1. Sequências

1. $a_n \sim \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{2}}} = n^{-\frac{1}{6}} \to 0$.

2. $a_n \sim \frac{n!}{2e^n} \to +\infty$.

3. $a_n = \frac{2^n - \cos(n)}{2 \cdot 2^n - n^2} \sim \frac{2^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

4. $a_n = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log n} = e^{\frac{\log n}{n}} \to e^0 = 1$.

5. $a_n = [(1 + \frac{-1}{n^2})^{(n^2)}]^n \to (e^{-1})^{+\infty} = 0$ pois $e^{-1} < 1$.

6. $a_n \sim \frac{-3^n}{3^n} = -1 \to -1$.

7. Temos que $1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{1}{2}\varepsilon_n^2$ para $\varepsilon_n \to 0$. Como $\frac{n+1}{2n^2-1} \sim \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \to 0$, temos $a_n \sim n^2 \frac{1}{2} \frac{(n+1)^2}{(2n^2-1)^2} \sim n^2 \frac{1}{2} \frac{n^2}{4n^4} = \frac{1}{8} \to \frac{1}{8}$.

8. Dividimos numerador e denominador por n^n, assim $a_n = \frac{n^{-2} + (1 - \frac{2}{n})^n}{4 - 3\frac{n!}{n^n}} \to \frac{e^{-2}}{4} = \frac{1}{4e^2}$.

9. Seja $a_n = b_n \sin(n)$. Então $b_n \sim \frac{2^n}{3^n} = (\frac{2}{3})^n \to 0$, portanto, sendo $\sin(n)$ limitada, $a_n \to 0$.

10. Temos que $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ para $\varepsilon_n \to 0$. Portanto $n \log(1 + \frac{3}{n}) \sim n\frac{3}{n} = 3 \to 3$ e $\frac{1}{\sqrt{n}} \log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \to 0$. Portanto o limite é $3 + 0 = 3$.
Observação: Substituir um termo por outro assintótico só pode ser feito em uma multiplicação, não em uma soma. Todavia, no exercício precedente calculamos *separadamente* os limites de $n \log(1 + \frac{3}{n})$ e de $\frac{1}{\sqrt{n}} \log(1 + \frac{1}{n})$, aplicando a substituição em um produto. Como obtivemos dois resultados cuja soma *não* é uma forma de indecisão, o limite final é a soma dos limites. Se, por exemplo, obtivéssemos uma forma do tipo $\infty - \infty$, teríamos que resolver a sequência completa de uma maneira diferente, *sem* substituir os termos da soma por outros assintóticos.

11. Temos que $a^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n \log a$ para $\varepsilon_n \to 0$. Como $\frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$, temos $a_n \sim n\frac{n+1}{n^2+1} \log 3 \sim \frac{n^2}{n^2} \log 3 \to \log 3$.

12. Critério da razão: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{\sqrt{(n+1)^{n+1}}} \frac{\sqrt{n^n}}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^n (n+1)}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} \sqrt{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}} \to +\infty \sqrt{\frac{1}{e}} = +\infty > 1$, portanto $a_n \to +\infty$.

13. $a_n = \frac{\log(n(1+\frac{1}{n}))}{\log n} = \frac{\log n + \log(1 + \frac{1}{n})}{\log n} \sim \frac{\log n}{\log n} = 1 \to 1$. Usamos o fato que $\log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} \to 0$.

14. Critério da raiz: $\sqrt[n]{a_n} = (\frac{n^3 - 1}{3n^3 + \log n + 2})^{\frac{1}{2}} \sim (\frac{n^3}{3n^3})^{\frac{1}{2}} \to (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} < 1$, portanto $a_n \to 0$.

