1. Convergência pontual e uniforme

1. **(1)** Para $x \neq 0$ temos $a_n \sim \frac{2xn}{n} \to 2x$. Para $x = 0$ temos $a_n = \frac{1}{n-1} \to 0$. Portanto o domínio de convergência é $\mathbb{R}$ e a função limite é $2x$. **(2)** Para $x > 0$ temos $a_n = (e^x)^n \to +\infty$ pois $e^x > 1$. Para $x = 0$ temos $a_n = 1 \to 1$. Para $x < 0$ temos $a_n = (e^x)^n \to 0$ pois $0 < e^x < 1$. Portanto o domínio de convergência é $(-\infty, 0]$ e a função limite é $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$ **(3)** Para $x \neq 0$ temos $a_n \sim \frac{xn^3}{n} = xn^2 \to \infty$, para $x = 0$ temos $a_n = \frac{-2n-3}{n+1} \to -2$. Portanto o domínio de convergência é $\{0\}$ e a função limite é $f(0) = -2$. **(4)** Para $x > 1$ temos $a_n = \sqrt[n]{x^n}\big(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}}\big) = x\sqrt[n]{1+\varepsilon_n} \to x$, dado que $\varepsilon_n \to 0$. Para $x = 1$ temos $a_n = \sqrt[n]{2} = e^{\frac{\log 2}{n}} \to e^0 = 1$. Para $0 < x < 1$ temos $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{x^n}}\big(\sqrt[n]{x^{2n}+1}\big) = \frac{1}{x}\sqrt[n]{1+\varepsilon_n} \to \frac{1}{x}$. Portanto o domínio de convergência é $(0, +\infty)$ e a função limite é $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & x \leq 1. \end{cases}$ **(5)** Para $x < 2$ temos $\frac{n^2+1}{n^x} \sim n^{2-x} \to +\infty$, portanto $a_n \to (+\infty)^{+\infty} = +\infty$. Para $x = 2$ temos $a_n \to 2^{+\infty} = +\infty$. Para $x > 2$ temos $a_n = \Big[\big(1 + \frac{1}{\frac{n^x}{n^2+1}}\big)^{\frac{n^x}{n^2+1}}\Big]^{\frac{n^2+1}{n^x}n}$. Ademais o expoente $\frac{n^2+1}{n^x}n$ tende a 0 para $x > 3$, a 1 para $x = 3$ e a $+\infty$ para $2 < x < 3$. Então para $x > 3$ temos $a_n \to e^0 = 1$, para $x = 3$ temos $a_n \to e^1 = e$, para $2 < x < 3$ temos $a_n \to e^{+\infty} = +\infty$. Afinal, o domínio de convergência é $[3, +\infty)$ e a função limite é $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 3 \\ e & x = 3. \end{cases}$

2. **(1)** $x < -1$, pois a série é equivalente a $\sum \frac{1}{n^{-x}}$, portanto converge para $-x > 1$. **(2)** Para $x > 0$ temos que $\sum a_n \sim \sum \frac{n}{n^x} = \sum \frac{1}{n^{x-1}}$, portanto converge para $x-1 > 1$, isto é $x > 2$. Para $x = 0$ temos que $\sum a_n = -\sum(n+1) = -\infty$. Para $x < 0$ temos que $\sum a_n \sim \sum \frac{n}{-2} = -\infty$. Portanto a série converge para $x > 2$. **(3)** $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^{x-2}\log^{x-1} n}$, portanto converge quer para $x - 2 > 1$, isto é $x > 3$, quer para $x - 2 = 1$ e $x - 1 > 1$, isto é $x = 3$ ($2 > 1$ é verificada). Portanto a série converge para $x \geq 3$. **(4)** $\sum a_n \sim \sum \frac{n}{n^{\frac{x}{2}}\log^{\frac{1}{2}} n} = \sum \frac{1}{n^{\frac{x}{2}-1}\log^{\frac{1}{2}} n}$, portanto converge para $\frac{x}{2} - 1 > 1$, isto é $x > 4$. **(5)** Para $x > 2$ ou $x < -2$ temos que $|a_n| \sim \frac{|x|^n}{|x|^n} \not\to 0$, portanto a série não converge. Para $x = 2$ temos $\sum \frac{2^n}{2 \cdot 2^n} = \sum \frac{1}{2} = +\infty$. Para $-2 < x < 2$ temos $\sum |a_n| \sim \sum \frac{|x|^n}{2^n} = \sum |\frac{x}{2}|^n < +\infty$, sendo $|\frac{x}{2}| < 1$. Portanto a série converge para $-2 < x < 2$.

3. **(1)** $x^n \to 0$ para $x \in (-1, 1)$ pois $|x| < 1$, enquanto $1^n \to 1$. Portanto o domínio de convergência pontual é $(-1, 1]$ e a função limite é $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1,1) \\ 1 & x = 1. \end{cases}$ **(2)** Em $(-1, 1]$ o limite não é contínuo, enquanto x^n é contínua para cada n, portanto a convergência não pode ser uniforme. Em $(-1, 1)$ não vale o teorema do duplo limite: $\lim_{x\to 1}\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$, enquanto $\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1} x^n = 1$. **(3)** Em $[-a, a]$ temos

que $|x| < a$, portanto $|x^n| < a^n \to 0$, portanto a convergência é uniforme.

