1 Im Allgemeinen (1-Dim)

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \tag{1}$$

ist eine gewoehnliche DIfferentialgleichung 2. Ordnung =¿ braucht 2 Randbedingungen zum Loesen.
Am einfchsten: lege $x(t_0), \dot{x}(t_0)$ fest, dann ist $x(t)$ eindeutig bestimmt.
Numerische Loesung:
Fange an bei $t = t_0$. $a(t_0) = \frac{F(x(t_0),\dot{x}(t_0),t_0)}{m}$
Zur Zeit $t = t_0 + \Delta t$, mit Δt inifinitesimal:

$$v(t_1) = v(t_0) + \Delta t \cdot a(t_0) \tag{2}$$

$$x(t_1) = x(t_0) + \Delta t \cdot v(t_0) \tag{3}$$

$$a(t_1) = \frac{F(x(t_1), \dot{x}(t_1), t1)}{m} \tag{4}$$

etc.

Laplacesche Behauptung: Gib mir die Koordinaten & Geschwindigkeiten aller Koerper in einer feten Zeit und ich kann die Zukunft vorhersagen.

Aber:

1. man kennt nicht alle kraefte
2. in vielen Faellen haengt die Bahnkurve sehr sensitiv von den Anfangsbedingungen ab: Falls $x(t_0) -> x(t_0)(1+\epsilon), |\epsilon| << 1$, $\frac{x'(t)-x(t)}{x(t)}$ kann recht bald $O(1)$ werden. [1]

   "chaotische" Systeme, "deterministisches Chaos"

   Beachte: $X(t_0), \dot{x}(t_0)$ immer nur mit endlichen Genauigkeiten bekannt.

1.1 Methoden zum Loesen der Bewegungsgleichung (1-dim)

F haengt nur von x ab

$$m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} = F(x) \tag{5}$$

Kettenregel:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx} \tag{6}$$

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x) \text{Trennung der Variablen} \tag{7}$$

$$m\int_{v_0}^{v} v'dv' = \int_{x_0}^{x} F(x')dx' \tag{8}$$

$$=> \frac{1}{2}m(v^2(x) - v^2(x_0)) \tag{9}$$

$$=> v(x) = \pm[v^2(x_0) + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(x')dx']^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$=> \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{[\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(x')dx' + v^2(x_0)]^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

[1] $O(1)$ ist die Groessenordnung von 1, bedeutet hier, dass der Fehler 100% wird.

F haengt nur von v ab

$$m\frac{dv}{dt} = F(v) \tag{12}$$
$$=> m\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0 \tag{13}$$

loese nach $v(t)$ auf:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')dt' \tag{14}$$

F haengt nur von t ab

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \tag{15}$$

$$m[v(t) - v(t_0)] = \int_{t_0}^{t} F(t')dt' \tag{16}$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)\cdot(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' F(t'') \tag{17}$$

"Durch geschickten Ansatz"

Beispiel:
Angetriebener, gedaempfter harmonischer Oszillator.[2]
x: Auslenkung aus Ruhelage (fuer $F_{ext} = 0$)

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F\cos(\omega t) \tag{18}$$
$$=> \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f\cos(\omega t) \tag{19}$$

mit

$$\gamma = \frac{b}{2m} \tag{20}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{21}$$

$$f = \frac{f}{m} \tag{22}$$

Inhomogene gewoehnliche Differenzialgleichung. Allgemeine Loesung.

$$x(t) = [\text{allgemeine Loesung d. homogenen DiffGl.}] \tag{23}$$
$$+ \text{spezielle Loesung der homogenen Gleichung} \tag{24}$$

Fuer spezielle Loesung definiere Komplexe Beschleunigung $fe^{i\omega t}$ und komlexe Koordinate z, mit

