大学物理B（下）

Homework 4-5

Selected Solutions

Bailin Qin

2021-03-19

1 Hall effect(8-34)

导体长$a = 4.0\text{cm}$，宽$b = 1.0\text{cm}$，厚$t = 1.0 \times 10^{-3}\text{cm}$. 沿长方向电流$I = 3.0\text{A}$，磁感应强度$B = 1.5\text{T}$磁场垂直穿过该薄导体，测得宽度两端有Hall电压$V_H = 1.0 \times 10^{-5}\text{V}$.

1.1 载流子漂移速度

洛伦兹力与Hall电场力平衡：

$$qvB = q\frac{V_H}{b} \tag{1}$$

载流子漂移速度$v = \frac{V_H}{bB} = 6.7 \times 10^{-4}\,\text{m/s}$.

1.2 载流子浓度

电流微观表示

$$I = nqvS = nqvbt \tag{2}$$

载流子浓度为

$$n = \frac{I}{qvbt} = \frac{IB}{qV_H t} = 2.8 \times 10^{29}\,\text{m}^{-3} \tag{3}$$

注意单位.

1.3 载流子为电子时，Hall电压的极性

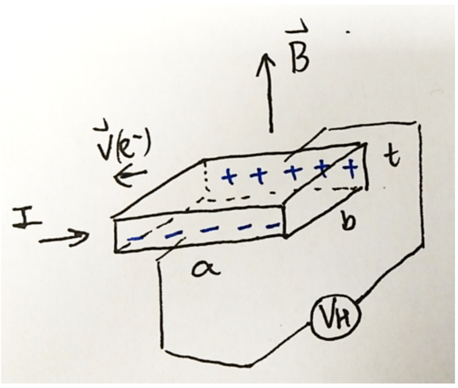
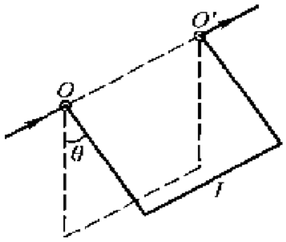


图 1: 8-34

注意洛伦兹力方向即可.

2 力矩 磁场对载流线圈的作用（8-37）

正方形三边由铜导线弯曲而成，可绕水平轴转动. 导线电流为$I = 10\,\mathrm{A}$，导线截面积$S = 2\,\mathrm{mm}^2$，密度$\rho = 8.9\,\mathrm{g/cm}^3$，平衡时与竖直方向成角度$\theta = 15°$. 求磁感应强度.



习题 8 － 37 图

图 2: 8-37

2.1 力矩

回顾力学部分，力矩定义

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4}$$

其中$\vec{r}$为转轴到力$\vec{F}$作用点的距离（力臂），方向为从转轴指向作用点. 力矩$\vec{M}$的方向与物体转动的方向成右手螺旋定则.

2.2 受力分析

线圈受重力作用，设每段导线质量为m，长度为L.

