MAT1120

Robin A. T. Pedersen

November 20, 2016

Contents

1 Forord

Dette er en oversikt over alle definisjoner, teoremer og lignende fra læreboka i MAT1120.

NB! Noensteder har jeg skrevet $c \in \mathbb{R}$, men det kan hende at $\mathbb{C}$ hadde fungert like fint. Lignende *"feil"* kan finnes andre steder.

NB! Noen av kapitlene er mangelfulle. Jeg har selv skrevet observasjoner og metoder.

4 Kpt.4 - Vektorrom

4.1 Vektor rom og underrom

4.1.1 Definisjon - vektorrom

Et vektorrom er en ikketom mengde V. Den består av såkalte *vektorer*. Disse vektorene må være beskrevet av 2 operasjoner: Addisjon og skalarmultiplikasjon.

De to operasjonene defineres av følgende aksiomer: La $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4. $\exists \mathbf{0} \in V s.a. \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. $\forall \mathbf{u} \in V, \ \exists - \mathbf{u} \in V s.a. \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
6. $c\mathbf{u} \in V, \ c \in \mathbb{R}$
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

4.1.2 Definisjon - underrom

Et underrom H er en delmengde av V. H er et underrom av V.

To egenskaper må være oppfylt:

1. H er lukket under addisjon. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$
2. H er lukket under skalarmultiplikasjon. $c\mathbf{u} \in H, \ \forall c \in \mathbb{R}$

4.1.3 Teorem 1

Hvis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p$ er i et vektorrom V, så er Span$\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p\}$ et underrom av V.

4.2 Nullrom, kolonnerom og lineærtransformasjoner

4.2.1 Definisjon - nullrom

Nullromet til en $m \times n$ matrise A, er mengden av alle løsninger av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\text{Nul}(A) = \{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

4.2.2 Teorem 2

Nullrommet til A $m \times n$, er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

Med andre ord: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har m homogene lineære ligninger, med n ukjente. Mengden av løsninger er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

4.2.3 Definisjon - kolonnerom

Kolonnerommet til $m \times n$ matrisen A, er mengden av alle lineærkombinasjoner av kolonnene i A.

$A = [\mathbf{a}_1 \quad ... \quad \mathbf{a}_n]$

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\}$$

4.2.4 Teorem 3

Kolonnerommet til A $m \times n$, er et underrom av $\mathbb{R}^m$.

Med andre ord: Kolonnene i A har m elementer i hver vektor. Kolonnerommet er alle lineærkombinasjoner av disse, og har derfor m elementer i hver vektor.

4.2.5 Definisjon - lineærtransformasjon

En lineærtransformasjon T fra et vektorrom V til et annet vektorrom W, er en regel som gir hver $\mathbf{x}$ i V en unik vektor $T(\mathbf{x})$ i W.

To egenskaper må oppfylles

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \ \forall \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}), \ \forall \ c \in \mathbb{R}^n$

4.2.6 Begrep - kjerne (kernel)

Praktisk talt synonymt med nullrom.

4.3 Lineært uavhengige mengder: basiser

4.3.1 Teorem 4

En mengde $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p\}$ (minst 2 vektorer) er lineært avhengig hvis (minst) en vektor kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre vektorene.

4.3.2 Definisjon - basis

La H være et underrom av vektorrommet V. En mengde $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_p\}$ i V, er en basis for H hvis:

1. $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig
2. underrommet utspent av $\mathcal{B}$ er det samme som H. Altså, $H = \text{Span}\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_p\}$

4.3.3 Teorem 5 - utspennende mengde teoremet

La $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p\}$ være en mengde i V, og la $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p\}$.

1. Hvis $\mathbf{v}_k$ er en lin.komb. av de andre vektorene, så kan man fjerne den fra mengden og den vil fremdeles utspenne H.
2. Hvis $H \neq \{\mathbf{0}\}$, så er en delmengde av S en basis for H.

4.3.4 Teorem 6

Pivotkolonnene til en matrise A, utgjør en basis for $\text{Col}(A)$.
Man velger altså de kolonnene i A som er lineært uavhengige.

4.4 Koordinatsystemer

4.4.1 Teorem 7 - unik representasjon teoremet

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ være en basis for et vektorrom V.
Da fins in unik mengde $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ s.a.

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + ... + c_n\mathbf{b}_n, \quad \forall\ \mathbf{x} \in V$$

4.4.2 Definisjon - $\mathcal{B}$-koordinater

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ er en basis for V, og $\mathbf{x} \in V$.
Koordinatene til $\mathbf{x}$ relativt til $\mathcal{B}$, er vekter $c_1, ..., c_n$ s.a.

