2.7 克莱姆法则、逆矩阵、体积

接下来我们将会讲到行列式的应用，这也是关于行列式的最后一讲！我们探索一下行列式的价值！

逆矩阵的求解公式

在这之前，我们要求逆矩阵都得弄一个包含单位矩阵的增广矩阵，这次我们不再需要这么麻烦，因为我们这次有了一个公式求解逆矩阵！

首先我们有这么一个事实：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。（这个大家可以计算验证一下，虽然比较复杂。）
显然等式左边的矩阵是代数余子式矩阵（即其中各个对应元素为其对应位置的代数余子式）的转置，而这里称这个由代数余子式组成的矩阵的转置为伴随矩阵。

然后我们就可以把这个矩阵总结出来：

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T$$

现在我们来证明这个公式吧！
$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T \Rightarrow AA^{-1} = \frac{1}{|A|}AC^T \Rightarrow |A|I = AC^T$
我们展开观察：$AC^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$
由于对 C 进行了转置，导致 A 每一个行向量与C^T对应列向量做内积后得到的正是 A 的行列式值，相当于行列式按每一行展开的逆运算。就像这样：

$$AC^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

然后这里有一个问题，那第一行为例，为什么$[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]$这个行向量在和不属于这行元素的代数余子式构成的列向量相乘时，得到的结果为零呢？也就是为什么$\begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}$中除对角线外，其余元素都为零呢？

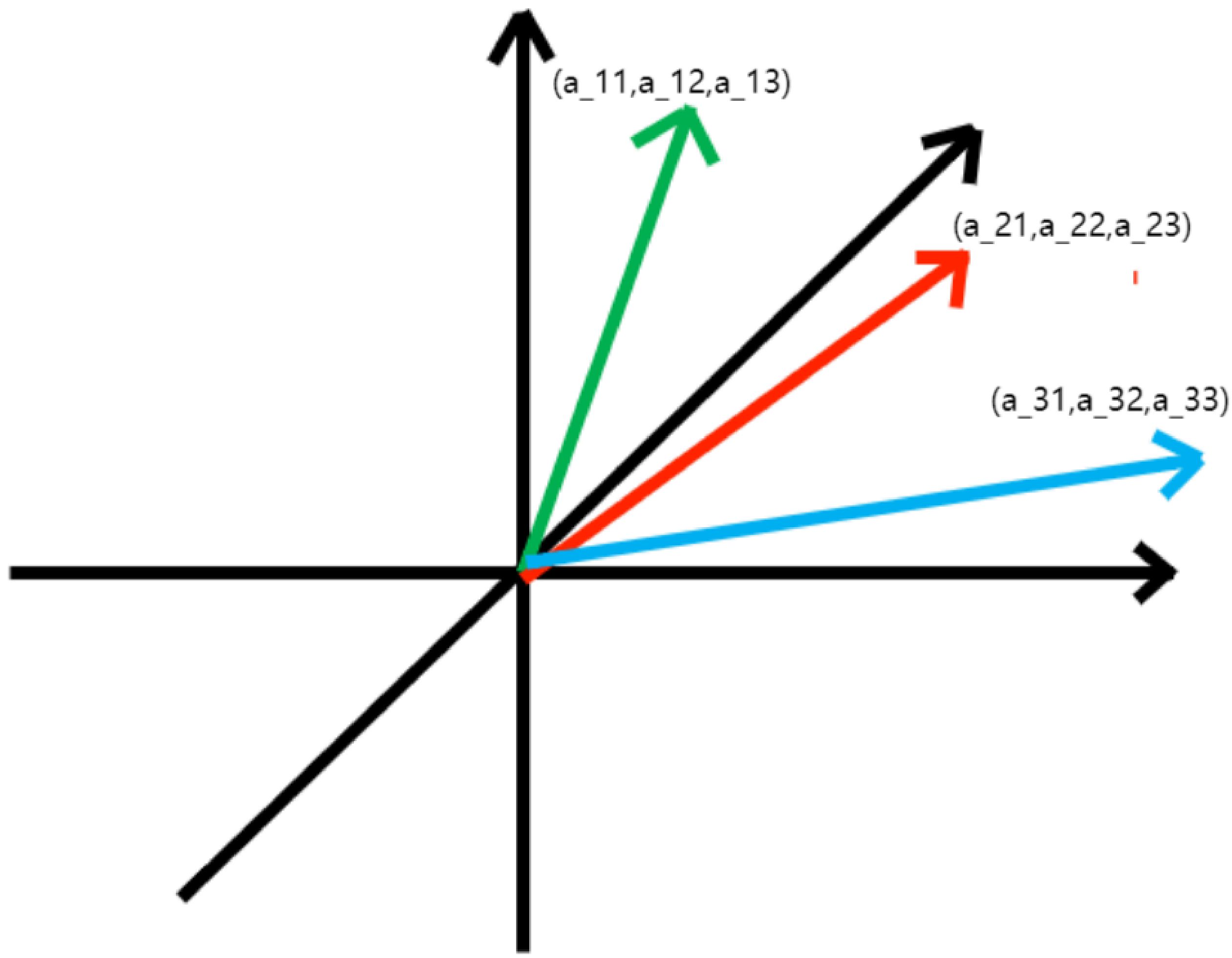
首先我们构造一个新矩阵：$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$，这个矩阵中第一行与第二行是相等的，刚好摘掉这一行后代数余子式是和$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$是一样的！（构造新矩阵这个有点难以理解大家多多体会！）
显然这个矩阵的行列式等于0（行列式性质4！）。然后我们可以展开第二行的求解公式：
$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \dots + a_{1n}a_{2n} = 0$！其他的以此类推，得到结论：矩阵 A 的某一行（或列）与**不属于该行（或列）的代数余子式**相乘时，结果为零！
到此证明完毕！

