

**Handout 3**  
**Spring 2023, Differential Geometry I**

1. [2019임대성1회A6] 3차원 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 곡선  $C$ 를 두 곡면

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = x\}$$

의 교선이라 하자. 점  $p = (0, 0, 1)$ 에서 곡선  $C$ 의 곡률(curvature)과 열률(torsion)을 각각  $\kappa, \tau$ 라 할 때,  $\kappa + \tau$ 의 값을 구하시오. [2점]

2. [2020정현민3회A4] 유클리드 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 단위속력곡선  $\alpha$ 의 곡률(curvature)  $\kappa$ 와 열률(torsion)  $\tau$ 가

$$\kappa(s) = \tau(s) = \frac{1}{1 + s^2}$$

이다.

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)^2} \alpha''(s)$$

라 할 때,  $s = 0$ 에서  $s = \frac{1}{2}$ 까지 곡선  $\beta(s)$ 의 길이를 구하시오. [2점]

3. [2019윤양동1회A8] 좌표평면  $\mathbb{R}^2$ 의 곡선  $x^3 + y^3 = 2x^2y^2$  위의 한 점  $A(1, 1)$ 에서 이 곡선의 곡률(curvature)  $\kappa$ 를 구하시오. (단,  $\kappa \geq 0$ ) [2점]

4. [2019김철홍5회B4] 단위속력곡선  $\alpha(s)$ 의 모든 점에서

$$T(s) \cdot (1, 2, 2) = \frac{3}{2}$$

를 만족한다.  $\alpha(s)$ 의 점에서

$$B(s) \cdot (1, 2, 2)$$

의 값을 구하시오. [4점]

5. [2019윤양동8회A6]  $\alpha'(0) = (1, 2, 2)$ 인 곡선  $\alpha(t)$ 는 모든  $t$ 에 관하여  $\alpha'(t) \perp \alpha''(t)$  (수직)이 성립한다. 점  $\alpha(1)$ 에서 점  $\alpha(3)$ 까지 곡선  $\alpha(t)$ 의 길이를 구하시오. [2점]

6. [2018-A6변형] 단위 속력 곡선  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 의 속도벡터장과 단위 종법 벡터장(unit binormal vector field)을 각각  $T, B$ 라 하자. 곡선  $\alpha$ 의 곡률과 열률이 각각 1이다. 이때 곡선

$$\beta(s) = \int_0^s (\cos t)T(t) + (\sin t)B(t)dt$$

의  $s = \frac{\pi}{2}$ 에서의 곡률을 구하시오. [2점]

7. [2018김현웅10회A7] 실수상수  $a$ 에 의해 나타나는 정칙곡선  $\alpha$ 가

$$\alpha(t) = (1 - t, at^3 + t^2, 2t^2)(-\infty < t < \infty)$$

이다.  $\alpha$ 가 하나의 평면에 포함되기 위한 상수  $a$ 와 점  $\alpha(0)$ 에서의 곡률(curvature)과 열률(torsion)의 합  $\kappa + \tau$ 를 구하시오. [2점]

8. [2018윤양동3회A6] 3차원 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서 단위속력곡선  $\alpha(t)$ 의 곡률(curvature)  $\kappa$ 은 양의 상수이고, 점  $\alpha(1)$ 에서 단위접벡터  $T(1) = (0, 0, 1)$ , 단위주법벡터  $N(1) = (0, 1, 0)$ 일 때, 곡선  $\alpha(t)$ 를 일차변환

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

로 변환한 곡선을  $\beta(t) = A\alpha(t)$ 이라 놓자. 점  $\alpha(1)$ 에서 곡선  $\alpha(t)$ 의 열률(torsion)을  $\tau_1$ , 점  $\beta(1)$ 에서 곡선  $\beta(t)$ 의 열률(torsion)을  $\tau_2$ 라 할 때,  $\frac{\tau_2}{\tau_1}$ 의 값을 구하시오. (단,  $\tau_1 \neq 0$ ) [2점]

9. [2019윤양동2회A6]  $\mathbb{R}^3$ 에서 단위속력곡선 의 곡률(curvature)은 1이고 열률(torsion)은  $-1$ 일 때, 곡선

$$\beta(t) = \alpha(t) - t\alpha'(t)$$

이라 하자.  $\beta(2)$ 에서 곡선  $\beta(t)$ 의 곡률  $\kappa$ 를 구하시오. [2점]