# 概率论

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥

2023 年 9 月

# 第 3 章　随机变量

| | | |
|---|---|---|
| 随机事件 | $\longrightarrow$ | 随机变量 |
| 从静态的观点研究随机现象 | $\longrightarrow$ | 从动态的观点研究随机现象 |

- 基本概念（cdf, pmf, pdf）
- 常见分布对应的概率模型
- 随机变量的若干变换

随机变量的直观解释：$X:\Omega\to\Re$, 按普通函数 $X(w)$ 来理解.

随机变量的严格定义：$X:\Omega\to\Re$, 可测函数.

---

- 随机变量是大量存在的，常用大写字母表示.
- 随机事件这一概念包含于随机变量这一更广的概念中：事件 $A\longrightarrow I_A$.
- 随机变量分类：离散型与连续型

  ⊛ 离散型与连续型的区分是相对的，连续型随机变量只是一种数学抽象.

概率空间：$(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$

- Bernoulli 随机变量或示性随机变量： $X = I_A$，其中 $A \in \mathscr{A}$.

$$\mathrm{P}(X=1) = \mathrm{P}(A) = p, \quad \mathrm{P}(X=0) = \mathrm{P}(A^c) = 1-p = q$$

给出了 $X$ 的分布规律，称之为 Bernoulli 分布. 有时记为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

- 两点分布的变量：

$$X = aI_A + bI_{A^c},$$

其中 $A \in \mathscr{A}$, $a, b$ 为两个不同的常数. 设 $\mathrm{P}(A) = p$, 则 $X$ 的分布律称为是两点分布，有时记为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix}.$$

- 阶梯随机变量：

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i},$$

其中 $\{A_i, i = 1, \ldots, n\}$ 为 $\Omega$ 的一个有限分割，$\{a_i, i = 1, \ldots, n\}$ 为不同的常数.

⊛ 分布律 $\mathrm{P}(X = a_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$, 及其表示.

⊛ 更一般的可列分割对应的阶梯随机变量

- 离散型随机变量 $X$:

$X$ 取值于 $\{a_i, i \geq 1\}$, pmf 函数的引进以及分布的表示.

---

※ 离散型随机变量与有限（可列）分割导出的阶梯随机变量一一对应

【例 3.1.a】 离散均匀分布

一盒中有 $n$ 个小球, 其中 $n-1$ 个白球, 1 个黑球, $n \geq 2$. 现把球逐个取出来, 直到取出黑球为止. 记 $X$ 为取出黑球所需要的取球次数.

---

解: $X$ 取值于 $\{1, 2, \ldots, n\}$. 对任意 $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

[对小球进行编号, 全排列. $|\Omega| = n!$, $|\{X = k\}| = (n-1)!$].

【例 3.1.b】 抛掷两颗均匀的骰子，抛出的点数之和记为 $X$, 则 $X$ 的分布律为

| 可能值 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\cdots$ | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 概率 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\cdots$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

【例 3.1.c】 相互独立的 Bernoulli 随机变量之和：

$$X = I_{A_1} + I_{A_2},$$

其中 $A_1, A_2$ 相互独立. 记 $p_i = \mathrm{P}(A_i) = 1 - q_i$, 则 $X$ 的分布律为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q_1 q_2 & p_1 q_2 + p_2 q_1 & p_1 p_2 \end{pmatrix}.$$

【例 3.1.5】 相互独立的 Bernoulli 随机变量之和：

$$X = I_{A_1} + I_{A_2} + I_{A_3},$$

其中 $A_1, A_2, A_3$ 为相互独立的事件. 记

$$p = \mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_3), \quad q = 1 - p,$$

则 $X$ 的分布律为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ q^3 & 3pq^2 & 3qp^2 & p^3 \end{pmatrix}.$$

概念：Bernoulli 随机试验；成功；多重 Bernoulli 随机试验

▶ 二项分布随机变量

- 概率模型：$n$ 次独立重复 Bernoulli 随机试验，每次试验成功的概率为 $p$, 记 $X$ 为试验成功的总次数.
- 概率模型的数学描述：在概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 中，有 $n$ 个相互独立的事件 $A_1, \ldots, A_n$, 满足 $\mathrm{P}(A_i) = p$, $i = 1, \ldots, n$, 记

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}$$

则 $X$ 的分布记为二项分布，

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

记为 $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.

