概率论

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥

2023 年 9 月

第 2 章　初等概率论

(6 课时)

- 概率的公理化体系
- 条件概率
- 事件的独立性

Kolmogorov 公理体系是建立在集合论与测度论基础之上的.

σ 域或 σ 代数

- 定义 2.1.1 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集族, 称 $\mathscr{F}$ 为一个 σ 域或 σ 代数, 若
  (1) $\Omega \in \mathscr{F}$;
  (2) $A \in \mathscr{F}$ 蕴涵 $A^c \in \mathscr{F}$;
  (3) 对任意 $A_n \in \mathscr{F}$, $n \geq 1$, 有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.
- 性质 2.1.2 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的一个 σ 域, 则
  (1) $\emptyset \in \mathscr{F}$;
  (2) 对 $\forall A_n \in \mathscr{F}$, $n \geq 1$, 有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$;
  (3) 对 $\forall A_k \in \mathscr{F}$, $k = 1, \ldots, n$, 有 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$;
  (4) 对 $\forall A, B \in \mathscr{F}$, 有 $A - B \in \mathscr{F}$.

- **性质 2.1.3** σ 域族在交运算下封闭，但在并运算下不封闭.
- 几类特殊的 σ 域

(1) 平凡 σ 域: $\mathscr{F}=\{\emptyset,\Omega\}$;

(2) 最大 σ 域: $\mathscr{F}=\{A:A\subset\Omega\}$, 记为 $\mathscr{P}(\Omega)$;

(3) 包含事件 A 最小 σ 域: $\mathscr{F}=\{\emptyset,\Omega,A,A^c\}$;

(4) 包含事件 A,B 的最小 σ 域:

$$\left\{\begin{array}{l}\emptyset,\Omega,A,A^c,B,B^c,AB,A^cB,AB^c,A^cB^c,A\cup B,\\ A^c\cup B^c,A\cup B^c,A^c\cup B,(AB)\cup(A^cB^c),(A^cB)\cup(AB^c)\end{array}\right\}$$

(5) 包含一组有限分割 $\{A_1,\ldots,A_n\}$ 的最小 σ 域

$$\mathscr{F}=\left\{\sum_{i\in J}A_i:\ J\subset\{1,\ldots,n\}\right\}.$$

- 生成 σ 域:

  给定一个子集类 $\mathscr{C}$, 其生成 σ 域记为 $\sigma(\mathscr{C})$.

  一个子集类生成 σ 域的存在性

【例 2.1.1】 设 $\Omega = \Re$, $\mathscr{A}_1 = \{(-\infty, x) : x \in \Re\}$,

$$\mathscr{A}_2 = \{(a, b) : -\infty < a < b < \infty\},$$

$$\mathscr{A}_3 = \{(A : A \text{ 为 } \Re \text{ 的开集}\}, \quad \mathscr{A}_4 = \{(A : A \text{ 为 } \Re \text{ 的闭集}\},$$

证明:

$$\sigma(\mathscr{A}_1) = \sigma(\mathscr{A}_2) = \sigma(\mathscr{A}_3) = \sigma(\mathscr{A}_4).$$

※ 例 2.1.1 中生成 σ 域称为直线上的 Borel 域, 记为 $\mathscr{B}$ 或 $\mathscr{B}(\Re)$.

概率

- 定义 2.1.4: 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为一个可测空间, 称集函数

$$\mathrm{P}: \mathscr{F} \to [0,1]$$

为 $\mathscr{F}$ 上的一个概率, 若

(i) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;

(ii) 对任意两两互斥的 $A_n \in \mathscr{F}$, $n \geq 1$, 有

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

※ 基本性质:

- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$, $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$, 有限可加性.

