大学物理B（下）
Chap10：机械振动和电磁振荡
Selected Solutions to HW 9-11

Edited by Bailin Qin

2021 年 4 月 22 日

目录

1 简谐振动的运动学分析

一维简谐运动

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

其中振幅A，频率ω，初始相位ϕ_0.

速度

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \phi_0)$$

根据位移与速度的关系，可求出各种基本参量，确定运动方程.

广义能量守恒

$$x^2 + (\frac{v}{\omega})^2 = A^2 = const.$$

相位的确定通常与运动的方向（速度的大小）有关.

简谐振动$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$可以用旋转振幅矢量$\vec{P}$来表示：以坐标轴原点为起点，矢量$\vec{P}$大小等于振动的振幅大小$A$，与坐标轴夹角等于振动的相位$\phi = \omega t + \phi_0$.

矢量$\vec{P}$以角频率ω为角速度绕原点O沿逆时针方向旋转，其在坐标轴上的投影大小即简谐振动的位移x.

2 振动的合成与分解

2.1 同方向、同频率的两个简谐振动合成

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_{10})$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_{20})$$

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

方法：振幅矢量合成法. 如图1. 好处：简化三角函数的运算.

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2}$$

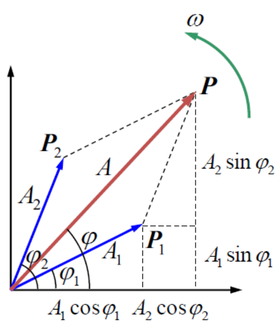

图 1: 振幅矢量合成

2.2 10-23

同方向、同频率的两个简谐振动合成. 位移单位为m.

$$x_1 = 0.3\cos(0.5\pi t - \frac{5\pi}{6})$$

$$x_2 = 0.4\cos(0.5\pi t + \phi_{20})$$

（1）ϕ_{20}取何值时，合振幅最大?（2）若合振动初相$\phi_0 = \frac{\pi}{6}$，求ϕ_{20}.

Solution:

（1）当两个振幅矢量共线同向时，合振幅最大. 共线同向也就是相位相同

$$\phi_{20} = -\frac{5\pi}{6}$$

（2）合振动振幅矢量$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$，初始夹角为$\phi_0 = \frac{\pi}{6}$. 而振幅矢量$\vec{P}_1$初始夹角为$-\frac{5\pi}{6}$，正好与合振幅共线反向，因此另一个振幅矢量也一定共线，且方向与合振幅矢量相同.

$$\phi_{20} = \frac{\pi}{6}$$

2.3 10-24

三个同方向、同频率谐振动（单位：m）如下. 求合振动.

$$x_1 = 0.1\cos(10t + \frac{\pi}{6})$$

$$x_2 = 0.1\cos(10t + \frac{\pi}{2})$$

$$x_3 = 0.1\cos(10t + \frac{5\pi}{6})$$

Solution:

画图： 由几何关系直接得到$A = 0.2\,\mathrm{m}$，$\phi_0 = \frac{\pi}{2}$.

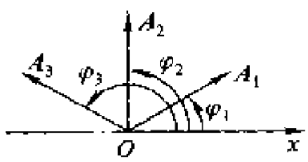

图 2: 10-24

$$x = 0.2\cos(10t + \frac{\pi}{2})$$

2.4 同方向、相近频率的两个等幅简谐振动的合成 拍

设初始相位相同.

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \phi_0)$$

$$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \phi_0)$$

利用三角函数的和差化积，可得合振动

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \phi_0)$$

当频率相近时，$\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)$的变化比$\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \phi_0)$的变化慢很多，所以可以看成振幅随时间变化、振动频率为$\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$的振动.

拍：振幅周期性变化（因为振幅只与大小有关，故取绝对值），周期较大

$$A' = |2A\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)|$$

周期为

$$T = |\frac{\pi}{(\omega_1 - \omega_2)/2}| = |\frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}|$$

拍频

$$f = \frac{1}{T} = |\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}| = |f_1 - f_2|$$

即拍频等于两频率之差.

2.5 10-25

两个同向谐振动的合振动（t以s为单位）

$$x = A\cos(2.1t)\cos(50.0t)$$

求拍的周期、分振动.

Solution:

不建议直接背公式套进合振动的表达式.