⊛ 背景与应用— 产品质量抽检:

有一堆产品 $N$ 个, 废品率为 $p$, 从中抽取 $n$ 次，记录废品个数 $X$.

- 若有放回抽样，则 $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.
- 若无放回抽样，且 $N$ 很大，则 $X$ 近似服从 $\mathrm{B}(n, p)$.

⊛ pmf 单调性: 设 $X \sim B(n, p)$, 记

$$b(k; n, p) = \mathrm{P}\left(X = k\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

$\mathrm{B}(n, p)$ 的 pmf $b(k; n, p)$ 先递增再递减.

$$\frac{b(k; n, p)}{b(k-1; n, p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}.$$

当 $k = (n+1)p$ 为整数时，$b(k; n, p) = b(k-1; n, p)$; 当 $(n+1)p$ 非整数时, 其最大值点是 $k = [(n+1)p]$.

【例 3.2.2】 一选手射击目标的命中率为 $p = 0.8$, 共射击 10 次，求他最大可能的命中次数.

解: 最大可能次数

$$[(n+1)p] = [8.8] = 8.$$

【例 3.2.3】 连续抛掷均匀硬币 $2n$ 次，求抛出正面的的最大可能次数.

解: 最大可能次数

$$[(2n+1)p] = \left[\frac{2n+1}{2}\right] = n.$$

此时,

$$b(n; 2n, 1/2) = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

---

⊛ Stirling 公式:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

- 几何分布随机变量

考虑独立重复试验, 在任一次试验中 "成功" 发生的概率为 $p \in (0,1)$.

- 概率模型 1: 等待首次 "成功" 发生时之前 "失败" 的次数 $X$, 则

$$\mathrm{P}(X=k)=p(1-p)^k, \quad k=0,1,\dots,$$

记 $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

- 概率模型 2: 等待首次 "成功" 发生所需试验次数 $X^*$, 则

$$\mathrm{P}(X^*=k)=p(1-p)^{k-1}, \quad k=1,2,\dots,$$

记 $X^* \sim \mathrm{Geo}^*(p)$.

- 几何分布无记忆性
  - $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ 当且仅当

$$\mathrm{P}\left(X - k \geq n | X \geq k\right) = \mathrm{P}\left(X \geq n\right), \quad k, n = 0, 1, \ldots$$

或等价于

$$\mathrm{P}\left(X - k = n | X \geq k\right) = \mathrm{P}\left(X = n\right), \quad k, n = 1, 2, \ldots.$$

  - $X^* \sim \mathrm{Geo}^*(p)$ 当且仅当

$$\mathrm{P}\left(X^* - k > n | X^* > k\right) = \mathrm{P}\left(X^* > n\right), \quad k, n = 1, 2, \ldots;$$

$$\mathrm{P}\left(X^* - k = n | X^* > k\right) = \mathrm{P}\left(X^* = n\right), \quad k, n = 1, 2, \ldots.$$

【例 3.1.3】 几何分布

一个盒子中有 $n$ 个白球，1 个黑球，每次从盒中取出一个球，并放入一个白色球，直至取出黑球为止，记 $X$ 为在取出黑球前所取白球次数.

---

解: $X$ 取值于 $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. 对任意 $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

[将球进行编号, 采用排列. $|\Omega| = (n+1)^k$, $|\{X = k\}| = n^k$], 即

$$X \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

※ 如何对应到几何分布概率模型?

【例 3.2.6】如何理解“在独立重复试验中小概率事件迟早要发生”？

解: 记 $X^*$ 为小概率事件发生的时刻, 则 $X^* \sim \mathrm{Geo}^*(p)$, 小概率事件迟早要发生的概率为

$$\mathrm{P}\left(X^* < +\infty\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X^* = k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = 1.$$

【例 3.2.7】100 张签中有 5 张可以中奖, 三人参加抽签, 每人抽取一张. 试对有放回抽样, 求有人中签的概率 $P$.