概率的性质

- 强可加性: $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$. 更一般地,

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n}\mathrm{P}(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}).$$

- 有限次可加性: $\mathrm{P}(\cup_{k=1}^{n}A_k)\le\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(A_k)$.
- 下连续性: 若 $A_n\uparrow A$, 则 $\mathrm{P}(A_n)\to\mathrm{P}(A)$.
- 上连续性: 若 $A_n\downarrow A$, 则 $\mathrm{P}(A_n)\to\mathrm{P}(A)$.
- σ-次可加性: $\mathrm{P}(\cup_{k=1}^{\infty}A_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_k)$.
- 连续性: 若 $A_n\to A$, 则 $\mathrm{P}(A_n)\to\mathrm{P}(A)$. 更一般地,

$$\mathrm{P}(\liminf A_n)\le\liminf\mathrm{P}(A_n)\le\limsup\mathrm{P}(A_n)\le\mathrm{P}(\limsup A_n).$$

概率空间

【例 2.1.3】(有限概率空间) 设 $\Omega=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ 为有限集，$\mathscr{F}=\mathscr{P}(\Omega)$. 设 $p_i\geq 0$, $i=1,\ldots,n$, 满足$\sum_{i=1}^n p_i=1$. 定义

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{j:w_j\in A}p_j,\quad A\in\mathscr{F},$$

则 P 为 $\mathscr{F}$ 上的一个概率.

※ 古典概型: $\mathrm{P}(\{w_i\})=1/n$, $i=1,\ldots,n$.

※ Bernoulli 概率空间: $\mathscr{F}=\{\emptyset,A,A^c,\Omega\}$,

$$\mathrm{P}(A)=p,\quad \mathrm{P}(A^c)=1-p.$$

概率空间

【例 2.1.4】(离散概率空间) 设 $\Omega = \{w_i, i \geq 1\}$ 为可数集, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. 设 $p_i \geq 0$, $i \geq 1$, 满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

定义

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{j: w_j \in A} p_j, \quad A \in \mathscr{F},$$

则 P 为 $\mathscr{F}$ 上的一个概率.

【例 2.2.1】 投掷均匀硬币 $2n+1$ 次，求正面出现的次数超过反面次数的概率.

【例 2.2.a】 有 $2n$ 人来自于 n 个班级，每班 2 人. 现将 $2n$ 人随机排列，求“有同班两人不相邻”(事件 A) 的概率.

解: 为求 $\mathrm{P}(A)$, 先求 $\mathrm{P}(A^c)$. 为计算 A^c 的有利场合，将每班两人作为一个单元，先排定 n 单元，再在同一单元内排列两人，因此，
$|A^c| = n!2^n$,

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - \frac{n!2^n}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

【例 2.2.2】 一盒中有 $n-1$ 个白球和 1 个黑球，每次从中取出一个球，并放入一个白球. 求“第 k 次取出的球为白球”(事件 A_k) 的概率.

解: 当 A_k 发生时，前 $k-1$ 次摸取的结果较为复杂，可以为白球也可以为黑球. 但是，A_k^c 对应的情形简单，第 k 次取出的球为黑球，前 $k-1$ 次取出的皆为白球, 所以

$$\mathrm{P}\left(A_k^c\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1},$$

$$\mathrm{P}\left(A_k\right)=1-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}.$$

【例 2.2.4】 (无空盒问题) 将 m 个不同的小球等可能地放入 n 个不同的盒子, $m>n$, 试求“无空盒出现”(事件 B) 的概率.

解: 以 A_k 表示第 k 盒为空的事件, 则 $B^c=\bigcup_{i=1}^n A_i$. 对任意 $j_1<j_2<\cdots<j_k$,

$$\mathrm{P}\left(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}\right)=\frac{(n-k)^m}{n^m}=\left(1-\frac{k}{n}\right)^m.$$

代入概率加法公式得

$$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=1-\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}\left(1-\frac{i}{n}\right)^m.$$

【例 2.2.7】 (配对问题) 两副卡片各 n 张, 分别编号为 $1, 2, \ldots, n$. 现分别清洗成两摞. 如果两摞中相应位置的卡片号码相同，则称出现一个配对. 试求“至少出现一个配对” (事件 A) 的概率.

解: 将其中的一副卡片完全固定 (参照对象)，不妨设第一副卡片按编号顺序依次排列. 以 A_k 表示第二副卡片中第 k 位置的卡片配对事件, 则对 $\forall 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

于是,

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}.$$

【例 2.2.8】(配对问题续) 随机将 n 份通知装入 n 个信封, 求 “恰有 k 份通知正确装入信封” (事件 E_k) 的概率.

