

# MAT1120

Robin A. T. Pedersen

November 16, 2016

## Contents

<b>1</b>	<b>Forord</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Kpt.4 - Vektorrom</b>	<b>4</b>
4.1	Vektor rom og underrom . . . . .	4
4.1.1	Definisjon - vektorrom . . . . .	4
4.1.2	Definisjon - underrom . . . . .	4
4.1.3	Teorem 1 . . . . .	4
4.2	Nullrom, kolonnerom og lineærtransformasjoner . . . . .	4
4.2.1	Definisjon - nullrom . . . . .	4
4.2.2	Teorem 2 . . . . .	5
4.2.3	Definisjon - kolonnerom . . . . .	5
4.2.4	Teorem 3 . . . . .	5
4.2.5	Definisjon - lineærtransformasjon . . . . .	5
4.2.6	Begrep - kjerne (kernel) . . . . .	5
4.3	Lineært uavhengige mengder: basiser . . . . .	5
4.3.1	Teorem 4 . . . . .	5
4.3.2	Definisjon - basis . . . . .	5
4.3.3	Teorem 5 - utspennende mengde teoremet . . . . .	6
4.3.4	Teorem 6 . . . . .	6
4.4	Koordinatsystemer . . . . .	6
4.4.1	Teorem 7 - unik representasjon teoremet . . . . .	6
4.4.2	Definisjon - $\mathcal{B}$ -koordinater . . . . .	6
4.4.3	Begrep - koordinatskiftematrise . . . . .	6
4.4.4	Teorem 8 . . . . .	6
4.4.5	Begrep - isomorfi . . . . .	7
4.5	Dimensjon av vektorrom . . . . .	7
4.5.1	Teorem 9 . . . . .	7
4.5.2	Teorem 10 . . . . .	7
4.5.3	Definisjon - dimensjon . . . . .	7
4.5.4	Teorem 11 . . . . .	7
4.5.5	Teorem 12 - basisteoremet . . . . .	7
4.5.6	Observasjon - DimNul og DimCol . . . . .	7

4.6	Rang . . . . .	8
4.6.1	Definisjon - radrom . . . . .	8
4.6.2	Teorem 13 . . . . .	8
4.6.3	Definisjon - rang . . . . .	8
4.6.4	Teorem 14 - rangteoremet . . . . .	8
4.6.5	Teorem - invertibel matrise teoremet (fortsatt) . . . . .	8
4.7	Basisskifte . . . . .	9
4.7.1	Teorem 15 . . . . .	9
4.7.2	Begrep - koordinatskiftematrise . . . . .	9
4.7.3	Observasjon - Invers av koord.skiftematr. . . . .	9
4.8	Ikke eksamensrelevant . . . . .	9
4.9	Anvendelser til Markovkjeder . . . . .	9
4.9.1	Begrep - sannsynlighetsvektor . . . . .	9
4.9.2	Begrep - stokastisk matrise . . . . .	9
4.9.3	Begrep - markovkjede . . . . .	9
4.9.4	Begrep - tilstandsvektor . . . . .	9
4.9.5	Begrep - ekvilibriumsvektor . . . . .	10
4.9.6	Begrep - regulæritet . . . . .	10
4.9.7	Teorem 18 . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Kpt.5 - Egenverdier og Egenvektorer</b>	<b>10</b>
5.1	Egenvektor og egenverdier . . . . .	10
5.1.1	. . . . .	10
5.2	Den karakteristisk ligningen . . . . .	10
5.2.1	. . . . .	10
5.3	Diagonalisering . . . . .	10
5.3.1	. . . . .	10
5.4	Egenvektorer og lineærtransformasjoner . . . . .	10
5.4.1	. . . . .	10
5.5	Komplekse egenverdier . . . . .	11
5.5.1	. . . . .	11
5.6	Diskrete dynamiske systemer . . . . .	11
5.6.1	. . . . .	11
5.7	Anvendelser til differensialligninger . . . . .	11
5.7.1	Repetisjon - Difflikninger . . . . .	11
5.7.2	Metode - initialverdiproblem . . . . .	11
5.7.3	Observasjon - frastøter, sadel, attraktor . . . . .	11
5.7.4	Metode - avkobling av dynamiske systemer . . . . .	11
5.7.5	Komplekse egenverdier . . . . .	12
5.8	Iterative estimer for egenverdier . . . . .	12
5.8.1	Metode - potensmetoden . . . . .	12
5.8.2	Metode - invers potensmetode . . . . .	13