解：独立重复试验, $X \sim \mathrm{Geo}^*(0.05)$, 所求概率

$$P = \mathrm{P}\left(X \le 3\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X > 3\right) = 1 - 0.95^3.$$

- 负二项分布（Pascal 分布）
  - 概率模型: 考虑独立重复试验, 每次试验中发生成功的概率为 $p$. 等待第 $r$ 个成功发生之前失败的次数记为 $X$, 所需要的试验总次数记为 $X^*$.
  - $X \sim \mathrm{NB}(r,p)$, 参数为 $(r,p)$ 的负二项分布

$$p_n = \mathrm{P}\left(X=n\right) = \binom{n+r-1}{n} p^r (1-p)^n, \quad n \geq 0.$$

  - $X^* = X + r$ 也称为服从参数为 $(r,p)$ 的负二项分布,

$$\mathrm{P}\left(X^*=n\right) = \binom{n-1}{n-r} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n \geq r.$$

⊛ $\{p_n, n \geq 0\}$ 为一个 pmf, 因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} p^r q^n = p^r \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-r}{n} (-1)^n q^n \\ &= p^r (1-q)^{-r} = 1,\end{aligned}$$

其中对任意非负整数 $m$ 和任意 $\alpha \in \Re$,

$$\binom{\alpha}{m} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}$$

[此时 $\binom{\alpha}{m}$ 不能写成 $\binom{\alpha}{\alpha-m}$, 因为当 $\alpha$ 非整数时后者没有定义] 以及

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\alpha}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} x^k, \quad |x| < 1.$$

- 当 $r$ 为整数时，$X \sim \mathrm{NB}(r, p)$ 分布又称为 Pascal 分布, $X$ 可以做如下分解

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r,$$

其中 $Y_1, \ldots, Y_n$ 为相互独立的 Geo$(p)$ 分布.

- 设 $0 < p < 1$, $\alpha > 0$ (实数), 以 $p, \alpha$ 为参数的一般负二项分布，NB$(\alpha, p)$, 对应的 pmf 为

$$p_k = \binom{\alpha + k - 1}{k} p^{\alpha}(1 - p)^k, \quad k \geq 0.$$

- $\mathrm{B}(n, p)$ 与 $\mathrm{NB}(r, p)$ 之间的比较

【例 3.2.8】 (Banach 火柴问题) 某人口袋放有 2 盒火柴，每盒各有 $n$ 根火柴，他每次用时随机地摸取一盒，并从中拿出一根火柴使用. 试求当他取出一盒发现已空，而此时另一盒中尚有 $r$ 根火柴的概率.

---

解: 先给两盒编号 1 和 2，摸取盒 1 称为成功，摸取盒 2 称为失败，记 $X$ 为等待第 $n+1$ 次成功之前失败的次数，则

$$X \sim \mathrm{NB}\left(n+1, \frac{1}{2}\right).$$

根据对称性所求的概率为

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{P}(X = n-r) &= 2\binom{n+1+(n-r)-1}{n-r}\frac{1}{2^{2n-r+1}} \\ &= 2\binom{2n-r}{n}2^{r-2n}. \end{aligned}$$

【例 3.2.9】 考虑独立重复试验，每次试验中成功事件发生概率为 $p$. 求第 $n$ 次成功发生在第 $m$ 次失败之前的概率.

---

解: 设 $X$ 表示第 $n$ 次成功发生时刻，则

$$X - n \sim \mathrm{NB}(n, p),$$

所求的概率为

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X - n \le m - 1) &= \sum_{k=n}^{m+n-1} \mathrm{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.
\end{aligned}$$

【例 3.2.10】 甲乙两人乒乓球比赛无平局，5 局 3 胜制，甲每局取胜概率为 $p$, $0 < p < 1$, 求甲最终胜的概率.

