概率论

胡太忠
thu@ustc.edu.cn

安徽 合肥

2023 年 9 月

6.3.5 进一步讨论

- 【例 6.3.20】 (Linderberg 条件不是中心极限定理成立的必要条件)

  设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv, $X_n \sim N(0, 1/2^n)$, 于是

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 1,$$

$$\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{B_n} \sim N(0,1).$$

但是,

$$\frac{\sigma_1^2}{B_n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

由定理 6.3.5 知 Linderberg 条件不成立.

- 定理 6.3.10 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv, 满足

$$\mathrm{E}\, X_k = a_k, \qquad 0 < \mathrm{Var}\,(X_k) = \sigma_k^2 < \infty,$$

则

$$\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{B_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

和 Feller 条件同时成立充要条件是 Linderberg 条件成立.

6.3.6 多元成场合下的 CLT

- **定理 6.3.11** 设 $\mathbf{X}_n$ 为一个 m 维随机向量, 则

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathrm{d}} N_m(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m) \iff \mathbf{s}^\top \mathbf{X}_n \xrightarrow{d} N(0,1),\ \forall \|\mathbf{s}\| = 1.$$

※: 将多维场合下的 CLT 转化为研究一维场合下的 CLT.

※: $\mathbf{Y} \sim N_m(\mathbf{a}, \Sigma) \iff \mathbf{s}^\top Y \sim N(\mathbf{s}^\top \mathbf{a}, \mathbf{s}^\top \Sigma \mathbf{s}), \forall\, \mathbf{s} \neq \mathbf{0}.$

- 例 6.3.12 设 $\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ 为一个 m 维随机向量序列, 满足 $\mathrm{E}\,\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu}$, $\mathrm{Cov}\,(\mathbf{X}) = \Sigma$. 记 $\mathbf{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k$, 则

$$\frac{\mathbf{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N_m(\mathbf{0}, \Sigma).$$

证: 仅证对任意 $\mathbf{s} \in \Re$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, 我们有

$$\mathbf{s}^{\top} \cdot \frac{\mathbf{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \mathbf{s}^{\top}\Sigma\mathbf{s}).$$

注意到

$$\mathbf{s}^{\top} \cdot \frac{\mathbf{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} = \frac{\mathbf{s}^{\top}\mathbf{S}_n - n\mathbf{s}^{\top}\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{s}^{\top}\mathbf{X}_k - \mathbf{s}^{\top}\boldsymbol{\mu}),$$

其中 $\mathbf{s}^{\top}\mathbf{X}_1 - \mathbf{s}^{\top}\boldsymbol{\mu}, \ldots, \mathbf{s}^{\top}\mathbf{X}_n - \mathbf{s}^{\top}\boldsymbol{\mu}$ iid, 均值为 $\mathbf{0}$, 方差为 $\mathbf{s}^{\top}\Sigma\mathbf{s}$.

⋯⋯

▶ 例 6.3.12 设 $\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ 为一个 m 维随机向量序列, 满足 $\mathrm{E}\,\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu}$, $\mathrm{Cov}\,(\mathbf{X}) = \Sigma$. 记 $\mathbf{S}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k$, 则

$$\frac{\mathbf{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N_m(\mathbf{0}, \Sigma).$$

证: 仅证对任意 $\mathbf{s} \in \Re$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, 我们有

$$\mathbf{s}^\top \cdot \frac{\mathbf{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \mathbf{s}^\top \Sigma \mathbf{s}).$$

注意到

$$\mathbf{s}^\top \cdot \frac{\mathbf{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} = \frac{\mathbf{s}^\top \mathbf{S}_n - n\mathbf{s}^\top \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\mathbf{s}^\top \mathbf{X}_k - \mathbf{s}^\top \boldsymbol{\mu}),$$

其中 $\mathbf{s}^\top \mathbf{X}_1 - \mathbf{s}^\top \boldsymbol{\mu}, \ldots, \mathbf{s}^\top \mathbf{X}_n - \mathbf{s}^\top \boldsymbol{\mu}$ iid, 均值为 $\mathbf{0}$, 方差为 $\mathbf{s}^\top \Sigma \mathbf{s}$.

