tilstandsvektor

Et element  $\mathbf{x}_k$  i markovkjeden.

#### 4.9.5 Begrep - ekvilibriumsvektor

Tilstandsvektorene i markovkjeden forandres for hver iterasjon, men hvis man finner en vektor som ikke endres, er det en ekvilibriumsvektor.

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q}$$

Alle stokastiske matriser har en ekvilibriumsvektor.

#### 4.9.6 Begrep - regulæritet

Hvis en potens av stokastisk matrise  $P^k$  kun inneholder positive elementer, så er den regulær.

#### 4.9.7 Teorem 18

Hvis  $P$  er regulær og stokastisk, så vil markovkjeden konvergere mot den unike ekvilibriumsmatrisen.

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{q} \quad \text{når } k \rightarrow \infty$$

## 5 Kpt.5 - Egenverdier og Egenvektorer

### 5.1 Egenvektor og egenverdier

#### 5.1.1 Definisjon - egenvektor og egenverdi

En *egenvektor* til matrisen  $A$ , er en ikke-nul vektor  $\mathbf{x}$  s.a.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Hvor  $\lambda$  er en egenverdi til  $A$  hvis det finnes en ikke-triviell løsning.

#### 5.1.2 Begrep - egenrom

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

Mengden av alle løsninger kalles *egenrommet* til  $A$  for  $\lambda$ .

#### 5.1.3 Teorem 1

Egenverdiene til en triangulær matrise er elementene langs hoveddiagonalen.

#### 5.1.4 Teorem 2

Hvis  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  er egenvektorer til  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , for en matrise  $A$ , så er mengden  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  lineært uavhengig.

### 5.1.5

TODO Egenvektorer og differensligninger

## 5.2 Den karakteristisk ligningen

### 5.2.1 Teorem - IMT fortsatt

Invertibel matrise teoremet:

Følgende er ekvivalent:

1.  $A$  er invertibel.
2. 0 er ikke en egenverdi til  $A$ .
3.  $\det(A) \neq 0$ .

For  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , så er  $|\det(A)|$  volumet utspent av kolonnene. Hvis volumet er null, så har kolonnene kollapset inn i hverandre og er lineært *avhengige*.

### 5.2.2 Teorem 3 - egenskaper til determinanter

La  $A$  og  $B$  være  $n \times n$  matriser. Da gjelder følgende:

1.  $A$  er invertibel  $\iff \det(A) \neq 0$ .
2.  $\det(AB) = (\det(A))(\det(B))$ .
3.  $\det(A^T) = \det(A)$ .
4.  $A$  triangulær  $\implies \det(A) =$  produktet av diagonalelementene.
  - a Radmultippel endrer ikke determinanten.
  - b Radbytte endrer determinantens fortegn.
  - c Radskalering, skalerer determinanten.

### 5.2.3 Begrep - karakteristisk ligning

$\lambda$  er en egenverdi for  $A \iff \det(A - \lambda I) = 0$ .

### 5.2.4 Teorem 4

Hvis Matrisene  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  har samme karakteristiske polynom, altså samme egenverdier med lik multiplisitet, så er de similære.

$$B = P^{-1}AP$$

### 5.2.5

TODO Anvendelse til dynamiske systemer

## 5.3 Diagonalisering

### 5.3.1 Teorem 5 - diagonaliseringsteoremet

$A$   $n \times n$  er diagonaliserbar  $\iff A$  har  $n$  lin.uavh. egenvektorer.

$A = PDP^{-1} \iff P = n$  lin.uavh. egenvek. til  $A$ , og  $D = \text{diag}(\text{egenverdiene})$

Altså:  $A$  diagonaliserbar hvis nok egenvek. til en basis for  $\mathbb{R}^n$ .

### 5.3.2 Metode - diagonalisering

1. Finn egenverdiene til  $A$ .
2. Finn lineært uavhengige egenvektorer.
3. Lag  $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$ .
4. Lag  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

### 5.3.3 Teorem 6

En  $n \times n$  matrise med  $n$  distinkte egenverdier er diagonaliserbar.

Merk: Det trenger ikke finnes  $n$  distinkte egenverdier.

