概率论

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥

2023 年 9 月

第 6 章　极限定理

- 大数定律
- 中心极限定理
- 几乎处处收敛

6.1.1 依概率收敛

- **定义 6.1.1** 称 $\{X_n, n \geq 1\}$ 依概率收敛到随机变量 X, 记为 $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, 若对 $\forall\ \epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0.$$

- **定理 6.1.1** (Chebyshev 不等式) 设 $g : \Re_+ \to \Re_+$ 单调递增, 随机变量 Y 满足 $\mathrm{E}\, g(|Y|) < \infty$, 则对 $\forall\ a > 0$ 使得 $g(a) > 0$, 有

$$\mathrm{P}\left(|Y| > a\right) \leq \frac{\mathrm{E}\, g(|Y|)}{g(a)}.$$

※ 设 $Y \in L_r$, $r > 0$, 则

$$\mathrm{P}\left(|Y| > x\right) \leq \frac{\mathrm{E}\,|Y|^r}{x^r}, \quad x > 0.$$

- 【例 6.1.2】 已知某学校数学系每年平均有 70 个学生毕业.
  - (a) 估算该系明年至少有 80 个学生毕业的概率;
  - (b) 已知该系每年毕业生人数的方差是 8, 估算 (a) 中的概率.

解: (a) 用 X 表示明年毕业的学生数, 则 $\mathrm{E}\,X = 70$. 用马尔可夫不等式得

$$\mathrm{P}\,(X \geq 80) \leq \frac{\mathrm{E}\,X}{80} = \frac{7}{8}.$$

(b) 由切比雪夫不等式得

$$\mathrm{P}\,(X \geq 80) \leq \mathrm{P}\,(|X - 70| \geq 10) \leq \frac{\mathrm{Var}\,(X)}{10^2} = 0.08.$$

※ 只知道该系毕业人数的数学期望时, 马尔可夫不等式就能给出判断. 这正是马尔可夫不等式的优点.

- 【例 6.1.2】 已知某学校数学系每年平均有 70 个学生毕业.
  (a) 估算该系明年至少有 80 个学生毕业的概率;
  (b) 已知该系每年毕业生人数的方差是 8, 估算 (a) 中的概率.

解: (a) 用 X 表示明年毕业的学生数, 则 $\mathrm{E}\,X = 70$. 用马尔可夫不等式得

$$\mathrm{P}\,(X \geq 80) \leq \frac{\mathrm{E}\,X}{80} = \frac{7}{8}.$$

(b) 由切比雪夫不等式得

$$\mathrm{P}\,(X \geq 80) \leq \mathrm{P}\,(|X - 70| \geq 10) \leq \frac{\mathrm{Var}\,(X)}{10^2} = 0.08.$$

※ 只知道该系毕业人数的数学期望时, 马尔可夫不等式就能给出判断. 这正是马尔可夫不等式的优点.

- 【例 6.1.3】 若 $\mathrm{Var}(X)=0$, 则存在常数 c 使得 $\mathrm{P}(X=c)=1$.
- 【例 6.1.4】 设 X 为非负整数值随机变量, 则

$$1-\mathrm{E}\,X\le \mathrm{P}(X=0)\le \frac{\mathrm{Var}(X)}{(\mathrm{E}\,X)^2}.$$

证明: 仅需注意以下两点

$$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X-\mathrm{E}\,X=-\mathrm{E}\,X)\le \mathrm{P}(|X-\mathrm{E}\,X|\ge |\mathrm{E}\,X|)$$

$$\mathrm{P}(X=0)=1-\mathrm{P}(X\ge 1).$$

- 【例 6.1.3】 若 $\mathrm{Var}\,(X) = 0$, 则存在常数 c 使得 $\mathrm{P}\,(X = c) = 1$.
- 【例 6.1.4】 设 X 为非负整数值随机变量, 则

$$1 - \mathrm{E}\,X \le \mathrm{P}\,(X = 0) \le \frac{\mathrm{Var}\,(X)}{(\mathrm{E}\,X)^2}.$$

证明: 仅需注意以下两点

$$\mathrm{P}\,(X = 0) = \mathrm{P}\,(X - \mathrm{E}\,X = -\mathrm{E}\,X) \le \mathrm{P}\,(|X - \mathrm{E}\,X| \ge |\mathrm{E}\,X|)$$

$$\mathrm{P}\,(X = 0) = 1 - \mathrm{P}\,(X \ge 1).$$

- **定义 6.1.2** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 rv 序列, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. 如果存在实数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $b_n > 0$ 且

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \tag{$*$.1}$$

则称 $\{X_n\}$ 服从弱大数律, 其中

$\{a_n\}$ ······ 中心化数列,

$\{b_n\}$ ······ 正则化数列.

※ 问题: 如何寻找 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $(*.1)$ 成立以及成立的条件?

一般, $a_n = \mathrm{E}\, S_n$, $b_n = n$.

- 【例 6.1.5】 (Markov 弱大数律) 若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}\,(S_n)}{n^2} = 0,$$

则 $\{X_n\}$ 服从弱大数律，其中 $a_n = \mathrm{E}\, S_n$, $b_n = n$.

- 【例 6.1.6】 (Chebyshev 弱大数律) 若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 两两不相关，且存在常数 $c > 0$ 使得

$$\mathrm{Var}\,(X_n) \leq c, \quad \forall\ n \geq 1,$$

则 $\{X_n\}$ 服从弱大数律，其中 $a_n = \mathrm{E}\, S_n$, $b_n = n$.

- 【例 6.1.7】 (Bernoulli 弱大数律) 若 Z_n 表示 n 次独立重复 Bernoulli 试验中成功的次数，每次试验中成功的概率为 p，则

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} p.$$

- 【例 6.1.5】 (Markov 弱大数律) 若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}\,(S_n)}{n^2} = 0,$$

则 $\{X_n\}$ 服从弱大数律, 其中 $a_n = \mathrm{E}\,S_n$, $b_n = n$.

- 【例 6.1.6】 (Chebyshev 弱大数律) 若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 两两不相关, 且存在常数 $c > 0$ 使得

$$\mathrm{Var}\,(X_n) \leq c, \quad \forall\ n \geq 1,$$

则 $\{X_n\}$ 服从弱大数律, 其中 $a_n = \mathrm{E}\,S_n$, $b_n = n$.

- 【例 6.1.7】 (Bernoulli 弱大数律) 若 Z_n 表示 n 次独立重复 Bernoulli 试验中成功的次数, 每次试验中成功的概率为 p, 则

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} p.$$

- 【例 6.1.5】 (Markov 弱大数律) 若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}\,(S_n)}{n^2} = 0,$$

则 $\{X_n\}$ 服从弱大数律, 其中 $a_n = \mathrm{E}\, S_n$, $b_n = n$.

- 【例 6.1.6】 (Chebyshev 弱大数律) 若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 两两不相关, 且存在常数 $c > 0$ 使得

$$\mathrm{Var}\,(X_n) \leq c, \quad \forall\ n \geq 1,$$

则 $\{X_n\}$ 服从弱大数律, 其中 $a_n = \mathrm{E}\, S_n$, $b_n = n$.

- 【例 6.1.7】 (Bernoulli 弱大数律) 若 Z_n 表示 n 次独立重复 Bernoulli 试验中成功的次数, 每次试验中成功的概率为 p, 则

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} p.$$

- 【例 6.1.8】 有一列口袋，第 k 个口袋中有 1 个白球和 $k-1$ 个黑球．自前 n 个口袋中各取一球，记 Z_n 为所取出的 n 个球中的白球个数，则当 $r>1/2$ 时，

$$\frac{Z_n - \mathrm{E}\, Z_n}{\ln^r n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

证：注意到 $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$，其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{自第 } i \text{ 个口袋中取出白色球}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

易知 $\mathrm{E}\, X_k = \frac{1}{k}$, $\mathrm{Var}\,(X_k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$, $\mathrm{Var}\,(Z_n) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \le C \ln n$，其中 $C>0$ 为某个常数．于是，对 $\forall\, \epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\frac{|Z_n - \mathrm{E}\, Z_n|}{\ln^r n} > \epsilon \right) &= \mathrm{P}\left(|Z_n - \mathrm{E}\, Z_n| > \epsilon \ln^r n\right) \\ &\le \frac{\mathrm{Var}\,(Z_n)}{\epsilon^2 \ln^{2r} n} \le \frac{C}{\epsilon^2 \ln^{2r-1} n} \to 0. \end{aligned}$$

- 【例 6.1.8】 有一列口袋, 第 k 个口袋中有 1 个白球和 $k-1$ 个黑球. 自前 n 个口袋中各取一球, 记 Z_n 为所取出的 n 个球中的白球个数, 则当 $r>1/2$ 时,

$$\frac{Z_n - \mathrm{E}\, Z_n}{\ln^r n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

证: 注意到 $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{自第 } i \text{ 个口袋中取出白色球}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

易知 $\mathrm{E}\, X_k = \frac{1}{k}$, $\mathrm{Var}\,(X_k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$, $\mathrm{Var}\,(Z_n) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \le C \ln n$, 其中 $C>0$ 为某个常数. 于是, 对 $\forall\, \epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\frac{|Z_n - \mathrm{E}\, Z_n|}{\ln^r n} > \epsilon \right) &= \mathrm{P}\left(|Z_n - \mathrm{E}\, Z_n| > \epsilon \ln^r n\right) \\ &\le \frac{\mathrm{Var}\,(Z_n)}{\epsilon^2 \ln^{2r} n} \le \frac{C}{\epsilon^2 \ln^{2r-1} n} \to 0. \end{aligned}$$

- 【例 6.1.9】 有一列口袋，第 k 个口袋中有 1 个白球和 $k-1$ 个黑球. 自前 n 个口袋中各取一球，记 Z_n 为所取出的 n 个球中的白球个数，则

$$\frac{Z_n}{\ln n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 1.$$

证：注意到

$$\mathrm{E}\, Z_n - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \to c > 0 \quad c \text{ 为欧拉常数},$$

于是，对 $\forall\, \epsilon > 0$，当 n 充分大时，

$$\epsilon \ln n + \ln n - \mathrm{E}\, Z_n > \frac{1}{2}\epsilon \ln n,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(|Z_n - \ln n| > \epsilon \ln n\right) &\le \mathrm{P}\left(|Z_n - \mathrm{E}\, Z_n| > \epsilon \ln n + \ln n - \mathrm{E}\, Z_n\right) \\ &\le \mathrm{P}\left(|Z_n - \mathrm{E}\, Z_n| > \frac{1}{2}\epsilon \ln n\right) \\ &\to 0 \quad (\text{Markov 不等式}). \end{aligned}$$

- 【例 6.1.9】 有一列口袋，第 k 个口袋中有 1 个白球和 $k-1$ 个黑球. 自前 n 个口袋中各取一球，记 Z_n 为所取出的 n 个球中的白球个数，则

$$\frac{Z_n}{\ln n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 1.$$

证：注意到

$$\mathrm{E}\, Z_n - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \to c > 0 \quad c \text{ 为欧拉常数},$$

于是，对 $\forall\, \epsilon > 0$，当 n 充分大时，

$$\epsilon \ln n + \ln n - \mathrm{E}\, Z_n > \frac{1}{2}\epsilon \ln n,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(|Z_n - \ln n| > \epsilon \ln n\right) &\le \mathrm{P}\left(|Z_n - \mathrm{E}\, Z_n| > \epsilon \ln n + \ln n - \mathrm{E}\, Z_n\right) \\ &\le \mathrm{P}\left(|Z_n - \mathrm{E}\, Z_n| > \frac{1}{2}\epsilon \ln n\right) \\ &\to 0 \quad (\text{Markov 不等式}). \end{aligned}$$

6.1.2 平均收敛

- **定义 6.1.3** 设 $X_n \in L_r$, $r > 0$, 称 $X_n \xrightarrow{L_r} X$ (X_n 在 L_r 意义下平均收敛到 X), 若
$$\mathrm{E}\,|X_n - X|^r \to 0, \quad n \to \infty.$$

※ $X_n \xrightarrow{L_r} X \Longrightarrow X \in L_r$.

