大学物理B（下） Homework 1-3

Bailin Qin

2021-03-11

1　电路与欧姆定律(8.4)

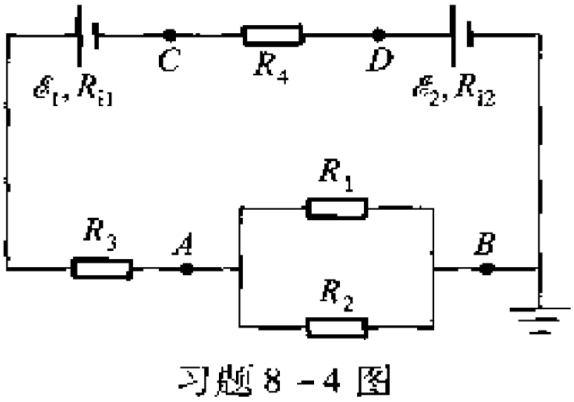

图 1: 8-4

$R_1 = 10.0\Omega$, $R_2 = 2.5\Omega$, $R_3 = 3.0\Omega$, $R_4 = 1.0\Omega$.
$\mathscr{E}_1 = 6.0V, R_{i1} = 0.40\Omega$; $\mathscr{E}_2 = 8.0V, R_{i2} = 0.60\Omega$.

1.1　通过每个电阻的电流

两个电动势方向相同，所以总电动势$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = 14V$.
总电阻$R = R_{i2} + R_{i1} + R_4 + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 7\Omega$.
$I_3 = I_4 = \frac{\mathscr{E}}{R} = 2A$.
$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.4A$, $I_2 = I\frac{R_1}{R1 + R2} = 1.6A$.

1.2　每个电池的端电压

端电压为电动势扣除内阻分压
$U_1 = \mathscr{E}_1 - IR_{i1} = 5.2V$, $U_2 = \mathscr{E}_2 - IR_{i2} = 6.8V$.

1.3　A、D两点间的电势差

先假设电流方向为逆时针，同时也取逆时针为回路绕行方向. 从D点走到A点：先遇到电阻R_4，电势下降一级；遇到电源1内阻，电势下降一级；遇到电源1，电动势方向（规定为电源内部负极到正极）与绕行方向相同，所以电势上升一级；又遇到R_3，电势下降一级，到达A点.

$$V_D - IR_4 - IR_{i1} + \mathscr{E}_1 - IR_3 = V_A \tag{1}$$

A、D两点间电势差为$U_{AD} = V_A - V_D = -2.8V$.

1.4　B、C两点间的电势差

同理，假设电流方向为逆时针，同时也取逆时针为回路绕行方向. 从C点走到B点：先遇到电源1内阻，电势下降一级；遇到电源1，电动势方向（规定为电源内部负极到正极）与绕行方向相同，所以电势

上升一级；又遇到R_3，电势下降一级；选其中一条支路，遇到电阻R_1，电势下降一级，注意这里下降电势大小为I_1R_1，到达B点.

$$V_C - IR_{i1} + \mathscr{E}_1 - IR_3 - I_1R_1 = V_B \tag{2}$$

B、C两点间电势差为$U_{BC} = V_B - V_C = -4.8V$.

又或者从B点逆时针走到C点，更简单，得到一样的结果.

1.5 A、B、C、D各点电势

B接地，所以B点电势$V_B = 0$. 上一题得到C点比B点电势高4.8V，$V_C = 4.8V$. A点电势$V_A = V_A - V_B = I_1R_1 = 4V$. D点电势$V_D = V_A - U_{AD} = 6.8V$.