解: 以 D_k 表示某给定的 $n-k$ 个信封和通知信没有正确匹配的事件, 则

$$\mathrm{P}\left(D_k\right) = \frac{|D_k|}{(n-k)!} = \sum_{i=2}^{n-k}(-1)^i \frac{1}{i!},$$

于是

$$|D_k| = (n-k)!\mathrm{P}\left(D_k\right) = (n-k)!\sum_{i=2}^{n-k}(-1)^i \frac{1}{i!}.$$

注意到 $|E_k| = \binom{n}{k}|D_k|$, 于是

$$\mathrm{P}\left(E_k\right) = \frac{|E_k|}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=2}^{n-k}(-1)^i \frac{1}{i!}.$$

条件概率即在一定条件下的概率，今后特指在某个事件已发生的条件下另外一个事件的概率.

▶ 定义 2.3.1 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 为概率空间, $A, B \in \mathscr{F}$ 满足 $\mathrm{P}(A) > 0$, 则给定 A, 事件 B 的条件概率定义为

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}.$$

※ 证明: $\mathrm{P}(\cdot|A)$ 为 $\mathscr{F}$ 上的一个概率.

※ 定义合理性：在古典概率模型中，

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{|AB|}{|A|} = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(A)}.$$

计算条件概率 $\mathrm{P}(B|A)$ 有两种方法.

【例 2.3.3】 一个盒子中有 7 个白球和 3 个黑球, 从中无放回地随机摸取三个球，已知“其中之一为黑球”(事件 A)，求“其余两球都是白球”(事件 B) 的概率.

解法一: 在原概率空间中考虑，$|\Omega=\binom{10}{3}|$, $|B|=\binom{7}{2}\binom{3}{1}=63$, $|A^c|=\binom{7}{3}$, 于是 $|A|=|\Omega|-|A^c|=\binom{10}{3}-\binom{7}{3}=85$,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{85}{\binom{10}{3}},\quad \mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{63}{\binom{10}{3}},$$

因此，$\mathrm{P}(B|A)=63/85$.

解法二: 直接以上面的 A 作为概率空间,

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{|AB|}{|A|}=\frac{|B|}{|A|}=\frac{63}{85}.$$

- 对任意 $A, B \in \mathscr{F}$, 满足 $\mathrm{P}(A) > 0$, 则

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B).$$

- 定理 (概率乘法定理) 对于任意 n 个事件 $A_1, \ldots, A_n$, 有

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2|A_1)\cdots\mathrm{P}(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

【例 2.3.4】 将 n 根绳的 $2n$ 个端头任意连接, 求 “恰好连接成 n 个圈” (事件 A) 的概率.

解: 将 n 根绳分别编号为 $1, 2, \ldots, n$, 以 A_k 表示 “第 k 根绳接成一个圈” 的事件, 则 $A = A_1 A_2 \cdots A_n$. 引进等价机制, 求得

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{1}{2n-1}.$$

类似地, $\mathrm{P}(A_2|A_1) = 1/(2n-3)$. 对 $\forall\, k = 3, \ldots, n$,

$$\mathrm{P}(A_k|A_1 A_2 \cdots A_{k-1}) = \frac{1}{2n-2(k-1)-1} = \frac{1}{2n-2k+1},$$

因此,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

全概率公式与 Bayes 公式

- 分割或完备事件组: $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$（有限、无限情形）
- 全概率公式: 设 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ 为 Ω 的一个分割（有限或无限），满足 $\mathrm{P}(A_i) > 0$, $i \geq 1$, 则

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B|A_i)\mathrm{P}(A_i).$$

※ 全概率公式体现了概率里面的两步走的思想.

※ 在全概率公式中, 可视 B 为结果, $\{A_1, \ldots, A_n\}$ 是影响 B 是否发生的原因.

