

# 1 Im Allgemeinen (1-Dim)

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \quad (1)$$

ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung = braucht 2 Randbedingungen zum Lösen.

Am einfachsten: lege  $x(t_0), \dot{x}(t_0)$  fest, dann ist  $x(t)$  eindeutig bestimmt.

Numerische Lösung:

Fange an bei  $t = t_0$ .  $a(t_0) = \frac{F(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0)}{m}$

Zur Zeit  $t = t_0 + \Delta t$ , mit  $\Delta t$  infinitesimal:

$$v(t_1) = v(t_0) + \Delta t \cdot a(t_0) \quad (2)$$

$$x(t_1) = x(t_0) + \Delta t \cdot v(t_0) \quad (3)$$

$$a(t_1) = \frac{F(x(t_1), \dot{x}(t_1), t_1)}{m} \quad (4)$$

etc.

Laplace'sche Behauptung: Gib mir die Koordinaten & Geschwindigkeiten aller Körper in einer festen Zeit und ich kann die Zukunft vorhersagen.

Aber:

1. man kennt nicht alle Kräfte
2. in vielen Fällen hängt die Bahnkurve sehr sensitiv von den Anfangsbedingungen ab: Falls  $x(t_0) - x(t_0)(1 + \epsilon), |\epsilon| \ll 1, \frac{x'(t) - x(t)}{x(t)}$  kann recht bald  $O(1)$  werden. <sup>1</sup>

“chaotische” Systeme, “deterministisches Chaos”

Beachte:  $X(t_0), \dot{x}(t_0)$  immer nur mit endlichen Genauigkeiten bekannt.

## 1.1 Methoden zum Lösen der Bewegungsgleichung (1-dim)

**F hängt nur von x ab**

$$m\ddot{x} = m \frac{dv}{dt} = F(x) \quad (5)$$

Kettenregel:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx} \quad (6)$$

$$mv \frac{dv}{dx} = F(x) \text{ Trennung der Variablen} \quad (7)$$

$$m \int_{v_0}^v v' dv' = \int_{x_0}^x F(x') dx' \quad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m (v^2(x) - v^2(x_0)) \quad (9)$$

$$\Rightarrow v(x) = \pm [v^2(x_0) + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x') dx']^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{[\frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x') dx' + v^2(x_0)]^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

---

<sup>1</sup> $O(1)$  ist die Größenordnung von 1, bedeutet hier, dass der Fehler 100% wird.

**F haengt nur von v ab**

$$m \frac{dv}{dt} = F(v) \quad (12)$$

$$\Rightarrow m \int_{v_0}^v \frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0 \quad (13)$$

loese nach  $v(t)$  auf:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (14)$$

**F haengt nur von t ab**

$$m \frac{dv}{dt} = F(t) \quad (15)$$

$$m[v(t) - v(t_0)] = \int_{t_0}^t F(t') dt' \quad (16)$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' F(t'') \quad (17)$$

**“Durch geschickten Ansatz”**

Beispiel:

Angetriebener, gedampfter harmonischer Oszillator.<sup>2</sup>

$x$ : Auslenkung aus Ruhelage (fuer  $F_{ext} = 0$ )

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F \cos(\omega t) \quad (18)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\omega t) \quad (19)$$

mit

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad (20)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (21)$$

$$f = \frac{F}{m} \quad (22)$$

Inhomogene gewoehnliche Differenzialgleichung. Allgemeine Loesung.

$$x(t) = [\text{allgemeine Loesung d. homogenen DiffGl.}] \quad (23)$$

$$+ \text{spezielle Loesung der homogenen Gleichung} \quad (24)$$

Fuer spezielle Loesung definiere Komplexe Beschleunigung  $f e^{i\omega t}$  und komplexe Koordinate  $z$ , mit

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f e^{i\omega t} \quad (25)$$

