

Capitolo 6

1 Bayesian Probability

Concetti fondamentali:

- La probabilità bayesiana rappresenta un grado di credenza soggettiva piuttosto che una frequenza relativa.
- Consente di aggiornare le credenze iniziali (prior) basandosi sull'evidenza osservata.

Probabilità Condizionale:

- **Definizione:** Misura quanto si crede in un'ipotesi h dato un'evidenza e , scritta $P(h|e)$.

- **Formula:**

$$P(h|e) = \frac{P(e|h) \cdot P(h)}{P(e)}$$

dove:

- $P(h)$: Probabilità a priori (credibilità iniziale dell'ipotesi).
- $P(e|h)$: Verosimiglianza (probabilità dell'evidenza dato h).
- $P(e)$: Probabilità marginale dell'evidenza (normalizzatore).
- $P(h|e)$: Probabilità a posteriori (credibilità aggiornata).

Proprietà importanti:

- **Regola della Catena:**

$$P(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n) = P(a_1) \cdot P(a_2|a_1) \cdot \dots \cdot P(a_n|a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1})$$

Valori attesi:

- **Definizione:** Media pesata dei possibili valori di una variabile casuale V , calcolata come:

$$E(V) = \sum_{\omega \in \Omega} V(\omega) \cdot P(\omega)$$

- **Valore atteso condizionato:**

$$E(V|e) = \sum_{\omega \in \Omega} V(\omega) \cdot P(\omega|e)$$

2 Teoria dell'Informazione

Concetti fondamentali:

- **Bit:** Unità base di informazione, può assumere i valori 0 o 1.
- **Entropia:** Misura dell'incertezza associata a una distribuzione di probabilità.

$$H(X) = - \sum_x P(x) \cdot \log_2 P(x)$$

- **Informazione attesa:**

$$I(e) = \sum_x P(x) \cdot \log_2 P(x)$$

Informazione da un test:

- Misura la riduzione dell'incertezza fornita dall'evidenza:

$$I(h|e) = -P(h|e) \cdot \log_2 P(h|e) - P(\neg h|e) \cdot \log_2 P(\neg h|e)$$

3 Belief Networks (Reti Bayesiane)

Definizione:

- Modello probabilistico che rappresenta variabili casuali e le loro relazioni tramite una rete diretta aciclica (DAG).

Costruzione:

- **Variabili:**
 - **Osservabili:** Variabili di cui possiamo misurare il valore.
 - **Latenti:** Variabili non osservabili ma utili per semplificare il modello.
- **Relazioni:**
 - Espresse tramite probabilità condizionali (es. $P(X|Y)$).

Fattori:

- Un fattore è una funzione che mappa un insieme di valori di variabili a un numero (es., una probabilità).
- Rappresentazione tramite tabelle di probabilità condizionale (CPT).

4 Probabilistic Inference

1. Inferenza Esatta:

- **Obiettivo:** Calcolare distribuzioni posteriori senza approssimazioni.
- **Metodi:**
 - **Eliminazione di variabili.**
 - **Condizionamento ricorsivo.**
- **Limiti:** Può essere computazionalmente onerosa (problemi NP-hard).

2. Inferenza Approssimativa:

- **Utilizzo:** Quando l'inferenza esatta è impraticabile.
- **Tecniche principali:**
 - **Rejection Sampling:** Campiona finché i valori rispettano l'evidenza.
 - **Importance Sampling:** Pesa i campioni in base alla loro rilevanza.
 - **Particle Filtering:** Metodo iterativo per aggiornare distribuzioni posteriori.

3. Simulazione Stocastica:

- Genera campioni casuali dalla distribuzione posteriore.
- **Approcci:**
 - **Sampling da una singola variabile:** Campiona valori proporzionalmente alla loro distribuzione cumulativa.
 - **Forward Sampling:** Genera campioni da una rete bayesiana partendo dalle variabili radice.

5 Modelli Dinamici

1. Catene di Markov:

- **Definizione:** Rappresentano sequenze di stati con l'assunzione di indipendenza Markoviana:

$$P(S_{t+1}|S_t, S_{t-1}, \dots) = P(S_{t+1}|S_t)$$

- **Proprietà principali:**
 - Modello semplice da specificare.
 - Può essere stazionario e indefinito nel tempo.

2. Hidden Markov Models (HMM):

- **Estensione delle catene di Markov con osservazioni parziali.**
- **Componenti principali:**
 - $P(S_0)$: Condizioni iniziali.
 - $P(S_{t+1}|S_t)$: Dinamica del modello.
 - $P(O_t|S_t)$: Modello dei sensori.

3. Dynamic Belief Networks (DBN):

- **Definizione:** Estensione degli HMM con rappresentazioni in termini di feature.
- **Applicazioni:**
 - Supportano modelli complessi e dinamici.

Conclusioni

Questi appunti sintetizzano i concetti fondamentali di probabilità, inferenza e modelli dinamici, offrendo una comprensione strutturata delle basi teoriche e delle loro applicazioni. Sono trattati i metodi esatti e approssimativi per l'inferenza, con un'enfasi sui modelli probabilistici (HMM, DBN) e le loro implementazioni pratiche.