数学基础：矢量场的微分与积分
初步应用：Maxwell方程组与电磁波

Edited by Bailin Qin

2021 年 4 月 22 日

目录

1 矢量

A duck is something that quarks like a duck.

Mathematical objects could also be defined by their behavior.

A vector is something that transforms like a vector.

在三维空间中，矢量$\vec{A} = A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z$绕某轴转动后变为

$$\begin{pmatrix} A_x^{'} \\ A_y^{'} \\ A_z^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

即

$$\vec{A}^{'} = R\vec{A}$$

$$A_{ij}^{'} = R_{ij}A_j$$

使用了Einstein求和约定：重复指标表示求和.

A tensor is something that transforms like a tensor. [2]

2 微分

2.1 算符∇

def: 矢量算符∇

$$\nabla = \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

2.2 梯度: ∇T

在三维笛卡尔坐标系中，三个基矢分别为$\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$.

一个标量T的梯度是矢量.

$$\nabla T = \hat{e}_x\frac{\partial T}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial T}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial T}{\partial z}$$

几何意义：梯度∇T的方向指向标量T的最大变化率（方向导数）方向，大小为最大变化率.

例如:

线元

$$\mathrm{d}\vec{l} = \hat{e}_x\mathrm{d}x + \hat{e}_y\mathrm{d}y + \hat{e}_z\mathrm{d}z$$

全微分

$$\mathrm{d}T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial T}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial T}{\partial z}\mathrm{d}z = (\nabla T)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

静电场，电场强度是电势的负梯度：

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(r)$$

保守力场中，力场是势能的负梯度：

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(r)$$

2.3 散度：$\nabla\cdot\vec{A}$

一个矢量$\vec{A}=A_x\hat{e}_x+A_y\hat{e}_y+A_z\hat{e}_z$的散度是标量.

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\sum_{i=1,2,3}\nabla_i A_i=\nabla_i A_i=\partial_i A_i$$

其中$\partial_i=\nabla_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$，重复指标表示求和.

从数学定义上，散度是指矢量场对某点附近封闭曲面通量与封闭曲面体积之比的极限值，即刻画矢量场在该点的通量源密度.

$$\nabla\cdot\vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}$$

从定义上可以直接得到Gauss定理（散度定理）：

$$\int_V(\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V=\oint_S\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

因为

$$\nabla\cdot\vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}V}$$

2.4 旋度：$\nabla\times\vec{A}$

一个矢量$\vec{A}=A_x\hat{e}_x+A_y\hat{e}_y+A_z\hat{e}_z$的旋度是矢量.

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\hat{e}_x(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})+\hat{e}_y(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})+\hat{e}_z(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})$$

$$(\nabla\times\vec{A})_i=\sum_{j,k=1,2,3}\varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k=\varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k$$

其中反对称符号（Levi-Civita symbol）：

$$\varepsilon_{ijk}=+1,\quad if\quad (i,j,k)=(1,2,3);$$

$$\varepsilon_{ijk}=-1,\quad if\quad (i,j,k)=(2,1,3);$$

$$\varepsilon_{ijk}=0,\quad if\quad i=j\quad or\quad i=k\quad or\quad j=k.$$

括号中的(i,j,k)表示三个标记的轮换，即$(i,j,k),(j,k,i),(k,i,j)$.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}=\delta_{im}\delta_{jm}-\delta_{in}\delta_{jm}$$

其中Kronecker符号

$$\delta_{ij}=1,\quad if\quad i=j$$

$$\delta_{ij}=0,\quad if\quad i\neq j$$

从数学定义上，旋度是矢量场在某点附近封闭环路的环量与环路面积之比的极限值，即刻画矢量场在该点的旋转程度.

$$(\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}{\Delta S}$$

可直接得到旋度定理：

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

旋度的旋度：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$$

其中

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$$

证明：

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\nabla \times \vec{A})]_i &= \varepsilon_{ijk} \nabla_j (\nabla \times \vec{A})_k = \varepsilon_{ijk} \nabla_j (\varepsilon_{kmn} \nabla_m A_n) \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \nabla_j \nabla_m A_n = (\delta_{im}\delta_{jm} - \delta_{in}\delta_{jm}) \nabla_j \nabla_m A_n \\
&= \nabla_i \nabla_n A_n - \nabla_m \nabla_m A_i = \nabla_i (\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla) A_i \\
&= [-\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})]_i
\end{aligned}$$

另外，还有两个有用的关系：

对任意矢量场$\vec{A}(\vec{r})$，其旋度的散度恒为0.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

对任意标量场$T(\vec{r})$，其梯度的旋度恒为0，即梯度场为无旋场.

