概率论

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥

2023 年 9 月

课程介绍

概率论与数理统计是研究不确定性的学科:

- 概率论是研究随机现象规律性的一门科学，而统计学主要研究如何有效地收集，整理数据，并从这些数据中挖掘出有用的信息.
- 概率论是数理统计的理论基础, 是数理统计的根; 数理统计是概率论的直接应用.
- 数理统计与一般统计学（又称为描述性统计学）的最大区别就在于是否在处理数据的过程中应用概率论.

教材

苏淳,《概率论》(第 2 版), 科学出版社, 2010 年.
苏淳, 冯群强,《概率论》(第 3 版), 科学出版社, 2020 年.

成绩计算

平时作业（20%）+ 期中考试（30%）+ 期末考试（50%）

习题课的重要性

期中考试时间（第四章结束）

成绩计算

平时作业（20%）+ 期中考试（30%）+ 期末考试（50%）

习题课的重要性

期中考试时间（第四章结束）

课程目的

- 掌握初等概率（基于微积分）的基本理论
- 培养解决实际问题的概率直观和洞察力（方法、思路和技巧）
- 激发对随机数学课程学习的兴趣

第 1 章　　预备知识

(3 课时)

§1.1 随机现象和随机事件

- ▷ 自然与社会现象：确定性现象、偶然性现象
- ▷ 偶然和必然是人们认识世界过程中一个永恒的话题

数学

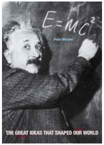
欧拉

L. Euler
1707—1783

$e^{i\pi}+1=0$

最美的公式

物理

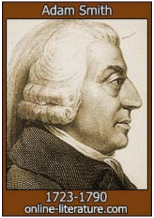


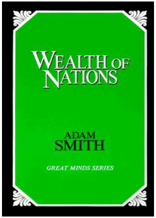
爱因斯坦
A. Einstein
(1879-1955)

$$E = MC^2$$

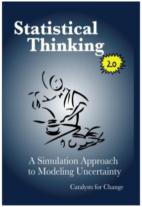
有规律 发现规律

自然科学的确定性





没有规律 创造规律



社会科学的不确定性

- ▷ 各门学科研究的是带有普遍性的规律
- ▷ 带有这种普遍性规律的现象往往是必然的.
- ▷ 概率论的任务：从偶然中悟出必然！

概率论发展史

分赌本问题

从远古到1653年

❖萌芽时期：以计数为工具来研究赌博和占卜中的一些问题及人口统计问题

从1654到1811年

❖古典概率时期：以代数分析、组合方法为工具主要研究离散型随机变量

从1812到1932年

❖分析概率时期：以特征函数、微分方程、差分方程为工具，主要研究连续性随机变量

从1933至今

❖现代概率时期：1933年概率公理化体系，现代分析工具（集合论和测度论）

1900世界数学家大会，Hilbert 提出23个数学问题中的第6个

- **定义** 一个试验称为随机试验，若该试验满足以下三条：
  - 在相同条件下可重复进行；
  - 所有的试验结合是明确可知的，并且不知一个；
  - 每次试验恰好出现这些结果中的一个，但在试验之前无法预知该结果.

※ 基本概念：

- 样本点 (w)：基本试验结果
- 样本空间 (Ω)
- (随机) 事件：基本随机事件、复杂随机事件
- 特殊事件：必然事件 Ω、不可能事件 $\emptyset$

- **定义** 一个试验称为随机试验，若该试验满足以下三条：
  - 在相同条件下可重复进行；
  - 所有的试验结合是明确可知的，并且不知一个；
  - 每次试验恰好出现这些结果中的一个，但在试验之前无法预知该结果.

※ **基本概念**：

- 样本点 (w)： 基本试验结果
- 样本空间 (Ω)
- (随机) 事件： 基本随机事件、复杂随机事件
- 特殊事件：必然事件 Ω、不可能事件 $\emptyset$

事件与随机事件的区别：

在通常意义下，事件是指对已发生的情况的描述；但随机事件是对某种或某些情况的一种陈述，可能已发生，也可能没有发生. 今后，随机事件简记为事件.

术语：事件 A 发生、事件 A 不发生

【例 1.1.a】

(1) 一盒中装有编号 $1, 2, \ldots, n$ 的小球，随机选取一个:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

(2) 一段时间某部电话接受的电话呼叫： $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(3) 测量某地水温： $\Omega = [0, 100]$.

事件与随机事件的区别:

在通常意义下，事件是指对已发生的情况的描述；但随机事件是对某种或某些情况的一种陈述，可能已发生，也可能没有发生. 今后，随机事件简记为事件.

术语：事件 A 发生、事件 A 不发生

【例 1.1.a】

(1) 一盒中装有编号 $1, 2, \ldots, n$ 的小球，随机选取一个:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

(2) 一段时间某部电话接受的电话呼叫： $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(3) 测量某地水温： $\Omega = [0, 100]$.

事件与随机事件的区别:

在通常意义下，事件是指对已发生的情况的描述；但随机事件是对某种或某些情况的一种陈述，可能已发生，也可能没有发生. 今后，随机事件简记为事件.

术语：事件 A 发生、事件 A 不发生

【例 1.1.a】

(1) 一盒中装有编号 $1, 2, \ldots, n$ 的小球，随机选取一个:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

(2) 一段时间某部电话接受的电话呼叫： $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(3) 测量某地水温： $\Omega = [0, 100]$.

【例 1.1.b】 抛掷两枚硬币，写成样本点与样本空间.

解：将硬币区分为第一枚和第二枚，用“H”表示一枚硬币正面朝上，用“T”表示反面朝上，于是样本点有 4 个：

HH：第一枚硬币正面朝上，第二枚正面朝上；

HT：第一枚硬币正面朝上，第二枚反面朝上；

TH：第一枚硬币反面朝上，第二枚正面朝上；

TT：第一枚硬币反面朝上，第二枚反面朝上.

样本空间：$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$. ∎

※ 有时扩大 Ω 使其包含所有的试验结果，这种做法是有益的.

※ 概率论的任务之一：研究随机事件的发生规律。
出发点：由基本事件到复杂事件.

【例 1.1.b】 抛掷两枚硬币，写成样本点与样本空间.