克莱姆法则

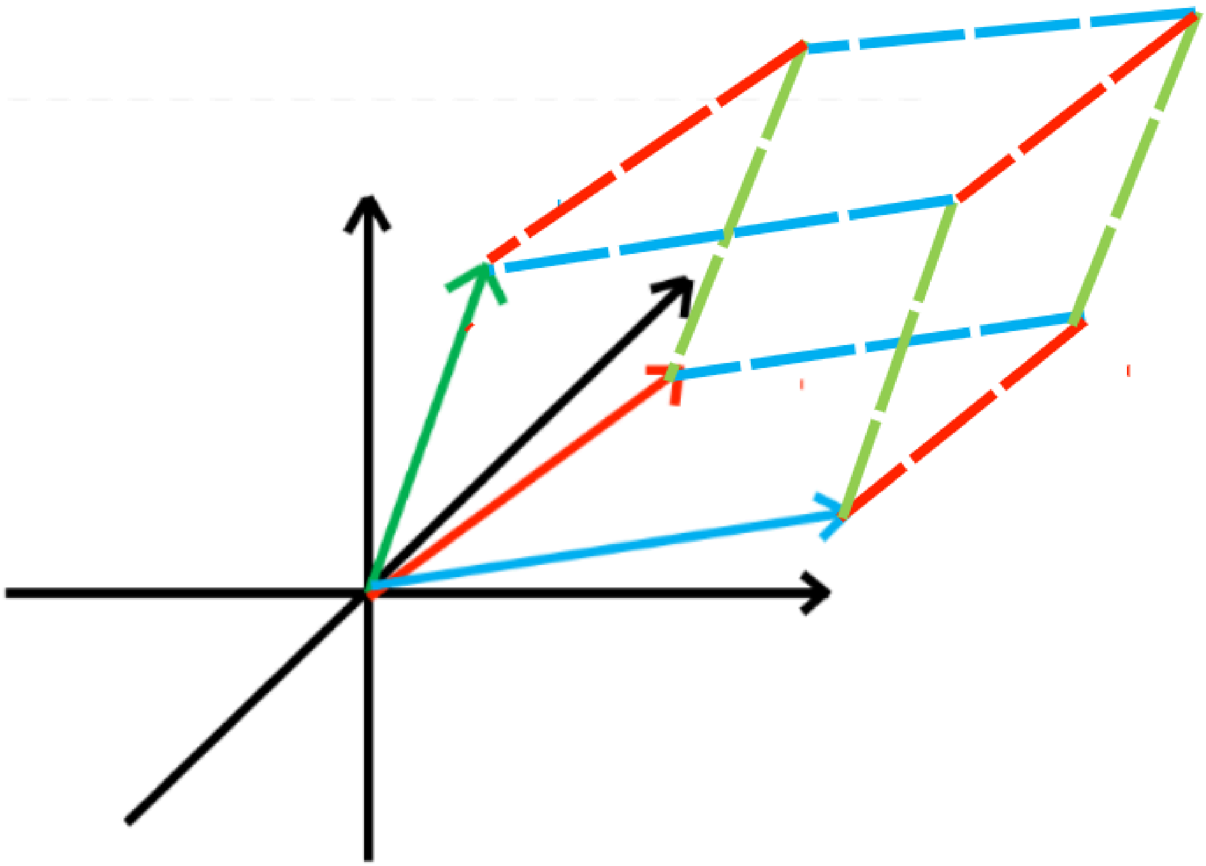
这是一种求解Ax=b的方法！
$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b \Rightarrow x = \frac{1}{|A|}C^Tb$。而$C^Tb$这里面有大文章！首先我们一个个拆开来看：
$x_1 = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13} \quad \dots \quad c_{1n}]b$。这个是不是很像一个求解行列式的代数余子式！那么我们可以这么认为：$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det B_2}{\det A} \dots$
那么矩阵B_1是怎么样的呢！其实这个与上文我们构造新矩阵的时候是一样的！首先代数余子式是与A矩阵的代数余子式完全一样的（或者说伴随矩阵完全一样)。然后仅仅是展开的那一列不一样（为什么是列，因为伴随矩阵被转置了！），所以矩阵B_1是由矩阵A换掉第1列为b后的结果！以此类推：矩阵B_i是由矩阵A换掉第i列为b后的结果。就像这样：$B_1 = \begin{bmatrix} b & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$！
这就是求解x的其他方法，但是这个方法的计算成本太高，不被经常运用！由于这个课程属于美国，更倾向于像我们前面说的那样通过消元和回代去求解x，但是俄罗斯和我们国家就会倾向于用行列式去求解x（参考同济线性代数教材开始是以行列式求解为基础引出的矩阵！）