积化和差公式

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$x = A\cos(2.1t)\cos(50.0t) = \frac{A}{2}[\cos(52.1t) + \cos(47.9t)]$$

得到分振动

$$x_1 = \frac{A}{2}\cos(52.1t)$$

$$x_2 = \frac{A}{2}\cos(47.9t)$$

拍的周期

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} \approx 1.5\,\mathrm{s}$$

2.6 互相垂直、同频率的两个简谐振动的合成

$$x = A_x \cos(\omega t + \phi_x)$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \phi_y)$$

上述两个方程实际上是合振动的坐标参量方程. 合振动轨迹(x, y)满足

$$(\frac{x}{A_x})^2 + (\frac{y}{A_y})^2 - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos(\phi_x - \phi_y) = \sin^2(\phi_x - \phi_y)$$

合振动轨迹是一个椭圆，其形状和绕向与相位差$\delta = \phi_x - \phi_y$有关.

2.7 10-28

质量0.1 kg的质点同时参与互相垂直的两个振动（位移单位：m；时间单位：s）.

$$x = 0.06 \cos(\frac{\pi}{3} t + \frac{\pi}{3})$$

$$y = 0.03 \cos(\frac{\pi}{3} t - \frac{\pi}{6})$$

求：（1）质点运动轨迹；（2）质点在任意位置所受作用力.

Solution：

（1）质点运动轨迹(x, y)为椭圆

$$y = 0.03 \cos(\frac{\pi}{3} t - \frac{\pi}{6}) = 0.03 \sin(\frac{\pi}{3} t + \frac{\pi}{3})$$

$$(\frac{x}{0.06})^2 + (\frac{y}{0.03})^2 = 1$$

（2）牛顿第二定律

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\ddot{x}\hat{e}_x + \ddot{y}\hat{e}_y)$$

其中分量方向加速度

$$\ddot{x} = -(\frac{\pi}{3})^2 x$$

$$\ddot{y} = -(\frac{\pi}{3})^2 y$$

$$\vec{F} = -(\frac{\pi}{3})^2 m(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y) = -(\frac{\pi}{3})^2 \frac{\vec{r}}{10}$$

其中$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$. （位移单位：m；时间单位：s；力单位：N）.

3 简谐振动的动力学分析

简谐运动模型：物体仅受线性回复力作用.

所谓“线性回复力”，即力的方向指向平衡位置，力的大小正比于偏离平衡的距离.

以平衡位置为零点，牛顿第二定律

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

得到运动方程为

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

其中振动角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

.

对于转动问题，类似地有刚体的定轴转动定律（假设刚体绕定轴z轴转动）

$$M_z = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

其中M_z为刚体受到力矩的z分量，力矩 $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$

J为刚体对z轴转动惯量

$$J = \int r^2\mathrm{d}m$$

角速度

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

.

例如复摆问题，微扰时$\sin\theta\approx\theta$

$$M_z = -mgL\sin\theta \approx -mgL\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

得到运动方程为

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

其中振动角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{J}}$$

.

3.1 10-6

一端固定的弹簧劲度系数$k = 5.78\times10^6\,\mathrm{N/m}$，其自由端连接着质量$m = 1.5\times10^4\,\mathrm{kg}$的重物. 初始时，重物速度$v = 15\,\mathrm{m/min}$向下运动，求弹簧最大张力.

Solution:

一些啰嗦的受力分析：

设竖直向下为正方向. 设弹簧无张力时长度L_0，平衡时弹簧长度L_{eq}，运动时弹簧长度L.

$$k(L_{eq} - L_0) = mg$$

重物受$F = -k(L - L_0)$和重力mg，向下做加速运动

$$mg - k(L - L_0) = k(L_{eq} - L_0) - k(L - L_0) = k(L_{eq} - L) = m\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}t^2}$$

现以平衡位置L_{eq}为原点，意思就是作变量代换$x = L - L_{eq}$，上式可化为

$$-kx = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

系统作简谐振动.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

加速度

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0)$$

弹簧最大张力T_m时对应重物在最低点，此时速度为0，加速度达到最大值（向上），因此有

$$T_m - mg = mA\omega^2$$

得到

$$T_m = mg + mA\omega^2 = mg + mv_m\omega \approx 2.21\times 10^5\,\mathrm{N}$$

3.2 10-7

一端固定的弹簧劲度系数k，质量为m的盘子系于弹簧下端. 现一质量为m的物体从距离盘子h处自由落到盘子里且没有反弹. 碰撞瞬间为计时起点，物体落在盘子后平衡位置为原点，竖直向下为正方向，求盘子运动方程.