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + ... + c_n\mathbf{b}_n$$

Med andre ord: $\mathcal{B}$-koordinatene til $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (c_1, .., c_n)$.

4.4.3 Begrep - koordinatskiftematrise

Koordinatskiftematrisen $P_{\mathcal{B}}$, tar en vektor fra $\mathcal{B}$ til standardbasis i $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Hvor $P_{\mathcal{B}}$ lages enkelt ved

$$P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ ...\ \mathbf{b}_n]$$

4.4.4 Teorem 8

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ være en basis for vektorrommet V. Da er koordinatavbildningen $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ *en-til-en* lineærtransformasjon fra V *på* $\mathbb{R}^n$.

4.4.5 Begrep - isomorfi

En isomorfi er en *en-til-en* og *på* lineærtransformasjon.

Altså: den dekker hele V og enhver $\mathbf{x}$ har en unik $T(\mathbf{x})$.

4.5 Dimensjon av vektorrom

4.5.1 Teorem 9

Hvis et vektorrom V har en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$, så er alle mengder i V med fler enn n vektorer lineært *avhengig*.

4.5.2 Teorem 10

Hvis et vektorrom V har en basis med n vektorer, så må *alle* basiser for V ha nøyaktig n vektorer.

4.5.3 Definisjon - dimensjon

Hvis V er utspent av en endelig mengde, så er V *endelig-dimensjonalt*. Dimensjonen til V, Dim V, er antall vektorer i en basis for V.

Hvis V *ikke* er utspent av en endelig mengde, så er V *uendelig-dimensjonalt*.

Dimensjonen til nullvektorrommet $\{\mathbf{0}\}$ er null.

4.5.4 Teorem 11

La H være et underrom av et endelig-dimensjonalt vektorrom V. Alle lineært uavhengige mengder i V kan utvides, hvis nødvendig, til en basis for H.

H er også endelig-dimensjonalt.

$$\dim H \leq \dim V$$

4.5.5 Teorem 12 - basisteoremet

La V være et p-dimensjonalt vektorrom, $p \geq 1$.

Alle lin.uavh. mengder med nøyaktig p elementer i V, er en basis for V.

Alle mengder som spenner V med nøyaktig p elementer, er en basis for V.

4.5.6 Observasjon - DimNul og DimCol

Dimensjonen til Nul(A) er antall fri variable i $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dimensjonen til Col(A) er antall pivot-kolonner i A.

4.6 Rang

4.6.1 Definisjon - radrom

Radrommet til A, Row(A), er mengden av alle lineærkonbinasjoner av radvektorene i A.

4.6.2 Teorem 13

A og B er radekvivalente hvis Row$(A) =$ Row(B).

Hvis B er på trappeform, så er ikkenull radene i B en basis for både Row(A) og Row(B).

4.6.3 Definisjon - rang

Rangen til A er dimensjonen til kolonnerommet til A.

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A))$$

4.6.4 Teorem 14 - rangteoremet

Kolonne-rang er det samme som rad-rang:

$$\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$$

Rangen til A er lik antall pivotelementer i A.

Rangen til A oppfyller:

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A))$$

4.6.5 Teorem - invertibel matrise teoremet (fortsatt)

Med $An \times n$, så er følgende påstander ekvivalente

1. A er invertibel.
2. Kolonnene i A er en basis for $\mathbb{R}^n$.
3. Col$(A) = \mathbb{R}^n$.
4. $\dim(\text{Col}(A)) = n$.
5. $\text{rank}(A) = n$.
6. Nul$(A) = \mathbf{0}$.
7. $\dim(\text{Nul}(A)) = 0$.

4.7 Basisskifte

4.7.1 Teorem 15

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ og $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n\}$ være basiser for V.

Da finnes en unik $n \times n$ matrise $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ s.a.

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Hvor

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = [\ [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad ... \quad [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\ ]$$

4.7.2 Begrep - koordinatskiftematrise

Matrisen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ kalles for koordinatskiftematrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$.

4.7.3 Observasjon - Invers av koord.skiftematr.

$$\left(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right)^{-1} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$$

4.8 Ikke eksamensrelevant

Ikke eksamensrelevant.

4.9 Anvendelser til Markovkjeder

4.9.1 Begrep - sannsynlighetsvektor

En sannsynlighetsvektor: har ikkenegative elementer, og summerer til 1.

4.9.2 Begrep - stokastisk matrise

En stokastisk matrise: en kvadratisk matrise med sannsynlighetsvektorer som kolonner.

4.9.3 Begrep - markovkjede

En markovkjede er en følge av sannsynlighetsvektorer, sammen med en stokastisk matrise P s.a.

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

4.9.4 Begrep - tilstandsvektor

Et element $\mathbf{x}_k$ i markovkjeden.