- **定理 6.1.2** $X_n \xrightarrow{L_r} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$.

- **性质** 对 $\forall X \in L_r$, 存在离散 rv 序列 $\{X_n\}$, 使得 $X_n \xrightarrow{L_r} X$.

证: 构造
$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k-1}{2^n} \cdot I\left(\frac{k-1}{2^n} \le X < \frac{k}{2^n}\right), \quad n \ge 1,$$

则 $|X_n - X| < 1/2^n, \cdots\cdots$.

6.1.2 平均收敛

- **定义 6.1.3** 设 $X_n \in L_r$, $r > 0$, 称 $X_n \xrightarrow{L_r} X$ (X_n 在 L_r 意义下平均收敛到 X), 若
$$\mathrm{E}\,|X_n - X|^r \to 0, \quad n \to \infty.$$

※ $X_n \xrightarrow{L_r} X \Longrightarrow X \in L_r$.

- **定理 6.1.2** $X_n \xrightarrow{L_r} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$.

- **性质** 对 $\forall X \in L_r$, 存在离散 rv 序列 $\{X_n\}$, 使得 $X_n \xrightarrow{L_r} X$.

证: 构造
$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k-1}{2^n} \cdot I\left(\frac{k-1}{2^n} \le X < \frac{k}{2^n}\right), \quad n \ge 1,$$
则 $|X_n - X| < 1/2^n$, $\cdots\cdots$.

- 【例 6.1.10】 $(X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X \not\Longrightarrow X_n \xrightarrow{L_r} X)$
  取概率空间 $((0,1),\mathscr{B}((0,1)),L)$, 定义 $X=0$,
  $$X_n(w)=n\cdot 1_{(0,1/n)}(w),\quad n\geq 1,$$
  则 $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, 但是 $\mathrm{E}\,|X_n-X|=1$, 即 $X_n \not\xrightarrow{L_1} X$.
  $$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X \not\Longrightarrow \mathrm{E}\,X_n \to \mathrm{E}\,X.$$

※ $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X \not\Longrightarrow \mathrm{E}\,X_n \to \mathrm{E}\,X.$

※ 如何判别 $X_n \xrightarrow{L_r} X$? 寻找充分（必要）条件

§6.1 依概率收敛与平均收敛

- (单调收敛定理) 设 $0 \le X_n \uparrow X$, 则 $\mathrm{E}[X_n] \uparrow \mathrm{E}\,X$.
- (Fatou–Lebesgue 引理) 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是 rv 序列, $Y, Z \in L_1$, 则

$$X_n \le Z \implies \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n] \le \mathrm{E}\left[\limsup_{n\to\infty} X_n\right]$$

$$X_n \ge Y \implies \mathrm{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n].$$

如果 $Y \le X_n \uparrow X$ 或 $Y \le X_n \le Z$ 且 $X_n \to X$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n] = \mathrm{E}\,X.$$

- (控制收敛定理) 设 $|X_n| \le Y$, 且 $\mathrm{E}\,Y < \infty$. 若 $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, 则 $\mathrm{E}|X_n - X| \to 0$. 特别,

$$\mathrm{E}[X_n] \to \mathrm{E}\,X.$$

- (单调收敛定理) 设 $0 \le X_n \uparrow X$, 则 $\mathrm{E}[X_n] \uparrow \mathrm{E}\, X$.
- (Fatou–Lebesgue 引理) 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是 rv 序列, $Y, Z \in L_1$, 则

$$X_n \le Z \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n] \le \mathrm{E}\left[\limsup_{n\to\infty} X_n\right]$$

$$X_n \ge Y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n].$$

如果 $Y \le X_n \uparrow X$ 或 $Y \le X_n \le Z$ 且 $X_n \to X$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n] = \mathrm{E}\, X.$$

- (控制收敛定理) 设 $|X_n| \le Y$, 且 $\mathrm{E}\, Y < \infty$. 若 $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, 则 $\mathrm{E}\,|X_n - X| \to 0$. 特别,

$$\mathrm{E}[X_n] \to \mathrm{E}\, X.$$

- **定义 6.1.4** 称一族可积 rv $\{X_i, i \in I\}$ 为一致可积的，若当 $a \to \infty$ 时，

$$\sup_{i\in I} \mathrm{E}\left[|X_i| I(|X_i| > a)\right] = \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|>a\}} |X_i| \longrightarrow 0,$$

这儿的一致是指 a 的选取与 i 无关.

※ 一致可积 rv 族与我们要研究的各种收敛性有很密切的关系，因此有必要研究何时 rv 族是一致可积的.

- 若 X_i, $i \in I$, 有相同的分布，则 $\{X_i, i \in I\}$ 是一致可积的.
- 若存在可积 rv X, 使得 $$|X_i| \le X, \text{ a.s.}, \ i \in I,$$ 则 $\{X_i, i \in I\}$ 是一致可积的. 特别，若 I 有限，则 $\{X_i, i \in I\}$ 是一致可积的.

▶ 定义 6.1.4 称一族可积 rv $\{X_i, i\in I\}$ 为一致可积的，若当 $a\to\infty$ 时，

$$\sup_{i\in I}\mathrm{E}\left[|X_i|I(|X_i|>a)\right]=\sup_{i\in I}\int_{\{|X_i|>a\}}|X_i|\longrightarrow 0,$$

这儿的一致是指 a 的选取与 i 无关.

※ 一致可积 rv 族与我们要研究的各种收敛性有很密切的关系，因此有必要研究何时 rv 族是一致可积的.

- 若 X_i, $i\in I$, 有相同的分布，则 $\{X_i, i\in I\}$ 是一致可积的.
- 若存在可积 rv X, 使得 $|X_i|\le X$, a.s., $i\in I$,
  则 $\{X_i, i\in I\}$ 是一致可积的. 特别，若 I 有限，则 $\{X_i, i\in I\}$ 是一致可积的.

- 例 6.1.12 若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 一族可积, 则

$$\frac{1}{n}\max_{1\leq k\leq n}|X_k| \xrightarrow{P} 0.$$

证明: 利用一致可积性, 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $a > 0$ 使得

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{E}\left[|X_k| I(|X_k| > a)\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

于是,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\max_{1\leq k\leq n}|X_k|\right] &\leq \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\max_{1\leq k\leq n}|X_k| I(|X_k| \leq a)\right] \\ &\quad + \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\max_{1\leq k\leq n}|X_k| I(|X_k| > a)\right] \\ &\leq \frac{a}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}|X_k| I(|X_k| > a) \leq \frac{a}{n} + \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

......

- 例 6.1.12 若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 一族可积, 则

$$\frac{1}{n}\max_{1\leq k\leq n}|X_k| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

证明: 利用一致可积性, 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $a > 0$ 使得

$$\sup_{n\geq 1}\mathrm{E}\left[|X_k|I(|X_k| > a)\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

于是,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\max_{1\leq k\leq n}|X_k|\right] &\leq \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\max_{1\leq k\leq n}|X_k|I(|X_k|\leq a)\right]\\ &\quad + \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\max_{1\leq k\leq n}|X_k|I(|X_k| > a)\right]\\ &\leq \frac{a}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\,|X_k|I(|X_k| > a) \leq \frac{a}{n} + \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

......

- **定义 6.1.a** 设$\{X_i, i \in I\}$ 是一族 rv, 若对 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\eta_\epsilon > 0$, 只要 $\mathrm{P}(A) < \eta_\epsilon$, $A \in \mathscr{A}$, 就有

$$\sup_{i \in I} \mathrm{E}\left[|X_i| \cdot I_A\right] < \epsilon,$$

则称 $\{X_i, i \in I\}$ 是一致绝对连续的, 一致是指 η_ϵ 的选取与 i 无关.

- **定理 6.1.3** rv 族 $\{X_i, i \in I\}$ 一致可积的充要条件是
(1) $\{X_i, i \in I\}$ 是一致绝对连续的;
(2) 积分一致有界, 即

$$\sup_{i \in I} \mathrm{E}\,|X_i| < \infty.$$

- **定义 6.1.a** 设$\{X_i, i \in I\}$是一族 rv, 若对 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\eta_\epsilon > 0$, 只要 $\mathrm{P}(A) < \eta_\epsilon$, $A \in \mathscr{A}$, 就有

$$\sup_{i \in I} \mathrm{E}\left[|X_i| \cdot I_A\right] < \epsilon,$$

则称 $\{X_i, i \in I\}$ 是一致绝对连续的, 一致是指 η_ϵ 的选取与 i 无关.

- **定理 6.1.3** rv 族 $\{X_i, i \in I\}$ 一致可积的充要条件是

(1) $\{X_i, i \in I\}$ 是一致绝对连续的;

(2) 积分一致有界, 即

$$\sup_{i \in I} \mathrm{E}\,|X_i| < \infty.$$

证: $(\Longrightarrow)$ 由一致可积性知, 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $a > 0$, 使得

$$\sup_{i\in I} \mathrm{E}\left[|X_i| \cdot I(|X_i| > a)\right] < \frac{\epsilon}{2}.$$

取$\eta_\epsilon = \epsilon/(2a)$, 当$\mathrm{P}(A) < \eta_\epsilon$, $A \in \mathscr{A}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\sup_{i\in I} \mathrm{E}\left[|X_i| I_A\right] &\le \sup_{i\in I} \mathrm{E}\left[|X_i| I(A \cap \{|X_i| > a\})\right] \\
&\quad + \sup_{i\in I} \mathrm{E}\left[|X_i| I(A \cap \{|X_i| \le a\})\right] \\
&\le \sup_{i\in I} \mathrm{E}\left[|X_i| I(A \cap \{|X_i| > a\})\right] + a\,\mathrm{P}(A) \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

即$\{X_i, i \in I\}$ 是一致绝对连续的. 又

$$\sup_{i\in I} \mathrm{E}|X_i| \le a + \sup_{i\in I} \mathrm{E}\left[|X_i| I(|X_i| > a)\right] < a + \frac{\epsilon}{2} < \infty.$$

证: $(\Longleftarrow)$ 当 $X \geq 0$ 时, $\mathrm{E}\,X \geq a\,\mathrm{P}\,(X \geq a)$, 因此由积分一致有界性得

$$\sup_{i\in I} \mathrm{P}\,(|X_i| \geq a) \leq \frac{1}{a} \sup_{i\in I} \mathrm{E}\,|X_i| \longrightarrow 0 \quad (a \to \infty). \qquad (*.2)$$

由一致绝对连续性知, 对 $\forall\,\epsilon > 0$, 存在 $\eta_\epsilon > 0$, 只要 $\mathrm{P}\,(A) < \eta_\epsilon$, 就有

$$\mathrm{E}\left[|X_i| I_A\right] < \epsilon,$$

从而对每个 $i \in I$, 只要 $\mathrm{P}\,(A_i) < \eta_\epsilon$, 就有

$$\mathrm{E}\left[|X_i| I_{A_i}\right] < \epsilon.$$

令 $A_i = \{|X_i| \geq a\}$, 由 $(*.2)$, 对 $\eta_\epsilon > 0$, 存在 $a > 0$ 使

$$\mathrm{P}\,(|X_i| \geq a) < \eta_\epsilon, \quad \forall\, i \in I,$$

由此得

$$\sup_{i\in I} \mathrm{E}\left[|X_i| I_{A_i}\right] < \epsilon. \qquad \blacksquare$$

- **例 6.1.13** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 Bernoulli 随机变量,

$$\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}, \quad \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n},$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 非一致可积.

