Wiktoria Byra
nr ind.: 250131

Obliczenia naukowe – laboratorium 4

Zadanie 1

Problem

Napisać funkcję obliczającą ilorazy różnicowe.

Algorytm

Algorytm przyjmuje na wejściu wektor argumentów $x = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ oraz wektor wartości funkcji interpolowanej w argumentach $f = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]$. Ilorazy różnicowe opisują przyrost funkcji na danym przedziale. Są wyliczane z następującego wzoru:

$$f[x_0] = f(x_0)$$
$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$
$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_k - x_i}$$

Funkcja na początku kopiuje wartości z wektora f do fx. Następnie wylicza kolejne ilorazy różnicowe w dwóch pętlach. Pętle przechodzą od końca po wszystkich komórkach oprócz pierwszej, wszystkich oprócz dwóch pierwszych, …, na końcu po ostatniej komórce i oblicza iloraz dla danej komórki.

Pseudokod

$function\ ilorazyRoznicowe(x, f)$:
  $for\ i = 1: len(x)\ do$
    $for\ j = len(x): (i + 1) do$
      $fx[j] = fx[j] - fx[j - 1]/(x[j] - x[j - i]\,)$
  $return\ fx$

Zadanie 2

Problem

Napisać funkcję obliczającą wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcie $x = t$ za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera, w czasie $O(n)$.

Algorytm

Algorytm przyjmuje na wejściu wektor węzłów interpolacji x, wektor ilorazów różnicowych fx oraz punkt, w którym należy obliczyć wartość wielomianu t. Uogólniony algorytm Hornera prezentuje się następująco:

$$w_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$
$$w_k(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_k] + (x - x_k) * w_{k+1}, dla\ k = n-1, \dots, 0$$
$$N_n(x) = w_0(x)$$

gdzie $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ jest ilorazem różnicowym, a $x_0, x_1, \dots, x_n$ to węzły interpolacji.

Pseudokod

$function\ warNewton(x, fx, t)$:
  $nt = fx[len(x)]$
  $for\ i = (len(x) - 1){:}\,1\ do$
    $nt = fx[i] + (t - x[i]) * nt$
  $return\ nt$

Zadanie 3

Problem

Znając współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona $c_0 = f[x_0], c_1 = f[x_0, x_1], c_2 = f[x_0, x_1, x_2], \dots, c_n = f[x_0, \dots, x_n]$ (ilorazy różnicowe) oraz węzły $x_0, x_1, \dots, x_n$ napisać funkcję obliczającą, w czasie $O(n^2)$, współczynniki jego postaci naturalnej $a_0, \dots, a_n$ tzn. $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Algorytm

Współczynnik $a_n$stojący przy najwyższej potędze jest równy c_n. Kolejne współczynniki wyliczamy kolejno idąc od drugiej najwyższej potęgi w dół, przy każdym przejściu aktualizujemy kolejno wszystkie współczynniki oprócz ostatniego, wszystkie oprócz ostatnich dwóch, …, tylko pierwszy, wyliczając ich postacie naturalne.

Pseudokod

$function\ naturalna(x, fx)$:
  $a = fx$
  $for\ i = (len(x) - 1){:}\,1\ do$
    $a[i] = fx[i] - a[i+1] * x[i]$
    $for\ j = (i+1){:}\,(len - 1)\ do$
      $a[j] = a[j] - a[j+1] * x[i]$
  $return\ a$

Zadanie 4

Problem

Napisać funkcję, która zinterpoluje zadaną funkcję $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona. Następnie rysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję.

Rozwiązanie

Obliczamy wartości funkcji wejściowej oraz jej wielomianu interpolacyjnego z wykorzystaniem wcześniej napisanych funkcji *ilorazyRoznicowe* i *warNewton* w czterdziestu punktach rozłożonych w równej odległości na danym przedziale. Następnie rysujemy wykresy dla obliczonych wartości za pomocą pakietu Pyplot.