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = fe^{i\omega t} \tag{25}$$

[2] hier kommt eine tolle skizze von einem harmonischen oszillator hin

Funktioniert, da 18 linear ist: Keine Terme mit $x^2, \dot{x}^2$ etc.
Ansatz:

$$zt = \frac{f}{R} e^{i\omega t}, R = const \tag{26}$$

$$\dot{z}(t) = i\omega z(t), \ddot{z}(t) = -\omega^2 \cdot z(t) \tag{27}$$

durch einsetzen 27 in 25 ergibt sich:

$$[-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2] = 1 \tag{28}$$

$$=> R =_0^2 +\omega^2 + 2i\omega\gamma = re^{i\theta}, r, t \in \Re \tag{29}$$

$$\tan\theta = \frac{Im(R)}{Re(R)} = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{30}$$

Beachte: 26 ist nicht die allgemeinste Loesung. Es wird weiterhin eine Loesung der homogenen Gleichung benoetigt um die Anfangsbedingungen zu erfuellen.

Fuer feste f: maximale Auslenkung $\frac{f}{r}$ am groessten wenn r^2 minimiert wird.

$$\frac{dr^2}{d\omega^2} = 2(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = \sigma \tag{31}$$

$$=> \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \tag{32}$$

$$r^2(\omega_r) = 4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2) \tag{33}$$

Fuer schwache Daempfung, $\gamma^2 << \omega_0^2 : \omega_r \approx \omega_0$: Eigenfrequenz der Schwingung:

$$\tan\theta = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\omega\gamma}{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)} \approx {}^{3} \frac{\gamma}{\omega_0 - \omega} \tag{34}$$

Allg Loesung: fuer $\gamma < \omega_0$: unter-kritisch

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \alpha) + \frac{f}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \cos[\omega t - \arctan(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})] \tag{35}$$

$$= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{36}$$

C, α: Integrationskonstanten, (-¿ Anfangsbedingungen)
Fuer externe Kraft $F_{ext} = mf\sin(\omega t)$ Loesung aus Imaginaer-Teil von 26
Beliebige periodische externe Kraft: Durch Fourier-Zerlegung:

$$\frac{1}{m} F_{ext}(t) = \sum_{n=1}^{\alpha} [f_n \cos(n\omega t) + \tilde{f}_n \sin(n\omega t)] \tag{37}$$

Da 25 linear ist: einsetzen in 35 die spezielle Loesung durch entsprechende Summe spezieller Loesungen.

2 Kinetische und potenzielle Energie

Zunaechst in einer Dimension, fuer Koerper mit konstanter Masse:

$$m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(}{dt}mv) = F(x,v,t) \tag{38}$$

multiplizieren mit v

$$v\frac{d(}{dt}mv) = vF(x,v,t) \tag{39}$$

$$\frac{d(}{dt}\frac{1}{2}mv^2) \tag{40}$$

Integrieren nach t ergibt

$$\frac{1}{2}m(v^2(t_2) - v^2(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt}F(x,v,t) = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(x,v,t)dx \tag{41}$$

Definiere Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{42}$$

Die Gleichung 41 besagt: Aenderung der kinetischen Energie entspricht der geleisteten Arbeit.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x, v(x), t(x))dx \tag{43}$$

Im Allgemeinen muessen wir $x(t)$ kennen um 43 berechnen zu koennen; kenntnis von $x_1 = x(t_1)$ und $x_2 = x(t_2)$ ist nicht ausreichend.
Wichtiger Spezialfall: F haengt nur von ab.
=¿ definiere potenzielle Energie

$$V(x) = \int_{x_n}^{x} F(x')dx' \tag{44}$$

In diesem Fall:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = V(x_2) - V(x_1) \tag{45}$$

$$=> 41 E_{kin}(t_2) - E_{kin}(t_1) = V(x_2) - V(x_1) \tag{46}$$

$$=> E_{kin}(t_1) + V(x(t_1)) = E_{kin}(t_2) + V(x(t_2)) \tag{47}$$

$$=> E_{tot} = E_{kin} + V \text{ist erhalten! Bedingung: F haengt nur von x ab} \tag{48}$$

Vorlesung 4

GLeichung 44 aufgeloest nach F:

$$F(x) = \frac{dV(x)}{dx} \tag{49}$$

is nicht abheangig von x_n =¿ wahl von x_n ist beliebig.
Eine Kraft die wie **??** ausgedrueckt werden kann heisst konservativ.
Fuer 1-dim Bewegung ist 49 hinreichend und notwendig fuer ENergieerhaltung.

