大学物理B（下）
Chap11：机械波和电磁波

Edited by Bailin Qin

2021 年 5 月 19 日

目录

1 波动

波动：波源在连续弹性介质中振动，与介质发生相互作用，使振动由近及远传播，形成波动.
机械波两个基本条件：波源，介质.

横波：介质中质元的振动方向与波传播的方向正交. eg, 吉他弦的振动.
纵波：介质中质元的振动方向与波传播的方向平行. eg, 声音在空气中传播.
在气体或液体介质中主要成分是纵波，在固体介质中横波和纵波都有.

1.1 平面简谐波

空间每一点都作简谐振动，不同点之间有确定的相位差.
假设波向右传播，波速为u，考虑$x=0$点的振动：

$$y(0,t)=A\cos(\omega t+\phi_0)$$

而位于x点在t时刻的振动，是由$x=0$的点在$t-(x/u)$时刻的振动传播而得到的振动：

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_o]$$

波速：一般指波的相速度，相位以一定的速度传播，等于频率f与波长λ的乘积：

$$u=\frac{\omega}{k}=\frac{\lambda}{T}=f\lambda$$

群速度：对波包来说，波包中心的前进速度称为群速度.

$$u_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

波数：

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$
$$u=\frac{\omega}{k}$$

沿x正方向传播的平面简谐波.

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\phi_0)$$

2 一维波动方程及其通解

波函数满足的方程称为波动方程，经典波动方程为二阶线性偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

方程有两个线性无关的解：

$$y_1(x,t)=F(t-\frac{x}{u}),\quad y_2(x,t)=G(t+\frac{x}{u})$$

两者的线性组合为方程的通解：

$$y(x,t)=c_1y_1(x,t)+c_2y_2(x,t)=c_1F(t-\frac{x}{u})+c_2G(t+\frac{x}{u})$$

3 *波动方程的导出

假设波沿着x轴传播，质元dm偏移平衡位置的位移为y，质元dm两端位移相同表示没有拉伸，即$\frac{\partial y}{\partial x}=0$. 若$\frac{\partial y}{\partial x}>0$，则介质处于拉伸状态；若$\frac{\partial y}{\partial x}<0$，则介质处于压缩状态，大小正比于受力. 因此，质元dm所受合力正比于$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

3.1 弹性介质的基本性质

杨氏弹性模量：拉伸应变，对应纵波

$$\frac{F}{S}=E\frac{\Delta l}{l}$$

应力与应变的关系（胡克定律）：

$$F=ES\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

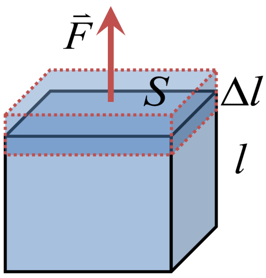

图 1: 拉伸应变

切变模量：剪切应变，对应横波

$$\frac{F}{S}=G\frac{\Delta b}{b}$$

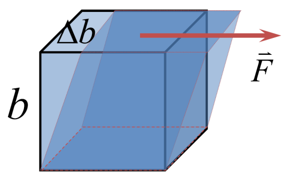

图 2: 剪切应变

一般杨氏模量E与切变模量G之间关系为

$$G=\frac{E}{2(1+\sigma)}$$

其中泊松比$\sigma\approx0.3\sim0.4$，与具体材料有关，可见杨氏模量一般都大于切变模量的两倍以上. （地震一般纵波总是比横波快）

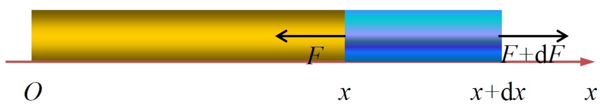

图 3: 均匀弹性棒

3.2 均匀弹性棒中的纵波和横波

设均匀弹性棒的横截面积为S，密度ρ，沿棒取为x轴方向. 设纵向（横向）偏离平衡位置的位移为y. 分析在$[x, x+\mathrm{d}x]$段中的质元$\mathrm{d}m = \rho S \mathrm{d}x$.