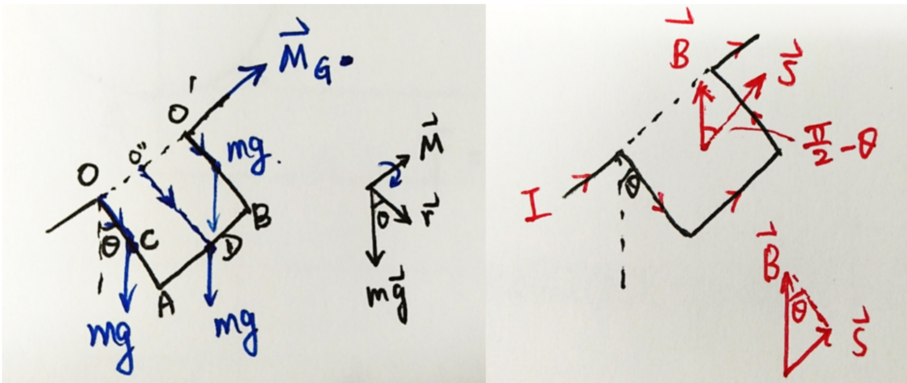


图 3: 8-37-1

对OA段与BO'段，重力作用在该段导线质心上，设OA段中点为C，力矩等于

$$\vec{M}_{OA} = \vec{M}_{BO'} = \overrightarrow{OC} \times m\vec{g} \tag{5}$$

$$M_{OA} = M_{BO'} = \frac{L}{2} mg \sin\theta \tag{6}$$

对AB段，重力作用在质心，设AB中点为D，力矩

$$\vec{M}_{AB} = \overrightarrow{O''D} \times m\vec{g} \tag{7}$$

$$M_{AB} = Lmg\sin\theta \tag{8}$$

这三段导线所受的重力矩方向均沿$\overrightarrow{OO'}$方向. 所以重力总力矩大小为

$$M_G = M_{OA} + M_{BO'} + M_{AB} = 2mgL\sin\theta \tag{9}$$

线圈中有电流，在磁场中线圈磁矩为$\vec{m} = I\vec{S}$, 其中面积向量$\vec{S}$方向为法向量，与电流方向成右手螺旋定则. 线圈受到磁场力的力矩

$$\vec{M}_m = \vec{m} \times \vec{B} \tag{10}$$

$$M_m = ISB\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = IL^2B\cos\theta \tag{11}$$

磁场力力矩方向沿$\overrightarrow{O'O}$，正好与重力总力矩方向相反，大小相等，这样体系才达到平衡状态，即不转动.

$$2mgL\sin\theta = IL^2B\cos\theta \tag{12}$$

$$B = \frac{2mg\tan\theta}{IL} = \frac{2LS\rho g\tan\theta}{IL} = \frac{2S\rho g\tan\theta}{I} = 9.3\times10^{-3}\,\mathrm{T} \tag{13}$$

3　安培定律　磁场对载流导线的作用（8-40）

无限长直导线AB电流I_1；圆形线圈半径R，电流I_2.

3.1　AB过圆心，直导线与圆线圈共面，求圆形线圈所受磁场力.

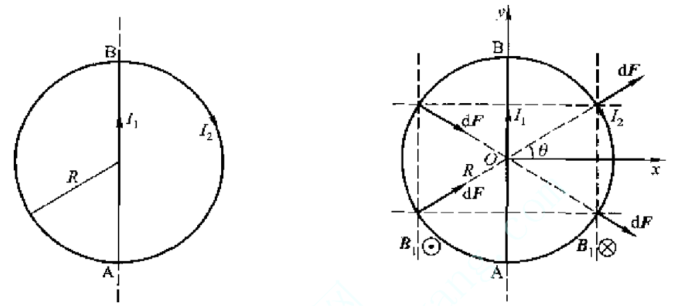


图 4: 8-40

直导线电流I_1向上，圆形线圈电流I_2顺时针.

对称性分析：在圆线圈上对称地取四个电流元$I_2\mathrm{d}\vec{l}$，这四个位置到直线AB的距离都等于$Rcos\theta$，磁场强度大小都等于

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\cos\theta} \tag{14}$$

左边与右边磁场方向相反，但从受安培力$\mathrm{d}\vec{F} = I_2\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}_1$可知，如上右图，整个圆线圈受合力沿$Ox$轴正方向，而$Oy$方向合力为零.

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}l}{2\pi R} \tag{15}$$

圆线圈受磁场力大小为

$$F = F_x = \int \mathrm{d}F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l = \mu_0 I_1 I_2 \tag{16}$$

3.2 若AB与圆心相距$d(d > R)$，仍在同一平面内，求圆形线圈所受磁场力.

假设圆线圈在直导线右侧，建立如下图坐标系. 直导线电流I_1沿Oy正方向流动，圆形线圈电流I_2顺

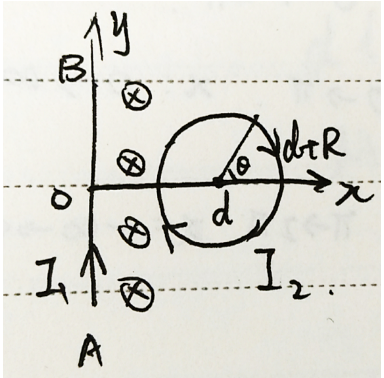


图 5: 8-40-1

时针. 不同位置直导线贡献的磁场大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + R\cos\theta)} \tag{17}$$

θ的范围是$[0, 2\pi]$.

