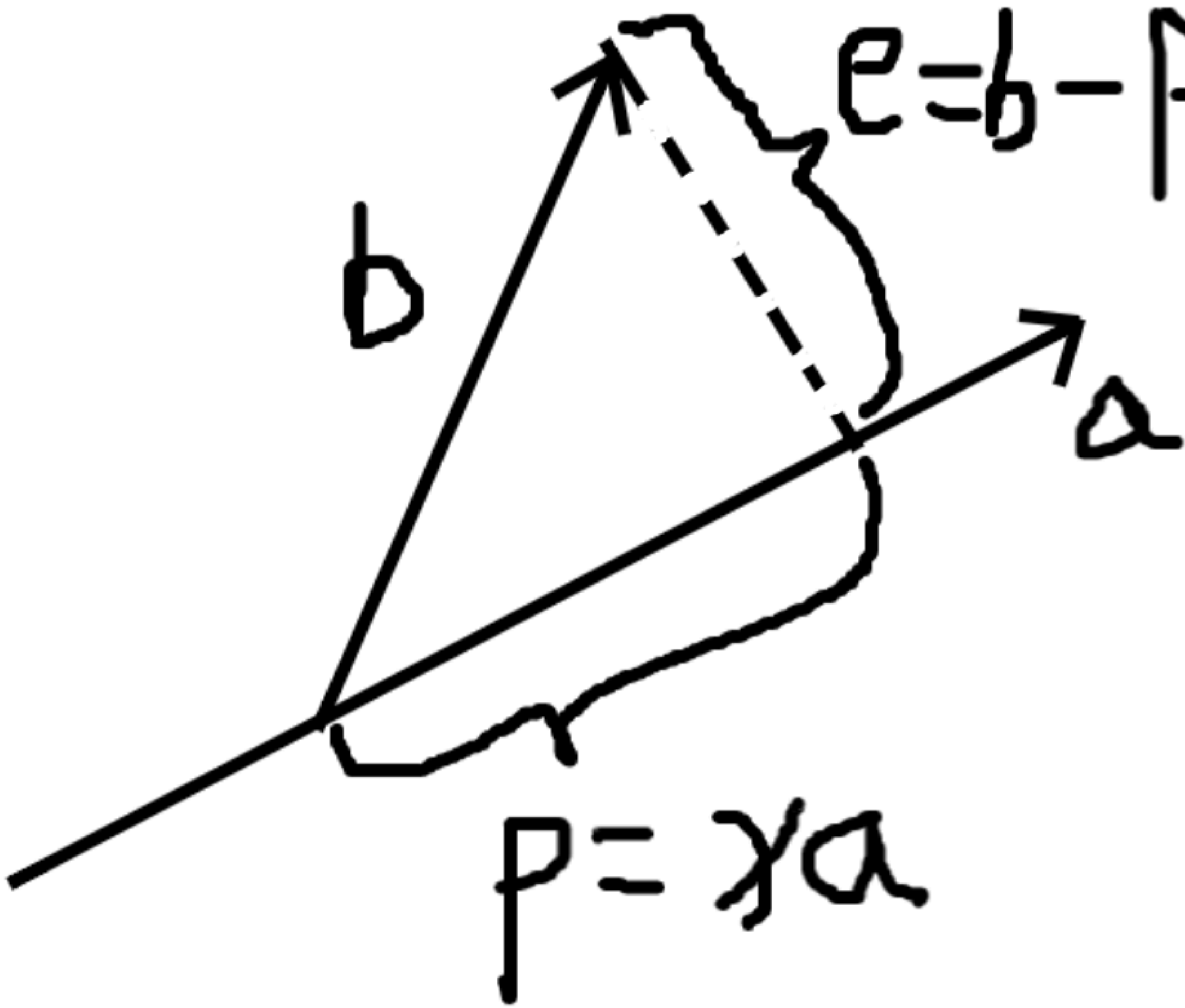
2.2 子空间投影

向量的投影

首先我们来看最简单的一维的投影。看下图：（图不好看）



p 即为 b 在 a 上的投影，写做p = xa（x 为倍数）。而这时，它们之间的差值是 b-p（向量减法）也可以说是b与a之间的偏移量，我们称之为 e 。那么现在的问题就是这个投影有什么特点呢？很明显，联系我们上节所学习的正交的概念，这个e是与a正交的。所以我们可以得到的是：$a^Te = a^T(b-p) = a^T(b-xa) = 0$，然后我们化简得到：$a^T(b-xa) = 0 \rightarrow a^Tb - a^Txa = 0 \rightarrow a^Tb = a^Txa \rightarrow x = \frac{a^Tb}{a^Ta}$，（注意，在线性移动等式两边内容不可以像标量那样已过去当分母，而是乘以逆，不过在这里等式右边是标量！）代入x到p=xa或者说是p=ax中得到：p=$a\frac{a^Tb}{a^Ta}$，转换一下得到的是：$p = \frac{aa^T}{a^Ta}b$。那么可以发现p 的形式中含有 b，