Beispiel

Hooksches Gesetz, F_H**??** $= -kx$. Waehle $x_0 = 0 =¿$

$$V_H = \frac{1}{2}Kx^2 \tag{50}$$

Harmonischer ungedaempfter Oszillator:

$$x(t) = c * \cos(\omega_0 t + \alpha)\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{51}$$

$$\dot{x} = -\omega_0 C \sin(\omega_0 t + \alpha) \tag{52}$$

$$=> \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{1}{2}kC^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha) \tag{53}$$

$$= \frac{1}{2}KC^2 = const. \tag{54}$$

Durch Ausnutzen der ENergieerhaltung koennen wir nach $\dot{x}$ aufloesen =¿ nun haben wir eine DGL 1. Ordnung! (Beispiel **??**)

2.1 Vermutlich ein neuer Sinnabschnitt

Falls F explizit von $\dot{x}$ oder t abhaengt ist E_{tot} (des Koerper) nicht erhalten.

- F haengt von $\dot{x}$ ab (Reibung): Koerper verliert Energie als Waerme and die Umgebung
- F haengt von t ab: "Treibende Kraft", System ist nicht abgeschlossen. Im abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie erhalten.

2.1.1 Anwendung

Fluchtgeschwindigkeit
Gravitationspotenzial

$$V(x) = \int_{-\infty}^{x} (-\frac{Gmm_E}{x^2})dx \tag{55}$$

$$= -Gmm_E \int_{\infty}^{x} \frac{dx'}{x'^2} \tag{56}$$

$$= \frac{Gmm_E}{x'} = \mathbf{??}\frac{mgR_e^2}{x} \tag{57}$$

Fluchtgeschwindigkeit:

$$V(x->\infty)->0 \text{d.h.:} E_{tot} = 0 \tag{58}$$

D.h. am Startpunkt, $x = R_E$ ist $\frac{1}{2}mv_f^2 - mgR_e = 0$

$$v_f = \sqrt{2gR_e} \approx 11\frac{km}{s} \tag{59}$$

2.2 In 3 Dimensionen

Wir beschreiben Bewegung durch Vektoren $\vec{x}$.
Definition: Vektoren sind Groessen, die sich unter Roatationen um den Ursprung verhalten wie $\vec{x}$.
$\vec{x} =$ **??**$\vec{O}\vec{x}$ mit O einer orthagonalen Matrix.

Im kartesichend Koordinatensystem:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3) \tag{60}$$

$$\vec{a} -> O\vec{a}\text{oder} \sum_i O_{i,j} a_j \tag{61}$$

$|\vec{a}| -> |\vec{a}|$, allgemeiner $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i -> \vec{a} \cdot \vec{b}$ ist invariant.
In n Dimensionen O hat hat $\frac{n(n-1)}{2}$ freie Parameter.

$$n = 2 : O = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{62}$$

n=3 3 Winkel z.B $\overleftrightarrow{O}$ als Produkt von Rotationen.
Masse ist ein Skalar =¿ F ist ein Vektor
Kreuzprodukt ist ein vektor:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k} a_j b_k \tag{63}$$

$\epsilon_{i,j,k}$ ist total anti-symmetrisch

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i \to \sum_{j,k} \sum_{j',k'} \epsilon_{i,j,k} O_{j,j'} a_{j'} bk' = \sum_{i',j',k'} \epsilon_{i',j',k'} O_{j,j'} O_{k,k'} a_{j'} b_{k'} \tag{64}$$

$$= \sum_{i'} O_{i,i'} (\vec{a} \times \vec{b})_{i'} \tag{65}$$

Muessen zeigen: [4] [5] [6]

$$\sum_{j',k'} \epsilon_{i,j,k} O_{j,j'} O_{k,k'} = \sum_{i'} \epsilon_{i',j',k'} O_{i,i'} \tag{66}$$

