概率论

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥

2023 年 9 月

5.3.1 协方差

- 协方差 (Covariance) 的定义：

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}\, X)(Y - \mathrm{E}\, Y)],$$

其中假设 $X, Y \in L_2 := \{Z : \mathrm{E}[Z^2] < \infty\}$.

- 协方差的性质：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}\, X \mathrm{E}\, Y,\\
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{Cov}(Y, X),\\
\mathrm{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) &= a\mathrm{Cov}(X_1, Y) + b\mathrm{Cov}(X_2, Y)\\
\mathrm{Var}(X + Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)
\end{aligned}$$

※ 协方差有双线性性

5.3.1 协方差

- 协方差 (Covariance) 的定义：

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\,[(X - \mathrm{E}\,X)(Y - \mathrm{E}\,Y)],$$

其中假设 $X, Y \in L_2 := \{Z : \mathrm{E}\,[Z^2] < \infty\}$.

- 协方差的性质：

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}\,[XY] - \mathrm{E}\,X\mathrm{E}\,Y, \\ \mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{Cov}(Y, X), \\ \mathrm{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) &= a\mathrm{Cov}(X_1, Y) + b\mathrm{Cov}(X_2, Y) \\ \mathrm{Var}(X + Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

※ 协方差有双线性性

5.3.2 相关系数

- 相关系数 (Correlation) ρ:

$$\rho = \mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)\mathrm{Var}\,(Y)}}.$$

- 引理 5.3.1 设 $X, Y \in L_2$, 则

$$(\mathrm{E}\, XY)^2 \leq \mathrm{E}\,[X^2] \cdot \mathrm{E}\,[Y^2],$$

且等号成立当且仅当存在 $t_0 \in \Re$ 使得 $X = t_0 Y$.

证: 对任意 t, 定义新函数

$$g(t) = \mathrm{E}\,(X - tY)^2 = \mathrm{E}\,Y^2 \cdot t^2 - 2\mathrm{E}\,(XY) \cdot t + \mathrm{E}\,X^2$$

余下略. ▮

5.3.2 相关系数

- 相关系数 (Correlation) ρ:

$$\rho = \mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)\mathrm{Var}\,(Y)}}.$$

- 引理 5.3.1 设 $X, Y \in L_2$, 则

$$(\mathrm{E}\,XY)^2 \le \mathrm{E}\,[X^2] \cdot \mathrm{E}\,[Y^2],$$

且等号成立当且仅当存在 $t_0 \in \Re$ 使得 $X = t_0 Y$.

证: 对任意 t, 定义新函数

$$g(t) = \mathrm{E}\,(X - tY)^2 = \mathrm{E}\,Y^2 \cdot t^2 - 2\mathrm{E}\,(XY) \cdot t + \mathrm{E}\,X^2$$

余下略. ∎

- 推论 5.3.1　设 $X, Y \in L_2$, 则

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)|^2 \leq \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$$

且等号成立当且仅当存在 $t_0 \in \Re$ 使得

$$X - \mathrm{E}X = t_0(Y - EY).$$

- 定理 5.3.3　设 $X, Y \in L_2$, 则

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1;$$

$\rho_{X,Y} = -1 \Longleftrightarrow$ 存在 $a < 0$ 和 $b \in \Re$ 使得 $Y = aX + b$;
$\rho_{X,Y} = 1 \Longleftrightarrow$ 存在 $a > 0$ 和 $b \in \Re$ 使得 $Y = aX + b$.

※ 设 $X, Y \in L_2$, 则 $\rho_{X,Y}$ 度量了 X 与 Y 之间的线性依赖关系.

- 【例 5.3.a】 设 $X \sim U(-1/2, 1/2)$,

$$Y = \cos X,$$

显然, Y 与 X 之间有严格的函数关系, 此时 X 与 Y 之间有着最强的相依关系 (这种相依是非线性的相依关系). 但 $\mathrm{E}\,X = 0$,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\,(X \cos X) = 0,$$

即 X 与 Y 之间不相关, $\rho_{X,Y} = 0$.

- 独立与不相关
  - 若 $\rho_{X,Y} = 0$, 则称 X 与 Y 不相关.
  - 若 $\rho_{X,Y} > 0$, 则称 X 与 Y 正相关.
  - 若 $\rho_{X,Y} < 0$, 则称 X 与 Y 负相关.

※ 对任意 $X, Y \in L^2$, 以下命题等价:

(1) X 与 Y 不相关;

(2) $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$;

(3) $\mathrm{E}\,[XY] = \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,Y$;

(4) $\mathrm{Var}\,(X+Y) = \mathrm{Var}\,(X) + \mathrm{Var}\,(Y)$.

※ 在二阶矩存在有限的假设下, 独立蕴含不相关, 但反之不成立.

- 【例 5.3.2】 设 $\mathrm{P}(X=\pm 1)=1/4$, $\mathrm{P}(X=0)=1/2$ 和 $\mathrm{P}(Y=0)=\mathrm{P}(Y=1)=1/2$, 且 $\mathrm{P}(XY=0)=1$, 则

X/Y	0	1	
-1	$1/4$	0	$1/4$
0	0	$1/2$	$1/2$
1	$1/4$	0	$1/4$
	$1/2$	$1/2$	

显然，X 与 Y 不相关，但不相互独立，因为

$$\mathrm{P}(X=Y=1)=0<\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1).$$

- 【例 5.3.4】 设 (X,Y) 服从单位圆上的均匀分布, 则 X 与 Y 不相关, 但不是相互独立.

- 【例 5.3.5】 设 $\Theta \sim U(0, 2\pi)$, 定义 $X = \cos\Theta$, $Y = \cos(\Theta + a)$, 其中 a 为常数, 则

$$\mathrm{E}\, X = \mathrm{E}\, Y = 0, \qquad \mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{E}\,[XY] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos(x+a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos a, \qquad \rho_{X,Y} = \cos a.$$

可见

  - 若 $a = 0$, 则 $\rho_{X,Y} = 1$, 此时 $X = Y = \cos\Theta$ 完全相同.
  - 若 $a = \pi$, 则 $\rho_{X,Y} = -1$, 此时 $Y = -X$.
  - 若 $a = \pi/2$, 则 $\rho_{X,Y} = 0$, 此时 $X = \cos\Theta$ 与 $Y = -\sin\Theta$ 不相关.

- 【例 5.3.7】 设 $X \sim N(0,1)$, Y 与 X 独立, 满足

$$\mathrm{P}(Y=1)=\mathrm{P}(Y=-1)=1/2.$$

记 $Z=XY$, 则 $Z \sim N(0,1)$, 且 Z 与 X 不相关，但不独立.

证: 直接验证

$$\mathrm{P}(Z \le x)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X \le x)+\frac{1}{2}\mathrm{P}(X \ge -x)=\Phi(x), \quad \forall x;$$

$$\mathrm{E}[XZ]=\mathrm{E}[X^2Y]=\mathrm{E}[X^2]\cdot\mathrm{E}\,Y=0, \quad \mathrm{Cov}(Z,X)=0.$$

但是, 对任意 $x,z>0$,

$$\mathrm{P}(Z \le z|X=x)=\mathrm{P}(Y \le z/x)=\begin{cases}1/2, & z<x,\\ 1, & z \ge x,\end{cases}$$

即 Z 与 X 不独立. ∎

- 【例 5.3.7】 设 $X \sim N(0,1)$, Y 与 X 独立, 满足

$$\mathrm{P}(Y=1)=\mathrm{P}(Y=-1)=1/2.$$

记 $Z=XY$, 则 $Z \sim N(0,1)$, 且 Z 与 X 不相关，但不独立.