---

解: 假设进行多次比赛，以 $X$ 表示甲取胜 3 局的时刻，$X-3$ 表示乙取胜的局数，则

$$X - 3 \sim \mathrm{NB}(3, p),$$

所求概率为

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\,(X-3 \le 2) &= \sum_{k=3}^{5} \binom{k-1}{2} p^3 (1-p)^{k-3} \\ &= p^3 + 3p^3 q + 6p^3 q^2, \quad q = 1-p.\end{aligned}$$

- 随机变量

$$\begin{aligned} X:\ \Omega &\longrightarrow \Re \\ w &\longmapsto X(w) \end{aligned}$$

Borel 可测且几乎处处有限的映射.

- 分布函数 (Cumulative Distribution Function, cdf)

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X \le x\right), \quad x \in \Re,$$

其中 $\{X \le x\} = \{w \in \Omega : X(w) \le x\}$.

---

⊛ 设 $X \sim F$, 则

$$\{X \le a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{X \le a + \frac{1}{n}\right\}, \quad \{X < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X \le a - \frac{1}{n}\right\}.$$

⊛ cdf 三条基本性质: 单调增, 右连续及规范性 $[F(+\infty) = 1,\ F(-\infty) = 0]$

⊛ 设 $X \sim F$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=a) &= F(a)-F(a-), \\ \mathrm{P}(X<a) &= F(a-), \\ \mathrm{P}(a<X\le b) &= F(b)-F(a), \\ \mathrm{P}(a\le X<b) &= F(b-)-F(a-). \end{aligned}$$

⊛ cdf 的凸组合依然是 cdf, 即对任意 $\alpha_i \ge 0$, 满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$, 如果 $F_1,\ldots,F_n$ 为 cdf, 则

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k F_k(x)$$

也为 cdf. [利用全概率公式和随机表示来证明, 其中 $n\le+\infty$]

- 分布函数的逆
  - $F$ 的左逆：通常记为 $F^{-1}$,

$$\begin{aligned} F^{-1(0)}(p) &= \inf\left\{x \in \Re: \ F(x) \geq p\right\} \\ &= \sup\left\{x \in \Re: \ F(x) < p\right\}, \quad p \in (0,1). \end{aligned}$$

  - $F$ 的右逆：

$$\begin{aligned} F^{-1(1)}(p) &= \inf\left\{x \in \Re: \ F(x) > p\right\} \\ &= \sup\left\{x \in \Re: \ F(x) \leq p\right\}, \quad p \in (0,1). \end{aligned}$$

  - $F$ 的 $\alpha$-逆：对 $\forall\ \alpha \in (0,1)$, $p \in (0,1)$,

$$F^{-1(\alpha)}(p) = (1-\alpha)F^{-1(0)}(p) + \alpha F^{-1(1)}(p).$$

---

※ 分布函数的逆在 $p = 0, 1$ 两点需要单独定义

▶ 定理 3.3.2 设 $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ 满足单调增、右连续和规范性, 则 $F$ 为一个 cdf. 构造一个随机变量 $X$, 使其具有分布函数 $F$.

---

证: 首先，定义 $F$ 的左逆

$$F^{-1}(u)=\inf\{x:F(x)\geq u\},\quad \forall\, u\in(0,1).$$

利用 $F$ 的右连续性，易证 $F(F^{-1}(u))\geq u$. 据此，可证对 $\forall\, x\in\Re$,

$$F^{-1}(u)\leq x \Longleftrightarrow u\leq F(x).$$

设 $U\sim U(0,1)$, 定义 $X=F^{-1}(U)$. 因此，对 $\forall x\in\Re$,

$$\mathrm{P}\left(X\leq x\right)=\mathrm{P}\left(F^{-1}(U)\leq x\right)=\mathrm{P}\left(U\leq F(x)\right)=F(x),$$

即 $X\sim F$. ∎

- 离散型随机变量
  - pmf 与 cdf 的相互表达
  - cdf 的特点：阶梯函数
- 连续型随机变量
  - pdf 的定义
  - 一个函数 $f$ 为 pdf 的充分必要条件
  - pdf 的几何直观（此时假设 pdf 为连续函数）

---

⊛ 所谓的连续型分布函数即为绝对连续的分布函数，即在一个 Lebesgue 零测集之外，分布函数 $F$ 可导.