15. Temos que $(1+\varepsilon_n)^a - 1 \sim a\varepsilon_n$ para $\varepsilon_n \to 0$. $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 1) = \sqrt{n}((1+\frac{2}{n})^{\frac{1}{2}} - 1) \sim \sqrt{n}\frac{1}{2}\frac{2}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

16. Temos que $(1+\varepsilon_n)^a - 1 \sim a\varepsilon_n$ para $\varepsilon_n \to 0$. $a_n = (\sqrt[3]{\frac{n^2+1-2}{n^2+1}} - 1)n^2 = ((1-\frac{2}{n^2+1})^{\frac{1}{3}} - 1)n^2 \sim -\frac{1}{3}\frac{2}{n^2+1}n^2 \to -\frac{2}{3}$.

17. Dividimos numerador e denominador por n^n e obtemos $a_n = \frac{(1+\frac{2}{n})^n}{(1+\frac{3}{n})^n}\frac{1}{n} \to \frac{e^2}{e^3}0 = 0$.

18. (*) Para o numerador, temos que:

- $\log((n+5)!) = \log(n!(n+1)\cdots(n+5)) = \log(n!) + \log((n+1)\cdots(n+5)) = \log(n!) + \log(n^5 + o(n^5))$, onde $o(n^5)$ indica termos de grau menor que 5;
- $\log(n^5 + o(n^5)) = \log(n^5(1+\frac{o(n^5)}{n^5})) = 5\log n + \log(1+\frac{o(n^5)}{n^5})$;
- $\log(n!+5) = \log(n!(1+\frac{5}{n!})) = \log(n!) + \log(1+\frac{5}{n!})$.

Para o denominador temos que:

- $\log(2n^6 + \cos(n\pi)) = \log(2n^6(1+\frac{\cos(n\pi)}{2n^6})) = \log(2n^6) + \log(1+\frac{\cos(n\pi)}{2n^6}) = \log 2 + 6\log n + \log(1+\frac{\cos(n\pi)}{2n^6})$.

Portanto: $a_n = \frac{5\log n + \log(1+\frac{o(n^5)}{n^5}) - \log(1+\frac{5}{n!})}{\log 2 + 6\log n + \log(1+\frac{\cos(n\pi)}{2n^6})} \sim \frac{5\log n}{6\log n} = \frac{5}{6} \to \frac{5}{6}$.

19. (*) Temos que $\sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n}$. Para a fração, dividimos numerador e denominador por n^n o obtemos: $\frac{n+3(1+\frac{1}{n})^n(n+1)}{1+\frac{n!}{n^n}}$. Portanto obtemos: $a_n = \frac{n+3(1+\frac{1}{n})^n(n+1)}{1+\frac{n!}{n^n}}\frac{\pi}{n} = \frac{1+3(1+\frac{1}{n})^n\frac{n+1}{n}}{1+\frac{n!}{n^n}}\pi \to \frac{1+3e}{1}\pi = \pi(1+3e)$.

20. (*) Observamos que podemos isolar $(n-1)!^{n-1}$ ao numerador e ao denominador. De fato, $a_n = \frac{((n-1)!)^{n-1}n^{n-1} - ((n-1)!)^{n-1}(n-1)!}{(n-1)!^{n-1}(n-10)^{n-1}} = \frac{n^{n-1}-(n-1)!}{(n-10)^{n-1}}$. Agora seja $m = n-1$, assim obtemos $a_m = \frac{(m+1)^m - m!}{(m-9)^m}$. Dividimos por m^m o numerador e o denominador e obtemos $a_m = \frac{(1+\frac{1}{m})^m - \frac{m!}{m^m}}{(1-\frac{9}{m})^m} \to \frac{e}{e^{-9}} = e^{10}$.

Sequências sem limite. Para ambas as sequências, consideremos as duas subsequências a_{2n} e a_{2n+1}. Em (1) obtemos $a_{2n} = \cos(4n^2\pi) = 1 \to 1$ e $a_{2n+1} = \cos((4n^2+4n+1)\pi) = \cos(\pi) = -1 \to -1$, portanto a_n não tem limite. Em (2) obtemos $a_{2n} = \frac{6n+2}{2n+4} \to 3$ e $a_{2n+1} = -\frac{6n+5}{2n+5} \to -3$, portanto a_n não tem limite.

2. Séries

1. $\sum a_n \sim \sum \frac{n^2}{n^3\log^2 n} = \sum \frac{1}{n\log^2 n} < +\infty$.