Solution:

碰撞前平衡长度l_1，碰撞后平衡长度l_2，以碰撞后的位置为坐标原点，则碰撞前即初始状态位置为

$$y_0 = l_1 - l_2 = \frac{Mg}{k} - \frac{(M+m)g}{k} = -\frac{mg}{k} < 0$$

碰撞为完全非弹性碰撞，能量不守恒，动量守恒，故碰撞后瞬间即初始速度为

$$v_0 = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh} > 0$$

由于体系作简谐振动

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$v(t) = -A\omega\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

故有

$$y^2 + (\frac{v}{\omega})^2 = A^2$$

代入$t=0$时的y_0和v_0可得

$$A = \sqrt{y_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{g(m+M)}}$$

$$\tan\phi_0 = -\frac{v}{\omega y} = \sqrt{\frac{2kh}{g(m+M)}}$$

$$\phi_0 = \arctan\sqrt{\frac{2kh}{g(m+M)}} + N\pi, \quad N = 0, 1$$

$N=0,1$是因为相位ϕ本身具有2π周期，$N=0$跟$N=2,4,6,...$是一样的，而$N=1$跟$N=3,5,7,...$是一样的.

确定初相位ϕ_0时要注意速度和位置的“正负”：
由$y_0 < 0$知$\cos\phi_0 < 0$；
由$v_0 > 0$知$\sin\phi_0 < 0$.
因此

$$\phi_0 = \arctan\sqrt{\frac{2kh}{g(m+M)}} + \pi$$

综上，盘子运动方程为

$$y(t) = \frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{g(m+M)}}\cos(\sqrt{\frac{k}{m+M}}t + \arctan\sqrt{\frac{2kh}{g(m+M)}} + \pi)$$

3.3 10-11

轻杆长度l，匀质圆盘半径r. 摆作微振动，分别求两种情况下角频率：
(a)圆盘与轻杆固定连接；(b)圆盘与轻杆通过光滑转轴连接.

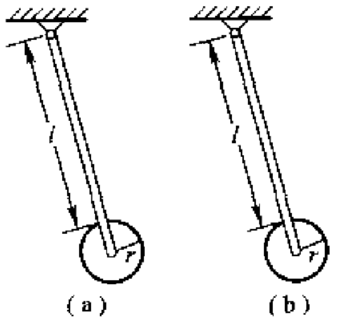

图 3: 10-11

Solution:

(a)圆盘与轻杆完全固定，圆盘与杆没有相对运动，整个过程中圆盘和杆作为一个整体绕定轴转动，相当于一个复摆.

根据平行轴定理可得圆盘对定轴的转动惯量

$$J = \frac{1}{2}mr^2 + ml^2$$

微振动

$$\sin\theta \approx \theta$$

由刚体转动定律

$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{2gl}{r^2+2l^2}}$$

(b)圆盘与轻杆没有固定，圆盘在光滑转轴上与杆有相对转动，相当于一根线绑着一个重物，是一个单摆.

$$-mg\sin\theta \approx -mgl\theta = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

注意：单摆模型与物体的几何形状无关，复摆与物体几何形状有关. 若保持质量不变，圆盘半径发生变化，或形状发生变化，(b)单摆运动不受影响，而(a)复摆运动会发生变化.

3.4 10-13

绝热容器上端有截面积为S的玻璃管，管内放有质量为m的光滑小球作为活塞. 容器内储存有体积V、压强p的某气体，大气压强为p_0. 现将小球稍微下移一点点，然后松开小球，小球上下振动，测得振动周期为T. 证明：气体的比热容比为

$$\gamma=\frac{4\pi^2 mV}{pS^2T^2}$$

Solution:

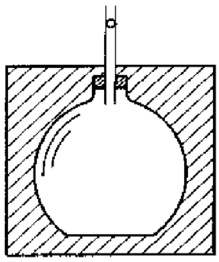

图 4: 10-13

小球在平衡位置$x=0$时，设气体状态为(p,V)

$$mg+p_0S=pS$$

小球偏离平衡位置x时（竖直向下为正），气体状态为$(p_1,V_1=V-xS)$，得运动方程

$$mg+p_0S-p_1S=m\ddot{x}$$

设气体比热容比为γ，由绝热过程压强与体积的关系

$$pV^\gamma=p_1V_1^\gamma=const.$$

对于微振动$xS<<V$

$$p_1=p(1-\frac{xS}{V})^{-\gamma}\approx p+p\gamma\frac{xS}{V}$$

代入运动方程

$$mg+p_0S-(p+p\gamma\frac{xS}{V})S=-\frac{\gamma pS^2}{V}x=m\ddot{x}$$

可得振动角频率

$$\omega=\sqrt{\frac{\gamma pS^2}{mV}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{mV}{\gamma pS^2}}$$

