# OOPython

## Задача 7. Метод конечных элементов: аппроксимация функций

### Элементы теории

Будем решать задачу аппроксимации заданной функции $f$ кусочно-линейной функцией $u$:

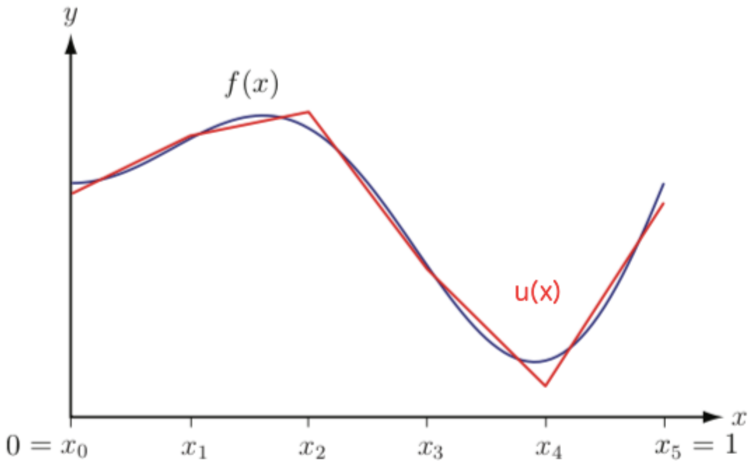


Рис. 1. Искомая функция $f$ и ее кусочно-линейный аппроксимант $u$. Можно заметить довольно высокую точность приближения.

Точки $\{x_j\}$ отрезка , в которых происходит излом функции $u$, делят отрезок на подобласти – **конечные элементы.**

В пространстве кусочно-линейных функций $V$ имеется базис из т.н. функций-«шляпок» $\{\varphi_j\}$. Т.о. искомую функцию $u$ можно записать в виде суммы с неопределенными коэффициентами $\{\alpha_j\}$:

$$u = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j,\ n - \text{число конечных элементов} \tag{1}$$

Задача состоит в нахождении этих коэффициентов, при которых функция $u$ будет «близка» к заданной функции $f$.

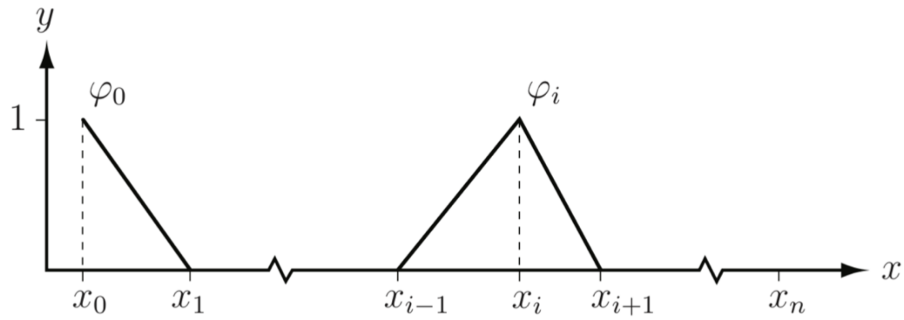


Рис. 2. Базисные функции-«шляпки».