$\cdots\cdots$

▶ 例 6.3.21 设 $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ iid $\sim \mathrm{Exp}(1)$, 证明

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Z_i - n \\ \sum_{k=1}^n Z_k^2 - 2n \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{d}} N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}\right).$$

证: 记

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} Z - 1 \\ Z^2 - 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_k = \begin{pmatrix} Z_k - 1 \\ Z_k^2 - 2 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

利用 $\mathrm{E}\, Z^k = k!$, 得 $\mathrm{E}\, \mathbf{X} = \mathbf{0}$ 及 $\mathbf{X}$ 的协方差矩阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

余下由例 6.3.12 得到. ∎

▶ 例 6.3.21 设 $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ iid $\sim \mathrm{Exp}(1)$, 证明

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Z_i - n \\ \sum_{k=1}^n Z_k^2 - 2n \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{d}} N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}\right).$$

证: 记

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} Z-1 \\ Z^2-2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_k = \begin{pmatrix} Z_k-1 \\ Z_k^2-2 \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

利用 $\mathrm{E}\, Z^k = k!$, 得 $\mathrm{E}\, X = \mathbf{0}$ 及 $\mathbf{X}$ 的协方差矩阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

余下由例 6.3.12 得到. ∎

6.4.1 几乎处处收敛定义

- **定义 6.4.1** 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是定义于共同概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的 rv 序列. 如果

$$\mathrm{P}\left(\left\{w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\right\}\right) = 1,$$

则称 X_n 几乎处处收敛于 X, 记为 $X_n \to X$, a.s. 或 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

※ 几乎处处收敛的 rv 序列其极限未必是一个 rv. 正因为此, 在定义中强调了 X 是一个 rv.

※ 称 rv 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一个几乎处处收敛的基本列, 如果对 $\forall\ \nu > 0$, 一致地有 $X_{n+\nu} - X_n \to 0$, a.s..

6.4.1 几乎处处收敛定义

▶ 定义 6.4.1 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是定义于共同概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的 rv 序列. 如果

$$\mathrm{P}\left(\left\{w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\right\}\right) = 1,$$

则称 X_n 几乎处处收敛于 X, 记为 $X_n \to X$, a.s. 或 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

※ 几乎处处收敛的 rv 序列其极限未必是一个 rv. 正因为此, 在定义中强调了 X 是一个 rv.

※ 称 rv 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一个几乎处处收敛的基本列, 如果对 $\forall\ \nu > 0$, 一致地有 $X_{n+\nu} - X_n \to 0$, a.s..

6.4.1 几乎处处收敛定义

- **定义 6.4.1** 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是定义于共同概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的 rv 序列. 如果

$$\mathrm{P}\left(\left\{w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\right\}\right) = 1,$$

则称 X_n 几乎处处收敛于 X, 记为 $X_n \to X$, a.s. 或 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

※ 几乎处处收敛的 rv 序列其极限未必是一个 rv. 正因为此, 在定义中强调了 X 是一个 rv.

※ 称 rv 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一个几乎处处收敛的基本列, 如果对 $\forall\ \nu > 0$, 一致地有 $X_{n+\nu} - X_n \to 0$, a.s..

※ 几乎处处收敛

$$\{w: X_n(w) \to X(w)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \left\{ w: |X_{n+\nu}(w) - X(w)| < \frac{1}{k} \right\},$$

$$\{w: X_n(w) \not\to X(w)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \left\{ w: |X_{n+\nu}(w) - X(w)| > \frac{1}{k} \right\}.$$

$$\{w: X_{n+\nu}(w) - X_n(w) \to 0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \left\{ w: |X_{n+\nu}(w) - X_n(w)| < \frac{1}{k} \right\},$$

$$\{w: X_{n+\nu}(w) - X_n(w) \not\to 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \left\{ w: |X_{n+\nu}(w) - X_n(w)| > \frac{1}{k} \right\}.$$

※ 设正值 $\epsilon_k \to 0$, 上述表达式中的 $1/k$ 可以替换为 ϵ_k.

- 定理 6.4.1 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是定义于共同概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的 rv 序列, 则 $X_n \to X$, a.s., 充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}\{|X_k - X| > \epsilon\}\right) = 0, \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

- 推论 6.4.1 $X_n \to X$, a.s. $\Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.
- 命题 6.4.1 $(X_n \xrightarrow{a.s.} X \not\Longrightarrow X_n \xrightarrow{L_r} X)$

反例 1: 取概率空间 $((0,1), \mathscr{B}((0,1)), L)$, 定义 $X = 0$,

$$X_n(w) = n \cdot 1_{(0,1/n)}(w), \quad n \geq 1,$$

则 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, 但是 $\mathrm{E}|X_n - X| = 1$, 即 $X_n \stackrel{L_1}{\not\longrightarrow} X$.

- **定理 6.4.1** 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是定义于共同概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的 rv 序列, 则 $X_n \to X$, a.s., 充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}\{|X_k - X| > \epsilon\}\right) = 0, \quad \forall\ \epsilon > 0.$$

- **推论 6.4.1** $X_n \to X$, a.s. $\Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.

