1. Convergência pontual e uniforme

1. Estabeleça o domínio de convergência pontual das seguintes sequências de funções e calcule a função limite:

(1) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2xn+1}{n-1}$$

(2) $$\lim_{n\to+\infty} e^{nx}$$

(3) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{xn^3+2(x-1)n-3}{n+1}$$

(4) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x^n+x^{-n}}, \qquad x>0$$

(5) $$(*) \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{n^2+1}{n^x}\right)^n.$$

2. Estabeleça o domínio de convergência pontual das seguintes séries de funções:

(1) $$\sum n^x$$

(2) $$\sum \frac{n+1}{n^x-2}$$

(3) $$\sum \frac{n^2}{n^x \log^{x-1} n}$$

(4) $$\sum \sqrt{\frac{n^2+\log n}{n^x \log(n+1)}}$$

(5) $$(*) \sum \frac{x^n}{x^n+2^n} \quad x \neq -2.$$

3. Dada a seguinte sequência de funções de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = x^n$$

(1) calcule o domínio de convergência pontual e o limite pontual;
(2) mostre que a convergência não é uniforme no domínio de convergência pontual, nem tirando o(s) extremo(s);
(3) mostre que a convergência é uniforme em $[-a, a]$ para qualquer a tal que $0 \leq a < 1$.

4. Dada a seguinte série de funções de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

(1) calcule o domínio de convergência pontual e a função soma;
(2) mostre que a convergência não é uniforme no domínio de convergência pontual;
(3) mostre que a convergência é uniforme em $[-a, a]$ para qualquer a tal que $0 \leq a < 1$.

5. Dada a seguinte série de funções de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx}$$

(1) calcule o domínio de convergência pontual e a função soma;
(2) mostre que a convergência não é uniforme no domínio de convergência pontual;
(3) mostrar que a convergência é uniforme em $(-\infty, -a]$ para qualquer $a > 0$.

2. Séries de potências e funções analíticas

1. Determine os conjuntos de convergência simples, absoluta e uniforme das seguintes séries de potências:

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n^2+2)2^n}$$

(3) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{x^n}{3^n}$$

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n x^n$$

(5) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\log(1+n)}.$$

2. Calcule a série de Taylor das seguintes funções no ponto indicado e estabeleça o raio de convergência.

(1) $$y = e^{1-x^2}, x_0 = 0$$

(2) $$y = \frac{1}{2x-3}, x_0 = 0$$

(3) $$y = \log(1+x), x_0 = 1.$$

3. Aplicando o teorema de integração para séries de potências, exprima através de uma série as seguintes integrais:

(1) $$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

(2) $$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

(3) $$\int_0^1 \sin(x^2) dx.$$

4. Calcule a soma das seguintes séries numéricas:

(1) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + 2^n}{5^n}$$

(2) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-1}3^{n+2}}{n!}$$

(3) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

(4) $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\log 10)^n}{n!}$$

(5) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-2}}{n!3^{n+2}}.$$