根据牛顿第二定律：

$$F(x+\mathrm{d}x) - F(x) = \mathrm{d}m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

3.2.1 纵波

对拉伸力，根据杨氏模量有

$$F(x) = ES\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x$$

这时质元所受合力为

$$F(x+\mathrm{d}x) - F(x) = ES\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x} - ES\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x = ES\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

可得运动方程

$$\rho S \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

化简得到

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

即为纵波方程，其中纵波的相速度

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

3.2.2 横波

对剪切力，根据剪切模量有

$$F(x) = GS\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x$$

这时质元所受合力为

$$F(x+\mathrm{d}x) - F(x) = GS\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x} - GS\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x = GS\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

可得运动方程

$$\rho S \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = GS\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

化简得到

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

即为横波方程，其中横波的相速度

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

3.3 弦的横波方程

设一根弹性弦张力为T，质量线密度η，当弦的局域有横向扰动时，产生一沿着弦传播的横波. 由于

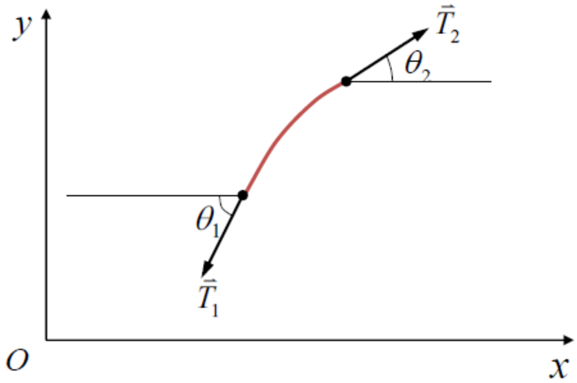

图 4: 弦上的横波

是横波，所以弦在x方向上没有位移，如上图可有：

$$T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2 \equiv T.$$

弦所受的合力大小沿y方向：

$$\Delta F = T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 = T\tan\theta_2 - T\tan\theta_1$$

由斜率与角度的关系$\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$可得

$$\Delta F = T\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x} - T\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x.$$

根据牛顿定律：

$$\Delta F = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x = \eta\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

可得弦上横波的波动方程：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\eta}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

相速度为

$$u = \sqrt{\frac{T}{\eta}}.$$

4 波场中的能量

4.1 质元的动能

对平面简谐波的波函数，即x点的位移

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx).$$

则该点的动能为

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}m(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2}\rho\mathrm{d}V\omega^2A^2\sin^2(\omega t - kx)$$

可以看到某个点的动能在平衡位置时最大，在波峰或波谷时为零.

4.2 质元的势能

对平面简谐波的波函数，即x点的位移

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx).$$

而该点的势能与相邻点有关，因为波动的形成是通过质元与质元之间相互作用（比如拉伸、剪切）而来的，能量在质元之间传递.

举个具体的例子，弹性介质棒，通过类比的方法理解势能的概念. 在弹簧中，弹力$F = k\Delta x$；介质棒中，弹力$F = ES\frac{1}{l}\Delta l$；在弹簧中，伸长量$\Delta x$；介质棒中，伸长量$\Delta l$；在弹簧中，弹性系数$k$；介质棒中，弹性系数$ES\frac{1}{l}$；

在弹簧中，弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2}k\Delta x^2;$$

在介质棒中，体积$V = Sl$，弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2}(ES\frac{1}{l})\Delta l^2 = \frac{1}{2}E(\frac{\Delta l}{l})^2 V.$$

因此对介质棒这一波动系统的质元，

$$\frac{\Delta l}{l} \to \frac{\partial y}{\partial x}, \quad V \to \mathrm{d}V.$$

势能为

$$dE_p = \frac{1}{2}E(\frac{\partial y}{\partial x})^2\mathrm{d}V = \frac{1}{2}E\mathrm{d}Vk^2A^2\sin^2(\omega t - kx).$$

根据相速度的关系

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\omega}{k},$$

因此，波动系统的某质元的势能可以写成

$$\mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}\rho\mathrm{d}V\omega^2A^2\sin^2(\omega t - kx) = \mathrm{d}E_k$$

势能与动能相等，表明波动传播能量，每一个质元的能量并不守恒，因为质元在不断接收和放出能量.（区分弹簧振子系统，弹簧振子系统是能量守恒的，势能来自弹性势能；但波动系统的每一个质元能量不守恒，势能来自相邻质元之间的相互作用.）

4.3 质元的机械能

在弹性介质中的波动场，势能和动能变化是同步同相的，在平衡位置达到最大值，在波峰或波谷处为零.

