# 期末复习

这就是本门课的最后一讲了，我们将会复习这个课程的内容。当然无法面面俱到！我们仍然是以习题为主！

## （1）

有一个矩阵A，有$Ax=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$无解,$Ax=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$有一个解！说说矩阵A的m,n,r之间的关系！

解：

首先根据矩阵乘法可以知道m=3！

然后，可以发现的是前面等式有一个无解的情况。这就说明$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$不在矩阵A的列空间中。但是这并不说明矩阵A不是满足哦，因为我们都不知道矩阵A有多少列，万一只有两列呢！然后我们知道矩阵的秩一定小于3，如果等于三，那么一个三维向量不可能无解！所以m>r！然后后面有一个条件是只有一个解的。只有一个解的情况，说明零空间中只有零向量，那么说明矩阵A是列满秩的，那么n=r。所以m>n=r！

那么我们可以举出一个A的例子吗?

当然可以，比如$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$,或者复杂一点可以是：$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$。

然后当A=$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$,我们有如下一系列判断题给到大家：

（a）:$|A^TA|=|AA^T|$

这个把例子一代就得出结论了！但其实如果A是一个方阵，这个结论是一定成立的！

（b）：$A^TA$可逆

正确，这判断不需要实际算出矩阵这里，因为 r=n，列满秩。此时矩阵 A 各列线性无关，矩阵可逆。(这个定理是证明过的，此外如果A不满秩，那么$A^TA$就不可逆！）

（c）:$AA^T$是正定矩阵

错误！矩阵$AA^T$ 规格是 3x3 的，但是秩为 2，所以一定不是正定矩阵。或者我们代入上面的例子计算即可发现错误！事实上，对任意实矩阵 A，$AA^T$总是半正定。

（d)：求证：对于方程 $A^Ty=c$ （c 为任意向量）至少有一解!

首先，矩阵$A^T$是行满秩的一个矩阵，这个矩阵就是典型的$r=m<n$，那么他是有无穷多个解的！

这整个题目似乎都是在复习Ax=b的可解性讨论问题，大家如果有不熟悉的地方回到1.10去复习复习！

## （2）

矩阵A是$[v_1 \quad v_2 \quad v_3]$,v是列向量!

（a）Ax=$v_1 - v_2 + v_3$，求解x?

这真的是小菜一碟！x=$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

如果这个不过关，那么应该回到第一单元复习矩阵乘法的内容!

（b）当$v_1 - v_2 + v_3 = 0$，那么解唯一吗?

其实就是在问A矩阵的零空间怎么样！明显$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$在矩阵A的零空间中，所以解不唯一!

（c）如果$v_1$，$v_2$，$v_3$ 标准正交，$v_1$，$v_2$ 怎样的线性组合最接近 $v_3$？

如果他们三个标准正交，那么在一个三维坐标系中，他们刚好是三条主轴。然后怎么样最接近，那就是问$v_1$，$v_2$构成的平面上，哪一点最接近于 $v_3$。那$v_1$，$v_2$构成的平面不就是xy平面，最接近的方式就是投影，z轴在xy平面投影就是原点，那么就是$0v_1 + 0v_2$最接近$v_3$!

前面两个题的题目都是聚焦于矩阵本身的空间与计算法则，这部分内容基础却十分重要，大家要好好复习！接下来我们就要复习一些特殊的矩阵，有着优良性质的矩阵!

# （3）

$$A = \begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.3\\0.4 & 0.2 & 0.3\\0.4 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}, \quad \text{注意 第 } 1,2 \text{ 列之和} = 2 \times \text{第 } 3 \text{ 列}.$$

## a) 求 $A$ 的特征值

- 各列线性相关 $\Rightarrow \lambda = 0$ 是特征值。
- $A$ 为马尔可夫矩阵 $\Rightarrow \lambda = 1$ 是特征值。（这是讲座中强调的结论！）
- $\mathrm{tr}(A) = 0.8$，由迹与特征值关系得第三特征值为

$$\lambda_3 = 0.8 - (0 + 1) = -0.2.$$

故特征值为

$$\boxed{\lambda = 0,\ 1,\ -0.2}.$$

## b) 设 $u_k = A^k u(0)$，若

$$u(0) = \begin{bmatrix}10\\0\\0\end{bmatrix},$$

求 $\lim\limits_{k\to\infty} u_k$. 实际上这是一个稳态问题!