- **命题 6.4.1** $(X_n \xrightarrow{a.s.} X \not\Longrightarrow X_n \xrightarrow{L_r} X)$

反例 1: 取概率空间 $((0,1), \mathscr{B}((0,1)), L)$, 定义 $X = 0$,

$$X_n(w) = n \cdot 1_{(0,1/n)}(w), \quad n \geq 1,$$

则 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, 但是 $\mathrm{E}\,|X_n - X| = 1$, 即 $X_n \stackrel{L_1}{\not\longrightarrow} X$.

§6.4 几乎处处收敛

- **定理 6.4.1** 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是定义于共同概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的 rv 序列, 则 $X_n \to X$, a.s., 充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}\{|X_k - X| > \epsilon\}\right) = 0, \quad \forall\, \epsilon > 0.$$

- **推论 6.4.1** $X_n \to X$, a.s. $\Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.
- **命题 6.4.1** $(X_n \xrightarrow{a.s.} X \not\Longrightarrow X_n \xrightarrow{L_r} X)$

反例 1: 取概率空间 $((0,1), \mathscr{B}((0,1)), L)$, 定义 $X = 0$,

$$X_n(w) = n \cdot 1_{(0,1/n)}(w), \quad n \geq 1,$$

则 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, 但是 $\mathrm{E}\,|X_n - X| = 1$, 即 $X_n \not\xrightarrow{L_1} X$.

- 定理 6.4.1　设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是定义于共同概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的 rv 序列, 则 $X_n \to X$, a.s., 充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| > \epsilon\}\right) = 0, \quad \forall\ \epsilon > 0.$$

- 推论 6.4.1　$X_n \to X$, a.s. $\Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.
- 命题 6.4.1　$(X_n \xrightarrow{a.s.} X \not\Longrightarrow X_n \xrightarrow{L_r} X)$

反例 1: 取概率空间 $((0,1), \mathscr{B}((0,1)), L)$, 定义 $X = 0$,

$$X_n(w) = n \cdot 1_{(0,1/n)}(w), \quad n \geq 1,$$

则 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, 但是 $\mathrm{E}\,|X_n - X| = 1$, 即 $X_n \overset{L_1}{\not\longrightarrow} X$.

- 命题 6.4.1 $(X_n \xrightarrow{L_r} X, r>0 \not\Longrightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X)$

反例 2: 取概率空间 $((0,1], \mathscr{B}((0,1]), L)$, 定义 $X=0$,

$$Y_{n,k}(w) = I\left(\frac{k-1}{2^n} < w \le \frac{k}{2^n}\right), \quad k=1,\ldots,2^n.$$

将 $\{Y_{n,k}\}$ 重新排列成

$$Y_{1,1}, Y_{1,2}; Y_{2,1}, Y_{2,2}, Y_{2,3}, Y_{2,2^2}; \ldots; Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,2^n}; \ldots,$$

记此新序列为 $\{X_n\}$, 则 $X_n \xrightarrow{L_1} X$, 但是 $X_n \not\xrightarrow{a.s.} X$.

- 命题 6.4.2 $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Longleftrightarrow \mathrm{P}(|X_n - X| > \epsilon, \mathrm{i.o.}) = 0, \forall\, \epsilon > 0.$

- 命题 6.4.1 $(X_n \xrightarrow{L_r} X, r > 0 \not\Longrightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X)$

  反例 2: 取概率空间 $((0,1], \mathscr{B}((0,1]), L)$, 定义 $X = 0$,

$$Y_{n,k}(w) = I\left(\frac{k-1}{2^n} < w \le \frac{k}{2^n}\right), \quad k = 1, \ldots, 2^n.$$

  将 $\{Y_{n,k}\}$ 重新排列成

$$Y_{1,1}, Y_{1,2}; Y_{2,1}, Y_{2,2}, Y_{2,3}, Y_{2,2^2}; \ldots; Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,2^n}; \ldots,$$

  记此新序列为 $\{X_n\}$, 则 $X_n \xrightarrow{L_1} X$, 但是 $X_n \not\xrightarrow{a.s.} X$.

- 命题 6.4.2 $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Longleftrightarrow \mathrm{P}(|X_n - X| > \epsilon, \mathrm{i.o.}) = 0, \forall\ \epsilon > 0.$

- 命题 6.4.1 $(X_n \xrightarrow{L_r} X, r > 0 \not\Longrightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X)$

  反例 2: 取概率空间 $((0,1], \mathscr{B}((0,1]), L)$, 定义 $X = 0$,

  $$Y_{n,k}(w) = I\left(\frac{k-1}{2^n} < w \le \frac{k}{2^n}\right), \quad k = 1, \dots, 2^n.$$

  将 $\{Y_{n,k}\}$ 重新排列成

  $$Y_{1,1}, Y_{1,2}; Y_{2,1}, Y_{2,2}, Y_{2,3}, Y_{2,2^2}; \dots; Y_{n,1}, \dots, Y_{n,2^n}; \dots,$$

  记此新序列为 $\{X_n\}$, 则 $X_n \xrightarrow{L_1} X$, 但是 $X_n \not\xrightarrow{a.s.} X$.