解：将硬币区分为第一枚和第二枚，用“H”表示一枚硬币正面朝上，用“T”表示反面朝上，于是样本点有 4 个:

HH: 第一枚硬币正面朝上，第二枚正面朝上;

HT: 第一枚硬币正面朝上，第二枚反面朝上;

TH: 第一枚硬币反面朝上，第二枚正面朝上;

TT: 第一枚硬币反面朝上，第二枚反面朝上.

样本空间：$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$. ∎

※ 有时扩大 Ω 使其包含所有的试验结果，这种做法是有益的.

※ 概率论的任务之一：研究随机事件的发生规律。
出发点: 由基本事件到复杂事件.

【例 1.1.b】 抛掷两枚硬币，写成样本点与样本空间.

解：将硬币区分为第一枚和第二枚，用“H”表示一枚硬币正面朝上，用“T”表示反面朝上，于是样本点有 4 个:

HH: 第一枚硬币正面朝上，第二枚正面朝上;
HT: 第一枚硬币正面朝上，第二枚反面朝上;
TH: 第一枚硬币反面朝上，第二枚正面朝上;
TT: 第一枚硬币反面朝上，第二枚反面朝上.

样本空间：$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$. ∎

※ 有时扩大 Ω 使其包含所有的试验结果，这种做法是有益的.

※ 概率论的任务之一：研究随机事件的发生规律。
出发点: 由基本事件到复杂事件.

事件	$\longleftrightarrow$	集合
事件运算	$\longleftrightarrow$	集合运算

- 事件运算：并、交、余、对称差
  - 并：$A \cup B$
  - 交：$A \cap B$
  - 余：A^c 或 $\overline{A}$
  - 差：$A - B$ 或 $A \backslash B$
  - 对称差：$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

※ 互斥事件、互不相容事件、余事件、对立事件、补事件

事件	$\longleftrightarrow$	集合
事件运算	$\longleftrightarrow$	集合运算

- 事件运算：并、交、余、对称差
  - 并：$A \cup B$
  - 交：$A \cap B$
  - 余：A^c 或 $\overline{A}$
  - 差：$A - B$ 或 $A \backslash B$
  - 对称差：$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

※ 互斥事件、互不相容事件、余事件、对立事件、补事件

设 $\{A_j, j \in J\}$ 为一事件族

- 记号：

$$\sup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} A_j, \qquad \inf_{j\in J} A_j = \bigcap_{j\in J} A_j.$$

特别，当 $J = \emptyset$ 时，定义

$$\bigcup_{j\in J} A_j = \emptyset, \qquad \bigcap_{j\in J} A_j = \Omega.$$

- 并交运算满足交换律、结合律、分配律

$$B \cap \left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \bigcup_{j\in J} (B \cap A_j), \quad B \cup \left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \bigcap_{j\in J} (B \cup A_j).$$

- 对偶原理（De Morgan 法则）：对于任意事件族 $\{A_j, j \in J\}$,

$$\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right)^c = \bigcap_{j\in J} A_j^c, \qquad \left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)^c = \bigcup_{j\in J} A_j^c.$$

- 事件的关系：包含、相等
    - 单调增事件序列 $\{A_n, n \geq 1\}$, 记为 $A_n \uparrow$;
    - 单调减事件序列 $\{A_n, n \geq 1\}$, $A_n \downarrow$.
- 命题 1.2.a 设 $\{A_i, i = 1, \ldots, n\}$ 为一事件族 (n 有限或无限), 则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{k=1}^{n}\left(A_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right).$$

微积分中实数序列的极限相关内容：

1. 单调序列 a_n 的极限存在性；
2. 任意序列 a_n 的上、下极限可以表示为单调序列的极限：

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k;$$

3. $\lim a_n$ 存在当且仅当 $\limsup a_n = \liminf a_n$.
4. 函数 $f(x)$ 于 x_0 点的连续性：左连续和右连续

实数序列 $\{a_n\}$ $\longrightarrow$ 事件序列 $\{A_n\}$

$\limsup a_n, \liminf a_n, \lim a_n$ $\longrightarrow$ $\limsup A_n, \liminf A_n, \lim A_n$

函数左连续和右连续 $\longrightarrow$ 概率 P 的下连续和上连续

微积分中实数序列的极限相关内容:

---

1. 单调序列 a_n 的极限存在性;
2. 任意序列 a_n 的上、下极限可以表示为单调序列的极限:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k;$$

3. $\lim a_n$ 存在当且仅当 $\limsup a_n = \liminf a_n$.
4. 函数 $f(x)$ 于 x_0 点的连续性: 左连续和右连续

实数序列 $\{a_n\}$	$\longrightarrow$	事件序列 $\{A_n\}$
$\limsup a_n$, $\liminf a_n$, $\lim a_n$	$\longrightarrow$	$\limsup A_n$, $\liminf A_n$, $\lim A_n$
函数左连续和右连续	$\longrightarrow$	概率 P 的下连续和上连续

- 事件序列的极限

考虑事件序列 $\{A_n\}$, 定义

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{w : \text{有无穷多个 } A_k \text{ 包含 } w\}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \{A_n, \text{i.o.}\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{w : \text{除有限个 } A_k \text{ 外其余皆包含 } w\}.$$

可以证明:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k,$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k.$$

- 事件序列 $\{A_n\}$ 收敛: 称 $\{A_n\}$ 收敛, 当且仅当

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

记收敛的极限为 $\lim A_n$.

- 若 $A_n \uparrow$, 则 $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (按收敛定义验证).
- 若 $A_n \downarrow$, 则 $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (按收敛定义验证).
- 命题 1.2.b

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{m\to\infty} \sup_{k\geq m} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{m\to\infty} \inf_{k\geq m} A_k.$$

- 古典概型: 试验结果有限、等可能性.
  - 试验结果的“等可能性”：设一个试验有有限个试验结果 $\{e_1, \ldots, e_n\}$. 若找不到理由认为一个试验结果比另一个试验结果更易于发生.
  - 等可能性是一个理想的假设。以掷骰子为例，要求质地均匀、标准的正六面体、从足够高的高处下落等.
- 古典概型应用: 在概率论中占有重要地位.
  - 模型简单，有助于理解许多基本概念；
  - 在产品抽检和理论物理中有应用.
- 古典概率：

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

其中 $|A|$ 是 A 的有利场合数，$|\Omega|$ 表示样本空间大小.

以下举例说明如何套用古典概型.

【例1.3.a】 一个简单的摸球模型. 说明如何套用古典概型.