$j' = k'$: Beide Seiten $= 0$. $\epsilon_{i,j,k} = -\epsilon_{i,k,j}$, $O_{i,j} O_{k,j'} = O_{k,j'} O_{j,j'}$
$j' = 2$, $k' = 3$ [7]

2.2.1 Spiegelungen

$\vec{x} \to -\vec{x}$ echte Vektoren aendern ihr Vorzeichen unter Spiegelung. z.B.: $\vec{v} \to -\vec{v}$, $\vec{a} \to -\vec{a}$ aber wenn $\vec{a}, \vec{b}$ echte vektoren sind, dann $\vec{a} \times \vec{b} \to (-\vec{a}) \times (-\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$ aendert sein Vorzeichen nicht.
=¿ $\vec{a} \times \vec{b}$ ist Pseudo- oder Axialvektor.

2.2.2 Konservative Kraefte in 3-Dim

Newton 2: $\frac{d(}{dt} m\vec{v}) = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ Jede Komponente von F kann von allen Komponenten von $\vec{v}, \vec{x}$ abhaengen.

$$\to \frac{d(}{dt} m\vec{v}) = \vec{v}\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \tag{67}$$

$$\to \frac{d(}{dt}\frac{1}{2} m\vec{v}\vec{v}) = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \cdot \frac{dx}{dt} \tag{68}$$

$$\to d(\frac{1}{2} m\vec{v}^2) = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \cdot d\vec{x} \tag{69}$$

$$\to E_{kin}(\vec{x}_2) - E_{kin}(\vec{x}_1) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x}\text{: Linienintegral} \tag{70}$$

[4] what the actual fuck?! thank you for coming to my TED talk
[5] the indices might be very fucking wrong, someone please check them!! (text me if you find errors!)
[6] ok, i give up. you can't read shit this dude writes and his explenations are bad at best. someone please give me handwritten notes and i'll add the proofs in!
[7] some eqauations have been omitted

Mechanische Energie ist nur dann erhalten, wenn die Arbeit unabhaengig von Weg $\vec{x}(t)$ ist. Alle Bahnen mit $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1, \vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$ muessen gleiche Ergebnisse liefern. Potenzielle Energie it nur dann definiert, falls $\vec{F}$ nicht explizit von oder t abhaengt.

$$V(\vec{x}) = -\int_{x_1} x_2 \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \tag{71}$$

Die Gleichung 78 ist nich automatisch wohl definiert!
Wir betrachten ein infinitesimales Wegstueck in der (y, z) Ebene: [8]
Zu zeigen: $V(\vec{x})_{Weg1} - V(\vec{x})_{Weg2} = 0$

$$= -[dzF_z(\vec{x}_n) + dyF_y(x_n, y_n, z_n + dz)] + [dyF_y(\vec{x}) + dzF_z(x_n, y_n + dy, z_n)] \tag{72}$$
$$= dy[F_y(\vec{x}) - F_y(x_n, y_n, z_n + dz)] + dz[dzF_z(x_n, y_n + dy, z_n) - F_z(\vec{x})] \tag{73}$$
$$= -dydz(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}) = 0 \tag{74}$$
$$\rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \tag{75}$$
$$\rightarrow (\nabla \times \vec{F})_x = 0 \tag{76}$$

Durch analoge Betrachtung in (x, z) und (x, y) Ebene: $(\nabla \times \vec{F})_y = (\nabla \times \vec{F})_z = 0$
Die Gleichung 78 ist wohldefiniert, falls

$$\nabla \times \vec{F} = rotF = 0 \tag{77}$$

. Dies ist ein konservatives Kraftfeld.