- 奇异连续随机变量

  奇异连续分布是指该分布对应的测度在 Lebesgue 零测集的余集上恒为零，即 $F$ 的导数几乎处处为零.

【例 3.3.2】(奇异连续 cdf) 先 $(0,1)$ 区间三等分，取中间开区间 $(1/3,2/3)$; 第 2 次将余下的两个区间分别 3 等分，各取中间的开区间；第 3 次再将余下的 4 个区间分别3等分，各取中间的开区间；余类推. 所取出的所有开区间之和构成的集合 $S$ 称为 Cantor 开集。在第一次取出的开区间上定义 $F$ 取 $1/2$；在第 2 次取出的开区间上定义 $F$ 分别为 $1/4$ 和 $3/4$; $\cdots\cdots$; 在第 $n$ 次取出的开区间上定义 $F$ 为一个分数，分母为 $2^n$, 分子依次为 $1,3,\ldots,2^n-1$. Cantor 集 $S$ 的 Lebesgue 测度为 1，在 $S^c$ 上根据右连续性定义 $F$ 的值. 于是 $F$ 的导数几乎处处为零，即 $F$ 为奇异连续cdf.

- **定理 3.3.a** 设 $X \sim F$, $F$ 连续且在任意有限区间 $(a,b)$ 中除去有限个点外有连续的导数, 则

$$f(x) = \begin{cases} F'(x), & \text{当 } F'(x) \text{ 存在时}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

为 $F$ 的 pdf.

---

证: 对 $\forall\, a < b$,设除去 $(a,b)$ 中有限个点 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b$ 外, $F'(x)$ 存在且有限. 记 $a_0 = a$, $a_{n+1} = b$, 则

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \mathrm{P}\left(X \in (a,b]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(a_k < X \le a_{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} [F(a_{k+1}) - F(a_k)] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

⊛ 在定理 3.3.a 中, “$F(x)$ 为连续函数” 不可去掉. 如果 $F$ 不是连续函数, 则 $F$ 无 pdf. 反例: 设

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-p, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

是 Bernoulli 分布 $B(1,p)$. 除点 0 和 1 以外, $F'(x) = 0$, 但 $F$ 无 pdf.

▶ 定理 3.3.b (Lebesgue 分解) 任意一个 cdf $F$ 可以作如下分解

$$F = a_1 F_{\rm d} + a_2 F_{\rm ac} + a_3 F_{\rm sc},$$

其中 $a_1, a_2, a_3$ 非负满足

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1,$$

$F_{\rm d}$ 为离散 cdf, $F_{\rm ac}$ 为绝对连续 cdf, $F_{\rm sc}$ 为奇异连续 cdf.

- Poisson 分布

  pmf; Poisson 分布的概率模型（描述稀有事件发生次数）

- 定理 3.4.1 (Poisson 分布逼近二项分布) 设 $X_n \sim \mathrm{B}(n, p_n)$, 其中

$$np_n \to \lambda > 0,$$

则对任意整数 $k \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(X_n = k\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

证: 注意到对任意整数 $k \geq 0$,

$$\mathrm{P}\left(X_n = k\right) = \underbrace{\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)(1-p_n)^{-k}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(np_n)^k}_{\to\lambda^k} \cdot \underbrace{(1-p_n)^n}_{\to e^{-\lambda}}.$$

【例 3.4.a】 从某个地区购买的元件废品率为 0.01, 因需要 100 个合格品，所以购买 $100+a$ 个元件，要使合格个数至少有 100 个的概率不小于 0.95, 问 $a$ 至少多大？

---

解：令 $X$ 为 $100+a$ 个元件中废品的个数，则 $X \sim \mathrm{B}(100+a, 0.01)$, 所求的 $a$ 要满足

$$\mathrm{P}\,(X \le a) \ge 0.95$$

利用

$$\mathrm{B}(100+a, 0.01) \approx \mathrm{Poisson}(1) \quad (\text{因为 } a \text{ 很小}),$$

