Matematika Komputer

Fungsi Polinom

Ahmad Rio Adriansyah
arasy@nurulfikri.ac.id

Tujuan pembelajaran

1. Menjelaskan algoritma pembagian sukubanyak.
2. Menentukan derajat suku banyak hasil bagi dan sisa pembagian dalam algoritma pembagian.
3. Menentukan hasil bagi dan sisa pembagian suku banyak oleh bentuk linear atau kuadrat.
4. Menentukan sisa pembagian suku banyak dengan teorema sisa atau teorema faktor.
5. Menentukan akar fungsi polinom dengan metode horner

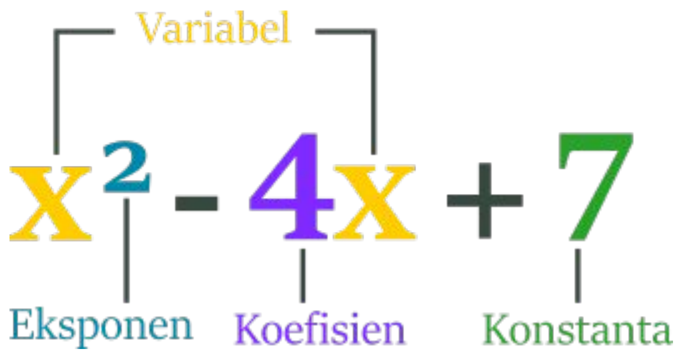
Polinomial

- Secara etimologis polinomial merupakan gabungan dua akar kata yunani yang berbeda, yaitu poly yang berarti “banyak” dan nomen yang berarti “nama”. Dapat disederhanakan menjadi penggunaan “banyak nama”.
- Polinomial dapat dipahami sebagai sebuah ekspresi yang terdiri dari variabel, konstanta, dan eksponen dengan melibatkan operasi matematika.

Berikut contoh dari variabel, konstanta, dan eksponen :

- Variable, contoh : x, y, z, n, dan lain-lain.
- Konstanta, contoh : 1, 2, 3, dan lain-lain.
- Eksponen, contoh : angka 2 pada x^2

Polinomial



Derajat polinomial

Bentuk umum :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Polinomial	Derajat	Contoh
Konstanta	0	6
Linear	1	$3x + 1$
Kuadratik	2	$4x^2 + x + 1$
Kubik	3	$6x^3 + 4x^3 + 3x + 1$
Kuartik	4	$6x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Tipe Polinomial

1. **Monomial,** ekspresi yang terdiri atas satu “term”, contoh : $5x$, $6y$, x^2
2. **Binomial,** ekspresi yang terdiri atas dua “term”, contoh : $4x+3$, $2x+y$
3. **Trinomial,** ekspresi yang terdiri atas tiga “term”, contoh : $4x^2 + 9x + 7$

Polinomial dan operasi

Bak kamar mandi Andi berbentuk balok. Dengan panjang bak adalah 2 dm lebih dari lebarnya, Sedangkan tingginya 1 dm lebih dari lebarnya. Jika bak tersebut diisi air hingga penuh, volume air yang mampu ditampung adalah 120 liter. Bagaimana model matematikanya?

Penyelesaian

Misal, x = lebar bak (dalam dm) dan $V(x)$ = volumenya, sehingga :

panjang = $x + 2$ dan tinggi = $x + 1$

Volume = panjang x lebar x tinggi

$$V(x) = (x + 2)(x)(x + 1)$$

$$= x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$120 = x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 120$$

Ini bentuk polinomial (sukubanyak)

Note : jangan lupa satuannya disamakan $1\ L = 1\ dm^3$

Penjumlahan dan Perkalian Suku Banyak

Contoh :

1. $(3x^2 + 4x - 1) + (2x^4 + x^2 - 5x + 4)$
2. $(3x^2 + 4x + 1) - (4x^4 + x^2 + x + 3)$
3. $(7x^2 + 4x - 8) + (2x^4 + x^2 - 5x)$
4. $(x^2 + 4x) + (x^4 + 3x^2 - 5x)$

Contoh :

1. $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$
2. $x(x - 1)(x + 2) = x(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x$
3. $x^2(x - 1)(x + 2) = x^2(x^2 + x - 2) = x^4 + x^3 - 2x^2$

Contoh :

Diketahui :

$p(x) = ax^2 + bx + 7$

$q(x) = 3x^3 + (a + b)x^2 + (a - b)x - 8$

$r(x) = 3x^3 + 7x^2 + 2x - 1$

Jika $r(x) = p(x) + q(x)$, tentukan nilai a dan b.