3 Vorlesung 5

$$V(x) = -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{F}(\vec{x}')d\vec{x}' \tag{78}$$

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{x}) = 0 \tag{79}$$

Diese bedingung 79 ist hinreichend damit 78 konservative Kraft ist, da jeder Weg aus infinitesimalen Stuecken zusammengesetzt werden kann.
Aus 78 folgt:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x}) = -gradV(\vec{x}) \tag{80}$$

Die folgenden Aussagen sind aequivalent:

die totale Energie $E_{tot} = \frac{1}{2}m\vec{v}(t) - -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{F}(\vec{x}')d\vec{x}'$ ist unabhaengig von t

Es exisitert eine potenzielle Energie $V(\vec{x})$, sodass $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x})$

Kraft haengt nur von $\vec{x}$ ab, mit $\nabla \times (\vec{x}) = 0$

Beachte: Kinetische Energie ist erhalten, wenn $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ immer senkrecht zur Bewegungsrichtung ist: $\vec{F} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{v}, t) \times \vec{v}$ Denn: men leistet keine Arbeit gegen diese Kraft, $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ $\vec{F}$ ist nicht durch potenzielle Energie darstellbar.

[8] hier kaeme eine skizze

3.1 Zentralkraefte

Wichtiges bsp fuer konservative Kraefte sind Zentralkraefte;

Dabei sei der Ursprung des Koordiantensystems im Kraftzentrum.

$$\vec{F}(\vec{x}) = F_c(|\vec{x}|) * \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \tag{81}$$

Um zu zeigen, dass die Rotation verschwindet, betrachten wir zuerst die partiellen Ableitungen von $|\vec{x}|$:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \rightarrow \frac{\partial |\vec{x}|}{\partial x} = \frac{2x}{x * \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{|\vec{x}|} \tag{82}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{F}(|\vec{x}|)z) - \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{F}(|\vec{x}|)y) \tag{83}$$

$$= \frac{d\tilde{F}(|\vec{x}|)}{d|\vec{x}|}[z\frac{\partial |\vec{x}|}{\partial y} - y\frac{\partial |\vec{x}|}{\partial z}] \tag{84}$$

$$= \frac{d\tilde{F}(|\vec{x}|)}{d|\vec{x}|}[z\frac{z}{|\vec{x}|} - y\frac{z}{|\vec{x}|}] = 0 \tag{85}$$

y,z Komponente analog $\rightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$

Berechnen der potenziellen Energie:

$$dV = 78 - [F_x dx + F_y dy + F_z dz] = 81 \frac{F_c(|\vec{x}|)}{|\vec{x}|}(xdx + ydy + zdz) = -F_c(|\vec{x}|)d|\vec{x}| \tag{86}$$

Denn:

$$d|\vec{x}| = \frac{\partial |\vec{x}|}{\partial x}dx + \frac{\partial ||}{\partial y}dy + \frac{\partial ||}{\partial z}dz \tag{87}$$

$$= \frac{x}{|\vec{x}|}dx + \frac{y}{|\vec{x}|}dx + \frac{z}{|\vec{x}|}dx \tag{88}$$

Berechnen von $V(x) = V(|\vec{x}|)$ ist unabhaengig von Weg, da F_c nur von der skalaren Groesse $|\vec{x}|$ abhaengt: Wie im 1-Dim Fall.

$$V_c(|\vec{x}|) = -\int_{|\vec{x}_0|}^{|\vec{x}_1|} F_c(r)dr \tag{89}$$

Beispiel: Gravitation [9]

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{|\vec{x}|}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \rightarrow V_G = \int_{\infty}^{|\vec{x}|} \frac{GMm}{r^2}dr = -\frac{GMm}{|\vec{x}|} \tag{90}$$

Beachte:

Rotation ist invariant under Verschiebungen: Kraftzentrum kann bei beliebigen $\vec{x}_0$ liegen, siehe 91

$$\nabla_x(\tilde{F}(|\vec{x} - \vec{x}_0|)(\vec{x} - \vec{x}_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(x - x_0)} \frac{dx - x_0}{dx} \\ ... \\ ... \end{pmatrix} \times \tilde{F}(|\vec{x} - \vec{x}_0|)(\vec{x} - \vec{x}_0) = \tag{91}$$

