HOMEWORK 12

5.20. 设 $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_j \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \longleftrightarrow H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

而 $\frac{Q_1^2/\sigma_1^2(6-1)}{Q_2^2/\sigma_2^2(9-1)} \sim F_{5,8}$，则 H_0 下，$\frac{Q_1^2}{Q_2^2}\cdot\frac{8}{5} \sim F_{5,8}$，记 $F_* = \frac{Q_1^2}{Q_2^2}\cdot\frac{8}{5}$

则水平为 α 的拒绝域为 $\{F_* > F_{5,8}(\frac{\alpha}{2})$ 或 $F_* < F_{5,8}(1-\frac{\alpha}{2})\}$

计算知 $F_* = 0.966$，$\alpha = 0.02$，查表有 $F_{5,8}(0.01) = 6.63$，$F_{5,8}(0.99) = \frac{1}{10.29} = 0.097$

$0.097 < 0.966 < 6.63$，故不能拒绝 H_0

即认为两机床方差无显著差异.

5.22. Step1. 先检验方差有无显著差异

设 I 期患者肺活量 $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$，II 期肺活量 $Y_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$H_0^1: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1^1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

考虑检验统计量 $F_* = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

则 $\alpha = 0.1$ 时，拒绝域为 $\{F_* > F_{32,32}(0.05)$ 或 $F_* < F_{32,32}(0.95)\}$

计算知 $F_* = (\frac{147}{113})^2 = 1.552$，$F_{32,32}(0.05) = 1.804$，$F_{32,32}(0.95) = 0.554$

水平 0.1 下不能拒绝 H_0^1

Step2. 认为方差相同，检验均值是否有显著差异

设 I 期：$X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$　II 期：$Y_i \sim N(\mu_2, \sigma^2)$

$H_0^2: \mu_1 = \mu_2$　　$H_1^2: \mu_1 \neq \mu_2$

考虑 $T = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{S_W} \cdot \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$，$S_W^2 = \frac{1}{m+n-2}((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)$，$m = n = 33$

$T|_{H_0^2} \sim t_{m+n-2}$

则水平 $\alpha = 0.1$ 的拒绝域为 $\{|T| > t_{64}(0.05)\}$

计算知 $T = \frac{2830-2710}{\sqrt{\frac{1}{64}(32\times147^2 + 32\times183^2)}} \cdot \sqrt{\frac{33^2}{66}} = 3.601 > t_{64}(0.05) = 1.669$

拒绝 H_0^2

综上，认为 I, II 期患者肺活量有显著差异.

补充1: $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$, $n\geq 4$. $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$ 未知. 求 μ, $\eta=\frac{1}{\sigma^2}$ 的水平为 $1-\alpha$ 的最短枢轴区间.

(1) $T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t_{n-1}$ 为枢轴, 其密度 f 单峰, 对称, 在0处达到极大

故考虑 $\int_{-a}^{a} f = 1-\alpha \Rightarrow a=t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$

由 $|T|\leq t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$ 得置信水平 $1-\alpha$ 的最短枢轴区间为

$$\left[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\tfrac{\alpha}{2}),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\tfrac{\alpha}{2})\right].$$

(2) $Q=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$ 为枢轴, $n\geq 4$时其p.d.f. g 单峰, 有唯一极大值

近似地取 $a=\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$, $b=\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$, 则 $\int_a^b g=1-\alpha$

由 $a\leq\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leq b$ 得 $\eta=\frac{1}{\sigma^2}$ 水平 $1-\alpha$ 的最短枢轴区间为

$$\left[\frac{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}{(n-1)S^2},\ \frac{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})}{(n-1)S^2}\right]$$

□

补充2: $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim f(x|\lambda)=e^{-(x-\lambda)}1(x>\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$. 求 λ 的水平 $1-\alpha$ 的最短枢轴区间

易见 $X_{(1)}$ 是 λ 的充分统计量

令 $Y_i=X_i-\lambda$, 则其 p.d.f. 为 $g(y|\lambda)=e^{-y}\cdot 1(y>0)$

$\Rightarrow X_{(1)}-\lambda=Y_{(1)}\triangleq T$ 有 p.d.f. $h(t)=ne^{-nt}1(t>0)$, 与λ无关