所以气体比热比

$$\gamma=\frac{4\pi^2 mV}{pS^2T^2}$$

4 简谐振动中的能量分析

一般地，对于简谐运动

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

系统动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0)$$

总能量守恒

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = const.$$

能量分析法：利用机械能守恒写出能量表达式，两边对时间求导即可立刻得到运动方程. 这样做避免了复杂的受力分析，使得力学体系只有“能量”而没有“力”，这也是经典力学（分析力学）的方法，有了能量或哈密顿量（Hamiltonian）就有了一切.

4.1 *拓展：拉格朗日力学

对一维质点，牛顿第二定律

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = F = ma = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

动能

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

可以看到

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{x}} = m\dot{x} = p$$

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{x}}) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

定义拉格朗日量（Lagrangian），是坐标和速度的函数.

$$L(x,\dot{x}) \equiv T(\dot{x}) - V(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{x}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

4.2 *一维简谐运动

以我们熟悉的一维简谐运动为例子，看看拉格朗日力学的魔力：直接写出拉格朗日量

$$L(x,\dot{x}) \equiv T(\dot{x}) - V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

立刻得到运动方程

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

整个过程完全没有“力”，只从能量的角度就得到了运动方程.

5 阻尼振动

系统不仅受线性回复力，还受阻力，且阻力大小正比于运动速率，方向与位移方向相反.

劲度系数k，阻力系数γ，牛顿第二定律

$$F = -kx - \gamma\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

其中$\delta = \frac{\gamma}{2m}$为阻尼系数，无阻尼时角频率$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. 试解：

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

代入原运动方程可得

$$(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2)Ae^{\lambda t} = 0$$

对任意t成立，故得特征方程

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

特征根

$$\lambda_\pm = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

5.1 欠阻尼振动：$\delta < \omega_0$

当$\delta < \omega_0$，特征根

$$\lambda_\pm = -\delta \pm i\omega$$

其中$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$，此时运动方程的通解

$$x(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} = e^{-\delta t}(A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t})$$

物理上要求$x(t)$是实数，必有

$$A_- = A_+^*$$

因此

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi_0)$$

其中A和ϕ_0由初始条件决定.

可见欠阻尼条件下系统依然有类周期的振动现象，振动的振幅$Ae^{-\delta t}$随时间流逝而减小，能量也随时间流逝而减小.

振动频率$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$为常数.

5.2 过阻尼运动：$\delta > \omega_0$

当$\delta > \omega_0$，特征根

$$\lambda_+ = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$\lambda_- = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$$

运动方程的通解

$$x(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}$$

过阻尼条件下，系统没有振动现象，当$t \to \infty$时，位移趋于平衡位置，即$x \to 0$，单调递减.

5.3 临界阻尼运动：$\delta = \omega_0$

当$\delta = \omega_0$，特征根为重根

$$\lambda_+ = \lambda_- = -\delta$$

此时

$$x_1(t) = Ae^{-\delta t}$$

是运动方程的一个解，对二阶常系数齐次线性微分方程，通解由两个线性无关的解组成.

用常数变易法，设另一解为

$$x_2(t) = u(t)e^{-\delta t}$$

代入运动方程

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

得到

$$[(\ddot{u} - 2\delta\dot{u} + \delta^2 u) + 2\delta(\dot{u} - \delta u) + \omega_0^2 u]e^{-\delta t} = 0$$

注意到$\omega_0 = \delta$，因此得到

$$\ddot{u} = 0$$

$$u(t) = A_1 + A_2 t$$

临界阻尼条件下，运动方程的通解为

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}$$

系统没有振动，而是很快恢复到平衡位置.