4.9.5 Begrep - ekvilibriumsvektor

Tilstandsvektorene i markovkjeden forandres for hver iterasjon, men hvis man finner en vektor som ikke endres, er det en ekvilibriumsvektor.

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q}$$

Alle stokastiske matriser har en ekvilibriumsvektor.

4.9.6 Begrep - regulæritet

Hvis en potens av stokastisk matrise P^k kun inneholder positive elementer, så er den regulær.

4.9.7 Teorem 18

Hvis P er regulær og stokastisk, så vil markovkjeden konvergere mot den unike ekvilibriumsmatrisen.

$$\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{q} \qquad \text{når } k \to \infty$$

5 Kpt.5 - Egenverdier og Egenvektorer

5.1 Egenvektor og egenverdier

5.1.1 Definisjon - egenvektor og egenverdi

En *egenvektor* til matrisen A, er en ikkenul vektor $\mathbf{x}$ s.a.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Hvor λ er en egenverdi til A hvis det finnes en ikketriviell løsning.

5.1.2 Begrep - egenrom

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$
$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0$$
$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

Mengden av alle løsninger kalles *egenrommet* til A for λ.

5.1.3 Teorem 1

Egenverdiene til en triangulær matrise er elementene langs hoveddiagonalen.

5.1.4 Teorem 2

Hvis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ er egenvektorer til $\lambda_1, ..., \lambda_r$, for en matrise A, så er mengden $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r\}$ lineært uavhengig.

5.1.5

TODO Egenvektorer og differensligninger

5.2 Den karakteristisk ligningen

5.2.1 Teorem - IMT fortsatt

Invertibel matrise teoremet:
Følgende er ekvivalent:

1. A er invertibel.
2. 0 er ikke en egenverdi til A.
3. $\det(A) \neq 0$.

For A 3×3, så er $|\det(A)|$ volumet utspent av kolonnene. Hvis volumet er null, så har kolonnene kollapset inn i hverandre og er lineært *avhengige*.

5.2.2 Teorem 3 - egenskaper til determinanter

La A og B være $n \times n$ matriser. Da gjelder følgende:

1. A er invertibel $\iff$ $\det(A) \neq 0$.
2. $\det(AB) = (\det(A))(\det(B))$.
3. $\det(A^T) = \det(A)$.
4. A triangulær $\implies$ $\det(A) =$ produktet av diagonalelementene.
    a Radmultippel endrer ikke determinanten.
    b Radbytte endrer determinantens fortegn.
    c Radskalering, skalerer determinanten.

5.2.3 Begrep - karakteristisk ligning

λ er en egenverdi for A $\iff$ $\det(A - \lambda I) = 0$.

5.2.4 Teorem 4

Hvis Matrisene A,B $n \times n$ har samme karakteristiske polynom, altså samme egenverdier med lik multiplisitet, så er de similære.

$$B = P^{-1}AP$$

5.2.5

TODO Anvendelse til dynamiske systemer

5.3 Diagonalisering

5.3.1 Teorem 5 - diagonaliseringsteoremet

A $n \times n$ er diagonaliserbar $\iff$ A har n lin.uavh. egenvektorer.

$A = PDP^{-1} \iff$ P = n lin.uavh. egenvek. til A, og D = diag(egenverdiene)

Altså: A diagonaliserbar hhvis nok egenvek. til en basis for $\mathbb{R}^n$.

5.3.2 Metode - diagonalisering

1. Finn egenverdiene til A.
2. Finn lineært uavhengige egenvektorer.
3. Lag $P = [\ \mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \quad ... \quad \mathbf{v}_n\ ]$.
4. Lag $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

5.3.3 Teorem 6

En $n \times n$ matrise med n distinkte egenverdier er diagonaliserbar.

Merk: Det trenger ikke finnes n distinkte egen*verdier*.

5.3.4 Teorem 7

La A være en $n \times n$ matrise, med distinkte egenverdier $\lambda_1, ..., \lambda_p$. Da gjelder følgende:

1. Dimensjonen til en egenverdis egenrom, er mindre eller lik multiplisiteten.
2. A diagonaliserbar $\iff$ sum av dimensjon til egenrommene er lik n. Det er kun tilfellet hhvis:
   a Karakteristisk polynom kan faktoriseres til lineære faktorer.
   b Dimensjonen til egenrom er lik tilsvarende multiplisitet.
3. Hvis A er diag.bar og $\mathcal{B}_k$ er basis for egenrom til λ_k: Så er $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_p$ egenvektorbasis for $\mathbb{R}^n$.