证: 对任意固定的 $a > 0$, 总有

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{E}\left[|X_n| I(|X_n| > a)\right] = 1.$$

故 $\{X_n, n \geq 1\}$ 非一致可积.

※ 积分一致有界: $\sup_{n\geq 1} \mathrm{E}|X_n| = 1$.

※ $\{X_n, n \geq 1\}$ 不具有一致绝对连续性.

- **例 6.1.13** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 Bernoulli 随机变量,

$$\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}, \quad \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n},$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 非一致可积.

证: 对任意固定的 $a > 0$, 总有

$$\sup_{n \geq 1} \mathrm{E}\left[|X_n| I(|X_n| > a)\right] = 1.$$

故 $\{X_n, n \geq 1\}$ 非一致可积.

※ 积分一致有界: $\sup_{n \geq 1} \mathrm{E}|X_n| = 1$.

※ $\{X_n, n \geq 1\}$ 不具有一致绝对连续性.

- **推论 6.1.1** 若存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{E}\,|X_n|^{1+\alpha} < \infty,$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一致可积.

- **推论 6.1.2** 如果存在 $Y \in L_1$, 使得

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{P}\left(|X_n| > x\right) \leq \mathrm{P}\left(|Y| > x\right), \quad \forall x > 0,$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一致可积.

证: 利用

$$\mathrm{E}\left[|X_i| I(|X_i| > x)\right] = \int_0^\infty \mathrm{P}\left(|X_i| > x \vee y\right) dy \leq \int_0^\infty \mathrm{P}\left(|Y| > x \vee y\right) dy.$$

- **推论 6.1.1** 若存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{E}\,|X_n|^{1+\alpha} < \infty,$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一致可积.

- **推论 6.1.2** 如果存在 $Y \in L_1$, 使得

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{P}\,(|X_n| > x) \leq \mathrm{P}\,(|Y| > x), \quad \forall x > 0,$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一致可积.

证: 利用

$$\mathrm{E}\,[|X_i| I(|X_i| > x)] = \int_0^\infty \mathrm{P}\,(|X_i| > x \vee y) dy \leq \int_0^\infty \mathrm{P}\,(|Y| > x \vee y) dy.$$

- **推论 6.1.1** 若存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{E}\,|X_n|^{1+\alpha} < \infty,$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一致可积.

- **推论 6.1.2** 如果存在 $Y \in L_1$, 使得

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{P}\left(|X_n| > x\right) \leq \mathrm{P}\left(|Y| > x\right), \quad \forall x > 0,$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一致可积.

证: 利用

$$\mathrm{E}\left[|X_i| I(|X_i| > x)\right] = \int_0^\infty \mathrm{P}\left(|X_i| > x \vee y\right) dy \leq \int_0^\infty \mathrm{P}\left(|Y| > x \vee y\right) dy.$$

- **定理 6.1.4** (L_r 收敛定理) 设$X_n \in L_r$, $r > 0$, 考虑以下条件

  (1) $X_n \xrightarrow{L_r} X$;

  (2) $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$;

  (3) $\mathrm{E}\,|X_n|^r \to \mathrm{E}\,|X|^r < \infty$;

  (4) $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ 一致可积;

  (5) $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ 一致绝对连续;

  (6) $\{|X_n - X|^r, n \geq 1\}$ 一致绝对连续,

  则 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) + [(3)–(6) 中任一条].

6.2.1 依分布收敛定义

- 【例 6.2.1】 设 $X_n = 1/n$, $X = 0$, 则 $X_n \to X$. 记 $X_n \sim F_n$, $X \sim F$, 则
$$F_n(x) = 1_{[1/n,\infty)}(x), \qquad F(x) = 1_{[0,\infty)}(x).$$
易知,
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall\, x \neq 0,$$
但是,
$$\lim_{n\to\infty} F_n(0) = 0 \neq 1 = F(0).$$

- 定义 6.2.1 (弱收敛) 设 $\{F_n, F\}$ 为有界单调增右连续函数, 记 $C(F)$ 为 F 的连续点集. 若
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall\, x \in C(F),$$
则称 F_n 弱收敛于 F, 记为 $F_n \xrightarrow{w} F$.

6.2.1 依分布收敛定义

- 【例 6.2.1】 设 $X_n = 1/n$, $X = 0$, 则 $X_n \to X$. 记 $X_n \sim F_n$, $X \sim F$, 则
$$F_n(x) = 1_{[1/n,\infty)}(x), \qquad F(x) = 1_{[0,\infty)}(x).$$
易知,
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall\, x \neq 0,$$
但是,
$$\lim_{n\to\infty} F_n(0) = 0 \neq 1 = F(0).$$

- **定义 6.2.1** (弱收敛) 设 $\{F_n, F\}$ 为有界单调增右连续函数, 记 $C(F)$ 为 F 的连续点集. 若
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall\, x \in C(F),$$
则称 F_n 弱收敛于 F, 记为 $F_n \xrightarrow{w} F$.

- 【例 6.2.2】 (cdf 的弱极限未必是 cdf) 设

$$F(x) \equiv \frac{1}{2}, \qquad F_n = \begin{cases} 0, & x < -n, \\ \frac{x+n}{2n}, & -n \le x < n, \\ 1, & x \ge n, \end{cases}$$

则 F_n 为 cdf, $F_n \xrightarrow{w} F$, 但 F 不是一个 cdf.

另一例: 设 $X \sim N(0,1)$, $X/n \sim F_n$, 则 F_n 的极限不是一个 cdf.

- 定义 6.2.2 (依分布收敛)

 (i) 设 $\{F_n, F\}$ 为 cdf 序列, 满足 $F_n \xrightarrow{w} F$, 则称 F_n 依分布收敛于 F, 记为 $F_n \xrightarrow{d} F$.

 (ii) 设 $X_n \sim F_n$, $X \sim F$, 且 $F_n \xrightarrow{d} F$, 则称 X_n 依分布收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{d} X$.

- 【例 6.2.2】 (cdf 的弱极限未必是 cdf) 设

$$F(x) \equiv \frac{1}{2}, \qquad F_n = \begin{cases} 0, & x < -n, \\ \frac{x+n}{2n}, & -n \le x < n, \\ 1, & x \ge n, \end{cases}$$

则 F_n 为 cdf, $F_n \xrightarrow{w} F$, 但 F 不是一个 cdf.

另一例: 设 $X \sim N(0,1)$, $X/n \sim F_n$, 则 F_n 的极限不是一个 cdf.

- 定义 6.2.2 (依分布收敛)
  (i) 设 $\{F_n, F\}$ 为 cdf 序列, 满足 $F_n \xrightarrow{w} F$, 则称 F_n 依分布收敛于 F, 记为 $F_n \xrightarrow{d} F$.
  (ii) 设 $X_n \sim F_n$, $X \sim F$, 且 $F_n \xrightarrow{d} F$, 则称 X_n 依分布收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{d} X$.

- 【例 6.2.2】 (cdf 的弱极限未必是 cdf) 设

$$F(x) \equiv \frac{1}{2}, \qquad F_n = \begin{cases} 0, & x < -n, \\ \frac{x+n}{2n}, & -n \le x < n, \\ 1, & x \ge n, \end{cases}$$

  则 F_n 为 cdf, $F_n \xrightarrow{w} F$, 但 F 不是一个 cdf.

  另一例: 设 $X \sim N(0,1)$, $X/n \sim F_n$, 则 F_n 的极限不是一个 cdf.

- 定义 6.2.2 (依分布收敛)
  - (i) 设 $\{F_n, F\}$ 为 cdf 序列, 满足 $F_n \xrightarrow{w} F$, 则称 F_n 依分布收敛于 F, 记为 $F_n \xrightarrow{d} F$.
  - (ii) 设 $X_n \sim F_n$, $X \sim F$, 且 $F_n \xrightarrow{d} F$, 则称 X_n 依分布收敛于 X, 记为 $X_n \xrightarrow{d} X$.

- 【例 6.2.3】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(1)$, 记

$$Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\},$$

则 $Y_n - \log n$ 依分布收敛.

证明: 对任意 $x \in \Re$,

$$\mathrm{P}\left(Y_n - \log n \leq x\right) = \left(1 - e^{-(x+\log n)}\right)^n \longrightarrow e^{-e^{-x}}.$$

※ $G(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ 为 Gumbel 分布, 三大极值分布之一.

- 【例 6.2.3】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(1)$, 记

$$Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\},$$

则 $Y_n - \log n$ 依分布收敛.

证明: 对任意 $x \in \Re$,

$$\mathrm{P}\left(Y_n - \log n \leq x\right) = \left(1 - e^{-(x+\log n)}\right)^n \longrightarrow e^{-e^{-x}}.$$

※ $G(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ 为 Gumbel 分布, 三大极值分布之一.

- 【例 6.2.4】 (依分布收敛不能蕴涵依概率收敛)

设概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 满足 $\Omega = \{w_1, w_2\}$, 且

$$\mathrm{P}(\{w_1\}) = \mathrm{P}(\{w_2\}) = \frac{1}{2}.$$

定义

$$X_n(w) = \begin{cases} 0, & w = w_1, \\ 1, & w = w_2, \end{cases}$$

$$X(w) = \begin{cases} 1, & w = w_1, \\ 0, & w = w_2, \end{cases}$$

则 $X_n \sim B(1, 1/2)$, $X \sim B(1, 1/2)$, $X_n \xrightarrow{d} X$, 但是

$$X_n \stackrel{P}{\not\longrightarrow} X,$$

这是因为 $|X_n - X| = 1$.

Lemma

设 X_n, X 为随机变量，则对 $\forall \epsilon > 0$ 和 $x \in \Re$，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \le x-\epsilon) - \mathrm{P}(|X_n - X| > \epsilon) &\le \mathrm{P}(X_n \le x) \\
&\le \mathrm{P}(X \le x+\epsilon) + \mathrm{P}(|X_n - X| > \epsilon).
\end{aligned}
$$

- 定理 6.2.1 $X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.

证：对 $\forall x \in C(F)$，$\epsilon > 0$，由上引理得

$$F(x-\epsilon) \le \liminf F_n(x) \le \limsup F_n(x) \le F(x+\epsilon).$$

令 $\epsilon \to 0$ 得证. ∎

Lemma

设 X_n, X 为随机变量，则对 $\forall \epsilon > 0$ 和 $x \in \Re$，有

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \le x-\epsilon) - \mathrm{P}(|X_n - X| > \epsilon) &\le \mathrm{P}(X_n \le x) \\ &\le \mathrm{P}(X \le x+\epsilon) + \mathrm{P}(|X_n - X| > \epsilon). \end{aligned}$$

- 定理 6.2.1 $X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.

  证：对 $\forall x \in C(F)$, $\epsilon > 0$，由上引理得

  $$F(x-\epsilon) \le \liminf F_n(x) \le \limsup F_n(x) \le F(x+\epsilon).$$

  令 $\epsilon \to 0$ 得证. ∎

- **定理 6.2.2** $X_n \xrightarrow{d} c \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow{P} c$, 其中 $c \in \Re$.

证 $(\Longrightarrow)$ 设 $X_n \xrightarrow{d} c$. 于是对 $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|X_n - c| > \epsilon) &= \mathrm{P}(X_n > c+\epsilon) + \mathrm{P}(X_n < c-\epsilon) \\ &= 1 - F_{X_n}(c+\epsilon) + F_{X_n}(c-\epsilon-) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

即 $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} c$. ∎

- **定理 6.2.3** 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, $r > 0$, 则 $\mathrm{E}|X_n|^r \to \mathrm{E}|X|^r < \infty$ 当且仅当 $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ 一致可积.

- 定理 6.2.2 $X_n \xrightarrow{d} c \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow{P} c$, 其中 $c \in \Re$.

