1. Equações de primeira ordem

1.1. Temos:

$$\begin{aligned}
y &= e^{\int_1^x \frac{2}{t}dt}\left[1+\int_1^x \frac{t+1}{t}e^{-\int_1^t \frac{2}{\tau}d\tau}dt\right] \\
&= e^{2\ln x}\left[1+\int_1^x \frac{t+1}{t}e^{-2\ln t}dt\right] \\
&= x^2\left[1+\int_1^x \frac{t+1}{t^3}dt\right] = x^2\left[1+\int_1^x\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt\right] \\
&= x^2\left[1+\Big|_1^x\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}\right)\right] = x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{5x^2-2x-1}{2}.
\end{aligned}$$

2.3. Temos:

$$\begin{aligned}
e^y dy &= \cos(x)dx & \int_{2\pi}^y e^t dt &= \int_0^x \cos(\tau)d\tau \\
e^y - e^{2\pi} &= \sin(x) & y &= \ln\big(\sin(x)+e^{2\pi}\big).
\end{aligned}$$

3.2. Substituindo $z=\frac{y}{x}$ obtemos $z'x+z=z+\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$, ou seja, $z'x=\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$, e $z(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
\tan(z)dz &= \frac{1}{x}dx & \int_{\frac{\pi}{6}}^z \tan(t)dt &= \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{\tau}d\tau \\
-\ln(\cos(z))+\ln(\cos(\tfrac{\pi}{6})) &= \ln(x)-\ln(\tfrac{1}{2}) & \frac{\cos(\frac{\pi}{6})}{\cos(z)} &= \frac{x}{\frac{1}{2}} \\
\cos(z) &= \frac{\sqrt{3}}{4x} & y &= x\arccos\frac{\sqrt{3}}{4x}.
\end{aligned}$$

4.2. Dividindo por y^2 obtemos $\frac{y'}{y^2}=-\frac{1}{xy}+x\ln x$. Substituindo $z=y^{-1}$ obtemos $-z'=-\frac{z}{x}+x\ln x$, logo $z'=\frac{z}{x}-x\ln x$. Enfim, $z(1)=2$.

$$\begin{aligned}
z &= e^{\int_1^x \frac{1}{t}dt}\left[2-\int_1^x t\ln(t)e^{-\int_1^t \frac{1}{\tau}d\tau}dt\right] \\
&= e^{\ln x}\left[2-\int_1^x t\ln(t)e^{-\ln t}dt\right] = x\left[2-\int_1^x \ln(t)dt\right] \\
&= x[2-x(\ln x-1)-1] = -x^2\ln x+x^2+x.
\end{aligned}$$

Logo, $y=\frac{1}{x^2+x-x^2\ln x}$.

5.2. $\frac{\partial P}{\partial y}=2y$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y$, portanto é exata. Temos $F(x,y)=\int_1^x(2t^2+1)dt+\int_1^y 2x\tau d\tau=\Big|_1^x\big(\frac{2}{3}t^3+t\big)+\Big|_1^y(x\tau^2)=\frac{2}{3}x^3+x-\frac{5}{3}+xy^2-x=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{3}+xy^2$. Portanto:

$$y=\sqrt{\frac{5-2x^3}{3x}}.$$

5.3. $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$. Temos:

$$-\tfrac{1}{P}\left(\tfrac{\partial P}{\partial y} - \tfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = 1$$

portanto temos um fator integrante $g(y) = e^{\int dy} = e^y$:

$$y' = -\frac{2xe^y}{e^y(x^2 + 2y + y^2)}.$$

Agora $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = 2xe^y$ e $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = 2xe^y$, portanto $F(x,y) = \int_1^x 2e^2 t dt + \int_2^y e^\tau (x^2 + 2\tau + \tau^2) d\tau$. Como $\int \tau e^\tau d\tau = e^\tau(\tau - 1)$ e $\int \tau^2 e^\tau d\tau = e^\tau(\tau^2 - 2\tau + 2)$, temos que $F(x,y) = e^2x^2 - e^2 + x^2e^y + 2e^y(y-1) + e^y(y^2 - 2y + 2) - e^2x^2 - 2e^2 - 2e^2 = e^y(x^2 + y^2) - 5e^2$, portanto obtemos a relação implícita

$$e^y(x^2 + y^2) - 5e^2 = 0.$$

Neste caso não se pode achar uma fórmula explícita de y em função de x.

2. Equações de segunda ordem

1. O polinômio característico é $\lambda^2 - 4\lambda + 3$, ou seja, $(\lambda - 3)(\lambda - 1)$. Portanto, a genérica solução da equação homogênea é $y = Ae^{3x} + Be^x$. Agora temos que encontrar uma solução particular da equação completa.

Determinação dos coeficientes. Como 3 é raiz do polinômio característico, buscamos por uma solução da forma $\varphi(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x)e^{3x}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x)e^{3x} \\
\varphi'(x) &= \big(3\alpha x^3 + 3(\alpha + \beta)x^2 + (2\beta + 3\gamma)x + \gamma\big)e^{3x} \\
\varphi''(x) &= \big(9\alpha x^3 + 9(2\alpha + \beta)x^2 + 3(2\alpha + 4\beta + 3\gamma)x + 2(\beta + 3\gamma)\big)e^{3x}.
\end{aligned}$$

Igualando $\varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 3\varphi(x) = (x^2 - 1)e^{3x}$ obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} 6\alpha = 1 \\ 6\alpha + 4\beta = 0 \\ 2\beta + 2\gamma = -1. \end{cases}$$

A solução é $\alpha = \frac{1}{6}$ e $\beta = \gamma = -\frac{1}{4}$, logo a solução genérica da equação completa é:

$$y = \big(\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x + A\big)e^{3x} + Be^x. \tag{1}$$

Variação das constantes. Temos que:

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^x \\ 3e^{3x} & e^x \end{vmatrix} = -2e^{4x}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
A(x) &= -\int \frac{(x^2 - 1)e^{3x} \cdot e^x}{-2e^{4x}} dx = \frac{1}{2}\int (x^2 - 1) dx = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x \\
B(x) &= \int \frac{(x^2 - 1)e^{3x} \cdot e^{3x}}{-2e^{4x}} dx = -\frac{1}{2}\int (x^2 - 1)e^{2x} dx = \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right)e^{2x}.
\end{aligned}$$

Obtemos a solução particular $\varphi(x) = A(x)e^{3x} + B(x)e^{x} = \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right)e^{3x}$. Por isso a solução genérica da equação completa é:

$$y = \left(\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{8} + A\right)e^{3x} + Be^{x}. \tag{2}$$

Observamos que (2) equivale a (1), trocando a constante $\frac{1}{8} + A$ de (2) pela constante A de (1).

Resolução do problema de Cauchy. Temos que:

$$y = \left(\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x + A\right)e^{3x} + Be^{x}$$
$$y' = \left(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{4}x - \tfrac{1}{4} + 3A\right)e^{3x} + Be^{x}.$$

Por isso a condição inicial se torna $A + B = 0$ e $-\frac{1}{4} + 3A + B = 1$, cuja solução é $A = \frac{5}{8}$ e $B = -\frac{5}{8}$. Afinal, a solução do problema é:

$$y = \left(\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{5}{8}\right)e^{3x} - \tfrac{5}{8}e^{x}.$$