- Bayes 公式: 设 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ 为 Ω 的一个分割 (有限或无限), 满足 $\mathrm{P}(A_i) > 0$, $i \geq 1$. 若事件 B 满足 $\mathrm{P}(B) > 0$, 则

$$\mathrm{P}(A_k|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(B|A_i)\mathrm{P}(A_i)}.$$

※ 在 Bayes 公式中, 可视 B 为结果, $\{A_1, \ldots, A_n\}$ 是影响 B 是否发生的原因:

$$\{\mathrm{P}(A_1), \ldots, \mathrm{P}(A_n)\} \text{ 表示先验信息,}$$

$$\{\mathrm{P}(A_1|B), \ldots, \mathrm{P}(A_n|B)\} \text{ 表示后验信息.}$$

【例 2.3.7】 第一盒中有 7 个红球、2 个白球和 3 个黑球，第二盒中有 5 个红球、4 个白球和 3 个黑球. 现从第一个盒子中随机取出一个放入第二盒，再从第二盒中再随机取出一个球.

(1) 求“从第二盒中取出的球为红球”(事件 B) 概率;

(2) 给定 B 发生，求第一盒中取出红球的概率.

解: 以 A_1, A_2, A_3 分别记从第一盒中取出红球、白球和黑球的事件，则

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{7}{12}, \quad \mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{6} \quad \mathrm{P}(A_3) = \frac{3}{12},$$

且

$$\mathrm{P}(B|A_1) = \frac{6}{13}, \quad \mathrm{P}(B|A_2) = \frac{5}{13}, \quad \mathrm{P}(B|A_3) = \frac{5}{13}.$$

于是 $\mathrm{P}(B) = 67/156$, $\mathrm{P}(A_1|B) = 42/67$. ∎

【例 2.3.8】 一厂三车间生产同一产品，产量各占总产量的 1/2, 1/3 和 1/6, 次品率分别为 1%, 1% 和 2%. 现从该厂产品中随机抽取一件，发现是次品，求该次品是一号车间生产的概率.

解: 以 B 表示取出的产品为次品的事件，A_i 表该产品取自第 i 车间，则

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(A_3) = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(B|A_1) = 0.01 = \mathrm{P}(B|A_2), \quad \mathrm{P}(B|A_3) = 0.02.$$

于是 $\mathrm{P}(B) \approx 0.0117$, $\mathrm{P}(A_1|B) \approx 0.427$. ▮

【例 2.3.10】 一枚质地均匀的硬币，甲抛掷 2019 次，乙抛掷 2018 次. 试求甲抛出的正面次数比乙多的概率.

解法一：以 A_0, A_1 和 A_2 分别表示在各抛掷 2018 次情形下甲抛出的正面次数跟乙一样多、甲比乙多、甲比乙少的事件，则

$$\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_0) = 1, \quad \mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2).$$

现假设甲抛掷 2019 次，乙抛掷 2018 次. 以 E 表示“甲抛出的正面次数比乙多”的事件. 记 D 表示“甲首次抛出正面”，则

$$[E|D] = A_0 + A_1, \qquad [E|D^c] = A_1,$$

所以由全概率公式知

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E) &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{P}(A_0) + \mathrm{P}(A_1)\Big] + \frac{1}{2}\mathrm{P}(A_1) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{P}(A_0) + \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2)\Big] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【例 2.3.10】 一枚质地均匀的硬币，甲抛掷 2019 次，乙抛掷 2018 次. 试求甲抛出的正面次数比乙多的概率.

解法二: 记 X_1, X_0 分别表示甲抛出正面和反面的次数， 记 Y_1, Y_0 分别表示乙抛出正面和反面的次数，则

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(X_1 > Y_1\right) + \mathrm{P}\left(X_1 \leq Y_1\right) = 1, \\
&\mathrm{P}\left(X_1 > Y_1\right) = \mathrm{P}\left(X_0 \leq Y_0\right), \\
&\mathrm{P}\left(X_0 \leq Y_0\right) = \mathrm{P}\left(X_1 \leq Y_1\right),
\end{aligned}
$$

其中最后一等式利用正、反面的对称性. 于是，$\mathrm{P}\left(X_1 \leq Y_1\right) = 1/2$. 因此，$\mathrm{P}\left(X_1 > Y_1\right) = 1/2$. ∎

※ 本题可以拓展为：甲抛掷 $n+1$ 次，乙抛掷 n 次，$n \geq 1$.