5.4 10-16

质量$m = 5.88\,\mathrm{kg}$物体在弹簧上作竖直方向振动，无阻尼时周期$T_0 = 0.4\pi\,\mathrm{s}$. 若存在阻尼，阻力大小正比于物体运动速度，其周期$T = 0.5\pi\,\mathrm{s}$. 当速度$v = 0.01\,\mathrm{m/s}$时，物体受多大阻力？

Solution:

无阻尼时：$m\ddot{x} + kx = 0$，运动周期

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

有阻尼时：$m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0$，运动周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\gamma^2}{4m^2}}}$$

解得阻力系数

$$\gamma=4\pi m\sqrt{\frac{1}{T_0^2}-\frac{1}{T^2}}$$

阻力大小为

$$F=\gamma v\approx 0.35\,\mathrm{N}$$

5.5 10-17

摆作阻尼振动. 某时刻振幅$A_0=0.03\,\mathrm{m}$，经$t_1=10\,\mathrm{s}$后振幅变为$A_1=0.01\,\mathrm{m}$. 从振幅A_0开始，多长时间后振幅变为$A_2=0.03\,\mathrm{m}$？

Solution:

阻尼振动振幅

$$A(t)=A_0e^{-\delta t}$$

因此

$$-\delta t=\ln\frac{A(t)}{A_0}$$

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{\ln\frac{A(t_1)}{A_0}}{\ln\frac{A(t_2)}{A_0}}$$

$$t_2=\frac{\ln\frac{A(t_2)}{A_0}}{\ln\frac{A(t_1)}{A_0}}t_1\approx 20.96\,\mathrm{s}$$

6 受迫振动

系统受线性回复力、阻力，以及周期性驱动力$F_d=F_0\cos(\omega_d t)$

牛顿第二定律

$$F=-kx-\gamma\dot{x}+F_0\cos(\omega_d t)$$

令$\frac{k}{m}=\omega_0^2$，$\frac{\gamma}{m}=2\delta$

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega_d t)$$

这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程，通解=相应的齐次微分方程通解+一个自身特解. “相应的齐次微分方程”意思是等号右边等于0，也就是前一节讲过的阻尼振动，我们已经知道通解的形式，现在只需要知道特解.

设特解为

$$x(t)=A\cos(\omega_d t+\phi_0)$$

代入可得

$$-A\omega_d^2\cos(\omega_d t+\phi_0)-2\delta A\omega_d\sin(\omega_d t+\phi_0)+\omega_0^2A\cos(\omega_d t+\phi_0)=\frac{F_0}{m}\cos(\omega_d t)$$

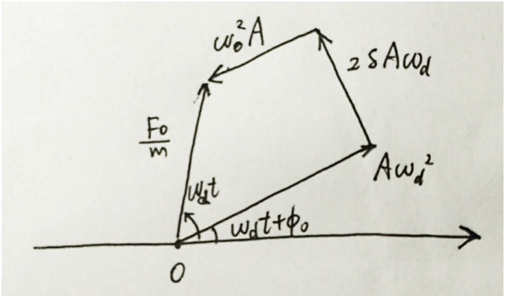

图 5: 振幅矢量合成

用振幅矢量表示，如图3所示. 由几何关系立刻得到振幅关系

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + 4\delta^2\omega_d^2}}$$

相位关系

$$\tan\phi = -\frac{2\delta\omega_d}{\omega_0^2 - \omega_d^2}$$

特解成立.

因此得到欠阻尼情况下（$\delta < \omega_0$）受迫振动运动的通解

$$x(t) = A_1 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi_1) + A\cos(\omega_d t + \phi_0)$$

可见在欠阻尼情况下，受迫振动的运动是阻尼振动和等幅运动的叠加，随着时间的流逝，阻尼振动幅度衰减，余下等幅振动.

6.1 位移共振

等幅振动幅值

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + 4\delta^2\omega_d^2}}$$

当

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0 - 2\delta^2}$$

幅值取到最大值，称此时的角频率为位移共振频率.

6.2 速度共振

等幅振动速度幅值

$$v_m = A\omega_d = \frac{F_0\omega_d}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + 4\delta^2\omega_d^2}}$$

当

$$\omega_d = \omega_0$$

速度幅值取到最大值，称此时的角频率为速度共振频率.

当系统阻尼较小时，位移共振与速度共振的条件相同，即驱动力频率等于系统特征频率.