所以

$$\mathrm{P}\,(X \le a) \approx \sum_{i=1}^{a} e^{-1}/i!.$$

当 $a = 0, 1, 2, 3$ 时，上式右端的概率分别为 0.368, 0.736, 0.920, 0.981, 所以 $a$ 至少要取 3. ∎

▶ Poisson 分布的性质：随机和

【例 3.4.b】 设 $\{I_j, j \geq 1\}$ 为 iid 的 Bernoulli 随机变量，$\mathrm{P}(I_1 = 1) = p$, 独立于 $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, 则

$$S = \sum_{j=1}^{N} I_j \sim \mathrm{Poisson}(p\lambda).$$

---

证: 对 $N$ 取条件，利用 $[S|N = n] \sim \mathrm{B}(n, p)$ 得，对任意 $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(S = k|N = n) \cdot \mathrm{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-p\lambda}(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

---

⊛ 给出上述模型的不同解释和应用.

- **Poisson 分布 pmf 的单调性**

  记 $\{p_\lambda(k), k \ge 0\}$ 为 Poisson 分布的 pmf, 则

$$\frac{p_\lambda(k)}{p_\lambda(k-1)} = \frac{\lambda}{k}, \quad k \ge 1. \tag{$*$.1}$$

  - 当 $k < \lambda$ 时, $p_\lambda(k) \uparrow_k$;
  - 当 $k > \lambda$ 时, $p_\lambda(k) \downarrow_k$;
  - $p_\lambda(k)$ 于 $k = [\lambda]$ 时达到最大;
  - 当 $\lambda$ 为正整数时, $p_\lambda(k)$ 于 $k = \lambda$ 和 $\lambda - 1$ 达到最大值.

---

⊛ 式 $(*.1)$ 是 Poisson 分布的一个刻画.

- 均匀分布 $X \sim U(a, b)$

【例 3.5.a】(见定义 3.2.3) 服从 $U(0,1)$ 分布的随机变量可以通过 iid 的 Bernoulli 随机变量序列来构造: 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim B(1, 1/2)$, 则

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n} \sim U(0,1).$$

---

证: 首先 $0 \leq Z \leq 1$. 欲证: $\mathrm{P}(Z \leq x) = x$, $\forall x \in (0,1)$. 为此，记

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k},$$

则 $Z_n \uparrow Z$, $\{Z_n \leq x\} \downarrow$, 于是

$$\{Z \leq x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{Z_k \leq x\} = \lim_{k \to \infty} \{Z_k \leq x\}.$$

(续) 利用概率的上连续性，得

$$\mathrm{P}(Z \le x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \le x).$$

注意到 $Z_n$ 有 $2^n$ 个不同的取值

$$\left\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\},$$

且 $Z_n$ 取每个值的概率分别为 $1/2^n$, 于是

$$\mathrm{P}(Z_n \le x) = \sum_{k\le 2^n x} \mathrm{P}\left(Z_n = \frac{k}{2^n}\right) = \frac{[2^n x]+1}{2^n} \longrightarrow x \ (n\to\infty).$$

- 正态分布 $N(a, \sigma^2)$
  - 概率密度（证明）
  - $N(0,1)$ pdf 和 cdf 记号 $\phi$ 和 $\Phi$
  - $N(a, \sigma^2)$ 的 pdf 图形性质（对称性、波动性）
  - 设 $X \sim N(a, \sigma^2)$, 则

$$\mathrm{P}\left(X \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \quad \frac{X-a}{\sigma} \sim N(0,1)$$

且

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(|X-a| \leq 3\sigma\right) = 0.9974 \quad (3\sigma \text{ 原则}),\\
&\mathrm{P}\left(|X-a| \leq \sigma\right) = 0.6827,\\
&\mathrm{P}\left(|X-a| \leq 2\sigma\right) = 0.9545.
\end{aligned}$$

- 寿命随机变量、寿命分布
- 失效率函数及直观解释: 设 $X \sim F$, $F(0-)=0$, pdf 为 $f$, 则失效率函数定义为

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)}, \quad \forall\, t \in [0, u_X),$$

其中 $u_X=\sup\{x : F(x)<1\}$, 且约定 $\lambda(t)=+\infty$, $t>u_X$.