---

<sup>2</sup>hier kommt eine tolle skizze von einem harmonischen oszillator hin

Funktioniert, da 18 linear ist: Keine Terme mit  $x^2, \dot{x}^2$  etc.  
Ansatz:

$$z(t) = \frac{f}{R} e^{i\omega t}, R = \text{const} \quad (26)$$

$$\dot{z}(t) = i\omega z(t), \ddot{z}(t) = -\omega^2 \cdot z(t) \quad (27)$$

durch einsetzen 27 in 25 ergibt sich:

$$[-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2] = 1 \quad (28)$$

$$\Rightarrow R = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} = r e^{i\theta}, r, \theta \in \mathbb{R} \quad (29)$$

$$\tan \theta = \frac{\text{Im}(R)}{\text{Re}(R)} = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (30)$$

Beachte: 26 ist nicht die allgemeinste Lösung. Es wird weiterhin eine Lösung der homogenen Gleichung benötigt um die Anfangsbedingungen zu erfüllen.

Für feste  $f$ : maximale Auslenkung  $\frac{f}{r}$  am größten wenn  $r^2$  minimiert wird.

$$\frac{dr^2}{d\omega^2} = 2(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = 0 \quad (31)$$

$$\Rightarrow \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \quad (32)$$

$$r^2(\omega_r) = 4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2) \quad (33)$$

Für schwache Dämpfung,  $\gamma^2 \ll \omega_0^2$ :  $\omega_r \approx \omega_0$ : Eigenfrequenz der Schwingung:

$$\tan \theta = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\omega\gamma}{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)} \approx 3 \frac{\gamma}{\omega_0 - \omega} \quad (34)$$

Allg Lösung: für  $\gamma < \omega_0$ : unter-kritisch

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\Omega t + \alpha) + \frac{f}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}} \cos[\omega t - \arctan(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})] \quad (35)$$

$$= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (36)$$

$C, \alpha$ : Integrationskonstanten, (-i Anfangsbedingungen)

Für externe Kraft  $F_{ext} = m f \sin(\omega t)$  Lösung aus Imaginär-Teil von 26

Beliebige periodische externe Kraft: Durch Fourier-Zerlegung:

$$\frac{1}{m} F_{ext}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n \cos(n\omega t) + \tilde{f}_n \sin(n\omega t)] \quad (37)$$

Da 25 linear ist: einsetzen in 35 die spezielle Lösung durch entsprechende Summe spezieller Lösungen.

## 2 Kinetische und potenzielle Energie

Zunächst in einer Dimension, fuer Körper mit konstanter Masse:

$$m\ddot{x} = m \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = F(x, v, t) \quad (38)$$

multiplizieren mit  $v$

$$v \frac{d}{dt}(mv) = vF(x, v, t) \quad (39)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) \quad (40)$$

Integrieren nach  $t$  ergibt

$$\frac{1}{2} m(v^2(t_2) - v^2(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt} F(x, v, t) dt = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(x, v, t) dx \quad (41)$$

Definiere Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2 \quad (42)$$

Die Gleichung 41 besagt: Änderung der kinetischen Energie entspricht der geleisteten Arbeit.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x, v(x), t(x)) dx \quad (43)$$

Im Allgemeinen müssen wir  $x(t)$  kennen um 43 berechnen zu können; Kenntnis von  $x_1 = x(t_1)$  und  $x_2 = x(t_2)$  ist nicht ausreichend.

Wichtiger Spezialfall:  $F$  hängt nur von  $x$  ab.

=> definiere potenzielle Energie

$$V(x) = \int_{x_n}^x F(x') dx' \quad (44)$$

In diesem Fall:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = V(x_2) - V(x_1) \quad (45)$$

$$\Rightarrow 41 E_{kin}(t_2) - E_{kin}(t_1) = V(x_2) - V(x_1) \quad (46)$$

$$\Rightarrow E_{kin}(t_1) + V(x(t_1)) = E_{kin}(t_2) + V(x(t_2)) \quad (47)$$

$$\Rightarrow E_{tot} = E_{kin} + V \text{ ist erhalten! Bedingung: } F \text{ hängt nur von } x \text{ ab} \quad (48)$$

## Vorlesung 4

Gleichung 44 aufgelöst nach  $F$ :

$$F(x) = \frac{dV(x)}{dx} \quad (49)$$

ist nicht abhängig von  $x_n$  => Wahl von  $x_n$  ist beliebig.