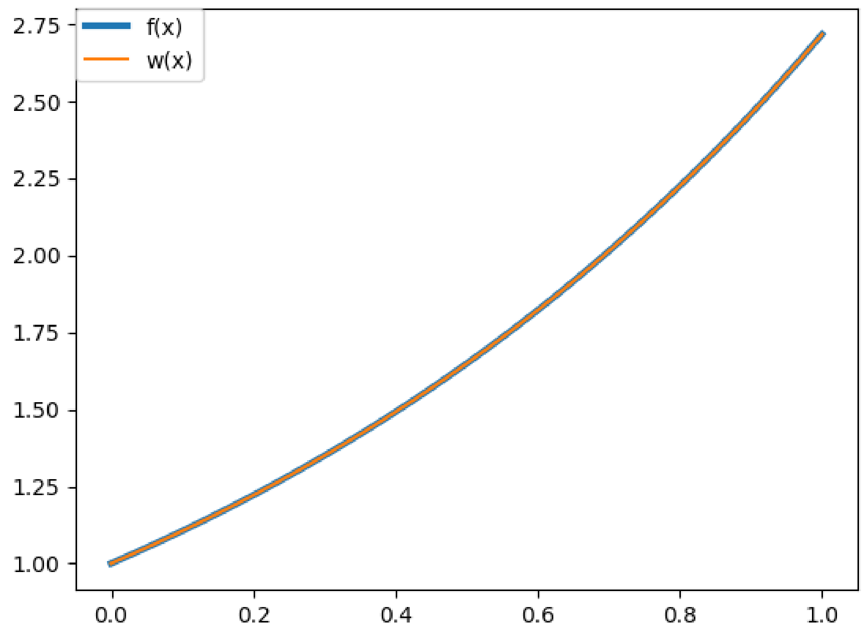
Zadanie 5

Problem

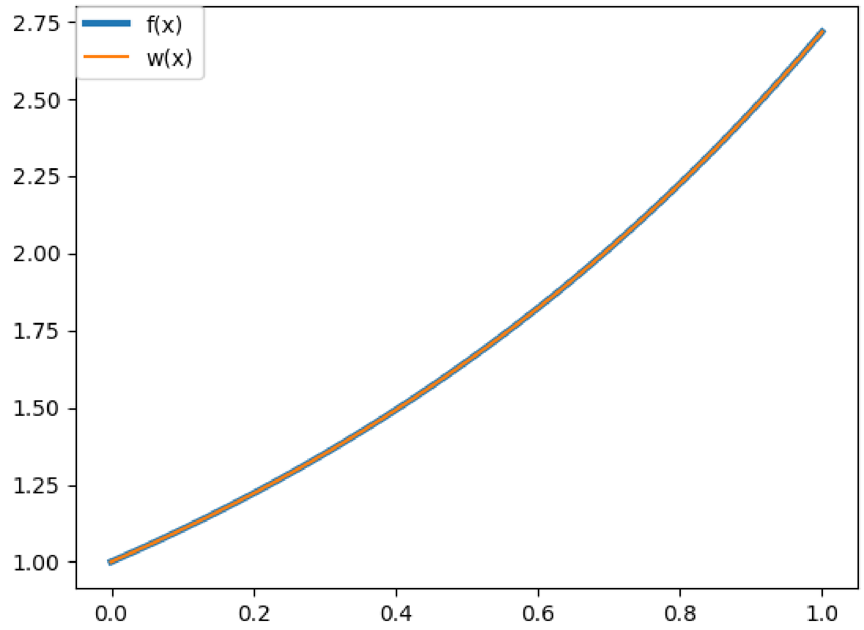
Przetestować funkcję *rysujNnfx* na następujących przykładach:
a) $e^x, [0,1], n = 5, 10, 15$
b) $x^2 \sin x, [-1,1], n = 5, 10, 15$