质元ΔV的总机械能

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_k + \mathrm{d}E_p = \rho\mathrm{d}V\omega^2A^2\sin^2(\omega t - kx)$$

4.4 质元的能量密度，平均能量密度；平均能流，平均能流密度

能量密度：波场中单位体积的能量，

$$w(x,t) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \rho\omega^2A^2\sin^2(\omega t - kx).$$

平均能量密度：一个振动周期内能量密度对时间的平均值，

$$\bar{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w(x,t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

平均能流：单位时间内通过一定面积S的能量，设波速为u，平均能量

$$\bar{P} = \bar{w}uS$$

平均能流密度、波的强度：单位时间内通过单位面积的能量，

$$I = \bar{w}u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 u = \frac{1}{2}Z\omega^2 A^2.$$

其中特性阻抗

$$Z = \rho u.$$

根据能量守恒定律，如果波在传播过程中能量不被所在的介质吸收或获得新的能量，波的平均能流$\bar{P}$保持不变.

5 电磁波

5.1 电磁波波动方程

第九章结束的时候讲过，用Maxwell方程的微分形式可以推导出真空中电场强度$\vec{E}$和磁感应强度$\vec{B}$满足波动方程：

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{E} = 0,$$

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{B} = 0.$$

其中真空中光速

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

如果电磁波沿x轴正方向传播，就回到课本上的公式

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{E} = 0,$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{B} = 0.$$

这时候，电场和磁感应强度的大小表达式可以写成

$$E = E_0\cos\omega(t - \frac{x}{c}) = E_0\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}),$$

$$B = B_0\cos\omega(t - \frac{x}{c}) = B_0\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}).$$

这里需要注意的是，电场和磁场都是以横波形式传播，这是因为真空Maxwell方程组中高斯定理

$$\nabla\cdot\vec{E} = \vec{k}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = \vec{k}\cdot\vec{B} = 0$$

这里$\vec{k}$是电磁波的传播方向. 这个点乘关系告诉我们电磁波是横波.

还有一点需要注意的是，电磁波中电场和磁场的振动方向是互相垂直的，这是因为Maxwell方程组中有一条

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

（即法拉第电磁感应定律）可以得到

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

这个叉乘关系就告诉我们电场和磁场的振动方向是互相垂直的，而且电场大小E与磁感应强度大小B比值等于光速c.

$$E = cB$$

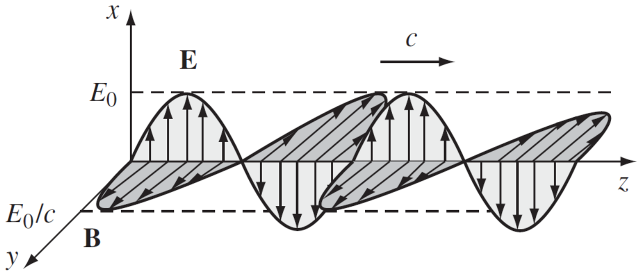

图 5: Electromagnetic waves.

5.2 电磁波的能量

对于平面波电磁场

$$E = E_0 \cos\omega(t - \frac{x}{c}),$$
$$B = B_0 \cos\omega(t - \frac{x}{c}).$$

电场能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

磁场能量密度

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2\mu}B^2$$

电磁场能量密度

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2)$$

能流密度

$$S = wu = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2) = \frac{1}{\mu}EB = \frac{1}{\mu}E_0 B_0 \cos^2\omega(t - \frac{x}{c})$$

从中可以看出能流密度变化的频率是电磁场频率的两倍.

能流密度矢量（Poynting矢量，辐射强度）

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B}$$

平均能流密度（平均辐射强度）：单位时间通过单位面积的平均能量.

$$\bar{S}=\frac{1}{2\mu}E_0B_0$$

平均能流密度的大小正好是能流密度最大值的一半.

6 波的衍射、反射与折射

6.1 Hygens原理

1678年，C. Hygens对波的描述：在波的传播过程中，波阵面（波前）上的每一点可以看作是发射子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波的包络线成为新的波阵面.

优点：能够解释衍射、反射、折射等现象；

缺点：不能解释不同方向传播的波的强度分布，无法解释波的传播方向问题.