证: 直接验证

$$\mathrm{P}(Z \le x)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X \le x)+\frac{1}{2}\mathrm{P}(X \ge -x)=\Phi(x), \quad \forall x;$$

$$\mathrm{E}[XZ]=\mathrm{E}[X^2Y]=\mathrm{E}[X^2]\cdot\mathrm{E}\,Y=0, \quad \mathrm{Cov}(Z,X)=0.$$

但是, 对任意 $x,z>0$,

$$\mathrm{P}(Z \le z|X=x)=\mathrm{P}(Y \le z/x)=\begin{cases}1/2, & z<x,\\ 1, & z \ge x,\end{cases}$$

即 Z 与 X 不独立. ∎

5.3.3 随机向量的数字特征

记随机向量 $\mathbf{X}^\top = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 和随机矩阵 $\mathbf{A} = (X_{ij})_{n\times m}$，则

$$\mathrm{E}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}\,X_1 \\ \mathrm{E}\,X_2 \\ \vdots \\ \mathrm{E}\,X_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{E}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}[X_{11}] & \mathrm{E}[X_{12}] & \cdots & \mathrm{E}[X_{1m}] \\ \mathrm{E}[X_{21}] & \mathrm{E}[X_{22}] & \cdots & \mathrm{E}[X_{2m}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{E}[X_{n1}] & \mathrm{E}[X_{n2}] & \cdots & \mathrm{E}[X_{nm}] \end{pmatrix}$$

- 协方差阵的定义

  设 $X_1, \ldots, X_n \in L_2$，其协方差阵为 $B = (b_{ij})_{n\times n}$，其中

$$b_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j), \quad \forall\, i < j.$$

※ 协方差阵 $B = \mathrm{E}\left[(\mathbf{X} - \mathrm{E}\,\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathrm{E}\,\mathbf{X})^\top\right]$.

- 定理 5.3.6 协方差阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为半正定的.

  证: 对任意 $\mathbf{a}\in\Re^n$,

$$\mathbf{a}^\top B\mathbf{a}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i a_j \mathrm{Cov}\,(X_i,X_j)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right)\geq 0,$$

  即 B 为半正定的. ∎

- 【例 5.3.9】 设 $(X,Y)\sim N_2(a,b;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$, 求 (X,Y) 协差矩阵.

  解: 协方差阵为

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}.$$

※ 对多维正态分布，独立性和不相关性质相等价.

5.4.1 特征函数的定义

- 定义 5.4.1 设 F 为分布函数, 则实变量复值函数

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\,tx}\,\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)\,\mathrm{d}F(x) + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)\,\mathrm{d}F(x)$$

称为 F 的特征函数. 如果 $X \sim F$, 则称

$$\mathrm{E}\,[e^{\mathrm{i}\,tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\,tx}\,\mathrm{d}F(x), \quad t \in \Re,$$

为随机变量 X 的特征函数.

※ 若 $Z = X + \mathrm{i}Y$, 则 $\mathrm{E}\,Z = \mathrm{E}\,X + \mathrm{i}\mathrm{E}\,Y$.

※ $\mathrm{E}\,[e^{\mathrm{i}\,tX}] = \mathrm{E}\,\cos(tX) + \mathrm{i}\mathrm{E}\,\sin(tX)$.

5.4.1 特征函数的定义

- **定义 5.4.1** 设 F 为分布函数, 则实变量复值函数

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\,tx}\,\mathrm{d}F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)\,\mathrm{d}F(x)+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(tx)\,\mathrm{d}F(x)$$

称为 F 的特征函数. 如果 $X\sim F$, 则称

$$\mathrm{E}\,[e^{\mathrm{i}\,tX}]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\,tx}\,\mathrm{d}F(x),\quad t\in\Re,$$

为随机变量 X 的特征函数.

※ 若 $Z=X+\mathrm{i}Y$, 则 $\mathrm{E}\,Z=\mathrm{E}\,X+\mathrm{i}\mathrm{E}\,Y$.

※ $\mathrm{E}\,[e^{\mathrm{i}\,tX}]=\mathrm{E}\,\cos(tX)+\mathrm{i}\mathrm{E}\,\sin(tX)$.

Example

- $X = a$ 对应 c.f. 为 $f(t) = e^{ita}$;
- $B(1, p)$ 分布对应 c.f. 为 $f(t) = q + pe^{it}$, $q = 1 - p$;
- $\mathrm{P}(X = \pm 1) = 1/2$ 对应 c.f. 为

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \cos t;$$

- $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ 对应 c.f. 为

$$f(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\};$$

- $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ 对应 c.f. 为

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} p(1-p)^n = \frac{p}{1 - qe^{it}}.$$

- 【例 5.4.2】 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ 对应 c.f. 为

$$f(t) = \left(1 - \frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-1}.$$

解：

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \cos(tx)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin(tx)\,\mathrm{d}x \\ &:= \lambda[J_1(t) + \mathrm{i}J_2(t)]. \end{aligned}$$

又由

$$J_1(t) = \frac{\lambda}{t} J_2(t), \quad J_2(t) = \frac{1 - \lambda J_1(t)}{t},$$

求出

$$J_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2}, \qquad J_2(t) = \frac{t}{\lambda^2 + t^2}.$$

故

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda + \mathrm{i}t)}{\lambda^2 + t^2} = \left(1 - \frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-1}. \quad \blacksquare$$

- 【例 5.4.2】 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ 对应 c.f. 为

$$f(t) = \left(1 - \frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-1}.$$

解：

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cos(tx)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} \sin(tx)\,\mathrm{d}x \\ &:= \lambda[J_1(t) + \mathrm{i}J_2(t)]. \end{aligned}$$

又由

$$J_1(t) = \frac{\lambda}{t} J_2(t), \quad J_2(t) = \frac{1 - \lambda J_1(t)}{t},$$

求出

$$J_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2}, \qquad J_2(t) = \frac{t}{\lambda^2 + t^2}.$$

故

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda + \mathrm{i}t)}{\lambda^2 + t^2} = \left(1 - \frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-1}. \ \blacksquare$$

5.4.2 特征函数的性质

- **定理 5.4.1** 设 f 为 rv X 的 c.f., 则

  (1) $|f(t)| \leq 1$, $f(-t) = \overline{f(t)}$;

  (2) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $a + bX$ 的 c.f. 为 $e^{ita} f(bt)$, 特别$-X$ 的 c.f. 为$\bar{f}$;

  (3) $f(t)$ 于 $\Re$ 上一致连续;

  (4) $f(t)$ 具有半正定性质, 即对 $\forall\, n \geq 1$, $\forall t_1, \ldots, t_n \in \Re$, $\forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, 有

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z_k\, \overline{z_j}\, f_(t_k - t_j) \geq 0.$$

- **引理 5.4.1** 对 $\forall x \in \Re$, 有

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \le \min\left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}, \qquad n \ge 0.$$

- **推论 5.4.1** 对 $\forall x \in \Re$, 有

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}.$$

$$\begin{aligned} |e^{ix} - 1| &\le |x| \wedge 2, \\ |e^{ix} - 1 - ix| &\le \frac{x^2}{2} \wedge (2|x|), \\ \left| e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2} \right| &\le \frac{|x|^3}{6} \wedge x^2. \end{aligned}$$