Summe von Zentralkraeften ist Konservativ (aber keine Zentralkraft)

$$\nabla_{\vec{x} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(\vec{x} - \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{N} [\nabla_{\vec{x} \times \vec{F}_i(\vec{x} - \vec{x}_i)}] = 0} \tag{92}$$

[9] vgl 55

3.2 Newton Formalismus

Bewegung in (x, y) Ebene, beschrieben in Polarkoordinaten. [10]

$$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi \tag{93}$$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \vec{e}_x r\cos\phi + \vec{e}_y r\sin\phi && (94)\\ |\vec{e}_x| &= |\vec{e}_y| = 1 && (95)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\vec{x} &= \vec{e}_x(dr\cos\phi - r\sin\phi d\phi) + \vec{e}_y(dr\sin\phi + r\cos\phi d\phi) && (96)\\ &= dr(\vec{e}_x\cos\phi + \vec{e}_y\sin\phi) + rd\phi(\vec{e}_y\cos\phi - \vec{e}_x\sin\phi) && (97)\\ &\to \vec{e}_r = (\vec{e}_x\cos\phi + \vec{e}_y\sin\phi) && (98)\\ &\to \vec{e}_phi = (\vec{e}_y\cos\phi - \vec{e}_x\sin\phi) && (99)\\ & && (100)\end{aligned}$$

$$\to \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi \tag{101}$$

$$\begin{aligned}\to \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{\phi}\dot{\vec{e}}_\phi && (102)\\ &= \ddot{r}\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\phi}\vec{e}_\phi - r\ddot{\phi}\vec{e}_r && (103)\\ &= \vec{e}_r(\ddot{r} - r\dot{\phi}) - \vec{e}_\phi(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) && (104)\end{aligned}$$

Kraft:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \ddot{r}\vec{e}_r + F_\phi\vec{e}_\phi \to && (105)\\ \text{Newton 2: } m(\ddot{r} - r\ddot{\phi}) &= F_r && (106)\end{aligned}$$

3.2.1 gekoppelte harmonische Oszillatoren

Hier: betrachtung insbesondere der Uebertragung von Energie [11]

Aufstellen der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - \kappa(x_1 - x_2) && (107)\\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - \kappa(x_2 - x_1) && (108)\end{aligned}$$

Beachte:

- Kraft auf 1. Koerper hangt von x_1 und x_2 ab $\to$ Energie des 1. Koerpers ist nicht erhalten.
- Aber wir koennen eine gesamte potenzielle Energie definieren, die in allen Federn gespeichert ist: $V(x) = \frac{1}{2}[kx_1^2 + kx_2^2 + \kappa(x_1 - x_2)^2]$
  $\to$ die gesamte kinetische Energie des Systems ist erhalten.

[10] hier kaeme eine skizze

[11] skizze von einem gekoppelten harmonischen Oszillator, mit Federkonstanten k, κ und k, sowie 2 gleichen massen m und Auslenkungen x_1, x_2

Die Gleichungen 107 sind gekoppelt. Sie koennen durch Addieren/Subtrahieren entkoppelt werden.

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \rightarrow (x_1 + x_2)(t) = a_+ \cos(\omega_+ t + \alpha_+) \tag{109}$$
$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{110}$$

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -k(x_1 - x_2) - 2\kappa(x_1 - x_2) && (111)\\ &= -(k + 2\kappa)(x_1 - x_2) && (112)\\ &\rightarrow (x_1 - x_2)(t) = a_- \cos(\omega_- t + \alpha_-) && (113)\\ \omega_- &= \sqrt{\frac{k + 2\kappa}{m}} && (114) \end{aligned}$$

Dies sind die "Eigenmoden" des Systems. Die Gleichung 109 beschreibnt den Fall, wo die mittlere Feder nicht ausgelenkt ist. Die Koerper schwingen in Phase: $x_1 - x_2 = 0$

Die Gleichung 111 beschreibt Schwingungen bei denen die mittlere Feder maximal ausgelenkt ist: $x_1 + x_2 = 0$

In der Realitaet ist dies nicht immer der Fall. Man kann auch eine Ueberlagerung der beiden Eigenmoden haben.