那么就说明投影是通过前面系数(矩阵形式)来完成的，我们把它称为：投影矩阵。也就是说在这个例子中投影矩阵是：$\frac{aa^T}{a^Ta}$。

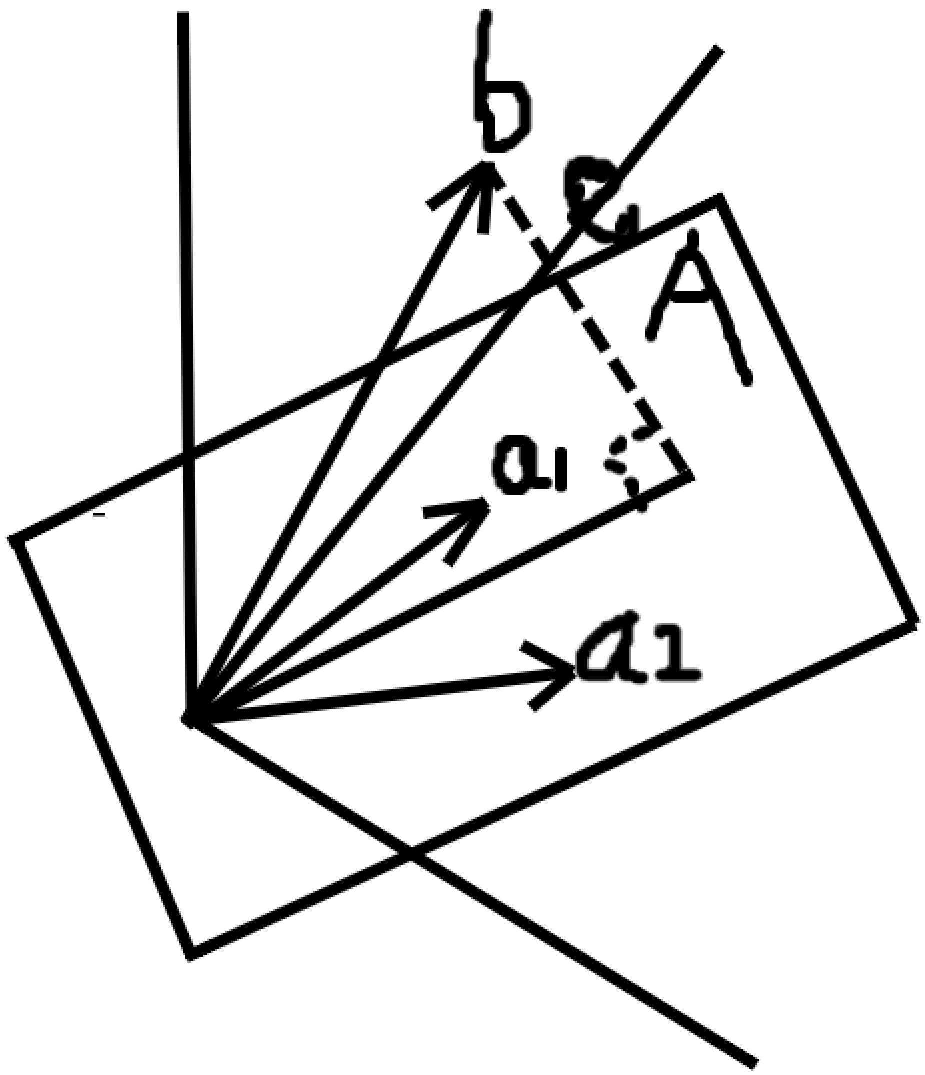
> tips：（注意这里的 aa^T与a^Ta是不同的，当 a 是列向量时，前者是一个矩阵，后者是一个具体数字。）