5.4 Egenvektorer og lineærtransformasjoner

5.4.1 Metode - relativ transformasjonsmatrise

La V være n-dimensjonalt vektorrom, W et m-dimensjonalt vektorrom, $\mathcal{B}$ basis for V, og $\mathcal{C}$ basis for W, og $T : V \to W$.

Da kan man finne en matrise M s.a.

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

ved at

$$M = [\ [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \quad [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} \quad ... \quad [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}}$$

M kalles for: Matrisen til T relativ til basisene $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$.

5.4.2 Metode - lin.transformasjon fra V til V

Matrisen M for T relativ til $\mathcal{B}$ kalles her for $[T]_\mathcal{B}$.

$$[T(\mathbf{x})]_\mathcal{B} = M[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$$
$$[T(\mathbf{x})]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$$

$[T]_\mathcal{B}$ er $\mathcal{B}$-matrisen til T.

5.4.3 Teorem 8 - Diagonal matrise representasjon

Hvis $A = PDP^{-1}$, og $\mathcal{B}$ formes fra kolonnene i P til å være en basis for $\mathbb{R}^n$.
Da er D $\mathcal{B}$-matrisen til $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

$$D = [T]_\mathcal{B}$$

5.4.4

TODO Similaritet av matriserepresentasjoner

5.5 Komplekse egenverdier

5.5.1 Teorem 9

A 2×2 reell matrise, med kompleks egenverdi $\lambda = a - bi$, $b \neq 0$, og tilhørende $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$.
Da er

$$A = PCP^{-1}, \quad P = [\text{Re}\,\mathbf{v} \quad \text{Im}\,\mathbf{v}], \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

5.5.2 Metode - Spesielt tilfelle

Hvis $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$ og $a, b \neq 0$. Så vil egenverdine til C være $\lambda = a \pm bi$.
La $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Da er

$$C = r \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

5.6 Diskrete dynamiske systemer

5.6.1 Metode - følger

For systemer av typen $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$:

Anta at A er diag.bar med n lin.uavh. egenvek. $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ med tilsvarende (ordnede) egenverdier $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_n|$.

Initialvektor egenvektordekomposisjon:

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + ... + c_n\mathbf{v}_n$$

Iterasjon:

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = ... = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + c_n\lambda_n\mathbf{v}_n$$

Generelt:

$$\mathbf{x}_k = c_1(\lambda_1)^k\mathbf{v}_1 + ... + c_n(\lambda_n)^k\mathbf{v}_n$$

5.6.2 Observasjon - origos natur

1. Alle $|\lambda| < 1 \implies$ origo er attraktor.
2. Alle $|\lambda| > 1 \implies$ origo er frastøter.
3. Minst én $|\lambda| > 1$ og én $|\lambda| < 1 \implies$ origo er sadelpunkt.

5.6.3

TODO bytte av variabel, komplekse egenverdier

5.7 Anvendelser til differensialligninger

5.7.1 Repetisjon - Diffligninger

La $x(t)$ være en funksjon og $a \in \mathbb{R}$. Gitt ligningen

$$x'(t) = a \cdot x(t)$$

Så er

$$x(t) = c \cdot e^{a \cdot t}$$

5.7.2 Metode - initialverdiproblem

Gitt egenverdier λ_1, λ_2, og egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, og initialverdi $\mathbf{x}(0)$: Løs ligningen $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}$.

Løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

5.7.3 Observasjon - frastøter, sadel, attraktor

Hvis egenverdiene er positive, så er origo en frastøter.

Hvis egenverdiene er negative, så er origo en attraktor.

Hvis egenverdiene er blandet, så er origo et sadelpunkt.

5.7.4 Metode - avkobling av dynamiske systemer

Når vi har $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, med A diagonaliserbar $A = PDP^{-1}$. Så kan vi gjøre et variabelskifte $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$.

$$x' = \frac{d}{dt}(P\mathbf{y}) = A(p\mathbf{y}) = (PDP^{-1})P\mathbf{y} = PD\mathbf{y}$$

Venstremultipliser med P^{-1} og få

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$$

Det er mye enklere å løse.

5.7.5 Komplekse egenverdier

Hvis matrisen A har komplekse egenverdier λ og egenvektorer $\mathbf{v}$, så kan vi finne generelle løsninger.

Kompleks generell løsning
På vanlig vis:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Reell generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{y}_1(t) + c_2\mathbf{y}_2(t)$$

$$\mathbf{y}_1 = \text{Re } \mathbf{x}_1 = ([\text{Re } \mathbf{v}]\cos bt - [\text{Im } \mathbf{v}]\sin bt)e^{at}$$

$$\mathbf{y}_2 = \text{Re } \mathbf{x}_2 = ([\text{Re } \mathbf{v}]\sin bt + [\text{Im } \mathbf{v}]\cos bt)e^{at}$$

hvor $\lambda_1 = a + bi$ og $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}$.