<b>6</b>	<b>Kpt.6 - Ortogonalitet og Minstekvadrater</b>	<b>13</b>
6.1	Indre produkt, lengde og ortogonalitet . . . . .	13
6.1.1	. . . . .	13
6.2	Ortogonale mengder . . . . .	14
6.2.1	. . . . .	14
6.3	Ortogonal projeksjon . . . . .	14
6.3.1	. . . . .	14
6.4	Gram-Schmidt prosessen . . . . .	14
6.4.1	. . . . .	14
6.5	Minstekvadraters problem . . . . .	14
6.5.1	. . . . .	14
6.6	Anvendelser til lineære modeller . . . . .	14
6.6.1	. . . . .	14
6.7	Indreproduktrom? TODO . . . . .	14
6.7.1	. . . . .	14
6.8	Anvendelser til indreproduktrom . . . . .	14
6.8.1	. . . . .	14
<b>7</b>	<b>Kpt.7 - Symmetriske Matriser og Kvadratisk Form</b>	<b>14</b>
7.1	Diagonalisering av symmetriske matriser . . . . .	14
7.1.1	. . . . .	14
7.2	Kvadratisk form . . . . .	15
7.2.1	. . . . .	15
7.3	Begrenset optimalisering? TODO . . . . .	15
7.3.1	. . . . .	15
7.4	Singulærverdidekomposisjon . . . . .	15
7.4.1	. . . . .	15
7.5	Ikke pensum? TODO . . . . .	15
<b>8</b>	<b>Notat 1</b>	<b>15</b>
8.0.1	. . . . .	15
<b>9</b>	<b>Notat 2</b>	<b>15</b>
9.0.2	. . . . .	15

## 1 Forord

Dette er en oversikt over alle definisjoner, teoremer og lignende fra læreboka i MAT1120.

NB! Noen steder har jeg skrevet  $c \in \mathbb{R}$ , men det kan hende at  $\mathbb{C}$  hadde fungert like fint. Lignende ”*feil*” kan finnes andre steder.

NB! Noen av kapitlene er mangelfulle. Jeg har selv skrevet observasjoner og metoder.

## 4 Kpt.4 - Vektorrom

### 4.1 Vektor rom og underrom

#### 4.1.1 Definisjon - vektorrom

Et vektorrom er en ikketom mengde  $V$ . Den består av såkalte *vektorer*. Disse vektorene må være beskrevet av 2 operasjoner: Addisjon og skalarmultiplikasjon.

De to operasjonene defineres av følgende aksiomer: La  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

1.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
2.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4.  $\exists \mathbf{0} \in V$  s.a.  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5.  $\forall \mathbf{u} \in V, \exists -\mathbf{u} \in V$  s.a.  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
6.  $c\mathbf{u} \in V, c \in \mathbb{R}$
7.  $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8.  $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
9.  $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
10.  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

#### 4.1.2 Definisjon - underrom

Et underrom  $H$  er en delmengde av  $V$ .  $H$  er et underrom av  $V$ .

To egenskaper må være oppfylt:

1.  $H$  er lukket under addisjon.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$
2.  $H$  er lukket under skalarmultiplikasjon.  $c\mathbf{u} \in H, \forall c \in \mathbb{R}$

#### 4.1.3 Teorem 1

Hvis  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$  er i et vektorrom  $V$ , så er  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  et underrom av  $V$ .

### 4.2 Nullrom, kolonnerom og lineærtransformasjoner

#### 4.2.1 Definisjon - nullrom

Nullromet til en  $m \times n$  matrise  $A$ , er mengden av alle løsninger av  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

$$\text{Nul}(A) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

#### 4.2.2 Teorem 2

Nullrommet til  $A$   $m \times n$ , er et underrom av  $\mathbb{R}^n$ .