类似的对称性分析：直导线磁场$\vec{B}_1$方向垂直于纸面向里，电流元受到直导线的磁场力$\mathrm{d}\vec{F} = I_2\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}_1$沿圆线圈半径向外. 整个圆线圈在$Oy$轴方向合力为零.

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cos\theta = I_2\mathrm{d}lB_1\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{R\cos\theta\mathrm{d}\theta}{d + R\cos\theta} \tag{18}$$

圆线圈受合力大小为

$$F = F_x = \int\mathrm{d}F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\cos\theta\mathrm{d}\theta}{d + R\cos\theta} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\frac{d}{d + R\cos\theta})\mathrm{d}\theta = \mu_0 I_1 I_2(1-\frac{2d}{\sqrt{d^2 - R^2}}) < 0 \tag{19}$$

负号表示方向沿Ox轴负方向.

关于包含三角函数的积分的暴力解法：

令$x = \tan\frac{\theta}{2}$，　$\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x$，那么有：

$$\sin\theta = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2x}{1+x^2} \tag{20}$$

$$\cos\theta = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \tag{21}$$

在本题中，同样利用上面的变量代换$x = \tan\frac{\theta}{2}$，　$\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x$：

$$\int\frac{\mathrm{d}\theta}{d + R\cos\theta} = \int\frac{2}{1+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{d + R\frac{1-x^2}{1+x^2}} = 2\int\frac{\mathrm{d}x}{(d-R)x^2 + (d+R)} \tag{22}$$

再利用我们熟悉的积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C \tag{23}$$

就能得到答案. 另外注意一下积分变量的取值范围：当θ从$0 \to \pi$时，$x = \tan\frac{\theta}{2}$从$0 \to \infty$；当θ从$\pi \to 2\pi$时，$x = \tan\frac{\theta}{2}$从$-\infty \to 0$.

4　介质中磁场　磁化面电流线密度与磁化强度（8-50）

无限长圆柱直导线的相对磁导率$\mu_{r1} > 1$，半径R_1，通有电流I. 导线外包一层圆柱不导电磁介质，相对磁导率$\mu_{r2} > 1$，外半径R_2.

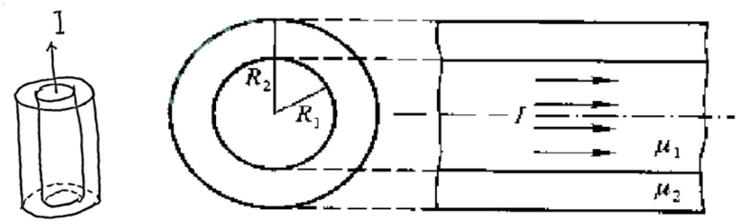


图 6: 8-50

4.1　磁场强度和磁感应强度的分布

分析可知电流和磁介质都呈轴对称分布，导致空间的磁场分布也具有轴对称性，可用安培环路定理直接求得磁场强度$\vec{H}$，然后再利用磁介质的磁导率得到磁感应强度. 设空间点到轴线距离为r.

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H \cdot 2\pi r = \sum I_c \tag{24}$$

当$0 < r < R_1$，在直导线内部

$$H \cdot 2\pi r = I\frac{r^2}{R_1^2} \tag{25}$$

$$H = \frac{Ir}{2\pi R_1^2} \tag{26}$$

$$B = \mu_0\mu_{r1}H = \frac{\mu_0\mu_{r1}Ir}{2\pi R_1^2} \tag{27}$$

当$R_1 < r < R_2$，在外包磁介质层内部

$$H \cdot 2\pi r = I \tag{28}$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \tag{29}$$

$$B = \mu_0\mu_{r2}H = \frac{\mu_0\mu_{r2}I}{2\pi r} \tag{30}$$

当$r > R_2$，在整个体系以外（真空）

$$H \cdot 2\pi r = I \tag{31}$$

$$H = \frac{I}{2\pi r} \tag{32}$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{33}$$

4.2　半径为R_1和R_2处的表面上磁化面电流线密度

“磁化面电流线密度”这个词语非常拗口，又是“面”又是“线密度”的，不是个好东西，得好好画个图看清楚到底是啥.