- **引理 5.4.1** 对 $\forall x \in \Re$, 有

$$\left| e^{\mathrm{i}x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} \right| \le \min\left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}, \quad n \ge 0.$$

- **推论 5.4.1** 对 $\forall x \in \Re$, 有

$$e^{\mathrm{i}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!}.$$

$$\begin{aligned} |e^{\mathrm{i}x} - 1| &\le |x| \wedge 2, \\ |e^{\mathrm{i}x} - 1 - \mathrm{i}x| &\le \frac{x^2}{2} \wedge (2|x|), \\ \left| e^{\mathrm{i}x} - 1 - \mathrm{i}x + \frac{x^2}{2} \right| &\le \frac{|x|^3}{6} \wedge x^2. \end{aligned}$$

- **引理 5.4.1** 对 $\forall x \in \Re$, 有

$$\left| e^{\mathrm{i}x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} \right| \leq \min\left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}, \quad n \geq 0.$$

- **推论 5.4.1** 对 $\forall x \in \Re$, 有

$$e^{\mathrm{i}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!}.$$

$$\begin{aligned} |e^{\mathrm{i}x} - 1| &\leq |x| \wedge 2, \\ |e^{\mathrm{i}x} - 1 - \mathrm{i}x| &\leq \frac{x^2}{2} \wedge (2|x|), \\ \left| e^{\mathrm{i}x} - 1 - \mathrm{i}x + \frac{x^2}{2} \right| &\leq \frac{|x|^3}{6} \wedge x^2. \end{aligned}$$

- **定理 5.4.3** 如果 X 的任意阶矩存在有限, 且存在 $t_0 > 0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^n \mathrm{E}\,|X|^n}{n!} = 0, \quad |t| \le t_0,$$

则 X 的 c.f. $f(t)$ 有如下展开式

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} \mathrm{E}\, X^k, \quad |t| \le t_0.$$

证: 对 $\forall |t| \le t_0$,

$$\begin{aligned}
\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} \mathrm{E}\, X^k \right| &\le \left| \mathrm{E}\left(e^{\mathrm{i}tX} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} X^k \right) \right| \\
&\le \mathrm{E}\left| e^{\mathrm{i}tX} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} X^k \right| \\
&\le \frac{|t|^{n+1} \mathrm{E}\,|X|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

- **定理 5.4.3** 如果 X 的任意阶矩存在有限，且存在 $t_0 > 0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^n \mathrm{E}\,|X|^n}{n!} = 0, \quad |t| \le t_0,$$

则 X 的 c.f. $f(t)$ 有如下展开式

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} \mathrm{E}\,X^k, \quad |t| \le t_0.$$

证：对 $\forall |t| \le t_0$,

$$\begin{aligned}
\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} \mathrm{E}\,X^k \right| &\le \left| \mathrm{E}\left(e^{\mathrm{i}tX} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} X^k \right) \right| \\
&\le \mathrm{E}\left| e^{\mathrm{i}tX} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} X^k \right| \\
&\le \frac{|t|^{n+1} \mathrm{E}\,|X|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

- 【例 5.4.4】 $Z \sim N(0,1)$ 对应的 c.f. 为

$$f(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}.$$

$N(\mu, \sigma^2)$ 对应的 c.f. 为

$$f(t) = \exp\left\{\mathrm{i}\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t^2\right\}.$$

解: 特别, $\mathrm{E}\, Z^{2n-1} = 0$,

$$\mathrm{E}\,|Z|^{2n} = (2n-1)!!, \quad \mathrm{E}\,|Z|^{2n-1} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(2n-2)!!.$$

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}t)^{2k}}{(2k)!}\mathrm{E}\, Z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^k = \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}.$$

- 【例 5.4.4】 $Z \sim N(0,1)$ 对应的 c.f. 为

$$f(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}.$$

$N(\mu, \sigma^2)$ 对应的 c.f. 为

$$f(t) = \exp\left\{\mathrm{i}\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t^2\right\}.$$

解: 特别, $\mathrm{E}\, Z^{2n-1} = 0$,

$$\mathrm{E}\,|Z|^{2n} = (2n-1)!!, \quad \mathrm{E}\,|Z|^{2n-1} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(2n-2)!!.$$

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}t)^{2k}}{(2k)!}\mathrm{E}\, Z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^k = \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}.$$

- **定理 5.4.4** 如果对某个 $k \geq 1$, $\mathrm{E}\,|X|^k < \infty$, 则 X 的 c.f. $f(t)$ 为 k 阶可微, 且
$$f^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k \mathrm{E}\, X^k.$$

证: 仅证 $k=1$ 时 $f'(t) = \mathrm{E}\,[\mathrm{i}Xe^{\mathrm{i}tX}]$. 事实上,

$$\left|\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} - \mathrm{E}\,\left(\mathrm{i}Xe^{\mathrm{i}tX}\right)\right| \leq \left|\mathrm{E}\left(e^{\mathrm{i}tX}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\Delta tX}-1-\mathrm{i}\Delta tX}{\Delta t}\right)\right|.$$

又

$$\left|\frac{e^{\mathrm{i}\Delta tX}-1-\mathrm{i}\Delta tX}{\Delta t}\right| = \frac{|e^{\mathrm{i}\Delta tX}-1-\mathrm{i}\Delta tX|}{|\Delta t|} \leq 2|X|,$$

由控制收敛定理得证. ∎

- 定理 5.4.4 如果对某个 $k \geq 1$, $\mathrm{E}\,|X|^k < \infty$, 则 X 的 c.f. $f(t)$ 为 k 阶可微, 且
$$f^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k \mathrm{E}\, X^k.$$

证: 仅证 $k=1$ 时 $f'(t) = \mathrm{E}\,[\mathrm{i}Xe^{\mathrm{i}tX}]$. 事实上,

$$\left|\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} - \mathrm{E}\,\left(\mathrm{i}Xe^{\mathrm{i}tX}\right)\right| \leq \left|\mathrm{E}\left(e^{\mathrm{i}tX}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\Delta tX}-1-\mathrm{i}\Delta tX}{\Delta t}\right)\right|.$$

又

$$\left|\frac{e^{\mathrm{i}\Delta tX}-1-\mathrm{i}\Delta tX}{\Delta t}\right| = \frac{|e^{\mathrm{i}\Delta tX}-1-\mathrm{i}\Delta tX|}{|\Delta t|} \leq 2|X|,$$

由控制收敛定理得证. ∎

- 定理 5.4.4 如果对某个 $k \geq 1$, $\mathrm{E}\,|X|^k < \infty$, 则 X 的 c.f. $f(t)$ 为 k 阶可微, 且
$$f^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k \mathrm{E}\, X^k.$$

证: 仅证 $k = 1$ 时 $f'(t) = \mathrm{E}\,[\mathrm{i}Xe^{\mathrm{i}tX}]$. 事实上,

$$\left| \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} - \mathrm{E}\,\left(\mathrm{i}Xe^{\mathrm{i}tX}\right) \right| \leq \left| \mathrm{E}\left(e^{\mathrm{i}tX} \cdot \frac{e^{\mathrm{i}\Delta tX} - 1 - \mathrm{i}\Delta tX}{\Delta t} \right) \right|.$$

又
$$\left| \frac{e^{\mathrm{i}\Delta tX} - 1 - \mathrm{i}\Delta tX}{\Delta t} \right| = \frac{|e^{\mathrm{i}\Delta tX} - 1 - \mathrm{i}\Delta tX|}{|\Delta t|} \leq 2|X|,$$

由控制收敛定理得证. ∎

- 推论 5.4.2 如果对某个 $n \geq 1$, $\mathrm{E}|X|^n < \infty$, 则 X 的 c.f. $f(t)$ 于 $t = 0$ 点可以展开为

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} \mathrm{E} X^k + \circ(t^n), \quad t \to 0.$$

证: 直接利用定理 5.4.4.