Med andre ord:  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  har  $m$  homogene lineære ligninger, med  $n$  ukjente. Mengden av løsninger er et underrom av  $\mathbb{R}^n$ .

#### 4.2.3 Definisjon - kolonnerom

Kolonnerommet til  $m \times n$  matrisen  $A$ , er mengden av alle lineærkombinasjoner av kolonnene i  $A$ .

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n] \quad \text{Col}(A) = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

#### 4.2.4 Teorem 3

Kolonnerommet til  $A$   $m \times n$ , er et underrom av  $\mathbb{R}^m$ .

Med andre ord: Kolonnene i  $A$  har  $m$  elementer i hver vektor. Kolonnerommet er alle lineærkombinasjoner av disse, og har derfor  $m$  elementer i hver vektor.

#### 4.2.5 Definisjon - lineærtransformasjon

En lineærtransformasjon  $T$  fra et vektorrom  $V$  til et annet vektorrom  $W$ , er en regel som gir hver  $\mathbf{x}$  i  $V$  en unik vektor  $T(\mathbf{x})$  i  $W$ .

To egenskaper må oppfylles

1.  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2.  $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}), \forall c \in \mathbb{R}^n$

#### 4.2.6 Begrep - kjerne (kernel)

Praktisk talt synonymt med nullrom.

### 4.3 Lineært uavhengige mengder: basiser

#### 4.3.1 Teorem 4

En mengde  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  (minst 2 vektorer) er lineært avhengig hvis (minst) en vektor kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre vektorene.

#### 4.3.2 Definisjon - basis

La  $H$  være et underrom av vektorrommet  $V$ . En mengde  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$  i  $V$ , er en basis for  $H$  hvis:

1.  $\mathcal{B}$  er lineært uavhengig
2. underrommet utspent av  $\mathcal{B}$  er det samme som  $H$ . Altså,  $H = \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$

### 4.3.3 Teorem 5 - utspennende mengde teoremet

La  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  være en mengde i  $V$ , og la  $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ .

1. Hvis  $\mathbf{v}_k$  er en lin.komb. av de andre vektorene, så kan man fjerne den fra mengden og den vil fremdeles utspenne  $H$ .
2. Hvis  $H \neq \{0\}$ , så er en delmengde av  $S$  en basis for  $H$ .

### 4.3.4 Teorem 6

Pivotkolonnene til en matrise  $A$ , utgjør en basis for  $\text{Col}(A)$ .

Man velger altså de kolonnene i  $A$  som er lineært uavhengige.

## 4.4 Koordinatsystemer

### 4.4.1 Teorem 7 - unik representasjon teoremet

La  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  være en basis for et vektorrom  $V$ .

Da fins en unik mengde  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  s.a.

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \mathbf{b}_n, \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

### 4.4.2 Definisjon - $\mathcal{B}$ -koordinater

Hvis  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  er en basis for  $V$ , og  $\mathbf{x} \in V$ .

Koordinatene til  $\mathbf{x}$  relativt til  $\mathcal{B}$ , er vektor  $c_1, \dots, c_n$  s.a.

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$$

Med andre ord:  $\mathcal{B}$ -koordinatene til  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (c_1, \dots, c_n)$ .

### 4.4.3 Begrep - koordinatskiftematrise

Koordinatskiftematrisen  $P_{\mathcal{B}}$ , tar en vektor fra  $\mathcal{B}$  til standardbasis i  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Hvor  $P_{\mathcal{B}}$  lages enkelt ved

$$P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$$

### 4.4.4 Teorem 8

La  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  være en basis for vektorrommet  $V$ . Da er koordinatavbildningen  $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$  en-til-en lineærtransformasjon fra  $V$  på  $\mathbb{R}^n$ .

#### 4.4.5 Begrep - isomorfi

En isomorfi er en *en-til-en* og *på* lineærtransformasjon.

Altså: den dekker hele  $V$  og enhver  $\mathbf{x}$  har en unik  $T(\mathbf{x})$ .