- 失效率函数直观解释: 若 $\lambda(t)$ 于 $(0,u_X)$ 上连续, 则对任意 $t \in (0,u_X)$,

$$\mathrm{P}\left(X \in (t, t+\Delta t) | X>t\right)=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t).$$

- cdf 与失效率函数之间一一对应: 设 $F(0-)=0$, 则

$$\overline{F}(t)=\exp\left\{-\int_0^t \lambda(x)\,\mathrm{d}x\right\}, \quad t \geq 0.$$

- 指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$
  - 描述无老化现象的元件寿命
  - 无记忆性 (充分必要性)
  - 寿命分布的失效率函数定义及其解释;

    指数分布的失效率函数为常数;

    基于失效率函数为常数的指数分布刻画.

【例 3.5.b】一个随机服务系统有 2 个服务台，每个服务台给顾客提供的服务时间服从 Exp(λ) 分布. 服务规则是先到先服务，后到排队. 一个顾客被服务完毕，自行离开. 当一个顾客 C 到达系统时，发现顾客 A 和 B 正在不同的服务台接受服务，问这三个顾客中顾客 C 最后离开的概率有多大?

- 伽玛分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$
  - 伽玛分布 pdf $f(x)$ 的一般情形；

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

  - 当 $\alpha = n$ 为整数时，$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ 可分解为

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$

其中 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\beta)$.

  - 设 $X \sim \Gamma(n, \beta)$, 则其分布函数 $F$ 可表示为

$$F(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{e^{-\beta x}(\beta x)^k}{k!}, \quad x \geq 0.$$

- 卡方分布 $\chi_n^2$
  - $\chi_n^2$ 分布的定义
  - $\chi_n^2$ 分布的 pdf $f_n(x)$

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0;$$

  - 设 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 则 $2\lambda X \sim \chi_2^2$;
  - 设 $X \sim \Gamma(n/2, 1/2)$, 则 $X \sim \chi_n^2$.

### 3.6.1 特殊变换

- 限尾随机变量

设 $X$ 为 rv, $a < b$, 则

$$Y = \begin{cases} a, & X \le a \\ X, & a < X \le b \\ b, & X > b. \end{cases}$$

设 $X \sim F$, 则 $Y$ 的 cdf 为

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ F(x), & a \le x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

---

⊛ $Y$ 为混合型 rv, 在 $a, b$ 点有概率堆积.

- 切尾随机变量

设 $X$ 为 rv, $a < b$, 则

$$Y = \begin{cases} X, & a \le X \le b \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

特别，考虑 $a < 0 < b$. 设 $X \sim F$, 则 $Y$ 的 cdf 为

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \mathrm{P}\left(a \le X \le x\right) = F(x) - F(a-), & a \le x < 0, \\ \mathrm{P}\left(X \le x \text{ or } X > b\right) = F(x) + \overline{F}(b), & 0 \le x < b \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

---

⊛ $Y$ 为混合型 rv, 在 0 点有概率堆积

$$\mathrm{P}\left(Y = 0\right) = F(a-) + [F(0) - F(0-)] + \overline{F}(b).$$

- **定理 3.6.1** 设 $X \sim F$, $F$ 连续, 则 $Y := F(X) \sim U(0,1)$.

  证: 考虑如下的逆

  $$F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\}, \quad 0 < p < 1,$$

  则

  $$\{x : F(x) \leq p\} = \{x : x \leq F^{-1}(p)\} \cup \{x : F(x) = p\}.$$

  对于连续的 $F$, 有

  $$F(F^{-1}(p)) = p,$$

  且

  $$\{x : F(x) = p\} = [\ell, u],$$

  满足 $F(\ell) = F(u) = p$. ∎

---

⊛ 设 $X \sim F$, $F$ 连续, 则 $-\log \overline{F}(X) \sim \mathrm{Exp}(1)$.

