

# **402: Quantelung von Energie**

Leonie Dessau & Lena Beckmann

2.-3.11.2025

# 1 Einleitung

Die Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung (Licht) und Materie findet grundsätzlich in quantisierten Einheiten und nicht kontinuierlich statt. Dieses Phänomen wurde Anfang des 20. Jahrhunderts von EINSTEIN und PLANCK theoretisch untersucht und ist heute eine wichtige Grundlage der modernen Physik [6, S. 62–65]. In dem durchgeföhrten Versuch wird dieses quantisierte Verhalten an den Beispielen des äußeren photoelektrischen Effekt und dem Emissionsspektrum von Wasserstoffatomen untersucht. Es werden der Wert des Planckschen Wirkungsquantums sowie die Wellenlängen der optisch sichtbaren Spektrallinien in der Balmer-Serie von Wasserstoff als Maß für die diskreten Energien des Atomanregungsstufen bestimmt. Außerdem wird die Größe der Aufspaltung der Energieniveaus zwischen Wasserstoff und Deuterium als Wasserstoffisotop anhand der relativen Winkelauflösung der Spektrallinien der beiden Isotope untersucht.

Im ersten Versuchsteil wurde mithilfe der Gegenfeldmethode und einer Photozelle die Größe des Proportionalitätsfaktors des Planckschen Wirkungsquantums  $h$  in der Energie-Wellenlängen-Beziehung für Lichtquanten (Photonen) bestimmt, für die mit  $\lambda$  als Wellenlänge und  $\nu$  als Frequenz, gilt:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \quad (1.1)$$

Für die verwendete Platin-Rhodium (Pt-Rh)-Anode wurde zudem die Austrittsarbeit der Elektronen aus den beobachteten Strömen der Photozelle berechnet.

Im zweiten Versuchsteil wurde das optisch beobachtbare Spektrum der Emissionslinien einer Wasserstoff-Deuterium-Dampflampe mithilfe eines Reflexionsgitter wellenlängenabhängig in verschiedene Winkel aufgespalten und mit dem Auge mithilfe von Linsen sowie einer CCD-Kamera vermessen, sodass die den Wellenlängen zugeordneten Energien bestimmt werden können. Das verwendete Gitter wurde dafür zudem mithilfe des bekannten Spektrums einer Quecksilber (Hg)-Lampe ausgemessen.

## 2 Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums

### 2.1 Theoretische Überlegungen

Wird monochromatisches Licht mit Frequenz  $\nu$  auf eine Metallplatte gestrahlt, wechselwirken die Photonen mit den (Leitungs-)Elektronen des Metalls in dem sie ihre Energie  $E = h\nu$  komplett an ein Elektron übertragen. Übersteigt diese Energie die Austrittsarbeit, die für einen Austritt aus dem Material aufgebracht werden muss, können die Elektronen aus dem Material austreten und der Elektronenstrom kann als Photostrom  $I$  gemessen werden. Ist die Energie der einzelnen Photonen kleiner als die Austrittsarbeit, welche bei Metallen durch die Fermienergie  $E_F$  der Leitungselektronen bestimmt wird[8, S. 110], d.h. ist die Lichtfrequenz zu niedrig, kann kein Photostrom gemessen werden, unabhängig von der Lichtintensität [6, S. 63]. Dies ist der sogenannte äußere photoelektrische Effekt (Photoeffekt). Im Folgenden wird der Photoeffekt in einer Photozelle aus elektrisch verbundener Kathode, die mit Licht bestrahlt wird mit Austrittsarbeit  $W_K$ , und Anode mit Austrittsarbeit  $W_A$ , an der der Photostrom gemessen wird, untersucht. Es wird zudem eine Gegenspannung angelegt, die der Bewegung der Elektronen entgegenwirkt, mit positiven Pol an der Anode. Bei der Gegenspannung  $U_0$  (Grenzspannung), bei der gerade kein Photostrom mehr gemessen wird, d.h. keine Elektronen die Anode mehr erreichen, ergibt sich die Energiebilanz der Photoelektronen wie folgt: Wenn Kathode und Anode verbunden werden, entsteht aufgrund der nun gleich großen Fermienergien  $E_{FK} = E_{FA}$  der Leitungselektronen der beiden Materialien ein Potentialunterschied, d.h. eine Kontaktspannung, welche ein Photoelektron überwinden muss:

$$eU_{KA} = \Delta W_{\text{Austritt}} = W_A - W_K \quad (2.1)$$

Bei zusätzlich angelegter Grenzspannung  $U_0$  muss auch diese vom Elektron noch überwunden werden. Die Bilanz ist für den Fall der angelegten Grenzspannung und unterschiedlich großen Austrittsarbeiten von Kathode und Anode (aufgrund verschiedener Materialien), in Abbildung 2.1 graphisch dargestellt. Zusammen ergibt sich dann als Energiebilanz für den Fall der Grenzspannung:

$$\begin{aligned} E = h\nu &= W_K + eU_{KA} + eU_0 & | & eU_{KA} = W_A - W_K \\ \Rightarrow h\nu &= W_A + eU_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

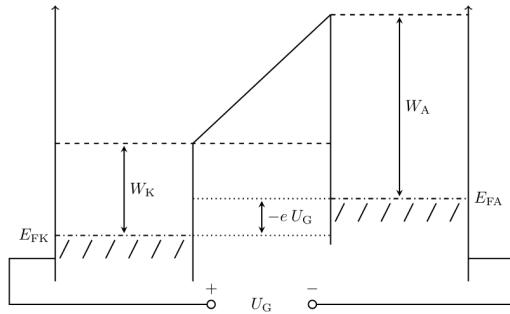


Abbildung 2.1: Energiediagramm der Photozelle bei angelegter Gegenspannung  $U_0$  und Kontaktspannung  $eU_{KA}$ . Grafik entnommen aus [13, S. 11].

Es können also nur Austrittsarbeit der Anode  $W_A$  und der Wert von  $h$  aus dem funktionellen Zusammenhang zwischen Frequenz  $\nu$  und Grenzspannung  $U_0$  bestimmt werden, nicht die Austrittsarbeit der Kathode, deren Term sich in der Energiebilanz kürzt.

### 2.1.1 Experimenteller Aufbau & Durchführung

Für die Messung des Photostroms wurde nach Justageanleitung in [13, S. 3–5] auf einer optischen Bank als Lichtquelle eine Quecksilberdampflampe (Hg-Lampe) sowie eine Irisblende zur Variation der Lichtintensität aufgebaut sowie eine dahinter folgende Sammellinse mit Brennweite  $f = 100$  mm. Im Abstand  $f$  wurde die Photozelle platziert, die hier aus einer Kalium (K)-Kathode und Pt-Rh-Anode besteht (letzteres als Ringanode, damit möglichst kein Quellenlicht auf die Anode gelangt und dort ebenfalls Elektronen auslösen könnte), sodass das Licht scharf als Lichtfleck mit Durchmesser (5 – 10) mm auf die Kathode fiel. Zudem wurde noch ein Filterrad mit einstellbarer Durchlasswellenlänge vor der Photozelle platziert. Als Durchlasswellenlängen des Filterrads waren wählbar:  $\lambda \in \{365, 405, 436, 546, 578\}$  nm. Um Streulicht zu vermeiden, wurde noch ein Rohr vor die quellenseitige Öffnung der Photozelle und mit kleinem Abstand zum Filterrad aufgesetzt.

Es wurde der Anodenanschluss mit dem Netzgerät, welches Spannung der Stärke (0 – 12) V liefert, verbunden, sowie der Kathodenanschluss mit einem Messverstärker, welcher anschließend mit dem anderen Anschluss des Netzgeräts verbunden wurde. Der Messverstärker wurde im Experiment auf die Stufe  $10^{-10} \text{ A} \rightarrow 1 \text{ V}$  gestellt. Außerdem wurden zwei Digital-Multimeter zur Messung des Gegenstroms  $U_G$  und Photostroms  $I$ , letzteren mittels der gemessenen Spannung nach dem Messverstärker  $U_I$ , wie auf der Aufbauskizze in Abbildung 2.2 dargestellt, angeschlossen.

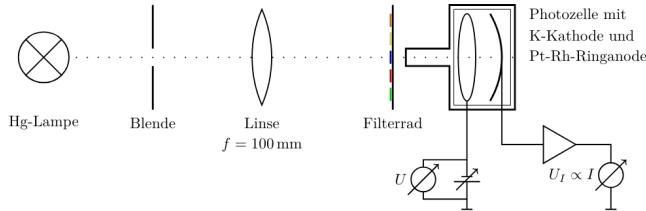


Abbildung 2.2: Aufbau zur Messung des Photostroms mit (von links nach rechts) Lichtquelle, Irisblende, Linse, Filterrad, Photozelle und Messaufbau. Grafik entnommen aus [13, S. 3]

Zuletzt wurde noch eine Spannungsteilerschaltung zwischen die 12 V-Spannungsquelle und die Anode eingesetzt. Dafür wurden die beiden Widerstände  $100 \Omega$  und  $330 \Omega$  genutzt, wobei über den kleineren Widerstand die Spannung für die nachfolgende Schaltung abgegriffen wurde. Durch die so verringerte maximale Gegenspannung konnte der gesamte Bereich, in dem ein Photostrom floss, präziser vermessen werden. Es ergab sich so für den Aufbau eine theoretische maximale Gegenspannung von  $U_{\max,\text{th}} = 12 \text{ V} \cdot \frac{100 \Omega}{430 \Omega} \approx 2,80 \text{ V}$ . Es wurde mit dem Digital-Multimeter eine damit übereinstimmende tatsächlich verfügbare Maximalspannung von  $U_{\max} = (-2,8 \pm 0,1) \text{ V}$  gemessen. Das Vorzeichen ergibt sich hier lediglich aus der Polung der Schaltung. Bei dieser höchsten Spannung konnte selbst bei dem energiereichsten Licht, also bei der kürzesten Durchlasswellenlänge  $\lambda = 365 \text{ nm}$ , kein Photostrom mehr beobachtet werden, sondern nur noch ein sehr geringer Anodenstrom  $I_0$  von Elektronen, die sich aus der Anode lösen und sich zur Kathode bewegen, und so einen positiven Strom darstellten.