### 4.5 Dimensjon av vektorrom

#### 4.5.1 Teorem 9

Hvis et vektorrom  $V$  har en basis  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ , så er alle mengder i  $V$  med fler enn  $n$  vektorer lineært *avhengig*.

#### 4.5.2 Teorem 10

Hvis et vektorrom  $V$  har en basis med  $n$  vektorer, så må *alle* basiser for  $V$  ha nøyaktig  $n$  vektorer.

#### 4.5.3 Definisjon - dimensjon

Hvis  $V$  er utspent av en endelig mengde, så er  $V$  *endelig-dimensjonalt*. Dimensjonen til  $V$ ,  $\dim V$ , er antall vektorer i en basis for  $V$ .

Hvis  $V$  *ikke* er utspent av en endelig mengde, så er  $V$  *uendelig-dimensjonalt*. Dimensjonen til nullvektorrommet  $\{\mathbf{0}\}$  er null.

#### 4.5.4 Teorem 11

La  $H$  være et underrom av et endelig-dimensjonalt vektorrom  $V$ . Alle lineært uavhengige mengder i  $V$  kan utvides, hvis nødvendig, til en basis for  $H$ .

$H$  er også endelig-dimensjonalt.

$$\dim H \leq \dim V$$

#### 4.5.5 Teorem 12 - basisteoremet

La  $V$  være et  $p$ -dimensjonalt vektorrom,  $p \geq 1$ .

Alle lin.uavh. mengder med nøyaktig  $p$  elementer i  $V$ , er en basis for  $V$ .

Alle mengder som spenner  $V$  med nøyaktig  $p$  elementer, er en basis for  $V$ .

#### 4.5.6 Observasjon - DimNul og DimCol

Dimensjonen til  $\text{Nul}(A)$  er antall fri variable i  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Dimensjonen til  $\text{Col}(A)$  er antall pivot-kolonner i  $A$ .

## 4.6 Rang

### 4.6.1 Definisjon - radrom

Radrommet til  $A$ ,  $\text{Row}(A)$ , er mengden av alle lineærkombinasjoner av radvektorene i  $A$ .

### 4.6.2 Teorem 13

$A$  og  $B$  er radekvivalente hvis  $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$ .

Hvis  $B$  er på trappeform, så er ikke-null radene i  $B$  en basis for både  $\text{Row}(A)$  og  $\text{Row}(B)$ .

### 4.6.3 Definisjon - rang

Rangen til  $A$  er dimensjonen til kolonnerommet til  $A$ .

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A))$$

### 4.6.4 Teorem 14 - rangteoremet

Kolonne-rang er det samme som rad-rang:

$$\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Row}(A))$$

Rangen til  $A$  er lik antall pivotelementer i  $A$ .

Rangen til  $A$  oppfyller:

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A))$$

### 4.6.5 Teorem - invertibel matrise teoremet (fortsatt)

Med  $An \times n$ , så er følgende påstander ekvivalente

1.  $A$  er invertibel.
2. Kolonnene i  $A$  er en basis for  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^n$ .
4.  $\dim(\text{Col}(A)) = n$ .
5.  $\text{rank}(A) = n$ .
6.  $\text{Nul}(A) = \mathbf{0}$ .
7.  $\dim(\text{Nul}(A)) = 0$ .



## 4.7 Basisskifte

### 4.7.1 Teorem 15

La  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  og  $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$  være basiser for  $V$ .

Da finnes en unik  $n \times n$  matrise  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  s.a.

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Hvor

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [ [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} ]$$

### 4.7.2 Begrep - koordinatskiftematrise

Matrisen  $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$  kalles for koordinatskiftematriksen fra  $\mathcal{B}$  til  $\mathcal{C}$ .

### 4.7.3 Observasjon - Invers av koord.skiftetr.

$$\left( P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \right)^{-1} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$$

## 4.8 Ikke eksamensrelevant

Ikke eksamensrelevant.

## 4.9 Anvendelser til Markovkjeder

### 4.9.1 Begrep - sannsynlighetsvektor

En sannsynlighetsvektor: har ikke negative elementer, og summerer til 1.