Eine Kraft die wie ?? ausgedrückt werden kann heißt konservativ.

Fuer 1-dim Bewegung ist 49 hinreichend und notwendig fuer Energieerhaltung.

## Beispiel

Hooksches Gesetz,  $F_H = -kx$ . Wähle  $x_0 = 0$  und

$$V_H = \frac{1}{2}Kx^2 \quad (50)$$

Harmonischer ungedämpfter Oszillator:

$$x(t) = c \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (51)$$

$$\dot{x} = -\omega_0 C \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (52)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \frac{1}{2}kC^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (53)$$

$$= \frac{1}{2}KC^2 = \text{const.} \quad (54)$$

Durch Ausnutzen der Energieerhaltung können wir nach  $\dot{x}$  auflösen und nun haben wir eine DGL 1. Ordnung! (Beispiel ??)

## 2.1 Vermutlich ein neuer Sinnabschnitt

Falls  $F$  explizit von  $\dot{x}$  oder  $t$  abhängt ist  $E_{tot}$  (des Körpers) nicht erhalten.

- $F$  hängt von  $\dot{x}$  ab (Reibung): Körper verliert Energie als Wärme an die Umgebung
- $F$  hängt von  $t$  ab: "Treibende Kraft", System ist nicht abgeschlossen. Im abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie erhalten.

### 2.1.1 Anwendung

Fluchtgeschwindigkeit  
Gravitationspotenzial

$$V(x) = \int_{-\infty}^x \left(-\frac{Gmm_E}{x'^2}\right) dx' \quad (55)$$

$$= -Gmm_E \int_{\infty}^x \frac{dx'}{x'^2} \quad (56)$$

$$= \frac{Gmm_E}{x'} = ?? \frac{mgR_e^2}{x} \quad (57)$$

Fluchtgeschwindigkeit:

$$V(x \rightarrow \infty) = 0 \text{ d.h. } E_{tot} = 0 \quad (58)$$

D.h. am Startpunkt,  $x = R_E$  ist  $\frac{1}{2}mv_f^2 - mgR_e = 0$

$$v_f = \sqrt{2gR_e} \approx 11 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (59)$$

## 2.2 In 3 Dimensionen

Wir beschreiben Bewegung durch Vektoren  $\vec{x}$ .

Definition: Vektoren sind Größen, die sich unter Rotationen um den Ursprung verhalten wie  $\vec{x}$ .  
 $\vec{x} = O \vec{x}$  mit  $O$  einer orthogonalen Matrix.

Im kartesisch Koordinatensystem:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3) \quad (60)$$

$$\vec{a} = \sum_i O_{i,j} a_j \quad (61)$$

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , allgemeiner  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i = \vec{a} \cdot \vec{b}$  ist invariant.

In n Dimensionen O hat  $\frac{n(n-1)}{2}$  freie Parameter.

$$n=2: O = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (62)$$

n=3 3 Winkel z.B.  $\vec{O}$  als Produkt von Rotationen.