6.2 波的衍射

波在传播过程中遇到障碍物时，其传播方向绕过障碍物发生偏折. 障碍物的线度越接近波长，衍射现象越明显.

6.3 波的反射

波从一种介质传播到另一种介质时，在界面上传播方向发生变化，发生反射和折射.

反射定律：入射角θ_i等于反射角θ_r.

折射定律：入射角与反射角的正弦值之比等于介质中波速之比.

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{u_1}{u_2}$$

7 波的叠加

只考虑线性波动方程，波的强度较弱的情况，此时波满足可叠加原理.

7.1 波的干涉

干涉：两列频率相同、振动方向相同、相位差固定的简谐波（相干波）叠加时，空间某些点的振动加强，某些点的振动减弱或抵消. 波源称为相干波源.

对同相位的相干波，即频率相同、振动方向相同、相位差为零的两列波：波程差$\delta=r_1-r_2$

相干加强：$\delta=k\lambda,\quad k=0,\pm1,\pm2...$

相干减弱：$\delta=(k+\frac{1}{2})\lambda,\quad k=0,\pm1,\pm2...$

7.2 驻波

考虑一种特殊的波的叠加情况：两列频率相同、振动方向相同、传播方向相反的波叠加

$$y_1(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})] = A\cos(\omega t - kx)$$
$$y_2(x,t) = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})] = A\cos(\omega t + kx)$$
$$y = y_1 + y_2 = A[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)] = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

每个质点（位置x）都作频率ω的简谐运动，但不同位置处质点的振幅不同.

波腹：振幅最大的位置，$|\cos(kx)| = |\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)| = 1$

$$x = N\frac{\lambda}{2}, \quad N = 0, \pm1, \pm2, ...$$

波节：振幅恒为0，保持不动的质点，$|\cos(kx)| = |\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)| = 0$

$$x = (N+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}, \quad N = 0, \pm1, \pm2, ...$$

相邻波腹或波节之间间距为$\lambda/2$.

驻波的能量分析：没有长距离的能量传播. 波节只有势能，波腹只有动能.

7.3 半波损失

行波遇到界面处发生反射，反射波的相位与界面处的性质有关.

如果反射点是固定点，则该点为驻波的波节，反射波与入射波在此处相位差π，导致在该店处两个波的叠加为0. 如果反射点是自由点，则该点是驻波的波腹，反射波与入射波相位相同.

从波疏介质到波密介质，发生半波损失；从波密介质到波疏介质，不发生半波损失.

8 Doppler效应

由于波源S或观察者R相对于介质的运动，导致观察者接收到的波的频率f_R与波源频率f_S不同. （警察叔叔抓超速、医院超声测血流速度）

参考系：介质；

波速：u

速度符号规定：观察者R与波源S相向而行时，$v_S > 0, \quad v_R > 0$.

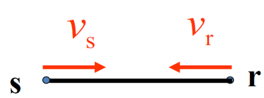

图 6: 速度正方向规定.

8.1 波源静止，观察者运动 ($v_S = 0, \quad v_R \neq 0$)

单位时间内波通过观察者的距离是$(u + v_R)$.

单位时间内接收到波数，即观察者测到的频率

$$f_R = \frac{u+v_R}{\lambda} = \frac{u+v_R}{u}f_S$$

8.2 波源运动，观察者静止 ($v_S \neq 0, \quad v_R = 0$)

在介质中运动的波源，介质中的波长不等于波源的波长.

波通过观察者的实际波长缩短，缩短量$v_S T = \frac{v_S}{f_S}$ 观察者测到的实际波长

$$\lambda_R = \frac{u}{f_S} - \frac{v_S}{f_S}$$

单位时间内接收到波数，即观察者测到的频率

$$f_R = \frac{u}{\lambda_R} = \frac{u}{u - v_S} f_S$$

8.3 波源运动，观察者运动 ($v_S \neq 0, \quad v_R = 0$)

由于波源运动，在介质中的波的频率变为

$$f_W = \frac{u}{u - v_S} f_S$$

由于观察者运动，观察者接收到的波的频率变为

$$f_R = \frac{u + v_R}{u} f_W$$

因此观察者接收到的波的频率为

$$f_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} f_S$$