证 $(\Longrightarrow)$ 设 $X_n \xrightarrow{d} c$. 于是对 $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|X_n - c| > \epsilon) &= \mathrm{P}(X_n > c+\epsilon) + \mathrm{P}(X_n < c-\epsilon) \\ &= 1 - F_{X_n}(c+\epsilon) + F_{X_n}(c-\epsilon-) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

即 $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} c$. ∎

- 定理 6.2.3 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, $r > 0$, 则 $\mathrm{E}|X_n|^r \to \mathrm{E}|X|^r < \infty$ 当且仅当 $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ 一致可积.

- 定理 6.2.2 $X_n \xrightarrow{d} c \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow{P} c$, 其中 $c \in \Re$.

  证 $(\Longrightarrow)$ 设 $X_n \xrightarrow{d} c$. 于是对 $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|X_n - c| > \epsilon) &= \mathrm{P}(X_n > c+\epsilon) + \mathrm{P}(X_n < c-\epsilon) \\ &= 1 - F_{X_n}(c+\epsilon) + F_{X_n}(c-\epsilon-) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

  即 $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} c$. ∎

- 定理 6.2.3 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, $r > 0$, 则 $\mathrm{E}|X_n|^r \to \mathrm{E}|X|^r < \infty$ 当且仅当 $\{|X_n|^r, n \geq 1\}$ 一致可积.

6.2.2 连续性定理

- **定理 A.2.5** 设 $\{F_n, F\}$ 为有界, 单调增且右连续函数, 则

$$F_n \xrightarrow{w} F \Longleftrightarrow F_n(x) \to F(x), \quad x \in D,$$

其中 D 为 $C(F)$ 的某个稠密子集.

证: $(\Longleftarrow)$ 设 $x \in C(F)$, 则存在 $y, z \in D$ 使得 $y < x < z$, 且

$$F_n(y) \le F_n(x) \le F_n(z).$$

令 $n \to \infty$, 得

$$F(y) \le \liminf F_n(x) \le \limsup F_n(x) \le F(z).$$

注意到 D 于 $C(F)$ 中稠密, 令 $y \uparrow x$, $z \downarrow x$ 得证. ∎

6.2.2 连续性定理

- **定理 A.2.5** 设 $\{F_n, F\}$ 为有界, 单调增且右连续函数, 则

$$F_n \xrightarrow{w} F \Longleftrightarrow F_n(x) \to F(x), \quad x \in D,$$

其中 D 为 $C(F)$ 的某个稠密子集.

证: $(\Longleftarrow)$ 设 $x \in C(F)$, 则存在 $y, z \in D$ 使得 $y < x < z$, 且

$$F_n(y) \leq F_n(x) \leq F_n(z).$$

令 $n \to \infty$, 得

$$F(y) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(z).$$

注意到 D 于 $C(F)$ 中稠密, 令 $y \uparrow x$, $z \downarrow x$ 得证. ▮

- 定理 A.2.6 (Helly 第一定理) 设 $\{F_n, n \geq 1\}$ 为有界, 单调增且右连续函数序列, 则 $\{F_n, n \geq 1\}$ 是弱紧的, 即存在 $\{F_n\}$ 的子列 $\{F_{n_k}\}$ 使得

$$F_{n_k} \xrightarrow{w} F.$$

证: 利用对角线法则以及定理 A.2.5.

- 定理 A.2.7 (Helly 第二定理) 设 $F_n \xrightarrow{d} F$, $g(x)$ 为有界连续函数, 则

$$\int_{\Re} g(x)dF_n(x) \longrightarrow \int_{\Re} g(x)dF(x).$$

证: 利用控制收敛定理及下面的嵌入定理.

- 定理 A.2.6 (Helly 第一定理) 设 $\{F_n, n \geq 1\}$ 为有界, 单调增且右连续函数序列, 则 $\{F_n, n \geq 1\}$ 是弱紧的, 即存在 $\{F_n\}$ 的子列 $\{F_{n_k}\}$ 使得
$$F_{n_k} \xrightarrow{w} F.$$
证: 利用对角线法则以及定理 A.2.5.

- 定理 A.2.7 (Helly 第二定理) 设 $F_n \xrightarrow{d} F$, $g(x)$ 为有界连续函数, 则
$$\int_{\Re} g(x)dF_n(x) \longrightarrow \int_{\Re} g(x)dF(x).$$
证: 利用控制收敛定理及下面的嵌入定理.

Theorem (嵌入定理)

设 $F_n \xrightarrow{d} F$, 则存在定义于同一概率空间上的 rv 序列 $\{X, X_n, n \geq 1\}$, 使得 $F_{X_n} = F_n$, $F_X = F$, 且对 $\forall\, w \in \Omega$, 有 $X_n(w) \to X(w)$.

证: 考虑 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P}) = ((0,1), \mathscr{B}(0,1), L)$. 设 $w \in (0,1)$, 令

$$X_n(w) = \inf\{x : w \leq F_n(x)\},$$

$$X(w) = \inf\{x : w \leq F(x)\},$$

已证 $w \leq F_n(x) \Longleftrightarrow X_n(w) \leq x$, 故

$$\mathrm{P}(\{w : X_n(w) \leq x\}) = \mathrm{P}(\{w : w \leq F_n(x)\}) = F_n(x),$$

因此$F_{X_n} = F_n$, 类似地, $F_X = F$. 下面证明 X_n 点点收敛于 X.

Theorem (嵌入定理)

设 $F_n \xrightarrow{d} F$, 则存在定义于同一概率空间上的 rv 序列 $\{X, X_n, n \geq 1\}$, 使得 $F_{X_n} = F_n$, $F_X = F$, 且对 $\forall\, w \in \Omega$, 有 $X_n(w) \to X(w)$.

证: 考虑 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P}) = ((0,1), \mathscr{B}(0,1), L)$. 设 $w \in (0,1)$, 令

$$X_n(w) = \inf\{x : w \leq F_n(x)\},$$

$$X(w) = \inf\{x : w \leq F(x)\},$$

已证 $w \leq F_n(x) \iff X_n(w) \leq x$, 故

$$\mathrm{P}(\{w : X_n(w) \leq x\}) = \mathrm{P}(\{w : w \leq F_n(x)\}) = F_n(x),$$

因此$F_{X_n} = F_n$, 类似地, $F_X = F$. 下面证明 X_n 点点收敛于 X.

(续) 设 $w \in (0,1)$, 对给定的 $\epsilon > 0$, 选取 $x \in C(F)$, 使 $X(w) - \epsilon < x < X(w)$, 则 $F(x) < w$ 和 $F_n(x) \to F(x)$ 蕴涵对充分大的 n 有 $F_n(x) < w$, 因此 $X(w) - \epsilon < x \le X_n(w)$. 由此知

$$\liminf X_n(w) \ge X(w).$$

若 $w < w'$, 对 $\epsilon > 0$, 取 $x \in C(F)$, 使 $X(w') < x < X(w') + \epsilon$, 则 $w < w' \le F(X(w')) \le F(x)$, 于是对充分大的$n$, $w \le F_n(x)$. 因此, $X_n(w) \le x < X(w') + \epsilon$. 取上极限, 再令 $\epsilon \to 0$, 得当 $w < w'$ 时,

$$\limsup X_n(w) \le X(w').$$

由上可知, 如果 X 在 w 处连续, 则 $X_n(w) \to X(w)$.

在 X 的不连续点 w (至多可列) 上, 重新定义 $X_n(w) = X(w) = 0$. 此时, $X_n(w) \to X(w)$, $\forall\, w$. 由于 X 和 X_n 仅在一个 Lebesgue 零测集上改动, 故其 cdf 仍然是 F 和 F_n. ∎

(续) 设 $w \in (0,1)$, 对给定的 $\epsilon > 0$, 选取 $x \in C(F)$, 使 $X(w) - \epsilon < x < X(w)$, 则 $F(x) < w$ 和 $F_n(x) \to F(x)$ 蕴涵对充分大的 n 有 $F_n(x) < w$, 因此 $X(w) - \epsilon < x \le X_n(w)$. 由此知

$$\liminf X_n(w) \ge X(w).$$

若 $w < w'$, 对 $\epsilon > 0$, 取 $x \in C(F)$, 使 $X(w') < x < X(w') + \epsilon$, 则 $w < w' \le F(X(w')) \le F(x)$, 于是对充分大的$n$, $w \le F_n(x)$. 因此, $X_n(w) \le x < X(w') + \epsilon$. 取上极限, 再令 $\epsilon \to 0$, 得当 $w < w'$ 时,

$$\limsup X_n(w) \le X(w').$$

由上可知, 如果 X 在 w 处连续, 则 $X_n(w) \to X(w)$.

在 X 的不连续点 w (至多可列) 上, 重新定义 $X_n(w) = X(w) = 0$. 此时, $X_n(w) \to X(w), \forall w$. 由于 X 和 X_n 仅在一个 Lebesgue 零测集上改动, 故其 cdf 仍然是 F 和 F_n. ∎

(续) 设 $w \in (0,1)$, 对给定的 $\epsilon > 0$, 选取 $x \in C(F)$, 使 $X(w) - \epsilon < x < X(w)$, 则 $F(x) < w$ 和 $F_n(x) \to F(x)$ 蕴涵对充分大的 n 有 $F_n(x) < w$, 因此 $X(w) - \epsilon < x \le X_n(w)$. 由此知

$$\liminf X_n(w) \ge X(w).$$

若 $w < w'$, 对 $\epsilon > 0$, 取 $x \in C(F)$, 使 $X(w') < x < X(w') + \epsilon$, 则 $w < w' \le F(X(w')) \le F(x)$, 于是对充分大的$n$, $w \le F_n(x)$. 因此, $X_n(w) \le x < X(w') + \epsilon$. 取上极限, 再令 $\epsilon \to 0$, 得当 $w < w'$ 时,

$$\limsup X_n(w) \le X(w').$$

由上可知, 如果 X 在 w 处连续, 则 $X_n(w) \to X(w)$.

在 X 的不连续点 w (至多可列) 上, 重新定义 $X_n(w) = X(w) = 0$. 此时, $X_n(w) \to X(w)$, $\forall\, w$. 由于 X 和 X_n 仅在一个 Lebesgue 零测集上改动, 故其 cdf 仍然是 F 和 F_n. ∎

- 定理 A.2.8 (连续性定理)

  (i) 设 F, F_n 为 cdf, 对应的特征函数为 f, f_n. 如果 $F_n \xrightarrow{\mathrm{d}} F$, 则

  $$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t), \quad \forall\, t \in \Re, \tag{1}$$

  且上述收敛在任意有界闭区间上是一致的

  (ii) 设 f_n 为 cdf F_n 的特征函数, 若存在一个在 $t=0$ 点连续 的函数 f 使得 (1) 成立, 则 f 一定为某个 cdf F 的特征函数, 且

  $$F_n \xrightarrow{\mathrm{d}} F.$$

- 定理 A.2.8 (连续性定理)

  (i) 设 F, F_n 为 cdf, 对应的特征函数为 f, f_n. 如果 $F_n \xrightarrow{\mathrm{d}} F$, 则

  $$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t), \quad \forall\, t \in \Re, \tag{1}$$

  且上述收敛在任意有界闭区间上是一致的

  (ii) 设 f_n 为 cdf F_n 的特征函数, 若存在一个在 $t = 0$ 点连续 的函数 f 使得 (1) 成立, 则 f 一定为某个 cdf F 的特征函数, 且

  $$F_n \xrightarrow{\mathrm{d}} F.$$

- 【例 6.2.5】 设 $X_n \sim N(0,n)$, 试讨论 X_n 的依分布收敛性.