【例 2.3.11】 (向后方法) 一盒中有 a 个白球和 b 个黑球，每次从盒中随机取一个球，并连同 c 个同色球一起放回盒中，如此反复. 记 A_n 为事件"第 n 次取出白球". 证明:

$$\mathrm{P}(A_n) = \frac{a}{a+b}.$$

解: 用归纳法证明. 假设对 $n=k-1$ 成立，欲证结论对 $n=k$ 成立. 对第一次取球的结果取条件，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_k) &= \mathrm{P}(A_k|A_1)\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_k|A_1^c)\mathrm{P}(A_1^c) \\
&= \frac{a+c}{a+c+b}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c+b}\cdot\frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

证毕. ∎

【例 2.3.13】 (向后方法) 包含甲、乙两人在内的 2^n 名乒乓球选手参加一场淘汰赛. 第一轮两两任意配对比赛, 然后 2^{n-1} 名优胜者再两两任意配对进行第二轮比赛, 如此下去, 直至第 n 轮决出一名冠军为止. 假定每名选手在各轮比赛中胜负都是等可能的. 记

A_n 为"求甲、乙两人在这场比赛中相遇"事件,

求 $p_n = \mathrm{P}(A_n)$.

解: 以 B 记事件"甲、乙两人在第一轮相遇", 且记 $q_n = \mathrm{P}(B)$.
当 $n = 1$ 时, $p_1 = q_1 = 1$.
当 $n = 2$ 时, $q_2 = 1/3$（无编号分组模式）, $\mathrm{P}(A_2|B^c) = 1/4$,

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_2|B)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A_2|B^c)\mathrm{P}(B^c) \\ &= q_2 + \mathrm{P}(A_2|B^c)(1 - q_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

现归纳证明:

$$p_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1. \qquad (*.1)$$

(续) 假设当 $n=k\geq 2$ 时, (*.1) 正确. 于是，当 $n=k+1$ 时

$$\mathrm{P}\left(A_{k+1}|B^c\right)=\frac{1}{4}p_k,$$

为求 q_{k+1}, 考虑分组问题 (组之间有序), 于是

$$|\Omega|=\frac{(2^{k+1})!}{2^{2^k}},\qquad |B|=\frac{(2^{k+1}-2)!}{2^{2^k-1}}(2^k).$$

于是,

$$q_{k+1}=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{1}{2^{k+1}-1}.$$

因此,

$$\begin{aligned}p_{k+1}&=\mathrm{P}\left(A_{k+1}|B\right)\mathrm{P}\left(B\right)+\mathrm{P}\left(A_{k+1}|B^c\right)\mathrm{P}\left(B^c\right)\\&=q_{k+1}+\mathrm{P}\left(A_{k+1}|B^c\right)(1-q_{k+1})\\&=\frac{1}{2^{k+1}-1}+\frac{1}{2^{k+1}}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)=\frac{1}{2^k}.\end{aligned}$$

利用归纳法得证 (*.1). ∎

求概率的递推方法—向前和向后方法

【例 2.4.1】 甲乙两人轮流抛掷一枚均匀的骰子，甲先掷，一直到掷出 1 点后交给乙掷；乙一直到掷出 1 点后交给甲掷；如此往复. 记 A_n 为事件“第 n 次抛掷是甲掷”，求 $p_n = \mathrm{P}(A_n)$.

解法一 (向前法): 对第 $n-1$ 次的投掷者取条件,

$$\mathrm{P}(A_n|A_{n-1}) = \frac{5}{6}, \quad \mathrm{P}(A_n|A_{n-1}^c) = \frac{1}{6},$$

$$p_n = \mathrm{P}(A_n|A_{n-1})\mathrm{P}(A_{n-1}) + \mathrm{P}(A_n|A_{n-1}^c)\mathrm{P}(A_{n-1}^c) = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{6}.$$

$$\Longrightarrow \quad p_n - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right), \quad n \geq 2.$$

利用初值条件 $p_1 = 1$, 得

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Longrightarrow \quad p_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

【例 2.4.1】 甲乙两人轮流抛掷一枚均匀的骰子，甲先掷，一直到掷出 1 点后交给乙掷；乙一直到掷出 1 点后交给甲掷；如此往复. 记 A_n 为事件“第 n 次抛掷是甲掷”，求 $p_n = \mathrm{P}(A_n)$.