考考大家，投影矩阵的秩是多少，很显然是r=1。其实一般情况：投影矩阵的秩 = **被投影子空间的维度**。

然后我们来看看这个投影矩阵P有什么性质：
（1）他是投影的。$\frac{aa^T}{a^Ta}$中，上面是矩阵，下面是一个数！而上面$(aa^T)^T=(a^T)^Ta^T=aa^T$他是对称的，所以矩阵P是对称的。所以第一个性质是矩阵是对称的！
（2）如果我们再投影一次，我们可以得到的结果与只投影一次并没有区别。所以我们说：$P^2=P$。
以上两条性质是符合所有投影矩阵的，也是我们继续扩展投影概念的基础。

平面上的投影

是否还记得我们上一讲最后一部分关于Ax=b无解问题的探讨吗？b无解其实就是因为b不在矩阵A的列空间中！我们以一个三维空间维例子去解答，如下图：



平面A就是矩阵A的列空间。a_1, a_2是平面的一组基。b是对应Ax=b中无解的那个b！而e就是垂直平面A的那个法向量。而那个p向量在A平面上等于$\hat{x_1}a_1+\hat{x_2}a_2$。或者写成：

$p=A\hat{x}, A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}$(其中的$a_n$都是列向量)，$\hat{x}=\begin{bmatrix}\hat{x_1}\\\hat{x_2}\end{bmatrix}$。所以e=b-p=b-$A\hat{x}$

由正交的定义我们得到的是：e是与a_1, a_2是正交的。那么$a_1^T(b-A\hat{x})=0, a_2^T(b-A\hat{x})=0$。合成可以得到的是：$\begin{bmatrix}a_1^T\\a_2^T\end{bmatrix}(b-A\hat{x})=0,$ 可以说$A^T(b-A\hat{x})=0$！这么一看，e是在A的左零空间中的，由我们之前学过四个子空间的正交补关系可得e是垂直于A的列空间的！一切都说得通了，一切都是严丝合缝！那么化简得到的是：$A^TA\hat{x}=A^Tb$。所以上一讲说到这个关键的性质不是空穴来风的！

其实我们也可以这么理解，要在A的列空间中找到一个最接近b的结果空间，就只能是投影最接近了！投影的情况下才会是最优近似解！

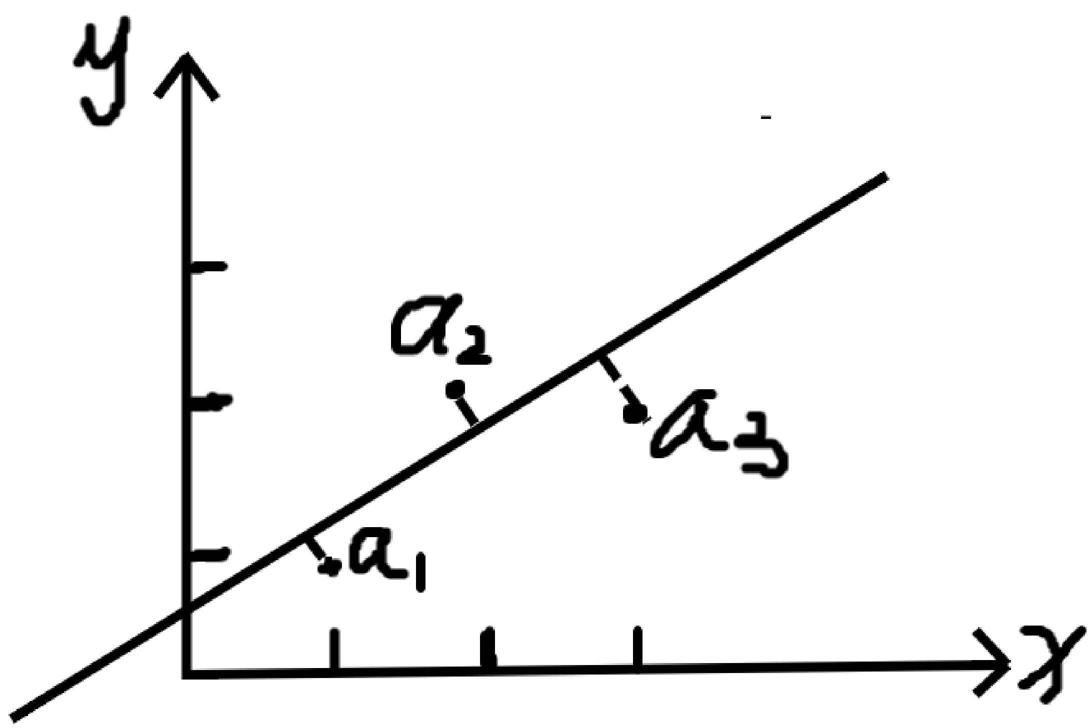
而由$A^TA\hat{x}=A^Tb$可以得到的是$\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb$。我们知道$p=A\hat{x}$，那么代入得到的是：$p=A\hat{x}=A(A^TA)^{-1}A^Tb$。这就是最通用的投影矩阵的公式。上面的是可以推导的（当A是一条线时，那么$(A^TA)^{-1}$就是一个数，那么投影矩阵就是$\frac{AA^T}{A^TA}$。

