1 Im Allgemeinen (1-Dim)

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \tag{1}$$

ist eine gewoehnliche DIfferentialgleichung 2. Ordnung =¿ braucht 2 Randbedingungen zum Loesen.
Am einfchsten: lege $x(t_0), \dot{x}(t_0)$ fest, dann ist $x(t)$ eindeutig bestimmt.
Numerische Loesung:
Fange an bei $t = t_0$. $a(t_0) = \frac{F(x(t_0),\dot{x}(t_0),t_0)}{m}$
Zur Zeit $t = t_0 + \Delta t$, mit Δt inifinitesimal:

$$v(t_1) = v(t_0) + \Delta t \cdot a(t_0) \tag{2}$$

$$x(t_1) = x(t_0) + \Delta t \cdot v(t_0) \tag{3}$$

$$a(t_1) = \frac{F(x(t_1), \dot{x}(t_1), t1)}{m} \tag{4}$$

etc.

Laplacesche Behauptung: Gib mir die Koordinaten & Geschwindigkeiten aller Koerper in einer feten Zeit und ich kann die Zukunft vorhersagen.

Aber:

1. man kennt nicht alle kraefte
2. in vielen Faellen haengt die Bahnkurve sehr sensitiv von den Anfangsbedingungen ab: Falls $x(t_0) -> x(t_0)(1+\epsilon), |\epsilon| << 1, \frac{x'(t)-x(t)}{x(t)}$ kann recht bald $O(1)$ werden. [1]

   "chaotische" Systeme, "deterministisches Chaos"

   Beachte: $X(t_0), \dot{x}(t_0)$ immer nur mit endlichen Genauigkeiten bekannt.

1.1 Methoden zum Loesen der Bewegungsgleichung (1-dim)

F haengt nur von x ab

$$m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} = F(x) \tag{5}$$

Kettenregel:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx} \tag{6}$$

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x)\text{Trennung der Variablen} \tag{7}$$

$$m\int_{v_0}^{v} v'dv' = \int_{x_0}^{x} F(x')dx' \tag{8}$$

$$=> \frac{1}{2}m(v^2(x) - v^2(x_0)) \tag{9}$$

$$=> v(x) = \pm[v^2(x_0) + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(x')dx']^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$=> \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{[\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(x')dx' + v^2(x_0)]^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

[1] $O(1)$ ist die Groessenordnung von 1, bedeutet hier, dass der Fehler 100% wird.

F haengt nur von v ab

$$m\frac{dv}{dt} = F(v) \tag{12}$$
$$=> m\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0 \tag{13}$$

loese nach $v(t)$ auf:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')dt' \tag{14}$$

F haengt nur von t ab

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \tag{15}$$

$$m[v(t) - v(t_0)] = \int_{t_0}^{t} F(t')dt' \tag{16}$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)\cdot(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt''F(t'') \tag{17}$$

"Durch geschickten Ansatz"

Beispiel:
Angetriebener, gedaempfter harmonischer Oszillator.[2]
x: Auslenkung aus Ruhelage (fuer $F_{ext} = 0$)

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F\cos(\omega t) \tag{18}$$
$$=> \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f\cos(\omega t) \tag{19}$$

mit

$$\gamma = \frac{b}{2m} \tag{20}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{21}$$

$$f = \frac{f}{m} \tag{22}$$

Inhomogene gewoehnliche Differenzialgleichung. Allgemeine Loesung.

$$x(t) = [\text{allgemeine Loesung d. homogenen DiffGl.}] \tag{23}$$
$$+ \text{spezielle Loesung der homogenen Gleichung} \tag{24}$$

Fuer spezielle Loesung definiere Komplexe Beschleunigung $fe^{i\omega t}$ und komlexe Koordinate z, mit