解法二 (向后法): 以 B 表示第一次掷出点 1 的事件，对第一次的投掷结果取条件，得

$$\mathrm{P}(A_n|B) = 1 - p_{n-1}, \quad \mathrm{P}(A_n|B^c) = p_{n-1}.$$

于是由全概率公式

$$\begin{aligned} p_n &= \mathrm{P}(A_n|B)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A_n|B^c)\mathrm{P}(B^c) \\ &= \frac{1}{6}(1 - p_{n-1}) + \frac{5}{6}p_{n-1} = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

余下同前. ∎

【例 2.4.2】 将 n 根绳的 $2n$ 个端头任意连接，求“恰好连接成 n 个圈”(事件 A_n) 的概率.

解: 记 $p_n = \mathrm{P}(A_n)$, 再以 B 表示第一根绳两端连成一个圈的事件. 易知

$$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2n-1}, \quad \mathrm{P}(A_n|B) = \mathrm{P}(A_{n-1}) = p_{n-1}, \quad \mathrm{P}(A_n|B^c) = 0,$$

于是由全概率公式得

$$p_n = \mathrm{P}(A_n|B)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A_n|B^c)\mathrm{P}(B^c) = \frac{1}{2n-1}p_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

利用初值条件 $p_1 = 1$ 递推得

$$p_n = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

【例 2.4.a】 设 n 个签中有 m 个标有“中”，现无放回依次随机抽签，记 A_j 为事件“第 j 次抽到‘中’”，$j=1,\ldots,n$.

(1) 求 $\mathrm{P}(A_j)$;

(2) 求 $\mathrm{P}(A_iA_j)$, $i<j$;

(3) 求 $\mathrm{P}(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k})$, 其中 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$.

解: (2) 对 i 应用归纳法并结合向后方法证明:

$$\mathrm{P}(A_iA_j)=\frac{m(m-1)}{n(n-1)},\quad i<j. \qquad (*.2)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$. 当 $i+1<j$ 时,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_{i+1}A_j) &= \mathrm{P}(A_{i+1}A_j|A_1)\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_{i+1}A_j|A_1^c)\mathrm{P}(A_1^c)\\ &= \frac{(m-1)(m-2)}{(n-1)(n-2)}\cdot\frac{m}{n}+\frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}\cdot\frac{n-m}{n}\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$

【例 2.4.b】 设计方案调查服用兴奋剂的运动员占全体运动员的比例 p

调查人员先请被调查者在心目中选定一个整数（不说出），然后请他在下面的问卷中回答“是”或“否”：

> 当你选的数最后一位是奇数，请回答：你选的是奇数吗？
>
> 当你选的数最后一位是偶数，请回答：你服用过兴奋剂吗？
>
> □ 是　　　　□ 否

没有人知道被调查者回答的是哪个问题，更不知道他是否服用过兴奋剂. 假设运动员们随机选定数字，并能按要求回答问题. 当回答“是”的概率为 p_1 时，求 p

解: 对任一个运动员, 用 B 表示"该运动员回答'是'"的事件, 用 A 表示"该运动员选到奇数", 则

$$\mathrm{P}(A) = 1/2 = \mathrm{P}(A^c), \quad \mathrm{P}(B|A) = 1, \quad \mathrm{P}(B|A^c) = p.$$

于是,

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathrm{P}(B) \\ &= \mathrm{P}(B|A)\cdot\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B|A^c)\cdot\mathrm{P}(A^c) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p, \end{aligned}$$

因此,

$$p = 2p_1 - 1. \tag{$*$.3}$$

【例 2.4.c】(续):

