Equações de primeira ordem

1. *Equações lineares*:

$$\begin{cases} y' = P(x)y + Q(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Solução:

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} P(t)dt}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} P(\tau)d\tau}dt\right).$$

2. *Variáveis separáveis*:

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Solução para $b(y_0) \neq 0$:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{b(u)}du = \int_{x_0}^{x} a(t)dt.$$

3. *Equações de Bernoulli*:

$$y' = P(x)y + Q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, 1.$$

Dividir por y^{α} e substituir $z = y^{1-\alpha}$. Se obtém uma equação linear na incógnita z.

4. *Equações de Riccati*:

$$y' = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x).$$

Dada uma solução particular $y = \psi(x)$, substituir $y = \psi + \frac{1}{z}$. Se obtém uma equação linear na incógnita z.

5. *Equações homogêneas ou de Manfredi*:

$$y' = f\left(\tfrac{y}{x}\right).$$

Substituir $z = \frac{y}{x}$, logo $y = xz$ e $y' = z + xz'$. Se obtém uma equação de variáveis separáveis na incógnita z.

6. *Equações exatas*:

$$\begin{cases} y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad \text{com } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Solução $F(x, y) = 0$, sendo:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, u)du.$$

7. *Equações exatas através de um fator integrante*:

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Se $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = h(x)$ ou $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = h(y)$, fator integrante $u = e^{\int h}$. Obtemos a equação exata:

$$y' = -\frac{uP}{uQ}.$$

Equações lineares de segunda ordem

1. *Equações homogêneas de coeficientes constantes:*

$$y'' + by' + cy = 0, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Polinômio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$, logo $\Delta = b^2 - 4c$. Soluções:

- $\Delta > 0$: $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, sendo λ_1 e λ_2 as raízes de P;
- $\Delta = 0$: $y = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}$, sendo λ_1 a raiz de P;
- $\Delta < 0$: $y = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x)$, sendo $\alpha \pm i\beta$ as raízes de P.

2. *Formula de Abel-Liouville para equações homogêneas genéricas:*

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0.$$

Seja $y = \varphi_1(x)$ uma solução não nula. Outra solução independente pode ser encontrada resolvendo:

$$\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1' = e^{-\int b}.$$

3. *Método de variação das constantes:*

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x).$$

Sejam $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2(x)$ duas soluções independentes da homogênea associada.

$$W(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{bmatrix} \qquad w(x) = \det W(x).$$

Solução particular:

$$\varphi(x) = A(x)\varphi_1(x) + B(x)\varphi_2(x)$$

com:

$$A(x) = -\int \frac{f(x)\varphi_2(x)}{w(x)}dx \qquad B(x) = \int \frac{f(x)\varphi_1(x)}{w(x)}dx.$$

4. *Equações de coeficientes constantes, método de determinação dos coeficientes:*

Caso I:

$$y'' + by' + cy = p(x), \quad p \text{ polinômio}, \ \deg(p) = n.$$

Solução particular:

- se $c \neq 0$, $y = q(x)$, q polinômio, $\deg(q) = n$;
- se $c = 0$ e $b \neq 0$, $y = xq(x)$, q polinômio, $\deg(q) = n$;
- se $c = b = 0$, $y = x^2q(x)$, q polinômio, $\deg(q) = n$.

Caso II:

$$y'' + by' + cy = p(x)e^{\mu x}, \quad p \text{ polinômio}, \ \deg(p) = n, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solução particular:

- se $P(\mu) \neq 0$, $y = q(x)e^{\mu x}$, q polinômio, $\deg(q) = n$;
- se $P(\mu) = 0$ e $P'(\mu) \neq 0$, $y = xq(x)e^{\mu x}$, q polinômio, $\deg(q) = n$;
- se $P(\mu) = P'(\mu) = 0$, $y = x^2q(x)e^{\mu x}$, q polinômio, $\deg(q) = n$.