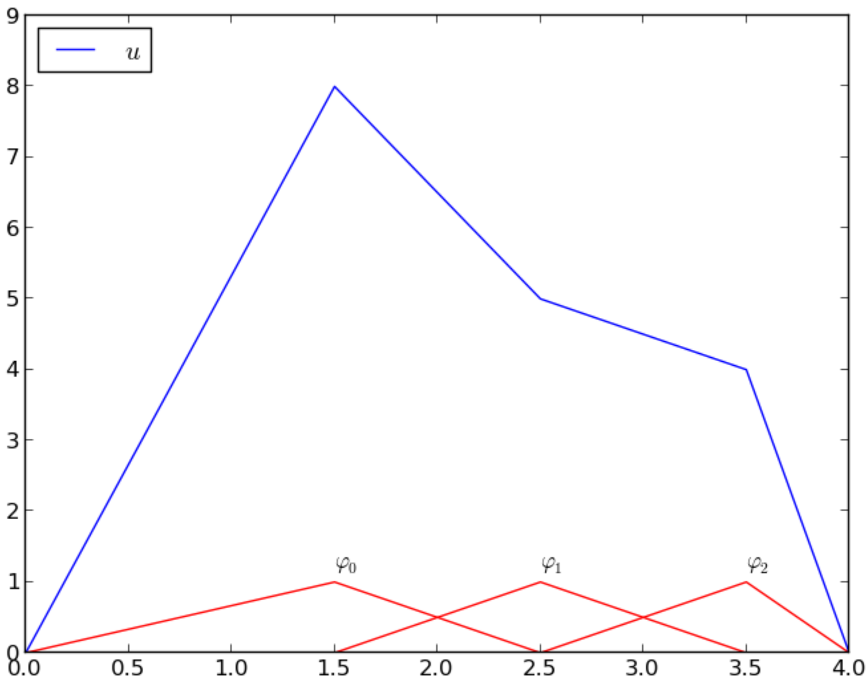


Рис. 3. Базисные функции и их линейная комбинация $u$ с некоторыми значениями коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Варьируя значения последних можно получить любую (в контексте данных конечных элементов) кусочно-линейную на отрезке функцию.

## Методы нахождения коэффициентов

### Метод наименьших квадратов

Будем искать коэффициенты исходя из *интуитивно понятной* идеи:

$$\int_0^1 \left[ f(x) - u(x) \right]^2 dx \to \min_{\{\alpha_j\}} \tag{2}$$

Введем несколько обозначений:

$$e = f - u$$
$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx \tag{3}$$

Перепишем формулу (2) с учетом новых обозначений:

$$\int_0^1 e(x)^2\,dx = (e,e) \to \min_{\{\alpha_j\}};$$

$$(e,e) = \left( f - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j, f - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j, \right) = (f,f) - 2\sum_{j=0}^{n} \alpha_j (f,\varphi_j) + \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} \alpha_p \alpha_q (\varphi_p,\varphi_q) = \tag{4}$$
$$= E(\alpha_0,...,\alpha_n) \to \min_{\{\alpha_j\}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_j} = 0,\ j = 0,...,n \tag{5}$$

Пропуская выкладки, для нахождения коэффициентов $\{\alpha_j\}$ получаем СЛАУ:

$$\begin{aligned} &M\mathbf{a} = \mathbf{b} \\ &M_{ij} = (\varphi_i,\varphi_j) \\ &b_i = (f,\varphi_i) \\ &i,j = 0,...,n \end{aligned} \tag{6}$$

Решив СЛАУ и найдя коэффициенты $\{\alpha_j\}$, подставим их в формулу (1) – получаем приближенное решение.

*Примечание:* в случае кусочно-линейной аппроксимации **матрица масс** $M_{ij}$ - симметричная трехдиагональная, значит, для повышения эффективности расчетов:

- вычислять требуется только элементы матрицы, расположенные на диагоналях
- для решения СЛАУ можно воспользоваться эффективным методом прогонки

## $L_2$-проекция

Коэффициенты находятся исходя из *менее интуитивно понятной* идеи:

$$(e,v) = 0,\ \forall v \in V, \tag{7}$$

что эквивалентно выполнению условий

$$(e,\varphi_i) = 0,\ i = 0,...,n \tag{8}$$

Покажем это:

- если выполняется (7), то $(e,\varphi_i) = 0$, т.к. $\varphi_i \in V$, $i = 0,...,n$
- в обратную сторону: если выполняется (8), то

  $\beta_i (e,\varphi_i) = 0;\ \sum_{i=0}^{n} \beta_i (e,\varphi_i) = 0;\ \left(e, \sum_{i=0}^{n} \beta_i \varphi_i\right) = 0;\ (e,v) = 0;\ \beta_i$ - произвольное вещественное число.