分析: 以 F_n 和 f_n 分别表示 X_n 的分布函数和特征函数, 则

$$f_n(t) = \exp\left\{-\frac{n}{2}t^2\right\} \longrightarrow f(t) := \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

可见 $f_n(t)$ 收敛, 但其极限 f 不是特征函数 (于 0 点不连续).
另一方面,

$$F_n(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \frac{1}{2},$$

即 F_n 点点收敛, 但其极限不是一个分布函数. 因此, $\{F_n\}$ 不是依分布收敛. ∎

- 【例 6.2.5】 设 $X_n \sim N(0,n)$, 试讨论 X_n 的依分布收敛性.

分析: 以 F_n 和 f_n 分别表示 X_n 的分布函数和特征函数, 则

$$f_n(t) = \exp\left\{-\frac{n}{2}t^2\right\} \longrightarrow f(t) := \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

可见 $f_n(t)$ 收敛, 但其极限 f 不是特征函数 (于 0 点不连续).
另一方面,

$$F_n(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \frac{1}{2},$$

即 F_n 点点收敛, 但其极限不是一个分布函数. 因此, $\{F_n\}$ 不是依分布收敛. ∎

- 【例 6.2.6】 设 $X_n \xrightarrow{d} N(\mu, \sigma^2)$, 证明

$$aX_n + b \xrightarrow{d} N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

证明: 以 F_n 和 f_n 分别表示 X_n 的分布函数和特征函数, 则

$$f_n(t) \longrightarrow \exp\left\{\mathrm{i}\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t^2\right\}, \quad t \in \Re.$$

对任意 $a, b \in \Re$, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\exp\{\mathrm{i}t(aX_n + b)\}\right] &= e^{\mathrm{i}bt} f_n(at) \\ &\longrightarrow \exp\left\{\mathrm{i}(a\mu + b)t - \frac{a^2\sigma^2}{2}t^2\right\}, \quad t \in \Re. \end{aligned}$$

应用定理 A.2.8 得证. ∎

- 【例 6.2.6】 设 $X_n \xrightarrow{d} N(\mu, \sigma^2)$, 证明

$$aX_n + b \xrightarrow{d} N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

证明: 以 F_n 和 f_n 分别表示 X_n 的分布函数和特征函数, 则

$$f_n(t) \longrightarrow \exp\left\{\mathrm{i}\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t^2\right\}, \quad t \in \Re.$$

对任意 $a, b \in \Re$, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\exp\{\mathrm{i}t(aX_n + b)\}\right] &= e^{\mathrm{i}bt} f_n(at) \\ &\longrightarrow \exp\left\{\mathrm{i}(a\mu + b)t - \frac{a^2\sigma^2}{2}t^2\right\}, \quad t \in \Re. \end{aligned}$$

应用定理 A.2.8 得证. ∎

- 【例 6.2.7】 设 $X_n \sim \mathrm{Geo}^*(p_n)$, 且 $p_n \to 0$, 证明 $\{p_n X_n/\lambda\}$ 依分布收敛到 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ 分布, 其中 $\lambda > 0$.

证明: 不妨设 $\lambda = 1$, $q_n = 1 - p_n$. 以 f_n 表示 $p_n X_n$ 的特征函数, 则

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \mathrm{E}\, e^{\mathrm{i}tp_nX_n} = \frac{p_n e^{\mathrm{i}p_n t}}{1 - q_n e^{\mathrm{i}p_n t}} \\ &= \frac{p_n\left(1 + \mathrm{i}p_n t - p_n^2 t^2/2 + \circ(p_n^2)\right)}{1 - q_n\left(1 + \mathrm{i}p_n t - p_n^2 t^2/2 + \circ(p_n^2)\right)} \\ &= \frac{1 + \mathrm{i}p_n t - p_n^2 t^2/2 + \circ(p_n^2)}{1 - \mathrm{i}q_n t + p_n q_n t^2/2 + \circ(p_n q_n)} \\ &\to \frac{1}{1 - \mathrm{i}t}, \quad t \in \Re. \end{aligned}$$

- 【例 6.2.7】 设 $X_n \sim \mathrm{Geo}^*(p_n)$, 且 $p_n \to 0$, 证明 $\{p_nX_n/\lambda\}$ 依分布收敛到 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ 分布, 其中 $\lambda > 0$.

证明: 不妨设 $\lambda = 1$, $q_n = 1 - p_n$. 以 f_n 表示 p_nX_n 的特征函数, 则

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= \mathrm{E}\, e^{\mathrm{i}tp_nX_n} = \frac{p_n e^{\mathrm{i}p_nt}}{1 - q_n e^{\mathrm{i}p_nt}} \\
&= \frac{p_n\left(1 + \mathrm{i}p_nt - p_n^2t^2/2 + \circ(p_n^2)\right)}{1 - q_n\left(1 + \mathrm{i}p_nt - p_n^2t^2/2 + \circ(p_n^2)\right)} \\
&= \frac{1 + \mathrm{i}p_nt - p_n^2t^2/2 + \circ(p_n^2)}{1 - \mathrm{i}q_nt + p_nq_nt^2/2 + \circ(p_nq_n)} \\
&\to \frac{1}{1 - \mathrm{i}t}, \qquad t \in \Re.
\end{aligned}$$

- 【例 6.2.8】 证明：

  (1) 若 $X_n \sim B(n, p_n)$ 且 $np_n \to \lambda > 0$, 证明 $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{Poi}(\lambda)$.

  (2) 设 $X_n \sim B(n, p)$, 则 $X_n/n \xrightarrow{P} p$.

证明: (1) 记 $q_n = 1 - p_n$. 以 f_n 表示 X_n 的特征函数, 则

$$\begin{aligned} f_n(t) &= (q_n + p_n e^{it})^n = (1 + p_n(e^{it} - 1))^n \\ &\to \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}, \quad t \in \Re. \end{aligned}$$

(2) 仅证 $X_n/n \xrightarrow{d} p$. 事实上, X_n/n 的特征函数为

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{it\frac{X_n}{n}\right\}\right] = (1 + p(e^{it/n} - 1))^n \longrightarrow e^{ipt}.$$

- 【例 6.2.8】 证明：

  (1) 若 $X_n \sim B(n, p_n)$ 且 $np_n \to \lambda > 0$，证明 $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{Poi}(\lambda)$.

  (2) 设 $X_n \sim B(n, p)$，则 $X_n/n \xrightarrow{P} p$.

  证明: (1) 记 $q_n = 1 - p_n$. 以 f_n 表示 X_n 的特征函数，则

$$\begin{aligned} f_n(t) &= (q_n + p_n e^{\mathrm{i}t})^n = (1 + p_n(e^{\mathrm{i}t} - 1))^n \\ &\to \exp\{\lambda(e^{\mathrm{i}t} - 1)\}, \quad t \in \Re. \end{aligned}$$

  (2) 仅证 $X_n/n \xrightarrow{d} p$. 事实上，X_n/n 的特征函数为

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}t\frac{X_n}{n}\right\}\right] = (1 + p(e^{\mathrm{i}t/n} - 1))^n \longrightarrow e^{\mathrm{i}pt}.$$

- 【例 6.2.9】 设 $X_n \sim \mathrm{Poi}(\lambda_n)$ 且 $\lambda_n \to +\infty$, 证明

$$\frac{X_n-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

证明: 以 f_n 表示 $(X_n-\lambda_n)/\sqrt{\lambda_n}$ 的特征函数, 则

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \exp\left\{\lambda_n\left(e^{\mathrm{i}t/\sqrt{\lambda_n}}-1-\frac{\mathrm{i}t}{\sqrt{\lambda_n}}\right)\right\} \\ &\to \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad t\in\Re. \end{aligned}$$

$$e^{\mathrm{i}t}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}, \quad t\in\Re.$$

- 【例 6.2.9】 设 $X_n \sim \mathrm{Poi}(\lambda_n)$ 且 $\lambda_n \to +\infty$, 证明

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

证明: 以 f_n 表示 $(X_n - \lambda_n)/\sqrt{\lambda_n}$ 的特征函数, 则

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \exp\left\{\lambda_n\left(e^{\mathrm{i}t/\sqrt{\lambda_n}} - 1 - \frac{\mathrm{i}t}{\sqrt{\lambda_n}}\right)\right\} \\ &\to \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad t \in \Re. \end{aligned}$$

$$e^{\mathrm{i}t} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}, \quad t \in \Re.$$

§6.3 弱大数律与中心极限定理 (CLT)

工具: 特征函数　　优点: 降低矩条件的阶数

6.3.1 弱大数律

- **定理 6.3.1** (Khintchine 弱大数律) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足 $\mathrm{E}\, X_1 = a \in \Re$, 则
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a.$$

证: 注意到

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a \Longleftrightarrow \frac{S_n - na}{n} \xrightarrow{d} 0 \Longleftrightarrow f_n(t) \to 1, \ \forall\ t,$$

其中

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{i}\, t \frac{S_n - na}{n}\right\} = \left(\mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\, t \frac{X_1 - a}{n}\right\}\right)^n \\ &= \left(1 + \circ\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

工具: 特征函数 优点: 降低矩条件的阶数

6.3.1 弱大数律

- **定理 6.3.1** (Khintchine 弱大数律) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足 $\mathrm{E}\, X_1 = a \in \Re$, 则
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a.$$

证: 注意到

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a \Longleftrightarrow \frac{S_n - na}{n} \xrightarrow{d} 0 \Longleftrightarrow f_n(t) \to 1, \ \forall\ t,$$

其中

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{i}\, t \frac{S_n - na}{n}\right\} = \left(\mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\, t \frac{X_1 - a}{n}\right\}\right)^n \\ &= \left(1 + \circ\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

- 【例 6.3.1】 设 $f : [0,1] \to \Re$ 可测函数，满足

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,$$

而 $\{U_n, n \geq 1\}$ iid $\sim U(0,1)$，记

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k), \quad I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明

$$I_n \xrightarrow{P} I$$

※ 应用：种用概率方法近似计算积分的办法，通常称为 Monte Carlo 方法.

- 【例 6.3.1】 设 $f:[0,1]\to\Re$ 可测函数，满足

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty,$$

而 $\{U_n, n\geq 1\}$ iid $\sim U(0,1)$，记

$$I_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(U_k),\quad I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明

$$I_n \xrightarrow{P} I$$

※ 应用：种用概率方法近似计算积分的办法，通常称为 Monte Carlo 方法.

- 【例 6.3.2】 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，其对应的次数为 n 的 Bernstein 多项式是

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

试利用弱大数律证明：对 $\forall x \in [0,1]$，都有 $\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$.

※ 应用：

弱大数率 ＋ 依概率收敛的刻画 ＋ 连续性 ＋ 控制收敛定理

- 【例 6.3.2】 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，其对应的次数为 n 的 Bernstein 多项式是

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\quad x\in[0,1].$$

试利用弱大数律证明：对 $\forall x\in[0,1]$，都有$\lim_{n\to\infty} B_n(x)=f(x)$.

※ 应用：

弱大数率 ＋ 依概率收敛的刻画 ＋ 连续性 ＋ 控制收敛定理

- 【例 6.3.3】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, $\mathrm{E}\, X_1 = \mu$, $\mathrm{Var}\,(X_1) = \sigma^2$, 记

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2.$$

证明: $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.

证明: 应用

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 + \frac{n}{n-1}(\overline{X}_n-\mu)^2,$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} \sigma^2,$$

$$\overline{X}_n - \mu \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

- 【例 6.3.3】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, $\mathrm{E}\, X_1 = \mu$, $\mathrm{Var}\,(X_1) = \sigma^2$, 记

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2.$$

证明: $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.

