大学物理B（下）
Chap 9: 电磁感应与电磁场理论

Edited by Bailin Qin

2021 年 4 月 6 日

1 感应电动势的求解

法拉第电磁感应定律：

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

感应电动势的方向：根据楞次定律判断，即感应电流总是阻碍磁通量的变化. 或先规定回路的绕行正方向，继而也就确定了回路面积法向量，可求得回路磁通量$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$，继而根据式子（1）算的结果的正负得到感应电动势在回路中的方向：如果算得电动势为正，则电动势方向与回路绕行正方向相同；否则相反.

积分形式：利用非静电力场$\vec{E}_k$表示电动势

$$\oint \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{2}$$

若线圈有N匝，则等号右边乘以N. 习惯上把$N\Phi$称为磁链.

导体回路感应电流

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

回路感应电量

$$q = \int I\mathrm{d}t = -\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{1}{R}\mathrm{d}\Phi = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{4}$$

1.1 动生电动势的本质：运动电荷受Lorentz力作用

在电源内部，非静电力场$\vec{E}_k = \vec{v} \times \vec{B}$方向从正极指向负极（但电动势方向的定义是从负极指向正极）

$$\mathscr{E}_i = \int_-^+ \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_-^+ (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{5}$$

电动势的方向：从电子“堆积”的地方（负极）指向另一极（正极）；或虚构一条闭合环路，比较运动前后环路磁通量的变化，利用楞次定律判断.

习题：9-4，9-7，9-8，9-9，9-10

1.2 感生电动势

$$\mathscr{E}_i = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{6}$$

感生电场为涡旋场$\vec{E}_k$，非保守场，即其线积分与路径有关.

$$\mathscr{E}_i = \oint \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{7}$$

习题：9-1，9-2，9-5，9-11，9-14

2 自感与互感

2.1 自感

由于回路本身电流产生的磁通量发生变化时，在回路内激起感应电动势. 自感L用于描述回路产生自感电动势反抗电流改变的能力，与回路的几何形状、匝数、介质磁导率有关.

对任意形状的回路中由于电流I变化引起通过回路本身的磁链Φ_N的变化而出现的感应电动势为

$$\mathscr{E}_L = -\frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

定义回路的自感

$$L = \frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}I} \tag{9}$$

对于无铁磁性物质，回路自感为

$$L = \frac{\Phi_N}{I} \tag{10}$$

自感的单位：亨利(H)，$1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{Wb/A}$.

特别注意: N匝线圈的“磁通量”与“磁链”的区别：

磁通量

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

磁链

$$\Phi_N = N\Phi = N\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

习题：9-15, 9-17

2.2 有自感的RL电路中电流变化规律

刚接通电源：

$$\mathscr{E} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

刚断开电源并接通回路：

$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR$$

$$I = I_0(e^{-\frac{t}{\tau}})$$

弛豫时间

$$\tau = \frac{L}{R}$$

习题：9-22

2.3 互感

由于一个回路中电流变化而在邻近另一个回路中产生感应电动势. 回路1电流I_1发生变化时，回路2激发出感应电动势

$$\mathscr{E}_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

其中互感系数

$$M_{21} = \frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}I_1}$$
$$M_{12} = M_{21} = M$$

.

互感描述两个相邻回路分别在另一回路中产生互感电动势的能力，与两个回路的形状、相对位置、周围介质磁导率有关. 若两回路相对位置固定不变，且周围无铁磁性物质：

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

2.4 自感与互感的关系

回路1自感为L_1，回路2自感为L_2，则两个回路的互感

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

其中k为耦合因数.

当回路1中电流产生的磁感线全部通过回路2时，$k = 1$

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

习题：9-20， 9-21

2.5 自感系数和互感系数的求解

回路的自感和互感与回路有无电流无关.

求解过程：先假定回路有电流I，写出回路电流引起的磁链表达式，再根据定义得到自感或电感.

另外，也可以通过计算电流回路的磁场能量

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}LI^2$$

进而得到L.

习题：9-20

两个共轴圆线圈半径分别为R, r（$r << R$），匝数分别为N_1, N_2，相距d. 求两线圈互感系数.

