Fundamentos de Probabilidade e Estatística para Ciência de Dados

---

Lista de Exercícios - Aula 8

1) Uma fábrica de carros sabe que motores têm duração normal com média de 150.000 km e desvio padrão de 5.000 km. Qual a probabilidade de que um carro escolhido ao acaso tenha um motor que dure:

a) menos de 170.000 km?

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X \le 170.000) = P\left(Z \le \frac{170.\cancel{000} - 150.\cancel{000}}{5\cancel{000}}\right)$$

$$P(X \le 170000) = P(Z \le 4) = 0.99997$$

b) entre 140.000 km e 165.000 km?

$$P(140\,000 \le X \le 165\,000)$$

$$= P\left(\frac{140\cancel{000} - 150\cancel{000}}{5\cancel{000}} \le Z \le \frac{165\cancel{000} - 150\cancel{000}}{5\cancel{000}}\right)$$

$$= P(-2 \le Z \le 3) = P(Z \le 3) - P(Z \le -2)$$

$$= 0.99865 - 0.02275 = 0{,}9759$$

c) Se a fábrica substitui o motor que apresenta duração inferior à garantia, qual deve ser esta garantia para que a porcentagem de motores substituídos seja inferior a 0.2%?

$$P(X \le x) = 0{,}002$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}002$$

$$P\left(Z \le \frac{x - 150000}{5000}\right) = 0{,}002$$

$$\frac{x - 150000}{5000} = -2{,}88$$

$$x = 135.600$$

2) Uma fábrica determinou que a vida média dos tubos de TV de sua fabricação é de 800 horas e segue a distribuição exponencial. Qual é a probabilidade de que a fábrica tenha que substituir um tubo gratuitamente, se oferece uma garantia de 300 horas de uso?

T: Vida útil dos tubos

$$E[T] = 800h$$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad E[T] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{1}{800}$$

$$P(T < 300) = \int_0^{300} f(t)\,dt = \int_0^{300} \frac{1}{800} e^{-t/800}\,dt$$

$$= 0{,}3127$$

3) Os salários dos diretores de empresas distribuem-se normalmente com média de R$ 8000 e desvio padrão de R$ 500. Qual a percentagem de diretores que recebem:

a) Menos de R$ 6470?

$$P(X \le 6470) = P\left(Z \le \frac{6470 - 8000}{500}\right)$$

$$= P(Z \le -3{,}06) \approx 0{,}0011 \approx 0{,}11\%$$

b) entre R$ 8920 e R$ 9380?

$$P(8920 \le X \le 9380)$$

$$= P\left(\frac{8920 - 8000}{500} \le Z \le \frac{9380 - 8000}{500}\right)$$

$$= P(Z \le 2{,}76) - P(Z \le 1{,}84)$$

$$= 0{,}9971 - 0{,}9671 = 0{,}03 = 3\%$$

4) A quantidade de óleo contida em cada lata fabricada por uma indústria tem peso distribuído normalmente, com média de 990 g e desvio padrão de 10g. Uma lata é rejeitada no comércio se tiver peso menor que 976g.

a) Se observarmos uma sequência casual, qual a probabilidade de que a 10ª lata observada seja a 1ª rejeitada?

Distribuição normal e distribuição geométrica.

$$P(\text{"rejeitar"}) = P(X \leq 976) = P\left(Z \leq \frac{976-990}{10}\right)$$

$$= P(Z \leq -1{,}4) = 0{,}0808$$

$p = 0{,}0808 \quad q = 1-p = 0{,}9192$

$P(1^{\text{a}} \text{ rejeição na } 10^{\text{a}} \text{ lata}) = q^9 \cdot p = 3{,}79\%$

b) Nas condições do item a, qual a probabilidade de que em 20 latas observadas, 3 sejam rejeitadas?

Distribuição normal e distribuição binomial.

W = "nº de latas rejeitadas em n experimentos", $n = 20$

$$P(W=3) = \frac{20!}{(20-3)!\,3!}(0{,}08)^3(1-0{,}08)^{20-3} = 14{,}21\%$$

5) Seja X a variável aleatória que representa o tempo que clientes esperam. Esse tempo tem distribuição exponencial com média igual a 4 minutos.

a) Calcule a probabilidade de que um cliente gaste entre 4 e 5 minutos na fila.

$E[T] = 4 \text{ min} \qquad \lambda = 1/4$

$$P(4 \leq T \leq 5) = P(T \leq 5) - P(T \leq 4)$$

$$= \left(1 - e^{-5/4}\right) - \left(1 - e^{-4/4}\right)$$

$$= 0{,}7135 - 0{,}6321 = 0{,}0814$$

b) Qual a probabilidade de que o cliente gaste mais do que 6 minutos na fila?

$$P(T \geq 6) = 1 - P(T \leq 6) = e^{-6/4} = 0{,}22$$