2 电路与Biot-Sarvart定律(8.13)

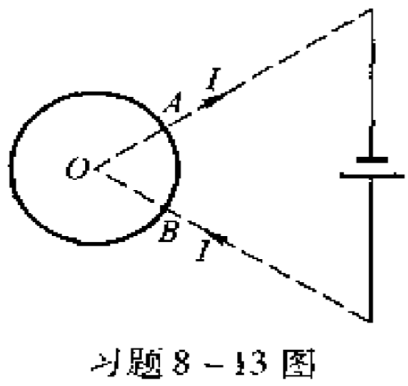

图 2: 8-13

两根长直导线沿半径方向引到铁环上A、B两点，并与很远的电源相连. 求环中心磁感应强度.

2.1 Solution

Step1: 简化电路，该电路为并联电路，劣弧BA电阻为R_1，电流I_1; 优弧BA电阻为R_2，电流I_2. 并联电路$I_1R_1 = I_2R_2$.

Step2: 由课本例2，可直接计算圆弧导线对圆心的磁感应强度大小

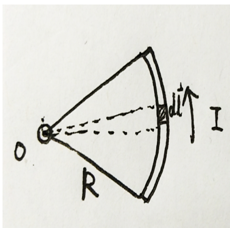

图 3: 8-13-1

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{R^2} \tag{3}$$

$$B = \int dB = \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}L \tag{4}$$

Step3: 劣弧：$\vec{B}_1$垂直纸面向外，$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi R}I_1L_1$；优弧：$\vec{B}_2$垂直纸面向内，$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi R}I_2L_2$.
由于电阻正比于长度，所以$I_1L_1 = I_2L_2$，所以$B_1 = B_2$.
而$\vec{B}_1$与$\vec{B}_2$方向相反，所以$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0$.

3 Biot-Sarvart定律(8.16)

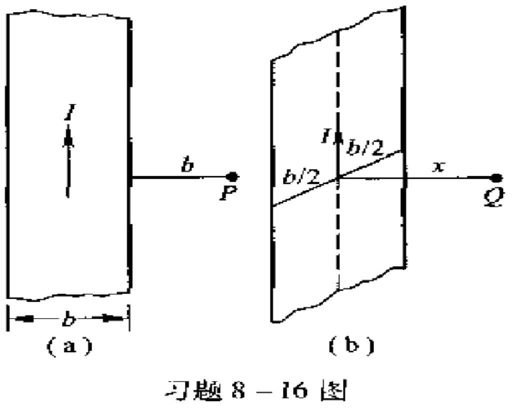

图 4: 8-16

电流I沿板长方向均匀流过宽为b的无限长平面导体薄板.

3.1 （a）薄板平面内距边界b的点P处磁感应强度.

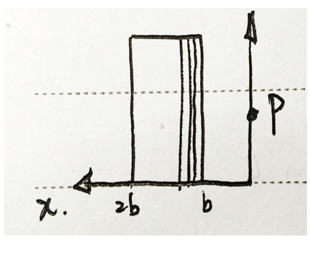

图 5: 8-16-1

建立如图5坐标系，平面分成无数根小载流直导线，每根微元导线电流为$\frac{I}{b}dx$.

利用例1中无限长载流直导线在距离x处的磁感应强度公式$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$，所以本题中位于$x$处的微元导线在$P$点处磁感应强度为$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Idx}{bx}$. 所以总磁感应强度为

$$B = \int dB = \int_b^{2b} \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}ln2 \tag{5}$$

3.2 （b）通过板中线并与板面垂直的直线上、距离板面x的点Q处磁感应强度.

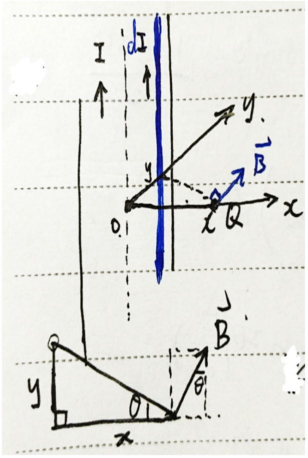

图 6: 8-16-2

建立如图6坐标系，每根微元导线电流为$\frac{I}{b}dx$. 位于y处的微元导线在Q点处磁感应强度为$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\frac{dy}{y/sin\theta}$. 根据几何关系, $y = xtan\theta$，$dy = \frac{x}{cos^2\theta}d\theta$，$\frac{dy}{y} = \frac{d\theta}{sin\theta cos\theta}$.