一个盒子中有 m 个红球和 n 个白球，从中任意摸取一个球，求取出白色球的概率.

【例1.3.b】 （分赌注问题）

甲乙两人赌技相同，各出赌注 500元，约定 5 局 3 胜制，谁先胜 3 局，则可以拿走 1000 元. 现已赌 3 局，甲 2 胜 1 负，而因故需要终止赌博，问该如何公平地分赌注？

以下举例说明如何套用古典概型.

【例1.3.a】 一个简单的摸球模型. 说明如何套用古典概型.

一个盒子中有 m 个红球和 n 个白球，从中任意摸取一个球，求取出白色球的概率.

【例1.3.b】 （分赌注问题）

甲乙两人赌技相同，各出赌注 500元，约定 5 局 3 胜制，谁先胜 3 局，则可以拿走 1000 元. 现已赌 3 局，甲 2 胜 1 负，而因故需要终止赌博，问该如何公平地分赌注？

【例1.3.4】 从 5 双不同尺码的鞋子中随机取出 4 只，求以下事件概率.

事件 A: 4 只鞋任意 2 只不成双;
事件 B: 2 只鞋成双, 另 2 只不成双;
事件 C: 4 只鞋恰成两双.

解：按组合计数, 视所有鞋各不相同.

$$|\Omega| = \binom{10}{4} = 210, \qquad |A| = \binom{5}{4} \cdot 2^4 = 80,$$

$$|B| = \binom{5}{1}\binom{4}{2}2^2 = 120, \qquad |C| = \binom{5}{2} = 10,$$

$$\Longrightarrow \mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{21}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{4}{7}, \quad \mathrm{P}(C) = \frac{1}{21}.$$

【例1.3.4】 从 5 双不同尺码的鞋子中随机取出 4 只，求以下事件概率.

事件 A: 4 只鞋任意 2 只不成双;
事件 B: 2 只鞋成双, 另 2 只不成双;
事件 C: 4 只鞋恰成两双.

解：按组合计数, 视所有鞋各不相同.

$$|\Omega| = \binom{10}{4} = 210, \qquad |A| = \binom{5}{4} \cdot 2^4 = 80,$$

$$|B| = \binom{5}{1}\binom{4}{2}2^2 = 120, \qquad |C| = \binom{5}{2} = 10,$$

$$\Longrightarrow \mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{21}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{4}{7}, \quad \mathrm{P}(C) = \frac{1}{21}.$$

【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫, 其中有 7 只白猫, 3 只黑猫. 把笼门打开一个小口, 使得每次只能钻出一只猫. 猫争先恐后往外钻. 如果 10 只猫全部钻出笼子, 以 A_k 记“第 k 只钻出的猫是黑猫”的事件, 求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法一: 按“猫可辨, 排列”计数:

$$|\Omega| = 10!, \qquad |A_k| = 3 \cdot 9! \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

解法二: 按“同色猫不可辨”计数: 样本点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ 是由黑猫钻出笼子的时刻确定, $x_i = 0$ (第 i 次钻出白猫), $x_i = 1$ (第 i 次钻出黑猫), $i = 1, \ldots, 10$.

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120, \qquad |A_k| = \binom{9}{2} = 36 \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫, 其中有 7 只白猫, 3 只黑猫. 把笼门打开一个小口, 使得每次只能钻出一只猫. 猫争先恐后往外钻. 如果 10 只猫全部钻出笼子, 以 A_k 记 "第 k 只钻出的猫是黑猫" 的事件, 求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法一: 按 "猫可辨, 排列" 计数:

$$|\Omega| = 10!, \qquad |A_k| = 3 \cdot 9! \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

解法二: 按 "同色猫不可辨" 计数: 样本点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ 是由黑猫钻出笼子的时刻确定, $x_i = 0$ (第 i 次钻出白猫), $x_i = 1$ (第 i 次钻出黑猫), $i = 1, \ldots, 10$.

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120, \qquad |A_k| = \binom{9}{2} = 36 \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫，其中有 7 只白猫，3 只黑猫．把笼门打开一个小口，使得每次只能钻出一只猫．猫争先恐后往外钻．如果 10 只猫全部钻出笼子，以 A_k 记“第 k 只钻出的猫是黑猫”的事件，求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法一：按“猫可辨，排列”计数：

$$|\Omega| = 10!, \qquad |A_k| = 3 \cdot 9! \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

解法二：按“同色猫不可辨”计数：样本点 $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ 是由黑猫钻出笼子的时刻确定，$x_i = 0$（第 i 次钻出白猫），$x_i = 1$（第 i 次钻出黑猫），$i = 1, \ldots, 10$.

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120, \qquad |A_k| = \binom{9}{2} = 36 \implies \mathrm{P}(A_k) = \frac{3}{10}.$$

【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫, 其中有 7 只白猫, 3 只黑猫. 把笼门打开一个小口, 使得每次只能钻出一只猫. 猫争先恐后往外钻. 如果 10 只猫全部钻出笼子, 以 A_k 记 "第 k 只钻出的猫是黑猫" 的事件, 求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法三: 按 "猫可辨, 排列" 计数, 只考虑前 k 只出笼的猫情况:

$$|\Omega| = \binom{10}{k} k!, \qquad |A_k| = \binom{3}{1}\binom{9}{k-1}(k-1)!,$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}.$$

※ 对于一个问题的求解要采用同一模式去计算 $|A|$ 和 $|\Omega|$;

※ "$\mathrm{P}(A_k)$ 与 k 无关" 说明了抽签中签的概率与抽签次序无关.

【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫, 其中有 7 只白猫, 3 只黑猫. 把笼门打开一个小口, 使得每次只能钻出一只猫. 猫争先恐后往外钻. 如果 10 只猫全部钻出笼子, 以 A_k 记 "第 k 只钻出的猫是黑猫" 的事件, 求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法三: 按 "猫可辨, 排列" 计数, 只考虑前 k 只出笼的猫情况:

$$|\Omega| = \binom{10}{k} k!, \qquad |A_k| = \binom{3}{1}\binom{9}{k-1}(k-1)!,$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}.$$

※ 对于一个问题的求解要采用同一模式去计算 $|A|$ 和 $|\Omega|$;

※ "$\mathrm{P}(A_k)$ 与 k 无关" 说明了抽签中签的概率与抽签次序无关.