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = fe^{i\omega t} \tag{25}$$

[2] hier kommt eine tolle skizze von einem harmonischen oszillator hin

Funktioniert, da 18 linear ist: Keine Terme mit $x^2, \dot{x}^2$ etc.
Ansatz:

$$zt = \frac{f}{R} e^{i\omega t}, R = const \tag{26}$$

$$\dot{z}(t) = i\omega z(t), \ddot{z}(t) = -\omega^2 \cdot z(t) \tag{27}$$

durch einsetzen 27 in 25 ergibt sich:

$$[-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2] = 1 \tag{28}$$

$$=> R =_0^2 + \omega^2 + 2i\omega\gamma = re^{i\theta}, r, t \in \Re \tag{29}$$

$$\tan\theta = \frac{Im(R)}{Re(R)} = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{30}$$

Beachte: 26 ist nicht die allgemeinste Loesung. Es wird weiterhin eine Loesung der homogenen Gleichung benoetigt um die Anfangsbedingungen zu erfuellen.
Fuer feste f: maximale Auslenkung $\frac{f}{r}$ am groessten wenn r^2 minimiert wird.

$$\frac{dr^2}{d\omega^2} = 2(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = \sigma \tag{31}$$

$$=> \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \tag{32}$$

$$r^2(\omega_r) = 4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2) \tag{33}$$

Fuer schwache Daempfung, $\gamma^2 << \omega_0^2 : \omega_r \approx \omega_0$: Eigenfrequenz der Schwingung:

$$\tan\theta = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\omega\gamma}{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)} \approx^{3} \frac{\gamma}{\omega_0 - \omega} \tag{34}$$

Allg Loesung: fuer $\gamma < \omega_0$: unter-kritisch

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \alpha) + \frac{f}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}}\cos[\omega t - \arctan(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})] \tag{35}$$

$$= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{36}$$

C, α: Integrationskonstanten, (-¿ Anfangsbedingungen)
Fuer externe Kraft $F_{ext} = mf\sin(\omega t)$ Loesung aus Imaginaer-Teil von 26
Beliebige periodische externe Kraft: Durch Fourier-Zerlegung:

$$\frac{1}{m}F_{ext}(t) = \sum_{n=1}^{\alpha}[f_n\cos(n\omega t) + \tilde{f}_n\sin(n\omega t)] \tag{37}$$

Da 25 linear ist: einsetzen in 35 die spezielle Loesung durch entsprechende Summe spezieller Loesungen.

2 Kinetische und potenzielle Energie

Zunaechst in einer Dimension, fuer Koerper mit konstanter Masse:

$$m\ddot{x} = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(}{dt}mv) = F(x, v, t) \tag{38}$$

multiplizieren mit v

$$v\frac{d(}{dt}mv) = vF(x, v, t) \tag{39}$$

$$\frac{d(}{dt}\frac{1}{2}mv^2) \tag{40}$$

Integrieren nach t ergibt

$$\frac{1}{2}m(v^2(t_2) - v^2(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt}F(x, v, t) = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(x, v, t)dx \tag{41}$$

Definiere Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{42}$$

Die Gleichung 41 besagt: Aenderung der kinetischen Energie entspricht der geleisteten Arbeit.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x, v(x), t(x))dx \tag{43}$$

Im Allgemeinen muessen wir $x(t)$ kennen um 43 berechnen zu koennen; kenntnis von $x_1 = x(t_1)$ und $x_2 = x(t_2)$ ist nicht ausreichend.

Wichtiger Spezialfall: F haengt nur von ab.

=¿ definiere potenzielle Energie

$$V(x) = \int_{x_n}^{x} F(x')dx' \tag{44}$$

In diesem Fall:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = V(x_2) - V(x_1) \tag{45}$$

$$=> 41 E_{kin}(t_2) - E_{kin}(t_1) = V(x_2) - V(x_1) \tag{46}$$

$$=> E_{kin}(t_1) + V(x(t_1)) = E_{kin}(t_2) + V(x(t_2)) \tag{47}$$

$$=> E_{tot} = E_{kin} + V \text{ist erhalten! Bedingung: F haengt nur von x ab} \tag{48}$$

Vorlesung 4

GLeichung 44 aufgeloest nach F:

$$F(x) = \frac{dV(x)}{dx} \tag{49}$$

is nicht abheangig von x_n =¿ wahl von x_n ist beliebig.