Für jede der Durchlasswellenlängen wurde die folgende Messung jeweils zweimal durchgeführt: Eine Wellenlänge des Filterrads wurde eingestellt, die Gegenspannung auf den maximalen Wert  $U_{\max}$  gestellt und die Größe des Anodenstroms  $I_0$ , bzw. die wirkende Dunkelspannung  $U_{I,0}$  bestimmt. Anschließend wurde die Kennlinie der Photozelle vollständig vermessen, indem die Gegenspannung über den gesamten Bereich  $U_G = (0 - (2,8 \pm 0,1) \text{ V}$  variiert und die Spannung  $U_I$  an der Anode gemessen wurde. Durch die doppelte Messung jeder Kennlinie sollten Einflüsse von möglichen Intensitätsschwankungen der Hg-Lampe minimiert werden, welche den maximalen Photostrom bei kleiner Gegenspannung durch eine Variation der vorhandenen Lichtquanten zeitlich beeinflusst hätten. Für die Wellenlänge  $\lambda = 365 \text{ nm}$  wurde anschließend die Blendenöffnung weiter geöffnet und so die Intensität des Lichts erhöht, sodass bei ausgestellter Gegenspannung ( $U_G = 0 \text{ V}$ ) eine um etwa Faktor 1,5 größere Spannung an der Anode gemessen werden konnte. Die Kennlinie der Photozelle wurde anschließend für diese Wellenlänge ein drittes Mal gemessen.

## 2.2 Auswertung

Aus den gemessenen Kennlinien werden nun Werte für das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  und die Anoden-Austrittsarbeit  $W_A$  bestimmt.

Aus der Messung des Photostroms  $I$ , korrigiert um einem möglicherweise vorhandenen Anodenstrom  $I_0$ , der von einem minimalen Wert  $U_0$  invers quadratisch mit dem Verlauf der angelegten Gegenspannung  $U_G$  bis zu einem Sättigungsstrom  $I_S$  steigt, kann durch Interpo-

lation der gemessenen Werte als x-Achsenabschnitt einer Darstellung von  $\sqrt{(I - I_0)}(U_G)$  die Grenzspannung für Licht einer festen Wellenlänge bestimmt werden.

Die gemessenen Kennlinien für alle untersuchten Lichtfrequenzen sind in den Abbildungen 2.3a - 2.7b dargestellt.

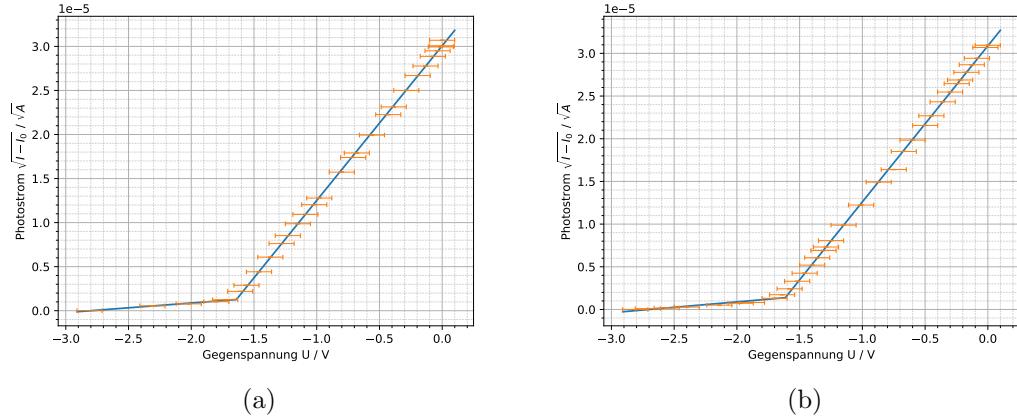


Abbildung 2.3: a) 1. Messung Kennlinie für 365 nm und b) 2. Messung Kennlinie für 365 nm

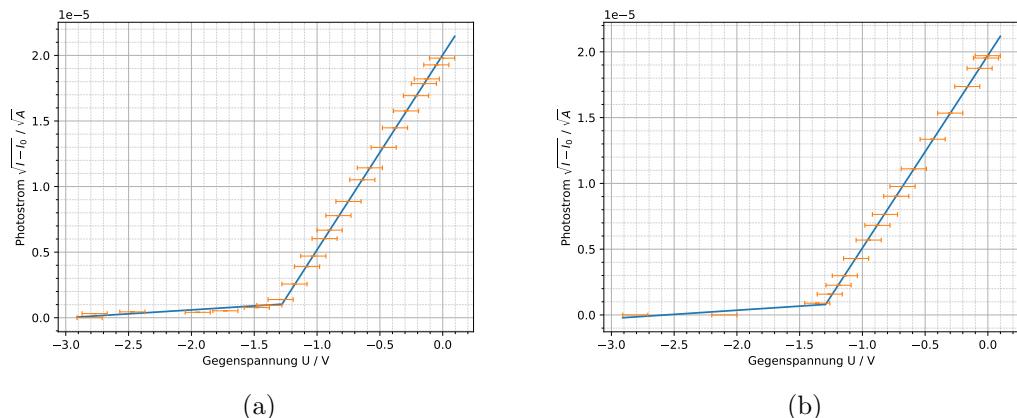


Abbildung 2.4: a) 1. Messung Kennlinie für 405 nm und b) 2. Messung Kennlinie für 405 nm

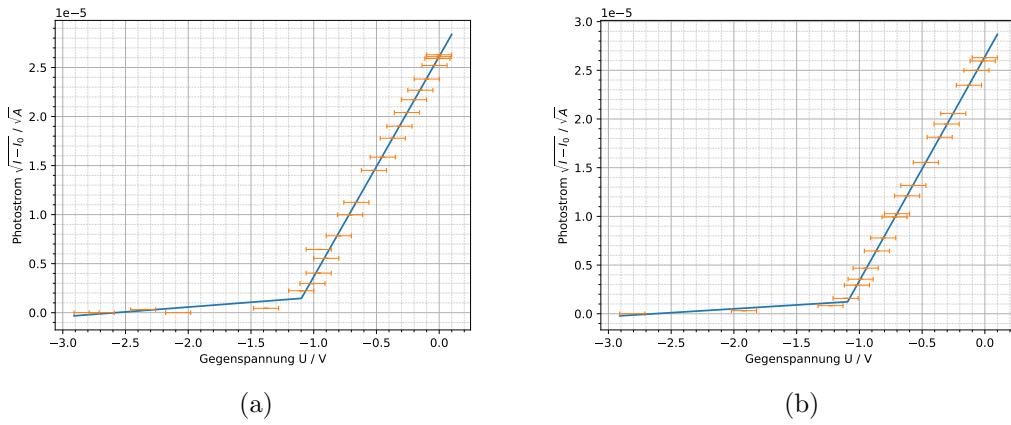


Abbildung 2.5: a) 1. Messung Kennlinie für 436 nm und b) 2. Messung Kennlinie für 436 nm

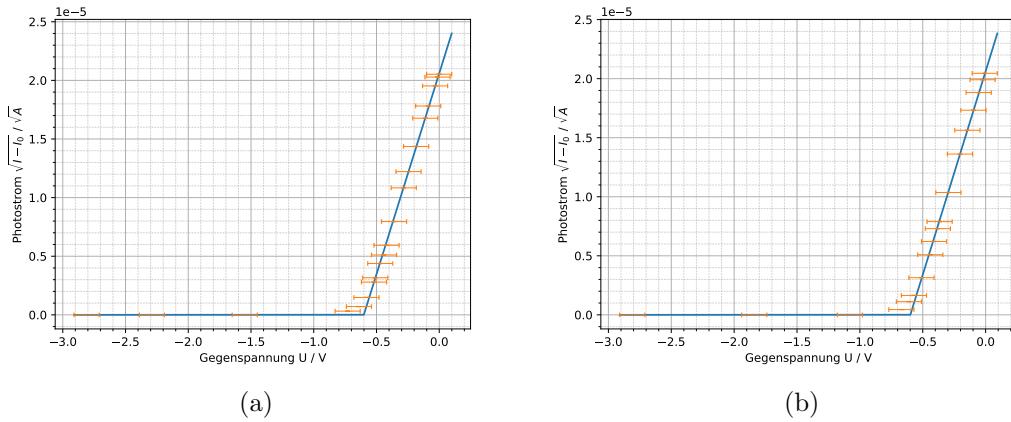


Abbildung 2.6: a) 1. Messung Kennlinie für 546 nm und b) 2. Messung Kennlinie für 546 nm

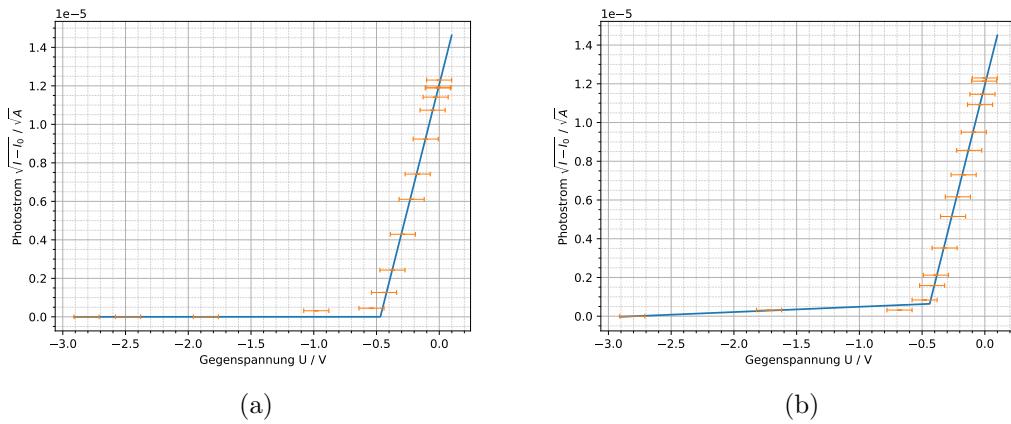


Abbildung 2.7: a) 1. Messung Kennlinie für 578 nm und b) 2. Messung Kennlinie für 578 nm

Als Fehler der gemessenen Spannungen wurde hierbei die Ungenauigkeit des Multimeters mit 5% des jeweiligen Messwerts angenommen und daraus mit Gaußsche Fehlerfortpflanzung der Fehler des Photostroms  $I$  berechnet.