$$\nabla \times [\nabla T(\vec{r})] = 0$$

3 积分

3.1 线积分

矢量$\vec{A}$沿路径L从a点到b点的线积分（如图1）

$$\int_a^b \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

在笛卡尔直角坐标系(x, y, z)中，线元

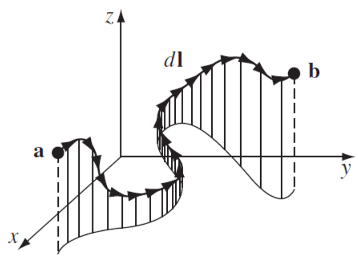

图 1: Line integral. [1]

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x\hat{e}_x + \mathrm{d}y\hat{e}_y + \mathrm{d}z\hat{e}_z$$

若a点和b点重合，即路径为闭合环路，则积分可以写成

$$\oint_L \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

在物理中最常见的线积分为功$W = \int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

3.2 面积分

面积分通常也叫通量（如图2）.

$$\int_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{a}$$

其中$\mathrm{d}\vec{a}$是面元，方向为该点处的法向量，垂直于表面. 若环面是闭合的，则积分可以写成

$$\oint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{a}$$

通常规定面元的法向量方向为从曲面内部指向外部.

物理中最常见的面积分为流体通过某一界面的流量$\Phi = \int_S \rho\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{a}$.

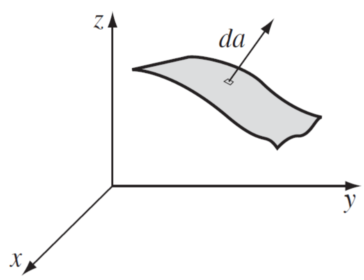

图 2: Area integral. [1]

3.3 体积分

标量场的体积分形式为

$$\int_V T\mathrm{d}V$$

在笛卡尔直角坐标系(x, y, z)中，体积元

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

物理中常见的体积分：已知质量密度分布$\rho(\vec{r})$，则质量$M = \int_V \rho(\vec{r})\mathrm{d}V$.

4 曲线坐标系

线元$\mathrm{d}\vec{l}$、面元$\mathrm{d}\vec{a}$、体积元$\mathrm{d}V$与坐标系有关.

4.1 柱坐标系(ρ, ϕ, z)

如图3，柱坐标系(ρ, ϕ, z)与笛卡尔坐标系(x, y, z)关系为

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi, \qquad z = z$$

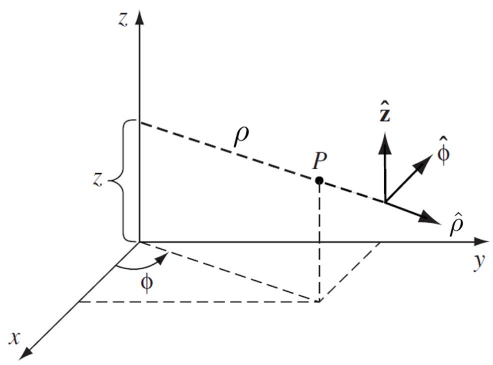

图 3: Cylindrical coordinates. [1]

线元

$$\mathrm{d}\vec{l} = \hat{\rho}\mathrm{d}\rho + \hat{\phi}\rho\mathrm{d}\phi + \hat{z}\mathrm{d}z$$

体积元

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\rho \cdot \rho\mathrm{d}\phi \cdot \mathrm{d}z = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

利用柱坐标基矢

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

以及

$$\hat{\rho} = \hat{e}_x\cos\phi + \hat{e}_y\sin\phi$$

$$\hat{\phi} = -\hat{e}_x\sin\phi + \hat{e}_y\cos\phi$$

$$\hat{z} = \hat{e}_z$$

标量场T的梯度

$$\nabla T = \hat{e}_x\frac{\partial T}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial T}{\partial y} + \hat{e}_z\frac{\partial T}{\partial z} = \hat{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \phi} + \hat{z}\frac{\partial T}{\partial z}$$

类似的原理，可得

矢量场$\vec{A}$的散度

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

矢量场$\vec{A}$的旋度

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{\rho}(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}) + \hat{\phi}(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}) + \hat{z}\frac{1}{\rho}[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}]$$

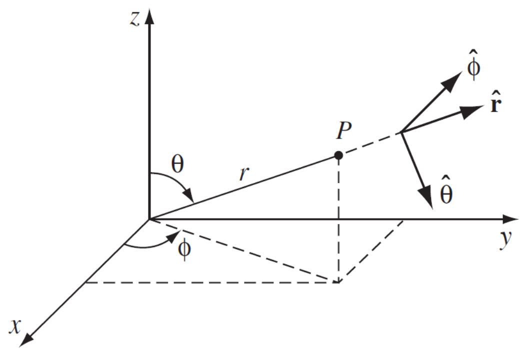

图 4: Sphere coordinates. [1]