研究稳态，我们直接给出通解（这些通解几乎都由欧拉公式推导而来，这就是为什么欧拉公式伟大的原因！）

将 $u_k$ 写成特征分解：

$$u_k = c_1\lambda_1^k x_1 + c_2\lambda_2^k x_2 + c_3\lambda_3^k x_3 = 0 + c_2 \cdot 1^k x_2 + c_3(-0.2)^k x_3.$$

当 $k \to \infty$ 时，$(-0.2)^k \to 0$，只剩 $\lambda = 1$ 项。

求 $\lambda = 1$ 对应的特征向量 $x_2$：

$$(A - I)x_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -0.8 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & -0.8 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & -0.6 \end{bmatrix} x_2 = 0.$$

可得

$$x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

因此

$$u_\infty = c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

然后求$c_2$，你当然可以代入通解公式来求解，但是注意这是马尔科夫矩阵，还记得人口那个例子吗，其实马尔科夫计算的就是流动的概率，但是他的总和不变的，利用马尔可夫链“分量之和守恒”：

$$u(0) \text{ 的分量和} = 10 \Rightarrow c_2 = 1,$$

最终

$$\boxed{u_\infty = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}.$$

## (4)

找一个 $2 \times 2$ 矩阵满足以下条件

### a) 把向量投影到直线 $\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ 上

套公式即可
投影矩阵公式

$$P = \frac{aa^\mathsf{T}}{a^\mathsf{T}a}, \quad a = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

计算

$$P = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}}.$$

（可验证 $\det P = 0$。大家记住投影矩阵特征值是0或者1！）

### b) 特征值为 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3$，对应特征向量 $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，求矩阵A

这个角度很新颖，我们从未如此过，如果是在考试中，也许我真的写不出来，但是其实不难，套公式即可！
用 $A = S\Lambda S^{-1}$：

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\quad S^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

计算

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

验证

$$Ax_1 = 0,\quad Ax_2 = 3x_2.$$

### c) 一个矩阵A，元素都为实数，且不能写成 $B^{\mathsf{T}}B$ 形式

$B^{\mathsf{T}}B$ 必对称，因此任何非对称矩阵均满足。例如

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}.$$

### d) 一个矩阵不对称，但具有正交特征向量

对称矩阵必正交可对角化，但反对称或正交矩阵（允许复特征向量）也满足。示例：

- 斜对称：

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

- 正交（旋转）：

$$\boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}.$$

## (5)

最小二乘问题

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{解得} \quad \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

这个求解我们在讲座中讲过这个的公式，所以大家都能计算得出来！

### a) 求 $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ 在列空间上的投影 $p$

其实我们说的最小二乘法逼近最优解，就是投影的结果，我们把近似解代入，得到的结果就是投影！

$$p = \hat{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \hat{d} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

### b) 对应直线拟合图

这个在讲座中也是有着详细的计算过程，这里略写一下，大家不熟悉回过头去看看2.3讲的部分！
取三点 $(0,3)$, $(1,4)$, $(2,1)$，拟合直线为

$$y = \frac{11}{3} - t.$$

### c) 找一个非零向量 $b \in \mathbb{R}^3$ 使最小二乘解为 $\hat{c} = \hat{d} = 0$

需 $b$ 与 $A$ 的两列正交。b在A的左零空间中，计算得（左零空间的向量求取也十分简单，这里不赘述！）
$A^T b = 0$，得到：

$$\boxed{b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

# 讨论课

# 第一题

矩阵A= $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

已知这个矩阵的两个特征值1和2，以及两个主元1和1。

（1）求解这个矩阵的第三个特征值与第三个主元？

特征值根据迹等于特征值总和，那么特征值等于-1。

而主元的乘积等于行列式，行列式等于特征值的积，那么主元是-2。

（2）如果$a_{33}$可以更改，那么找出一个最小的$a_{33}$使得矩阵A成为半正定矩阵？

现在矩阵A是$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & a_{33}\end{bmatrix}$,要成为半正定矩阵，那么矩阵的子行列式得大于等于0。而前面两个子行列式两个都是1，剩下的行列式就是其本身行列式，那么矩阵行列式等于$a_{33}-2\geq 0$，那么$a_{33}$最小就是2！

（3）如果让$A+cI$这个矩阵成为半正定矩阵，那么c最小值是多少？

此时矩阵是$\begin{bmatrix}1+c & 0 & 1\\0 & 1+c & 1\\1 & 1 & c\end{bmatrix}$,这个时候我们来看他的特征值来判断，A特征值是1，1，-1，那么$A+cI$特征值就是1+c，1+c，-1+c。那么$c\geq 1$，c的最小值是1！

# 第二题

首先$u_0$等于$\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}$其中的一个，然后$U_{k+1}=\frac{1}{2}U_k$，而$\frac{1}{2}A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$,求出$U_k$当k趋近于正无穷的时候！

首先，给出差分方程的通解$U_k=c_1\lambda_1^k x_1+c_2\lambda_2^k x_2+c_3\lambda_3^k x_3$。我们求得$\frac{1}{2}A$的特征值是$\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}$。所以稳态是$c_2x_2$，我们求得特征值对应的特征向量是$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$。那么这个时候我们就得求$c_2$了。

但是我们发现$\frac{1}{2}A$是马尔科夫矩阵，而马尔科夫通解方程与差分方程是一样，但是马尔科夫方程的好处是求解概率的，他不会改变总量！而上面三个不同初始状态的总量都是3，那么$c_2$等于1。当然，你也可以一个个代入$u_0$去求解初始状态！

到此复习完毕！