### 5.3.4 Teorem 7

La  $A$  være en  $n \times n$  matrise, med distinkte egenverdier  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . Da gjelder følgende:

1. Dimensjonen til en egenverdis egenrom, er mindre eller lik multiplisiteten.
2.  $A$  diagonaliserbar  $\iff$  sum av dimensjon til egenrommene er lik  $n$ . Det er kun tilfellet hvis:
  - a Karakteristisk polynom kan faktoriseres til lineære faktorer.
  - b Dimensjonen til egenrom er lik tilsvarende multiplisitet.
3. Hvis  $A$  er diag.bar og  $\mathcal{B}_k$  er basis for egenrom til  $\lambda_k$ : Så er  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  egenvektorbasis for  $\mathbb{R}^n$ .

## 5.4 Egenvektorer og lineærtransformasjoner

### 5.4.1 Metode - relativ transformasjonsmatrise

La  $V$  være  $n$ -dimensjonalt vektorrom,  $W$  et  $m$ -dimensjonalt vektorrom,  $\mathcal{B}$  basis for  $V$ , og  $\mathcal{C}$  basis for  $W$ , og  $T: V \rightarrow W$ .

Da kan man finne en matrise  $M$  s.a.

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

ved at

$$M = [ [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \quad [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} ]$$

$M$  kalles for: Matrisen til  $T$  relativ til basisene  $\mathcal{B}$  og  $\mathcal{C}$ .

### 5.4.2 Metode - lin.transformasjon fra $V$ til $V$

Matrisen  $M$  for  $T$  relativ til  $\mathcal{B}$  kalles her for  $[T]_{\mathcal{B}}$ .

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

$[T]_{\mathcal{B}}$  er  $\mathcal{B}$ -matrisen til  $T$ .

### 5.4.3 Teorem 8 - Diagonal matrise representasjon

Hvis  $A = PDP^{-1}$ , og  $\mathcal{B}$  formes fra kolonnene i  $P$  til å være en basis for  $\mathbb{R}^n$ .

Da er  $D$   $\mathcal{B}$ -matrisen til  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ .

$$D = [T]_{\mathcal{B}}$$

### 5.4.4

TODO Similaritet av matriserepresentasjoner

## 5.5 Komplekse egenverdier

### 5.5.1 Teorem 9

A  $2 \times 2$  reell matrise, med kompleks egenverdi  $\lambda = a - bi$ ,  $b \neq 0$ , og tilhørende  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ .

Da er

$$A = PCP^{-1}, \quad P = [\operatorname{Re} \mathbf{v} \quad \operatorname{Im} \mathbf{v}], \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

### 5.5.2 Metode - Spesielt tilfelle

Hvis  $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ , hvor  $a, b \in \mathbb{R}$  og  $a, b \neq 0$ . Så vil egenverdiene til  $C$  være  $\lambda = a \pm bi$ .

La  $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Da er

$$C = r \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

## 5.6 Diskrete dynamiske systemer

### 5.6.1 Metode - følger

For systemer av typen  $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ :

Anta at  $A$  er diag.bar med  $n$  lin.uavh. egenvek.  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  med tilsvarende (ordnede) egenverdier  $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ .

Initialvektor egenvektordekomposisjon:

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

Iterasjon:

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = \dots = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\lambda_n\mathbf{v}_n$$

Generelt:

$$\mathbf{x}_k = c_1(\lambda_1)^k\mathbf{v}_1 + \dots + c_n(\lambda_n)^k\mathbf{v}_n$$

### 5.6.2 Observasjon - origos natur

1. Alle  $|\lambda| < 1 \implies$  origo er attraktor.
2. Alle  $|\lambda| > 1 \implies$  origo er frastøter.
3. Minst én  $|\lambda| > 1$  og én  $|\lambda| < 1 \implies$  origo er sadelpunkt.