体积

接下来我们说说行列式的几何解释：
行列式的值是一个六面体（由行向量构成的）的体积。或者说是各个行或者各个列组成的立体图形的体积！在三维中就是一个6面体！
假设我们有矩阵：$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，反应到图像中就是：



这三个向量张成了一个平行六面体，而 A 的行列式的绝对值即为其体积。如图：



显然的是行列式的值是分正负的，所以该六面体的体积即为行列式的绝对值。而正负号的作用是告诉我们这个立体是左手边的还是右手边的。因为当我们调换这个立体的两条边之后，我们得到的会是不同系下的立体，其体积不会变，仅仅是旋转一下。

然后我们讨论一下几个特殊的矩阵：
（1） 单位阵I：
很明显，单位阵对应的就是三个边长为 1 的立方体，向量的方向就是各坐标轴的正方向。
（2） 正交阵 Q：
还记得我们之前介绍的正交阵 Q，它除了正交这个性质之外，还有一点，即各向量长度均为1 $(Q^TQ=I)$。所以 Q 构成的立体图形也是三个边长为 1 的立方体，只是体现在坐标中时与 I 对应的立体图形位置不同。但是这里我们需要证明一下为什么正交矩阵的行列式是1或者-1：
$Q^TQ=I \Rightarrow |Q^TQ|=|I| \Rightarrow |Q^T||Q|=|I| \Rightarrow |Q|^2=1 \Rightarrow |Q|=1\text{或者}-1!$

当然我们可以通过这个定理去证明行列式性质的1，2，3。
性质一：就是单位向量构成的立体图形！体积是1，行列式则为1。
性质二：当交换矩阵的两行的时候，仅仅是改变立方体的方向，所以行列式的值改变正负性！
性质三：（1）$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，就意味着在立体图形中延长某几段边长，自然是对应体积的t倍。放在三维空间中就是在一个立方体中，找到其中相等的四条边延长t倍，其他8条边不变，想想看是不是体积增加了t-1倍。（在其他维度也一样！）
性质三：（2）$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$，同样以三维空间举例子，我们以行向量为基础