【例1.3.5】 一笼子中有 10 只猫, 其中有 7 只白猫, 3 只黑猫. 把笼门打开一个小口, 使得每次只能钻出一只猫. 猫争先恐后往外钻. 如果 10 只猫全部钻出笼子, 以 A_k 记"第 k 只钻出的猫是黑猫"的事件, 求 $\mathrm{P}(A_k)$, $1 \le k \le 10$.

解法三: 按"猫可辨, 排列"计数, 只考虑前 k 只出笼的猫情况:

$$|\Omega| = \binom{10}{k} k!, \qquad |A_k| = \binom{3}{1}\binom{9}{k-1}(k-1)!,$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}.$$

※ 对于一个问题的求解要采用同一模式去计算 $|A|$ 和 $|\Omega|$;

※ "$\mathrm{P}(A_k)$ 与 k 无关"说明了抽签中签的概率与抽签次序无关.

1.4.1 一些计数模式

- A. 多组组合
  - 有编号的分组模式：n 个不同元素，分成 k 个不同组，每组分别有 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 个元素 $(n = \sum_{i=1}^{k} n_i)$，则不同的分发数为
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$
  - 不尽相异元素的排列模式：n 个元素，属于不同的 k 类，同类之间元素不可辨，每类元素分别有 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 个（$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$），则 n 个元素的全排列的种数为
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$
[等同于将 n 个相异的位置分成 k 个不同的组，每组大小分别为 $n_1, n_2, \ldots, n_k$]

1.4.1 一些计数模式

▶ A. 多组组合

- 有编号的分组模式：n 个不同元素，分成 k 个不同组，每组分别有 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 个元素 $(n = \sum_{i=1}^{k} n_i)$，则不同的分发数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

- 不尽相异元素的排列模式：n 个元素，属于不同的 k 类，同类之间元素不可辨，每类元素分别有 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 个（$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$），则 n 个元素的全排列的种数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

[等同于将 n 个相异的位置分成 k 个不同的组，每组大小分别为 $n_1, n_2, \ldots, n_k$]

- B. 球盒模型: 将 n 小球分别放入 k 盒子里.
  - 球可辨、盒子可辨: 使得各盒子里的小球数分别为 $n_1, \ldots, n_k$ 的放法有
    $$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!},$$
    其中 $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_k}{n_k}.$$

§1.4 古典概型算例

- B. 球盒模型: 将 n 小球分别放入 k 盒子里.
  - 球不可辨、盒子可辨: 容许有空盒出现. 对于任何一种放法 $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, 依次把盒中小球取出, 摆放在该盒子右侧, 得如下图形。反之, 如下的盒子和小球摆放（第一个盒子摆放在最左侧）都对应到 n 个小球的一种放法. 容许空盒出现, 即在下图中容许两个盒子相邻.

$$\sqcup \underbrace{\circ\cdots\circ}_{n_1} \sqcup \underbrace{\circ\cdots\circ}_{n_2} \sqcup \cdots\cdots \sqcup \underbrace{\circ\cdots\circ}_{n_k},$$

$$\sqcup \underbrace{\circ\ \circ \sqcup \sqcup \circ\ \circ\ \circ \cdots\cdots \circ \sqcup \circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{n+k-1\text{个位置}}$$

因此, 所求的放法总数即为在上图的 $n+k-1$ 个位置选取 $k-1$ 个来放盒子的放法 $\binom{n+k-1}{k-1}$.

- B. 球盒模型: 将 n 小球分别放入 k 盒子里.
  - 球不可辨、盒子可辨情形等价表述：今有 k 种相异小球各若干个，从中取出 n 个，同型小球可以重复选取，则取球方式共有

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

分析如下：从盒中取球和放球为一一对应，所以本问题对应于 n 个不可辨小球放入 k 个可辨的盒子，求总的放球方式数.

⊛ 应用: 求方程 $x_1+\cdots+x_k=n$ 非负整数解 $(x_1,\ldots,x_n)$ 的个数.

- B. 球盒模型: 将 n 小球分别放入 k 盒子里.
  - 球不可辨、盒子可辨情形等价表述: 今有 k 种相异小球各若干个, 从中取出 n 个, 同型小球可以重复选取, 则取球方式共有

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

分析如下: 从盒中取球和放球为一一对应, 所以本问题对应于 n 个不可辨小球放入 k 个可辨的盒子, 求总的放球方式数.

⊛ 应用: 求方程 $x_1+\cdots+x_k=n$ 非负整数解 $(x_1,\ldots,x_n)$ 的个数.

- B. 球盒模型：将 n 小球分别放入 k 盒子里.
  - 球不可辨、盒子可辨：不容许有空盒出现，问有多少种放法？

    在上图的摆放过程中，不容许两个盒子相邻，盒子可以看作是插入在两个相邻小球之间的空位上. 因此，所考虑问题等价于在一字排开的 n 个小球之间的 $n-1$ 个空位中选择 $k-1$ 个来摆放余下的 $k-1$ 个盒子，总放法数为

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

⊛ 应用：求方程 $x_1+\cdots+x_k=n$ 正整数解 $(x_1,\ldots,x_n)$ 的个数.

- B. 球盒模型: 将 n 小球分别放入 k 盒子里.
  - 球不可辨、盒子可辨：不容许有空盒出现，问有多少种放法?

    在上图的摆放过程中，不容许两个盒子相邻，盒子可以看作是插入在两个相邻小球之间的空位上. 因此，所考虑问题等价于在一字排开的 n 个小球之间的 $n-1$ 个空位中选择 $k-1$ 个来摆放余下的 $k-1$ 个盒子，总放法数为

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

⊛ 应用: 求方程 $x_1+\cdots+x_k=n$ 正整数解 $(x_1,\ldots,x_n)$ 的个数.

- C. 不相邻问题

现有 A、B 两类不同的个体做全排列，使得 B 类中个体在排列中互不相邻. 求排列数.

引进等价排列机制：先将 A 类个体做全排列，然后在 A 类排列的每相邻两个个体之前插入一个空位，在 A 类个体的最左侧和最右侧各插入一个空位，再从这些空位中选取适当个数的空位来排列 B 类个体.

【例 1.4.a】 将 4 个男生和 3 个女生做全排列，使得 3 个女士互不相邻，求排列数.