Um die Grenzspannung  $U_0$  jeder der Kennlinien zu bestimmen, wurde eine stückweise lineare Funktion der Form

$$\sqrt{(I - I_0)}(\nu) = \begin{cases} aU + b & , U > k \\ cU + d & , U < k \end{cases} \quad (2.3)$$

an die Datenpunkte angepasst.  $k$  entspricht hier der x-Koordinate des Knickpunkts. Für die Bestimmung der Grenzspannung  $U_0$  wurde für der Teil der Funktion  $U > k$  als eigenständige lineare Funktion betrachtet und der x-Achsenabschnitt bestimmt, bei dem gilt:  $\sqrt{(I - I_0)}(U_0) = aU_0 = 0$ . Es wurden so die folgenden Grenzspannungen  $U_0$  für die verschiedenen Wellenlängenfilter bestimmt:

$\lambda / \text{nm}$	Messung	$U_0 / \text{V}$
365	1	$-1.71 \pm 0.04$
	2	$-1.69 \pm 0.03$
405	1	$-1.348 \pm 0.015$
	2	$-1.35 \pm 0.02$
436	1	$-1.16 \pm 0.04$
	2	$-1.147 \pm 0.012$
546	1	$-0.60 \pm 0.02$
	2	$-0.60 \pm 0.02$
578	1	$-0.47 \pm 0.04$
	2	$-0.464 \pm 0.015$

Tabelle 2.1: Bestimmte Grenzspannungen  $U_0$  aus den aufgenommenen Kennlinien bei den fünf untersuchten Wellenlängen.

Die Grenzspannungen, die für die beiden Messungen bei einer Durchlasswellenlänge separat bestimmt wurden, stimmen im Rahmen ihrer Fehler in einer  $1\sigma$ -Umgebung jeweils miteinander überein.

In der Energiebilanz für Photoelektronen bei der Grenzspannung gilt <sup>1</sup> der folgende lineare Zusammenhang:

$$U_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_A}{e} \quad (2.4)$$

Über der Auftragung der Grenzspannungen  $U_0$ , die aus den Messungen der einzelnen Wellenlängen bestimmt wurden, gegen die Frequenzen  $\nu$  können aus der Geradenanpassung

$$U_0 = a\nu + b \quad (2.5)$$

der Wert des Planckschen Wirkungsquantums als  $h = \frac{a}{e}$  sowie die Austrittsarbeit der verwendeten Pt-Rh-Anode als  $W_A = -b \cdot e$  berechnet werden, siehe Abbildung 2.8. Bei der Berechnung der Regressionsgeraden durch die Datenpunkte wurde als Fehler der Wellenlängen (bzw. über

<sup>1</sup>mit  $e = 1,602\,177 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  als Elementarladung[9]

Gaußsche Fehlerfortpflanzung dann für den Fehler der Frequenzen) jeweils 0,5% des angegebenen Werts des jeweiligen Interferenzfilter angenommen, da dieses als Bandpassfilter realistisch nicht monochromatisch ist.

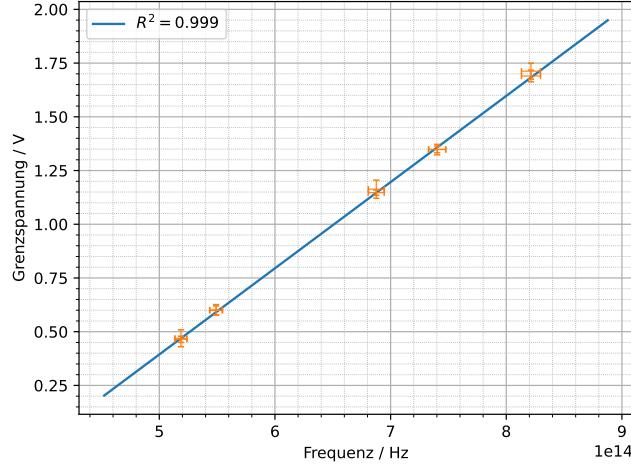


Abbildung 2.8: Bestimmte Grenzspannungen  $U_0$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $v = \frac{c}{\lambda}$  aufgetragen, zusammen mit linearer Regression nach Gl. 2.5. Der lineare Zusammenhang wird gut sichtbar, wobei die Anpassungsgüte mit Bestimmtheitsmaß  $R^2 = 0,999$  ( $0 \leq R^2 \leq 1$ ) sehr gut ist.

Aus der Anpassung ergeben sich die Werte  $h = (6,425 \pm 0,005) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  und  $W_A = (2,58 \pm 0,03) \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , also in Elektronenvolt  $\frac{W_A}{e} = 1,611 \text{ eV}$ .

Der exakt definierte Literaturwert für das Plancksche Wirkungsquantum beträgt  $h_{\text{Lit}} = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ [9], der bestimmte Wert weicht vom Literaturwert um  $\frac{h_{\text{Lit}} - h}{h_{\text{Lit}}} = 3,0\%$  ab, mit Einbezug der  $1\sigma$ -Umgebung um 2,3%. Die beiden Werte stimmen also nicht überein, weichen aber nur in geringem Maße voneinander ab, was in Anbetracht der sehr kleinen Größenordnung von  $\mathcal{O}(10^{-34} \text{ Js})$  für die Validität der genutzten Methode der Photostrommessung zur Bestimmung von  $h$  spricht. Die Plausibilität der Austrittsarbeiten der genutzten Anode ist nur schwer überprüfbar, da ihr Wert stark von den Verhältnissen von Platin und Rhodium im spezifisch genutzten Bauteil abhängt. Typische Austrittsarbeiten liegen im Bereich von 2,2 eV to 6,4 eV [7, S. 494],[15], [14]. Die gemessene Austrittsarbeits ist also kleiner als verfügbare Vergleichswerte. Als Gründe für den Unterschied können einseitig vermutet werden, dass es Verunreinigungen in der Metallstruktur der Anode oder eine komplexere Oberflächenstruktur, als im einfachen Modell einer Metallplatte angenommen wird. Außerdem kann es sein, dass das Kontaktpotential oder der Anodenstrom nicht korrekt in der Energiebilanz kompensiert wurden, sowie die Aufweichung der Fermikante bei Temperaturen über dem Nullpunkt, die hier deutlich erhöht waren. Aufgrund höherer Temperaturen können Elektronen auch höhere Energien haben als die Fermienergie  $E_F$ , was die Energiebilanz verändert. Da der Wert für  $h$  sehr nah am Literaturwert ist, kann die Messung insgesamt als erfolgreich angesehen werden, eine höhere Genauigkeit ließe sich über eine größere Anzahl an Messreihen zu den gleichen oder weiteren Durchlasswellenlängen erreichen, da so die statistischen Fehler der Messungen sinken.

Zuletzt wird noch die Messung der Kennlinie bei einer höheren Lichtintensität untersucht. Hier-

bei werden für eine der beiden Messungen bei geringerer Intensität für  $\lambda = 365$  nm (da die beiden Messungen in der bestimmten Grenzspannung  $U_0$  im Rahmen ihrer Fehler übereinstimmen, ist egal, welche der beiden Messungen gewählt wird) und für die Messung bei höherer Intensität jeweils die Werte von Gegenspannung  $U_G$  und um  $I_0$  korrigierten Photostrom  $\sqrt{I - I_0}$  gegeneinander aufgetragen, siehe Abbildung 2.9.

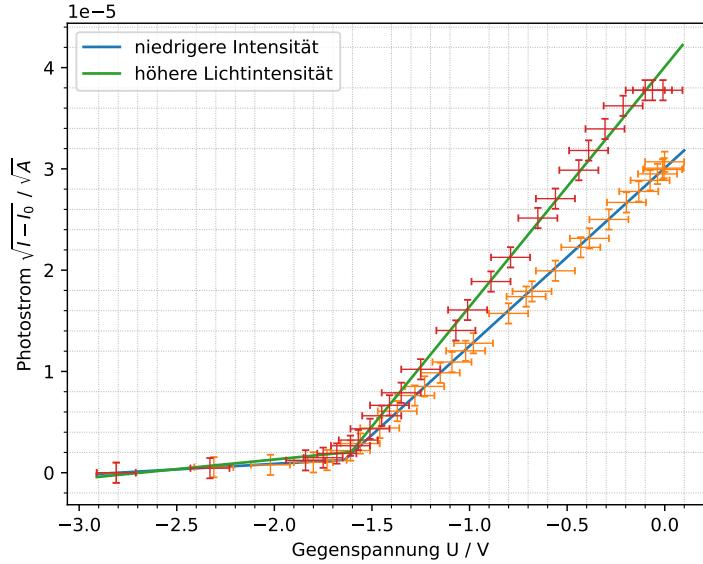


Abbildung 2.9: Messungen der Photozellen-Kennlinie für 365 nm mit varierten Lichtintensitäten. Bei niedrigerer Intensität betrug die maximale Photospannung  $U_{I,\max} = (2,8 \pm 0,1)$  V, bei höherer Intensität  $U_{I,\max} = (14,2 \pm 0,1)$  V.