Masse ist ein Skalar  $\vec{F}$  ist ein Vektor

Kreuzprodukt ist ein Vektor:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{i,j,k} a_j b_k \quad (63)$$

$\epsilon_{i,j,k}$  ist total anti-symmetrisch

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i \rightarrow \sum_{j,k} \sum_{j',k'} \epsilon_{i,j,k} O_{j,j'} a_{j'} b_{k'} = \sum_{i',j',k'} \epsilon_{i',j',k'} O_{j,j'} O_{k,k'} a_{j'} b_{k'} \quad (64)$$

$$= \sum_{i'} O_{i,i'} (\vec{a} \times \vec{b})_{i'} \quad (65)$$

Müssen zeigen: <sup>4 5 6</sup>

$$\sum_{j',k'} \epsilon_{i,j,k} O_{j,j'} O_{k,k'} = \sum_{i'} \epsilon_{i',j',k'} O_{i,i'} \quad (66)$$

$j' = k'$ : Beide Seiten = 0.  $\epsilon_{i,j,k} = -\epsilon_{i,k,j}$ ,  $O_{i,j} O_{k,j'} = O_{k,j'} O_{j,j'}$   
 $j' = 2, k' = 3$  <sup>7</sup>

### 2.2.1 Spiegelungen

$\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$  echte Vektoren ändern ihr Vorzeichen unter Spiegelung. z.B.:  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ ,  $\vec{a} \rightarrow -\vec{a}$  aber wenn  $\vec{a}, \vec{b}$  echte Vektoren sind, dann  $\vec{a} \times \vec{b} \rightarrow (-\vec{a}) \times (-\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$  ändert sein Vorzeichen nicht.

$\vec{a} \times \vec{b}$  ist Pseudo- oder Axialvektor.

### 2.2.2 Konservative Kräfte in 3-Dim

Newton 2:  $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$  Jede Komponente von F kann von allen Komponenten von  $\vec{v}, \vec{x}$  abhängen.

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{v} \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \quad (67)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v} \vec{v} \right) = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (68)$$

$$\rightarrow d \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \cdot d\vec{x} \quad (69)$$

$$\rightarrow E_{kin}(\vec{x}_2) - E_{kin}(\vec{x}_1) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{x}: \text{Linienintegral} \quad (70)$$

<sup>4</sup>what the actual fuck?! thank you for coming to my TED talk

<sup>5</sup>the indices might be very fucking wrong, someone please check them!! (text me if you find errors!)

<sup>6</sup>ok, i give up. you can't read shit this dude writes and his explanations are bad at best. someone please give me handwritten notes and i'll add the proofs in!

<sup>7</sup>some equations have been omitted

Mechanische Energie ist nur dann erhalten, wenn die Arbeit unabh angig von Weg  $\vec{x}(t)$  ist. Alle Bahnen mit  $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1, \vec{x}(t_2) = \vec{x}_2$  muessen gleiche Ergebnisse liefern. Potenzielle Energie ist nur dann definiert, falls  $\vec{F}$  nicht explizit von oder  $t$  abhaengt.

$$V(\vec{x}) = - \int_{x_1} x_2 \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \quad (71)$$

Die Gleichung 71 ist nicht automatisch wohl definiert!

Wir betrachten ein infinitesimales Wegstueck in der (y, z) Ebene: <sup>8</sup>

Zu zeigen:  $V(\vec{x})_{Weg1} - V(\vec{x})_{Weg2} = 0$

$$= -[dzF_z(\vec{x}_n) + dyF_y(x_n, y_n, z_n + dz)] + [dyF_y(\vec{x}) + dzF_z(x_n, y_n + dy, z_n)] \quad (72)$$

$$= dy[F_y(\vec{x}) - F_y(x_n, y_n, z_n + dz)] + dz[dzF_z(x_n, y_n + dy, z_n) - F_z(\vec{x})] \quad (73)$$

$$= -dydz\left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right) = 0 \quad (74)$$

$$\rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \quad (75)$$

$$\rightarrow (\nabla \times \vec{F})_x = 0 \quad (76)$$

Durch analoge Betrachtung in (x, z) und (x, y) Ebene:  $(\nabla \times \vec{F})_y = (\nabla \times \vec{F})_z = 0$

Die Gleichung 71 ist wohldefiniert, falls

$$\nabla \times \vec{F} = \text{rot} F = 0 \quad (77)$$

. Dies ist ein konservatives Kraftfeld.

---

<sup>8</sup>hier kaeme eine skizze