### 5.6.3

TODO bytte av variabel, komplekse egenverdier

## 5.7 Anvendelser til differensialligninger

### 5.7.1 Repetisjon - Difflikninger

La  $x(t)$  være en funksjon og  $a \in \mathbb{R}$ . Gitt ligningen

$$x'(t) = a \cdot x(t)$$

Så er

$$x(t) = c \cdot e^{a \cdot t}$$

### 5.7.2 Metode - initialverdiproblem

Gitt egenverdier  $\lambda_1, \lambda_2$ , og egenvektorer  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , og initialverdi  $\mathbf{x}(0)$ : Løs ligningen  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}$ .

## Løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

### 5.7.3 Observasjon - frastøter, sadel, attraktor

Hvis egenverdiene er positive, så er origo en frastøter.

Hvis egenverdiene er negative, så er origo en attraktor.

Hvis egenverdiene er blandet, så er origo et sadelpunkt.

### 5.7.4 Metode - avkobling av dynamiske systemer

Når vi har  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , med  $A$  diagonaliserbar  $A = PDP^{-1}$ . Så kan vi gjøre et variabelskifte  $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ .

$$x' = \frac{d}{dt}(P\mathbf{y}) = A(P\mathbf{y}) = (PDP^{-1})P\mathbf{y} = PD\mathbf{y}$$

Venstremultipliser med  $P^{-1}$  og få

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$$

Det er mye enklere å løse.

### 5.7.5 Komplekse egenverdier

Hvis matrisen  $A$  har komplekse egenverdier  $\lambda$  og egenvektorer  $\mathbf{v}$ , så kan vi finne generelle løsninger.

#### Kompleks generell løsning

På vanlig vis:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

#### Reell generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{y}_1(t) + c_2 \mathbf{y}_2(t)$$

$$\mathbf{y}_1 = \operatorname{Re} \mathbf{x}_1 = ([\operatorname{Re} \mathbf{v}] \cos bt - [\operatorname{Im} \mathbf{v}] \sin bt) e^{at}$$

$$\mathbf{y}_2 = \operatorname{Re} \mathbf{x}_2 = ([\operatorname{Re} \mathbf{v}] \sin bt + [\operatorname{Im} \mathbf{v}] \cos bt) e^{at}$$

hvor  $\lambda_1 = a + bi$  og  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ .



## 5.8 Iterative estimater for egenverdier

### 5.8.1 Metode - potensmetoden

#### Teori

Potensmetoden gjelder  $n \times n$  matriser  $A$  med en *Strengt dominant egenverdi*.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Vis ser på  $\mathbf{x}$  skrevet som

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

$$A^k \mathbf{x} = c_1 (\lambda_1)^k \mathbf{v}_1 + \dots + c_n (\lambda_n)^k \mathbf{v}_n$$

Vi deler på den største egenverdien

$$\frac{1}{(\lambda_1)^k} A^k \mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_n$$

Fordi  $\lambda_1$  er størst får man

$$(\lambda_1)^{-k} A^k \mathbf{x} \rightarrow c_1 \mathbf{v}_1, \quad k \rightarrow \infty$$

Altså har vi at  $A^k \mathbf{x}$  går i ca samme retning som  $\mathbf{v}_1$ .

#### Algoritme

1. Vel initialvektor  $\mathbf{x}_0$  med største komponent 1.
2. For  $k = 0, 1, \dots$ 
  - a Beregn  $A\mathbf{x}_k$
  - b La  $\mu_k$  være komponenten i  $A\mathbf{x}_k$  med størst abs.
  - c Beregn  $\mathbf{x}_{k+1} = (1/\mu_k)A\mathbf{x}_k$
3. For nesten alle  $\mathbf{x}_0$  vil  $\mu_k \rightarrow \lambda_1$  og  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{v}_1$

### 5.8.2 Metode - invers potensmetode

#### Teori

Metoden tilnærmer hvilkensomhelst egenverdi, gitt at initialgjetning  $\alpha$  er nærme nok  $\lambda$ .

La  $B = (A - \alpha I)^{-1}$  og bruk potensmetoden på  $B$ .

Egenverdiene til  $A$  er  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , og egenverdiene til  $B$  er  $\frac{1}{\lambda_1 - \alpha}, \dots, \frac{1}{\lambda_n - \alpha}$ .

Egenverdiene til  $A$  vil ligge innenfor  $[-|\lambda_1|, |\lambda_1|]$ .

