Wiktoria Byra
nr ind.: 250131

Obliczenia naukowe – Laboratorium 2

Zadanie 1.

Problem
Należało powtórzyć zadanie 5 z listy pierwszej, które polegało na obliczeniu iloczynu skalarnego wektorów X i Y, ze zmodyfikowanym wektorem X. Przed modyfikacją wektory wyglądały tak:

X = [2.718281828, −3.141592654, 1.414213562, 0.5772156649, 0.3010299957]
Y = [1486.2497, 878366.9879, −22.37492, 4773714.647, 0.000185049]

Natomiast po modyfikacji wektor X wyglądał tak:

X = [2.718281828, −3.141592654, 1.414213562, 0.577215664, 0.301029995]

Wyniki

	Przed modyfikacją wektora X		Po modyfikacji wektora X	
	Float32	Float64	Float32	Float64
(a)	-0.4999443	1.0251881368296672e-10	-0.4999443	-0.004296342739891585
(b)	-0.4543457	-1.5643308870494366e-10	-0.4543457	-0.004296342998713953
(c)	-0.5	0.0	-0.5	-0.004296342842280865
(d)	-0.5	0.0	-0.5	-0.004296342842280865

Wyniki dla arytmetyki Float32 pozostały bez zmian, natomiast dla arytmetyki Float64 zaszły znaczne zmiany.

Wnioski
Dla arytmetyki Float32 nie zaobserwowaliśmy zmian ze względu na jej niewielką precyzję. Podczas wykonywania obliczeń wyniki są kilkakrotnie zaokrąglane i dalekie rozwinięcie składowych wektora przestaje być istotne.
Dla arytmetyki Float64 zaszły duże zmiany w wynikach, ponieważ tutaj wyniki są dokładniejsze. Eksperyment pokazuje, że zadanie jest źle uwarunkowane – algorytmy zastosowane do obliczania iloczynu skalarnego są bardzo wrażliwe na niewielkie zmiany danych wejściowych.

