

Handout 2
Spring 2024, Differential Geometry I

1. [2012-34] 3차원 공간 \mathbb{R}^3 에 놓여 있는 정규곡선(정칙곡선, regular curve) C 에 대하여 옳은 것만을 < 보기 >에서 있는대로 고른 것은?

< 보기 >

- ㄱ. C 위의 모든 점에서 곡률(curvature)이 0이면 C 는 직선이거나 직선의 일부이다.
- ㄴ. C 위의 모든 점에서 열률(비틀림률, 꼬임률, torsion)이 정의되고 그 값이 0이면 C 는 적당한 평면에 놓여 있다.
- ㄷ. C 위의 모든 점에서 곡률이 양의 상수로 일정하면 C 는 원이거나 원의 일부이다.

- (1) ㄱ (2) ㄷ (3) ㄱ, ㄴ (4) ㄱ, ㄷ (5) ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. [2015-A7] 좌표공간 \mathbb{R}^3 에서 두 곡선 $\alpha(t) = (2t, t^2, at^3)$, $\beta(t) = (t, bt, t^2)$ 이 합동이 되도록 하는 두 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [2점]

3. [2014-A11] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)과 곡률(curvature)이 각각 상수 $1, \tau$ 인 단위속력 곡선 α 에 대하여, 곡선 β 를 다음과 같이 정의하자.

$$\beta(s) = \int_0^s N(t) dt$$

여기서 $N(t)$ 는 곡선 α 의 주법벡터장(단위주법벡터장, principal normal vector field, unit principal normal vector field)이다. 곡선 β 의 곡률과 비틀림률을 각각 $\kappa_\beta (> 0)$, τ_β 라 할 때, $\kappa_\beta + \tau_\beta$ 의 값을 구하시오. [2점]

4. [2013-33] 좌표공간에서 두 단위속력곡선

$$\alpha(t) = \left(3 \cos \frac{t}{5}, 3 \sin \frac{t}{5}, \frac{4}{5}t \right)$$

$$\beta(t) = \left(3 \cos \frac{t}{5}, 3 \sin \frac{t}{5}, -\frac{4}{5}t \right)$$

에 대하여 옳은것만을 < 보기 >에서 있는 대로 고른 것은? [2점]

< 보기 >

ㄱ. 곡선 α 의 곡률(curvature) κ_α 와 곡선 β 의 곡률 κ_β 에 대하여 $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$ 이다.

ㄴ. 곡선 α 의 열률(꼬임률, 비틀림률, torsion) τ_α 와 곡선 β 의 열률 τ_β 에 대하여 $\tau_\alpha = -\tau_\beta$ 이다.

ㄷ. $\beta(t) = L(\alpha(t))$ 이고 L 을 나타내는 행렬의 행렬식이 1인 직교변환(orthogonal transformation) L 이 존재한다.

(1) ㄱ (2) ㄷ (3) ㄱ, ㄴ (4) ㄴ, ㄷ (5) ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. [2019임대성10회A3] 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 의 정칙곡선 α, β 가

$$\alpha(t) = \left(2t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \right), \quad \beta(t) = \left(at + \frac{b}{6}t^3 + 1, at^2 + 2, bt + \frac{t^3}{6} + 3 \right)$$

로 주어져 있다. 적당한 등장사상(isometry) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 존재하여 임의의 $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $\beta(t) = F(\alpha(t))$ 을 만족한다고 할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하시오.(단, $a < 0, b < 0$ 이다.)[2점]

6. [2020정현민6월A3] 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 위의 단위속력 평면곡선 $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여 $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 을 $\alpha(s) = \gamma(s) + \gamma'(s)$ 라 하자. γ 의 곡률(curvature) κ_γ 는 $s = 1$ 일 때 최댓값을 가진다고 한다. α 의 곡률 $\kappa_\alpha(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 일 때, $\kappa_\gamma(1)$ 의 값을 구하시오. [2점]

7. [2020임대성7회A2] 유클리드(Euclid)공간 \mathbb{R}^3 에서의 정칙곡선

$$\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$$

의 프레네 표구장(Frenet frame field)을 $\{T, N, B\}$ 라 할 때, 곡선 β 을

$$\beta(t) = T \times T' + N \times N' + B \times B'$$

으로 정의한다. $\|\beta(0)\|$ 의 값을 구하시오. [2점]