Wyniki

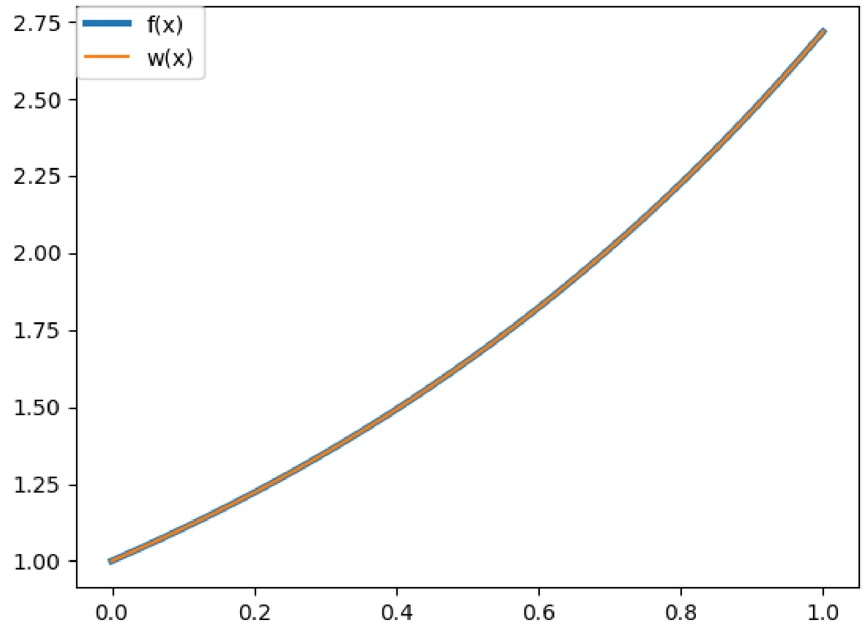
a) $e^x, [0,1], n = 5$



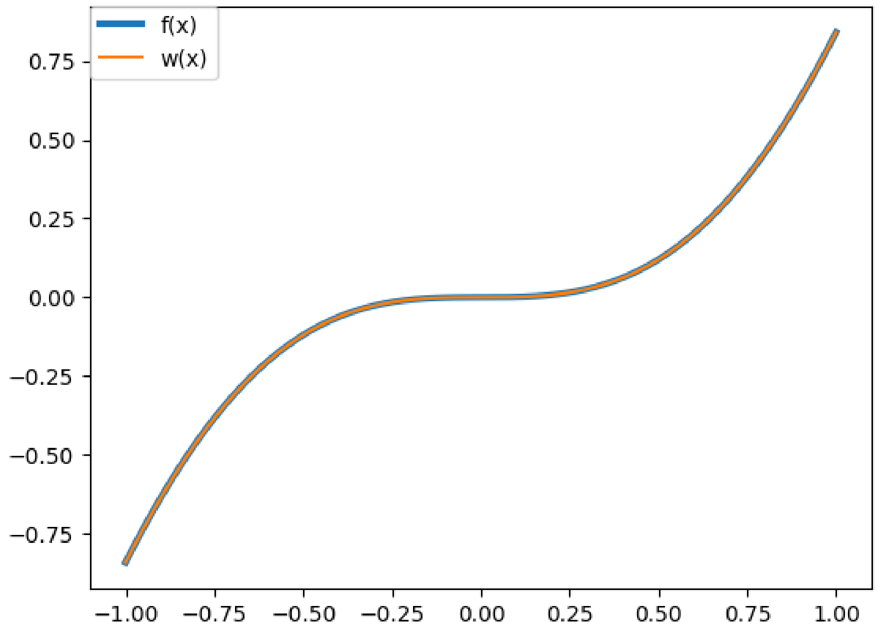
$e^x, [0,1], n = 10$



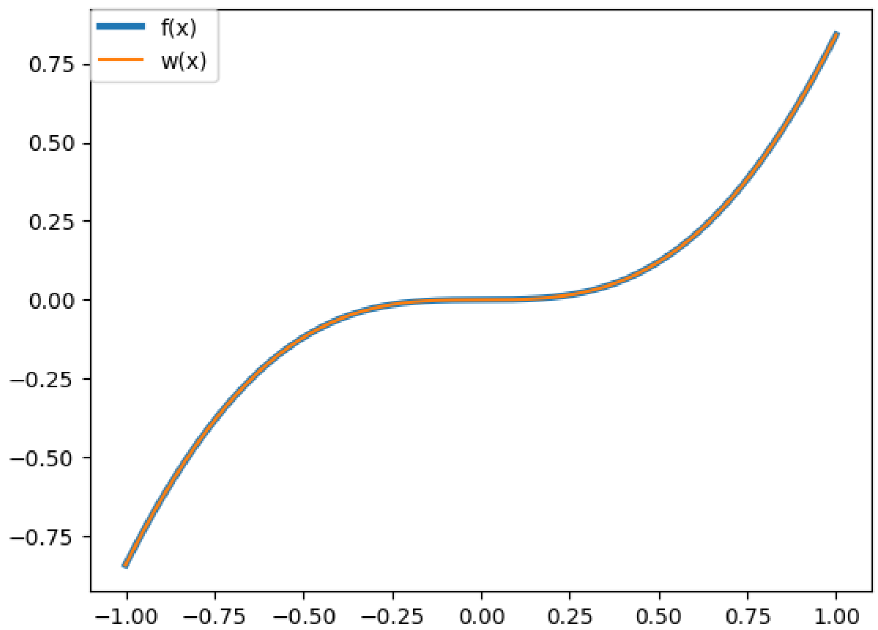
$e^x, [0,1], n = 15$