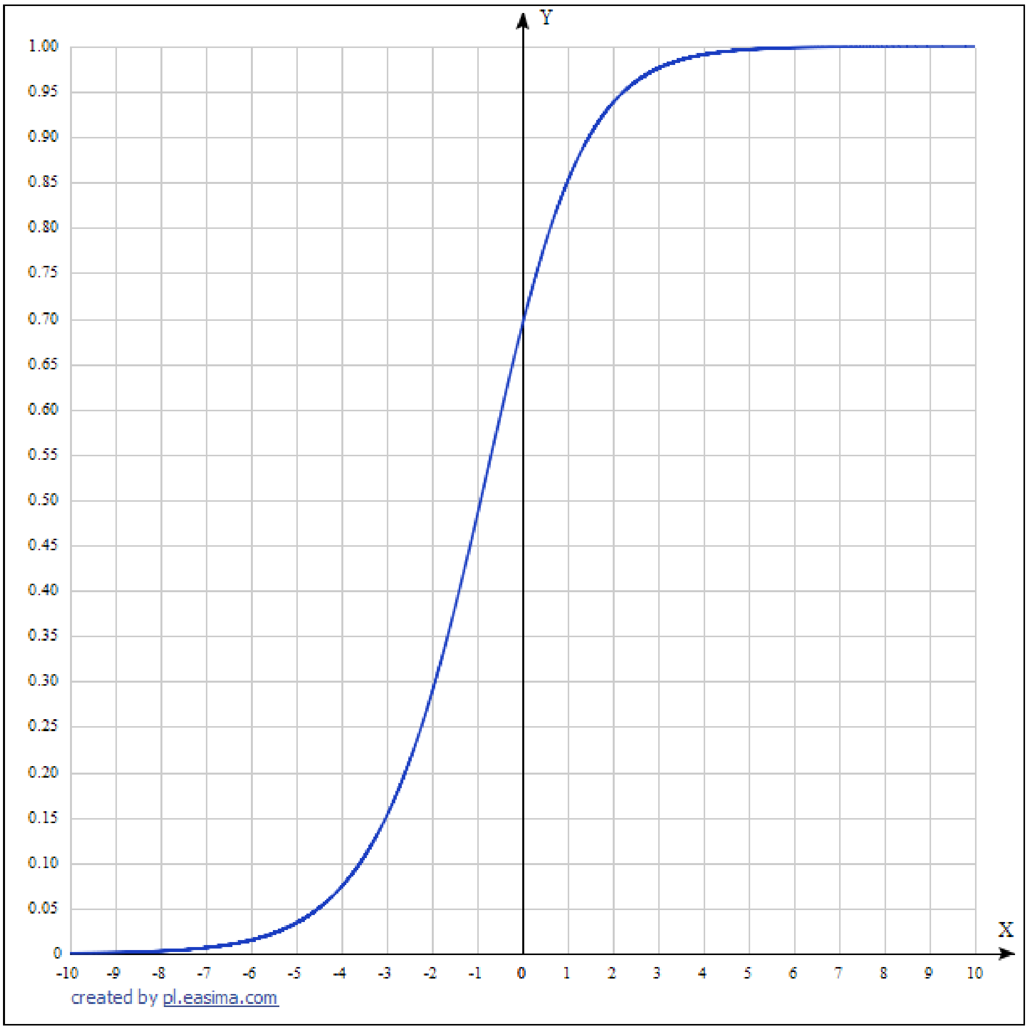
Zadanie 2

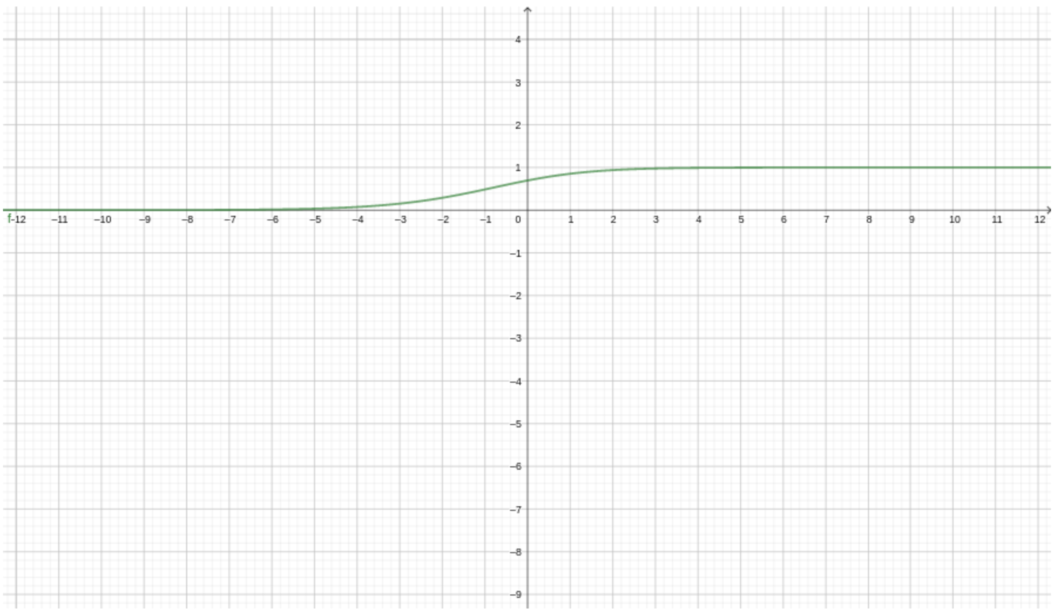
Problem
Należało obliczyć granice oraz narysować wykresy funkcji:

$$f(x) = e^{x}\ln(1+e^{-x})$$

Rozwiązanie
Do narysowania wykresów skorzystałam z programów GeoGebra i Easima, natomiast do obliczenia granicy z WolphramAlpha.

Wynik





$$\lim_{x\to\infty}(e^x \ln(1+e^{-x})) = 1$$

Na wykresach wyraźnie widać, że wartość funkcji rośnie od 0 do 1, górną granicę osiąga w okolicach argumentów większych od 2 – 5, w zależności od precyzji wykresu.

Wnioski

Prawdopodobnie wykresy miały wyjść niewiarygodnie, a zadanie okazać się źle uwarunkowane. Jednak programy, których użyłam do narysowania wykresów poradziły sobie z zadaniem i wykresy pokrywają się z obliczoną granicą.

Zadanie 3

Problem

Zadanie polegało na rozwiązywanie układu równań liniowych postaci Ax = b dla danej macierzy współczynników i wektora prawych stron. Układ miał być rozwiązywany na dwa sposoby – metodą eliminacji Gaussa oraz poprzez mnożenie odwróconej macierzy przez wektor b. Macierz była generowana jako macierz Hilberta lub losowa macierz z zadanym stopniem i wskaźnikiem uwarunkowania. Należało obliczyć błędy względne rachunków.