- 推论 5.4.2 如果对某个 $n \geq 1$, $\mathrm{E}|X|^n < \infty$, 则 X 的 c.f. $f(t)$ 于 $t = 0$ 点可以展开为

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} \mathrm{E} X^k + \circ(t^n), \quad t \to 0.$$

证: 直接利用定理 5.4.4.

5.4.3 关于特征函数的进一步讨论

- **定理 5.4.5** 如果 rv X 与 Y 相互独立, 则
$$f_{X+Y}(t) = f_X(t)f_Y(t), \quad t \in \Re.$$
- **推论 5.4.3** 如果 $f(t)$ 时一个 c.f., 则对 $\forall\, n \geq 1$, $f^n(t)$ 也为 c.f..
- **推论 5.4.4** 如果 $f(t)$ 时一个 c.f., 则 $|f(t)|^2$ 也为 c.f..
- **定理 5.4.6** c.f. 的凸组合仍是 c.f., 即若 $\sum_{j=1}^n a_j = 1$, $a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, $f_1, \ldots, f_n$ 为 c.f., 则 $\sum_{j=1}^n a_j f_j$ 为 c.f..

※ $f(t) = (\cos t)^2$ 是 c.f..

※ $B(n, p)$ 的 c.f. 为 $f(t) = (1 - p + pe^{it})^n$.

5.4.3 关于特征函数的进一步讨论

- **定理 5.4.5** 如果 rv X 与 Y 相互独立, 则
$$f_{X+Y}(t) = f_X(t)f_Y(t), \quad t \in \Re.$$
- **推论 5.4.3** 如果 $f(t)$ 时一个 c.f., 则对 $\forall\, n \geq 1$, $f^n(t)$ 也为 c.f..
- **推论 5.4.4** 如果 $f(t)$ 时一个 c.f., 则 $|f(t)|^2$ 也为 c.f..
- **定理 5.4.6** c.f. 的凸组合仍是 c.f., 即若 $\sum_{j=1}^n a_j = 1$, $a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, $f_1, \ldots, f_n$ 为 c.f., 则 $\sum_{j=1}^n a_j f_j$ 为 c.f..

※ $f(t) = (\cos t)^2$ 是 c.f..

※ $B(n, p)$ 的 c.f. 为 $f(t) = (1 - p + pe^{\mathrm{i}t})^n$.

- 【例 5.4.8】 设 f 是一个 c.f., 则

$$g_1(t) = \frac{1}{2 - f(t)},$$

$$g_2(t) = \exp\{\lambda(f(t) - 1)\}, \quad \lambda > 0,$$

皆为 c.f..

证: 注意如下的表示

$$g_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f^n(t),$$

$$g_2(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} f^n(t).$$

- 【例 5.4.8】 设 f 是一个 c.f., 则

$$g_1(t) = \frac{1}{2 - f(t)},$$

$$g_2(t) = \exp\{\lambda(f(t) - 1)\}, \quad \lambda > 0,$$

皆为 c.f..

证: 注意如下的表示

$$g_1(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f^n(t),$$

$$g_2(t) = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} f^n(t).$$

反演公式与唯一性定理

- 定理 A.2.2 (逆转公式) 设 f 是分布函数 F 的 c.f., 则对 $\forall a, b \in \Re$,

$$\frac{F(b)+F(b-)}{2}-\frac{F(a)+F(a-)}{2}=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt.$$

特别, 当 $a, b \in C(F)$ 时,

$$F(b)-F(a)=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}f(t)dt.$$

▶ 定理 5.4.7 (唯一性定理) 分布函数由特征函数唯一确定.

证 设 F_1 和 F_2 是两个 cdf, 有共同的 c.f. f, 下面证明 $F_1 = F_2$. 为此, 设 $a, b \in C(F_1) \cap C(F_2)$, $a < b$, 则由逆转公式知

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a).$$

令 a 沿 $C(F_1) \cap C(F_2)$ 趋于 $-\infty$, 则得

$$F_1(b) = F_2(b),$$

即在 $C(F_1) \cap C(F_2)$ 上, $F_1 = F_2$. 从而由 cdf 的右连续性知, 在 $\Re$ 上 $F_1 = F_2$. ∎

- 定理 5.4.7 (唯一性定理) 分布函数由特征函数唯一确定.

证　设 F_1 和 F_2 是两个 cdf, 有共同的 c.f. f, 下面证明 $F_1 = F_2$. 为此, 设 $a, b \in C(F_1) \cap C(F_2)$, $a < b$, 则由逆转公式知

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a).$$

令 a 沿 $C(F_1) \cap C(F_2)$ 趋于 $-\infty$, 则得

$$F_1(b) = F_2(b),$$

即在 $C(F_1) \cap C(F_2)$ 上, $F_1 = F_2$. 从而由 cdf 的右连续性知, 在 $\Re$ 上 $F_1 = F_2$. ∎

- 定理 A.2.4 如果特征函数 f 在 $\Re$ 上绝对可积, 则概率密度函数 F' 在 $\Re$ 上处处存在, 而且有界连续, 满足

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\, dt, \tag{1}$$

即密度函数和特征函数是一对 Fourier 变换和反变换.

5.4.4 几个初步应用

- 定义 5.4.3 设 $X \sim F$, 称 X 或 F 是对称的, 如果 $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} -X$, 或

$$F(-x) = 1 - F(x-), \quad x \in \Re.$$

- 定理 5.4.8 设 f 为 cdf F 的 c.f., 则

$$f \text{ 为实值函数} \iff F \text{ 是对称的}.$$

证: 利用 c.f. 的基本性质及唯一性定理. 仅证必要性.
$(\Longrightarrow)$ 若 f 为实值函数, 则

$$\mathrm{E}\left[e^{itX}\right] = f(t) = \overline{f(-t)} = f(-t) = \mathrm{E}\left[e^{it(-X)}\right],$$

于是 X 与 $-X$ 同分布. ∎

5.4.4 几个初步应用

- **定义 5.4.3** 设 $X \sim F$, 称 X 或 F 是对称的, 如果 $X \overset{\mathrm{d}}{=} -X$, 或

$$F(-x) = 1 - F(x-), \quad x \in \Re.$$

- **定理 5.4.8** 设 f 为 cdf F 的 c.f., 则

$$f \text{ 为实值函数} \iff F \text{ 是对称的}.$$

证: 利用 c.f. 的基本性质及唯一性定理. 仅证必要性.
$(\Longrightarrow)$ 若 f 为实值函数, 则

$$\mathrm{E}\left[e^{itX}\right] = f(t) = \overline{f(-t)} = f(-t) = \mathrm{E}\left[e^{it(-X)}\right],$$