Contoh :

Diketahui :

$$\frac{7x-14}{(x-4)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3}$$

Tentukan nilai A dan B

Derajat suatu polinom dihitung dari pangkat (eksponen) terbesar yang koefisiennya tidak nol.

Jika ada dua buah polinom yaitu P(x) yang berderajat m dan Q(x) yang berderajat n, maka :

1. Penjumlahan P(x) dan Q(x) akan menghasilkan sebuah polinom yang berderajat max(m,n)
2. Perkalian dari P(x) dan Q(x) akan menghasilkan sebuah polinom yang berderajat m+n

Pembagian sukubanyak

1. **Pembagian bersusun**
   Caranya sama seperti pembagian bilangan bulat

   Contoh : Tentukan hasil bagi dan sisa dari pembagian

$$a.)\; x-1 \,\overline{\smash{)}\,2x^3+3x^2+4x-1}$$

$$b.)\; 2x^2-1 \,\overline{\smash{)}\,4x^3-3x^2+8x-4}$$

155

13 / 2020

13

72

65

70

65

5

Pembagian sukubanyak

2. **Pembagian dengan cara Horner (Synthetic Division)**

   P(x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

   Dituliskan ulang sebagai

   P(x) = $a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \ldots + x(a_{n-1} + a_nx)\ldots)$

Pembagi dalam bentuk (x-k)

1	2	3	4	-1
		2	5	9
	2	5	9	8

Fungsi P(x)

Hasil Pembagian

Sisa Pembagian

Contoh : Tentukan hasil bagi dan sisa dari pembagian

a). $(x^3 + 10x - 2) : (x + 1)$

b). $(x^3 + 6x^2 + 3x - 15) : (x + 3)$

c). $(2x^3 - x^2 - 1) : (2x + 3)$

d). $(4x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 7x + 2) : (2x - 1)$

Jika ada dua buah polinom yaitu P(x) yang berderajat m dan Q(x) yang berderajat n, dimana m>n maka pembagian polinom P(x) terhadap Q(x) akan menghasilkan sebuah polinom yang berderajat m-n . Sisa pembagiannya adalah sebuah polinom berderajat paling tinggi n-1 .

P(x)/Q(x) = H(x) dengan sisa S(x) atau bisa dituliskan sebagai

$$P(x) = Q(x).H(x) + S(x)$$

Misal :

$P(x) = 4x^5 + 2x^2 - 3x + 5$, sebuah polinom berderajat 5

$Q(x) = 2x^2 + x - 6$, sebuah polinom berderajat 2

Jika kita bentuk sebagai $P(x) = Q(x).H(x) + S(x)$, maka

H(x) adalah sebuah polinom berderajat 3

S(x) adalah sebuah polinom yang derajatnya 1 atau 0

Latihan

1. Tentukan nilai a dan b pada suku banyak berikut jika berlaku $p(x) + q(x) = r(x)$.

   a. $p(x) = 4x^5 + 2ax^2 + (a - 3)x + 3$

      $q(x) = 2x^4 - x^3 + bx^2 + (2b + 1)x + 1$

      $r(x) = 4x^5 + 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 4$

   b. $p(x) = x^4 + (a + b)x^3 - 2x^2 + x - 1$

      $q(x) = 2bx^3 + 2x^2 + (a - 3b)$

      $r(x) = x^4 + 7x^3 + x - 6$

2. Tentukan nilai a, b, dan c :

a. $2ax^2 + (a + 2b)x + (c - 2a) \equiv 3x^2 - x + 8$

b.