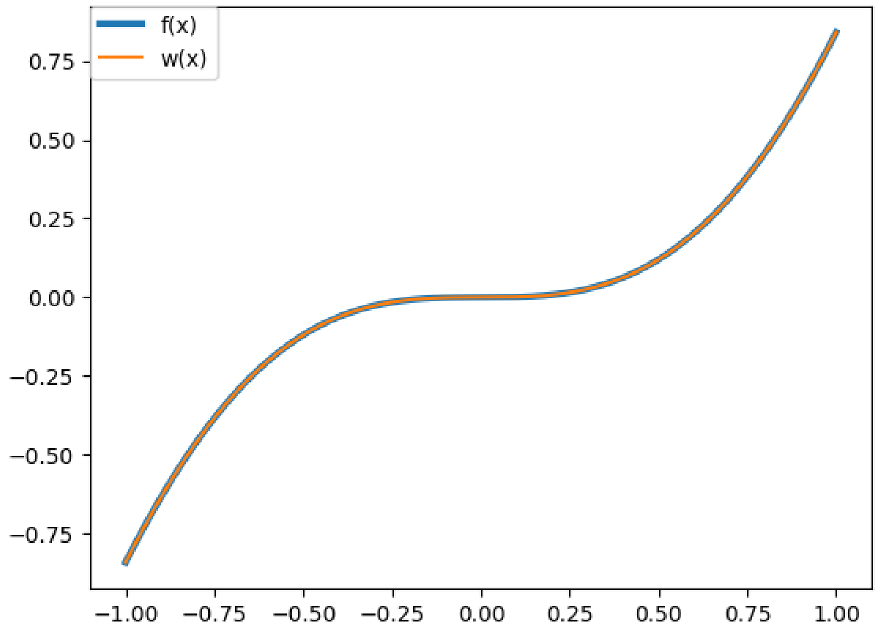
b) $x^2 \sin x, [-1,1], n = 5,$



$x^2 \sin x, [-1,1], n = 10$



$x^2 \sin x$, $[-1,1], n = 15$



Obserwacje

Wykresy pokrywają się nawet dla wielomianu o niskim stopniu.