### 4.9.2 Begrep - stokastisk matrise

En stokastisk matrise: en kvadratisk matrise med sannsynlighetsvektorer som kolonner.

### 4.9.3 Begrep - markovkjede

En markovkjede er en følge av sannsynlighetsvektorer, sammen med en stokastisk matrise  $P$  s.a.

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### 4.9.4 Begrep - tilstandsvektor

Et element  $\mathbf{x}_k$  i markovkjeden.

#### 4.9.5 Begrep - ekvilibriumsvektor

Tilstandsvektorene i markovkjeden forandres for hver iterasjon, men hvis man finner en vektor som ikke endres, er det en ekvilibriumsvektor.

$$P\mathbf{q} = \mathbf{q}$$

Alle stokastiske matriser har en ekvilibriumsvektor.

#### 4.9.6 Begrep - regulæritet

Hvis en potens av stokastisk matrise  $P^k$  kun inneholder positive elementer, så er den regulær.

#### 4.9.7 Teorem 18

Hvis  $P$  er regulær og stokastisk, så vil markovkjeden konvergere mot den unike ekvilibriumsmatrisen.

$$\{\mathbf{x}_k\} \rightarrow \mathbf{q} \quad \text{når } k \rightarrow \infty$$

## 5 Kpt.5 - Egenverdier og Egenvektorer

### 5.1 Egenvektor og egenverdier

#### 5.1.1

TODO

### 5.2 Den karakteristisk ligningen

#### 5.2.1

TODO

### 5.3 Diagonalisering

#### 5.3.1

TODO

### 5.4 Egenvektorer og lineærtransformasjoner

#### 5.4.1

TODO

## 5.5 Komplekse egenverdier

### 5.5.1

TODO

## 5.6 Diskrete dynamiske systemer

### 5.6.1

TODO

## 5.7 Anvendelser til differensialligninger

### 5.7.1 Repetisjon - Diff ligninger

La  $x(t)$  være en funksjon og  $a \in \mathbb{R}$ . Gitt ligningen

$$x'(t) = a \cdot x(t)$$

Så er

$$x(t) = c \cdot e^{a \cdot t}$$

### 5.7.2 Metode - initialverdiproblem

Gitt egenverdier  $\lambda_1, \lambda_2$ , og egenvektorer  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , og initialverdi  $\mathbf{x}(0)$ : Løs ligningen  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}$ .

**Løsning**

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

### 5.7.3 Observasjon - frastøter, sadel, attraktor

Hvis egenverdiene er positive, så er origo en frastøter.

Hvis egenverdiene er negative, så er origo en attraktor.

Hvis egenverdiene er blandet, så er origo et sadelpunkt.

### 5.7.4 Metode - avkobling av dynamiske systemer

Når vi har  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , med  $A$  diagonaliserbar  $A = PDP^{-1}$ . Så kan vi gjøre et variabelskifte  $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ .

$$x' = \frac{d}{dt}(P\mathbf{y}) = A(P\mathbf{y}) = (PDP^{-1})P\mathbf{y} = PD\mathbf{y}$$

Venstremultipliser med  $P^{-1}$  og få

$$\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$$

Det er mye enklere å løse.

### 5.7.5 Komplekse egenverdier

Hvis matrisen  $A$  har komplekse egenverdier  $\lambda$  og egenvektorer  $\mathbf{v}$ , så kan vi finne generelle løsninger.

#### Kompleks generell løsning

På vanlig vis:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

#### Reell generell løsning

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{y}_1(t) + c_2 \mathbf{y}_2(t)$$

$$\mathbf{y}_1 = \operatorname{Re} \mathbf{x}_1 = ([\operatorname{Re} \mathbf{v}] \cos bt - [\operatorname{Im} \mathbf{v}] \sin bt) e^{at}$$

$$\mathbf{y}_2 = \operatorname{Re} \mathbf{x}_2 = ([\operatorname{Re} \mathbf{v}] \sin bt + [\operatorname{Im} \mathbf{v}] \cos bt) e^{at}$$

hvor  $\lambda_1 = a + bi$  og  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ .

## 5.8 Iterative estimer for egenverdier

### 5.8.1 Metode - potensmetoden

#### Teori

Potensmetoden gjelder  $n \times n$  matriser  $A$  med en *Strengt dominant egenverdi*.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Vis ser på  $\mathbf{x}$  skrevet som

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

$$A^k \mathbf{x} = c_1 (\lambda_1)^k \mathbf{v}_1 + \dots + c_n (\lambda_n)^k \mathbf{v}_n$$

Vi deler på den største egenverdien

$$\frac{1}{(\lambda_1)^k} A^k \mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_n$$

Fordi  $\lambda_1$  er størst får man

$$(\lambda_1)^{-k} A^k \mathbf{x} \rightarrow c_1 \mathbf{v}_1, \quad k \rightarrow \infty$$

Altså har vi at  $A^k \mathbf{x}$  går i ca samme retning som  $\mathbf{v}_1$ .

### Algoritme

1. Vel initialvektor  $\mathbf{x}_0$  med største komponent 1.
2. For  $k = 0, 1, \dots$ 
  - a Beregn  $A\mathbf{x}_k$
  - b La  $\mu_k$  være komponenten i  $A\mathbf{x}_k$  med størst abs.
  - c Beregn  $\mathbf{x}_{k+1} = (1/\mu_k)A\mathbf{x}_k$
3. For nesten alle  $\mathbf{x}_0$  vil  $\mu_k \rightarrow \lambda_1$  og  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{v}_1$

### 5.8.2 Metode - invers potensmetode

#### Teori

Metoden tilnærmer hvilken som helst egenverdi, gitt at initialgjetning  $\alpha$  er nærmere nok  $\lambda$ .

La  $B = (A - \alpha I)^{-1}$  og bruk potensmetoden på B.

Egenverdiene til A er  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , og egenverdiene til B er  $\frac{1}{\lambda_1 - \alpha}, \dots, \frac{1}{\lambda_n - \alpha}$ .

Egenverdiene til A vil ligge innenfor  $[-|\lambda_1|, |\lambda_1|]$ .

### Algoritme

1. Velg initialgjetning  $\alpha$  nærmere  $\lambda$
2. Velg initialvektor  $\mathbf{x}_0$  med største komponent 1.
3. For  $k = 0, 1, \dots$ 
  - a Beregn  $(A - \alpha I)\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$
  - b La  $\mu_k$  være komponent i  $\mathbf{y}_k$  med størst abs.
  - c Beregn  $v_k = \alpha + (1/\mu_k)$
  - d Beregn  $\mathbf{x}_{k+1} = (1/\mu_k)\mathbf{y}_k$
4.  $v_k \rightarrow \lambda$  og  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{v}$

## 6 Kpt.6 - Ortogonalitet og Minstekvadrater

### 6.1 Indre produkt, lengde og ortogonalitet

#### 6.1.1

TODO

## **6.2 Ortogonale mengder**

### **6.2.1**

TODO

## **6.3 Ortogonal projeksjon**

### **6.3.1**

TODO

## **6.4 Gram-Schmidt prosessen**

### **6.4.1**

TODO

## **6.5 Minstekvadraters problem**

### **6.5.1**

TODO

## **6.6 Anvendelser til lineære modeller**

### **6.6.1**

TODO

## **6.7 Indreproduktrom? TODO**

### **6.7.1**

TODO

## **6.8 Anvendelser til indreproduktrom**

### **6.8.1**

TODO

# **7 Kpt.7 - Symmetriske Matriser og Kvadratisk Form**

## **7.1 Diagonalisering av symmetriske matriser**

### **7.1.1**

TODO

## **7.2 Kvadratisk form**

### **7.2.1**

TODO

## **7.3 Begrenset optimalisering? TODO**

### **7.3.1**

TODO

## **7.4 Singulærverdidekomposisjon**

### **7.4.1**

TODO

## **7.5 Ikke pensum? TODO**

Ikke pensum? TODO

## **8 Notat 1**

### **8.0.1**

TODO

## **9 Notat 2**

### **9.0.2**

TODO TODO egenfunksjon