4. **(1)** A série converge para $x \in (-1,1)$ (série geométrica). **(2)** Como $\lim_{x\to 1} x^n = 1$ para cada n (em particular $\lim_{x\to 1} x^n$ existe finito para cada n), se a convergência fosse uniforme, então $\sum_n \lim_{x\to 1} x^n$ deveria convergir, enquanto $\sum 1 = +\infty$. **(3)** Em $[-a,a]$ temos que $|x| < a$, portanto $|x^n| < a^n$ e $\sum a^n < +\infty$, portanto a serie converge totalmente.

5. **(1)** $\sum a_n = \sum (e^x)^n$, portanto a série converge para $e^x < 1$, isto é $x < 0$, e a função limite é $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$. **(2)** Como $\lim_{x\to 0} e^{nx} = 1$ para cada n (em particular $\lim_{x\to 0} e^{nx}$ existe finito para cada n), se a convergência fosse uniforme, então $\sum \lim_{x\to 0} e^{nx}$ deveria convergir, enquanto $\sum 1 = +\infty$. **(3)** Em $(-\infty, -a]$ temos que $e^x < e^{-a}$, portanto $e^{nx} < (e^{-a})^n$ e $\sum (e^{-a})^n < +\infty$ sendo $e^{-a} < 1$, portanto a serie converge totalmente.

2. Séries de potências e funções analíticas

1. **(1)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$, portanto $R = 1$. Para $x = 1$ temos $\sum \frac{1}{n+2} = +\infty$, para $x = -1$ temos $\sum \frac{(-1)^n}{n+2} < +\infty$ pelo critério de Leibnitz. Portanto temos convergência simples em $[-1,1)$, absoluta em $(-1,1)$, uniforme em $[-1,a]$ para cada a tal que $-1 < a < 1$. **(2)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+2)2^n}{((n+1)^2+2)2^{n+1}} \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$, portanto $R = 2$. Para $x = 2$ temos $\sum \frac{1}{n^2+2} < +\infty$, para $x = -2$ temos $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+2} < +\infty$ enquanto converge absolutamente ou pelo critério de Leibnitz. Portanto temos convergência simples, absoluta e uniforme em $[-2,2]$. **(3)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+3}\frac{1}{3^{n+1}}\frac{n+2}{n+1}3^n = \frac{1}{3}$, portanto $R = 3$. Para $x = 3$ temos $\sum \frac{n+1}{n+2} = +\infty$, para $x = -3$ temos $\sum (-1)^n \frac{n+3}{n+2}$ que não pode convergir pois $(-1)^n \frac{n+3}{n+2} \not\to 0$. Portanto temos convergência simples e absoluta em $(-3,3)$, uniforme em $[-a,a]$ para cada a tal que $0 \le a < 3$. **(4)** $\sqrt[n]{|a_n|} = |\sqrt[n]{n} - 1| \to 0$, portanto $R = +\infty$. Portanto temos convergência simples e absoluta em $(-\infty, +\infty)$ e uniforme em $[-a,a]$ para cada $a \ge 0$. **(5)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)}{\log(2+n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n + \log(1+\frac{1}{n})}{\log n + \log(1+\frac{2}{n})} = 1$, portanto $R = 1$. Para $x = 1$ temos $\sum \frac{1}{\log(1+n)} \sim \frac{1}{\log n} = +\infty$, para $x = -1$ temos $\sum \frac{(-1)^n}{\log(1+n)} < +\infty$ pelo critério de Leibnitz. Portanto temos convergência simples em $[-1,1)$, absoluta em $(-1,1)$, uniforme em $[-1,a]$ para cada a tal que $-1 < a < 1$.

2. **(1)** $e^{1-x^2} = e \cdot e^{-x^2} = e \sum \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum \frac{(-1)^n e}{n!} x^{2n}$. Como $\frac{e}{(n+1)!}\frac{n!}{e} = \frac{1}{n+1} \to 0$, temos que $R = +\infty$. **(2)** $\frac{1}{2x-3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}x}\right) = -\frac{1}{3}\sum (\frac{2}{3}x)^n = -\sum \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n x^n$. Como $(\frac{2}{3})^{n+1}(\frac{3}{2})^n = \frac{2}{3}$, temos $R = \frac{3}{2}$. **(3)** $\log(2+(x-1)) = \log(2+t) = \log 2 + \log(1+\frac{t}{2}) = \log 2 + \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{t}{2})^n = \log 2 + \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} t^n = \log 2 + \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}(x-1)^n$. Como $\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} \to \frac{1}{2}$, temos $R = 2$ (isto é a série converge para $x \in (-1,3)$).

3. **(1)** $e^{-x^2} = \sum \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$. Portanto $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum \frac{(-1)^n}{n!} \Big|_0^1 \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \sum \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$. **(2)** $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$. Portanto $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Big|_0^\pi \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \sum \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$. **(3)** $\sin(x^2) = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$. Portanto $\int_0^1 \sin(x^2) dx = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Big|_0^\pi \frac{1}{4n+3} x^{4n+3} = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}$.

4. **(1)** $\sum (\frac{3}{5})^n + \sum (\frac{2}{5})^n = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} + \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$. **(2)** $\frac{9}{2} \sum \frac{6^n}{n!} = \frac{9}{2} e^6$. **(3)** $\sum \frac{1}{n!} = \sum \frac{1^n}{n!} = e^1 = e$. **(4)** $-\sum \frac{(-\log 10)^n}{n!} = -e^{-\log 10} = -\frac{1}{10}$. **(5)** $\frac{1}{36} \sum \frac{(\frac{2}{3})^n}{n!} = \frac{1}{36} e^{\frac{2}{3}}$.