解: 现将 4 个男生做全排列（排列数为 4!），男生用 □ 表示，然后再插入空位 (空位用 △ 表示)，见下图. 再从 5 个空位中选择出 3 个，把 3 个女生排列进去：

$$\triangle\ \square\ \triangle\ \square\ \triangle\ \square\ \triangle\ \square\ \triangle,$$

所以总排列的个数为 $4!\binom{5}{3}3! = 1440$. ∎

- C. 不相邻问题

现有 A、B 两类不同的个体做全排列，使得 B 类中个体在排列中互不相邻. 求排列数.

引进等价排列机制：先将 A 类个体做全排列，然后在 A 类排列的每相邻两个个体之前插入一个空位，在 A 类个体的最左侧和最右侧各插入一个空位，再从这些空位中选取适当个数的空位来排列 B 类个体.

【例 1.4.a】 将 4 个男生和 3 个女生做全排列，使得 3 个女士互不相邻，求排列数.

解: 现将 4 个男生做全排列（排列数为 4!），男生用 □ 表示，然后再插入空位 (空位用 Δ 表示)，见下图. 再从 5 个空位中选择出 3 个，把 3 个女生排列进去:

$$\Delta \ \square \ \Delta \ \square \ \Delta \ \square \ \Delta \ \square \ \Delta,$$

所以总排列的个数为 $4!\binom{5}{3}3! = 1440$. ∎

【例 1.4.b】 在编号为 1、2、3、4、5、6、7 的位置中挑选 3 个座位，使得这 3 个位置互不相邻，求挑选方法数.

解: 首先将 4 个座位排列好，在相邻的座位之间和所有座位最左侧和最右侧设置一个空位，再从这 5 个空位中选择 3 个空位。这一定满足条件。所以满足条件的挑选方法数为 $\binom{5}{3} = 10$ 种. ∎

【例 1.4.c】 在一个圆周上有 12 个点（依序编号为 1、2、$\cdots$、12），从这 12 个点中挑出 4 个点，使得这 4 个点互不相邻。求挑选方法数.

解: 分两种情形:

- 假设点 1 被挑出，则余下 3 点将从编号为 $\{3, 4, \ldots, 11\}$ 中挑出，且这 3 点互不相邻. 该情形下的挑选方法数为 $\binom{7}{3}$.
- 假设点 1 未被挑出，则满足条件的 4 点将从编号为 $\{2, 3, \ldots, 12\}$ 中挑出，该情形下的挑选方法数为 $\binom{8}{4}$.

因此，满足条件的总的挑选方法数为 $\binom{7}{3} + \binom{8}{4}$. ∎

【例 1.4.b】 在编号为 1、2、3、4、5、6、7 的位置中挑选 3 个座位，使得这 3 个位置互不相邻，求挑选方法数.

解: 首先将 4 个座位排列好，在相邻的座位之间和所有座位最左侧和最右侧设置一个空位，再从这 5 个空位中选择 3 个空位。这一定满足条件。所以满足条件的挑选方法数为 $\binom{5}{3} = 10$ 种. ∎

【例 1.4.c】 在一个圆周上有 12 个点（依序编号为 1、2、$\cdots$、12)，从这 12 个点中挑出 4 个点，使得这 4 个点互不相邻。求挑选方法数.

解: 分两种情形:

- 假设点 1 被挑出，则余下 3 点将从编号为 $\{3, 4, \ldots, 11\}$ 中挑出，且这 3 点互不相邻. 该情形下的挑选方法数为 $\binom{7}{3}$.
- 假设点 1 未被挑出，则满足条件的 4 点将从编号为 $\{2, 3, \ldots, 12\}$ 中挑出，该情形下的挑选方法数为 $\binom{8}{4}$.

因此，满足条件的总的挑选方法数为 $\binom{7}{3} + \binom{8}{4}$. ∎

【例 1.4.b】 在编号为 1、2、3、4、5、6、7 的位置中挑选 3 个座位，使得这 3 个位置互不相邻，求挑选方法数.

解: 首先将 4 个座位排列好，在相邻的座位之间和所有座位最左侧和最右侧设置一个空位，再从这 5 个空位中选择 3 个空位。这一定满足条件。所以满足条件的挑选方法数为 $\binom{5}{3} = 10$ 种. ∎

【例 1.4.c】 在一个圆周上有 12 个点 (依序编号为 1、2、$\cdots$、12), 从这 12 个点中挑出 4 个点，使得这 4 个点互不相邻。求挑选方法数.

解: 分两种情形:

- 假设点 1 被挑出，则余下 3 点将从编号为 $\{3, 4, \ldots, 11\}$ 中挑出，且这 3 点互不相邻. 该情形下的挑选方法数为 $\binom{7}{3}$.
- 假设点 1 未被挑出，则满足条件的 4 点将从编号为 $\{2, 3, \ldots, 12\}$ 中挑出，该情形下的挑选方法数为 $\binom{8}{4}$.

因此，满足条件的总的挑选方法数为 $\binom{7}{3} + \binom{8}{4}$. ∎

【例 1.4.b】 在编号为 1、2、3、4、5、6、7 的位置中挑选 3 个座位，使得这 3 个位置互不相邻，求挑选方法数.

解: 首先将 4 个座位排列好，在相邻的座位之间和所有座位最左侧和最右侧设置一个空位，再从这 5 个空位中选择 3 个空位。这一定满足条件。所以满足条件的挑选方法数为 $\binom{5}{3} = 10$ 种. ∎

【例 1.4.c】 在一个圆周上有 12 个点（依序编号为 1、2、$\cdots$、12), 从这 12 个点中挑出 4 个点，使得这 4 个点互不相邻。求挑选方法数.

解: 分两种情形:

- 假设点 1 被挑出，则余下 3 点将从编号为 $\{3, 4, \ldots, 11\}$ 中挑出，且这 3 点互不相邻. 该情形下的挑选方法数为 $\binom{7}{3}$.
- 假设点 1 未被挑出，则满足条件的 4 点将从编号为 $\{2, 3, \ldots, 12\}$ 中挑出，该情形下的挑选方法数为 $\binom{8}{4}$.

因此，满足条件的总的挑选方法数为 $\binom{7}{3} + \binom{8}{4}$. ∎

▶ D. 可重排列与可重组合

- **可重排列问题**: 从 k 个不同元素中，取出 n 个来进行排列, 同种元素可重复使用，则有 k^n 种排列.
- **可重组合问题**: 从 k 个不同元素中，取出 n 个来, 同种元素可重复使用，求所有不同的选取方式.