$$dB_x = dBsin\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\frac{sin\theta}{cos\theta}d\theta \tag{6}$$

由于θ积分区间关于原点对称，所以可得$B_x = 0$. （其实这个结论可以直接根据对称性得到.）

$$dB_y = dBcos\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}d\theta \tag{7}$$

可得

$$B_y = \int_{-arctan\frac{b}{2x}}^{arctan\frac{b}{2x}} \frac{\mu_0 I}{2\pi b}d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi b}arctan\frac{b}{2x} \tag{8}$$

4 Biot-Sarvart定律(8.18)

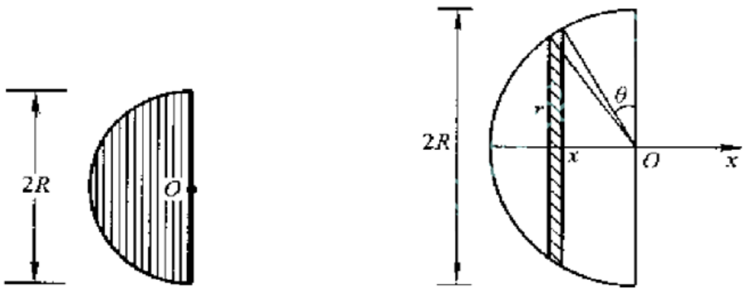

图 7: 8-18

半径R的木球上紧密绕一根细导线，相邻线圈平行，单层盖住半个球面，共N匝. 导线电流I. 求球心处磁感应强度.

4.1 Solution

注意这里是一根导线密绕半球，在表面上均匀分布，而不是在轴线上均匀分布.

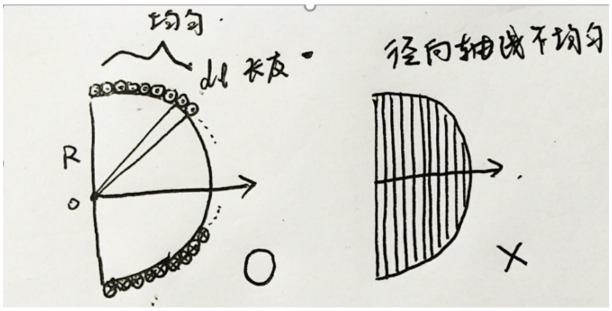

图 8: 8-18-1

取微元弧长$dl = Rd\theta$，这段弧长包含了若干匝线圈，匝数为$dN = \frac{N}{\pi R/2}dl$，这些线圈共同构成一个微元，位置对应角度θ，电流为$dI = IdN = \frac{2NI}{\pi}d\theta$.

由几何关系，不同半径r的微元与木球半径R关系为$r = Rsin\theta$；微元到O点距离为$x = Rcos\theta$. 故$r^2 + x^2 = R^2$.

利用例2中，半径r的载流圆线圈轴线上x处磁感应强度$B = \frac{\mu_0 Ir^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}}$，所以微元在$O$点磁感应强度

$$dB = \frac{\mu_0 dIr^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2R}dIsin^2\theta = \frac{\mu_0 NI}{\pi R}sin^2\theta d\theta \tag{9}$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 NI}{\pi R}sin^2\theta d\theta = \frac{\mu_0 NI}{4R} \tag{10}$$

5 电流定义与磁场公式(8-21)

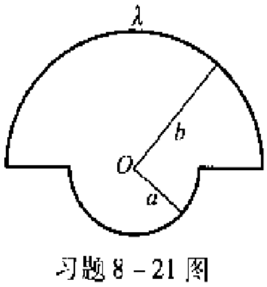

图 9: 8-21

闭合回路由半径分别为a和b的半圆以及两段直线段构成. 电荷线密度λ，回路以匀角速度ω绕过O点垂直于回路平面的轴转动. 求圆心处磁感应强度大小.