Wie theoretisch erwartet ist für beide Lichtintensitäten ein ähnlicher stückweise linearer Verlauf zu erkennen, die Grenzfrequenz in der Messung mit höherer Intensität berechnet sich über die gleiche Geradenanpassung wie für die vorherigen Kennlinienmessungen (siehe Gl. 2.4 und 2.5) als  $U_{0,hl} = (-1,69 \pm 0,08)$  V. Die Grenzspannung bei geringerer Intensität und höherer Intensität von Licht der Wellenlänge 365 nm unterscheiden sich also im Rahmen der Messunsicherheiten der drei verschiedenen Messungen nicht. Die Steigungen der beiden Photostromgeraden unterscheiden sich hingegen – die Messung mit höherer Intensität steigt stärker an. Bei einer positiven Gegenspannung, die in der experimentellen Durchführung nicht erreicht wurde, da dies eine Umpolung der Gegenspannung erfordert hätte, würde eine Sättigung des Photostroms erwartet, wobei die Kennlinie der Messung mit höherer Lichtintensität einen höheren Maximalwert erreichen würde[6, S. 63], da hier mehr Lichtquanten Energie übertragen können als bei geringerer Lichtintensität, also geringerer Leistung. Die einzelnen Quanten haben bei beiden Messreihen die gleiche Energie  $h\nu$ , die Grenzspannung bleibt identisch, was mit den gemessenen Daten übereinstimmt. Die Messung stimmt also mit den Erwartungen überein.

## 3 Balmer-Serie von Wasserstoff-Atomen

### 3.1 Theoretische Überlegungen

Werden Atome mit elektromagnetischer Strahlung bestrahlt, emittieren oder absorbieren sie Licht diskreter, für die Atomart charakteristische Wellenlängen. Im Bohrschen Atommodell entspricht eine emittierte Wellenlänge der diskreten Anregung eines Elektrons in der Atomhülle in einen höheren Hauptquantenzahlzustand, also Energiezustand, wobei beim Übergang zurück in den niedrigeren Zustand (im Bohr-Modell in eine niedrigere Hüllenschale) ein Photon der Frequenz

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = \text{Ry} \cdot \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (3.1)$$

vom Atom emittiert wird.  $n_i$  und  $n_f$  sind dabei die ganzzahligen Hauptquantenzahlen des Atomzustands mit  $n_f < n_i$  [3, S. 110]. Ry ist hierbei die Rydbergkonstante für das betrachtete Atom:

$$\text{Ry} = \text{Ry}_\infty \frac{\mu}{m_e} \quad (3.2)$$

mit der exakt festgelegten Rydbergkonstante in Näherung für unendliche Kernmasse  $\text{Ry}_\infty = 10973\,731,568\,157\,1/\text{m}^{-1}$  [9] und reduzierter Atommasse  $\mu = \frac{m_e \cdot m_K}{m_e + m_K}$ <sup>1</sup>. Für Isotope eines Atoms, die sich in Neutronenzahl und damit Kernmasse  $m_K$  unterscheiden, ergeben sich so geringfügig unterschiedliche Werte für Ry und  $\nu$  der Spektrallinien. Im Versuch werden Wasserstoff und sein Isotop Deuterium untersucht; Deuterium enthält ein Neutron im Kern, Wasserstoff nicht, wodurch Deuterium Emissionslinien mit kürzerer Wellenlänge als Wasserstoff für die gleichen  $n_i$ -Übergänge hat. Der Unterschied der Wellenlängen wird als Isotopieaufspaltung bezeichnet.

Die im optischen Wellenlängenbereich beobachtete Reihe an Übergängen des Wasserstoffatoms mit  $n_f = 2$  und  $n_i > 2$  heißt Balmer-Serie. Sie besteht aus fünf Übergangslinien:  $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta$  und  $H_\varepsilon$ . Weitere Hauptquantenzahlübergangsserien, die für Wasserstoff bei Anregung in verschiedenen Frequenzbereichen beobachtbar sind, sind in Abbildung (3.1) dargestellt. Sie werden nach  $n_f$  gruppiert.

---

<sup>1</sup>mit  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg Elektronenmasse [9] und  $m_K$  Kernmasse

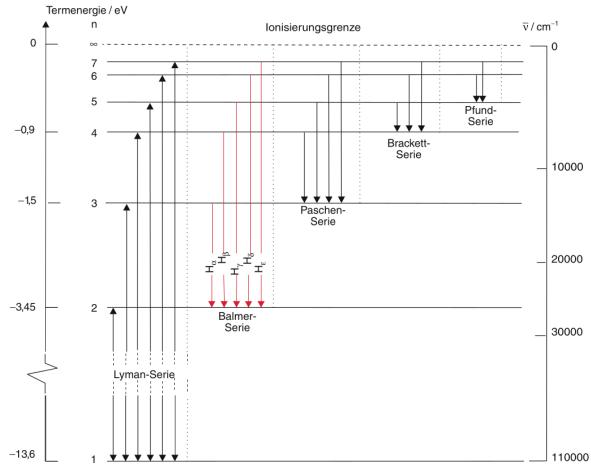


Abbildung 3.1: Darstellung der Emissions- und Absorptionsspektrallinien von Wasserstoff für verschiedene Serien. Grafik entnommen aus[3, S. 108]

Für die zudem im Experiment verwendete Hg-Lampe sind die Spektrallinien gut bekannt. Sie sind für die erste Ordnung in Tabelle 3.1 aufgelistet.

Farbe	$\lambda_{\text{Hg}} / \text{nm}$	relative Intensität
violett	404, 656	1800
	407, 783	150
	410, 805	40
	433, 922	250
	434, 749	400
	blau	435, 833
türkis	491, 607	4000
	grün	546, 074
gelb	gelb	576, 960
		579, 066
		rot
		623, 440
rot		671, 643
		690, 752
		250

Tabelle 3.1: Im optischen Bereich sichtbares Emissionsspektrum einer Quecksilber-Spektrallampe, wobei nicht alle Linien des Spektrums aufgeführt sind. Tabelle entnommen aus [13, S. 12].

### 3.2 Vermessung der Emissionsspektren

Um die Wellenlängen der Balmer-Serie von Wasserstoff präzise vermessen zu können, muss die Gitterkonstante des im experimentellen Aufbau zur wellenlängenabhängigen Aufspaltung der emittierten Spektrallinien verwendeten Reflexionsgitters genau bekannt sein. Dazu wird zunächst das sehr genau bekannte Emissionsspektrum einer Hg-Lampe aufgenommen und daraus die Gitterkonstante bestimmt.

### 3.2.1 Experimenteller Aufbau & Durchführung

Es wurde auf einer optischen Bank die Anordnung in Abbildung 3.2 aufgebaut. Als Lampe wurde für die Messung der Gitterkonstanten die Hg-Lampe eingesetzt, zur Messung des Wasserstoffspektrums die Balmer-Lampe, welche ein Wasserstoff-Deuterium-Gemisch im Verhältnis 2 : 1 enthielt. Die Linsen **f**) und **g**) bzw. **f**) und Kameralinse (**h**) standen hierbei stets in Fernrohraufbau, ihr Abstand war die Summe ihrer Brennweiten.

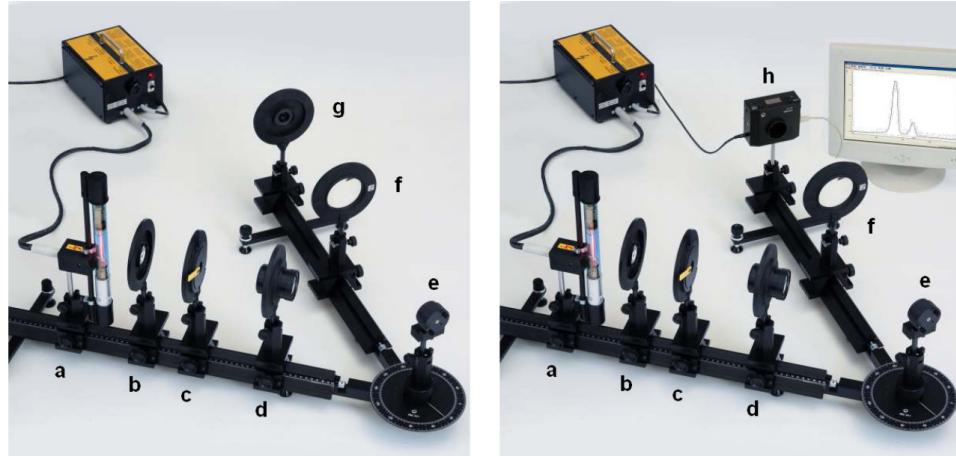


Abbildung 3.2: Versuchsaufbau zur Vermessung der Spektrallinien von Hg- und Wasserstoff-Deuterium-Lampen, mit a) Lampe, b) Linse (Brennweite  $f = 50$  mm) zur Abbildung des Lampenlichts auf den Spalt, c) verstellbarer Spalt, d) Objektivlinse zur Projektion ( $f = 150$  mm), e) Reflexionsgitter, f) Objektivlinse ( $f = 300$  mm) und g) Okularlinse mit Strichskala bzw. h) CCD-Kamera. Grafik entnommen aus[13, S. 6]

Das Projektionsobjektiv wurde in seinem Brennweitenabstand hinter dem Spalt eingesetzt, sodass bei genau paralleler Ausrichtung des Gitters (Zeigerwinkel  $\omega_G = 0^\circ$ ) zum Spalt das Bild des Spalts scharf auf diesen abgebildet wurde. Diese Autokollimation stellte sicher, dass die verschiedenen Wellenlängen des Lichts genau parallel auf das Gitter fielen. Die optischen Bänke wurden auf den Winkel  $\omega_B = 140^\circ$  zueinander gedreht, welcher für alle Messungen konstant blieb. Die Blende wurde so weit geschlossen, dass gerade genug Lichtintensität auf das Gitter fiel, um das Emissionsspektrum scharf erkennen zu können. Das Gitter wurde nun so gedreht, dass durch das Okular **g**) die Spektrallinien der Hg-Lampe nacheinander sichtbar wurden. Um die Abbildung scharf zu stellen, wurden, falls nötig, die Positionen der beiden Objektive **d**) und **f**) variiert. Für alle sichtbaren Spektrallinien der ersten Ordnung wurde nun der Gitterwinkel variiert, bis sie scharf im Zentrum der Okularskala zu erkennen waren und  $\omega_G$  notiert.