Allgemein:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)] && (115)\\ &= \frac{1}{2}[a_+ \cos(\omega_+ t + \alpha_+) + a_- \cos(\omega_- t + \alpha_-)] && (116)\\ x_2(t) &= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)] && (117)\\ &= \frac{1}{2}[a_+ \cos(\omega_+ t + \alpha_+) - a_- \cos(\omega_- t + \alpha_-)] && (118) \end{aligned}$$

Amplituden a_+, a_-, die Phasen α_+, α_- aus den Anfangsbedingungen bestimmen, z.B.:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= a \neq 0 && (119)\\ x_2(0) &= \dot{\vec{x}}_1 = \dot{x}_2 = 0 && (120) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x_1(t) &= \frac{a}{2}[\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)] && (121)\\ &= x_2(t) = \frac{a}{2}[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)] && (122) \end{aligned}$$

Benutze Additionstheoreme Sin/Cos: [12]

$$x_1(t) = \tag{123}$$

4 Vorlesung 6

4.1 Allgemeiner Fall: Verschieden Massen und k

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega def^2_{1,1} x_1 + \omega def^2_{1,2} = 0 && (124)\\ \ddot{x}_2 + \omega def^2_{2,2} x_2 + \omega def^2_{1,2} = 0 && (125) \end{aligned}$$

[12] die maybe nochmal kurz auflisten hier

Spezialfall:

$$w_{1,1}^2 = \omega def1, 2^2 = \frac{k+\kappa}{m}(>0) \tag{126}$$

$$w_{1,2}^2 = -\frac{k}{m}(<0) \tag{127}$$

Suche nach komplexen Loesungen

$$x_1(t) = x_1 e^{\omega deft} \tag{128}$$

$$c_1 \in C \tag{129}$$

Gleichung 128 in 124 einsetzen:

$$() \tag{130}$$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \omega def_{1,1}^2 - \omega def^2 & \omega def_{1,2}^2 \\ \omega def_{1,1}^2 & \omega def_{1,2}^2 - \omega def^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{131}$$

Lineare homogen Gleichung $\rightarrow [unleserlich]$

$$[fehlt] \tag{132}$$

Die Loesungen 132 sind die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} \omega def_{1,1}^2 & \omega def_{1,2}^2 \\ \omega def_{1,1}^2 & \omega def_{1,2} \end{pmatrix}$. Die Gleichung 131 kann auch als Eigenwert geschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} \omega def_{1,1}^2 & \omega def_{1,2}^2 \\ \omega def & \end{pmatrix} \tag{133}$$

muss ich nachher irgendwo abschreiben.

5 Lagrange und Hamilton Formalismus

Ziel: Systematische Herleitung der Bewegungsgleichungen in verallgemeinerten Koordinaten.
Vorteile:

- Fuer konservative Systeme: Relativ einfache Herleitung der Bewegungsgleichung auch in nicht Kartesischen Koordinaten.
- Grundlage beinahe aller modernen THeoretischen Physik (Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie...)

Beachte: Die resultierenden Bewegungsgleichungen sind equivalten zu den newtonschen $\rightarrow lineareSuperposition$

5.1 Verallgemeinerte Koordinaten

Fuer N-Koerper um 3D-Raum Brauchen wir 3N Koordinaten.
Kartesisch:

$$\vec{x}_i(t) = (x(t), y(t), z(t)); i = 1...N \tag{134}$$

Sind meistens nicht so bequem $\rightarrow verallgemeinerteKoordinaten$

$$\{q_k\}\text{mit } \vec{x}_i = \vec{x}_i(q_k, t) \tag{135}$$

$$\text{also } q_k = q(\vec{x}_i, t) \tag{136}$$

Beachte:

- q_k brauchte keine Laenge zu sein. oft sind Winkel bequemer
- Bezeichnung **??** koennen explizit von der Zeit abhaengen