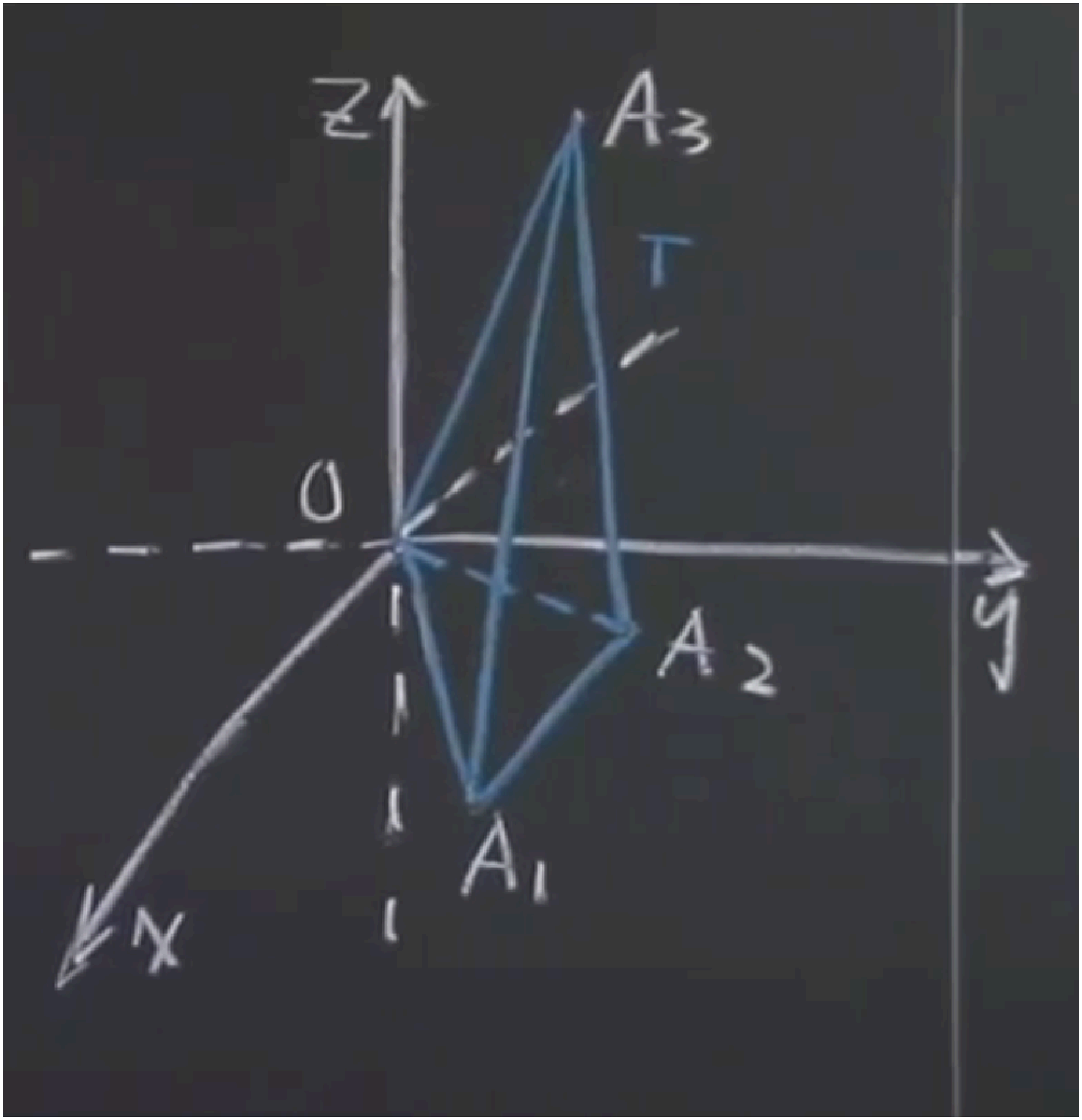
构建立方体，这样就意味着找到其中相等的四条边延长一段长度，其他8条边不变，是不是就是加了另外一个立方体的体积。（在其他维度也一样！）

