数理统计的一道题目 吴越 PB19000193

2021年10月1日 23:22

- 求证：$f(x|\theta)=\frac{1}{2}\exp(-\frac{1}{2}|x-\theta|)$ 不是指数族.

证明：等价于证明：不存在 $n\in\mathbb{N}_+$ 以及函数 $Q_i(\theta)$、$T_j(x)$ 使得 $|x-\theta|=\sum_{i=1}^{n}Q_i(\theta)T_i(x)$

下面证明：

$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\exists$ 两两不同的 $\theta_j\ (1\le j\le n+1)$，使得 $|x-\theta_j|=\sum_{i=1}^{n}T_i(x)Q_i(\theta_j)\ \ (1\le j\le n+1)$ 不可能同时为恒等式.

令 $Q=(Q_j(\theta_i))\in\mathbb{R}^{(n+1)\times n}$，$T(x)=(T_i(x))\in\mathbb{R}^{n\times 1}$，$F(x)=(|x-\theta_i|)\in\mathbb{R}^{(n+1)\times 1}$

如果不成立，那么存在两两不同的 $\theta_i\ (1\le i\le n+1)$，有：$QT(x)=F(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$

此时不妨设 $r=\operatorname{rank}Q\in\{1,2,\cdots,n\}$. 那么存在 $P\in\mathbb{R}^{r\times(n+1)}$ 使得 $\operatorname{rank}(PQ)=r$，

而且满足：$\operatorname{rank}P=r$，P 的每一行每一列至多一个非零元，且非零元只为1.

(Rmk：实际上 PQ 为 Q 的一个子矩阵的行重排的结果)

此时有：$PQT(x)=PF(x)$

与上面同理，存在与 P 同类型的 $R\in\mathbb{R}^{n\times r}$ 使 PQR 是 r 阶可逆方阵.（PQR 是 PQ 的 r 阶子方阵的列重排）

则存在 $\tilde{R}\in\mathbb{R}^{r\times n}$ 使得 $PQR\tilde{R}=PQ$，又存在 $\tilde{P}\in\mathbb{R}^{(n+1)\times r}$ 使得：$\tilde{P}PQ=Q=\tilde{P}PQR\tilde{R}$

那么：$PQR\tilde{R}T(x)=PF(x)\Rightarrow\tilde{R}T(x)=(PQR)^{-1}PF(x)$

代回方程 $QT(x)=F(x)\Leftrightarrow\tilde{P}PQR\tilde{R}T(x)=F(x)$ 得：$\tilde{P}PQR(PQR)^{-1}PF(x)=F(x)$，也即 $\tilde{P}PF(x)=F(x)$

但左侧在至多 r 个点处不可导，右侧在 $n+1$ 个点处不可导，矛盾！

(这是因为 $PF(x)$ 只保留了 $F(x)$ 的 r 行)