于是 X 与 $-X$ 同分布. ∎

- 应用 分布的再生性
  - $N(\mu, \sigma^2)$ 分布: $N(\mu_1, \sigma^2) * N(\mu_2, \sigma_2^2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
  - $\text{Poi}(\lambda)$ 分布: $\text{Poi}(\lambda_1) * \text{Poi}(\lambda_2) = \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$
  - $B(n, p)$ 分布: $B(n, p) * B(m, p) = B(m + n, p)$
  - $\text{Cauchy}(\mu, \lambda)$ 分布:

$$\text{Cauchy}(\mu_1, \lambda_1) * \text{Cauchy}(\mu_2, \lambda_2) = \text{Cauchy}(\mu_1 + \mu_2, \lambda_1 + \lambda_2).$$

※ 参数 (μ, λ) 的Cauchy 分布的 pdf 为

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \mu)^2}, \quad x \in \Re.$$

对应的 c.f. 为

$$f(t) = \exp\{i\mu t - \lambda|t|\}.$$

- 应用 分布的再生性
  - $N(\mu,\sigma^2)$ 分布: $N(\mu_1,\sigma^2) * N(\mu_2,\sigma_2^2) = N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
  - $\mathrm{Poi}(\lambda)$ 分布: $\mathrm{Poi}(\lambda_1) * \mathrm{Poi}(\lambda_2) = \mathrm{Poi}(\lambda_1+\lambda_2)$
  - $B(n,p)$ 分布: $B(n,p) * B(m,p) = B(m+n,p)$
  - $\mathsf{Cauchy}(\mu,\lambda)$ 分布:

$$\mathrm{Cauchy}(\mu_1,\lambda_1) * \mathrm{Cauchy}(\mu_2,\lambda_2) = \mathrm{Cauchy}(\mu_1+\mu_2,\lambda_1+\lambda_2).$$

※ 参数 (μ,λ) 的Cauchy 分布的 pdf 为

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}, \quad x \in \Re.$$

对应的 c.f. 为

$$f(t) = \exp\{\mathrm{i}\mu t - \lambda|t|\}.$$

- 如何求参数 $(0,1)$ 的Cauchy 分布的特征函数？

设 $X_1, X_2 \sim \mathrm{Exp}(1)$，相互独立，则 $X = X_1 - X_2$ 的 pdf 为

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \Re.$$

又 X_1 对应的特征函数为 $f_1(t) = 1/(1 - \mathrm{i}t)$，故 X 的特征函数为

$$f(t) = |f_1(t)|^2 = \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in Re.$$

于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

※ 如果某个 cdf $F(x)$ 对应的特征函数 $f(t)$ 绝对可积，则 F 为绝对连续. 其对应的 pdf 为

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t.$$

5.4.6 多元特征函数

- **定义 5.4.4** 设随机向量 $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^\top \sim F$, $\mathbf{X}$ 或 F 的 cf 定义为

$$\begin{aligned} f(t_1,\ldots,t_n) &= \mathrm{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} t_k X_k\right\}\right] = \mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}\mathbf{t}'\mathbf{X}}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right\} \mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n), \\ &\qquad\qquad \forall\, \mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)' \in \Re^n. \end{aligned}$$

$$\text{c.f.}\quad f \longleftrightarrow \text{cdf}\quad F.$$

（逆转公式与唯一性定理）

5.4.6 多元特征函数

- 定义 5.4.4 设随机向量 $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^\top\sim F$, $\mathbf{X}$ 或 F 的 cf 定义为

$$
\begin{aligned}
f(t_1,\ldots,t_n) &= \mathrm{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} t_k X_k\right\}\right] = \mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}\mathbf{t}'\mathbf{X}}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right\}\mathrm{d}F(x_1,\ldots,x_n), \\
&\qquad \forall\, \mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)'\in\Re^n.
\end{aligned}
$$

$$\text{c.f.}\quad f\longleftrightarrow \text{cdf}\quad F.$$

(逆转公式与唯一性定理)

- 定理 5.4.a （逆转公式） 如果随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ 的分布函数为 F, 对应的特征函数为 f, 则对 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in C(F)$, $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, 有

$$F(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \lim_{c \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-c}^{c} \cdots \int_{-c}^{c} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-\mathrm{i} t_j a_j} - e^{-\mathrm{i} t_j b_j}}{\mathrm{i} t_j} dt_1 \cdots dt_n.$$

※ 设 $X_j \sim F_j$, 如果 $F_j(x_j)$ 于 $x_j = x_{j0}$ 连续, $j = 1, \ldots, n$, 则 F 于 $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, \ldots, x_{k0})$ 连续. 但反过来不必成立, 定义如下的集合:

$$C(F) = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) : \ F_j(x_j-) = F_j(x_j),\ 1 \le j \le n\}.$$

集合 $C(F)$ 包含在 F 的连续点所构成的集合内.

- 定理 5.4.a （逆转公式） 如果随机向量 $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)^\top$ 的分布函数为 F, 对应的特征函数为 f, 则对 $\forall\, \mathbf{a},\mathbf{b}\in C(F)$, $\mathbf{a}<\mathbf{b}$, 有

$$F(\mathbf{a},\mathbf{b}]=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-c}^{c}\cdots\int_{-c}^{c} f(\mathbf{t})\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{-\mathrm{i}t_ja_j}-e^{-\mathrm{i}t_jb_j}}{\mathrm{i}t_j}\,dt_1\cdots dt_n.$$

※ 设 $X_j\sim F_j$, 如果 $F_j(x_j)$ 于 $x_j=x_{j0}$ 连续, $j=1,\dots,n$, 则 F 于 $\mathbf{x}_0=(x_{10},\dots,x_{k0})$ 连续. 但反过来不必成立, 定义如下的集合:

$$C(F)=\left\{\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_k):\ F_j(x_j-)=F_j(x_j),\ 1\le j\le n\right\}.$$

集合 $C(F)$ 包含在 F 的连续点所构成的集合内.

- 定理 5.4.9 随机变量 X 于 Y 相互独立当且仅当

$$\mathrm{E}\, e^{\mathrm{i}(t_1X+t_2Y)} = \mathrm{E}\, e^{\mathrm{i}t_1X} \cdot \mathrm{E}\, e^{\mathrm{i}t_2Y}, \quad (t_1, t_2) \in \Re^2.$$

证：充分性利用分布函数与特征函数之间的一一对应性.

- 定理 5.4.9 随机变量 X 于 Y 相互独立当且仅当

$$\mathrm{E}\, e^{\mathrm{i}(t_1X+t_2Y)} = \mathrm{E}\, e^{\mathrm{i}t_1X} \cdot \mathrm{E}\, e^{\mathrm{i}t_2Y}, \quad (t_1, t_2) \in \Re^2.$$

证: 充分性利用分布函数与特征函数之间的一一对应性.