### 3.2.2 Bestimmung der Gitterkonstante

Um die Gitterkonstante  $g$  des verwendeten Gitters zu bestimmen, wird die Gittergleichung betrachtet:

$$d = n\lambda = g(\sin(\alpha) + \sin(\beta)) \quad (3.3)$$

Hier ist  $d$  der Gangunterschied zwischen zwei benachbarten Strahlen in einem Maxima (siehe Abbildung 3.3),  $n$  bezeichnet die Ordnung, die hier i.d.R. als  $n = 1$  angenommen wird (andere Ordnungen sind mit dem verwendeten Gitter nur schlecht bis gar nicht beobachtbar).

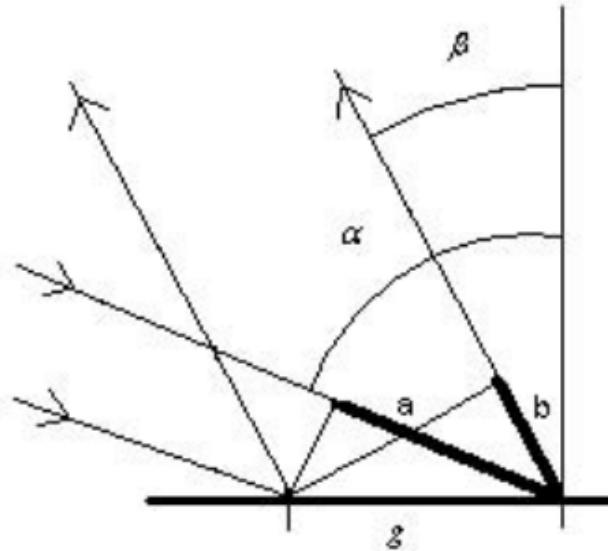


Abbildung 3.3: Illustration des Gangunterschieds in einem Maxima des Interferenzmusters, das sich bei Reflexion von Licht an einem Reflexionsgitter ausbildet. Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  entsprechen nicht den beiden gemessenen Winkeln  $\omega_B$  und  $\omega_G$ , sondern müssen nach Gl. 3.4 noch umgerechnet werden. Graphik entnommen aus [2, S. 1].

Die Winkelanordnung des konkreten genutzten Aufbaus ist in Abbildung 3.4 dargestellt.

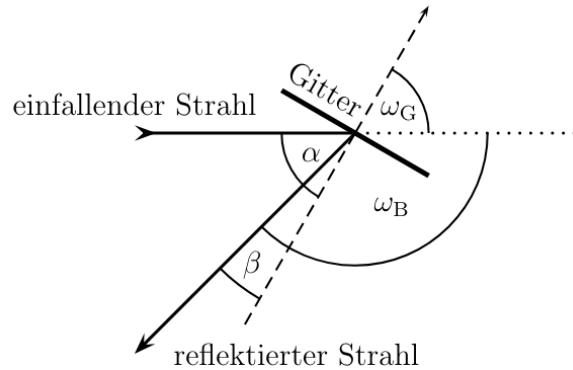


Abbildung 3.4: Winkelanordnung des Aufbaus. Graphik entnommen aus [13, S. 8].

Es gilt dabei:

$$\alpha = \omega_B, \quad \beta = \omega_B + \omega_G - 180^\circ \quad (3.4)$$

Aus der beiden Winkel  $\omega_B$  und  $\omega_G$  für jede Linie im Hg-Spektrum durch den Aufbau mit Okular **g**) lassen sich so direkt nach Gl. 3.3 Werte für die Gitterkonstante bestimmen, wenn

jeder Linie eine passende Literaturwellenlänge  $\lambda_{\text{lit}}$  aus dem bekannten Quecksilberspektrum anhand der relativen Position der Linien zueinander und ihrer Farben zugeordnet werden kann, siehe Tabelle ??.

Die beobachteten Linien im Lampenspektrum, die nicht einer der in Tabelle 3.1 gelisteten Wellenlängen zugeordnet werden konnten, sind vermutlich durch Verunreinigungen mit anderen Gasen im Lampe zu erklären sowie die Tatsache, dass Hg-Spektrallampen i.d.R. eine kleine Menge Startergas enthalten, um die Verdampfung von Quecksilber effektiv zu ermöglichen. Typische Startergase sind Halogene wie Argon oder Xenon [5]. Der Vergleich mit den Emissionsspektren mehrerer typischer Halogene zeigt, dass z.B. Xenon im Wellenlängenbereich von etwa 490 nm to 550 nm zahlreiche deutliche Emissionslinien aufweist [11]. Die weiteren Linien im Spektrum sind also sehr wahrscheinlich durch Startergase und kleinere Verunreinigungen, die bei längerer Gebrauchszeit von Spektrallampen entstehen können, zu erklären.

Für die für Quecksilber zugeordneten Linien des beobachteten Linienspektrums wurden die zugeordneten Wellenlängen gegen die abgelesenen Winkel mithilfe der Beziehungen zu Einfallswinkel und Reflexionswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  in Gl. 3.4 als  $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$  aufgetragen und eine Gerade der Form  $\lambda = a \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta))$  mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate angepasst. Da der zu berechnende Zusammenhang der Gittergleichung 3.3 keinen y-Achsenabschnitt aufweist, da eine Wellenlänge von  $\lambda = 0$  nm physikalisch nicht sinnvoll betrachtet werden kann, wurde auch bei der Anpassung auf diesen verzichtet. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

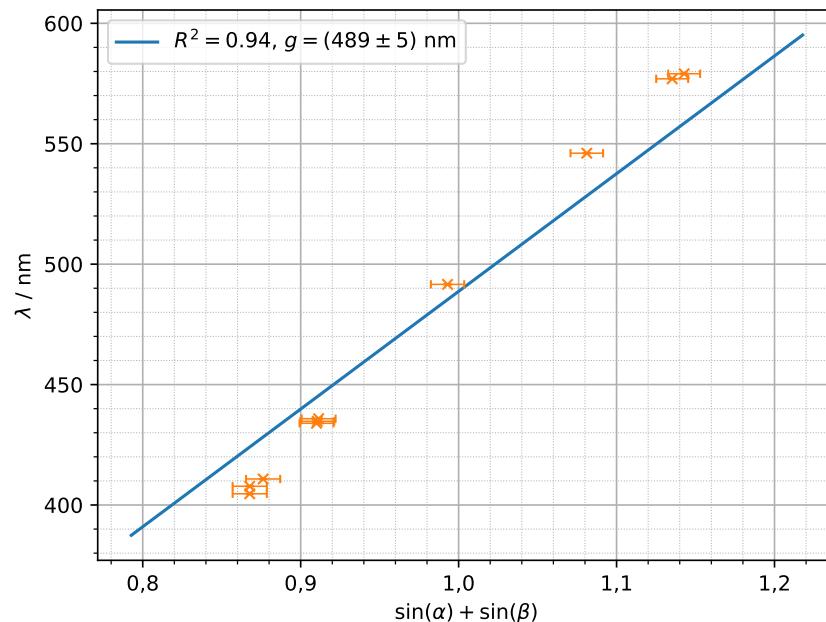


Abbildung 3.5: Darstellung der Anpassungsgerade an den beobachteten Winkeln und zugeordneten Literaturwerten der Wellenlängen der Hg-Spektrallinien nach Tabelle 3.1. Die Güte der Anpassung wurde mit dem Bestimmtheitsmaß auf  $R^2 = 0,94$  berechnet, dies zeigt eine gute Übereinstimmung der Zuordnung mit dem gesuchten linearen Zusammenhang mit berechneter Steigung  $g = (489 \pm 5) \text{ nm}$

Als Steigung der Anpassungsgerade ergibt sich als Wert für die Gitterkonstante  $g_{\text{fit}} = (489 \pm 5)$  nm. Der Wert für  $g$  wird zusätzlich auch noch direkt über die Gittergleichung für jede zugeordnete Spektrallinie als  $g = \frac{\lambda_{\text{lit}, \text{Hg}, i}}{(\sin(\alpha) + \sin(\beta))}$  einzeln berechnet, siehe Tabelle ??

Der arithmetische Mittelwert der 10 zugeordneten Spektrallinien berechnet sich dann als  $\bar{g} = (485,3 \pm 1,9)$  nm. Dabei stimmen innerhalb der  $1\sigma$ -Umgebung der Fehler  $\bar{g}$  und  $g_{\text{fit}}$  miteinander überein. Es wird im Folgenden daher  $g = (489 \pm 5)$  nm genutzt, da hier auch  $\bar{g}$  einbegriffen ist. Der bestimmte Wert der Gitterkonstanten  $g$  des Reflexionsgitters bewegt sich im Bereich typischer Gitterkonstanten [3, S. 261] und ist damit plausibel. Sein Fehler ist relativ groß, da die Unsicherheit des Winkels relativ groß ist. Durch eine genauere Winkelskala könnte dieser systematische Fehler verringert werden.