5.8 Iterative estimater for egenverdier

5.8.1 Metode - potensmetoden

Teori

Potensmetoden gjelder $n \times n$ matriser A med en *Strengt dominant egenverdi.*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$$

Vis ser på $\mathbf{x}$ skrevet som

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + ... + c_n\mathbf{v}_n$$

$$A^k\mathbf{x} = c_1(\lambda_1)^k\mathbf{v}_1 + ... + c_n(\lambda_n)^k\mathbf{v}_n$$

Vi deler på den største egenverdien

$$\frac{1}{(\lambda_1)^k}A^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + ... + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_n$$

Fordi λ_1 er størst får man

$$(\lambda_1)^{-k}A^k\mathbf{x} \to c_1\mathbf{v}_1, \quad k \to \infty$$

Altså har vi at $A^k\mathbf{x}$ går i ca samme retning som $\mathbf{v}_1$.

Algoritme

1. Vel initialvektor $\mathbf{x}_0$ med største komponent 1.
2. For $k = 0, 1, ...$
   - a Beregn $A\mathbf{x}_k$
   - b La μ_k være komponenten i $A\mathbf{x}_k$ med størst abs.
   - c Beregn $\mathbf{x}_{k+1} = (1/\mu_k)A\mathbf{x}_k$
3. For nesten alle $\mathbf{x}_0$ vil $\mu_k \to \lambda_1$ og $\mathbf{x}_k \to \mathbf{v}_1$

5.8.2 Metode - invers potensmetode

Teori

Metoden tilnærmer hvilkensomhelst egenverdi, gitt at initialgjetning α er nærme nok λ.

La $B = (A - \alpha I)^{-1}$ og bruk potensmetoden på B.
Egenverdiene til A er $\lambda_1, ..., \lambda_n$, og egenverdiene til B er $\frac{1}{\lambda_1-\alpha}, ..., \frac{1}{\lambda_n-\alpha}$.
Egenverdiene til A vil ligge innenfor $[-|\lambda_1|, |\lambda_1|]$.

Algoritme

1. Velg initialgjetning α nærme λ
2. Velg initialvektor $\mathbf{x}_0$ med største komponent 1.
3. For $k = 0, 1, ...$
   a Beregn $(A - \alpha I)\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$
   b La μ_k være komponent i $\mathbf{y}_k$ med størst abs.
   c Beregn $v_k = \alpha + (1/\mu_k)$
   d Beregn $\mathbf{x}_{k+1} = (1/\mu_k)\mathbf{y}_k$
4. $v_k \to \lambda$ og $\mathbf{x}_k \to \mathbf{v}$

6 Kpt.6 - Ortogonalitet og Minstekvadrater

6.1 Indre produkt, lengde og ortogonalitet

6.1.1 Teorem 1

For $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, og $c \in \mathbb{R}$ så gjelder

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
3. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = 0$

6.1.2 Definisjon - norm

Lengden (normen) til en vektor er en skalar gitt ved

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

6.1.3 Definisjon - distanse

Avstanden mellom to vektorer, skrevet $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, er lengden av vektoren $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$$

6.1.4 Definisjon - ortogonalitet

To vektorer i R^n er ortogonale hvis

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

6.1.5 Teorem 2 - pytagoras teorem

To vektorer er ortogonale $\iff ||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$

6.1.6 Begrep - ortogonalt komplement

For et underrom W, finnes det vektorer som står normalt på dette underrommet. Spennet av et utvalg slike vektorer utgjør da $W^{\perp}$.

F.eks. i R^3 kan $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ utspenne W, og en vektor som står normalt på $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ utstpenner $W^{\perp}$.

6.1.7 Teorem 3

Ortogonale komplement

$$(\text{Row}(A))^{\perp} = \text{Nul}(A)$$
$$(\text{Col}(A))^{\perp} = \text{Nul}(A^T)$$

6.2 Ortogonale mengder

6.2.1 Teorem 4

Hvis $S = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}$ er en ortogonal mengde, hvor $\mathbf{u}_i \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, så er S lineært uavhengig og derfor en basis for underrommet Span$\{S\}$.

6.2.2 Teorem 5

La $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}$ være ortogonal basis for W i $\mathbb{R}^n$.

$$\forall\ \mathbf{y} \in W, \qquad \mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + ... + c_p\mathbf{u}_p$$

Vektene bestemmes ved

$$c_j = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j}, \qquad j = 1, ..., p$$

Altså er $\mathbf{y}$ summen av komponenten langs hver av de ortogonale vektorene i basisen.