4.2.1 磁化面电流 磁化面电流线密度

如图7左，在介质1和介质2之间有个蓝色界面，磁化面电流沿着红色箭头方向流动，而磁化面电流线密度就是“界面上单位长度的磁化面电流”，这里的“单位长度”是沿着界面边界的线的单位长度，比如图中的深蓝色长条的面电流大小就代表磁化面电流线密度.

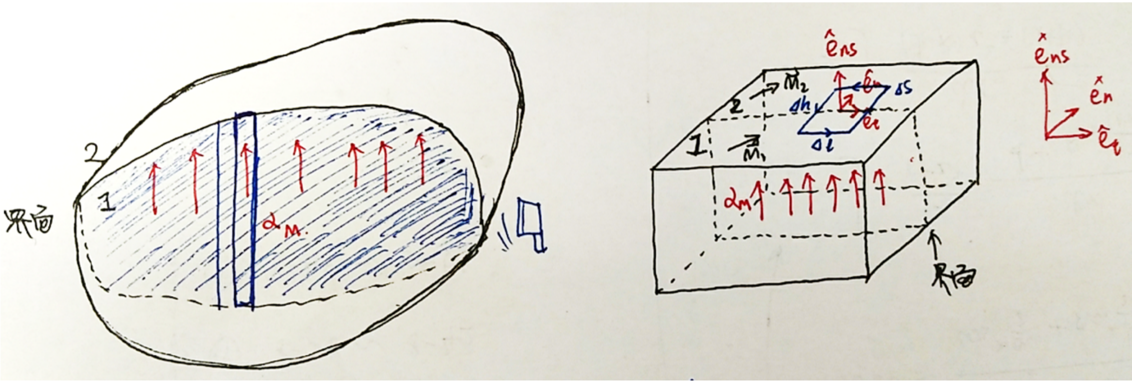


图 7: 8-50-1

4.2.2 磁化面电流线密度与磁化强度之间的关系

如图7右，磁介质1和磁介质2中有界面，磁化强度分别为$\vec{M}_1$和$\vec{M}_2$. 为了求磁化面电流线密度，我们做一个垂直于界面的小面元（图中蓝色方框）$\Delta S = \Delta h \Delta l$，这个面元的法向量是$\hat{e}_{nS}$，面元与界面交线的切向量是$\hat{e}_t$，另还有一个方向$\hat{e}_n$从介质1指向介质2，跟前两个向量共同构成右手螺旋局域坐标系.

$$\hat{e}_t = \hat{e}_n \times \hat{e}_{nS} \tag{34}$$

从课本式子（8-59）我们已经知道通过这个面元的磁化电流为

$$I_M = \oint \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{M}_1 \cdot \hat{e}_t \Delta l - \vec{M}_2 \cdot \hat{e}_t \Delta l + \delta \tag{35}$$

其中δ是$\vec{M}$对Δh的积分，当面元取$\Delta h \to 0$时，$\delta \to 0$，上式表示面磁化电流：

$$I_M = \vec{\alpha}_M \cdot \hat{e}_{nS} \Delta l \tag{36}$$

其中面磁化电流密度$\vec{\alpha}_M$方向沿着$\hat{e}_{nS}$. 因此我们有

$$\vec{\alpha}_M \cdot \hat{e}_{nS} = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \cdot \hat{e}_t = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \cdot (\hat{e}_n \times \hat{e}_{nS}) \tag{37}$$