Eine Kraft die wie **??** ausgedrueckt werden kann heisst konservativ.

Fuer 1-dim Bewegung ist 49 hinreichend und notwendig fuer ENergieerhaltung.

Beispiel

Hooksches Gesetz, F_H**??** $= -kx$. Waehle $x_0 = 0 =¿$

$$V_H = \frac{1}{2}Kx^2 \tag{50}$$

Harmonischer ungedaempfter Oszillator:

$$x(t) = c * \cos(\omega_0 t + \alpha)\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{51}$$

$$\dot{x} = -\omega_0 C \sin(\omega_0 t + \alpha) \tag{52}$$

$$=> \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{1}{2}kC^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \tag{53}$$

$$= \frac{1}{2}KC^2 = const. \tag{54}$$

Durch Ausnutzen der ENergieerhaltung koennen wir nach $\dot{x}$ aufloesen =¿ nun haben wir eine DGL 1. Ordnung! (Beispiel **??**)

2.1 Vermutlich ein neuer Sinnabschnitt

Falls F explizit von $\dot{x}$ oder t abhaengt ist E_{tot} (des Koerper) nicht erhalten.

- F haengt von $\dot{x}$ ab (Reibung): Koerper verliert Energie als Waerme and die Umgebung
- F haengt von t ab: "Treibende Kraft", System ist nicht abgeschlossen. Im abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie erhalten.

2.1.1 Anwendung

Fluchtgeschwindigkeit
Gravitationspotenzial

$$V(x) = \int_{-\infty}^{x} (-\frac{Gmm_E}{x^2})dx \tag{55}$$

$$= -Gmm_E \int_{\infty}^{x} \frac{dx'}{x'^2} \tag{56}$$

$$= \frac{Gmm_E}{x'} = \textbf{??}\frac{mgR_e^2}{x} \tag{57}$$

Fluchtgeschwindigkeit:

$$V(x->\infty)->0 \text{d.h.:} E_{tot} = 0 \tag{58}$$

D.h. am Startpunkt, $x = R_E$ ist $\frac{1}{2}mv_f^2 - mgR_e = 0$

$$v_f = \sqrt{2gR_e} \approx 11\frac{km}{s} \tag{59}$$

2.2 In 3 Dimensionen

Wir beschreiben Bewegung durch Vektoren $\vec{x}$.
Definition: Vektoren sind Groessen, die sich unter Roatationen um den Ursprung verhalten wie $\vec{x}$.
$\vec{x} =$ **??**$\vec{O}\vec{x}$ mit O einer orthagonalen Matrix.

Im kartesichend Koordinatensystem:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3) \tag{60}$$

$$\vec{a} - > O\vec{a}\text{oder} \sum_i O_{i,j} a_j \tag{61}$$

$|\vec{a}| - > |\vec{a}|$, allgemeiner $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i - > \vec{a} \cdot \vec{b}$ ist invariant.
In n Dimensionen O hat hat $\frac{n(n-1)}{2}$ freie Parameter.

$$n = 2 : O = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{62}$$

n=3 3 Winkel z.B $\overleftrightarrow{O}$ als Produkt von Rotationen.
Masse ist ein Skalar =¿ F ist ein Vektor
Kreuzprodukt ist ein vektor:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k} a_j b_k \tag{63}$$

$\epsilon_{i,j,k}$ ist total anti-symmetrisch

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i \rightarrow \sum_{j,k} \sum_{j',k'} \epsilon_{i,j,k} O_{j,j'} a_{j'} bk' = \sum_{i',j',k'} \epsilon_{i',j',k'} O_{j,j'} O_{k,k'} a_{j'} b_{k'} \tag{64}$$

$$= \sum_{i'} O_{i,i'} (\vec{a} \times \vec{b})_{i'} \tag{65}$$

Muessen zeigen: [4] [5] [6]

$$\sum_{j',k'} \epsilon_{i,j,k} O_{j,j'} O_{k,k'} = \sum_{i'} \epsilon_{i',j',k'} O_{i,i'} \tag{66}$$

