大学物理B（下）

Selected Solutions to HW 6-7

2021 年 3 月 28 日

1 感应电动势的求解

法拉第电磁感应定律：

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

感应电动势的方向：根据楞次定律判断，即感应电流总是阻碍磁通量的变化. 或先规定回路的绕行正方向，继而也就确定了回路面积法向量，可求得回路磁通量$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$，继而根据式子（1）算的结果的正负得到感应电动势在回路中的方向：如果算的电动势为正，则电动势方向与回路绕行正方向相同；否则相反.

积分形式：利用非静电力场$\vec{E}_k$表示电动势

$$\oint \vec{E}_k\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \tag{2}$$

若线圈有N匝，则等号右边乘以N. 习惯上把$N\Phi$称为磁链.

导体回路感应电流

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

回路感应电量

$$q = \int I\mathrm{d}t = -\int_{\Phi_1}^{\Phi_2}\frac{1}{R}\mathrm{d}\Phi = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{4}$$

1.1 动生电动势的本质：运动电荷受Lorentz力作用

在电源内部，非静电力场$\vec{E}_k = \vec{v}\times\vec{B}$方向从正极指向负极（但电动势方向的定义是从负极指向正极）

$$\mathscr{E}_i = \int_-^+ \vec{E}_k\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_-^+ (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} \tag{5}$$

电动势的方向：从电子“堆积”的地方（负极）指向另一极（正极）；或虚构一条闭合环路，比较运动前后环路磁通量的变化，利用楞次定律判断.

1.2 感生电动势

$$\mathscr{E}_i = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \tag{6}$$

感生电场为涡旋场$\vec{E}_k$，非保守场，即其线积分与路径有关.

$$\mathscr{E}_i = \oint \vec{E}_k\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \tag{7}$$

2 9-2

两平行导线平面内有一矩形线圈，导线中电流I随时间变化，求线圈感生电动势.

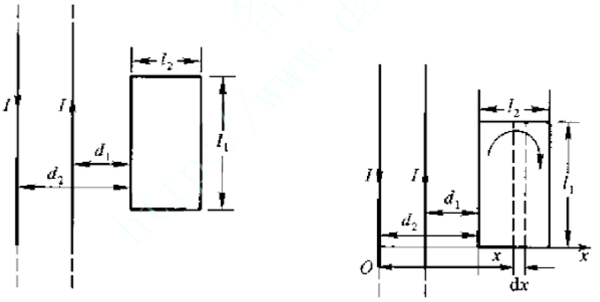

图 1: 9-2

2.1 Solution

取坐标轴Ox，两电流在x处的磁感应强度垂直纸面向里，大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x - d_2 + d_1)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tag{8}$$

若取回路顺时针为绕行正方向，则法向量也垂直纸面向里，通过面元$\mathrm{d}S = l_1 \mathrm{d}x$的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = B\mathrm{d}S = [\frac{\mu_0 I}{2\pi(x - d_2 + d_1)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x}] l_1 \mathrm{d}x \tag{9}$$

通过矩形线圈的磁通量为

$$\Phi = \int_{d_2}^{d_2+l_2} [\frac{\mu_0 I}{2\pi(x - d_2 + d_1)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x}] l_1 \mathrm{d}x \tag{10}$$

矩形线圈感生电动势为

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{t} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\ln\frac{d_1 + l_2}{d_1} - \ln\frac{d_2 + l_2}{d_2})\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{11}$$

当$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} > 0$，感生电动势方向为顺时针；否则为逆时针.

3 9-8

均匀磁场$B = 2T$垂直纸面向里. 两根相同金属棒PQ和MN，长度$L = 1\,\mathrm{m}$，电阻$R = 4\,\Omega$，分别以速度$v_1 = 4\,\mathrm{m/s}$和$v_2 = 2\,\mathrm{m/s}$向左运动，忽略导轨电阻. 求：

（1）两根棒中动生电动势大小和方向.

（2）电势差U_{PQ}和U_{MN}.

（3）两金属棒中点之间电势差.

3.1 Solution

（1）PQ棒

$$\mathscr{E}_{PQ} = v_1 BL = 8\,\mathrm{V} \tag{12}$$

由P指向Q.

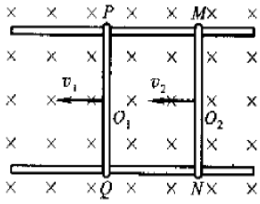

图 2: 9-8

MN棒

$$\mathscr{E}_{MN} = v_2 BL = 4\,\mathrm{V} \tag{13}$$

由M指向N.

（2）电流沿逆时针流动

$$I = \frac{\mathscr{E}_{PQ} - \mathscr{E}_{MN}}{2R} \tag{14}$$

从P点沿着逆时针走到Q点，电势变化为

$$V_P + \mathscr{E}_{PQ} - IR = V_Q \tag{15}$$

可得PQ间电势差

$$U_{PQ} = V_P - V_Q = IR - \mathscr{E}_{PQ} = -6\,\mathrm{V} \tag{16}$$

由于忽略导轨电阻，所以$V_P = V_M, V_Q = V_N$. 因此

$$U_{MN} = U_{PQ} = -6\,\mathrm{V} \tag{17}$$

（3）由于两金属棒的电阻和电动势在棒上均匀分布，所以中点间电势差为0.

4 9-9

$$\mathscr{E}_{max} = 2.96\,\mathrm{V}$$

$$I_{max} = 2.96 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}$$

5 9-13

均匀磁场$\vec{B}$被限定在半径为R的圆柱体内，B以$1 \times 10^{-2}\,\mathrm{T/s}$变化率减小. 若放电子在A、O、C各点处，电子获得的瞬时加速度. $r = 5.0\,\mathrm{cm}$.

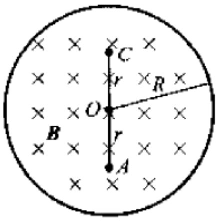

图 3: 9-13

5.1 Solution

以r为半径作顺时针圆形环路L

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{18}$$

感应电场大小

$$E = E_A = E_C = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = 2.5\times 10^{-4}\,\mathrm{V/m} \tag{19}$$

感应电场方向为顺时针. 电子在A处加速度方向向右，在C处加速度方向向左，大小都为

$$a = \frac{eE}{m_e} = 4.4\times 10^{7}\,\mathrm{m/s^2} \tag{20}$$

6 9-14

电子感应加速器. 电子沿半径为1.0 m的轨道运动，每转一圈动能增加700 eV，计算轨道内磁通量平均变化率.

6.1 Solution

法拉第电磁感应定律

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\overline{\Phi}}{\mathrm{d}t} \tag{21}$$

电子在涡旋电场中加速获得动能

$$\Delta E_k = -e\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = e\frac{\mathrm{d}\overline{\Phi}}{\mathrm{d}t} \tag{22}$$

因此磁通量平均变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\Phi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta E_k}{e} = 700\,\mathrm{Wb/s} \tag{23}$$