## Auflösungsvermögen des Gitters

Ein wichtiges Charakteristikum eines Reflexionsgitters ist neben der Gitterkonstanten das Auflösungsvermögen  $\mathcal{R}$ . Es berechnet sich nach dem Rayleigh-Kriterium für eine gegebene Wellenlänge als Verhältnis  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ , wobei  $\Delta\lambda$  das minimale Intervall zwischen zwei noch als zwei getrennt erkennbare Linien darstellt [3, S. 362]. Weiter gilt für Reflexionsgitter  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN$ , mit  $n$  als Ordnung und  $N$  der Anzahl der ausgeleuchteten Gitterspalte, also  $N = \frac{x}{g}$  wobei  $x$  die ausgeleuchtete Breite des Gitters ist. Bei den durchgeföhrten Messungen wurde immer etwa  $x = (1,5 \pm 0,5)$  cm des Gitters von der Hg-Lampe ausgeleuchtet. Daraus berechnet sich für alle betrachteten Spektrallinien ein Auflösungsvermögen von

$$\mathcal{R} = 30\,675 \pm 10\,225 \quad (3.5)$$

Bei der als 435,833 nm zugeordneten blauen Linie, die stark beobachtet werden konnte, errechnet sich so ein minimales Wellenlängenintervall von  $\Delta\lambda_{\text{blau}} = (14,2081 \pm 0,0005)$  pm. Da die verschiedenen Spektrallinien von Quecksilber im blauen Bereich tatsächlich nur wenige nm auseinander liegen, aber als deutlich distinkte Linien zu erkennen waren, ist dieser Wert für  $\mathcal{R}$  plausibel.

### 3.2.3 Teil 2: Vermessung der Balmer-Serie

Um die Wellenlängen der Balmer-Serie zu ver messen, wurde die Hg-Lampe durch die Balmer-Lampe ausgetauscht und der Aufbau erneut so justiert, dass das Licht scharf abgebildet wurde. Durch Variation des Gitterwinkels  $w_G$  wurden auch hier alle sichtbaren Spektrallinien des Wasserstoffs der Lampe auf die Mitte der Okularskala ausgerichtet und  $w_G$  notiert, sowie der Abstand zur deutlich schwächer (aufgrund der niedrigeren Konzentration im Gasgemisch der Lampe) aber um einen kleinen Abstand  $d$  getrennten zu sehenden korrespondierenden Spektrallinie des Deuteriums. Man beachte, dass nicht alle als aufgespalten beobachtete Linien tatsächlich zur Wasserstoff-Deuterium-Isotopiaufspaltung gehören, näheres dazu ist in der Diskussion der Beobachtungen erläutert. Nicht aufgespalten erscheinende Spektrallinien wurden ebenfalls vermessen. Anschließend wurde das Okular durch die CCD-Kamera ausgetauscht und die erkennbar aufgespaltenen Wasserstoff-Linien nacheinander in die Mitte der CCD-Zeile der Kamera fokussiert. Die Kamera wurde dabei mit dem Aufnahmeprogramm *VideoCom-Intensitäten* auf einem Computer verbunden, welches die Lichtintensitäten für die einzelnen Pixel aufzeichnete, mit einer Aufnahme über einen längeren Zeitraum und automatischer Mittelwertbildung der gemessenen Intensitäten. Die Messungen der einzelnen Spektrallinien-Paare wurden als Textdateien gespeichert.

## Messung mit dem Okular

Für alle in der ersten Ordnung sichtbaren Spektrallinien im Aufbau mit Okular sind die gemessenen Winkel  $\omega_B$  und  $\omega_G$  zusammen mit der Farbe der Spektrallinien in Tabelle ?? dargestellt. Wo möglich wurden die Linien der passenden Linie der Balmer-Serie von Wasserstoff zugeordnet.

Im Bereich der grünen Linien wurden zudem noch sehr schwache Linien beobachtet, die aber nicht sinnvoll fokussiert und vermessen werden konnten. Die abgelesenen Winkel werden für die weitere Berechnung wieder jeweils mit Gl. 3.4 zu Einfalls- und Ausfallswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  umgerechnet. Die zusätzlichen Linien im Spektrum der Balmer-Lampe, die nicht einer der Wasserstoff-Linien zugeordnet werden konnten, sind vermutlich durch Emissionslinien von (atomarem) Sauerstoff zu erklären, da die Balmer-Lampe mit (deuterierten und normalen) Wasserdampf gefüllt ist, welcher durch angelegte Wechselspannungen in Sauerstoff und Wasserstoff aufgespalten wird. Hierbei ist Sauerstoff im Verhältnis weniger vorhanden und sollte daher nur als weniger stark sichtbare Spektrallinien sichtbar sein. Auch die Anwesenheit von halogenen Startergasen wie Argon oder Neon im Gasgemisch der Spektrallampe ist wie im ersten Versuchsteil sehr wahrscheinlich. Alle diese Elemente haben gut sichtbare Spektrallinien im sichtbaren optischen Bereich. So kann auch erklärt werden, wieso die zweite rote Spektrallinie als aufgespalten beobachtet wurde: Mit der Gittergleichung 3.3 ergibt sich eine Wellenlänge von  $\lambda_{\text{rot},2} = (584 \pm 8)$  nm. Im Spektrum von Neon gibt es mehrere gut sichtbare, eng aneinander liegende Emissionslinien zwischen 582,026 nm und 590,246 nm[10]. Im Rahmen des Fehlers der Messung könnten alle diese Linien die beobachteten zwei Spektrallinien sein. Hier liegt also keine Isotopieaufspaltung vor, sondern tatsächlich verschiedene Emissionslinien, die nur nah einander liegen. Die Auflösung des Gitters ist hierbei nicht der limitierende Faktor, sondern die endliche Linienbreite der einzelnen Linien sowie die Auflösungsvermögen der genutzten Linsen, die als optische Elemente auch endliche  $\mathcal{R}$ -Werte haben. Damit erscheint plausibel, dass die weiteren, nicht der Wasserstoff-Balmer-Serie zuordenbaren Linien im Spektrum zu zusätzlichen Elementen in der Lampe gehören und im Weiteren nicht beachtet werden müssen.

Die Balmer-Serie von Wasserstoff hat die folgenden Literaturwerte der Wellenlängen sowie die über Gl. 3.3 berechneten Wellenlängen:

Linie	$\lambda_{\text{lit}}/\text{nm}$	$\lambda_{\text{mess}}/\text{nm}$
$H_\alpha$	656, 280	$619 \pm 8$
$H_\beta$	486, 132	$478 \pm 7$
$H_\gamma$	430, 046	$445 \pm 7$
$H_\delta$	410, 173	nicht gemessen
$H_\epsilon$	397.007	nicht gemessen

Tabelle 3.2: Wellenlängen der Balmer-Serie von Wasserstoff. Im Experiment wurden nur  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$  und  $H_\gamma$  beobachtet. Daten aus REF [1]

Es wird nun die Isotopieaufspaltung der Spektrallinien von Wasserstoff und Deuterium untersucht. Die Isotopieaufspaltung ist durch die Gittergleichung Gl. 3.3 gegeben als:

$$\Delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\Delta\beta = g \cos(\beta)\Delta\beta \quad (3.6)$$

Mit Kleinwinkelnäherung und geometrischer Betrachtung ist hier  $\Delta\beta = \frac{d}{f}$ , mit  $f = 300$  mm aus der Brennweite des Objektivs und  $d$  der Abstand der beiden aufgespaltenen

Linien.

Für die beobachteten Balmer-Serien-Linien werden die Isotopieaufspaltungen so nach Gl. 3.6 berechnet (Tabelle 3.3).

Linie	d / Skt.	$\Delta\lambda/\text{nm}$
$H_\alpha$	$2,0 \pm 1,0$	$(3 \pm 1) \cdot 10^{-1}$
$H_\beta$	$1,5 \pm 1,0$	$(2 \pm 2) \cdot 10^{-1}$
$H_\gamma$	$0,5 \pm 1,0$	$(1 \pm 2) \cdot 10^{-1}$

Tabelle 3.3: Berechnete Isotopieaufspaltung der beobachteten Linien der Balmer-Serie für die Messung mit Okular.

Die so berechneten Aufspaltungen durch die Isotopie der drei beobachteten Balmer-Linien stimmen im Rahmen der Fehler miteinander überein. Das ist sinnvoll, da die Wellenlängenunterschiede der Spektrallinien über die Rydberg-Formel Gl. 3.1 sich mit jeweiliger Rydbergkonstante nach Gl. 3.2 für Wasserstoff und Deuterium zueinander nicht abhängig von der Wellenlänge, sondern dem Unterschied der reduzierten Massen sind. Die relativ zum Wert sehr großen Fehler folgen mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung aus dem großen Ablesefehler der Entfernung der Linien  $d$  auf der Okularskala. Um diesen Ablesefehler zu vermeiden, wurde die Vermessung der drei aufgespaltenen Linien der Balmer-Serie, die beobachtet werden konnten, auch noch mit einer CCD-Kamera durchgeführt. Eine weitere Schwierigkeit dieser Messmethode mit einem Okular und dem Auge zeigt sich darin, dass die vierte und fünfte Balmer-Linie ( $H_\delta$  und  $H_\epsilon$ ) gar nicht beobachtet werden konnten: Linien mit geringeren Intensitäten und Wellenlängen am Rande des optisch sichtbaren Spektrums können nur schwer oder überhaupt gar nicht gefunden und sind daher auch nur schwer bis nicht präzise vermessbar. Eine objektive Messung von Lichtintensitäten, insbesondere auch mit Möglichkeit der Intensitätsmittelung über einen längeren Belichtungszeitraum als beim menschlichen Auge, wie es eine CCD-Kamera mit Aufnahmesoftware ermöglicht, ist hier sinnvoll. Auch der Einfluss des spezifischen Auges, welches die Linien betrachtet, ist nicht zu unterschätzen, besonders bei individuellen Sehfehlern wie Astigmatismus kann es zu zusätzlichen Fehlern kommen. Im Vergleich mit den Literaturwerten zeigt sich die gemessenen Balmer-Linien eine Abweichung von (jeweils mit Beachtung der  $1\sigma$ -Umgebung  $-(4,4-6,9)\%$  für  $H_\alpha$ ,  $-(0,2-3,1)\%$  für  $H_\beta$  und  $(1,8-5,1)\%$  für  $H_\gamma$ ). Diese kleinen Abweichungen zeigen, dass sich mit der Methode trotz der Fehleranfälligkeit durch die Betrachtung mit einem individuellen Auge relativ zuverlässig die Wellenlängen der stark ausgeprägten Balmer-Linien bestimmen lassen. Für eine sehr genaue Betrachtung der Isotopieaufspaltung ist die Methode jedoch dann zu ungenau.