同样运用这个定理我们可以用来求三角形面积。当我们给出三角形3个点：$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$。如果过原点，那么$x_1 = y_1 = 0$。那么我们求解矩阵:$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$的行列式的一半。(原点的可以忽略)。如果$x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$,我们就求解：$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$的行列式即可！

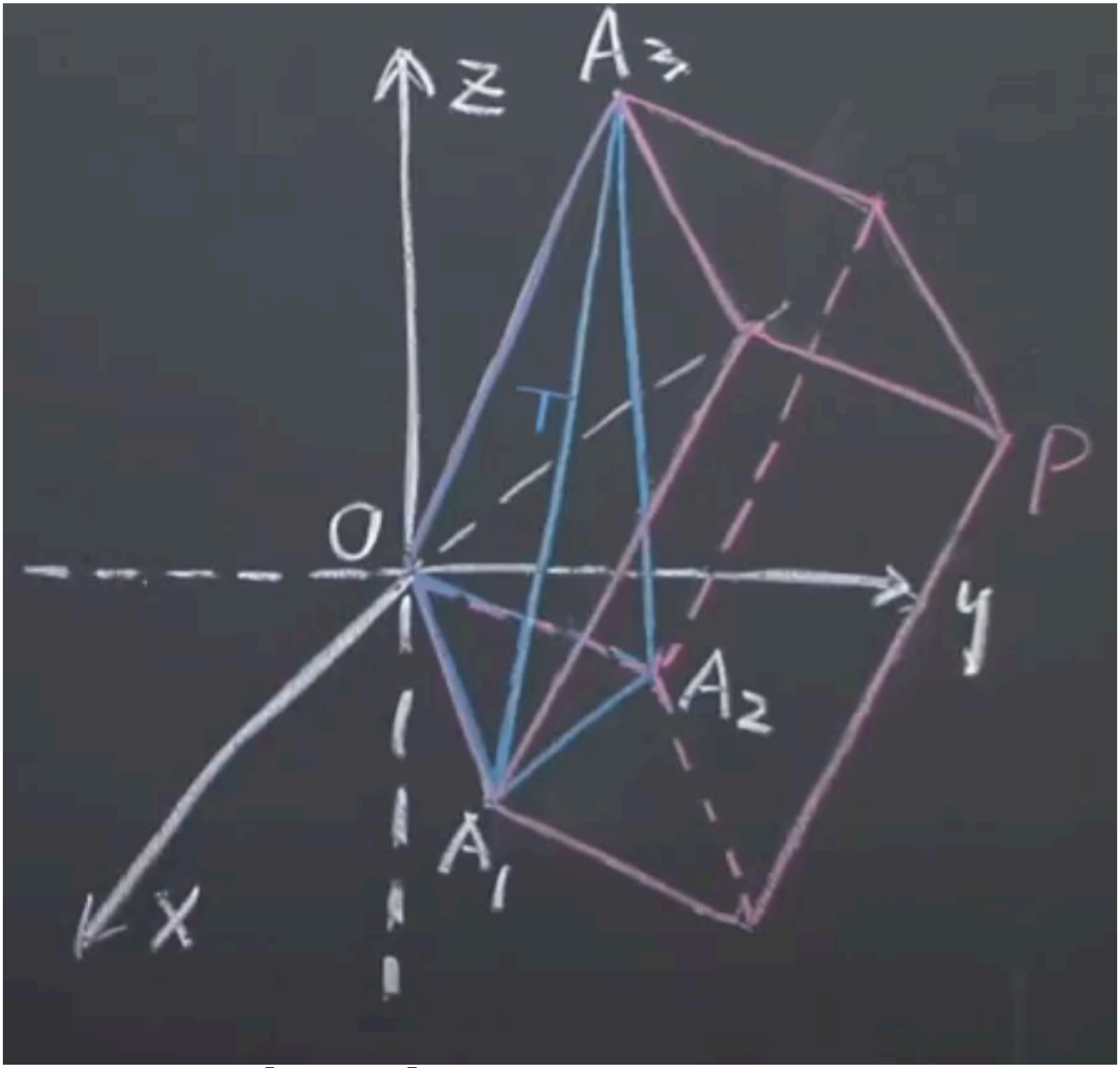
我们计算这个行列式的时候会做一系列消元，例如 2 行-1 行，3 行-1 行消去 1。这一系列减法相当于将三角形移到原点位置（这个的证明我们就略过！），这样行列式求解便有效了。