6.2.3 Metode - ortogonal projeksjon

Gitt en basis $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}$ for et underrom W. En vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ kan dekomponeres til en sum av vektorkomponent langs $\mathbf{u}_i$ pluss en vektor $\mathbf{z}$ ortogonal på en utvidelse av basisen til $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

$\hat{\mathbf{y}}$ er projeksjonen av $\mathbf{y}$ langs W.

$$\hat{\mathbf{y}} = \text{proj}_W \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + ... + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

TODO feil seksjon?

6.2.4 Teorem 6

U $m \times n$ har ortonormale kolonner $\iff U^T U = I$

6.2.5 Teorem 7

La U $m \times n$ med ortonormale kolonner, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Da er

1. $||U\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$
2. $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$
3. $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

6.2.6

TODO ortogonal basis def

6.3 Ortogonal projeksjon

6.3.1 Teorem 8 - ortogonal dekomposisjon

La W være underrom av $\mathbb{R}^n$. Da kan alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ skrives unikt som

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

Hvor $\hat{\mathbf{y}} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^{\perp}$.

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + ... + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

for en basis $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}$ for W.

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$$

$\hat{\mathbf{y}}$ er en ortogonal projeksjon på W, og skrives $\text{proj}_W \mathbf{y}$.

6.3.2 Teorem 9 - beste approksimasjon

Hvis W underrom av $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\mathbf{y}} = \text{proj}_W \mathbf{y}$.

Da er $\hat{\mathbf{y}}$ punktet på W som ligger nærmest $\mathbf{y}$.

$$||\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}|| < ||\mathbf{y} - \mathbf{v}||, \qquad \forall\ \mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{y}} \in W$$

6.3.3 Teorem 10

For en orto*normal* basis $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}$, fungerer ortogonal projeksjon likt som vanlig, men litt enklere fordi lengden av hver vektor er 1.

$$\text{proj}_W \mathbf{y} = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + ... + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p$$

Hvis $U = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ ...\ \mathbf{u}_p]$ så er

$$\text{proj}_W \mathbf{y} = UU^T\mathbf{y}, \quad \forall\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

6.4 Gram-Schmidt prosessen

6.4.1 Teorem 11

En enkel algoritme for å lage ortogonal eller ortonormal basis.

Gitt en basis $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p$ for et underrom W.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_p &= \mathbf{x}_p - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - ... - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_{p-1}}{\mathbf{v}_{p-1} \cdot \mathbf{v}_{p-1}}\mathbf{v}_{p-1}
\end{aligned}$$

Nå er $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p$ en ortogonal basis for W.

$$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p\} = \text{Span}\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p\}$$

6.4.2 Teorem 12

Hvis A $m \times n$ har lineært uavhengige kolonner, så kan A faktoriseres

$$A = QR$$

Hvor Q $m \times n$ har kolonner fra en ortonormal basis for Col(A). Og R $n \times n$ er øvretriangulær invertibel matrise med positive elementer på diagonalen.

6.5 Minstekvadraters problem

6.5.1 Definisjon - minste kvadraters løsning

For A $m \times n$ og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. En minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er en $\hat{\mathbf{x}}$ s.a.

$$||\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}|| \leq ||\mathbf{b} - A\mathbf{x}||, \qquad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

6.5.2 Teorem 13

Mengden av minste kvadraters løsninger av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sammenfaller med (den ikketomme) mengden av løsninger av normalligningene

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

6.5.3 Teorem 14

For A $m \times n$ er følgende ekvivalent

1. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har unik minste kvadraters løsning $\forall\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
2. Kolonnene i A er lineært uavhengig.
3. $A^T A$ er invertibel.

Når disse er sanne, så er minste kvadraters løsning $\hat{\mathbf{x}}$ gitt ved

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}$$

6.5.4 Observasjon - alternativ metode

For $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, la $\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{\text{Col}(A)}\mathbf{b}$. Da finner man minste kvadraters løsning ved

$$A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$$

6.5.5 Teorem 15

For A $m \times n$ med lin. uavh. kolonner, la $A = QR$ som i teorem 12.

Da fins unik minste kvadraters løsning

$$\hat{\mathbf{x}} = R^{-1}Q^T\mathbf{b}, \qquad \forall\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

6.6 Anvendelser til lineære modeller

6.6.1 Begreper

Istedenfor å skrive $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så skriver vi $X\beta = \mathbf{y}$.

X kalles designmatrisen.

β kalles parametervektoren.

$\mathbf{y}$ kalles observasjonsvektoren.

6.6.2 Metode - Regresjon

Gitt et set datapunkter $(x_1, y_1), ..., (x_m, y_m)$, så kan man finne en lineærkombinasjon av funksjoner $f_1, ..., f_n$ som best passer punktene.

$$y = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + ... + \beta_n f_n$$

Dette gjøres ved å finne vektene $\beta_1, ..., \beta_n$ fra ligningen $X\beta = \mathbf{y}$.

