Versuch 1: Ausbreitung von Signalen auf Leitern

Leonie Dessau & Carla Vermöhlen

August 18, 2025

Contents

Vorbemerkungen

Dieses Protokoll wurde gemeinsam von Carla Vermöhlen und Leonie Dessau erstellt und (außer uns sind Fehler bei der Versionierung unterlaufen) zwei mal gleich abgegeben. Quellcode (auch LaTeX) verfügbar auf `https://github.com/byteOfWisdom/the-ep-cant-hurt-you`. Schaltbilder ohne explizite Quelle sind mit Tikz erzeugt, Diagramme ohne explizite Quelle mit Python (Oder gnuplot. Oder Julia.).

1 Einleitung

2 Theorie

Leitungseigenschaften: Koaxialkabel, wie in diesem Versuch, bestehen aus einem Innen- und einem Außenleiter (z.B. Volldraht und Kupfer), die durch ein Dielektrikum voneinander abgeschirmt sind. Sie besitzen also eine Induktivität und eine Kapazität, für die gilt

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 l \frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}} \tag{2.1}$$

$$L = \mu_r \mu_0 l \frac{\ln \frac{R_a}{R_i}}{2\pi} \tag{2.2}$$

Wobei l die Länge des Leiters, R_a der Radius des Außenmantels, R_i der Radius des inneren Leiters sind. ϵ_r und μ_r die elektrischen und magnetischen Permeabilitäten sind Materialkonstanten. ϵ_0, , μ_0 sind die Vakuumpermeabilitäten.
Es gibt außerdem noch zwei weitere Kenngrößen für eine den Widerstand R und den Verlustwert G. Die Größen sind proportional zur Länge des Leiters l und werden deshalb pro Längeneinheit angegeben, also als R' = $\frac{\mathrm{R}}{l}$; C' = $\frac{\mathrm{C}}{l}$; L' = $\frac{\mathrm{L}}{l}$ und G' = $\frac{\mathrm{G}}{l}$. Diese vier Leitungskonstanten führen zu weiteren Leitungsgrößen: dem Wellenwiderstand, der Verzögerungszeit und der Dämpfung.

Wellenausbreitung auf homogenen Leitern: Um die Vorgänge in den verwendeten Koaxialkabeln zu beschreiben, wird das Kabel als verlustlose Leitung betrachtet, welche aus aneinandergereihten LC-Gliedern besteht, betrachtet. Zur Beschreibung von Strom und Spannung nutzt man die Impedanz und Admittanz aus folgendem Ersatzschaltbild:

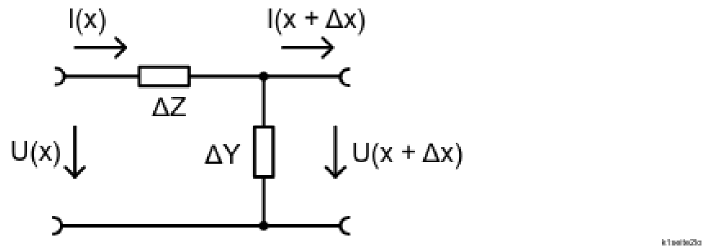

Abb. 1.3: Vollständiges differentielles Leitungs-Ersatzschaltbild

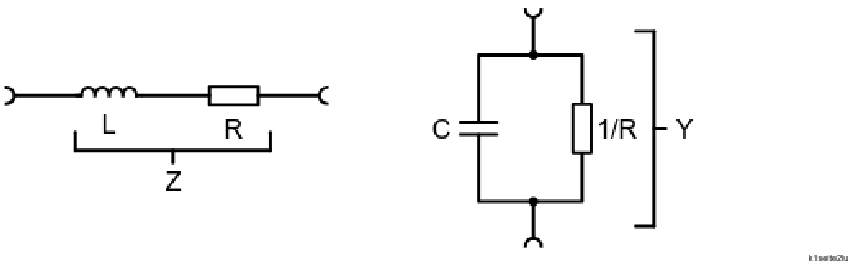

Abb. 1.4: Aufbau der Impedanz Z und der Admittanz Y

Figure 2.1: Schaltbild aus dem Skript

Die Längsimpedanz ist folglich eine Serienschaltung aus Spule und Verlustwiderstand und die Queradmittanz eine Reihenschaltung aus Kondensator und Verlustleitwert.