证明: 应用

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 + \frac{n}{n-1}(\overline{X}_n-\mu)^2,$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} \sigma^2,$$

$$\overline{X}_n - \mu \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

6.3.2 Slutsky 引理

- **定理 6.3.2** (Slutsky 引理) 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{P} 0$, 则

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X.$$

证: 记 $Z_n = X_n + Y_n$, $X \sim F$. 取 $\epsilon_1 > 0$ 且 $x + \epsilon_1 \in C(F)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_n \le x) &= \mathrm{P}(Z_n \le x, X_n \le x+\epsilon_1) + \mathrm{P}(Z_n \le x, X_n > x+\epsilon_1) \\ &\le \mathrm{P}(X_n \le x+\epsilon_1) + \mathrm{P}(Y_n \le -\epsilon_1) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \le x) \le F(x+\epsilon_1).$$

类似, 取 $\epsilon_2 > 0$ 且 $x - \epsilon_2 \in C(F)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_n \le x-\epsilon_2) &= \mathrm{P}(X_n \le x-\epsilon_2, Y_n \le \epsilon_2) + \mathrm{P}(X_n \le x-\epsilon_2, Y_n > \epsilon_2) \\ &\le \mathrm{P}(Z_n \le x) + \mathrm{P}(Y_n > \epsilon_2) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad F(x-\epsilon_2) \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \le x).$$

$\cdots\cdots$

6.3.2 Slutsky 引理

- **定理 6.3.2** (Slutsky 引理) 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{P} 0$, 则

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X.$$

证: 记 $Z_n = X_n + Y_n$, $X \sim F$. 取 $\epsilon_1 > 0$ 且 $x + \epsilon_1 \in C(F)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_n \le x) &= \mathrm{P}(Z_n \le x, X_n \le x+\epsilon_1) + \mathrm{P}(Z_n \le x, X_n > x+\epsilon_1) \\ &\le \mathrm{P}(X_n \le x+\epsilon_1) + \mathrm{P}(Y_n \le -\epsilon_1) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \le x) \le F(x+\epsilon_1).$$

类似, 取 $\epsilon_2 > 0$ 且 $x - \epsilon_2 \in C(F)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_n \le x-\epsilon_2) &= \mathrm{P}(X_n \le x-\epsilon_2, Y_n \le \epsilon_2) + \mathrm{P}(X_n \le x-\epsilon_2, Y_n > \epsilon_2) \\ &\le \mathrm{P}(Z_n \le x) + \mathrm{P}(Y_n > \epsilon_2) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad F(x-\epsilon_2) \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \le x).$$

......

6.3.2 Slutsky 引理

- **定理 6.3.2** (Slutsky 引理) 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{P} 0$, 则

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X.$$

证: 记 $Z_n = X_n + Y_n$, $X \sim F$. 取 $\epsilon_1 > 0$ 且 $x + \epsilon_1 \in C(F)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_n \le x) &= \mathrm{P}(Z_n \le x, X_n \le x+\epsilon_1) + \mathrm{P}(Z_n \le x, X_n > x+\epsilon_1) \\ &\le \mathrm{P}(X_n \le x+\epsilon_1) + \mathrm{P}(Y_n \le -\epsilon_1) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \le x) \le F(x+\epsilon_1).$$

类似, 取 $\epsilon_2 > 0$ 且 $x - \epsilon_2 \in C(F)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_n \le x-\epsilon_2) &= \mathrm{P}(X_n \le x-\epsilon_2, Y_n \le \epsilon_2) + \mathrm{P}(X_n \le x-\epsilon_2, Y_n > \epsilon_2) \\ &\le \mathrm{P}(Z_n \le x) + \mathrm{P}(Y_n > \epsilon_2) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad F(x-\epsilon_2) \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \le x).$$

......

- **定理 6.3.2′** (Slutsky 引理) 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, $W_n \xrightarrow{P} 1$, 则

$$X_n W_n \xrightarrow{d} X.$$

证: 记 $T_n = X_n W_n$, $X \sim F$. 任取 $x \in C(F)$, 不妨设 $x > 0$. 对 $\forall\, \epsilon \in (0, 1/2)$, 存在 $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ 使得 $(1 \pm \epsilon_1)x \in C(F)$. 显然,

$$\mathrm{P}\left(T_n \le x\right) \le \mathrm{P}\left(X_n \le (1+\epsilon_1)x\right) + \mathrm{P}\left(|W_n - 1| > \frac{\epsilon_1}{1+\epsilon_1}\right)$$

$$\mathrm{P}\left(X_n \le (1-\epsilon_1)x\right) \le \mathrm{P}\left(T_n \le x\right) + \mathrm{P}\left(|W_n - 1| > \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_1}\right).$$

[需考虑 $W_n > 0$ 和 $W_n \le 0$ 两种情形]

令 $n \to \infty$ 得

$$F((1-\epsilon_1)x) \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(T_n \le x\right) \le \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(T_n \le x\right) \le F((1+\epsilon_1)x).$$

再令 $\epsilon \to 0$ 得 $\mathrm{P}\left(T_n \le x\right) \longrightarrow F(x)$. ∎

▶ 定理 6.3.2′ (Slutsky 引理) 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, $W_n \xrightarrow{P} 1$, 则

$$X_nW_n \xrightarrow{d} X.$$

证: 记 $T_n = X_nW_n$, $X \sim F$. 任取 $x \in C(F)$, 不妨设 $x > 0$. 对 $\forall\ \epsilon \in (0, 1/2)$, 存在 $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ 使得 $(1 \pm \epsilon_1)x \in C(F)$. 显然,

$$\mathrm{P}(T_n \le x) \le \mathrm{P}(X_n \le (1+\epsilon_1)x) + \mathrm{P}\left(|W_n - 1| > \frac{\epsilon_1}{1+\epsilon_1}\right)$$

$$\mathrm{P}(X_n \le (1-\epsilon_1)x) \le \mathrm{P}(T_n \le x) + \mathrm{P}\left(|W_n - 1| > \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_1}\right).$$

[需考虑 $W_n > 0$ 和 $W_n \le 0$ 两种情形]

令 $n \to \infty$ 得

$$F((1-\epsilon_1)x) \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(T_n \le x) \le \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(T_n \le x) \le F((1+\epsilon_1)x).$$

再令 $\epsilon \to 0$ 得 $\mathrm{P}(T_n \le x) \longrightarrow F(x)$. ∎

- **定理 6.3.2″** (Slutsky 引理) 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, $W_n \xrightarrow{P} 0$, 则

$$X_n W_n \xrightarrow{P} 0.$$

证: 记 $T_n = X_n W_n$, $X \sim F$. 任取 $x > 0$. 再任取 $\epsilon > 0$ 使得 $\pm x/\epsilon \in C(F)$. 于是,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(|T_n| > x) &\le \mathrm{P}(|W_n| > \epsilon) + \mathrm{P}(|W_n| \le \epsilon, |T_n| > x)) \\ &\le \mathrm{P}(|W_n| > \epsilon) + \mathrm{P}(x < \epsilon |X_n|). \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\limsup \mathrm{P}(|T_n| > x) \le \mathrm{P}(x < \epsilon |X|)$$

再令 $\epsilon \to 0$ 得 $\mathrm{P}(|T_n| > x) \longrightarrow 0$. ∎

- 定理 6.3.2″ (Slutsky 引理) 如果 $X_n \xrightarrow{d} X$, $W_n \xrightarrow{P} 0$, 则

$$X_n W_n \xrightarrow{P} 0.$$

证: 记 $T_n = X_n W_n$, $X \sim F$. 任取 $x > 0$. 再任取 $\epsilon > 0$ 使得 $\pm x/\epsilon \in C(F)$. 于是,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(|T_n| > x\right) &\le \mathrm{P}\left(|W_n| > \epsilon\right) + \mathrm{P}\left(|W_n| \le \epsilon, |T_n| > x\right) \\ &\le \mathrm{P}\left(|W_n| > \epsilon\right) + \mathrm{P}\left(x < \epsilon |X_n|\right). \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\limsup \mathrm{P}\left(|T_n| > x\right) \le \mathrm{P}\left(x < \epsilon |X|\right)$$

再令 $\epsilon \to 0$ 得 $\mathrm{P}\left(|T_n| > x\right) \longrightarrow 0$. ∎

Slutsky 引理的应用：Delta 方法

- 【例 6.3.4】 设 $\sqrt{n}(X_n - a) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$, 其中 $a \in \Re$, $\sigma^2 > 0$, 函数 g 于 a 点可导, 且 $g'(a) \neq 0$, 则

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2[g'(a)]^2).$$

证明:

- Step 1. 证明 $X_n - a \xrightarrow{P} 0$.
- Step 2. 根据 Taylor 展开, 得

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(a)) = g'(a) \cdot \sqrt{n}(X_n - a) + \sqrt{n}\, Y_n,$$

其中 $Y_n = o(X_n - a)$.

- Step 3. $\sqrt{n}\, Y_n \xrightarrow{P} 0$. 事实上,

$$\sqrt{n}\, Y_n = \sqrt{n}(X_n - a) \cdot \frac{Y_n}{X_n - a}, \qquad \frac{Y_n}{X_n - a} \xrightarrow{P} 0.$$

Slutsky 引理的应用：Delta 方法

- 【例 6.3.4】 设 $\sqrt{n}(X_n - a) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$, 其中 $a \in \Re$, $\sigma^2 > 0$, 函数 g 于 a 点可导, 且 $g'(a) \neq 0$, 则

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2[g'(a)]^2).$$

证明:

- Step 1. 证明 $X_n - a \xrightarrow{P} 0$.
- Step 2. 根据 Taylor 展开, 得

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(a)) = g'(a) \cdot \sqrt{n}(X_n - a) + \sqrt{n}\, Y_n,$$

  其中 $Y_n = \circ(X_n - a)$.
- Step 3. $\sqrt{n}\, Y_n \xrightarrow{P} 0$. 事实上,

$$\sqrt{n}\, Y_n = \sqrt{n}(X_n - a) \cdot \frac{Y_n}{X_n - a}, \qquad \frac{Y_n}{X_n - a} \xrightarrow{P} 0.$$

6.3.2 CLT

- **定义 6.3.1** (中心极限定理) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ rv 序列, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. 如果存在中心化数列 $\{a_n, n \geq 1\}$ 和正则化数列 $\{b_n, n \geq 1\}$, 使得

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

则称 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从中心极限定理.

※

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1) \Longleftrightarrow \mathrm{E}\left\{\mathrm{i}\, t \frac{S_n - a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \ \forall\, t.$$

6.3.2 CLT

- **定义 6.3.1** (中心极限定理) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ rv 序列, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. 如果存在中心化数列 $\{a_n, n \geq 1\}$ 和正则化数列 $\{b_n, n \geq 1\}$, 使得

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

则称 $\{X_n, n \geq 1\}$ 服从中心极限定理.

※

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1) \Longleftrightarrow \mathrm{E}\left\{\mathrm{i}\, t \frac{S_n - a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \ \forall\, t.$$

- 定理 6.3.3 (Levy 中心极限定理) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足 $\mathrm{E}\,X_1 = a$, $\mathrm{Var}\,(X_1) = \sigma^2 < \infty$, 则

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

证: 记 f_n 为 $(S_n - na)/(\sqrt{n}\sigma)$ 的特征函数, 则

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{i}\,t\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma}\right\} = \left(\mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\,t\frac{X_1 - a}{\sqrt{n}\sigma}\right\}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \circ\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \\ &\longrightarrow \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \ \forall\, t. \end{aligned}$$

- 定理 6.3.3 (Levy 中心极限定理) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足 $\mathrm{E}\, X_1 = a$, $\mathrm{Var}\,(X_1) = \sigma^2 < \infty$, 则

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

证: 记 f_n 为 $(S_n - na)/(\sqrt{n}\sigma)$ 的特征函数, 则

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \mathrm{E}\left\{\mathrm{i}\, t \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma}\right\} = \left(\mathrm{E}\, \exp\left\{\mathrm{i}\, t \frac{X_1 - a}{\sqrt{n}\sigma}\right\}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \circ\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \\ &\longrightarrow \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad \forall\, t. \end{aligned}$$

- 例 6.3.5 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim B(1,p)$, $p \in (0,1)$, $q = 1-p$, 则 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n,p)$. 当 a, b 是非负整数时，则对于较大的n, 有以下近似公式

$$\begin{cases} \mathrm{P}\left(a \leqslant S_n \leqslant b\right) \approx \Phi\left(\dfrac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right), \\ \mathrm{P}\left(S_n \leqslant b\right) \approx \Phi\left(\dfrac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right), \\ \mathrm{P}\left(S_n \geqslant a\right) \approx 1 - \Phi\left(\dfrac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right). \end{cases}$$

※ 上述近似并非总有效，一般要求 $(np) \wedge (nq) > 5$.