## 3.6.2 初等变换 $Y = g(X)$

- 先讨论 $X$ 离散型
- 再讨论 $X$ 的一般情形

【例 3.6.5】 设 $X \sim U(-\pi/2, \pi/2)$, $Y = \tan(X)$, 求 $Y$ 的 cdf 和 pdf.

解: 对任意 $x \in \Re$,

$$G(x) = \mathrm{P}(\tan X \le x) = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2},$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \Re. \qquad (*.2)$$

---

⊛ $(*.2)$ 对应的分布为标准 Cauchy 分布, 一般的 Cauchy 分布的 pdf 为

$$g(x;\mu,\lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}, \quad x \in \Re.$$

- 定理 3.6.3 设 $X \sim F$, 其 pdf 为 $f$, $\xi : D \to \Re$ 为严格单调函数，$X \in D$ 几乎处处成立，$\xi'(x)$ 存在，则 $Y = \xi(X)$ 为连续型随机变量，其 pdf 为

$$g(y) = f(h(y))|h'(y)|, \quad \forall y,$$

其中 $h(x) = \xi^{-1}(x)$.

---

⊛ 特别，取 $\xi(x) = bx + a$, 则

$$\begin{aligned} X \sim U(0,1) \quad &\Longrightarrow \quad Y \sim U(a,b); \\ X \sim N(0,1) \quad &\Longrightarrow \quad Y \sim N(a,b^2). \end{aligned}$$

- 设 $X \sim F$, $Y = \xi(X)$. 对一般的 $\xi$, 求 $Y$ 的 pdf，先求 $Y$ 的 cdf.

【例 3.6.7】 已知 $X \sim N(0,1)$, 求 $Y = X^2$ 的 pdf $g(x)$.

---

解: 对 $\forall\, y > 0$,

$$\mathrm{P}\left(Y \le y\right) = \mathrm{P}\left(|X| \le \sqrt{y}\right) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1.$$

求导得

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left\{-\frac{y}{2}\right\}, \quad y > 0.$$

【例 3.6.8】 设 $X \sim F$, 其 pdf 为 $f$, 记 $Y = \sin X$, 求 $Y$ 的 pdf.

---

解: 对任意 $x \in (-1,1)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y \le x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}\Big((2k-1)\pi - \arcsin x \le X \le 2k\pi + \arcsin x\Big) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big[F(2k\pi + \arcsin x) - F((2k-1)\pi - \arcsin x)\Big]. \end{aligned}$$

求导得 $Y$ 的 pdf 为

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big[f(2k\pi + \arcsin x) + f((2k-1)\pi - \arcsin x)\Big].$$

- 定理 3.6.4 设 $X \sim F$, 其 pdf 为 $f$,

$$\xi: \ D \to \Re$$

为非严格单调函数，但 $\xi(x)$ 于 $D_j$ 上为严格单调函数，其中

$$D = \sum_{j=1}^{m} D_j, \quad m \le +\infty,$$

$D_j$ 为区间; $\mathrm{P}\,(X \in D) = 1$, $\xi'(x)$ 存在，则 $Y = \xi(X)$ 为连续型随机变量，其 pdf 为

$$g(y) = \sum_{j=1}^{m} f(h_j(y))|h_j'(y)|, \quad \forall y \in S,$$

其中 $h_j(x)$ 是 $\xi(x)$ 于 $D_j$ 上的反函数, $S$ 为 $Y$ 的取值范围.

【例 3.6.a】 设 $X \sim F$ 的 pdf 为 $f(x)$, 记 $Y = X - [X] = \{X\}$, 求 $Y$ 的 pdf.

解: $Y$ 的 pdf 为

$$g(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+y), \quad \forall y \in [0, 1).$$

# 作业

## 第 3 章第一次作业

§3.1: 6，9

§3.2: 1，9，16，17

§3.3: 3，8，9

## 第 3 章第二次作业

§3.4: 3，6，10，14

§3.5: 4，9

§3.6: 2，4，5