在实际中, p_1 是未知的, 但可以估计. 假设调查了 n 个运动员, 其中有 k 个回答“是”, 则 p_1 的估计为

$$\widehat{p}_1 = \frac{k}{n}.$$

于是 p 的估计为

$$\widehat{p} = 2\,\widehat{p}_1 - 1. \qquad (*.3)$$

例如: 如果调查 200 个运动员, 其中 115 个回答“是”, 于是

$$\widehat{p} = 2 \times \frac{115}{200} - 1 = 15\%.$$

※ 上面的 $\widehat{p} = 15\%$ 与下面直观是一致的: 200 个人中约有一半人是因为选中奇数而回答“是”, 余下的一半人中回答“是”的人是服用过兴奋剂. 于是

$$\widehat{p} = \frac{115 - 100}{100} = 15\%.$$

- 定义 2.5.1 事件 A 和 B 相互独立（简称独立），若

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

※ 定义合理性 (直观分析)：A 与 B 独立意味着 A 发生与否对 B 的发生没有影响；或者 B 发生与否对 A 的发生没有影响. 可以如下表达：

$$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B|A^c) = \mathrm{P}(B);$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B^c) = \mathrm{P}(A).$$

※ 若 A 与 B 独立，则 A 与 B^c, A^c 与 B 以及 A^c 与 B^c 分别独立.

※ 概念差异：事件独立与事件互斥

§2.5 事件独立性

▶ 定义 2.5.1 事件 A 和 B 相互独立（简称独立），若

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

※ 定义合理性 (直观分析)：A 与 B 独立意味着 A 发生与否对 B 的发生没有影响；或者 B 发生与否对 A 的发生没有影响. 可以如下表达：

$$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B|A^c) = \mathrm{P}(B);$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B^c) = \mathrm{P}(A).$$

※ 若 A 与 B 独立，则 A 与 B^c, A^c 与 B 以及 A^c 与 B^c 分别独立.

※ 概念差异：事件独立与事件互斥

设 $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B) \in (0,1)$, 条件概率可以反映事件 A 与 B 之间的关系:

- $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$ 说明 A 与 B 相互独立.
- $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B)$ 说明 A 的发生更易于诱导 B 发生, A 与 B 有同向关系, 于是 A^c 与 B^c 有同向关系. 于是,

$$\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B) \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{P}(B^c|A^c) > \mathrm{P}(B^c), \\ \mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A), \\ \mathrm{P}(A^c|B^c) > \mathrm{P}(A^c). \end{cases}$$

- 类似,

$$\mathrm{P}(B|A) < \mathrm{P}(B) \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{P}(B^c|A^c) < \mathrm{P}(B^c), \\ \mathrm{P}(A|B) < \mathrm{P}(A), \\ \mathrm{P}(A^c|B^c) < \mathrm{P}(A^c). \end{cases}$$

※ 事件的独立性是与概率空间的选择有关.

【例 2.5.3】 在概率空间 $([0,1),\mathscr{B}([0,1)),L)$ 中，事件 $A=[0,1/2)$ 与 $B=[1/4,3/4)$ 独立，其中 L 对应区间等长度等可能.

【例 2.5.4】 在概率空间 $([0,1),\mathscr{B}([0,1)),\mathrm{P})$ 中，事件 $A=[0,1/2)$ 与 $B=[1/4,3/4)$ 不独立，其中 P 定义为

$$\mathrm{P}(E)=\sum_{k:1/2^k\in E}\frac{1}{2^k},\quad E\in\mathscr{B}([0,1)).$$

容易计算

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\quad \mathrm{P}(AB)=\frac{1}{4}.$$

※ 代数不等式的概率证明方法.

【例 2.5.6】 设 $0 \le \alpha \le \pi/2$, 证明:

$$0 \le \sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \le 1.$$

证明: 注意到 $\sin\alpha, \cos\alpha \in [0,1]$, 故二者可以看作某事件的概率. 设事件 A, B 相互独立, 满足

$$\mathrm{P}(A) = \sin\alpha, \qquad \mathrm{P}(B) = \cos\alpha.$$

于是,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) \\ &= \sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \in [0,1]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

▶ 定义 2.5.2 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的相互独立，若对 $\forall 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le n$, $2 \le m \le n$,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{j_k}\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathrm{P}\left(A_{j_k}\right).$$

※ 性质 1: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立蕴涵 $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_n$ 相互独立，其中 $\widehat{A}_i = A_i$ 或 A_i^c.