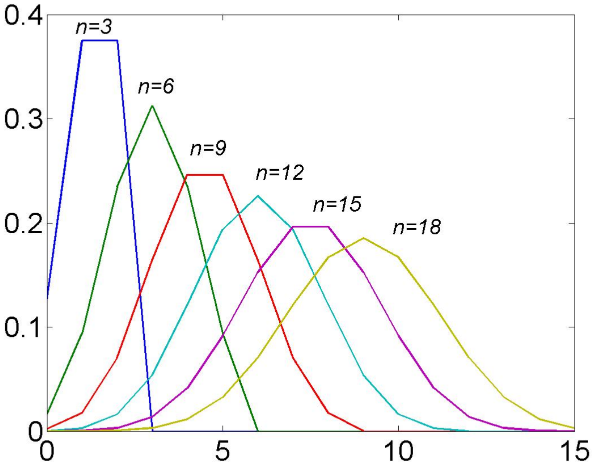
- 例 6.3.5 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim B(1,p)$, $p \in (0,1)$, $q = 1-p$, 则 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n,p)$. 当 a, b 是非负整数时, 则对于较大的n, 有以下近似公式

$$\begin{cases} \mathrm{P}\left(a \leqslant S_n \leqslant b\right) \approx \Phi\left(\dfrac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right), \\ \mathrm{P}\left(S_n \leqslant b\right) \approx \Phi\left(\dfrac{b+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right), \\ \mathrm{P}\left(S_n \geqslant a\right) \approx 1-\Phi\left(\dfrac{a-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right). \end{cases}$$

※ 上述近似并非总有效, 一般要求 $(np) \wedge (nq) > 5$.

(续)

取 $p = 1/2$, $B(n,p)$ 分布的 pmf 图如下:



- 算例：某药厂试制了一种新药，声称对贫血患者的治疗有效率达到 80%. 医药监管部门准备对 100 个贫血患者进行此药的临床试验，若这 100 人中至少有 75 人用药有效，就批准此药的生产. 如果该药的有效率确实达到 80%，此药被批准生产的概率至少是多少？

解：用 S_n 示这 n 个患者中用药后有效的人数. 如果该药有效率是 $p = 80\%$，则 $S_n \sim B(n, p)$. 于是此药被批准生产的概率为

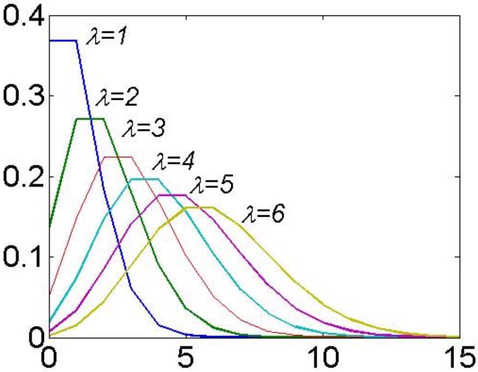
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(S_n \geqslant 75\right) &= \mathrm{P}\left(S_n > 74.5\right) \qquad [\text{修正}] \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{74.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{74.5 - 80}{\sqrt{80 \times 0.2}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(-5.5/4) \\
&= \Phi(1.375) \approx 0.916.
\end{aligned}$$

- 算例：某药厂试制了一种新药，声称对贫血患者的治疗有效率达到 80%. 医药监管部门准备对 100 个贫血患者进行此药的临床试验，若这 100 人中至少有 75 人用药有效，就批准此药的生产. 如果该药的有效率确实达到 80%，此药被批准生产的概率至少是多少？

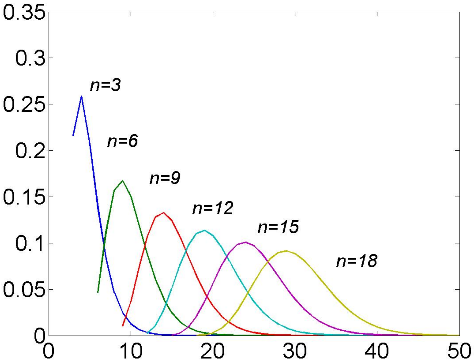
解：用 S_n 示这 n 个患者中用药后有效的人数. 如果该药有效率是 $p=80\%$，则 $S_n \sim B(n,p)$. 于是此药被批准生产的概率为

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(S_n \geqslant 75) &= \mathrm{P}\,(S_n > 74.5) \qquad [\text{修正}] \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{74.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{74.5 - 80}{\sqrt{80 \times 0.2}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(-5.5/4) \\
&= \Phi(1.375) \approx 0.916.
\end{aligned}$$

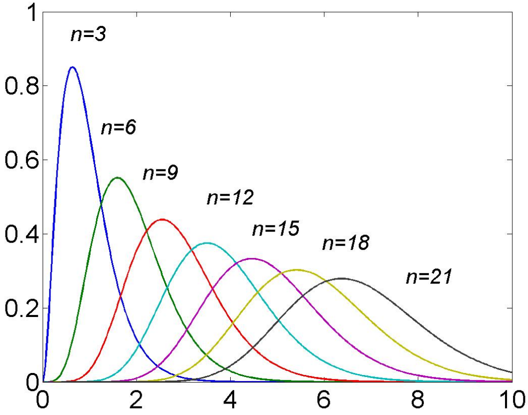
- 例 6.3.a 设 X_λ iid $\sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. $\mathrm{Poi}(\lambda)$ 分布的 pmf 图如下：



- 例 6.3.b 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Geo}^*(p)$，$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. S_n 分布的 pmf 图如下：



- 例 6.3.c 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$. 特别, 取 $\lambda = \pi$, S_n 分布的 pdf 图如下:



- 例 6.3.6 设 X_1, X_2, X_3 iid $\sim U(0,1)$, 则 $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ 的 pdf 为

$$p_3(x) = \begin{cases} x^2/2, & x \in [0,1); \\ -x^2 + 3x - 3/2, & x \in [1,2); \\ (3-x)^2/2, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

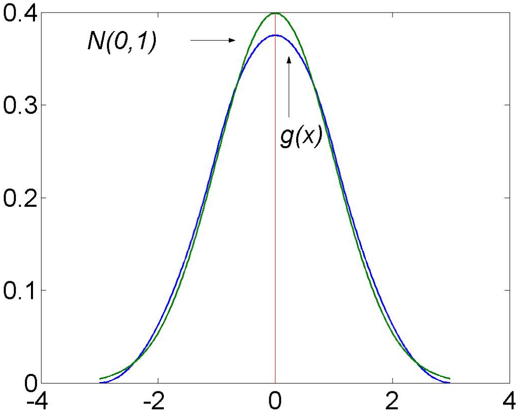
利用 $\mathrm{E}\, S_3 = 3/2$, $\mathrm{Var}\,(X_1) = 1/12$, 得到 S_3 的标准化

$$T_3 = \frac{S_3 - 3/2}{\sqrt{1/4}} = 2S_3 - 3.$$

T_3 的 pdf 是

$$g(x) = \frac{1}{2}\, p_3\left(\frac{x+3}{2}\right).$$

T_3 的 pdf $g(x)$ 的图形和标准正态 pdf 的图形 (在原点较高的曲线) 基本相同.



- 例 6.3.7 用中心极限定理证明：

$$e^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}\longrightarrow\frac{1}{2},\quad n\to\infty.$$

证明: 设 $\{X_k, k\geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Poi}(1)$, 则

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d} N(0,1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathrm{Poi}(n).$$

- 例 6.3.7 用中心极限定理证明：

$$e^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}\longrightarrow\frac{1}{2},\quad n\to\infty.$$

证明: 设 $\{X_k, k\geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Poi}(1)$, 则

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1),$$

$$\sum_{k=1}^{n}X_k\sim\mathrm{Poi}(n).$$

- **例 6.3.14** 设 $\{X_n, n\geq 1\}$ iid, 满足 $\mathrm{E}\,X_1=a$, $\mathrm{Var}\,(X_1)=\sigma^2<\infty$, 则

$$\frac{S_n-na}{\sqrt{n}\,\widehat{\sigma}}\xrightarrow{d} N(0,1),$$

其中

$$\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$

或

$$\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2,\quad \overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

※

$$X_n\xrightarrow{d}X,\ Y_n\xrightarrow{P}c>0\Longrightarrow X_n/Y_n\xrightarrow{d}X/c.$$

▶ 例 6.3.14 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足 $\mathrm{E}\, X_1 = a$, $\mathrm{Var}\,(X_1) = \sigma^2 < \infty$, 则

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\,\widehat{\sigma}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

其中

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

或

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2, \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

※

$$X_n \xrightarrow{d} X,\ Y_n \xrightarrow{P} c > 0 \Longrightarrow X_n/Y_n \xrightarrow{d} X/c.$$

6.3.4 独立不同分布场合下的 CLT

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是相互独立的 rv 序列, 满足

$$\mathrm{E}\, X_k = a_k, \qquad 0 < \mathrm{Var}\,(X_k) = \sigma_k^2 < \infty, \quad k \geq 1.$$

记

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad B_n^2 = \mathrm{Var}\,(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

- 问题： 寻找条件使得

$$\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(S_n)}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - a_k}{B_n} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

- Linderberg 条件: rv 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足, 对 $\forall \tau > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_j - a_j)^2 I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right] = 0, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{E}\, X_k = a_k$, $0 < \mathrm{Var}\,(X_k) = \sigma_k^2 < \infty$, $\forall\, k$.

- Feller 条件:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = 0. \tag{3}$$

- 定理 6.3.5 Linderberg 条件 $\Longrightarrow$ Feller 条件 + 条件

$$\max_{1\leq k\leq n} \left| \frac{X_k - a_k}{B_n} \right| \xrightarrow{P} 0. \tag{4}$$

- Linderberg 条件: rv 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足, 对 $\forall \tau > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_j - a_j)^2 I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right] = 0, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{E}\, X_k = a_k$, $0 < \mathrm{Var}\,(X_k) = \sigma_k^2 < \infty$, $\forall\, k$.

- Feller 条件:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = 0. \tag{3}$$

- 定理 6.3.5 Linderberg 条件 $\Longrightarrow$ Feller 条件 + 条件

$$\max_{1\leq k\leq n} \left|\frac{X_k - a_k}{B_n}\right| \xrightarrow{P} 0. \tag{4}$$

- Linderberg 条件: rv 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足, 对 $\forall \tau > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_j - a_j)^2 I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right] = 0, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{E}\, X_k = a_k$, $0 < \mathrm{Var}\,(X_k) = \sigma_k^2 < \infty$, $\forall\, k$.