5.1 Solution

回顾载流线圈r在中心处磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} \tag{11}$$

只需找到各部分电流即可. 回路本身没有电流，只是回路上的电荷由于整体定向移动（转动）才产生磁场，等价于载流线圈的磁场. 把电荷的定向移动看成电流，电流的定义是“单位时间内通过某截面的电量”，即

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \tag{12}$$

对半径为a的半圆，等价于形成电流大小

$$I_a = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda \cdot \pi a}{2\pi/\omega} \tag{13}$$

其中$\Delta q = \lambda \cdot \pi a$为一个转动周期内通过半圆a截面的电量，$\Delta t = 2\pi/\omega$为这个转动周期的时间.

电荷移动产生的磁场等价于I_a载流线圈产生的磁场：

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2a} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4} \tag{14}$$

同理可得到对半径为b的半圆，在圆心处磁场贡献与半圆a相等.

$$B_b = \frac{\mu_0 I_b}{2b} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4} \tag{15}$$

对于两段直线段的磁场贡献，等价于一个环面电流产生的磁场.

距离圆心r的左右两段微元r $r + dr$包含电量$\Delta q = \lambda \cdot 2dr$，转动周期$\Delta t = 2\pi/\omega$，所以这一微元形成的环状电流大小以及相应的磁场为

$$\mathrm{d}I_r = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda \omega}{\pi}\mathrm{d}r \tag{16}$$

$$\mathrm{d}B_r = \frac{\mu_0}{2r}\mathrm{d}I_r = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r} \tag{17}$$

因此两根直线段的磁场贡献

$$B_r = \int_{r=a}^{r=b} \mathrm{d}B_r = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} ln\frac{b}{a} \tag{18}$$

由于三部分磁场方向相同，总磁场加和即可.

$$B = B_a + B_b + B_r = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2} + \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} ln\frac{b}{a}. \tag{19}$$

6 安培环路定理 磁场叠加原理(8-26)

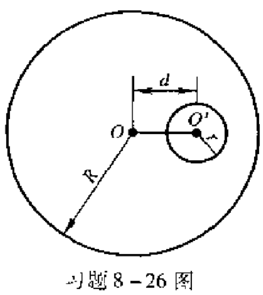

图 10: 8-26

半径为R的无限长金属圆柱体内部挖去一半径为r的无限长圆柱体，两柱体轴线平行，相距d. 现有电流I均匀沿轴线流过，求O点和O'点处磁感应强度大小.

6.1 Solution

体系太复杂，考虑叠加原理. 体系可以看成大载流圆柱R与小载流圆柱r分别产生的磁场的叠加，其中大圆柱电流I_R，小圆柱电流I_r，二者方向相反，整体效应使$I = I_R - I_r$.

由于电流均匀分布，电流密度$j = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$.

$$I_R = I\frac{R^2}{R^2 - r^2} \tag{20}$$

$$I_r = I\frac{r^2}{R^2 - r^2} \tag{21}$$

对O点：大圆柱R在此处磁场为0，所以仅有小圆柱磁场有贡献. 利用安培环路定理求小圆柱在O点磁场的贡献，取距离O'为d的圆形轨迹为积分路径L：

$$\oint_L \vec{B}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B_r \cdot 2\pi d = \mu_0 I_r \tag{22}$$

$$B_O = B_r = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi d(R^2 - r^2)} \tag{23}$$

对O'点：小圆柱r在此处磁场为0，所以仅有大圆柱磁场有贡献. 利用安培环路定理求大圆柱在O'点磁场的贡献，取距离O为d的圆形轨迹为积分路径L'：

$$\oint_{L'} \vec{B}_R \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B_R \cdot 2\pi d = \mu_0 I_R \frac{d^2}{R^2} \tag{24}$$

$$B_{O'} = B_R = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(R^2 - r^2)} \tag{25}$$