分析:

(i) 样本点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, x_j 表示第 j 次取出的元素编号 (指不同的元素种类), $j = 1, \ldots, n$.

(ii) 所求选取方式即为求 $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ 的个数 (并非计算 $|\Omega|$), 其中 $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$,

$$n_j = \#\{i: \ x_i = j, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

(iii) 问题等价于 n 个不可辨小球随机投放于 k 个不同盒子中，允许出现空盒, 故所求的不同选取方式为 $\binom{n+k-1}{k-1}$.

- D. 可重排列与可重组合
  - 可重排列问题: 从 k 个不同元素中，取出 n 个来进行排列, 同种元素可重复使用，则有 k^n 种排列.
  - 可重组合问题: 从 k 个不同元素中，取出 n 个来, 同种元素可重复使用，求所有不同的选取方式.

    分析:

    (i) 样本点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, x_j 表示第 j 次取出的元素编号 (指不同的元素种类), $j = 1, \ldots, n$.

    (ii) 所求选取方式即为求 $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ 的个数 (并非计算 $|\Omega|$), 其中 $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$,

    $$n_j = \#\{i : \; x_i = j, \; i = 1, \ldots, n\}.$$

    (iii) 问题等价于 n 个不可辨小球随机投放于 k 个不同盒子中，允许出现空盒, 故所求的不同选取方式为 $\binom{n+k-1}{k-1}$.

D. 可重排列与可重组合

- 可重排列问题: 从 k 个不同元素中，取出 n 个来进行排列, 同种元素可重复使用，则有 k^n 种排列.
- 可重组合问题: 从 k 个不同元素中，取出 n 个来, 同种元素可重复使用，求所有不同的选取方式.

  分析:

  (i) 样本点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, x_j 表示第 j 次取出的元素编号 (指不同的元素种类), $j = 1, \ldots, n$.

  (ii) 所求选取方式即为求 $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ 的个数 (并非计算 $|\Omega|$), 其中 $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$,

  $$n_j = \#\{i: \ x_i = j, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

  (iii) 问题等价于 n 个不可辨小球随机投放于 k 个不同盒子中，允许出现空盒, 故所求的不同选取方式为 $\binom{n+k-1}{k-1}$.

▶ E. 大间距组合问题

问题: 从 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中取出 k 个数 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, 使得

$$j_2 - j_1 > m,\ j_3 - j_2 > m,\ \ldots,\ j_k - j_{k-1} > m, \qquad (*.1)$$

其中 m 为正整数, $(k-1)(m+1) < n$. 求所有的不同取法数.

分析:

(i) 作变换: $i_1 = j_1$,

$$i_\ell = j_\ell - (\ell - 1)m, \quad \ell = 2, \ldots, k,$$

则 $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ 满足 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n - (k-1)m$.

(ii) $(j_1, j_2, \ldots, j_k) \longleftrightarrow (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, 一一对应.

(iii) 所求的取法数为 $\binom{n-(k-1)m}{k}$.

E. 大间距组合问题

问题: 从 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中取出 k 个数 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, 使得

$$j_2 - j_1 > m,\ j_3 - j_2 > m,\ \ldots,\ j_k - j_{k-1} > m, \qquad (*.1)$$

其中 m 为正整数, $(k-1)(m+1) < n$. 求所有的不同取法数.

分析:

(i) 作变换: $i_1 = j_1$,

$$i_\ell = j_\ell - (\ell - 1)m, \quad \ell = 2, \ldots, k,$$

则 $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ 满足 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n - (k-1)m$.

(ii) $(j_1, j_2, \ldots, j_k) \longleftrightarrow (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, 一一对应.

(iii) 所求的取法数为 $\binom{n-(k-1)m}{k}$.

▶ F. 再论可重组合问题:

从 n 个不同元素中，取出 k 个来, 同种元素可重复使用，求所有不同的选取方式.

分析:

(i) 任何一种选取方式对应于一个向量 $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, 其中

$$1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_k \le n. \qquad (*.2)$$

(ii) 作变换: $i_1 = j_1$,

$$i_\ell = j_\ell + \ell - 1, \quad \ell = 2, \ldots, k,$$

则 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n + k - 1$.

(iii) 所求的选取方式有 $\binom{n+k-1}{k}$ 种.

▶ F. 再论可重组合问题:

从 n 个不同元素中, 取出 k 个来, 同种元素可重复使用, 求所有不同的选取方式.

分析:

(i) 任何一种选取方式对应于一个向量 $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, 其中

$$1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_k \le n. \tag{$*$.2}$$

(ii) 作变换: $i_1 = j_1$,

$$i_\ell = j_\ell + \ell - 1, \quad \ell = 2, \ldots, k,$$

则 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n + k - 1$.

(iii) 所求的选取方式有 $\binom{n+k-1}{k}$ 种.

【例 1.4.d】 10 男 4 女随机排成一列, 记 A 为事件“每两位女士之间至少间隔两位男士”, 求 $\mathrm{P}(A)$.

解：按排列计数, $|\Omega| = 14!$.

(1) 为求 $|A|$, 先计算 4 位女士的占位方式数, 再将 4 位女士在 4 个空位上全排列 (4! 种), 10 位男士在余下空位上全排列 (10! 种).

(2) 占位方式数：从 14 个从左到由的空位中选择满足条件的 4 个空位等价于大间距组合问题 ($n = 14$, $k = 4$, $m = 2$), 因此占位方式数为 $\binom{14-3\times 2}{4} = \binom{8}{4}$.

(3) 所求概率

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10!\binom{8}{4}4!}{14!} = \frac{70}{1001}.$$

【例 1.4.d】 10 男 4 女随机排成一列, 记 A 为事件“每两位女士之间至少间隔两位男士”, 求 $\mathrm{P}(A)$.

解: 按排列计数, $|\Omega| = 14!$.

(1) 为求 $|A|$, 先计算 4 位女士的占位方式数, 再将 4 位女士在 4 个空位上全排列 (4! 种), 10 位男士在余下空位上全排列 (10! 种).

(2) 占位方式数: 从 14 个从左到由的空位中选择满足条件的 4 个空位等价于大间距组合问题 ($n = 14$, $k = 4$, $m = 2$), 因此占位方式数为 $\binom{14-3\times 2}{4} = \binom{8}{4}$.