Wyniki

Macierz Hilberta

n	cond(A)	błąd dla metody eliminacji Gaussa	błąd dla metody z odwrotnością macierzy
2	19.281470067903967	5.661048867003676e-16	1.1240151438116956e-15
3	524.056777586062	8.118051169482656e-15	1.7907430486334138e-14
4	15513.738738929262	3.349632515431573e-13	2.268815452633455e-13
5	476607.2502421033	2.8186181571329407e-13	3.654697861370179e-12
6	1.495105864172721e7	2.344229118278564e-10	2.1526924552188031e-10
7	4.753673559839011e8	7.410208490784287e-9	1.1004084486340423e-8
8	1.525757550554701e10	3.736355234341925e-7	3.044718586687223e-7
9	4.931538348163301e11	1.0485260733621061e-5	5.958958489267314e-6
10	1.6025337742793652e13	0.0001902892061817039	0.00023929944568637062
11	5.219813567997335e14	0.004840612082131825	0.006720407723584139
12	1.6546640506383568e16	0.0515312199356675	0.06988898126789012
13	2.376786926717726e18	0.8773261344142039	1.5119571944035046
14	2.44167173619644e17	3.934776094572252	5.840670521642857
15	2.4022870188034854e17	35.372359774035836	31.13950131676681
16	7.301849062715712e17	5.345783450414308	4.99917180206163
17	4.7507771590947725e17	14.381303216697646	15.299960220214384
18	1.0621139181205069e18	5.454180864329791	6.942728611787584
19	4.215819618491786e18	7.007414463759739	16.272559569359128
20	2.365121119732083e18	11.373002753850809	16.695512931170512

Dla macierzy Hilberta błąd dla obydwu metod rośnie wprost proporcjonalnie do rozmiaru macierzy, wskaźnik uwarunkowania również.

Macierz losowa

n	cond(A)	błąd dla metody eliminacji Gaussa	błąd dla metody z odwrotnością macierzy
5	1	3.020133145511626e-16	2.164223099578636e-16
5	10	1.7901808365247238e-16	1.7901808365247238e-16
5	1000	3.280463877837818e-14	2.94386264916434e-14
5	10000000	2.4303418767626953e-10	2.1140019862759037e-10
5	1E+12	3.672316952735519e-5	3.544308940726008e-5
5	1E+16	0.17299771683933474	0.2238323287835401
10	1	3.925231146709438e-16	2.808666774861361e-16
10	10	2.6506211417561425e-16	2.016820280180126e-16
10	1000	1.883849250169192e-14	2.4113982756491734e-14
10	10000000	5.505200532287291e-10	5.770322322692682e-10
10	1E+12	7.236493186260621e-6	1.0806708507126211e-5
10	1E+16	0.23426044209928515	0.27468833731539893
20	1	4.775249788392735e-16	7.480629683664038e-16
20	10	4.385029596794321e-16	5.295426327528139e-16
20	1000	5.399155085589337e-15	5.239029406391377e-15
20	10000000	1.6358743252944276e-10	1.5846574482739454e-10
20	1E+12	4.518220049980577e-5	4.397018891594075e-5
20	1E+16	0.5339265225119711	0.49966305946784806

W przypadku losowej macierzy błąd również rośnie wraz z rozmiarem macierzy i wskaźnikiem uwarunkowania, jednak wzrost jest znacznie wolniejszy niż w przypadku macierzy Hilberta.

Wnioski
Zadanie jest źle uwarunkowane dla macierzy Hilberta. Dla macierzy losowej lepiej, jednak również pojawiają się błędy, które mają wpływ na wynik końcowy.

Zadanie 4

Problem
a) Należało znaleźć miejsca zerowe wielomianu Wilkinsona oraz sprawdzić obliczone pierwiastki na podstawie wzorów wielomianu w postaciach kanonicznej i iloczynowej.

b) Należało powtórzyć eksperyment ze zmienionym współczynnikiem -210 na $-210 - 2^{-23}$