首先对于这个式子我想问问大家，可以把$A(A^TA)^{-1}A^T$拆解成：$AA^{-1}(A^T)^{-1}A^T=I$吗，其实是

不能的，为什么呢，因为我们说过A是可逆矩阵了吗，显然没有，如果A是的话，对于一个可逆矩阵来收，是不存在找不到的解的！也就是说b一定是在A的列空间中的，那么投影矩阵就是I,b本身就是自己的投影！但是如果A不可逆，那么投影矩阵就是：$A(A^TA)^{-1}A^T$！（不可拆开括号！）他同样满足对称与平方相等这两条性质的。感兴趣的同学可以自己证明看看，不难的！
经过这么分析，这就是为什么$A^TA\hat{x}=A^Tb$成立的原因！

最小二乘法初涉

经典的最后一部分是后一讲的药引：最小二乘法的初涉！如图：



在一个二维坐标系中有三个点：$a_1:(1,1),a_2:(2,2),a_3:(3,2)$。找出一条直线与这三个点的距离最近。我们假设最优直线方程：y = C + Dx，代入三个点列出方程。得到：

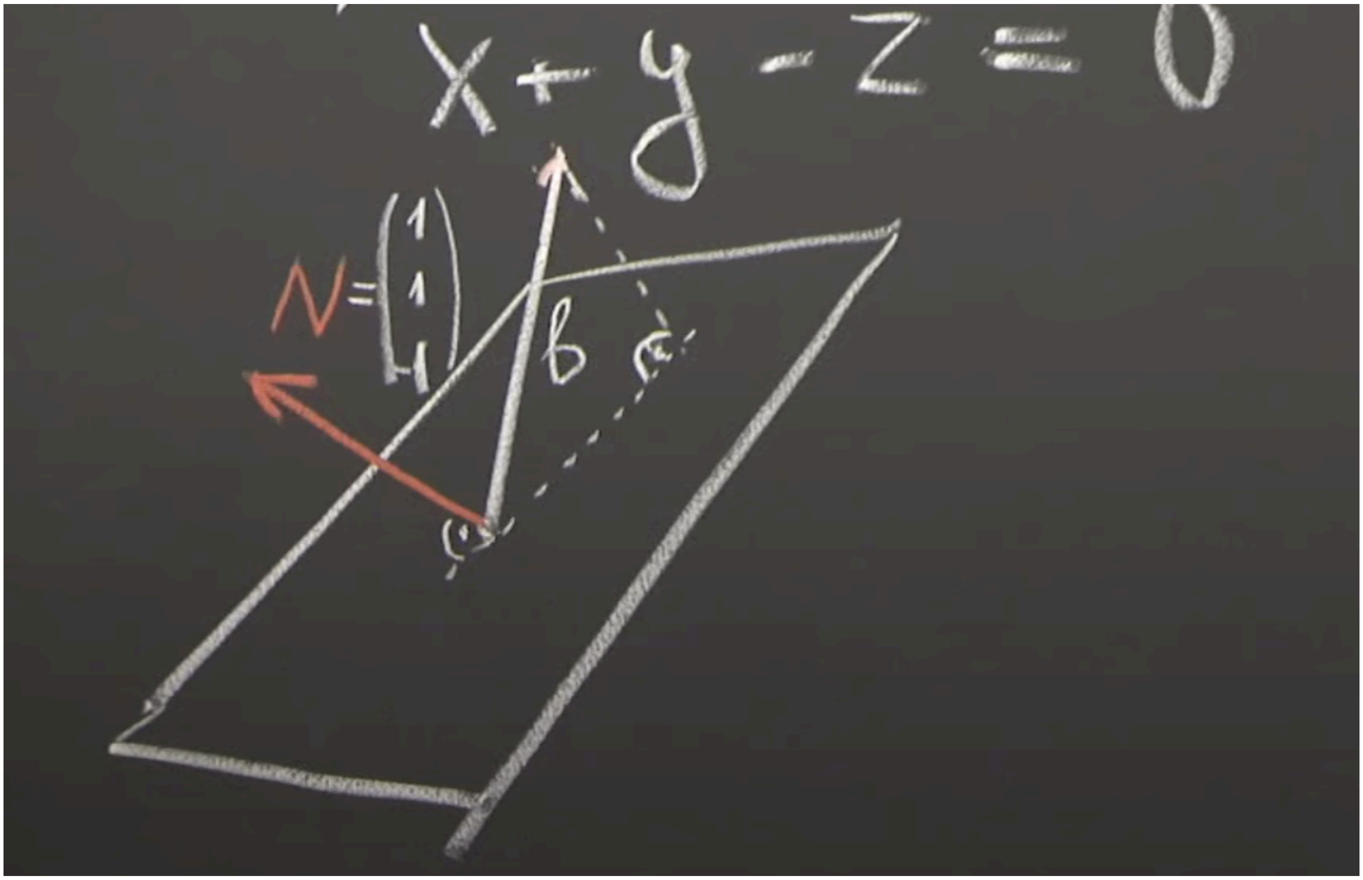
$$\begin{cases}C+D=1\\C+2D=2\\C+3D=2\end{cases}$$