讨论课

当我们有三个点$A_1(2, 2, -1), A_2(1, 3, 0), A_3(-1, 1, 4)$。他们分别与原点相连并构成立体图形T（如下图），请你求解图形体积，当我们把A_3移动到(-201，-199，104)，这时体积如何?



然后我们补全得到：



我们P的体积等于矩阵$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$行列式。然而我们来看看T和P的体积公式是什么：

$T = \frac{1}{3}S_{三角形A_1A_2}A_3, P = 2S_{三角形A_1A_2}A_3$，所以P的体积是T的6倍！而$|P| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12$，所以T的体积的2！如果我们移动$A_3$到(-201，-199，104)，就得到$|P| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -201 & -199 & 104 \end{vmatrix}$，如果你继续计算会得到结果为12。但其实我们发现(-201，-199，104)是由(-1,1,4)-100(2,2,-1)得到的！这样的操作是不影响行列式的，所以体积不变！

习题课

问题一

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
求其伴随矩阵 C，并计算 AC^T 以确定 $\det(A)$。

解：
伴随矩阵 C 为
$C = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
计算 AC^T：
$AC^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I$
由于 $AC^T = \det(A)I$(之前推导过)，因此$\det(A) = 3$。
若将 $a_{13} = 4$ 改为 100，行列式不变，因为该位置的代数余子式为 0，其值不影响行列式。

问题二

球坐标 , , θ 满足 $x = \sin\,\mathrm{s}\,\theta, \quad y = \sin\,\sin\theta, \quad = \mathrm{s}$
求所有偏导数构成的 3×3 矩阵：
$\begin{bmatrix} \frac{x}{} & \frac{x}{} & \frac{x}{\theta} \\ \frac{y}{} & \frac{y}{} & \frac{y}{\theta} \\ - & - & \frac{}{\theta} \end{bmatrix}$

解：
该矩阵为: $\begin{bmatrix} \sin\,\mathrm{s}\,\theta & \mathrm{s}\,\mathrm{s}\,\theta & -\sin\,\sin\theta \\ \sin\,\sin\theta & \mathrm{s}\,\sin\theta & \sin\,\mathrm{s}\,\theta \\ \mathrm{s} & -\sin & 0 \end{bmatrix}$

计算其行列式 J（按第三行展开）：

$$
\begin{aligned}
J &= \mathrm{s} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{s}\,\mathrm{s}\,\theta & -\sin\,\sin\theta \\ \mathrm{s}\,\sin\theta & \sin\,\mathrm{s}\,\theta \end{vmatrix} + \sin \cdot \begin{vmatrix} \sin\,\mathrm{s}\,\theta & -\sin\,\sin\theta \\ \sin\,\sin\theta & \sin\,\mathrm{s}\,\theta \end{vmatrix} \\
&= \mathrm{s}\,\left({}^2\,\mathrm{s}\,\sin\,\mathrm{s}^2\,\theta + {}^2\,\mathrm{s}\,\sin\,\sin^2\theta\right) \\
&\quad + \sin\,\left(\sin^2\,\mathrm{s}^2\,\theta + \sin^2\,\sin^2\theta\right) \\
&= {}^2\,\mathrm{s}^2\,\sin + {}^2\sin^3 \\
&= {}^2\sin(\mathrm{s}^2 + \sin^2) \\
&= {}^2\sin
\end{aligned}
$$

(上面的计算过程看似复杂，其实很简单，高中学过三角函数就不难理解了！)
因此，球坐标下的体积微元为：$d = {}^2 \sin\ d\,d\,d\theta$!