$$\frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2 - x + 1} \equiv \frac{5x^2 - 8x + 5}{(x-2)(x^2 - x + 1)}$$

3. Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian berikut :

a. $(2x^3 + 3x^2 + 4x + 1) : (x + 1)$

b. $(x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4) : (x - 3)$

Teorema Sisa

Jika suku banyak $P(x)$ berderajat n dibagi $(x - h)$ maka sisa pembagiannya adalah $P(h)$

Bukti :

pandang $P(x) = (x - h).H(x) + S$

dengan $x - h = 0$ atau $x = h$, diperoleh :

$P(h) = 0 \, . \, H(h) + S$

$P(h) = 0 + S$

$S = P(h)$

Contoh : Tentukan sisa dari pembagian suku banyak
$P(x) = x^2 - 6x - 8$ dengan $x + 1$.

Berdasarkan teorema sisa, pembagian $P(x)$ dengan $(x - h)$ sisanya adalah $P(h)$.
Berarti sisa pembagian dari $P(x) = x^2 - 6x - 8$ dengan $(x - (-1))$ adalah

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^2 - 6(-1) - 8 \\ &= 1 + 6 - 8 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Contoh : Jika suku banyak $P(x)$ dibagi $(x - 1)$ bersisa 2 dan $P(x)$ dibagi dengan $(x + 2)$ bersisa -1, tentukan sisanya jika $P(x)$ dibagi $(x - 1)(x + 2)$.

$P(x)$ dibagi $(x-1) = 2$, atau bisa kita tuliskan sebagai $P(x) = (x-1).f(x) +2$ untuk suatu fungsi polinomial $f(x)$. Menurut teorema sisa, $P(1) = 2$

$P(x)$ dibagi $(x+2) = -1$, atau bisa kita tuliskan sebagai $P(x) = (x+2).g(x) -1$ untuk suatu fungsi polinomial $g(x)$. Menurut teorema sisa, $P(-2) = -1$

Jika P(x) dibagi dengan (x-1)(x+2) kita akan mendapatkan sisanya dalam bentuk polinom derajat 1 yaitu ax+b. Atau bisa kita tuliskan sebagai

$$P(x) = (x-1).(x+2).h(x) + ax+b$$

Dari hasil teorema sisa sebelumnya didapatkan $P(1) = 2$ dan $P(-2) = -1$. Jika kita terapkan ke persamaan di atas didapatkan

$$P(1) = (1-1).(1+2).h(1) + a(1) + b = 2$$
$$P(-2) = (-2-1).(-2+2).h(-2) + a(-2) + b = -1$$

$P(1) = (1-1).(1+2).h(1) + a(1) + b = 2$
$P(-2) = (-2-1).(-2+2).h(-2) + a(-2) + b = -1$

Suku yang diwarnai biru bernilai nol maka kita punya sistem persamaan linier

$a + b = 2$ dan $-2a + b = -1$

Dengan eliminasi atau substitusi sederhana, didapatkan $a = 1$ dan $b = 1$. Jadi sisa pembagiannya adalah

$ax + b = x + 1$

Teorema Faktor

Jika P(x) adalah suku banyak, (x – k) merupakan faktor dari P(x) jika dan hanya jika P(k) = 0

Artinya:

1. Jika (x – k) merupakan faktor, maka nilai P(k) = 0

   sebaliknya,

2. Jika P(k) = 0 maka (x – k) merupakan faktor

Akar-akar persamaan suku banyak

Salah satu penggunaan teorema faktor adalah mencari akar-akar sebuah persamaan suku banyak, karena ada hubungan antara faktor dengan akar-akar persamaan

Jika P(x) adalah suku banyak; (x – *k*) merupakan faktor dari P(x) jika dan hanya jika *k* akar dari persamaan P(*k*) = 0

k disebut *akar* atau *nilai nol* dari persamaan suku banyak:
P(x) = 0

Terapan Polinom

CRC (Cyclic Redundancy Check) menggunakan sisa pembagian dari polinom pada binari untuk memeriksa apakah ada error pada kodenya atau tidak (Error Detecting Code)