- 命题 6.4.2 $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Longleftrightarrow \mathrm{P}(|X_n - X| > \epsilon, \mathrm{i.o.}) = 0, \forall\, \epsilon > 0.$

- 引理 6.4.1 (Borel-Cantelli 引理)
  (i) 设事件序列 $\{A_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty$, 则 $\mathrm{P}(A_n, \text{i.o.}) = 0$.
  (ii) 设事件序列 $\{A_n\}$ 相互独立，则
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \infty \Longleftrightarrow \mathrm{P}(A_n, \text{i.o.}) = 1.$$

证明：(i) $\mathrm{P}(A_n, \text{i.o.}) = \lim \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \lim \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(A_k) = 0.$

(ii) ($\Longrightarrow$) 利用 $e^{-x} \ge 1 - x\ (x > 0)$ 及事件独立性，得
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(A_k^c) \le \exp\left\{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(A_k)\right\} = 0.$$

($\Longleftarrow$) 利用 (i) 进行反证. ∎

- **引理 6.4.1** (Borel-Cantelli 引理)
  (i) 设事件序列 $\{A_n\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty$, 则 $\mathrm{P}(A_n, \mathrm{i.o.}) = 0$.
  (ii) 设事件序列 $\{A_n\}$ 相互独立，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \infty \Longleftrightarrow \mathrm{P}(A_n, \mathrm{i.o.}) = 1.$$

证明：(i) $\mathrm{P}(A_n, \mathrm{i.o.}) = \lim \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \lim \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(A_k) = 0.$

(ii) ($\Longrightarrow$) 利用 $e^{-x} \ge 1 - x\ (x > 0)$ 及事件独立性，得

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(A_k^c) \le \exp\left\{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(A_k)\right\} = 0.$$

($\Longleftarrow$) 利用 (i) 进行反证. ∎

- 例 6.4.4 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim U(0,a)$, 其中 $a > 0$. 记 $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. 试讨论 $X_{(n)}$ 的各种收敛性.

证明：(1) 对 $\forall \epsilon \in (0,a)$,

$$\mathrm{P}\left(X_{(n)} \leq a-\epsilon\right) = \left(\frac{a-\epsilon}{a}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_{(n)} \leq a-\epsilon\right) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理得 $X_{(n)} \to a$, a.s..

(2). 对任意充分小的 $\epsilon > 0$ 及任意 $r > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left|X_{(n)} - a\right|^r &\leq \epsilon^r + \mathrm{E}\left|X_{(n)} - a\right|^r I(|X_{(n)} - a| > \epsilon) \\
&\leq \epsilon^r + a^r \mathrm{P}\left(X_{(n)} < a - \epsilon\right) \\
&= \epsilon^r + a^r \left(\frac{a-\epsilon}{a}\right)^n \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

即 $X_{(n)} \xrightarrow{L_r} a$, $r > 0$. ∎

- 例 6.4.4 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim U(0, a)$, 其中 $a > 0$. 记 $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. 试讨论 $X_{(n)}$ 的各种收敛性.

证明：(1) 对 $\forall \epsilon \in (0, a)$,

$$\mathrm{P}\left(X_{(n)} \leq a - \epsilon\right) = \left(\frac{a-\epsilon}{a}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_{(n)} \leq a - \epsilon\right) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理得 $X_{(n)} \to a$, a.s..

(2). 对任意充分小的 $\epsilon > 0$ 及任意 $r > 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left|X_{(n)} - a\right|^r &\leq \epsilon^r + \mathrm{E}\left|X_{(n)} - a\right|^r I(|X_{(n)} - a| > \epsilon) \\ &\leq \epsilon^r + a^r \mathrm{P}\left(X_{(n)} < a - \epsilon\right) \\ &= \epsilon^r + a^r \left(\frac{a-\epsilon}{a}\right)^n \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

即 $X_{(n)} \xrightarrow{L_r} a$, $r > 0$. ∎

- 例 6.4.7 设随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid.

  (i) 如果 $\mathrm{E}|X_1| < \infty$, 则 $\mathrm{P}(|X_n| > n, \text{i.o.}) = 0$.

  (ii) 如果 $\mathrm{E}|X_1| = \infty$, 则 $\mathrm{P}(|X_n| > n, \text{i.o.}) = 1$.