(3) 所求概率

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10!\binom{8}{4}4!}{14!} = \frac{70}{1001}.$$

【例 1.4.e】 n 双相异的鞋 $2n$ 只，随机分成 n 堆，每堆 2 只，记 A 为“n 堆鞋恰分别配对”，求 $\mathrm{P}(A)$.

解: 有如下两种解法。

方法一：按排列问题求解，把 $2n$ 只鞋从左到右排成一列，1、2 号位置鞋合成第 1 堆，3、4 位置鞋合成第 2 堆，余类推. 因此，

$$|\Omega| = (2n)!, \qquad |A| = (2n)!!,$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{P}(A) = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

方法二：按分堆问题求解. 易知，

$$|A| = n!, \qquad |\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n},$$

于是 $\mathrm{P}(A) = 1/(2n-1)!!$. ∎

【例 1.4.e】 n 双相异的鞋 $2n$ 只，随机分成 n 堆，每堆 2 只，记 A 为"n 堆鞋恰分别配对"，求 $\mathrm{P}(A)$.

解: 有如下两种解法。

方法一：按排列问题求解，把 $2n$ 只鞋从左到右排成一列，1、2 号位置鞋合成第 1 堆，3、4 位置鞋合成第 2 堆，余类推. 因此,

$$|\Omega| = (2n)!, \qquad |A| = (2n)!!,$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{P}(A) = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

方法二：按分堆问题求解. 易知,

$$|A| = n!, \qquad |\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n},$$

于是 $\mathrm{P}(A) = 1/(2n-1)!!$. ∎

【例 1.4.e】 n 双相异的鞋 $2n$ 只，随机分成 n 堆，每堆 2 只，记 A 为"n 堆鞋恰分别配对"，求 $\mathrm{P}(A)$.

解: 有如下两种解法。

方法一：按排列问题求解，把 $2n$ 只鞋从左到右排成一列，1、2 号位置鞋合成第 1 堆，3、4 位置鞋合成第 2 堆，余类推. 因此,

$$|\Omega| = (2n)!, \qquad |A| = (2n)!!,$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{P}(A) = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

方法二：按分堆问题求解. 易知,

$$|A| = n!, \qquad |\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n},$$

于是 $\mathrm{P}(A) = 1/(2n-1)!!$. ∎

【例 1.4.2】 盒中有 r 个红球，b 个黑球，从中随机取出 n 个 $(r+b \geq n)$. 分别对有放回和无放回情形求“恰取出 k 个红球”的概率 $(k \leq r)$.

解：无放回情形对应超几何分布

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}.$$

有放回情形对应二项分布

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{n}{k} r^k b^{n-k}}{(r+b)^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{r}{r+b}\right)^k \left(\frac{b}{r+b}\right)^{n-k}.$$

【例 1.4.2】 盒中有 r 个红球，b 个黑球，从中随机取出 n 个 $(r+b \geq n)$. 分别对有放回和无放回情形求“恰取出 k 个红球”的概率 $(k \leq r)$.

解: 无放回情形对应超几何分布

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}.$$

有放回情形对应二项分布

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{n}{k} r^k b^{n-k}}{(r+b)^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{r}{r+b}\right)^k\left(\frac{b}{r+b}\right)^{n-k}.$$

【例 1.4.3】 将 n 个小球随机放入 m 个不同的盒子中，$n \le m$, 求以下事件的概率：

(1) 在所指定的某 n 个盒子中恰各有 1 球 (事件 A)；

(2) 每个盒子至多放入 1 球 (事件 B)；

(3) 在某个指定的盒子中恰放入 k 个球 (事件 C).

解：视球与盒子可分辨，样本点记为 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 其中 x_j 表示第 j 个小球投放的盒子编号，则 $|\Omega| = m^n$,

$$|A| = n!, \qquad |B| = \binom{m}{n} n!, \qquad |C| = \binom{n}{k}(m-1)^{n-k},$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{n!}{m^n}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{\binom{m}{n} n!}{m^n}, \quad \mathrm{P}(C) = \frac{\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}}{m^n}.$$

【例 1.4.3】 将 n 个小球随机放入 m 个不同的盒子中，$n \le m$，求以下事件的概率：

(1) 在所指定的某 n 个盒子中恰各有 1 球 (事件 A);

(2) 每个盒子至多放入 1 球 (事件 B);

(3) 在某个指定的盒子中恰放入 k 个球 (事件 C).

解：视球与盒子可分辨，样本点记为 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，其中 x_j 表示第 j 个小球投放的盒子编号，则 $|\Omega| = m^n$,

$$|A| = n!, \qquad |B| = \binom{m}{n} n!, \qquad |C| = \binom{n}{k}(m-1)^{n-k},$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{P}(A) = \frac{n!}{m^n}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{\binom{m}{n} n!}{m^n}, \quad \mathrm{P}(C) = \frac{\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}}{m^n}.$$

【例 1.4.6】 将 10 本不同的书随机分给 5 个人，试求以下事件概率：

(1) 甲、乙、丙各得 2 本，丁得 3 本，戊得 1 本；

(2) 有 3 人各得 2 本，有 1 人得 3 本，有 1 人得 1 本.

解：将书和人编号，样本点为 $(x_1, \ldots, x_{10})$，其中 x_j 表示第 j 本书分给的人编号. 题中两事件分别记为 A, B，则 $|\Omega| = 5^{10}$.

(1) 求 $|A|$：先将 10 本书分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 $2, 2, 2, 3, 1$；再将每堆书分别给甲乙丙丁戊，故

$$|A| = \frac{10!}{(2!)^3 3!1!}.$$

(2) 求 $|B|$：先将 10 本书按 (1) 分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 2, 2, 2, 3, 1；再将 5 个人分成 3 组，每组人数分别为 3, 1, 1 (每组内的人按甲乙丙丁戊先后顺序排列好)；最后将每堆书分别发给以站好顺序的 5 个人，故

$$|B| = \frac{10!}{(2!)^3 3!1!} \cdot \frac{5!}{3!1!1!} = \frac{5!10!}{2^3 6^2}.$$

【例 1.4.6】 将 10 本不同的书随机分给 5 个人，试求以下事件概率：

(1) 甲、乙、丙各得 2 本，丁得 3 本，戊得 1 本；

(2) 有 3 人各得 2 本，有 1 人得 3 本，有 1 人得 1 本.