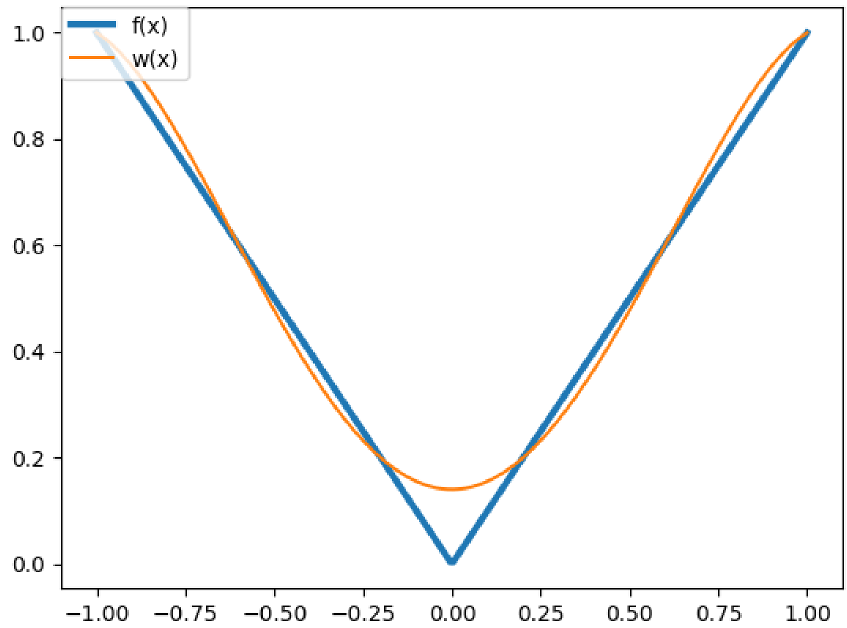
Zadanie 6

Problem

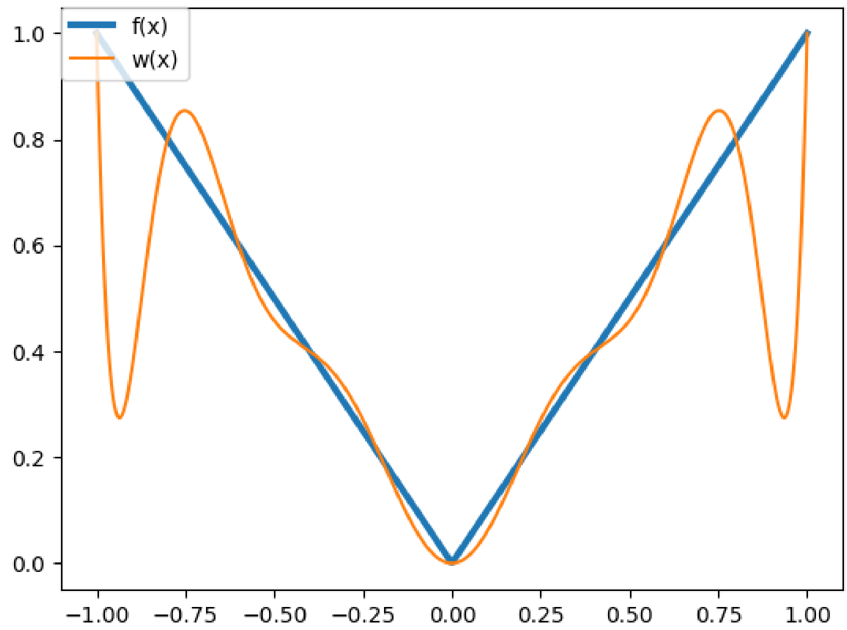
Przetestować funkcję *rysujNnfx* na następujących przykładach:
a) $|x|, [0,1], n = 5, 10, 15$
b) $\frac{1}{1+x^2}, [-1,1], n = 5, 10, 15$