6.3 10-18

火车铁轨分段组合而成. 火车行驶时，每当车轮经过铁轨接缝，车轮受冲击，导致弹簧上车厢发生上下振动. 设每段铁轨长$l = 12.6\,\mathrm{m}$，车厢与载荷总质量$m = 5.5\times 10^4\,\mathrm{kg}$，车厢减震弹簧每受$10\,\mathrm{kN}$载荷将被压缩$0.8\,\mathrm{mm}$. 火车速率多大时，振动特别强？

Solution:

共振条件：驱动力（即冲击力）角频率等于系统特征频率

$$\omega_d = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

火车以速度v行驶，每距离l受一次冲击，用时

$$T = \frac{l}{v} = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

因此，共振时火车速度

$$v = \frac{l\omega_d}{2\pi} = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 30.26\,\mathrm{m/s}$$

7 电磁振荡

当电路中存在电容与电感时，电压和电流发生周期性变化.

7.1 无阻尼LC电路

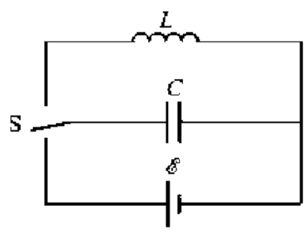

图 6: 无阻尼LC电路

开关向下接通，电容充电一段时间后，开关断开，向上接通.

设电容器极板上电荷量q，电路中电流i，取LC回路顺时针方向为电流正方向. 由于电流变化，自感产生感应电动势，大小与电容器极板电势差相等

$$-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{C}$$

其中电流

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

化简得到

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

其中LC电路特征频率

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

可见电荷量、电流、电极板电势差作简谐变化

$$q = q_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -q_0\omega \sin(\omega t + \phi_0) = q_0\omega\cos(\omega t + \phi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}\cos(\omega t + \phi_0)$$

7.2 LC电路能量

电场能量（回顾第七章，第六版教材§7-10(7-72)式）

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi_0)$$

磁场能量（回顾第九章，第六版教材§9-5(9-21)式）

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{L^2\omega^2 q_0^2}{2}\sin^2(\omega t + \phi_0)$$

由于$\omega^2 = \frac{1}{LC}$，故总能量守恒

$$W = W_e + W_m = \frac{q_0^2}{2C}$$

7.3 受迫振荡RLC电路

电路中有电容、电感、电阻，还有交流电源$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos\omega_d t$. 假设某时刻回路电流$i$绕顺时针方向，可

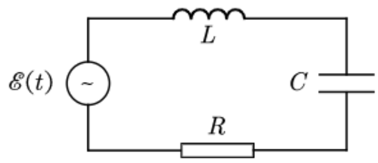

图 7: 受迫振荡RLC电路

写出闭合回路欧姆定律

$$\mathscr{E}_0\cos\omega_d t - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{C} + iR$$

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

则化简得到受迫振荡电路电荷量

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathscr{E}_0\cos\omega_d t$$

只讨论欠阻尼情况，经过长时间，阻尼振动项（齐次解）衰减得很小，最后稳定解为等幅振动

$$q(t) = q_0\cos(\omega_d t + \phi_0)$$

电流

$$i = \dot{q} = \omega q_0 \cos(\omega_d t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}) = i_0\cos(\omega_d + \phi)$$

推导过程同前一节的受迫振动，可得

$$i_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C})^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{\frac{1}{\omega_d C} - \omega_d L}{R}$$

容易发现，当交流电源（驱动力）频率等于电路特征频率

$$\omega_d = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

此时电流有最大幅值，称为电共振. 对标力学体系中的速度共振.

7.4 10-21

无阻尼LC电路自由振荡，$L = 10\,\mathrm{mH}$，$C = 4.0\,\mu\mathrm{F}$. 电容器电荷最大值$q_0 = 6.0\times 10^{-5}\,\mathrm{C}$. 求（1）电场能量和磁场能量最大值；（2）当电场能量与磁场能量相等时，电容器电荷量.

Solution：

（1）电场能量和磁场能量最大值相等，都等于

$$W_m = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \approx 4.5\times 10^{-4}\,\mathrm{J}$$

（2）LC振荡中，电荷量

$$q = q_0\cos(\omega t + \phi_0)$$

电场能量

$$W_e = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi_0)$$

磁场能量

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{q_0^2}{2C}\sin^2(\omega t + \phi_0)$$

当电场能量等于磁场能量，即

$$\cos^2(\omega t + \phi_0) = \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\cos(\omega t + \phi_0) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

故此时电荷量

$$q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}q_0 \approx \pm 4.24\times 10^{-5}\,\mathrm{C}$$