### Messung mit CCD-Kamera

Die drei aufgespaltenen Balmer-Linien wurden mit der CCD-Kamera wie in Abschnitt 3.2.3 aufgenommen. Um die Pixelkoordinaten  $p$  der CCD-Kamera in den Textdateien mit den Messdaten in Winkel umzurechnen, wurde die folgende Formel genutzt [13, S. 9]:

$$\beta = \arctan \left( \frac{(1024 - p) \cdot 0,014 \text{ mm}}{f} \right) \quad (3.7)$$

Für den Einfallswinkel wurde für alle Messungen erneut  $\alpha = \omega_B = (140,0 \pm 0,5)^\circ$  gemessen. Auch hier ist  $f = 300 \text{ mm}$  die Brennweite des Objektives.

Im Abbildungen 3.6a - 3.7b sind die drei Balmer-Linien als relative Intensität (zur maximalen Intensität, die die Kamera messen kann) abhängig von der Pixelkoordinate  $p$  (ohne Einheit) als x-Achse dargestellt. Auch hier wurde die türkise  $H_\beta$ -Linie zweimal vermessen, es sind beide Messungen dargestellt, da sie sich tatsächlich geringfügig unterscheiden. Darin zeigt sich bereits die erhöhte Genauigkeit dieser Messmethode.

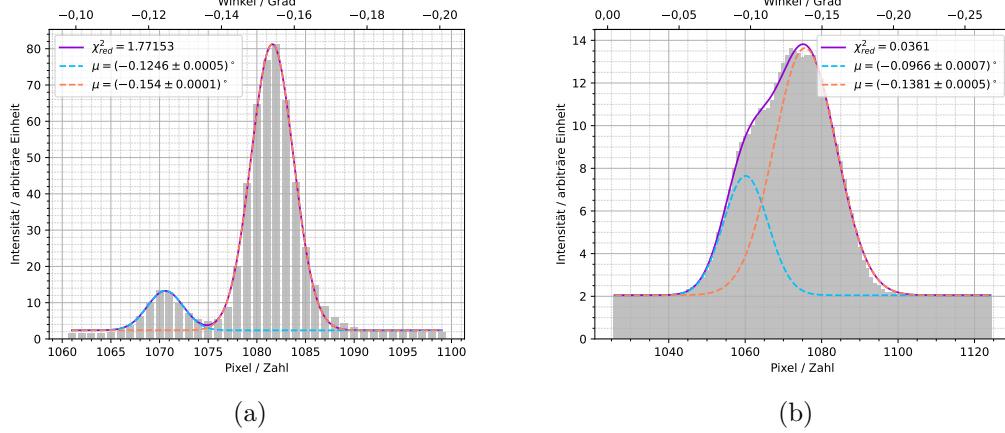


Abbildung 3.6: a) CCD-Messung der  $H_\alpha$ - und b)  $H_\beta$ -Linien

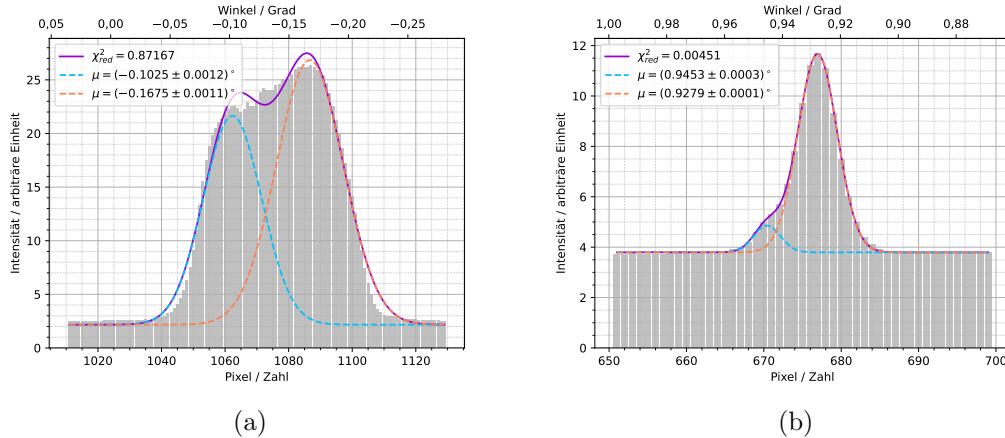


Abbildung 3.7: a) Erneute Messung der  $H_\beta$ -Linie und b) Messung der  $H_\gamma$  Linie

An die gemessenen Intensitätsverteilungen wurde eine Funktion der Form

$$f(x) = A_D \cdot \exp \frac{-(x - \mu_D)^2}{\sigma_D^2} + A_H \cdot \exp \frac{-(x - \mu_H)^2}{\sigma_H^2} \quad (3.8)$$

mittels einer Methode der kleinsten Quadrate angepasst. Die gefundenen Parameter sind in Tabelle 3.4 aufgeführt.

Messung	$\mu_H$	$\mu_D$	$\sigma_H$	$\sigma_D$
3.6a	$(1,081\,59 \pm 0,000\,03) \cdot 10^3$	$(1,0706 \pm 0,0002) \cdot 10^3$	$2,17 \pm 0,03$	$1,9 \pm 0,2$
3.6b	$(1,0757 \pm 0,0002) \cdot 10^3$	$(1,0601 \pm 0,0003) \cdot 10^3$	$8,1 \pm 0,1$	$5,8 \pm 0,2$
3.7a	$(1,0757 \pm 0,0002) \cdot 10^3$	$(1,0601 \pm 0,0003) \cdot 10^3$	$8,1 \pm 0,1$	$5,8 \pm 0,2$
3.7b	$(6,7694 \pm 0,0002) \cdot 10^2$	$(6,704 \pm 0,001) \cdot 10^2$	$2,53 \pm 0,02$	$1,7 \pm 0,1$

Tabelle 3.4: Angepasste Parameter für doppelte Gausskurven nach CCD-Messung

Messung	$A_H$	$A_D$
3.6a	$(7,9 \pm 0,1) \cdot 10^1$	$(1,1 \pm 0,1) \cdot 10^1$
3.6b	$(1,16 \pm 0,01) \cdot 10^1$	$5,6 \pm 0,2$
3.7a	$(1,16 \pm 0,01) \cdot 10^1$	$5,6 \pm 0,2$
3.7b	$7,87 \pm 0,04$	$1,06 \pm 0,05$

Tabelle 3.5: Angepasste aber nicht relevante Parameter für doppelte Gausskurven nach CCD Messung

Jetzt wird  $\Delta\lambda$  aus den Anpassungsparametern der Gausskurven berechnet. Hierbei wird nach Gleichung (3.6) vorgegangen, wobei  $d = 0,014 \text{ mm} \cdot (\mu_H - \mu_D)$  ist. Die hiermit berechneten Isotopieaufspaltungen sind in Tabelle 3.6 aufgeführt.

Messung	Linie	$\Delta\lambda/\text{nm}$
3.6a	$H_\alpha$	$0,196 \pm 0,004$
3.6b	$H_\beta$	$0,334 \pm 0,008$
3.7a	$H_\beta$	$0,334 \pm 0,008$
3.7b	$H_\gamma$	$0,144 \pm 0,003$

Tabelle 3.6: Isotopieaufspaltung aus CCD-Messung

Diese Isotopieaufspaltungen liegen innerhalb einer  $1\sigma$  Umgebung der zuvor mit dem Auge berechneten, passen also gut zusammen, es sind jedoch die Fehler deutlich kleiner. Die Methode mit CCD-Kamera ist also wie vermutet genauer darin, gute Aussagen über die Isotopieaufspaltung von Wasserstoff treffen zu können.

### Plancksches Wirkungsquantum und Rydbergkonstante

Aus den Wellenlängen der Balmer-Linien (Tabelle 3.2) wird nun die Rydbergkonstante und aus dieser wiederum das plancksche Wirkungsquantum berechnet. Aus Gl. 3.1 und 3.2 folgt mit der Notation  $u = \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ :

$$R_H = \frac{1}{\lambda u} \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow R_\infty = \frac{R_H m_e}{\mu_H} \quad (3.10)$$

Außerdem ist nach [9]

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow h = \left( \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 R_\infty c} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.12)$$

Damit werden nun  $R_\infty$  und  $h$  für jede der Linien einzeln berechnet als:

Linie	$R_\infty/m^{-1}$	$h/Js$
$H_\alpha$	$(116 \pm 1) \cdot 10^5$	$(6,50 \pm 0,03) \cdot 10^{-34}$
$H_\beta$	$(112 \pm 2) \cdot 10^5$	$(6,59 \pm 0,03) \cdot 10^{-34}$
$H_\beta$	$(112 \pm 2) \cdot 10^5$	$(6,59 \pm 0,03) \cdot 10^{-34}$
$H_\gamma$	$(107 \pm 2) \cdot 10^5$	$(6,68 \pm 0,03) \cdot 10^{-34}$

Tabelle 3.7: R und h

Im Mittel ergeben sich somit  $R_\infty = (1,12 \pm 0,01) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$  und  $h = (6,59 \pm 0,02) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ . Im Vergleich mit den Literaturwerten für  $R_\infty = (10\,973\,731,568\,157 \pm 0,000\,012) \text{ m}^{-1}$  und  $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  [9] kann man sehen, dass die berechneten Werte nicht zu den Literaturwerten passen, jedoch nur um wenige Prozent abweichen. Das berechnete plancksche Wirkungsquantum passt (innerhalb einer  $1\sigma$ -Umgebung) zu dem im ersten Versuchsteil ermittelten. Der bestimmte Wert der Rydbergkonstante  $R_\infty$  aus den gemessenen Balmerlinien hat einen deutlich größeren Fehler als der Literaturwert, die genutzte Methode ist also deutlich ungenauer als andere genutzte Methoden zur Bestimmung dieser Konstanten. Allerdings ist die hier genutzte Methode über die Balmer-Linien in der Durchführung einfach und liefert trotzdem ein Ergebnis, was sehr nah am bisher besten Literaturwert für  $R_\infty$  ist.