$$Z = i\omega L + R \tag{2.3}$$

$$Y = i\omega C + G \tag{2.4}$$

Auch diese Größen sind Proportional zur Länge und werden dementsprechend pro Längeneinheit angegeben.

$$Z' = \frac{Z}{l} = \frac{\Delta Z}{\Delta l} \tag{2.5}$$

$$Y' = \frac{Y}{l} = \frac{\Delta Y}{\Delta l} \tag{2.6}$$

Des Weiteren ist über Strom und Spannung aus dem Ersatzschaltbild bekannt

$$U(x) = I(x) \cdot \Delta Z + U(x + \Delta x) \tag{2.7}$$

$$I(x) = I(x + \Delta x) + U(x + \Delta x) \cdot \Delta Y \tag{2.8}$$

Man erhält folgendes Differentialgleichungssystem, wenn man ΔU und ΔI durch Δx teilt und dann $\Delta x \to 0$ laufen lässt.

$$\frac{dU}{dx} = -I \cdot Z' \tag{2.9}$$

$$\frac{dI}{dx} = -U \cdot Y' \tag{2.10}$$

Durch weiteres Ableiten erhält man die Lösung des DGL Systems. Die Spannung wird durch die Superrposition einer hin- und rücklaufenden Spannungsamplitude und der Strom durch die Differenz dieser bestimmt.

$$U(x,t) = U_h(x,t) + U_r(x,t) = (U_{h0}e^{-\Upsilon x} + U_{r0}e^{\Upsilon x})e^{i\omega t} \tag{2.11}$$

$$I(x,t) = (U_{h0}e^{-\Upsilon x} - U_{r0}e^{\Upsilon x}) \cdot \sqrt{\frac{G' + i\omega C'}{R' + i\omega L'}} e^{i\omega t} = I_h(x,t) + I_r(x,t) \tag{2.12}$$

Wobei für die Dämpfung Υ gilt:

$$\Upsilon^2 = Z' \cdot Y' = (R' + i\omega L') \cdot (G' + i\omega C') = \alpha + i\beta \tag{2.13}$$

mit $\alpha = \Re(\Upsilon)$ der Dämpfungskonstante. Im verlustfreien Fall $(R' = G' = 0)$ wird $\Upsilon = i\omega\sqrt{L'C'} = i\beta$.

Wellenwiderstand und Phasengeschwindigkeit: Die Wellenlänge, die Phasengeschwindigkeit und die Gruppengeschwindigkeit lauten:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L'C'}} \tag{2.14}$$

$$v_{ph} = \nu \cdot \lambda = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \tag{2.15}$$

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{d\beta/d\omega} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = v_{ph} \tag{2.16}$$

Der Wellenwiderstand ist folgendermaßen definiert

$$Z = \frac{U_h(x)}{I_h(x)} = \frac{U_{h0}}{I_{h0}} = \sqrt{\frac{R' + i\omega L'}{G' + i\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'} \cdot \sqrt{\frac{1 - i\frac{R'}{\omega L'}}{1 - i\frac{G'}{\omega C'}}}} = \frac{U_r(x)}{-I_r(x)} \tag{2.17}$$

Für den verlustfreien Fall wird

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \frac{\ln(R_a/R_i)}{2\pi} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z_{frei} \frac{\ln(R_a/R_i)}{2\pi} \tag{2.18}$$

Die Verzögerungszeit des Kabels ist antiproportional zur Phasengeschwindigkeit v_{ph}. In Aufgabe A und B werden ihre Eigenschaften näher behandelt.

Leitungsabschluss und Anpassung: Im Kabel gibt es wie oben beschrieben sowohl eine einlaufende als auch eine rücklaufende Welle. Das liegt daran, dass die Energie der einlaufenden Welle nicht komplett im Abschlusswiderstand R_A verbraucht wird. Wenn der Abschlusswiderstand genau gleich dem Wellenwiderstand ist, gibt es demnach keine rücklaufende Welle.
Der Abschlusswiderstand ergibt sich aus dem Ohm'schen Gesetz zu

$$R_A = \frac{U_h(l) + U_r(l)}{I_h(l) + I_r(l)} = Z \cdot \frac{U_{hl} + U_{rl}}{U_{hl} - U_{rl}} = Z \cdot \frac{1 + r}{1 - r} \tag{2.19}$$