Wyniki
a)

z_k	$\|p(z_k)\|$	$\|P(z_k)\|$	$\|z_k - k\|$
20.000189920314238	2.311844671266287e13	2.650966228992e12	0.00018992031423792355
18.99796473418517	1.2964458737429766e13	1.0620765437952e13	0.002035265814829046
18.009738396580197	7.058794626520325e12	9.017026510848e12	0.009738396580196707
16.970222485080672	3.5651728191253965e12	1.659691073536e12	0.029777514919327785
16.056101927823747	1.8781128291121646e12	1.251850420224e12	0.05610192782374668
14.916551086146429	7.967303178807264e11	4.80823066624e11	0.08344891385357123
14.086351318967639	4.076547986236503e11	4.34537168896e11	0.08635131896763859

12.93541042916589	1.4990719040208264e11	1.2088705024e11	0.06458957083411043
12.039704742162508	6.451634219748487e10	7.4861871104e10	0.039704742162507856
10.9832728819987	2.1980269186538696e10	2.4036507648e10	0.016727118001300667
10.005643046417331	7.426313007169948e9	9.707945984e9	0.005643046417331377
8.99863071666689	2.2046919189809866e9	1.867268096e9	0.0013692833331102605
8.000248650417012	6.00207667797364e8	5.56376064e8	0.0002486504170118309
6.999966502694603	1.5018733347070205e8	6.209536e7	3.349730539703444e-5
6.000003401569265	3.5585042314334564e7	4.620288e7	3.4015692653710516e-6
4.999999748927312	7.879714088717836e6	5.750784e6	2.510726879734193e-7
4.000000011019143	1.3833072502161057e6	1.507328e6	1.1019142931445458e-8
2.999999999866293	95115.67228623334	200704.0	1.337068233908667e-10
1.9999999999967497	20809.564361724893	18432.0	3.2502889268926083e-12
0.9999999999999977	283.6117017441233	2048.0	2.3314683517128287e-15

b)

z_k	$\lvert p(z_k)\rvert$	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert z_k - k\rvert$
20.84690345245782 + 0.0im	1.3743383420128914e18	3.6727005151232e13	0.8469034524578198
19.502430503477196 + 1.9403277005007826im	4.252340650053986e17	1.355502267392535e13	2.0043223284080343
19.502430503477196 - 1.9403277005007826im	4.252340650053986e17	1.355502267392535e13	2.454010799305781
16.730710830243574 + 2.812619231321066im	2.741952873803519e16	9.894702314190354e11	2.8254811267012934
16.730710830243574 - 2.812619231321066im	2.741952873803519e16	9.894702314190354e11	2.9059878282319693
13.992264932675088 + 2.5187943499538363im	9.544364571132446e14	2.4317682113798676e11	2.712905258809403
13.992264932675088 - 2.5187943499538363im	9.544364571132446e14	2.4317682113798676e11	2.518806226891201
11.793382133721813 + 1.652045904899795im	3.2918656097257832e13	2.150760644273041e10	2.045771821860372
11.793382133721813 - 1.652045904899795im	3.2918656097257832e13	2.150760644273041e10	1.6649163986703759
10.095261779402826 + 0.6421736837273344im	1.4773646791304238e12	7.060227311198332e9	1.1094765828449358
10.095261779402826 - 0.6421736837273344im	1.4773646791304238e12	7.060227311198332e9	0.6492009293638812
8.91828053511307 + 0.0im	1.33424621272823e11	1.90226432e9	0.08171946488693038
8.006972846450305 + 0.0im	1.6772570640975506e10	1.160429568e9	0.006972846450304715
6.999740236517096 + 0.0im	1.1648586682600515e9	1.5847424e8	0.00025976348290424056
6.000002465516928 + 0.0im	2.5792684756847363e7	2.6279936e7	2.4655169283960277e-6

5.000000238159716 + 0.0im	7.474446346608492e6	1.1640832e7	2.3815971594842722e-7
3.9999999854321384 + 0.0im	1.828801883426409e6	2.215936e6	1.4567861583714148e-8
3.0000000005321574 + 0.0im	378563.41430199996	598016.0	5.321574292338482e-10
1.9999999999888531 + 0.0im	71366.37112607821	71680.0	1.1146861211841497e-11
1.000000000000076 + 0.0im	9237.63828537745	9216.0	7.593925488436071e-14

Wartości wielomianów P(x) i p(x) dla znalezionych miejsc zerowych różnią się od zera. Błąd maleje wprost proporcjonalnie do wartości dla danego pierwiastka.
Po zmodyfikowaniu wielomianu funkcja obliczyła pierwiastki zespolone.

