1 Im Allgemeinen (1-Dim)

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \tag{1}$$

ist eine gewoehnliche DIfferentialgleichung 2. Ordnung =¿ braucht 2 Randbedingungen zum Loesen.
Am einfchsten: lege $x(t_0), \dot{x}(t_0)$ fest, dann ist $x(t)$ eindeutig bestimmt.
Numerische Loesung:
Fange an bei $t = t_0$. $a(t_0) = \frac{F(x(t_0),\dot{x}(t_0),t_0)}{m}$
Zur Zeit $t = t_0 + \Delta t$, mit Δt inifinitesimal:

$$v(t_1) = v(t_0) + \Delta t \cdot a(t_0) \tag{2}$$

$$x(t_1) = x(t_0) + \Delta t \cdot v(t_0) \tag{3}$$

$$a(t_1) = \frac{F(x(t_1), \dot{x}(t_1), t1)}{m} \tag{4}$$

etc.

Laplacesche Behauptung: Gib mir die Koordinaten & Geschwindigkeiten aller Koerper in einer feten Zeit und ich kann die Zukunft vorhersagen.

Aber:

1. man kennt nicht alle kraefte
2. in vielen Faellen haengt die Bahnkurve sehr sensitiv von den Anfangsbedingungen ab: Falls $x(t_0) -> x(t_0)(1+\epsilon), |\epsilon| << 1, \frac{x'(t)-x(t)}{x(t)}$ kann recht bald $O(1)$ werden. [1]

   "chaotische" Systeme, "deterministisches Chaos"

   Beachte: $X(t_0), \dot{x}(t_0)$ immer nur mit endlichen Genauigkeiten bekannt.

1.1 Methoden zum Loesen der Bewegungsgleichung (1-dim)

F haengt nur von x ab

$$m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} = F(x) \tag{5}$$

Kettenregel:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx} \tag{6}$$

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x)\text{Trennung der Variablen} \tag{7}$$

$$m\int_{v_0}^{v} v'dv' = \int_{x_0}^{x} F(x')dx' \tag{8}$$

$$=> \frac{1}{2}m(v^2(x) - v^2(x_0)) \tag{9}$$

$$=> v(x) = \pm[v^2(x_0) + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(x')dx']^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$=> \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{[\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(x')dx' + v^2(x_0)]^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

[1] $O(1)$ ist die Groessenordnung von 1, bedeutet hier, dass der Fehler 100% wird.

F haengt nur von v ab

$$m\frac{dv}{dt} = F(v) \tag{12}$$

$$=> m\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0 \tag{13}$$

loese nach $v(t)$ auf:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')dt' \tag{14}$$

F haengt nur von t ab

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \tag{15}$$

$$m[v(t) - v(t_0)] = \int_{t_0}^{t} F(t')dt' \tag{16}$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)\cdot(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' F(t'') \tag{17}$$

"Durch geschickten Ansatz"

Beispiel:
Angetriebener, gedaempfter harmonischer Oszillator.[2]
x: Auslenkung aus Ruhelage (fuer $F_{ext} = 0$)

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F\cos(\omega t) \tag{18}$$

$$=> \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f\cos(\omega t) \tag{19}$$

mit

$$\gamma = \frac{b}{2m} \tag{20}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{21}$$

$$f = \frac{f}{m} \tag{22}$$

Inhomogene gewoehnliche Differenzialgleichung. Allgemeine Loesung.

$$x(t) = [\text{allgemeine Loesung d. homogenen DiffGl.}] \tag{23}$$

$$+\ \text{spezielle Loesung der homogenen Gleichung} \tag{24}$$

Fuer spezielle Loesung definiere Komplexe Beschleunigung $fe^{i\omega t}$ und komlexe Koordinate z, mit

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = fe^{i\omega t} \tag{25}$$

[2]hier kommt eine tolle skizze von einem harmonischen oszillator hin