利用矢量公式，混合积的轮换不变性$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$,有

$$\vec{\alpha}_M \cdot \hat{e}_{nS} = \hat{e}_{nS} \cdot [(\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \hat{e}_n] \tag{38}$$

又由于面元ΔS是任取的，所以式子（38）对任意面元法向量$\hat{e}_{nS}$都成立，这样我们就得到了磁化面电流线密度与磁化强度之间的关系：

$$\vec{\alpha}_M = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \hat{e}_n \tag{39}$$

若介质2为真空（即$\vec{M}_2 = 0$），界面法向量$\hat{e}_n$规定为从介质内部指向介质外部（真空），那么就有

$$\vec{\alpha}_M = \vec{M} \times \hat{e}_n \tag{40}$$

这样就可以直接求出面电流线密度的大小和方向了。再次强调，界面法向量$\hat{e}_n$规定为从介质内部指向介质外部（真空）.

4.2.3 Solution

由于$\mu_{r1} > 1, \mu_{r2} > 1$，磁介质为顺磁性. 假设电流$I$方向为垂直纸面向外，磁化强度方向为逆时针，如图取$R_1$处界面附近一小面元（蓝色环路）$\Delta S = \Delta l \Delta h$.

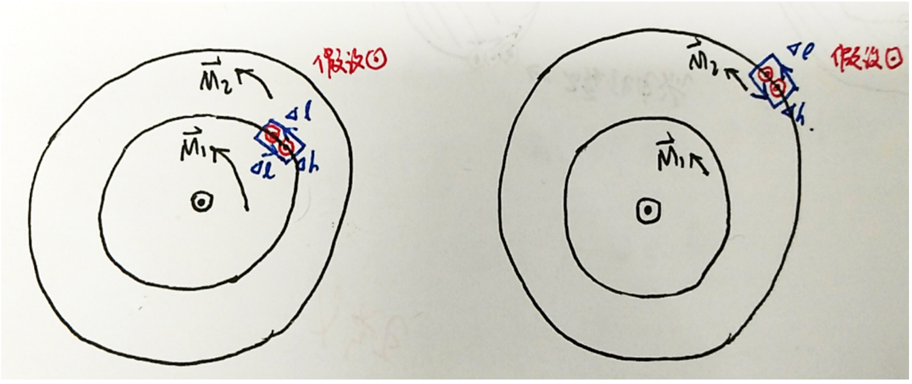


图 8: 8-50-2

面电流将穿过这个面元ΔS，假设面电流方向为垂直纸面向外，面元环路方向为逆时针（如图）.

$$\oint \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_M = \alpha_M \Delta l \tag{41}$$

$$-M_1 \Delta l + M_2 \Delta l = \alpha_M \Delta l \tag{42}$$

可得磁化面电流线密度$\alpha_M = M_2 - M_1$，根据磁化强度与磁场强度的关系

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} \tag{43}$$

代入第一问的结果可得，在半径R_1处的磁化面电流线密度

$$\alpha_M = \frac{(\mu_{r2} - \mu_{r1})I}{2\pi R_1} \tag{44}$$

一些说明：因为之前假设面电流方向为垂直纸面向外，意思是：如果式子（44）算出来的数字是正数，那么实际上面电流方向与假设相同；如果算出来是负数，那么实际上面电流方向与假设相反.

关键：参考书答案直接用式子（40），这种做法实际上是从介质到真空的做法，分别算出两种介质对磁化电流的贡献，然后再把两个贡献加起来. 注意需要规定好界面法向量的方向为“从介质内部指向真空”，而且叉乘的关系容易判断错误，不容易理解.

求R_2处面电流线密度的方法是类似的，假设面电流也是垂直纸面向外，面元环路逆时针，根据式子（41）可得

$$-M_2 \Delta l = \alpha_M \Delta l \tag{45}$$

在半径R_2处的磁化面电流线密度

$$\alpha_M = -\frac{(\mu_{r2} - 1)I}{2\pi R_2} \tag{46}$$

负号表示方向与假设的相反，即实际上R_2处面电流线密度方向为垂直纸面向里，跟I方向相反.