- 基于线性变换 [允许有退化情形]
- 基于概率密度函数 [仅非退化情形]
- 基于特征函数 [允许有退化情形]

记号：

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

- 基于线性变换 [允许有退化情形]
- 基于概率密度函数 [仅非退化情形]
- 基于特征函数 [允许有退化情形]

记号：

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

5.5.1 n 元正态分布

- **定义 5.5.1** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\sim N(0,1)$, 则称随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim N_n(0, \mathbf{I})$, 其中 $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.
- **定义 5.5.2** 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{\mu} \in \Re^n$, 随机向量 $\mathbf{X} \sim N_n(0, \mathbf{I})$, 定义
$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu},$$
则称 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 其中 $\Sigma = AA^\top$

※
$$\mathrm{E}\,\mathbf{Y} = \mathrm{E}\,(A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}) = A\,\mathrm{E}\,\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu},$$
$$\mathrm{Cov}\,(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = \mathrm{E}\,[(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top] = A\,\mathrm{E}\,(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)A^\top = AA^\top.$$

※
$$\mathbf{Y} \text{ 存在 pdf} \Longleftrightarrow A \text{ 非退化}.$$

5.5.1 n 元正态分布

- **定义 5.5.1** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\sim N(0,1)$, 则称随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim N_n(0, \mathbf{I})$, 其中 $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.
- **定义 5.5.2** 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{\mu} \in \Re^n$, 随机向量 $\mathbf{X} \sim N_n(0, \mathbf{I})$, 定义

$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu},$$

则称 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 其中 $\Sigma = AA^\top$

※ $$\mathrm{E}\,\mathbf{Y} = \mathrm{E}\,(A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}) = A\,\mathrm{E}\,\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu},$$

$$\mathrm{Cov}\,(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = \mathrm{E}\,[(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top] = A\,\mathrm{E}\,(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)A^\top = AA^\top.$$

※ $$\mathbf{Y} \text{ 存在 pdf} \iff A \text{ 非退化}.$$

5.5.1 n 元正态分布

- **定义 5.5.1** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\sim N(0,1)$, 则称随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^\top \sim N_n(0, \mathbf{I})$, 其中 $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.
- **定义 5.5.2** 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{\mu} \in \Re^n$, 随机向量 $\mathbf{X} \sim N_n(0, \mathbf{I})$, 定义

$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu},$$

则称 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 其中 $\Sigma = AA^\top$

※

$$\mathrm{E}\,\mathbf{Y} = \mathrm{E}\,(A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}) = A\,\mathrm{E}\,\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu},$$

$$\mathrm{Cov}\,(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = \mathrm{E}\,[(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top] = A\,\mathrm{E}\,(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top)A^\top = AA^\top.$$

※

$$\mathbf{Y} \text{ 存在 pdf} \Longleftrightarrow A \text{ 非退化}.$$

- 定理 5.5.1 设 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, Σ 可逆, 则 $\mathbf{Y}$ 的 pdf 为

$$p(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-n/2}|\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})\right\}, \quad \mathbf{y} \in \Re^n.$$

证: 设 $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}$, 其中 $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{0}, I_n)$, $\Sigma = AA^\top$. 由 Σ 可逆知 A 可逆. 由变换 $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}$, 得 $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$. 该变换对应的 Jacobi 行列式的值为 $J(\mathbf{y}) = |A^{-1}| = |\Sigma|^{-1/2}$. 注意到 $\mathbf{X}$ 的联合 pdf 为

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{2}\right\}, \quad \mathbf{x} \in \Re^n.$$

于是 $\mathbf{Y}$ 的联合 pdf 为

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^\top (A^{-1})^\top A^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})\right\} = \cdots$$

- 定理 5.5.1 设 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, Σ 可逆, 则 $\mathbf{Y}$ 的 pdf 为

$$p(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-n/2}|\Sigma|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^\top\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})\right\}, \quad \mathbf{y} \in \Re^n.$$

证: 设 $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}$, 其中 $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{0}, I_n)$, $\Sigma = AA^\top$. 由 Σ 可逆知 A 可逆. 由变换 $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}$, 得 $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})$. 该变换对应的 Jacobi 行列式的值为 $J(\mathbf{y}) = |A^{-1}| = |\Sigma|^{-1/2}$. 注意到 $\mathbf{X}$ 的联合 pdf 为

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{\mathbf{x}^\top\mathbf{x}}{2}\right\}, \quad \mathbf{x} \in \Re^n.$$

于是 $\mathbf{Y}$ 的联合 pdf 为

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^\top(A^{-1})^\top A^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})\right\} = \cdots$$

※ $\mathbf{Y}$ 存在 pdf $\Longleftrightarrow$ A 非退化.

证: $(\Longleftarrow)$ $\surd$

$(\Longrightarrow)$: 反证, 设 $|A|=0$, 则 $|\Sigma|=|AA^\top|=0$. 于是存在 $\mathbf{b}\in\Re^n$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, 使得 $\mathbf{b}^\top A=\mathbf{0}^\top$. 注意到

$$\mathrm{Var}\,(\mathbf{b}^\top Y)=\mathbf{b}^\top\mathrm{Cov}\,(\mathbf{Y},\mathbf{Y})\mathbf{b}=\mathbf{b}^\top AA^\top\mathbf{b}=0,$$

这蕴涵 $\mathbf{b}^\top\mathbf{Y}=d$, 其中 d 为某个常数. 于是, 必存在某个 Y_i 可以表示为其它 Y_j 的线性组合, 不妨假设

$$Y_1=t_1Y_2+\cdots+t_nY_n+d_0,\quad (t_2,\ldots,t_n)\neq\mathbf{0}^\top.$$

记 $Z_1=Y_1$, $Z_2=t_1Y_2+\cdots+t_nY_n+d_0$. 由于 $\mathbf{Y}$ 存在概率密度, 则 (Z_1,Z_2) 存在概率密度 $h(z_1,z_2)$. 但 $Z_1=Z_2$, 所以

$$1=\mathrm{P}\,(Z_1=Z_2)=\iint_{\{z_1=z_2\}}h(z_1,z_2)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2=0.$$

矛盾! ▮

- **定理 5.5.2** 设 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 则 $\mathbf{Y}$ 的 c.f. 为

$$f(\mathbf{t}) = \exp\left\{ \mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{t} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \Sigma \mathbf{t} \right\}, \quad \mathbf{t} \in \Re^n.$$

证: $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ 的 c.f. 为 $\quad f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left\{-\mathbf{t}^\top \mathbf{t}/2\right\}, \quad \mathbf{t} \in \Re^n.$

于是, $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{t}) &= \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\mathbf{t}^\top \mathbf{Y}\right\} = \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\mathbf{t}^\top (A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu})\right\} \\
&= \exp\left\{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{t}\right\} \cdot \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}(A^\top \mathbf{t})^\top \mathbf{X}\right\} \\
&= \exp\left\{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{t}\right\} \cdot f_{\mathbf{X}}\left(A^\top \mathbf{t}\right), \\
f_{\mathbf{X}}\left(A^\top \mathbf{t}\right) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}(A^\top \mathbf{t})^\top A^\top \mathbf{t}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \Sigma \mathbf{t}\right\}.
\end{aligned}$$

- **定理 5.5.2** 设 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 则 $\mathbf{Y}$ 的 c.f. 为

$$f(\mathbf{t}) = \exp\left\{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{t} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \Sigma \mathbf{t}\right\}, \quad \mathbf{t} \in \Re^n.$$

证: $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ 的 c.f. 为 $\quad f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left\{-\mathbf{t}^\top \mathbf{t}/2\right\}, \quad \mathbf{t} \in \Re^n.$

于是, $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) &= \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\mathbf{t}^\top \mathbf{Y}\right\} = \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\mathbf{t}^\top (A\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu})\right\} \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{t}\right\} \cdot \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}(A^\top \mathbf{t})^\top \mathbf{X}\right\} \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{t}\right\} \cdot f_{\mathbf{X}}\left(A^\top \mathbf{t}\right), \\ f_{\mathbf{X}}\left(A^\top \mathbf{t}\right) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}(A^\top \mathbf{t})^\top A^\top \mathbf{t}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \Sigma \mathbf{t}\right\}. \end{aligned}$$

- 定理 5.5.3 设 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{Y}_1$ 是 k 维子向量, $1 \leq k < n$, 则 $\mathbf{Y}_1 \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11})$.