2. $\sum n(1-\cos\frac{1}{n}) \sim \sum n\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\sum\frac{1}{n} = +\infty$. *Observação:* o termo geral é definitivamente positivo, pois $\cos\frac{1}{n} < 1$, portanto é correto substituir um termo assintótico.

3. $\sum a_n \sim \sum \frac{\log n}{\log^2 n} \frac{\pi}{n} = \pi \sum \frac{1}{n \log n} = +\infty$. *Observação:* o termo geral é definitivamente positivo, pois $\sin \frac{\pi}{n} > 0$, portanto é correto substituir um termo assintótico.

4. $\sum a_n \sim \sum \frac{n^{\frac{6}{7}}}{n^{\frac{15}{7}}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{9}{7}}} < +\infty$.

5. $\sum a_n \sim \sum \frac{n^{\frac{4}{5}}}{n^{\frac{9}{5}}} = \sum \frac{1}{n} = +\infty$.

6. Critério da razão: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} < 1$, portanto $\sum a_n < +\infty$.

7. $\sum n^2(1 - \cos \frac{1}{n^2}) \sim \sum n^2 \frac{1}{2} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$. *Observação:* o termo geral é definitivamente positivo, pois $\cos \frac{1}{n^2} < 1$, portanto é correto substituir um termo assintótico.

8. Critério da raiz: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n!+n^2}{3n!-e^n-1} \to \frac{2}{3} < 1$, portanto $\sum a_n < +\infty$.

9. Definitivamente $e^{(n^2)} > e^n > n^7$, portanto $\sum a_n < \sum \frac{n^5+1}{n^7} \sim \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$.

10. Critério da raiz: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\log \log n}{\log n} \to 0 < 1$, portanto $\sum a_n < +\infty$.

11. Critério de Leibnitz: $\frac{1}{\log^2 n}$ é decrescente pois $\log^2 n$ é crescente (pois $\log n$ é crescente), ademais é positivo e $\frac{1}{\log^2 n} \to 0$, portanto $\sum a_n < +\infty$.

12. $\sum |a_n| \sim \sum \frac{1}{n \log^2 n} < +\infty$, portanto $\sum a_n < +\infty$.

13. $a_n \sim \frac{n^2}{n^2+n-1} \to 1$, portanto a série não pode convergir pois o termo geral não tende a 0. Sendo o termo geral definitivamente positivo, a série diverge a $+\infty$.

14. Definitivamente $e^{(n^{\frac{1}{3}})} > e^{4 \log n} = n^4$, portanto $\sum a_n < \sum \frac{n^2}{n^4} = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$.

15. $\sum \sqrt{n} \log(\frac{2n^2+3}{2n^2+2}) = \sum \sqrt{n} \log(1 + \frac{1}{2n^2+2}) \sim \sum \sqrt{n} \frac{1}{2n^2+2} \asymp \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty$.

16. $\sum a_n \sim \sum \frac{n^{\frac{3}{5}}}{n^{\frac{3}{5}} \log(n^n+n!)} = \sum \frac{1}{\log(n^n(1+\frac{n!}{n^n}))} = \sum \frac{1}{n \log n + \log(1+\frac{n!}{n^n})} \sim \sum \frac{1}{n \log n} = +\infty$.

17. Critério de Leibnitz: $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ é decrescente, ademais é positiva e $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, portanto $\sum a_n < +\infty$.

18. $\sum a_n \sim \sum \frac{2^n}{5^n} = \sum (\frac{2}{5})^n < +\infty$.

19. (*) Como $\frac{n}{7} \sin \frac{2}{n} \to \frac{2}{7}$, definitivamente $\frac{n}{7} \sin \frac{2}{n} < \frac{2}{7} + \varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$. Portanto $\sum a_n > \sum \frac{1}{(n^3 \log n)^{\frac{2}{7}+\varepsilon}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{6}{7}+3\varepsilon} \log^{\frac{2}{7}+\varepsilon} n}$. Escolhendo ε tal que $\frac{6}{7} + 3\varepsilon < 1$ (o que é possível pois $\frac{6}{7} < 1$), temos que $\sum a_n = +\infty$.