证明：利用同分布性质，有

$$\mathrm{E}|X_1| < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_n| > n) < \infty.$$

余下应用 Borel-Cantelli 引理. ∎

- 例 6.4.7 设随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid.

  (i) 如果 $\mathrm{E}|X_1| < \infty$, 则 $\mathrm{P}(|X_n| > n, \mathrm{i.o.}) = 0$.

  (ii) 如果 $\mathrm{E}|X_1| = \infty$, 则 $\mathrm{P}(|X_n| > n, \mathrm{i.o.}) = 1$.

证明：利用同分布性质，有

$$\mathrm{E}|X_1| < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_n| > n) < \infty.$$

余下应用 Borel-Cantelli 引理. ∎

6.4.3 若干引理不等式

目的: 为研究强大数律做准备

- 引理 6.4.2 设 $a_n \to a \in \Re$, $b_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$, 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, 则
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = a.$$
- 引理 6.4.3 (Kronecker 引理) 设 $\{x_n\}$ 为实数序列, $\{b_n\}$ 为正实数序列, $b_n \uparrow +\infty$, 则
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b_n} \text{ 收敛 } \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$

证: 记 $b_0 = y_0 = 0$, $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k / b_k \longrightarrow y \in \Re$, 则
$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k(y_k - y_{k-1}) = y_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)y_k,$$

…… ∎

- 定理 6.4.3 (Kolmogorov 不等式) 设 $\{X_k, k=1,\ldots,n\}$ 为相互独立的 rv 序列, 满足

$$\mathrm{E}\, X_k = 0, \quad \mathrm{E}\, X_k^2 < \infty, \quad |X_k| \le c \le \infty, \quad k = 1, \ldots, n,$$

记 $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, 则对 $\forall\ \epsilon > 0$,

$$1 - \frac{(c+\epsilon)^2}{\sum_{k=1}^n \mathrm{E}\, X_k^2} \le \mathrm{P}\left(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \epsilon\right) \le \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{E}\, X_k^2. \qquad (1)$$

※ (1) 式右侧不等式不需要加条件 “$|X_k| \le c$”.

证: (i) 记

$$A_n = \left\{ \max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \epsilon \right\}, \quad B_1 = A_1 = \{|S_1| \ge \epsilon\},$$

$$B_k = \left\{ \max_{1\le j<k} |S_j| < \epsilon, S_k \ge \epsilon \right\}, \quad k = 2, \dots, n,$$

则 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 两两不交, 且 $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$. 于是,

$$I(A_n) = \sum_{k=1}^n I(B_k), \quad \mathrm{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathrm{P}(B_k),$$

$$\sum_{k=1}^n \mathrm{E}\, X_k^2 = \mathrm{E}\, S_n^2 \ge \mathrm{E}\left[S_n^2 I(A_n)\right] = \sum_{k=1}^n \mathrm{E}\left[S_n^2 I(B_k)\right],$$

$$\mathrm{E}\left[S_n^2 I(B_k)\right] = \mathrm{E}\left[(S_n - S_k)^2 I(B_k)\right] + \mathrm{E}\left[S_k^2 I(B_k)\right] \ge \epsilon^2 \mathrm{P}(B_k).$$

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^n \mathrm{E}\, X_k^2 \ge \epsilon^2 \sum_{k=1}^n \mathrm{P}(B_k) = \epsilon^2 \mathrm{P}(A_n).$

(续) (ii) 不妨设 $c<\infty$, 主要思想是缩放 $\mathrm{E}\,[S_n^2 I(A_n)]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[S_n^2 I(A_n)] &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left[S_k^2 I(B_k) + (S_n - S_k)^2 I(B_k)\right] \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \left[(\epsilon + c)^2 I(B_k) + \mathrm{E}\,(S_n - S_k)^2 \cdot \mathrm{E}\, I(B_k)\right] \\
&\le (\epsilon + c)^2 \mathrm{P}\,(A_n) + \mathrm{E}\, S_n^2 \mathrm{P}\,(A_n); \\
\mathrm{E}\,[S_n^2 I(A_n)] &= \mathrm{E}\,[S_n^2] - \mathrm{E}\,[S_n^2 I(A_n^c)] \\
&\ge \mathrm{E}\,[S_n^2] - \epsilon^2 \mathrm{E}\,[I(A_n^c)] \\
&= \mathrm{E}\,[S_n^2] - \epsilon^2 [1 - \mathrm{P}\,(A_n)].
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{P}\,(A_n) \ge \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\, X_k^2 - \epsilon^2}{(\epsilon + c)^2 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\, X_k^2 - \epsilon^2} \ge 1 - \frac{(c+\epsilon)^2}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\, X_k^2}. \quad \blacksquare$$

- **定义 6.5.1** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 rv 序列, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. 如果存在实数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $b_n > 0$ 且

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0,$$

则称 $\{X_n\}$ 服从强大数律, 其中

$$\{a_n\} \quad \cdots\cdots \quad \text{中心化数列},$$

$$\{b_n\} \quad \cdots\cdots \quad \text{正则化数列}.$$

※ 问题: 如何寻找 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 (*.1) 成立以及成立的条件?