### 3.2.4 Weiterführende Überlegungen

Die gemessene Linienbreite wird mit  $\text{FWHM} = \sigma\sqrt{8\ln 2}$  [12, S. 8] aus den Anpassungsparametern berechnet.

Diese Breite ist in Pixel, anschließend wird also die Linienbreite als Wellenlänge berechnet als

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \text{FWHM} \cdot 0,014 \text{ mm/f} \\ \Delta\lambda &= \Delta\beta \cdot g \cdot \cos\beta \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die so ermittelten Linienbreiten sind

Messung	Linie	$\delta\lambda_H/\text{nm}$	$\delta\lambda_D/\text{nm}$
3.6a	$H_\alpha$	$(6,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-1}$	$(6 \pm 1) \cdot 10^{-1}$
3.6b	$H_\beta$	$2,9 \pm 0,1$	$2,1 \pm 0,1$
3.7a	$H_\beta$	$2,9 \pm 0,1$	$2,1 \pm 0,1$
3.7b	$H_\gamma$	$(69,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-1}$	$(6,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-1}$

Tabelle 3.8: Linienbreite aus CCD-Messung

Es fällt zunächst die stark variierende Linienbreite auf, welche auf einen Fehler in dem Messaufbau, welcher die Schärfe reduziert hindeutet.

Die natürliche Linienbreite von Spektrallinien  $\delta\nu$  ergibt sich aus der endlichen Lebensdauer  $\tau$  von angeregten Zuständen als [4]

$$\delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (3.14)$$

Die Lebensdauer ist definiert als die Zeit, bis von einer Anfangspopulation die Anzahl der angeregten Zustände nur noch  $1/e$  der Anfangspopulation vorhanden sind. Es ist zu beachten, dass statt  $\frac{1}{\tau}$  hier bei einem Übergang eines höheren Energiezustandes in einen niedrigeren, der nicht der Grundzustand ist (wie hier mit  $n$  als höheren Zustand zu  $m = 2$  für die Balmer-Serie) die Differenz  $\frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{n}$  betrachtet werden muss. Für die Balmer-Linien wurden als  $m$  zugeordnet:  $H_\alpha : m = 3$ ,  $H_\beta : m = 4$  und  $H_\gamma : m = 5$ .

Außerdem wird die Linienbreite noch durch die Dopplerverschiebung durch die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung der sich bewegenden Gasatome in der Balmer-Lampe zusätzlich verbreitert. Diese Verbreiterung berechnet sich zu [3, S. 230]

$$\delta\nu_{\text{Doppler}} = \frac{2\nu_0}{c} \sqrt{(2RT/M) \ln(2)} \quad (3.15)$$

Die hiermit berechneten Linienbreiten sind in der Größenordnung  $1 \cdot 10^{-2}$  nm und somit erheblich kleiner als die beobachteten. Dies spricht weiterhin dafür, dass die Linienschärfe mehr durch den Aufbau als durch physikalische Faktoren limitiert war.

## 4 Fazit

In diesem Versuch wurde das quantisierte Verhalten von Atomen an den Beispielen des äußeren photoelektrischen Effekts und der diskreten Emissionsspektra von Quecksilber und Wasserstoff (und Deuterium als Wasserstoff-Isotop) untersucht.

Im ersten Versuchsteil wurde mithilfe der Gegenfeldmethode an einer Photozelle der Wert des Planckschen Wirkungsquantums auf  $h = (6,425 \pm 0,005) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  bestimmt. Als Austrittsarbeit der genutzten Photozellenanode wurde der Wert  $W_A = (2,58 \pm 0,03) \cdot 10^{-19} \text{ J}$  (in Elektronenvolt entspricht dies 1,611 eV).

Im zweiten Versuchsteil wurde mithilfe des bekannten optischen Spektrums einer Quecksilberlampe die Gitterkonstante des im Aufbau genutzten Gitters auf  $g = (489 \pm 5) \text{ nm}$  bestimmt. Als Auflösungsvermögen wurde  $\mathcal{R} = 30675 \pm 10225$  abgeschätzt.

Anschließend wurde mit einem Okular und einer CCD-Kamera die Balmer-Serie einer Wasserstoff-Deuterium-Lampe vermessen. Es wurden die  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$  und  $H_\gamma$ -Linien beobachtet. Für die Messung mit Okular ergaben sich so als gemessene Wellenlängen:  $H_\alpha : (619 \pm 8) \text{ nm}$ ,  $H_\beta : (478 \pm 7) \text{ nm}$ ,  $H_\gamma : (445 \pm 7) \text{ nm}$ . Für die Isotopiaufspaltung von Wasserstoff und Deuterium ergaben sich weiter die folgenden Wellenlängenunterschiede:  $H_\alpha : (3 \pm 1) \cdot 10^{-1} \text{ nm}$ ,  $H_\beta : (2 \pm 2) \cdot 10^{-1} \text{ nm}$ ,  $H_\gamma : (1 \pm 2) \cdot 10^{-1} \text{ nm}$ . Aus der Messung mit der CCD-Kamera ergaben sich als Isotopiaufspaltungen dann:  $H_\alpha : (0,196 \pm 0,004) \text{ nm}$ ,  $H_\beta : (0,334 \pm 0,008) \text{ nm}$  (diese Messung wurde zweimal durchgeführt mit gleichem Ergebnis) und  $H_\gamma : (0,144 \pm 0,003) \text{ nm}$ . Als Wert für das Plancksche Wirkungsquantum wurde aus den ermittelten Balmerlinienwellenlängen bestimmt:  $h = (6,59 \pm 0,02) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  (passend innerhalb einer  $1\sigma$ -Umgebung zum ermittelten Wert im ersten Versuchsteil). Als Wert für die Rydbergkonstante wurde zuletzt noch bestimmt:  $R_\infty = (1,12 \pm 0,01) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ .

## 5 Anhang

### Literatur

- [1] *Atomic Spectroscopy*. NIST National Institute of Standards und Technology. 11. Nov. 2025. URL: <https://physics.nist.gov/Pubs/AtSpec/node18.html#b>.
- [2] *Beobachtung der Aufspaltung der Balmerlinien an deuteriertem Wasserstoff (Isotopieaufspaltung)*. LD Didactic. 9. Nov. 2025. URL: [https://www.ld-didactic.de/documents/de-DE/EXP/P/P6/P6213a\\_d.pdf](https://www.ld-didactic.de/documents/de-DE/EXP/P/P6/P6213a_d.pdf).
- [3] Wolfgang Demtroder. *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle Und Festkörper*. 4. Springer, 2010.
- [4] Wolfgang Demtröder. *Laserspektroskopie: Grundlagen und Techniken*. 4. Aufl. Springer, 2000. DOI: 10.1007/978-3-662-08266-9.
- [5] *Fundamentals of Mercury Arc Lamps*. Carl Zeiss Microscopy Online Campus. 10. Nov. 2025. URL: <https://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/articles/lightsources/mercuryarc.html>.
- [6] H. Haken und H.C. Wolf. *Atom- und Quantenphysik: Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen*. 8, 2004. Springer, 2013.
- [7] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. 8. Auflage. Wiley, 2005.
- [8] K. Kopitzki und P. Herzog. *Einführung in die Festkörperphysik*. 7. Auflage. Berlin: Springer Spektrum, 2017. DOI: 10.1007/978-3-662-53578-3.
- [9] P. J. Mohr u. a. “CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2022”. In: *Rev. Mod. Phys.* 97 (2 2025), S. 025002. DOI: 10.1103/RevModPhys.97.025002.
- [10] *Strong Lines of Neon (Ne)*. NIST National Institute of Standards und Technology. 11. Nov. 2025. URL: <https://www.physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/neontable2.htm>.
- [11] *Strong Lines of Xenon (Xe)*. NIST National Institute of Standards und Technology. 11. Nov. 2025. URL: <https://www.physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/xenontable2.htm>.
- [12] Stefaan Tavernier. *Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics*. Springer, 2022. DOI: 10.1007/978-3-642-00829-0.
- [13] *Versuchsbeschreibung P402: Quantelung von Energie*. Physikalisches Institut, Universität Bonn. URL: <https://uni-bonn.sciebo.de/s/I182Tc180c0B10G> (besucht am 04.11.2025).

- [14] *Work Functions for Photoelectric Effect*. Department of Physics und Astronomy, Georgia State University. 9. Nov. 2025. URL: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Tables/photoelec.html>.
- [15] *Workfunction Values (Reference Table)*. LibreTexts Chemistry. 9. Nov. 2025. URL: [https://chem.libretexts.org/Ancillary\\_Materials/Reference/Reference\\_Tables/Bulk\\_Properties/B1%3A\\_Workfunction\\_Values\\_\(Reference\\_Table\)](https://chem.libretexts.org/Ancillary_Materials/Reference/Reference_Tables/Bulk_Properties/B1%3A_Workfunction_Values_(Reference_Table)).