Solution

假设大线圈有电流I流过，由于$r << R$，大线圈在小线圈处产生的磁场可视为均匀

$$B = N_1\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}$$

小线圈磁链数

$$\Psi = N_2 BS = N_1 N_2\frac{\mu_0 I\pi R^2 r^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}$$

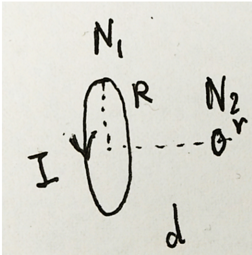

图 1: 9-20

互感

$$M = \frac{\Psi}{I} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 \pi R^2 r^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

3 电磁场的能量

从电流激发磁场的角度：电源电动势提供能量克服自感电动势、互感电动势作功，使回路产生电流，建立磁场，磁场的能量即电源电动势的这部分功. 自感为L的回路，当其中通有电流I时周围空间磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

分别通有电流I_1, I_2的两个回路的系统总磁能

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm M I_1 I_2$$

其中“+”表示两个回路I_1, I_2激发的磁通量互相增强，“-”表示两个回路I_1, I_2激发的磁通量互相减弱.（参看课本例题9-12）

磁场能量密度

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

磁场总能量

$$W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} \mathrm{d}V$$

对均匀各向同性磁介质，$\vec{H} = \mu \vec{B}$，因此

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu}$$

电场能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

电场总能量

$$W_e = \int_V w_m \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \mathrm{d}V$$

对均匀各向同性电介质，$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$，因此

$$w_e = \frac{\varepsilon E^2}{2}$$

4 位移电流

位移电流：电位移通量对时间的变化率

$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Psi_D}{\mathrm{d}t}$$

$$\Psi_D = \int_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

位移电流密度等于该点电位移的时间变化率

$$\vec{j}_d = \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}$$

安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum(I + I_d) = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

例题：9-31

圆形极板电容器，极板面积S，间距d，中间有一根长为d、电阻为R的细导线使两极板相连，极板交变电压$U = U_0 \sin \omega t$. 求极板间离轴线为r处的磁场强度（r小于极板半径）.

Solution:

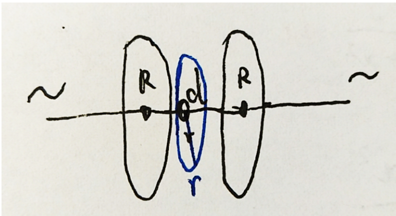

图 2: 9-31

取半径为r的环路，由安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H \cdot 2\pi r = \sum(I_R + I_d)$$

其中导线中的电流通过了环路

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t$$

由于极板之间存在位移电流，在极板之间均匀分布

$$I_d = \frac{\mathrm{d}\Psi_D}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}$$

极板上电位移$\vec{D}$的大小等于面电荷密度σ，而极板上电量$Q = S \cdot \sigma = CU$，其中极板电容

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

总位移电流

$$I_d = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U_0 \omega \cos \omega t$$

因此通过半径为r的环路的位移电流大小为

$$I_d\frac{\pi r^2}{S}=\frac{\varepsilon_0\pi r^2}{d}U_0\omega\cos\omega t$$

综上可得磁场强度

$$H=\frac{I_R+I_d\frac{\pi r^2}{S}}{2\pi r}=\frac{U_0}{2\pi}(\frac{1}{rR}\sin\omega t+\frac{\varepsilon_0\pi r\omega}{d}\cos\omega t)$$

5 Maxwell方程组

总结一下我们学过的电磁学有关的定理定律：

（1）介质中电场的高斯定理：

$$\oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum q=\int_V\rho_f\mathrm{d}V$$

告诉我们：自由电荷激发有源电场，变化磁场激发涡旋电场但对封闭曲面通量为零.

（2）介质中磁场的高斯定理：

$$\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

告诉我们：磁场是无源场，自然界没有“磁荷”.

（3）法拉第电磁感应定律：

$$\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

告诉我们：变化的磁场可以产生涡旋电场.

（4）安培环路定理：

$$\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\sum(I+I_d)=\int_S(\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

告诉我们：电流和变化的电场可以产生涡旋磁场.

上述四条方程称为Maxwell方程的积分形式. 假如所有环路或曲面都是任意且固定的，则方程组为：

$$\oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V\rho_f\mathrm{d}V$$

$$\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_S(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_S(\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

根据散度定理（即三维形式的Green公式，假设$\vec{D}$和$\vec{B}$在曲面内部处处可微）

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{D})\mathrm{d}V$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\nabla\cdot\vec{B})\mathrm{d}V$$

根据旋度定理（即Stokes公式，假设$\vec{E}$和$\vec{H}$在环路内部处处可微）

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

所以对于任意曲面或环路，可以得到Maxwell方程组的微分形式：

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

与之配套使用的材料介质本构关系：

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

其中介电常数$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$，磁导率$\mu = \mu_0\mu_r$.

还有我们熟悉的Ohm定律

$$\vec{j}_f = \gamma\vec{E}$$

结合电磁场量在界面处的边值关系，就可以求解电磁场的时空分布.

注意：电位移矢量$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$以及磁场强度$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$本身不是真实的场，仅仅是为了方便而引入的辅助矢量，使得方程组中只出现自由电荷ρ_f和自由电流$\vec{j}_f$，而与极化电荷、极化电流、磁化电流无关.