※ 性质 2: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立蕴涵 $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}$ 独立，其中 $1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n$.

※ 术语: 一列事件 $\{A_n, n \ge 1\}$ 的相互独立性

※ 术语: 事件两两独立、事件两两互斥

※ 事件的两两独立性不能蕴涵事件的独立性

【例 2.5.8】 在概率空间 $((0,1),\mathscr{B}((0,1)),L)$ 中，事件

$$A_1=\left(0,\frac{1}{2}\right),\quad A_2=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\quad A_3=\left(\frac{1}{16},\frac{5}{16}\right)\cup\left(\frac{9}{16},\frac{13}{16}\right)$$

两两独立, 但非相互独立.

【例 2.5.a】 一个盒子中有 4 个小球, 有 3 个小球分别标有号码 1,2,3, 另一个小球上有号码 1,2,3 三个数字. 现从盒子中任意摸取一个小球, 以 A_i 表示事件“取出小球上有号码 i”, 则 A_1,A_2,A_3 两两独立, 但非相互独立.

【例 2.5.b】 抛掷三个质地均匀的骰子, 以 A 记事件“第一和第二骰子掷出的点数相同”, 以 B 记事件“第一和第三骰子掷出的点数相同”, 以 C 记事件“第二和第三骰子掷出的点数相同”, 则 A,B,C 两两独立, 但非相互独立.

- 利用独立性来求复杂事件的概率：设 $A_1, \ldots, A_n$ 相互独立，则

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i),$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - \mathrm{P}(A_i)].$$

※ 小概率原则： 事件 A 发生的概率为 $\epsilon > 0$，充分小. 现进行无限次试验，以观察事件 A 是否发生，则事件 A 必然发生.

※ 代数不等式的概率证明方法.

【例 2.5.10】 设 $a, b, c > 1$, 证明:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}-\frac{1}{a^2bc}-\frac{1}{b^2ca}-\frac{1}{c^2ab}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\leq 1.$$

证明: 注意到 $ab, ac, bc > 1$, 设事件 A, B, C 相互独立, 满足

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{ab},\qquad \mathrm{P}(B)=\frac{1}{bc},\qquad \mathrm{P}(C)=\frac{1}{ac}.$$

于是, 由

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B\cup C) &= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(AB)-\mathrm{P}(BC)\\ &\quad -\mathrm{P}(AC)+\mathrm{P}(ABC)\end{aligned}$$

展开得证. ∎

※ 代数不等式的概率证明方法.

【例 2.5.11】 设 a, b, c 为一个三角形的三条边长, 满足 $a+b+c=1$, 证明:

$$a^2+b^2+c^2+4abc \le \frac{1}{2}.$$

证明: 注意到 $2a, 2b, 2c \in (0,1)$, 设事件 A, B, C 相互独立, 满足

$$\mathrm{P}(A)=2a, \qquad \mathrm{P}(B)=2b, \qquad \mathrm{P}(C)=2c.$$

于是, 由

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A\cup B\cup C) &= 2(a+b+c)-4(ab+ac+bc)+8abc \\ &= 2-2(1-a^2-b^2-c^2)+8abc \le 1 \end{aligned}$$

得证. ∎

【例 2.5.14】 求复杂系统的可靠性 (系统正常工作的概率):

(1) 串联系统;

(2) 并联系统;

(3) 串并联系统;

(4) 并串联系统;

(5) 桥式系统.

这里假设系统里每个元件独立工作, 每个元件正常工作的概率为 p.

作业

第 2 章第一次作业

§2.1: 1, 4, 5, 7, 11

§2.2: 9, 10, 13, 16

第 2 章第二次作业

§2.3: 2, 5, 6, 12, 14, 15, 18

第 2 章第三次作业

§2.4: 9, 11, 13, 16

§2.5: 4, 12, 21