20. (*) Como $\frac{n}{4}\sin\frac{1}{n} \to \frac{1}{4}$, definitivamente $\frac{n}{4}\sin\frac{1}{n} > \frac{1}{4}-\varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$. Portanto $\sum a_n > \sum \frac{1}{(n^5\log^2 n)^{\frac{1}{4}-\varepsilon}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}-5\varepsilon}\log^{\frac{1}{2}-2\varepsilon} n}$. Escolhendo ε tal que $\frac{5}{4}-5\varepsilon > 1$ (o que é possível pois $\frac{5}{4} > 1$), temos que $\sum a_n < +\infty$.

3. Polonômio de Taylor

3.1.
1. $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, portanto $\log(1+3x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)$, logo o polinômio é $3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3$.
2. $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$, portanto $\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8 + o(x^{10})$.
3. *Método I*: $y = y' = y'' = y''' = e^x$, logo $y(-1) = y'(-1) = y''(-1) = y'''(-1) = \frac{1}{e}$, portanto, usando a definição, $e^x = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) + \frac{1}{2e}(x+1)^2 + \frac{1}{6e}(x+1)^3 + o((x+1)^3)$. *Método II*: Seja $x = -1+t$, portanto $e^x = e^{-1}e^t$ e calculamos o polinômio de e^t em $t_0 = 0$. Obtemos $e^{-1}e^t = \frac{1}{e}(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) + \frac{1}{2e}(x+1)^2 + \frac{1}{6e}(x+1)^3 + o((x+1)^3)$.
4. *Método I*: $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y''(\frac{\pi}{2}) = -1$, $y'''(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y^{(4)}(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y^{(5)}(\frac{\pi}{2}) = 0$, logo $\sin x = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{24}(x-\frac{\pi}{2})^4 + o((x-\frac{\pi}{2})^5)$. *Método II*: Seja $x = \frac{\pi}{2} + t$, portanto $\sin x = \cos t$ e calculamos o polinômio em $t_0 = 0$. Obtemos $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^5) = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{24}(x-\frac{\pi}{2})^4 + o((x-\frac{\pi}{2})^5)$.
5. $(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) - (1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)) = x + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$.
6. $1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}x^9 + \frac{1}{24}x^{12} + o(x^{12}) - 1 - (x^3 - \frac{1}{6}x^9 + o(x^{12})) = \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{24}x^{12} + o(x^{12})$.
7. Como $e^{3x} - 1$ e $\sin 2x$ partem da ordem 1, é suficiente chegar a $o(x^3)$. Temos $(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) - 1)(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4) = 6x^2 + 9x^3 + 5x^4 + o(x^4)$.
8. Como $e^{-x} - 1$ parte da ordem 1, é suficiente calcular um fator $e^{-x} - 1$ até a ordem 3 e $(e^{-x}-1)^2$ até a ordem 2. Como $e^{-x} - 1 = -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ temos $(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)(x^2 - x^3 + o(x^3)) = -x^3 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)$.
9. *Método I*: Calculamos o polinômio em função de $x-1$. Temos $2 + (x-1) + 1 + 3((x-1)+1)^2 - ((x-1)+1)^3 = 2 + (x-1) + 1 + 3((x-1)^2 + 2(x-1) + 1) - ((x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1) = 5 + 4(x-1) - (x-1)^3 = 5 + 4(x-1) + o((x-1)^2)$. *Método II*: Usamos a definição: $y = 2 + x + 3x^2 - x^3$, $y' = 1 + 6x - 3x^2$, $y'' = 6 - 6x$, portanto $y(1) = 5$, $y'(1) = 4$, $y''(1) = 0$, logo o polinômio de ordem 2 é $5 + 4(x-1)$.
10. *Método I*: $y = \log x$, $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, $y''' = \frac{2}{x^3}$, portanto $y(2) = \log 2$, $y'(2) = \frac{1}{2}$, $y''(2) = -\frac{1}{4}$, $y'''(2) = \frac{1}{4}$, logo o polinômio é $\log 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$. *Método II*: Seja $x = 2+t$ e calculamos o polinômio no ponto $t_0 = 0$. Temos $\log(x) = \log(2+t) = \log(2(1+\frac{t}{2})) = \log 2 + \log(1+\frac{t}{2}) = \log 2 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{24} + o(t^3) = \log 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$.
11. $\frac{1}{2}(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) + 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)) = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.
12. $\frac{1}{1-(2x^2+o(x^3))} = 1 + (2x^2 + o(x^3)) + o(x^3) = 1 + 2x^2 + o(x^3)$.
13. $\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x + o(\sin^3 x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^3)) + \frac{1}{3}(x^3 + o(x^3)) + o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.