### Algoritme

1. Velg initialgjetning  $\alpha$  nærme  $\lambda$
2. Velg initialvektor  $\mathbf{x}_0$  med største komponent 1.
3. For  $k = 0, 1, \dots$ 
  - a Beregn  $(A - \alpha I)\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$
  - b La  $\mu_k$  være komponent i  $\mathbf{y}_k$  med størst abs.
  - c Beregn  $v_k = \alpha + (1/\mu_k)$
  - d Beregn  $\mathbf{x}_{k+1} = (1/\mu_k)\mathbf{y}_k$
4.  $v_k \rightarrow \lambda$  og  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{v}$

## 6 Kpt.6 - Ortogonalitet og Minstekvadrater

### 6.1 Indre produkt, lengde og ortogonalitet

#### 6.1.1 Teorem 1

For  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ , og  $c \in \mathbb{R}$  så gjelder

1.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
3.  $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
4.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = 0$

#### 6.1.2 Definisjon - norm

Lengden (normen) til en vektor er en skalar gitt ved

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

#### 6.1.3 Definisjon - distanse

Avstanden mellom to vektorer, skrevet  $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , er lengden av vektoren  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ .

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

#### 6.1.4 Definisjon - ortogonalitet

To vektorer i  $\mathbb{R}^n$  er ortogonale hvis

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

#### 6.1.5 Teorem 2 - pytagoras teorem

To vektorer er ortogonale  $\iff \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$

#### 6.1.6 Begrep - ortogonalt komplement

For et underrom  $W$ , finnes det vektorer som står normalt på dette underrommet. Spennet av et utvalg slike vektorer utgjør da  $W^\perp$ .

F.eks. i  $\mathbb{R}^3$  kan  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  utspenne  $W$ , og en vektor som står normalt på  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  utstperner  $W^\perp$ .

#### 6.1.7 Teorem 3

Ortogonale komplement

$$(\text{Row}(A))^\perp = \text{Nul}(A)$$

$$(\text{Col}(A))^\perp = \text{Nul}(A^T)$$

### 6.2 Ortogonale mengder

#### 6.2.1 Teorem 4

Hvis  $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$  er en ortogonal mengde, hvor  $\mathbf{u}_i \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ , så er  $S$  lineært uavhengig og derfor en basis for underrommet  $\text{Span}\{S\}$ .

#### 6.2.2 Teorem 5

La  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$  være ortogonal basis for  $W$  i  $\mathbb{R}^n$ .

$$\forall \mathbf{y} \in W, \quad \mathbf{y} = c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_p \mathbf{u}_p$$

Vektene bestemmes ved

$$c_j = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j}, \quad j = 1, \dots, p$$

Altså er  $\mathbf{y}$  summen av komponenten langs hver av de ortogonale vektorene i basisen.

### 6.2.3 Metode - ortogonal projeksjon

Gitt en basis  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$  for et underrom  $W$ . En vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  kan dekomponeres til en sum av vektorkomponent langs  $\mathbf{u}_i$  pluss en vektor  $\mathbf{z}$  ortogonal på en utvidelse av basisen til  $\mathbb{R}^n$ .

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

$\hat{\mathbf{y}}$  er projeksjonen av  $\mathbf{y}$  langs  $W$ .

$$\hat{\mathbf{y}} = \text{proj}_W \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p$$

TODO feil seksjon?

### 6.2.4 Teorem 6

$U$   $m \times n$  har ortonormale kolonner  $\iff U^T U = I$

### 6.2.5 Teorem 7

La  $U$   $m \times n$  med ortonormale kolonner,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Da er

1.  $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$
2.  $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$
3.  $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

### 6.2.6

TODO ortogonal basis def

## 6.3 Ortogonal projeksjon

### 6.3.1

TODO

## 6.4 Gram-Schmidt prosessen

### 6.4.1

TODO

## 6.5 Minstekvadraters problem

### 6.5.1

TODO

## **6.6    Anvendelser til lineære modeller**

### **6.6.1**

TODO

## **6.7    Indreproduktrom**

### **6.7.1**

TODO

## **6.8    Anvendelser til indreproduktrom**

### **6.8.1**

TODO

# **7    Kpt.7 - Symmetriske Matriser og Kvadratisk Form**

## **7.1    Diagonalisering av symmetriske matriser**

### **7.1.1    Begrep - symmetrisk matrise**

Hvis  $A$  er s.a.  $A = A^T$ , så er den symmetrisk.