$j' = k'$: Beide Seiten $= 0$. $\epsilon_{i,j,k} = -\epsilon_{i,k,j}$, $O_{i,j} O_{k,j'} = O_{k,j'} O_{j,j'}$
$j' = 2$, $k' = 3$ [7]

2.2.1 Spiegelungen

$\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ echte Vektoren aendern ihr Vorzeichen unter Spiegelung. z.B.: $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$, $\vec{a} \rightarrow -\vec{a}$ aber wenn $\vec{a}, \vec{b}$ echte vektoren sind, dann $\vec{a} \times \vec{b} \rightarrow (-\vec{a}) \times (-\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$ aendert sein Vorzeichen nicht.
=¿ $\vec{a} \times \vec{b}$ ist Pseudo- oder Axialvektor.

2.2.2 Konservative Kraefte in 3-Dim

Newton 2: $\frac{d(}{dt} m\vec{v}) = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ Jede Komponente von F kann von allen Komponenten von $\vec{v}, \vec{x}$ abhaengen.

$$\rightarrow \frac{d(}{dt} m\vec{v}) = \vec{v}\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \tag{67}$$

$$\rightarrow \frac{d(}{dt} \frac{1}{2} m\vec{v}\vec{v}) = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \cdot \frac{dx}{dt} \tag{68}$$

$$\rightarrow d(\frac{1}{2} m\vec{v}^2) = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \cdot d\vec{x} \tag{69}$$

$$\rightarrow E_{kin}(\vec{x}_2) - E_{kin}(\vec{x}_1) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x}\text{: Linienintegral} \tag{70}$$

[4] what the actual fuck?! thank you for coming to my TED talk
[5] the indices might be very fucking wrong, someone please check them!! (text me if you find errors!)
[6] ok, i give up. you can't read shit this dude writes and his explenations are bad at best. someone please give me handwritten notes and i'll add the proofs in!
[7] some eqauations have been omitted

Mechanische Energie ist nur dann erhalten, wenn die Arbeit unabhaengig von Weg $\vec{x}(t)$ ist. Alle Bahnen mit $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1, \vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$ muessen gleiche Ergebnisse liefern. Potenzielle Energie it nur dann definiert, falls $\vec{F}$ nicht explizit von oder t abhaengt.

$$V(\vec{x}) = -\int_{x_1} x_2 \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \tag{71}$$

Die Gleichung 71 ist nich automatisch wohl definiert!
Wir betrachten ein infinitesimales Wegstueck in der (y, z) Ebene: [8]
Zu zeigen: $V(\vec{x})_{Weg1} - V(\vec{x})_{Weg2} = 0$

$$= -[dzF_z(\vec{x}_n) + dyF_y(x_n, y_n, z_n + dz)] + [dyF_y(\vec{x}) + dzF_z(x_n, y_n + dy, z_n)] \tag{72}$$
$$= dy[F_y(\vec{x}) - F_y(x_n, y_n, z_n + dz)] + dz[dzF_z(x_n, y_n + dy, z_n) - F_z(\vec{x})] \tag{73}$$
$$= -dydz(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}) = 0 \tag{74}$$
$$\rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \tag{75}$$
$$\rightarrow (\nabla \times \vec{F})_x = 0 \tag{76}$$

Durch analoge Betrachtung in (x, z) und (x, y) Ebene: $(\nabla \times \vec{F})_y = (\nabla \times \vec{F})_z = 0$
Die Gleichung 71 ist wohldefiniert, falls

$$\nabla \times \vec{F} = rotF = 0 \tag{77}$$

. Dies ist ein konservatives Kraftfeld.

[8] hier kaeme eine skizze