4.2 球坐标系(r,θ,ϕ)

如图4，球坐标系(r,θ,ϕ)与笛卡尔坐标系(x,y,z)关系为

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta$$

线元

$$\mathrm{d}\vec{l} = \hat{r}\mathrm{d}r + \hat{\theta}r\mathrm{d}\theta + \hat{\phi}r\sin\theta\mathrm{d}\phi$$

体积元

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

球坐标基矢

$$\hat{r} = \hat{e}_x\sin\theta\cos\phi + \hat{e}_y\sin\theta\sin\phi + \hat{e}_z\cos\theta$$

$$\hat{\theta} = \hat{e}_x\cos\theta\cos\phi + \hat{e}_y\cos\theta\sin\phi - \hat{e}_z\sin\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{e}_x\sin\phi + \hat{e}_y\cos\phi$$

标量场T的梯度

$$\nabla T = \hat{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}$$

矢量场$\vec{A}$的散度

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

矢量场$\vec{A}$的旋度

$$\nabla\times\vec{A} = \hat{r}\frac{1}{r\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}] + \hat{\theta}\frac{1}{r}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)] + \hat{\phi}\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}]$$

5 *应用：Maxwell方程组

5.1 积分形式

介质中电场的高斯定理：

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum q=\int_V \rho_f \mathrm{d}V$$

介质中磁场的高斯定理：

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

法拉第电磁感应定律：

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

安培环路定理：

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum(I+I_d)=\int_S(\vec{j}_f+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

上述四条方程称为Maxwell方程的积分形式. 假如所有环路或曲面都是任意且固定的，则方程组为：

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \rho_f \mathrm{d}V$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S(\vec{j}_f+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

5.2 微分形式

根据散度定理（假设$\vec{D}$和$\vec{B}$在曲面内部处处可微）

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V(\nabla\cdot\vec{D})\mathrm{d}V$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V(\nabla\cdot\vec{B})\mathrm{d}V$$

根据旋度定理（假设$\vec{E}$和$\vec{H}$在环路内部处处可微）

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S(\nabla\times\vec{E})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S(\nabla\times\vec{H})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

所以对于任意曲面或环路，可以得到Maxwell方程组的微分形式：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

5.3 真空中的电磁波

真空中

$$\rho_f = 0, \qquad \vec{j}_f = 0, \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Maxwell方程组微分形式

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

5.4 电场

利用前面旋度一节学到的小知识：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E})$$

对式子(3)两边作旋度：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

代入式子(1)和(4)，可得

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

得到电场$\vec{E}$满足波动方程

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{E} = 0 \tag{5}$$

其中真空中光速

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

电场的行为像某一方向传播的波

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$$

其中

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$$

5.5 磁场

类似对电场的处理. 对式子(4)两边作旋度：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \times (\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E})$$

代入式子(2)和(3)，可得

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

得到磁场$\vec{B}$同电场一样，满足波动方程

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{B} = 0 \tag{6}$$

其中真空中光速

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

磁场的行为像某一方向传播的波

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$$

其中

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$$

5.6 电磁波的传播

电磁波的传播方向：观察等相位面的移动. 传播方向为波矢$\vec{k}$的方向. 如图所示.

电场$\vec{E}$、磁场$\vec{B}$以及波矢$\vec{k}$组成右手定则

$$\hat{E} \times \hat{B} = \hat{k}$$

$$|E_0| = \frac{\omega}{k}|B_0| = c|B_0|$$

可见电磁波的传播方向和振动方向垂直，因此电磁波是“横波”.

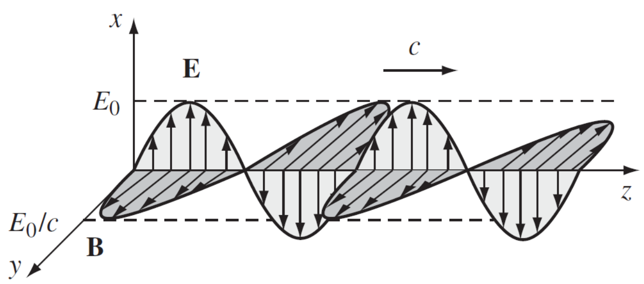

图 5: Electromagnetic waves. [1]

参考文献

[1] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Pearson, 4th edition (2012).

[2] A. Zee, *Einstein's Gravity in a Nutshell*, Princeton University Press, New Jersey (2013).