证: 对 $\forall\ \mathbf{t} \in \Re^k$, 记 $\mathbf{0}_{n-k} = (0, \ldots, 0)^\top \in \Re^{n-k}$, 则 $\mathbf{Y}_1$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) &= \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top \mathbf{Y}_1\right\} = \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\,(\mathbf{t}^\top, \mathbf{0}_{n-k}^\top)\mathbf{Y}\right\} \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\,(\mathbf{t}^\top, \mathbf{0}_{n-k}^\top)\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}(\mathbf{t}^\top, \mathbf{0}_{n-k}^\top)\Sigma\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{n-k} \end{pmatrix}\right\} \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \Sigma_{11}\mathbf{t}\right\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- **定理 5.5.3** 设 $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{Y}_1$ 是 k 维子向量, $1 \le k < n$, 则 $\mathbf{Y}_1 \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11})$.

证: 对 $\forall\ \mathbf{t} \in \Re^k$, 记 $\mathbf{0}_{n-k} = (0, \ldots, 0)^\top \in \Re^{n-k}$, 则 $\mathbf{Y}_1$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) &= \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top \mathbf{Y}_1\right\} = \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\,(\mathbf{t}^\top, \mathbf{0}_{n-k}^\top)\mathbf{Y}\right\} \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\,(\mathbf{t}^\top, \mathbf{0}_{n-k}^\top)\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}(\mathbf{t}^\top, \mathbf{0}_{n-k}^\top)\Sigma\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_{n-k} \end{pmatrix}\right\} \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top \Sigma_{11}\mathbf{t}\right\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.5.2 n 元正态分布性质

- **定理 5.5.4** 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 则 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立当且仅当两两互不相关.

- **定理 5.5.5** 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{X}_1$ 是 k 维子向量, $1 \le k < n$, 则 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 相互独立当且仅当 $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$.

证: $(\Longleftarrow)$ 设 $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{Y}$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) &= \exp\left\{ \mathrm{i}\left(\boldsymbol{\mu}_1^\top \mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\mu}_2^\top \mathbf{t}_2\right) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{t}_1^\top \Sigma_{11}\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2^\top \Sigma_{22}\mathbf{t}_2\right) \right\} \\ &= f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1)\, f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{t}_2), \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix} \in \Re^n. \end{aligned}$$

5.5.2 n 元正态分布性质

- **定理 5.5.4** 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 则 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立当且仅当两两互不相关.
- **定理 5.5.5** 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{X}_1$ 是 k 维子向量, $1 \le k < n$, 则 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 相互独立当且仅当 $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$.

证: $(\Longleftarrow)$ 设 $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{Y}$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) &= \exp\left\{ \mathrm{i}\,(\boldsymbol{\mu}_1^\top \mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\mu}_2^\top \mathbf{t}_2) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{t}_1^\top \Sigma_{11} \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2^\top \Sigma_{22} \mathbf{t}_2\right) \right\} \\ &= f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1)\, f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{t}_2), \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix} \in \Re^n. \end{aligned}$$

5.5.2 n 元正态分布性质

- **定理 5.5.4** 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 则 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立当且仅当两两互不相关.
- **定理 5.5.5** 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{X}_1$ 是 k 维子向量, $1 \le k < n$, 则 $\mathbf{X}_1$ 与 $\mathbf{X}_2$ 相互独立当且仅当 $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$.

证: $(\Longleftarrow)$ 设 $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{Y}$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{t}) &= \exp\left\{ \mathrm{i}\,(\boldsymbol{\mu}_1^\top \mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\mu}_2^\top \mathbf{t}_2) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{t}_1^\top \Sigma_{11} \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2^\top \Sigma_{22} \mathbf{t}_2\right) \right\} \\ &= f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1)\, f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{t}_2), \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix} \in \Re^n. \end{aligned}$$

▶ 定理 5.5.6 设随机向量 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $C = (c_{ij})_{m\times n}$, 则

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{X} \sim N_m(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, C\Sigma C^\top).$$

证: 记 $\mathbf{X}$ 的 c.f. 为 $f_\mathbf{X}$, 则 $\mathbf{Y}$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned} f_\mathbf{Y}(\mathbf{t}) &= \mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top C\mathbf{X}\} = \mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}\,(C^\top\mathbf{t})^\top\mathbf{X}\} \\ &= f_\mathbf{X}(C^\top\mathbf{t}) \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\,(C^\top\mathbf{t})^\top\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}(C^\top\mathbf{t})^\top\Sigma C^\top\mathbf{t}\right\} \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top(C\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top(C\Sigma C^\top)\,\mathbf{t}\right\}, \quad \mathbf{t}\in\Re^m. \end{aligned}$$

▶ 推论 5.5.1 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, Σ 非退化, 则存在 n 阶正交阵 C 使得

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{X} \sim N_m(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \Lambda), \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

- **定理 5.5.6** 设随机向量 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $C = (c_{ij})_{m\times n}$, 则

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{X} \sim N_m(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, C\Sigma C^\top).$$

证: 记 $\mathbf{X}$ 的 c.f. 为 $f_\mathbf{X}$, 则 $\mathbf{Y}$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned} f_\mathbf{Y}(\mathbf{t}) &= \mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top C\mathbf{X}\} = \mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}\,(C^\top\mathbf{t})^\top\mathbf{X}\} \\ &= f_\mathbf{X}(C^\top\mathbf{t}) \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\,(C^\top\mathbf{t})^\top\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}(C^\top\mathbf{t})^\top\Sigma C^\top\mathbf{t}\right\} \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top(C\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top(C\Sigma C^\top)\,\mathbf{t}\right\}, \quad \mathbf{t} \in \Re^m. \end{aligned}$$

- **推论 5.5.1** 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, Σ 非退化, 则存在 n 阶正交阵 C 使得

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{X} \sim N_m(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \Lambda), \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

- **定理 5.5.6** 设随机向量 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $C = (c_{ij})_{m\times n}$, 则

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{X} \sim N_m(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, C\Sigma C^\top).$$

证: 记 $\mathbf{X}$ 的 c.f. 为 $f_{\mathbf{X}}$, 则 $\mathbf{Y}$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) &= \mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top C\mathbf{X}\} = \mathrm{E}\exp\{\mathrm{i}\,(C^\top\mathbf{t})^\top\mathbf{X}\} \\ &= f_{\mathbf{X}}(C^\top\mathbf{t}) \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\,(C^\top\mathbf{t})^\top\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}(C^\top\mathbf{t})^\top\Sigma C^\top\mathbf{t}\right\} \\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top(C\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\mathbf{t}^\top(C\Sigma C^\top)\,\mathbf{t}\right\}, \quad \mathbf{t}\in\Re^m. \end{aligned}$$

- **推论 5.5.1** 设 $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, Σ 非退化, 则存在 n 阶正交阵 C 使得

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{X} \sim N_m(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \Lambda), \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

- 定理 5.5.7 设 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$, 则

$$\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \iff \mathbf{s}^\top \mathbf{X} \sim N(\mathbf{s}^\top \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}^\top \Sigma \mathbf{s}), \ \forall \mathbf{s} \in \Re^n.$$