Wnioski
Błędy w podpunkcie a) wynikają z zastosowanej arytmetyki – Float64, która nie jest dość dokładna do naszych obliczeń. Natomiast podpunkt b) polegający na minimalnym zmodyfikowaniu jednego współczynnika spowodował otrzymanie pierwiastków zespolonych, co oznacza, że zadanie jest źle uwarunkowane.

Zadanie 5

Problem
1) W zadaniu został podany wzór rekurencyjny na model wzrostu populacji:

$$p_{n+1} := p_n + rp_n(1 - p_n), dla\ n = 0,1, \dots$$

Należało przeprowadzić po 40 iteracji wyrażenia dla danych początkowych danych $p_0 = 0.01, r = 3$.
Oraz 40 iteracji dla tych samych danych, ale z przerwaniem po 10 iteracji, zastosowaniem obcięcia po trzecim miejscu po przecinku i kontynuowaniem do 40.
Obliczenia miały zostać wykonane w arytmetyce Float32.

2) Należało jeszcze raz wykonać 40 iteracji pod rząd, ale w arytmetyce Float32 i Float64 i porównać otrzymane wyniki.

Wyniki
1)
z obcięciem po 10-tej iteracji: 1.093568
bez obcięcia: 0.25860548

2)
Float64: 0.011611238029748606
Float32: 0.25860548

Wyniki znacznie się różnią w zależności od wykonania obcięcia po 10-tej iteracji oraz od wyboru zastosowanej arytmetyki.

Wnioski
Jedno zaokrąglenie przy wykonywaniu obliczeń ma wpływ na kolejne wyniki, więc popełniony błąd nawarstwia się, następuje sprzężenie zwrotne.
Wybranie odpowiedniej arytmetyki jest bardzo ważne, ponieważ dokładność zapisu liczb przy

obliczeniach ma ogromy wpływ na rzetelność końcowego wyniku, jest to zjawisko czułej zależności od warunków początkowych.

Zadanie 6

Problem
W zadaniu został podany wzór rekurencyjny:

$$x_{n+1} := x_n^2 + c, dla\ n = 0, 1, \ldots$$

Należało wykonać po 40 iteracji wyrażenia dla podanych wartości stałej c i początkowego x_0 w arytmetyce Float64.

Wyniki
1) c = -2.0, x0 = 1.0, f = -1.0
X = [1.0, -1.0]

2) c = -2.0, x0 = 2.0, f = 2.0
X = [2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0]

3) c = -2.0, x0 = 1.99999999999999, f = -0.3289791230026702
[2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 1.99999, 1.99996, 1.99983, 1.99931, 1.99725, 1.98902, 1.95622, 1.82678, 1.33712, -0.21211, -1.95501, 1.82206, 1.31991, -0.257837, -1.93352, 1.7385, 1.02238, -0.954733, -1.08848, -0.815201, -1.33545, -0.216579, -1.95309, 1.81457, 1.29268, -0.328979]

4) c = -1.0, x0 = 1.0, f = -1.0
X = [1.0, 0.0, -1.0]

5) c = -1.0, x0 = -1.0, f = -1.0
X = [-1.0, 0.0, -1.0]

6) c = -1.0, x0 = 0.75, f = -1.0
X = [0.75, -0.4375, -0.808594, -0.346176, -0.880162, -0.225315, -0.949233, -0.0989562, -0.990208, -0.0194888, -0.99962, -0.00075948, -0.999999, -1.15362e-6, -1.0, -2.66165e-12, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0]

7) c = -1.0, x0 = 0.25, f = 0.0
X = [0.25, -0.9375, -0.121094, -0.985336, -0.0291124, -0.999152, -0.00169434, -0.999997, -5.74158e-6, -1.0, -6.59315e-11, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0, -1.0, 0.0]

Wykresy 1 i 2 są linią prostą, dla 4 i 5 wartości to na przemian -1 i 0, wartości wykresów 6 i 7 wahają się od -1 do 0, a 3 od -1 do 2.

Wnioski
Dla układów 1 i 2 funkcja zachowuje się stabilnie. W podpunkcie 3 widać jak niewielka zmiana sprawia, że otrzymujemy kompletnie nieuporządkowane wyniki. W podpunktach 4 i 5 wyniki można by być na wynik przy parzystej i przy nieparzystej iteracji, zależny od podnoszenia liczby -1 do

kolejnych potęg. Natomiast układy 6 i 7 stabilizują się po kilku iteracjach. W tym zadaniu również mamy do czynienia ze sprzężeniem zwrotnym.