Итак:

$$\left(e,\varphi_i\right)=0,\ \ i=0,...,n \tag{9}$$

$$\left(f-\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\varphi_j,\varphi_i\right)=0,\ \ i=0,...,n$$

$$\left(f,\varphi_i\right)-\sum_{j=0}^{n}\left(\varphi_i,\varphi_j\right)\alpha_j=0,\ i=0,...,n \tag{10}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\varphi_i,\varphi_j\right)\alpha_j=\left(f,\varphi_i\right),\ i=0,...,n$$

В матричном виде:

$$\begin{aligned}&M\mathbf{a}=\mathbf{b}\\&M_{ij}=\left(\varphi_i,\varphi_j\right)\\&b_i=\left(f,\varphi_i\right)\\&i,j=0,...,n\end{aligned} \tag{11}$$

Получилась та же СЛАУ, что и в результате применения метода наименьших квадратов. *Примечание:* скорее всего, исторически, сначала был получены формулы для элементов матрицы $M_{ij}$ и вектора $b_i$ через метод наименьших квадратов. Исходя из этих формул, можно провести рассуждения в обратном порядке и получить исходную формулу метода – (7).

## Интерполяция

Ищем коэффициенты исходя из *интуитивно понятной* идеи: равенств $u$ и $f$ в узлах интерполяции $\left\{x_i\right\}$:

$$u\left(x_i\right)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\varphi_j\left(x_i\right)=f\left(x_i\right),\ i=0,...,n \tag{12}$$

В матричной форме эта СЛАУ записывается в виде:

$$\begin{aligned}&M\mathbf{a}=\mathbf{b}\\&M_{ij}=\varphi_j\left(x_i\right)\\&b_i=f\left(x_i\right)\\&i,j=0,...,n\end{aligned} \tag{13}$$

### Регрессия

Ищем коэффициенты исходя из *интуитивно понятной* идеи: равенств $u$ и $f$ в узлах регрессии $\{x_i\}$:

$$u(x_i) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j(x_i) = f(x_i),\ i = 0,...,m,\ m > n \tag{14}$$

Эта СЛАУ – переопределенная, у нее нет решения в классическом понимании. Однако, с помощью метода наименьших квадратов для СЛАУ, можно найти ее псевдорешение – точку в $\mathbb{R}^{n+1}$, доставляющую минимум функции $F(\alpha_0,...,\alpha_n)$:

$$F(\alpha_0,...,\alpha_n) = \sum_{i=0}^{m} \left( \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j(x_i) - f(x_i) \right)^2 \to \min_{\{\alpha_j\}} \tag{15}$$

Приравниваем нулю производные по коэффициентам:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 0,\ j = 0,...,n \tag{16}$$

Пропуская выкладки, для нахождения коэффициентов $\{\alpha_j\}$ получаем СЛАУ:

$$\begin{aligned} & M^T M\mathbf{a} = M^T\mathbf{b} \\ & M_{ij} = \varphi_j(x_i) \\ & b_i = f(x_i) \\ & j = 0,...,n \\ & i = 0,...,m \end{aligned} \tag{17}$$

## Задание

### Определение классов

Для методов **наименьших квадратов**, **интерполяции** и **регрессии** реализовать соответствующие классы **FEMSolver***Name*, минимизировав суммарное число строк кода с помощью наследования. В качестве заготовки использовать класс **FEMSolverRegression** из **lecture_10_fem_approximation.ipynb.**

### Использование классов

Использовать созданные классы для нахождения аппроксимантов функции $f(x) = 1 + x^2\sin(2\pi x),\ x \in I = [0,1]$. Число конечных элементов на отрезке $I$: $n = 5$.

В одном графическом окне построить графики:

- аппроксиманта, полученного методом наименьших квадратов
- аппроксиманта, полученного методом интерполяции; точки интерполяции

$$X_{int} = \left\{ x_i : x_i = \frac{1}{5} i,\ i = 0,...,5 \right\}$$

- аппроксиманта, полученного методом регрессии; точки регрессии

$$X_{reg} = \left\{ x_i : x_i = \frac{1}{7} i,\ i = 0,...,7 \right\}$$

- аппроксимируемой функции $f$.