

## Lista de Exercícios - Aula 7

1) Uma urna tem 20 bolas pretas e 30 brancas. Retiram-se 25 bolas com reposição. Qual a probabilidade de que:

a) 2 sejam pretas?

$X$ : # n.º de bolas pretas retiradas

### Distribuição Binomial

$$P(X=k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \frac{25!}{(25-2)!2!} \left(\frac{20}{50}\right)^2 \left(1 - \frac{20}{50}\right)^{25-2}$$

$$= \frac{25 \cdot 24 \cdot \cancel{23!}}{\cancel{23!} \cdot 2} \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^{23} = 0,00038$$

b) pelo menos 3 sejam pretas?

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^2 \binom{25}{k} 0,4^k 0,6^{25-k} = 0,99961$$

2) A probabilidade de um arqueiro acertar um alvo com uma única flecha é de 0,20. Lança 30 flechas no alvo. Qual a probabilidade de que:

a) exatamente 4 acertem o alvo?

$X$  = "acerta o alvo"

$$P(X=4) = \frac{30!}{(30-4)!4!} \cdot 0,2^4 (1-0,2)^{30-4}$$

$$= 0,1323$$

b) Pelo menos 3 acertem o alvo?

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 0,9557$$

3) Ao escrever um texto, um aluno comete diversos erros tipográficos. Ele verifica que, em média, há  $\lambda = 0,5$  erros por página, ou seja, um erro a cada 2 páginas. Assumindo que a distribuição dos erros segue o modelo de Poisson, calcule a probabilidade de que haja, pelo menos, um erro em uma página qualquer desse texto.

### Distribuição de Poisson

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$e = 2,718 \dots$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-0,5} 0,5^0}{0!} = e^{-0,5}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - e^{-0,5} = 0,3935$$

4) Num estado há 2 estudantes por cada 100 km. Qual a probabilidade de que:

a) em 250 km encontrem pelo menos 3 alunos?

$$\lambda = 100 \text{ km} \quad \lambda = 500/100 = 5$$

$$\lambda = 250 \text{ km}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$$

$$P(X=0) = e^{-5} \approx 0,00674$$

$$P(X=1) = 5e^{-5} \approx 0,03369$$

$$P(X=2) = \frac{5^2}{2} e^{-5} = 12,5e^{-5} \approx 0,08422$$

$$\therefore P(X \geq 3) = 1 - 0,12466 = 0,87534$$



b) Em 300km aovom 5 acidentes?

$$\lambda = 100 \text{ km} \quad \lambda = 6$$

$$\lambda = 300 \text{ km}$$

$$P(X=5) = \frac{e^{-6} \cdot 6^5}{5!} = 0,1604$$

5) Numo urro há 40 bolos brancos e 60 pretos. Retiram-se 20 bolos. Qual a probabilidade de que oovom no mínimo 2 bolos brancos, considerando-se as extrações:

a) sem reposição?

**Distribuição Hipergeométrica**

$$P(X=k) = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

onde  $N$  = tamanho do espaço amostral

$n$  = objetos retirados

$N_1$  = quantidade de objetos do tipo usado

$$P(X=k) = \frac{\binom{40}{k} \binom{60}{20-k}}{\binom{100}{20}}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$= 1 - \frac{\binom{40}{0} \binom{60}{20}}{\binom{100}{20}} - \frac{\binom{40}{1} \binom{60}{19}}{\binom{100}{20}}$$

$$= 1 - (6,6 \cdot 10^{-5}) - (1,45 \cdot 10^{-4})$$

$$= 0,999479$$

b) com reposição?

**Distribuição Binomial**

$$P(X=0) = 0,6^{20} \approx 3,66 \cdot 10^{-5}$$

$$P(X=1) = 20 \cdot 0,4 \cdot 0,6^{19} \approx 4,89 \cdot 10^{-4}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 3,66 \cdot 10^{-5} - 4,89 \cdot 10^{-4} = 0,999475$$

6) Supomos que temos umo urro com 36 bolos, sendo 27 bolos brancos e 9 pretos. Bolos são retirados até que umo blo preto apareça. Qual é a probabilidade de que precisemos de mais de 6 retirados para sortear o primeira blo preto?

**Distribuição Geométrica**

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

$$P(X=k) = \frac{9}{36} \left( \frac{1-9}{36} \right)^{k-1}$$

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6)$$

$$P(X > 6) = 1 - [P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=6)]$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^6 \left( \frac{1}{4} \right) \left( \frac{3}{4} \right)^{k-1} = 0,178$$

7) Em umo videte, 4% dos pessoas são professores. Qual é a probabilidade de que a 10ª pessoa que encontrarmos no avo, de forma aleatória, seja a 1ª professor? Qual o número médio de pessoas que devemos consultar para encontrar umo professor?

**Distribuição Geométrica**

$$P(X=10) = 0,04 (1-0,04)^{10-1} = 0,0277$$

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,04} = 25$$



8) Uma série de liga de futebol amador de uma cidade tem a regra de que o time que ganhar 4 jogos em 7 será o vencedor. Supondo que o time A tenha probabilidade  $p = 0,6$  de ganhar do time B. Qual é a probabilidade:

a) de que A vença a série em 6 jogos?

Distribuição Binomial Negativa

$$P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

$$P(X=6) = \binom{5}{3} 0,6^4 (1-0,6)^{5-3} = 0,207$$

b) de que A perca a série em 5 jogos?

$$P(Y=5) = \binom{4}{3} 0,4^4 (1-0,4)^{4-3} = 0,061$$

c) de que A vença a série?

$$P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^7 \binom{k-1}{4-1} 0,6^4 (1-0,6)^{k-4} = 0,71$$

9) Considere urna urna com 7 bolas pretas, 5 bolas vermelhas e 8 bolas brancas.

a) Se 5 bolas são retiradas com reposição, qual é a probabilidade de sortearmos 2 bolas brancas?

Distribuição Binomial

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{8}{20}\right)^2 \left(1 - \frac{8}{20}\right)^{5-2} = 0,345$$

b) Se 5 bolas são retiradas sem reposição, qual é a probabilidade de sortearmos 2 bolas brancas?

Distribuição Hipergeométrica

$$P(X=2) = \frac{\binom{8}{2} \binom{12}{3}}{\binom{20}{5}} = 0,394$$

14) Qual é a probabilidade de que a 4ª bola retirada seja a 3ª vermelha?

Distribuição Geométrica

$$P(X=4) = \left(1 - \frac{5}{20}\right)^{4-1} \left(\frac{5}{20}\right) = 0,105$$

15) Qual é a probabilidade de que vamos precisar de 8 lançamentos para obtermos 5 bolas pretas, sendo a 8ª bola a 5ª bola preta? Assuma que as bolas são retiradas com reposição.

Distribuição Binomial Negativa

$$P(X=8) = \binom{8-1}{5-1} \left(\frac{7}{20}\right)^5 \left(1 - \frac{7}{20}\right)^{8-5} = 0,050$$