一般, $a_n = \mathrm{E}\, S_n$, $b_n = n$.

- **定义 6.5.1** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 rv 序列, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. 如果存在实数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $b_n > 0$ 且

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0,$$

则称 $\{X_n\}$ 服从强大数律, 其中

$$\{a_n\} \quad \cdots\cdots \quad \text{中心化数列},$$

$$\{b_n\} \quad \cdots\cdots \quad \text{正则化数列}.$$

※ 问题: 如何寻找 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使得 $(*.1)$ 成立以及成立的条件?

一般, $a_n = \mathrm{E}\, S_n$, $b_n = n$.

6.5.1 独立随机变量级数的几乎处处收敛性

- **定义 6.5.2** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 rv 序列, 如果存在 $\Omega_0 \in \mathscr{F}$, $\mathrm{P}(\Omega_0) = 1$, 使得对任意 $w \in \Omega_0$, $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(w)$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛.

- **引理 6.5.1** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 rv 序列, 对某个 $r \in (0, 1]$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}|X_n|^r < \infty,$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛.

证: 利用 C_r-不等式,
$$\mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|\right)^r \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}|X_n|^r < \infty,$$
于是, $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < \infty$, a.s., 故 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛. ∎

6.5.1 独立随机变量级数的几乎处处收敛性

- **定义 6.5.2** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 rv 序列，如果存在 $\Omega_0 \in \mathscr{F}$，$\mathrm{P}(\Omega_0) = 1$，使得对任意 $w \in \Omega_0$，$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(w)$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛.
- **引理 6.5.1** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 rv 序列，对某个 $r \in (0, 1]$，
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n|^r < \infty,$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛.

证：利用 C_r-不等式，
$$\mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|\right)^r \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n|^r < \infty,$$
于是，$\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < \infty$, a.s.，故 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛. ∎

6.5.1 独立随机变量级数的几乎处处收敛性

- **定义 6.5.2** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 rv 序列, 如果存在 $\Omega_0 \in \mathscr{F}$, $\mathrm{P}(\Omega_0) = 1$, 使得对任意 $w \in \Omega_0$, $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(w)$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛.

- **引理 6.5.1** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 rv 序列, 对某个 $r \in (0, 1]$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n|^r < \infty,$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛.

证: 利用 C_r-不等式,
$$\mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|\right)^r \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n|^r < \infty,$$
于是, $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < \infty$, a.s., 故 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛. ∎

- 引理 6.5.2 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv 序列, 满足

$$\mathrm{E}\, X_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\, X_n^2 < \infty,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛.

证: 用子序列方法. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. 对 $\forall \epsilon > 0$ 和 $\nu > 0$,

$$\mathrm{P}\left(|S_{n+\nu} - S_n| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=n}^{n+\nu} \mathrm{E}\, X_k^2 \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

即 $\{S_n\}$ 是依概率收敛基本列, 于是存在 rv S, 使得 $S_n \xrightarrow{P} S$. 因此, 存在子列 $\{S_{n_k}\}$ 使得

$$S_{n_k} \xrightarrow{a.s.} S. \tag{2}$$

- 引理 6.5.2 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv 序列, 满足

$$\mathrm{E}\, X_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\, X_n^2 < \infty,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛.

证: 用子序列方法. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. 对 $\forall \epsilon > 0$ 和 $\nu > 0$,

$$\mathrm{P}\left(|S_{n+\nu} - S_n| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=n}^{n+\nu} \mathrm{E}\, X_k^2 \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

即 $\{S_n\}$ 是依概率收敛基本列, 于是存在 rv S, 使得 $S_n \xrightarrow{P} S$. 因此, 存在子列 $\{S_{n_k}\}$ 使得

$$S_{n_k} \xrightarrow{a.s.} S. \tag{2}$$

(续) 另一方面, 对 $\forall \epsilon > 0$, 记

$$A_k = \left\{ \max_{n_k < j \le n_{k+1}} |S_j - S_{n_k}| \ge \epsilon \right\}, \quad k \ge 1,$$

由 Kolmogorov 不等式得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \mathrm{E}\, X_j^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\, X_n^2 < \infty.$$

再由 Borel-Cantelli 引理得 $\mathrm{P}(A_k, \mathrm{i.o.}) = 0$, 即

$$\max_{n_k < j \le n_{k+1}} |S_j - S_{n_k}| \xrightarrow{a.s.} 0. \tag{3}$$

结合 (2) 和 (3) 得证 $S_n \xrightarrow{a.s.} S$. ∎

- **推论 6.5.1** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv 序列, 满足

$$\mathrm{E}\, X_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n|^r < \infty,$$

其中 $1 < r \leq 2$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛.