14. $\log(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)) = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}x^4+o(x^4))+o(x^4) = -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$.
15. $1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+(x+x^2)^4+o(x^4) = 1-x+x^3-x^4+o(x^4)$.

3.2.
1. Olhando o polinômio de Taylor da tangente reparamos que o denominador tem ordem 3, portanto paramos a $o(x^3)$. $\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)} = -\frac{1}{2}$.
2. O denominador tem ordem 4, portanto paramos a $o(x^4)$.
$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)-\frac{3}{2}x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{11}{24}x^4+o(x^4)}{x^4} = \frac{11}{24}$.
3. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x\cos x+\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-x(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3))+x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}x^3+o(x^4)}{x^4} = \infty$.
4. O denominador é assintótico a $\frac{1}{2}(x^{\frac{3}{2}})^2 \asymp x^3$, portanto paramos a $o(x^3)$.
$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3))-x^2}{\frac{1}{2}x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3} = -1$.
5. Como temos n^2 na frente do log precisamos chegar até a ordem $\frac{1}{n^2}$, assim sobra $n^2 o(\frac{1}{n^2}) \to 0$. Temos $\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + o(\sin^2 x) = x + o(x^2) - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^2)) + o(x^2+o(x^2)) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. Portanto $\lim_{n\to\infty} n\big(1-n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\big) = \lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})) = \frac{1}{2}$.
6. O denominador é assintótico a $\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$, portanto paramos a $o(\frac{1}{n^2})$.
$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})-\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}} = -1$.
7. Olhando numerador e denominador reparamos que é suficiente calcular o polinômio de $\sin x$ até a primeira order não nula depois de x, isto é a ordem 3. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6}\frac{1}{n^6}+o(\frac{1}{n^6})-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{6}\frac{1}{n^6}}{-\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3} = 0$.
8. Como temos n^2 na frente, precisamos chegar até $o(\frac{1}{n^2}$, portanto, como $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\sim\frac{1}{n}$, calculamos o polinômio do exponencial até a ordem 2. $\lim_{n\to\infty} n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2+o(\frac{1}{n^2})-1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} n^2(-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})) = -\frac{1}{2}$.

3.3.
1. $\sum\frac{n}{\log^2 n}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})-1-\frac{1}{n}) = \sum\frac{n}{\log^2 n}(\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})) \sim \frac{1}{2}\sum\frac{1}{n\log^2 n} < +\infty$.
2. $\sum\log n(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})-\frac{1}{n}) = \sum\log n(-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})) \asymp \sum\frac{\log n}{n^3} < +\infty$.
3. $\sum\log(1-\frac{1}{2}\frac{4}{n^2}+\frac{1}{24}\frac{16}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})+\frac{2}{n^2}) = \sum\log(1+\frac{2}{3}\frac{1}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})) \sim \sum(\frac{2}{3}\frac{1}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})) \asymp \sum\frac{1}{n^4} < +\infty$.
4. $\sum n^2(1-\sin\frac{1}{n}+\sin^2\frac{1}{n}-\sin^3\frac{1}{n}+o(\sin^3\frac{1}{n})-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}) = \sum n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^3})-\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}) = \sum n^2(-\frac{5}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3})) \asymp \sum\frac{1}{n} = +\infty$.