### **7.1.2    Teorem 1**

Hvis  $A$  er symmetrisk, så er egenvektorer fra ulike egenrom ortogonale mot hverandre.

### **7.1.3    Begrep - ortogonalt diagonaliserbar**

$A \ n \times n$  er ortogonalt diag.bar hvis det fins: ortogonal matrise  $P$  s.a.  $P^{-1} = P^T$ , og en diagonal matrise  $D$  s.a.

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

### **7.1.4    Teorem 2**

$A \ n \times n$  er ortogonalt diag.bar  $\iff A$  er symmetrisk matrise.

### 7.1.5 Teorem 3 - spektralteoremet for symmetriske matriser

For  $A$   $n \times n$  gjelder:

1.  $A$  har  $n$  reelle egenverdier, med multiplisitet.
2. Dimensjon til egenrom er lik multiplisiteten til dets egenverdi.
3. Egenvektorer fra ulike egenrom er ortogonale på hverandre.
4.  $A$  er ortogonalt diagonaliserbar.

### 7.1.6 Observasjon - spektral dekomposisjon

$$A = PDP^T = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

## 7.2 Kvadratisk form

### 7.2.1 Definisjon - kvadratisk form

En kvadratisk form på  $\mathbb{R}^n$  er en funksjon  $Q$  s.a.

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

Hvor  $A$  er en symmetrisk matrise.

### 7.2.2 Metode - koeffisienter fra matrisen

Forholdet mellom  $A$  og kvadratisk form:

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$$

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$$

### 7.2.3 Metode - kryssproduktledd

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

For å se hvilken koeffisient som går til hvilken  $x_j x_k$  kan man se på tabellen:

	x1	x2	x3
x1	.	.	.
x2	.	.	.
x3	.	.	.

#### 7.2.4 Metode - variabelskifte

Hvis  $A$  ikke er diagonal kan det være lurt med variabelskifte.

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$$

Her er  $\mathbf{y}$  koordinatvektor til  $\mathbf{x}$  for en basis  $\mathcal{B}$ , slik som i kpt 4.4.

$$\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}, \quad P = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n]$$

Kvadratisk form blir nå enklere

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A (P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T A P \mathbf{y} = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y}$$

Men  $A$  er symmetrisk så

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y}$$

#### 7.2.5 Teorem 4 - prinsipalakseteoremet

Hvis  $A$   $n \times n$  er symmetrisk, så fins et ortogonalt variabelskifte  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  s.a.

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y}$$

uten kryssproduktledd.

Kolonnene i  $P$  kalles prinsipalaksene til den kvadratiske formen.

#### 7.2.6 Observasjon - geometrisk tolkning

For invertibel  $A$   $n \times n$  og kvadratisk form  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , kan man velge en konstant  $c$  og se på

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = c$$

Det tilsvarer ligningen for enten en hyperbel, ellipse, to kryssende linjer, et punkt, eller ingen punkter.

#### 7.2.7 Definisjon - definit

Kvadratisk form  $Q$  er:

1. Positiv definit hvis  $Q(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .
2. Negativ definit hvis  $Q(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .
3. Indefinit hvis  $Q(\mathbf{x})$  har både pos. og neg. tall.

### 7.2.8 Teorem 5 - kvadratisk form og egenverdier

Kvadratisk form er

1. Positiv definit  $\iff$  egenverdiene til A er kun positive.
2. Negativ definit  $\iff$  egenverdiene til A er kun negative.
3. Indefinit  $\iff$  A har både pos. og neg. egenverdier.

## 7.3 Begrenset optimalisering

### 7.3.1 Metode 1 -

En vanlig begrensning er  $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ .

Anta at Q ikke har kryssproduktledd, og at  $a \geq b \geq c$ :

$$Q = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 \leq ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = a \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{x} = a$$

Så vi fant en maksimumsverdi

$$Q \leq a$$

### 7.3.2 Teorem 6

La A være symmetrisk og

$$m = \min\{\mathbf{x}^T A \mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

$$M = \max\{\mathbf{x}^T A \mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

Da er  $M = \lambda_1$  største egenverdi til A, og  $Q(\mathbf{x}) = M$  når  $\mathbf{x}$  er en enhetsvektor  $\mathbf{u}_1$  tilsvarende M.

Tilsvarende er  $m$  minste egenverdi til A, og  $Q(\mathbf{x}) = m$  når  $\mathbf{x}$  er en enhetsvektor tilsvarende m.

### 7.3.3 Teorem 7

La A,  $\lambda_1$ ,  $\mathbf{u}_1$  være som i teorem 6. Maksimum av Q under begrensningene

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0$$

er den nest største egenverdien  $\lambda_2$ . Den verdien fåes når  $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$  egenvektor tilsvarende  $\lambda_2$ .

### 7.3.4 Teorem 8

A  $n \times n$ , ortog.diag.  $A = PDP^{-1}$ ,  $D = \text{diag}(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n)$ , kolonner i P er tilsvarende enhetseigenvektorer  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ .

Da vil max av Q under begrensningene være

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_{k-1} = 0$$

egenverdi  $\lambda_k$ , og maks gitt ved  $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$ .



## 7.4 Singulærverdidekomposisjon

### 7.4.1 Begrep - singulærverdier

For en ikkekvadratisk  $A$   $m \times n$ , så kan vi regne ut  $A^T A$ .

Videre kan vi regne ut egenverdiene  $\lambda_i$  til  $A^T A$ .

Singulærverdiene  $\sigma$  til  $A$  er da

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Vanligvis sorteres de s.a.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$$

### 7.4.2 Teorem 9

Hvis egenvektorene til  $A^T A$  kan gjøres til en ortonormal basis  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , ordnet slik at  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Og hvis  $A$  har  $r$  ikkenull singulærverdier.

Så er  $\{A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_r\}$  en ortogonal basis for  $\text{Col}(A)$ , og  $\text{rank}(A) = r$ .

### 7.4.3 Teorem 10 - singulærverdidekomposisjon

La  $A$  være  $m \times n$  med rang  $r$ .

Da fins det en  $\Sigma$   $m \times n$  på formen

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hvor  $D = \text{diag}(\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0)$ .

Og det fins også en ortogonal  $U$   $m \times m$ , og en ortogonal  $V$   $n \times n$  s.a.

$$A = U\Sigma V^T$$

$U$  og  $V$  er ikke unikt bestemt.

### 7.4.4 Metode - singulærverdidekomposisjon

**Ortogonal diagonaliser  $A^T A$**

Finn egenverdiene og tilsvarende ortonormal mengde egenvektorer.

**Konstruer  $V$**

Sorter egenverdiene til  $A^T A$  i synkende rekkefølge, og bruk tilsvarende egenvektorer som kolonner i  $V$

$$V = [ \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n ]$$

**Konstruer  $\Sigma$** 

Bruk singularverdiene og la  $D = \text{diag}(\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0)$ . Konstruer  $\Sigma$  til å være  $m \times n$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Konstruer  $U$** 

Enten kan man bruke matrisemultiplikasjon og inverse for å finne  $U$ , eller så kan man bruke

$$U = [ \mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n ]$$

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A \mathbf{v}_i$$

**7.4.5 Teorem - IMT konkludert**

For  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  er følgende ekvivalent

1.  $A$  er invertibel.
2.  $(\text{Col}(A))^\perp = \{\mathbf{0}\}$
3.  $(\text{Nul}(A))^\perp = \mathbb{R}^n$
4.  $\text{Row}(A) = \mathbb{R}^n$
5.  $A$  har  $n$  ikkenull singularverdier.

**7.4.6**

TODO condition number, basis for fundamentale underrom, redusert SVD, pseudoinvers av  $A$ , minste kvadrater.

**7.5 Ikke pensum? TODO**

Ikke pensum? TODO

**8 Notat 1****8.0.1**

TODO

**9 Notat 2****9.0.2**

TODO TODO egenfunksjon