故 $T=X_{(1)}-\lambda$ 是枢轴

又因 $h(t)$ 关于 t 递减, 故取 a s.t. $\int_0^a h(t)dt=1-\alpha \Rightarrow a=-\frac{1}{n}\ln\alpha$

由 $0<X_{(1)}-\lambda\leq-\frac{1}{n}\ln\alpha$ 得

λ的水平 $1-\alpha$ 的最短枢轴区间为: $[X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln\alpha,\ X_{(1)})$

□

6-1 甲: $X_1,\cdots,X_8$; 乙: $Y_1,\cdots,Y_8$; $Z_i=X_i-Y_i$

(1) Z_i i.i.d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$. $H_0:\mu=0\longleftrightarrow H_1:\mu>0$

检验统计量 $T=\frac{\sqrt{n}\bar{Z}}{S}\Big|_{H_0}\sim t_{n-1}$, 则水平$\alpha$的拒绝域为 $\{T>t_{n-1}(\alpha)\}$

$\bar{z}=17.375$, $s^2=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(z_i-\bar{z})^2=452.5536 \Rightarrow T=2.310>t_7(0.05)=1.895$

拒绝 H_0.

即可认为甲是对乙的改良

(2) H_0': 甲不是对乙的改良 $\longleftrightarrow$ H_1': 甲是对乙的改良

- 符号检验

Z_i	58	32	30	5	-7	11	0	10
S_i	+	+	+	+	−	+	不定	+

$n_+=6,\ n_-=1,\quad n=n_++n_-=7$

拒绝域 $\{n_+\geq c\}$ 查表知 $n=7,\alpha=0.05$ 时 $c=7$，$n_+=6<7$

故甲不是对乙的改良.

- 符号秩和检验:

Z_i	58	32	30	5	-7	11	0	10
V_i	1	1	1	1	0	1		1
R_i	7	6	5	1	2	4		3

$n=7,\quad W^+=\sum_i V_iR_i=26$

$\alpha=0.05$ 时，查表知，拒绝域为 $\{W^+\geq 25\}$，故拒绝 H_0

即甲是对乙的改良.

6-2 东: $X_1,\cdots,X_{10}$ 西: $Y_1,\cdots,Y_{10}$ 令 $Z_i=X_i-Y_i$

H_0: 东西段含铜量无显著差异 $\longleftrightarrow$ H_1: 东西段含铜量有显著差异

Z_i	8	9	-9	22	-37	-3	5	35	-17	2
S_i	+	+	-	+	-	-	+	+	-	+

$n_+=6,\quad n_-=4,\quad n=10$

拒绝域为 $\{n_+\geq c$ 或 $n_+\leq d\}$，$P(n_+\geq c|H_0)=P(n_+\leq d|H_0)=\frac{\alpha}{2}$

查表知，$\alpha=0.1$ 时，$c=9$，$d=n-c=1$，$1<6<9$

故不能拒绝 H_0 $\Rightarrow$ 东西含铜量无显著差异

6-3. H_0: 不推广新饲料 $\longleftrightarrow$ H_1: 推广新饲料

$Z_i:=X_i-Y_i$，$i=1,\cdots,9$.

Z_i	5	-2	0	4	2	-1	3	7	-6
S_i	+	-		+	+	-	+	+	-
V_i	1	0		1	1	0	1	1	0
R_i	6	2.5		5	2.5	1	4	8	7

- 符号检验: $n_+=5,\quad n_-=3,\quad n=8$

  $\alpha=0.05$ 时，查表知 $P(n_+\geq 7|H_0)\leq 0.05$

  拒绝域为 $\{n_+\geq 7\}$，则不能推广新饲料.

- 符号秩和: $W^+=\sum_i V_iR_i=25.5$

  查表知 $P(W_+\geq 31|H_0)\leq 0.05$，

  拒绝域为 $\{W_+\geq 31\}$，则不能推广新饲料.

注：符号检验，秩和检验的分布表是由B(n,1/2)导出的，故取“无差异”为零假设