- Feller 条件:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = 0. \tag{3}$$

- 定理 6.3.5 Linderberg 条件 $\Longrightarrow$ Feller 条件 + 条件

$$\max_{1\leq k\leq n} \left| \frac{X_k - a_k}{B_n} \right| \xrightarrow{P} 0. \tag{4}$$

证: (2) $\Longrightarrow$ (3): 对 $\forall\ \tau > 0$,

$$\begin{aligned}
\max_{1\le k\le n}\frac{\sigma_k^2}{B_n^2} &= \frac{1}{B_n^2}\Big[\max_{1\le k\le n}\mathrm{E}\left[(X_k-a_k)^2 I(|X_k-a_k|>\tau B_n)\right]\\
&\qquad +\mathrm{E}\left[(X_k-a_k)^2 I(|X_k-a_k|\le\tau B_n)\right]\Big]\\
&\le \tau^2+\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\left[(X_k-a_k)^2 I(|X_k-a_k|>\tau B_n)\right].
\end{aligned}$$

先令 $n\to\infty$, 再令 $\tau\to 0$ 得 Feller 条件.

证: (2) $\Longrightarrow$ (4): 对 $\forall\ \tau \in (0,1)$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\max_{1\le k\le n}\left|\frac{X_k-a_k}{B_n}\right|>\tau\right) &= \mathrm{P}\left(\max_{1\le k\le n}|X_k-a_k|>\tau B_n\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}|X_k-a_k|>\tau B_n\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\left(|X_k-a_k|>\tau B_n\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}\left[I(|X_k-a_k|>\tau B_n)\right] \\
&\le \frac{1}{\tau^2 B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}\left[(X_j-a_j)^2 I(|X_j-a_j|\geqslant \tau B_n)\right]
\end{aligned}
$$

······ ∎

- 推论 6.3.1 Linderberg 条件蕴涵

$$\lim_{n\to\infty} B_n = +\infty.$$

证明: Linderberg 条件蕴涵 Feller 条件

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = 0.$$

若 $\{B_n\}$ 有上界, 则上式不成立. ∎

- 定理 6.3.6 (Linderberg 中心极限定理) 设独立 rv 序列 $\{X_n, n\ge 1\}$ 满足 Linderberg 条件, 证明

$$\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{B_n} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

- 推论 6.3.1 Linderberg 条件蕴涵

$$\lim_{n\to\infty} B_n = +\infty.$$

证明: Linderberg 条件蕴涵 Feller 条件

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} = 0.$$

若 $\{B_n\}$ 有上界, 则上式不成立. ∎

- 定理 6.3.6 (Linderberg 中心极限定理) 设独立 rv 序列 $\{X_n, n\ge 1\}$ 满足 Linderberg 条件, 证明

$$\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{B_n} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

- **定理 6.3.7** 设存在正常数序列 $\{L_n, n \geq 1\}$ 满足

$$\max_{1\leq k\leq n} |X_k| \leq L_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{B_n} = 0,$$

则 Linderberg 条件成立.

证: 记 $a_k = \mathrm{E}\, X_k$. 由条件得

$$\frac{1}{B_n} \max_{1\leq k\leq n} |X_k - a_k| \leq \frac{2L_n}{B_n} \longrightarrow 0 \ \ [\text{一致}],$$

所以, 对 $\forall \tau > 0$, 当 n 充分大时,

$$\max_{1\leq k\leq n} I(|X_k - a_k| > \tau B_n) = 0,$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_j - a_j)^2 I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right] = 0. \ \blacksquare$$

- 定理 6.3.7 设存在正常数序列 $\{L_n, n \geq 1\}$ 满足

$$\max_{1\leq k\leq n} |X_k| \leq L_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{B_n} = 0,$$

则 Linderberg 条件成立.

证: 记 $a_k = \mathrm{E}\, X_k$. 由条件得

$$\frac{1}{B_n} \max_{1\leq k\leq n} |X_k - a_k| \leq \frac{2L_n}{B_n} \longrightarrow 0 \ \ [\text{一致}],$$

所以, 对 $\forall \tau > 0$, 当 n 充分大时,

$$\max_{1\leq k\leq n} I(|X_k - a_k| > \tau B_n) = 0,$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_j - a_j)^2 I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right] = 0. \ \blacksquare$$

- **Lyapunov 条件** rv 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,|X_k - a_k|^{2+\delta} = 0,$$

其中 $\mathrm{E}\,X_k = a_k$, $\delta > 0$.

- **定理 6.3.8** (Lyapunov 定理) 设独立 rv $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足 Lyapunov 条件, 则 Linderberg 条件成立.

证:

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_j - a_j)^2 I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right]$$

$$\leq \frac{1}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[|X_j - a_j|^{2+\delta} I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right]$$

$$\leq \frac{1}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[|X_j - a_j|^{2+\delta}\right] \longrightarrow 0. \quad \blacksquare$$

- Lyapunov 条件 rv 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,|X_k - a_k|^{2+\delta} = 0,$$

其中 $\mathrm{E}\,X_k = a_k$, $\delta > 0$.

- 定理 6.3.8 (Lyapunov 定理) 设独立 rv $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足 Lyapunov 条件, 则 Linderberg 条件成立.

证:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_j - a_j)^2 I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right] \\
&\qquad \leq \frac{1}{\tau^{\delta} B_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[|X_j - a_j|^{2+\delta} I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right] \\
&\qquad \leq \frac{1}{\tau^{\delta} B_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[|X_j - a_j|^{2+\delta}\right] \longrightarrow 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- Lyapunov 条件 rv 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,|X_k - a_k|^{2+\delta} = 0,$$

其中 $\mathrm{E}\,X_k = a_k$, $\delta > 0$.

- 定理 6.3.8 (Lyapunov 定理) 设独立 rv $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足 Lyapunov 条件, 则 Linderberg 条件成立.

证:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[(X_j - a_j)^2 I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right] \\
&\qquad \leq \frac{1}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[|X_j - a_j|^{2+\delta} I(|X_j - a_j| \geqslant \tau B_n)\right] \\
&\qquad \leq \frac{1}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left[|X_j - a_j|^{2+\delta}\right] \longrightarrow 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- 【例 6.3.15】 有一列口袋，第 k 个口袋中有 1 个白球和 $k-1$ 个黑球. 自前 n 个口袋中各取一球，记 Z_n 为所取出的 n 个球中的白球个数，则

$$\frac{Z_n - \mathrm{E}\,Z_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(Z_n)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

证：注意 $Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，其中

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 口袋取出白球,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

显然，

$$|X_k| \le 1, \qquad B_n^2 = \mathrm{Var}\,(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right) \longrightarrow +\infty.$$

定理 6.3.7 条件满足，得证. ∎

- 【例 6.3.15】 有一列口袋，第 k 个口袋中有 1 个白球和 $k-1$ 个黑球. 自前 n 个口袋中各取一球，记 Z_n 为所取出的 n 个球中的白球个数，则
$$\frac{Z_n - \mathrm{E}\, Z_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(Z_n)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

证：注意 $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$，其中
$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 口袋取出白球}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

显然，
$$|X_k| \le 1, \qquad B_n^2 = \mathrm{Var}\,(Z_n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \longrightarrow +\infty.$$

定理 6.3.7 条件满足，得证. ∎

- 【例 6.3.15′】 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，服从共同的连续分布. 以 Z_n 表示前 n 个变量中纪录值的出现次数. 证明

$$\frac{Z_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

证: 注意 $Z_n = \sum_{k=1}^n I_k$, 其中

$$I_k = \begin{cases} 1, & X_k \text{ 是一个记录值}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

利用 $\{I_k, k \geq 1\}$ 相互独立, 有

$$|I_k| \leq 1, \qquad \mathrm{E}\, Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \qquad B_n^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \longrightarrow +\infty.$$

同前例可证

$$\frac{Z_n - \mathrm{E}\, Z_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(Z_n)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1) \qquad \cdots\cdots.$$

- 【例 6.3.15′】 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，服从共同的连续分布. 以 Z_n 表示前 n 个变量中纪录值的出现次数. 证明

$$\frac{Z_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

证: 注意 $Z_n = \sum_{k=1}^n I_k$, 其中

$$I_k = \begin{cases} 1, & X_k \text{ 是一个记录值}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

利用 $\{I_k, k \geq 1\}$ 相互独立, 有

$$|I_k| \leq 1, \qquad \mathrm{E}\, Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \qquad B_n^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \longrightarrow +\infty.$$

同前例可证

$$\frac{Z_n - \mathrm{E}\, Z_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(Z_n)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1) \qquad \cdots\cdots.$$

- 【例 6.3.16】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv, $X_n \sim U(-\sqrt{n}, \sqrt{n})$, 证明

$$\frac{S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(S_n)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

证法一: 注意 $\mathrm{E}\,X_k = 0$, $\mathrm{Var}\,(X_k) = k/3$,

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3} = \frac{1}{6} n(n+1).$$

取 $L_n = \sqrt{n}$, 则定理 6.3.6 条件满足, 得证. ■

- 【例 6.3.16】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv, $X_n \sim U(-\sqrt{n}, \sqrt{n})$, 证明

$$\frac{S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(S_n)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

证法一: 注意 $\mathrm{E}\, X_k = 0$, $\mathrm{Var}\,(X_k) = k/3$,

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3} = \frac{1}{6} n(n+1).$$

取 $L_n = \sqrt{n}$, 则定理 6.3.6 条件满足, 得证. ∎

- 【例 6.3.16】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv, $X_n \sim U(-\sqrt{n}, \sqrt{n})$, 证明

$$\frac{S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(S_n)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

证法二: 验证 Lyapunov 条件, 取 $\delta = 2$,

$$B_n^4 = \left(\frac{1}{6}n(n+1)\right)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,[X_k - a_k]^4 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,X_k^4 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{5} = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1).$$

$$\frac{1}{B_n^4}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,X_k^4 = \frac{6(2n+1)}{5n(n+1)} \longrightarrow 0. \quad \blacksquare$$

- 【例 6.3.16】 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv, $X_n \sim U(-\sqrt{n}, \sqrt{n})$, 证明

$$\frac{S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(S_n)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

证法二: 验证 Lyapunov 条件, 取 $\delta = 2$,

$$B_n^4 = \left(\frac{1}{6}n(n+1)\right)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,[X_k - a_k]^4 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,X_k^4 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{5} = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1).$$

$$\frac{1}{B_n^4}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\,X_k^4 = \frac{6(2n+1)}{5n(n+1)} \longrightarrow 0. \quad \blacksquare$$

- 【例 6.3.17】 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足 $\mathrm{P}(X = \pm 1) = 1/2$, 证明
$$\sqrt{\frac{3}{n^3}} \sum_{k=1}^{n} kX_k \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

证: 记 $Y_k = kX_k$, 则
$$\mathrm{E}\, Y_k = 0, \quad \mathrm{Var}\,(Y_k) = k^2, \quad B_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
取 $L_n = n$, 则 $\max_{1\leq k\leq n} |Y_k| \leq L_n$, $L_n/B_n \longrightarrow 0$. 定理 6.3.6 条件满足, 于是
$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} kX_k \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$
再注意到
$$\frac{B_n^2}{n^3/3} \longrightarrow 1.$$

- 【例 6.3.17】 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ iid, 满足 $\mathrm{P}(X = \pm 1) = 1/2$, 证明

$$\sqrt{\frac{3}{n^3}} \sum_{k=1}^{n} kX_k \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

证: 记 $Y_k = kX_k$, 则

$$\mathrm{E}\, Y_k = 0, \quad \mathrm{Var}\,(Y_k) = k^2, \quad B_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

取 $L_n = n$, 则 $\max_{1\leq k\leq n} |Y_k| \leq L_n$, $L_n/B_n \longrightarrow 0$. 定理 6.3.6 条件满足, 于是

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} kX_k \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1).$$

再注意到

$$\frac{B_n^2}{n^3/3} \longrightarrow 1.$$

作业

第 6 章第一次作业

§6.1:　1(2,4,8,10)，2，4，6-8

§6.2:　1-4，7-9