Lagrange-Gl: Differenzialgleichungen 2. Ordnung fuer $q_k(t)$

5.2 Ein Koerper in einer Dimension

$$q(t) = q[x(t), t] \tag{137}$$

Nach x aufgeloest:

$$x(t) = x[q(t), t]\vec{x}(t) = \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x[q,t]}{\partial t} \tag{138}$$

[13]

Im Lagrange-Formalisumus werden q und $\dot{q}$ als unabhaengige Variablen behandelt. Also $\frac{\partial q}{\partial \dot{q}} = 0$ und $\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = 0$
Linearer Impuls:

$$p_x = m \cdot \dot{x} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2) = \frac{dE}{dx} \tag{139}$$

Analog verallgemeinerter Impuls:

$$p_q = \frac{\partial E(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial q}[\frac{1}{2}m\dot{x}(q, \dot{q}, t)] \tag{140}$$

$$= \frac{dE}{d\dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = p_x \frac{\partial x}{\partial q} \tag{141}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial q}(???) \tag{142}$$

Gleichung **??** nach der Zeit abgeleitet:

$$\dot{p}_q = \dot{p}_x \frac{\partial x}{\partial q} + p_x \frac{d}{dt}(\frac{\partial x}{\partial q}) \tag{143}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial x}{\partial q}) = (\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial q})\dot{q} + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial x}{\partial q}) \tag{144}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial q}\dot{x} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial x}{\partial q}) \tag{145}$$

Gl **??** in **??**

$$\dot{p}_q = \dot{p}_x \frac{\partial x}{\partial q} + p_x \frac{\partial}{\partial q}\dot{x} = F_x \frac{\partial x}{\partial q} + p_x \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \tag{146}$$

$$= F_x \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{dE_k in}{d\dot{x}} \frac{\partial x}{\partial q} = Q + \frac{\partial E_k in(\dot{x}(q, \dot{q}, t))}{\partial q} \tag{147}$$

[13] $\frac{dq}{dt}$ ist eine verallgemeinerte geschwindigkeit

$$\text{mit } Q(q,\dot{q},t) = F_x(x,\dot{x},t)\frac{\partial x}{\partial q} \text{ : Verallgemeinerte Kraft} \tag{148}$$

Koennen Kraft F aufspalten in konservativen Teil und Rest:

$$F_x(x,\dot{x},t) = -\frac{dV(x)}{dx} + \tilde{F}(x,\dot{x},t) \tag{149}$$

$$Q(q,\dot{q},t) = -\frac{dV}{dx}\frac{\partial x}{\partial q} + \tilde{F}_x(x(q,t),\dot{x}(q,\dot{q},t),t) \tag{150}$$

$$= -\frac{\partial V(q,t)}{\partial q} + \tilde{Q} \tag{151}$$

Beachte: V als Funktion von q, t hat (natuerlich) andere funktionale Form als V(x).
z.B.:

$$V(t) = \frac{1}{2}kq???????? \tag{152}$$

Gleichung **??** in **??**:
?? $_q = \frac{\partial}{\partial q}(E_{kin} - V) + \tilde{Q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \tilde{Q}$
Lagrange Funktion

$$L = E_{kin}(q,\dot{q},t) - V(q,t) \tag{153}$$

Gleiche Form durch mehrere Koerper.
Fuer

,

$$q = x^2, x = \sqrt{q} \rightarrow \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{q}} \tag{154}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\dot{q} \rightarrow E_{kin} = \frac{m}{2}\dot{q}^2\frac{1}{4q} = \frac{m\dot{q}^2}{8q} \tag{155}$$

$$p_q = m\dot{x}\frac{1}{2\sqrt{q}} = \frac{m\dot{q}}{4q} \tag{156}$$

$$\frac{d(}{dt}\frac{m\dot{q}}{4q}) = \frac{\partial}{\partial q}(\frac{m\dot{q}^2}{8q} - \frac{1}{2}kq) = -\frac{m\dot{q}^2}{8q^2} - \frac{1}{2}k \tag{157}$$

$$\frac{m\ddot{q}}{4q} = \frac{m\dot{q}^2}{4q^2} \tag{158}$$

[hier fehlt die letzte gleichung]