证: 定义

$$X_n' = X_n I(|X_n| \leq 1), \qquad X_n'' = X_n I(|X_n| > 1).$$

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\,(|X_n| > 1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n|^r < \infty \implies \mathrm{P}\,(|X_n| > 1, \ \mathrm{i.o.}) = 0,$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} X_n'' \text{ 几乎处处收敛.}$$

▶ 推论 6.5.1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv 序列, 满足

$$\mathrm{E}\, X_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\, |X_n|^r < \infty,$$

其中 $1 < r \leq 2$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 几乎处处收敛.

证: 定义

$$X_n' = X_n I(|X_n| \leq 1), \qquad X_n'' = X_n I(|X_n| > 1).$$

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\,(|X_n|>1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n|^r < \infty \implies \mathrm{P}\,(|X_n| > 1,\ \text{i.o.}) = 0,$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} X_n'' \text{ 几乎处处收敛.}$$

(续) 下仅证: $\sum_{n=1}^{\infty} X_n'$ 几乎处处收敛. 注意到 $|X_n'| \le 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,(X_n' - \mathrm{E}\,X_n')^2 &\le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{E}\,[X_n']^2 + (\mathrm{E}\,|X_n'|)^2\right) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{E}\,|X_n'|^r + (\mathrm{E}\,|X_n'|)^r\right) \\ &\le 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n'|^r \le 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n|^r < \infty.\end{aligned}$$

由引理 6.5.2 得 $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n' - \mathrm{E}\,X_n')$ 几乎处处收敛. 又 $\mathrm{E}\,X_n' = -\mathrm{E}\,X_n''$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{E}\,X_n'| \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n''| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,[|X_n| I(|X_n| > 1)] \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,|X_n|^r < \infty,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n'$ 几乎处处收敛. ∎

- **引理 6.5.3** 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为独立 rv 序列, 存在常数 $c > 0$ 使得 $|X_n| \le c$, a.s. $\forall\, n$.
  - (i) 若 $\mathrm{E}\, X_n = 0$, $\forall n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\,(X_n) = \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 发散.
  - (ii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\, X_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\,(X_n)$ 收敛.

证: (i) 由 Kolmogorov 不等式得

$$\mathrm{P}\left(\max_{1\le k\le m} |S_{n+k} - S_n| > \epsilon\right) \ge 1 - \frac{(\epsilon + c)^2}{\sum_{k=n+1}^{n+m} \mathrm{E}\, X_k^2} \to 1, \ \ m \to \infty.$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{P}\left(\max_{k\ge 1} |S_{n+k} - S_n| > \epsilon\right) = 1,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 发散.

- **引理 6.5.3** 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv 序列, 存在常数 $c > 0$ 使得 $|X_n| \leq c$, a.s. $\forall\, n$.
  - (i) 若 $\mathrm{E}\, X_n = 0$, $\forall n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\,(X_n) = \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 发散.
  - (ii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\, X_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\,(X_n)$ 收敛.

证: (i) 由 Kolmogorov 不等式得

$$\mathrm{P}\left(\max_{1\leq k\leq m} |S_{n+k} - S_n| > \epsilon\right) \geq 1 - \frac{(\epsilon + c)^2}{\sum_{k=n+1}^{n+m} \mathrm{E}\, X_k^2} \to 1, \;\; m \to \infty.$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{P}\left(\max_{k\geq 1} |S_{n+k} - S_n| > \epsilon\right) = 1,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 发散.

(续) (ii) 取 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的独立复制 $\{X_n', n \geq 1\}$，定义 $\widetilde{X}_n = X_n - X_n'$，则

$$|\widetilde{X}_n| \leq 2c, \quad \mathrm{E}\,\widetilde{X}_n = 0, \quad \mathrm{Var}\,(\widetilde{X}_n) = 2\mathrm{Var}\,(X_n).$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛，推出 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n'$ a.s. 收敛，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{X}_n \quad \text{a.s. 收敛.} \tag{4}$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\,(X_n)$ 发散，则由 (i) 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{X}_n$ a.s. 发散，这与 (4) 矛盾，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\,(X_n) < \infty$. 再由引理 6.5.2, $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - \mathrm{E}\,X_n)$ a.s. 收敛，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n - \sum_{n=1}^{\infty}(X_n - \mathrm{E}\,X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\,X_n$$

a.s. 收敛. ∎

- **定理 6.5.1** (Kolmogorov 三级数定理) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv 序列，则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛当且仅当，存在常数 $c > 0$，使得
  - (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(|X_n| > c\right) < \infty$;
  - (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[X_n I(|X_n| \leq c)\right]$ 收敛;
  - (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(X_n I(|X_n| \leq c)\right) < \infty$.