Hierbei ist r der Reflexionsfaktor

$$r = \frac{U_{rl}}{U_{hl}} = \frac{1 - \frac{Z}{R_A}}{1 + \frac{Z}{R_A}} = \frac{R_A - Z}{R_A + Z} \tag{2.20}$$

Außerdem relevante Größen sind das Stehwellenverhältnis s und der Anpassungsfaktor m

$$s = \frac{1+|r|}{1-|r|} \tag{2.21}$$
$$m = \frac{1}{s} \tag{2.22}$$

Es ergeben sich drei verschiedene Fälle für die Auswirkung des Abschlusswiderstandes auf die Signale:

Angepasster Abschluss: $R_A = Z$; $r = 0$; $s = 1$ und $m = 1$
In diesem Fall gibt es keine Reflexion, also auch keine rücklaufende Welle. Die gesamte einlaufende Energie wird an den Verbraucher abgegeben.

Offene Leitung: $R_A = \infty$; $r = +1$; $s = \infty$ und $m = 0$
Der Strom am Ende des Leiters ist $I_{rl} + I_{hl=0}$, da nach außen kein Strom fließt. Es gilt also $I_{rl} = -I_{hl}$ und damit $U_{hl} = U_{rl}$. Die hinlaufende Welle ist genauso groß, wie die rücklaufende Welle. Außerdem ist die hinlaufende Welle so groß, wie die hinlaufende Welle im Fall des angepassten Anschlusses.

Kurzschluss: $R_A = 0$; $r = -1$; $s = \infty$ und $m = 0$
Am Ende des Leiters wird die Spannung 0, da hier kurzgeschlossen ist. $U_{rl} + U_{hl} = 0$ also $U_{hl} = -U_{rl}$. Die rücklaufende Welle ist also genau entgegengesetzt gleich groß, wie die hinlaufende Welle. Der Strom ist doppelt so groß, wie bei angepasstem Anschluss. $I_{hl} + I_{rl} = 2I_{hl}$

3 Voraufgaben

3.1 A

Größere Verzögerungszeiten lassen sich erreichen indem man ein längeres Kabel verwendet oder, indem man die Phasengeschwindigkeit reduziert. Betrachtet man

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \tag{3.1}$$

[1]1.13 so kann man diese reduzieren indem $L'C'$ vergrößert wird. Dies lässt sich erreichen indem entweder die Kapazität erhöht oder die Induktivität. Dies lässt sich erreichen, indem man Materialien mit größeren elektrischen- oder magnetischen Permeabilitäten nutzt.

3.2 B

Der Wellenwiderstand ist gegeben als

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \frac{\ln(R_a/R_i)}{2\pi} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z_{frei} \frac{\ln(R_a/R_i)}{2\pi} \tag{3.2}$$
$$= Z_{frei}^{vak} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{\ln(R_a/R_i)}{2\pi} \tag{3.3}$$

[2]1.15

[1]Gleichung vph aus dem EP Skript
[2]Gleichung wellenwiderstand aus dem EP Skript

Erhöht man die Verzögerungszeit durch ein Material mit größerem ϵ_r, so wird Z kleiner, Erhöht man die Induktivität (sei es durch Ferritkern, Windungen oder Materialwahl), so wird der Wellenwiderstand Z größer.

3.3 C

In diesem Fall ($R_A = Z$), ist $R_{in} = Z = R_A$ unabhängig von der Länge des Kabels.

3.4 D

Gegeben sind die Werte:

$$R_A/R_I = 2.3 \tag{3.4}$$
$$\epsilon_r = 1.5 \tag{3.5}$$
$$\mu_r = 1.5 \tag{3.6}$$
$$Z_{frei}^{vak} \approx 377\Omega \tag{3.7}$$

[3]1.16 Im Verlustfreien Idealfall ist der Wellenwiderstand durch (**??**) gegeben. Hier ist dann $Z \approx 50\Omega$. Die Phasengeschwindigkeit ist gegeben durch (**??**), wobei hier $c_0 = 3 \cdot 10^8 ms^{-1}$ genommen wird, und wird dann zu $v_{ph} = 2 \cdot 10^8 ms^{-1}$.
Die Verzögerung pro Meter ist dann einfach die reziproke Geschwindigkeit, also $\tau = v_{ph}^{-1} = \frac{1}{2} 10^{-8} sm^{-1}$.

4 Versuchsdurchführung

5 Auswertung

6 Fazit

[3]Gleichung zfrei aus dem EP Skript