Wyniki

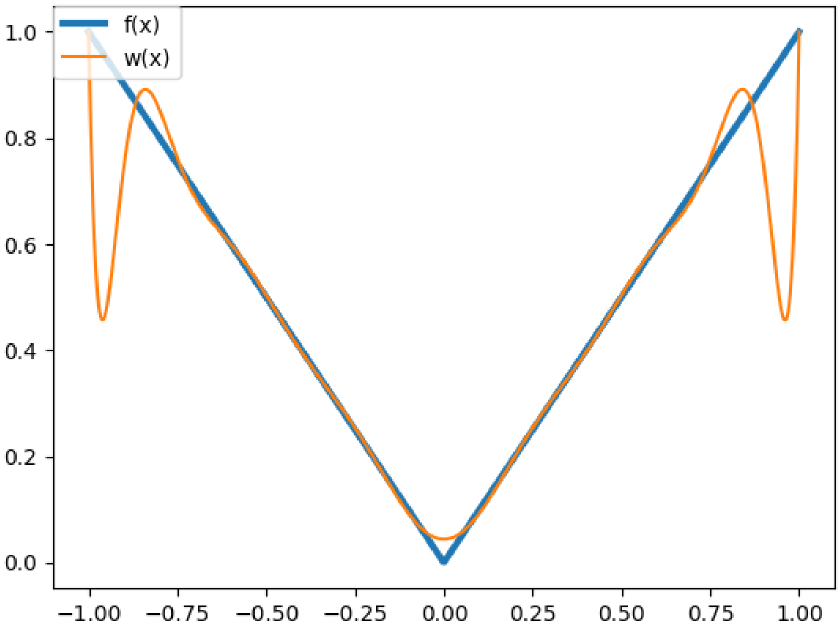
a) $|x|, [0,1], n = 5$



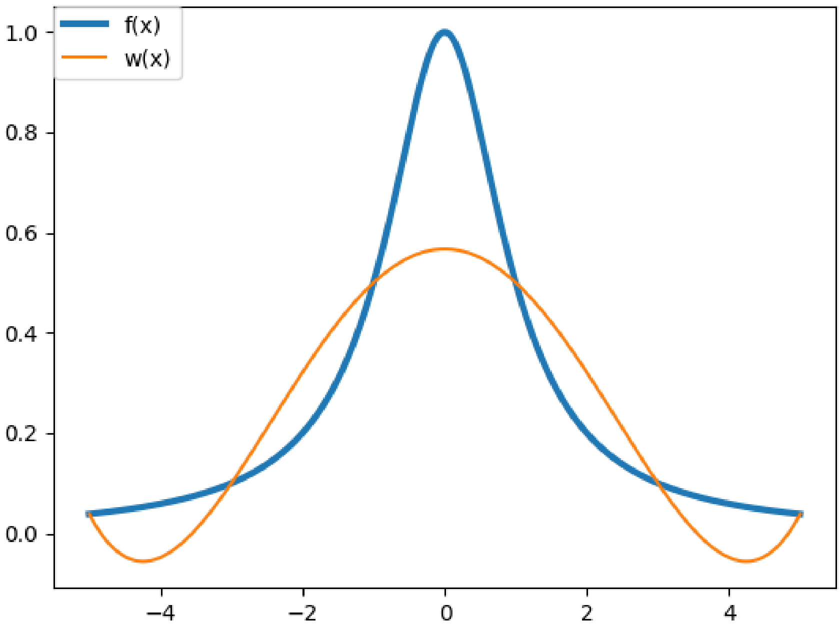
$|x|, [0,1], n = 10$



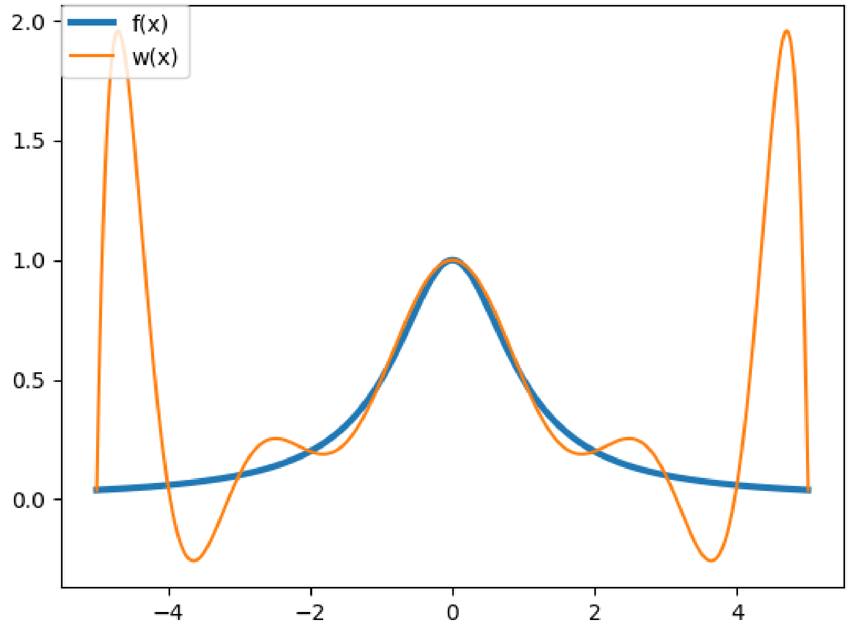
$|x|, [0,1], n = 15$



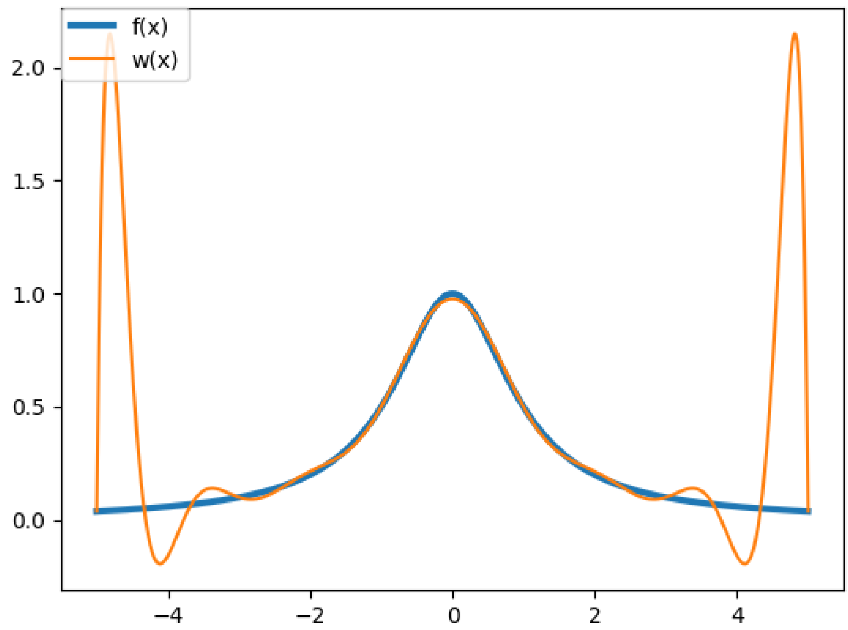
b) $\frac{1}{1+x^2}, [-1,1], n = 5$



$$\frac{1}{1+x^2}, [-1,1], n = 10$$



$$\frac{1}{1+x^2}, [-1,1], n = 15$$



Obserwacje

Wykres wielomianu odbiega od wykresu funkcji. Im wyższy stopień wielomianu tym gorsza interpolacja funkcji, szczególnie na końcach przedziałów - jest to zjawisko Runge'go. Takie zachowanie się wielomianu interpolującego jest zjawiskiem typowym dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów. Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji.

Wnioski

Skuteczność wielomianu interpolacyjnego zależy od funkcji, którą interpolujemy. Niektóre funkcje wymagają specyficznego rozmieszczenia węzłów.