证：对任意 $c > 0$，定义 $Y_n = X_n I(|X_n| \leq c)$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n \neq Y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(|X_n| > c\right).$$

无论必要还是充分条件 (应用 Borel-Cantelli 引理)，可证明 (i) 蕴涵 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ a.s. 同敛散. 余下应用引理 6.5.2 和引理 6.5.3 得证. ∎

- **定理 6.5.1** (Kolmogorov 三级数定理) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立 rv 序列，则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛当且仅当，存在常数 $c > 0$，使得

  (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(|X_n| > c\right) < \infty$;

  (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[X_n I(|X_n| \leq c)\right]$ 收敛;

  (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(X_n I(|X_n| \leq c)\right) < \infty$.

证: 对任意 $c > 0$，定义 $Y_n = X_n I(|X_n| \leq c)$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(X_n \neq Y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(|X_n| > c\right).$$

无论必要还是充分条件 (应用 Borel-Cantelli 引理)，可证明 (i) 蕴涵 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ a.s. 同敛散. 余下应用引理 6.5.2 和引理 6.5.3 得证. ∎

- 例 6.5.1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$, F 为连续函数, Z_n 表示到时刻 n 为止纪录值出现的次数, 则 $Z_n/\ln n \to 1$, a.s.

证: 记 I_j 表示事件"时刻 j 出现纪录值"的示性变量, 则 $Z_n = \sum_{k=1}^{n} I_k$. 且 $\{I_j, j \geq 1\}$ 是一列独立的 Bernulli 随机变量, 满足

$$\mathrm{E}\, I_j = \frac{1}{j}, \quad \mathrm{Var}\,(I_j) = \frac{1}{j} - \frac{1}{j^2}.$$

注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{I_n}{\ln n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^2 \ln^2 n} < \infty.$$

由引理 6.5.2, 可知

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{I_n - \mathrm{E}\, I_n}{\ln n} \quad \text{a.s. 收敛, 进而} \quad \frac{1}{\ln n} \sum_{k=2}^{n} (I_k - \mathrm{E}\, I_k) \to 0, \text{a.s.}.$$

再由 $\sum_{k=2}^{n} \mathrm{E}\, I_k \sim \ln n$. 得证. ∎

- 例 6.5.1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$, F 为连续函数, Z_n 表示到时刻 n 为止纪录值出现的次数, 则 $Z_n / \ln n \to 1$, a.s.

证: 记 I_j 表示事件"时刻 j 出现纪录值"的示性变量, 则 $Z_n = \sum_{k=1}^n I_k$. 且 $\{I_j, j \geq 1\}$ 是一列独立的 Bernulli 随机变量, 满足

$$\mathrm{E}\, I_j = \frac{1}{j}, \quad \mathrm{Var}\,(I_j) = \frac{1}{j} - \frac{1}{j^2}.$$

注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{I_n}{\ln n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^2 \ln^2 n} < \infty.$$

由引理 6.5.2, 可知

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{I_n - \mathrm{E}\, I_n}{\ln n} \text{ a.s. 收敛, 进而 } \frac{1}{\ln n} \sum_{k=2}^{n} (I_k - \mathrm{E}\, I_k) \to 0, \text{a.s.}.$$

再由 $\sum_{k=2}^n \mathrm{E}\, I_k \sim \ln n$. 得证. ∎

6.5.2 强大数律

- 定理 6.5.2 (Kolmogorov 强大数律) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 iid rv 序列, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 则存在常数 $a \in \Re$ 使得

$$\frac{S_n - na}{n} \xrightarrow{a.s.} 0$$

充分必要条件是 $\mathrm{E}\,|X_1| < \infty$, $a = \mathrm{E}\,X_1$.

- 定理 6.5.3 (Marcinkiewicz 强大数律) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为 iid rv 序列, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 则存在常数 $a \in \Re$ 使得

$$\frac{S_n - na}{n^{1/r}} \xrightarrow{a.s.} 0$$

充分必要条件是

$$\mathrm{E}\,|X_1|^r < \infty, \quad a = \begin{cases} \mathrm{E}\,X_1, & 1 \leq r < 2, \\ \text{任意实数}, & 0 < r < 1. \end{cases}$$

第 6 章第二次作业

§6.3:　8-10，15-17

§6.4:　1-3，5