证: 充分利用: $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \iff \mathbf{X}$ 的 c.f. 为

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left\{ \mathrm{i}\, \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{t}^\top \Sigma \mathbf{t} \right\}, \quad \mathbf{t} \in \Re^n.$$

- **定理 5.5.7** 设 $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^\top$，则

$$\mathbf{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\Sigma) \iff \mathbf{s}^\top\mathbf{X}\sim N(\mathbf{s}^\top\boldsymbol{\mu},\mathbf{s}^\top\Sigma\mathbf{s}),\ \forall\,\mathbf{s}\in\Re^n.$$

证: 充分利用: $\mathbf{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\Sigma)\iff\mathbf{X}$ 的 c.f. 为

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})=\exp\left\{\mathrm{i}\,\mathbf{t}^\top\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\mathbf{t}^\top\Sigma\mathbf{t}\right\},\quad \mathbf{t}\in\Re^n.$$

- 【例 5.5.2】 设 X, Y iid $\sim N(0,1)$, 定义

$$Z = \begin{cases} |Y|, & X \geq 0, \\ -|Y|, & X < 0, \end{cases}$$

则 $Z \sim N(0,1)$, $\mathrm{P}(Y+Z=0) = 1/2$, (Y, Z) 不服从二元正态分布.

证: 对任意 $x \in \Re$,

$$\mathrm{P}(Z \leq x) = \frac{1}{2}\big[\mathrm{P}(|Y| \leq x) + \mathrm{P}(-|Y| \leq x)\big].$$

当 $x \geq 0$ 时,

$$\mathrm{P}(Z \leq x) = \frac{1}{2}\big[\mathrm{P}(|Y| \leq x) + 1\big] = \Phi(x).$$

当 $x < 0$ 时,

$$\mathrm{P}(Z \leq x) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(-|Y| \leq x) = \frac{1}{2}\big[\mathrm{P}(Y \leq x) + \mathrm{P}(Y \geq -x)\big] = \Phi(x).$$

······ ▮

- 【例 5.5.2】 设 X, Y iid $\sim N(0,1)$, 定义
$$Z = \begin{cases} |Y|, & X \geq 0, \\ -|Y|, & X < 0, \end{cases}$$
则 $Z \sim N(0,1)$, $\mathrm{P}(Y+Z=0) = 1/2$, (Y, Z) 不服从二元正态分布.

证: 对任意 $x \in \Re$,
$$\mathrm{P}(Z \leq x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{P}(|Y| \leq x) + \mathrm{P}(-|Y| \leq x)\right].$$
当 $x \geq 0$ 时,
$$\mathrm{P}(Z \leq x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{P}(|Y| \leq x) + 1\right] = \Phi(x).$$
当 $x < 0$ 时,
$$\mathrm{P}(Z \leq x) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(-|Y| \leq x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{P}(Y \leq x) + \mathrm{P}(Y \geq -x)\right] = \Phi(x).$$

$\cdots\cdots$ ∎

- 【例 5.5.3】 设 X_1, X_2, X_3 iid $\sim N(a, \sigma^2)$, 定义
$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3), \qquad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2),$$
求 $\mathrm{Var}\,(Y_1 Y_2)$.

解: 首先，验证 $Y_1 \sim N(\sqrt{3}a, \sigma^2)$, $Y_2 \sim N(0, \sigma^2)$ 且相互独立. 于是,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(Y_1 Y_2) &= \mathrm{E}\,[Y_1^2 Y_2^2] - (\mathrm{E}\,Y_1 \cdot \mathrm{E}\,Y_2)^2 = \mathrm{E}\,[Y_1^2 Y_2^2] \\ &= \mathrm{E}\,[Y_1^2] \cdot \mathrm{E}\,[Y_2^2] = (\sigma^2 + 3a^2)\sigma^2.\end{aligned}$$

- 【例 5.5.3】 设 X_1, X_2, X_3 iid $\sim N(a, \sigma^2)$, 定义
$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3), \qquad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2),$$
求 $\mathrm{Var}\,(Y_1 Y_2)$.

解: 首先，验证 $Y_1 \sim N(\sqrt{3}a, \sigma^2)$, $Y_2 \sim N(0, \sigma^2)$ 且相互独立. 于是,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(Y_1 Y_2) &= \mathrm{E}\,[Y_1^2 Y_2^2] - (\mathrm{E}\,Y_1 \cdot \mathrm{E}\,Y_2)^2 = \mathrm{E}\,[Y_1^2 Y_2^2] \\ &= \mathrm{E}\,[Y_1^2] \cdot \mathrm{E}\,[Y_2^2] = (\sigma^2 + 3a^2)\sigma^2.\end{aligned}$$

5.6.1 χ^2 分布

- **定义 5.6.1** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\sim N(0,1)$, 则称

$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \sim \chi_n^2.$$

※ χ_n^2 的 pdf 为

$$p_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} e^{-x/2} x^{n/2-1}, \quad x > 0.$$

※ 再生性：$Y_1 \sim \chi_n^2$, $Y_2 \sim \chi_m^2$ 相互独立 $\Longrightarrow Y_1 + Y_2 \sim \chi_{m+n}^2$.

※ 设 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 则 $2\lambda X \sim \chi_2^2$.

5.6.1 χ^2 分布

- **定义 5.6.1** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\sim N(0,1)$, 则称

$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \sim \chi_n^2.$$

※ χ_n^2 的 pdf 为

$$p_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} e^{-x/2} x^{n/2-1}, \quad x > 0.$$

※ 再生性：$Y_1 \sim \chi_n^2$, $Y_2 \sim \chi_m^2$ 相互独立 $\Longrightarrow Y_1 + Y_2 \sim \chi_{m+n}^2$.

※ 设 $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 则 $2\lambda X \sim \chi_2^2$.

5.6.2 t 分布

- **定义 5.6.2** 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2_n$, X 与 Y 相互独立, 则称

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_n.$$

※ t_n 的 pdf 为

$$p_n(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad x \in \Re.$$

※ $t_n \xrightarrow{d} N(0,1)$.

5.6.2 t 分布

- **定义 5.6.2** 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2_n$, X 与 Y 相互独立, 则称

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_n.$$

※ t_n 的 pdf 为

$$p_n(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad x \in \Re.$$

※ $t_n \xrightarrow{d} N(0,1)$.

5.6.3 F 分布

- 定义 5.6.3 设 $X \sim \chi_m^2$, $Y \sim \chi_n^2$, X 与 Y 相互独立, 则称

$$Z = \frac{X/m}{Y/n} \sim F_{m,n}.$$

※ $Z \sim F_{m,n} \Longrightarrow 1/Z \sim F_{n,m}.$

5.6.3 F 分布

- 定义 5.6.3 设 $X \sim \chi_m^2$, $Y \sim \chi_n^2$, X 与 Y 相互独立, 则称

$$Z = \frac{X/m}{Y/n} \sim F_{m,n}.$$

※ $Z \sim F_{m,n} \Longrightarrow 1/Z \sim F_{n,m}.$

5.6.4 应用

- **定理** 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\sim N(\mu, \sigma^2)$, 记

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2,$$

则

- $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$,

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

- $\overline{X}$ 与 S_X^2 相互独立, 且

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

-

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{S_X} \sim t_{n-1}.$$

作业

第 5 章第三次作业

§5.3: 3, 4, 8, 12

§5.4: 7, 8

§5.5: 3, 6, 7