解：将书和人编号，样本点为 $(x_1, \ldots, x_{10})$, 其中 x_j 表示第 j 本书分给的人编号. 题中两事件分别记为 A, B, 则 $|\Omega| = 5^{10}$.

(1) 求 $|A|$：先将 10 本书分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 $2, 2, 2, 3, 1$; 再将每堆书分别给甲乙丙丁戊，故

$$|A| = \frac{10!}{(2!)^3 3! 1!}.$$

(2) 求 $|B|$：先将 10 本书按 (1) 分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 2, 2, 2, 3, 1; 再将 5 个人分成 3 组, 每组人数分别为 3, 1, 1 (每组内的人按甲乙丙丁戊先后顺序排列好); 最后将每堆书分别发给以站好顺序的 5 个人, 故

$$|B| = \frac{10!}{(2!)^3 3! 1!} \cdot \frac{5!}{3! 1! 1!} = \frac{5! 10!}{2^3 6^2}.$$

【例 1.4.6】 将 10 本不同的书随机分给 5 个人，试求以下事件概率：

(1) 甲、乙、丙各得 2 本，丁得 3 本，戊得 1 本；

(2) 有 3 人各得 2 本，有 1 人得 3 本，有 1 人得 1 本.

解：将书和人编号，样本点为 $(x_1, \ldots, x_{10})$，其中 x_j 表示第 j 本书分给的人编号. 题中两事件分别记为 A, B，则 $|\Omega| = 5^{10}$.

(1) 求 $|A|$：先将 10 本书分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 $2, 2, 2, 3, 1$; 再将每堆书分别给甲乙丙丁戊，故

$$|A| = \frac{10!}{(2!)^3 3! 1!}.$$

(2) 求 $|B|$：先将 10 本书按 (1) 分成 5 堆，从左至右每堆数分别为 2, 2, 2, 3, 1; 再将 5 个人分成 3 组，每组人数分别为 3, 1, 1 (每组内的人按甲乙丙丁戊先后顺序排列好); 最后将每堆书分别发给以站好顺序的 5 个人，故

$$|B| = \frac{10!}{(2!)^3 3! 1!} \cdot \frac{5!}{3! 1! 1!} = \frac{5! 10!}{2^3 6^2}.$$

- 古典概型：试验结果有限，等可能性.
- 几何概型：取消“试验结果有限”，对“等可能性”作不同假设.
  一个自然的引申：等长度(等面积、等体积)，等概率.

【例 1.5.2】 甲乙两人约定于某日 6 时至 7 时到达某处，每人在该处停留 10 分钟，求他们可在该处见面的概率.

解：设 x, y 表示两人到达的时刻，则

$$\Omega = \{(x, y) : 6 \le x, y \le 7\}.$$

记两人在此相遇的事件为 A，则

$$A = \{(x, y) : |x - y| \le 1/6, (x, y) \in \Omega\}.$$

利用等面积等可能性，得 $\mathrm{P}(A) = L(A)/L(\Omega) = 11/36.$ ∎

- 古典概型：试验结果有限，等可能性.
- 几何概型：取消“试验结果有限”，对“等可能性”作不同假设.
  一个自然的引申：等长度 (等面积、等体积)，等概率.

【例 1.5.2】 甲乙两人约定于某日 6 时至 7 时到达某处，每人在该处停留 10 分钟，求他们可在该处见面的概率.

解：设 x, y 表示两人到达的时刻，则

$$\Omega = \{(x, y) : 6 \leq x, y \leq 7\}.$$

记两人在此相遇的事件为 A，则

$$A = \{(x, y) : |x - y| \leq 1/6, (x, y) \in \Omega\}.$$

利用等面积等可能性，得 $\mathrm{P}(A) = L(A)/L(\Omega) = 11/36$. ∎

【例 1.5.4】 平面上画满了间距为 a 的平行线，向该平面随机投掷一枚长为 ℓ 的针 ($\ell < a$)，求针与直线相交的概率.

解: 记 “针与直线相交” 的事件为 A, 针与直线的最小夹角为 θ, 针的中心到最近一条直线的距离为 ρ, 则

$$\Omega = \left\{(\rho, \theta) : 0 \le \rho \le \frac{a}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

注意到 A 发生当且仅当 $\rho \le \frac{\ell}{2}\sin\theta$, 即

$$A = \left\{(\rho, \theta) : \rho \le \frac{\ell}{2}\sin\theta, (\rho, \theta) \in \Omega\right\}.$$

利用等面积等可能，于是 $\mathrm{P}(A) = L(A)/L(\Omega) = 2\ell/(\pi a)$. ∎

【例 1.5.4】 平面上画满了间距为 a 的平行线，向该平面随机投掷一枚长为 ℓ 的针 $(\ell < a)$，求针与直线相交的概率.

解: 记“针与直线相交”的事件为 A, 针与直线的最小夹角为 θ, 针的中心到最近一条直线的距离为 ρ, 则

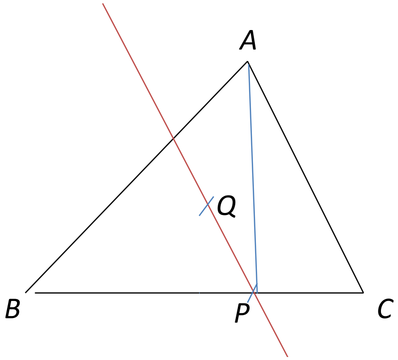
$$\Omega = \left\{(\rho, \theta) : 0 \le \rho \le \frac{a}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

注意到 A 发生当且仅当 $\rho \le \frac{\ell}{2}\sin\theta$, 即

$$A = \left\{(\rho, \theta) : \rho \le \frac{\ell}{2}\sin\theta, (\rho, \theta) \in \Omega\right\}.$$

利用等面积等可能，于是 $\mathrm{P}(A) = L(A)/L(\Omega) = 2\ell/(\pi a)$. ∎

【例 1.5.a】 在 ΔABC 底边 BC 上任意选取一个点 P, 在 ΔABC 内部随机选取另外一个点 Q. 过 P 与 Q 点作直线, 求该直线能够与边 AB 相交的概率.



作业

第 1 章

§1.2: 12, 13

§1.3: 13, 14, 18, 19

§1.4: 10, 13, 14, 16

以第三版教材的习题编号为准