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & ... & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & ... & f_n(x_2) \\ & & ... & \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & ... & f_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{bmatrix}$$

Funksjonene kan være hva man vil. F.eks. $f_1(x) = 1$ og $f_2(x) = x$ for en lineær regresjon.

6.7 Indreproduktrom

6.7.1 Definisjon - indreprodukt(rom)

Et indreprodukt er en funksjon som tar to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og tilordner et reelt tall $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, hvor følgende aksiomer er tilfredsstilt.

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0, \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \iff \mathbf{u} = 0$

Et vektorrom med et indreprodukt, kalles et indreproduktrom.

6.7.2 Begrep - lengde, avstand, ortogonalitet

Lengde (norm) til en vektor

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

Avstand mellom to vektorer

$$||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$$

Ortogonalitet

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

6.7.3 Teorem 16 - Cauchy-Schwartz ulikhet

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq ||\mathbf{u}|| \; ||\mathbf{v}||, \qquad \forall \; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

6.7.4 Teorem 17 - trekantulikheten

$$||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$$

6.7.5 Definisjon - indreprodukt for $C[a, b]$

Vektorrommet $C[a, b]$ er alle funksjoner som er kontinuerlige på $a \leq t \leq b$.

En vanlig definisjon av indreprodukt er

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) \; dt$$

6.8 Anvendelser til indreproduktrom

6.8.1

TODO vektede minste kvadrater, trendanalyse, fourierserie

7 Kpt.7 - Symmetriske Matriser og Kvadratisk Form

7.1 Diagonalisering av symmetriske matriser

7.1.1 Begrep - symmetrisk matrise

Hvis A er s.a. $A = A^T$, så er den symmetrisk.

7.1.2 Teorem 1

Hvis A er symmetrisk, så er egenvektorer fra ulike egenrom ortogonale mot hverandre.

7.1.3 Begrep - ortogonalt diagonaliserbar

A $n \times n$ er ortogonalt diag.bar hvis det fins: ortogonal matrise P s.a. $P^{-1} = P^T$, og en diagonal matrise D s.a.

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

7.1.4 Teorem 2

A $n \times n$ er ortogonalt diag.bar $\iff$ A er symmetrisk matrise.

7.1.5 Teorem 3 - spektralteoremet for symmetriske matriser

For A $n \times n$ gjelder:

1. A har n reelle egenverdier, med multiplisitet.
2. Dimensjon til egenrom er lik multiplisiteten til dets egenverdi.
3. Egenvektorer fra ulike egenrom er ortogonale på hverandre.
4. A er ortogonalt diagonaliserbar.

7.1.6 Observasjon - spektral dekomposisjon

$$A = PDP^T = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + ... + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T$$

7.2 Kvadratisk form

7.2.1 Definisjon - kvadratisk form

En kvadratisk form på $\mathbb{R}^n$ er en funksjon Q s.a.

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

Hvor A er en symmetrisk matrise.

7.2.2 Metode - koeffisienter fra matrisen

Forholdet mellom A og kvadratisk form:

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$$

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$$

7.2.3 Metode - kryssproduktledd

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

For å se hvilken koeffisent som går til hvilken $x_j x_k$ kan man se på tabellen:

	x1	x2	x3
x1	.	.	.
x2	.	.	.
x3	.	.	.

7.2.4 Metode - variabelskifte

Hvis A ikke er diagonal kan det være lurt med variabelskifte.

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$$

Her er $\mathbf{y}$ koordinatvektor til $\mathbf{x}$ for en basis $\mathcal{B}$, slik som i kpt 4.4.

$$\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}, \qquad P = [\mathbf{b}_1 \; ... \; \mathbf{b}_n]$$

Kvadratisk form blir nå enklere

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^T(P^T AP)\mathbf{y}$$

Men A er symmetrisk så

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$$

7.2.5 Teorem 4 - prinsipalakseteoremet

Hvis A $n \times n$ er symmetrisk, så fins et ortogonalt variabelskifte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ s.a.

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$$

uten kryssproduktledd.

Kolonnene i P kalles prinsipalaksene til den kvadratiske formen.

7.2.6 Observasjon - geometrisk tolkning

For invertibel A $n \times n$ og kvadrtisk form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, kan man velge en konstant c og se på

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = c$$

Det tilsvarer ligningen for enten en hyperbel, ellipse, to kryssende linjer, et punkt, eller ingen punkter.

7.2.7 Definisjon - definit

Kvadratisk form Q er:

1. Positiv definit hvis $Q(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
2. Negativ definit hvis $Q(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
3. Indefinit hvis $Q(\mathbf{x})$ har både pos. og neg. tall.