很明显这个方程是无解的。也可以说Ax=b无解。但是我们可以$A^TA\hat{x}=A^Tb$化简为这样找出最优解C和D！当然最小二乘法我们下一讲还会深入讨论！

讨论课

首先在问题之前我们来说一个事实，以一个例子为切入点吧！当我们有一个矩阵，他的列空间是在三维空间中的一个平面（有3行但是秩为2），那么这个平面的法向量是什么，答案是：列空间正交补空间的基，也就是说平面的法向量是矩阵左零空间的基！也是同一个向量b投影到正交补空间的结果！当然更高维度中也会有这样的关系在，不过会更加复杂！但是在3维或者低纬度空间中是可以帮助我们简便运算的！

好的，我们来看题：



对于这个平面，找到向量B投影到该平面的投影向量。

（1）在讲座中，strang教授花了很长时间推导的公式我们可以用上了！

$P=A(A^TA)^{-1}A^T$，但是在此之前我们需要求出A。已经知道A的公式的，随便代入得到两个独立的向量是：$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，那么矩阵A就是：$\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\\0&1\end{bmatrix}$。那么我们开始计算：

$$P=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\\0&1\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\\0&1\end{bmatrix})^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

得到$P=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

（2）根据向量加法，是不是：b=p+e。而p=Pb，e我们在上面说了法向量是左零空间的基，也是同一个向量b投影到正交补空间的结果！那么P_Nb=e。所以说

$b=Pb+P_Nb\rightarrow Ib=Pb+P_Nb\rightarrow I=P+P_N\rightarrow P=I-P_N$

很显然P_N更好计算，$P_N = N(N^TN)^{-1}N^T$。N已经在图中标出！计算得到的结果与解法一一样的！

习题课

问题一：

设 A 为去掉最后一列的 4×4 单位矩阵，即 A 是一个 4×3 矩阵。将向量 b=(1,2,3,4) 投影到 A 的列空间上。
问：投影矩阵 P 的形状是什么？P 的具体形式如何？

解答：此时A的列空间就是一整个三维空间！那么投影矩阵P=

$$A(A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix})^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$。

p=Pb=$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

问题二：

若 $P^2 = P$，证明 $(I-P)^2 = I-P$。
对于上一题中的矩阵 A 和 P，P 将向量投影到 A 的列空间上，那么 I−P 将向量投影到哪里？

解答：$(I-P)^2 = I^2 - IP - PI + P^2 = I - 2P + P = I - P$，证明完毕！那么$I-P$为$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。然后由$I-P$投影的矩阵为$(I-P)b$，而由P投影的结果是：pb。那么$(I-P)bPb = (b-Pb).Pb = bPb - (Pd)^2 = 0$。那么在讨论课中我们说到过，正交补空间的投影矩阵是正交的！那么与A的列空间正交的空间就是A的左零空间了！