7.2.8 Teorem 5 - kvadratisk form og egenverdier

Kvadratisk form er

1. Positiv definit $\iff$ egenverdiene til A er kun positive.
2. Negativ definit $\iff$ egenverdiene til A er kun negative.
3. Indefinit $\iff$ A har både pos. og neg. egenverdier.

7.3 Begrenset optimalisering

7.3.1 Metode 1 -

En vanlig begrensning er $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$.

Anta at Q ikke har kryssproduktledd, og at $a \geq b \geq c$:

$$Q = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 \leq ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = a \cdot \mathbf{x}^T\mathbf{x} = a$$

Så vi fant en maksimumsverdi

$$Q \leq a$$

7.3.2 Teorem 6

La A være symmetrisk og

$$m = \min\{\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \ : \ ||\mathbf{x}|| = 1\}$$
$$M = \max\{\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \ : \ ||\mathbf{x}|| = 1\}$$

Da er $M = \lambda_1$ største egenverdi til A, og $Q(\mathbf{x}) = M$ når $\mathbf{x}$ er en enhetsvektor $\mathbf{u}_1$ tilsvarende M.

Tilsvarende er m minste egenverdi til A, og $Q(\mathbf{x}) = m$ når $\mathbf{x}$ er en enhetsvektor tilsvarende m.

7.3.3 Teorem 7

La $A, \lambda_1, \mathbf{u}_1$ være som i teorem 6. Maksimum av Q under begrensningene

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T\mathbf{u}_1 = 0$$

er den nest største egenverdien λ_2. Den verdien fåes når $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$ egenvektor tilsvarende λ_2.

7.3.4 Teorem 8

A $n \times n$, ortog.diag. $A = PDP^{-1}$, $D = \text{diag}(\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n)$, kolonner i P er tilsvarende enhetsegenvektorer $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$.

Da vil max av Q under begrensningene være

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T\mathbf{u}_1 = 0, \quad ..., \quad \mathbf{x}^T\mathbf{u}_{k-1} = 0$$

egenverdi λ_k, og maks gitt ved $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$.

7.4 Singulærverdidekomposisjon

7.4.1 Begrep - singulærverdier

For en ikkekvadratisk A $m \times n$, så kan vi regnu ut A^TA.

Videre kan vi regne ut egenverdiene λ_i til A^TA.

Singulærverdiene σ til A er da

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Vanligvis sorteser de s.a.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n$$

7.4.2 Teorem 9

Hvis egenvektorene til A^TA kan gjøres til en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$, ordnet slik at $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$. Og hvis A har r ikkenull singulærverdier.

Så er $\{A\mathbf{v}_1, ..., A\mathbf{v}_r\}$ en ortogonal basis for $\text{Col}(A)$, og $\text{rank}(A) = r$.

7.4.3 Teorem 10 - singulærverdidekomposisjon

La A være $m \times n$ med rang r.

Da fins det en Σ $m \times n$ på formen

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hvor $D = \text{diag}(\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_r \geq 0)$.

Og det fins også en ortogonal U $m \times m$, og en ortogonal V $n \times n$ s.a.

$$A = U\Sigma V^T$$

U og V er ikke unikt bestemt.

7.4.4 Metode - singulærverdidekomposisjon

Ortogonalt diagonaliser A^TA

Finn egenverdiene og tilsvarende ortonormal mengde egenvektorer.

Konstruer V
Sorter egenverdiene til A^TA i synkende rekkefølge, og bruk tilsvarende egenvektorer som kolonner i V

$$V = [\ \mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ ...\ \mathbf{v}_n\ ]$$

Konstruer Σ
Bruk singulærverdiene og la $D = \text{diag}(\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_r \geq 0)$. Konstruer Σ til å være $m \times n$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konstruer U
Enten kan man bruke matrisemultiplikasjon og inverse for å finne U, eller så kan man bruke

$$U = [\ \mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ ...\ \mathbf{u}_n\ ]$$

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$$

7.4.5 Teorem - IMT konkludert

For A $n \times n$ er følgende ekvivalent

1. A er invertibel.
2. $(\text{Col}(A))^\perp = \{\mathbf{0}\}$
3. $(\text{Nul}(A))^\perp = \mathbb{R}^n$
4. $\text{Row}(A) = R^n$
5. A har n ikkenull singulærverdier.

7.4.6

TODO condition number, basis for fundamentale underrom, redusert SVD, pseudoinvers av A, minste kvadrater.

7.5 Ikke pensum?

TODO Ikke pensum?

8 Notat 1

8.0.1

TODO

9 Notat 2

9.0.2

TODO TODO egenfunksjon