1.7转置，置换，向量空间

置换矩阵

这个在之前提到过，现在我们系统的来说说看。
首先，置换矩阵元素一定是0和1组成的！是由单位矩阵变换而来的！

然后，那么对于 n 阶矩阵来说，有多少个置换矩阵呢？答案是：n!种，也就是将单位矩阵 I 各行重新排列后所有可能的情况数量！这个之前也提到过。

最后，置换矩阵是可逆的，因为置换矩阵各行还原后可以得到单位矩阵。而且对于置换矩阵 P，有

$$PP^T = I$$

怎么来的呢，大家是否还记得在1.5讲到的矩阵乘法中的列乘以行这个方法吗，在对这个方法描述的最后一个段中，我们引入了一个数量积的计算方法，就是结果矩阵第i行第j列的元素等于第一个矩阵的第i行行向量乘以第二个矩阵的第j列列向量的数量积。
那么当我们用到PP^T时，想想看，当求结果矩阵的第一行第一列的元素时，是P的第一行乘以P^T的第一列，由于第一列是由第一行转置过去的，那么数值上完全一样，1对应1，0对应0，那么结果为1。但是到第一行第二列的元素时，计算时1就对应不上1了，那么全部结果为0。其实大家不难发现在这样的向量中只有一样的向量相乘结果才不会为0，而为1。那么什么时候是一样的向量相乘呢，只有在 `i=j` 的时候，刚好这些结果都在对角线中！所以

$$PP^T = I$$

然后：

$$P^{-1}PP^T = P^{-1}I$$

然后：

$$IP^T = P^{-1}I$$

所以：

$$P^T = P^{-1}$$

那么得到置换矩阵的转置等于他的逆！

转置矩阵

转置矩阵就是将原矩阵各行换成对应列，所得到的新矩阵：

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}\quad A^T=\begin{bmatrix}1&2&4\\3&3&1\end{bmatrix}$$

这个我们在前面的前置知识中就提到过。现在我们用更严格的数学语言来描述这个过程就是：

$$(A^T)_{ij}=A_{ji}$$

这个就是严格的数学语言的描述！
以及我们需要提到的一点是

$$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$$

这个的顺序是颠倒过来的，我们之前说过一个逆运算的类比，脱鞋是先脱鞋再脱袜子，反过来则是先穿袜子再穿鞋！

现在我们思考一个特殊情况，一个矩阵A转置后于原来的矩阵一模一样，这种情况下我们称A为对称矩阵。那么我们来说说对称矩阵

对称矩阵

一个对称矩阵满足的条件是矩阵中的元素是沿着主对角线对称的，像这样：

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&3&4\\4&4&7\end{bmatrix}$$

这就是去判断一个矩阵是否为对称矩阵的方法！
而且有一个很奇妙的地方就是一个矩阵与他矩阵转置的乘积的结果矩阵是对称矩阵，即：

$$RR^T$$

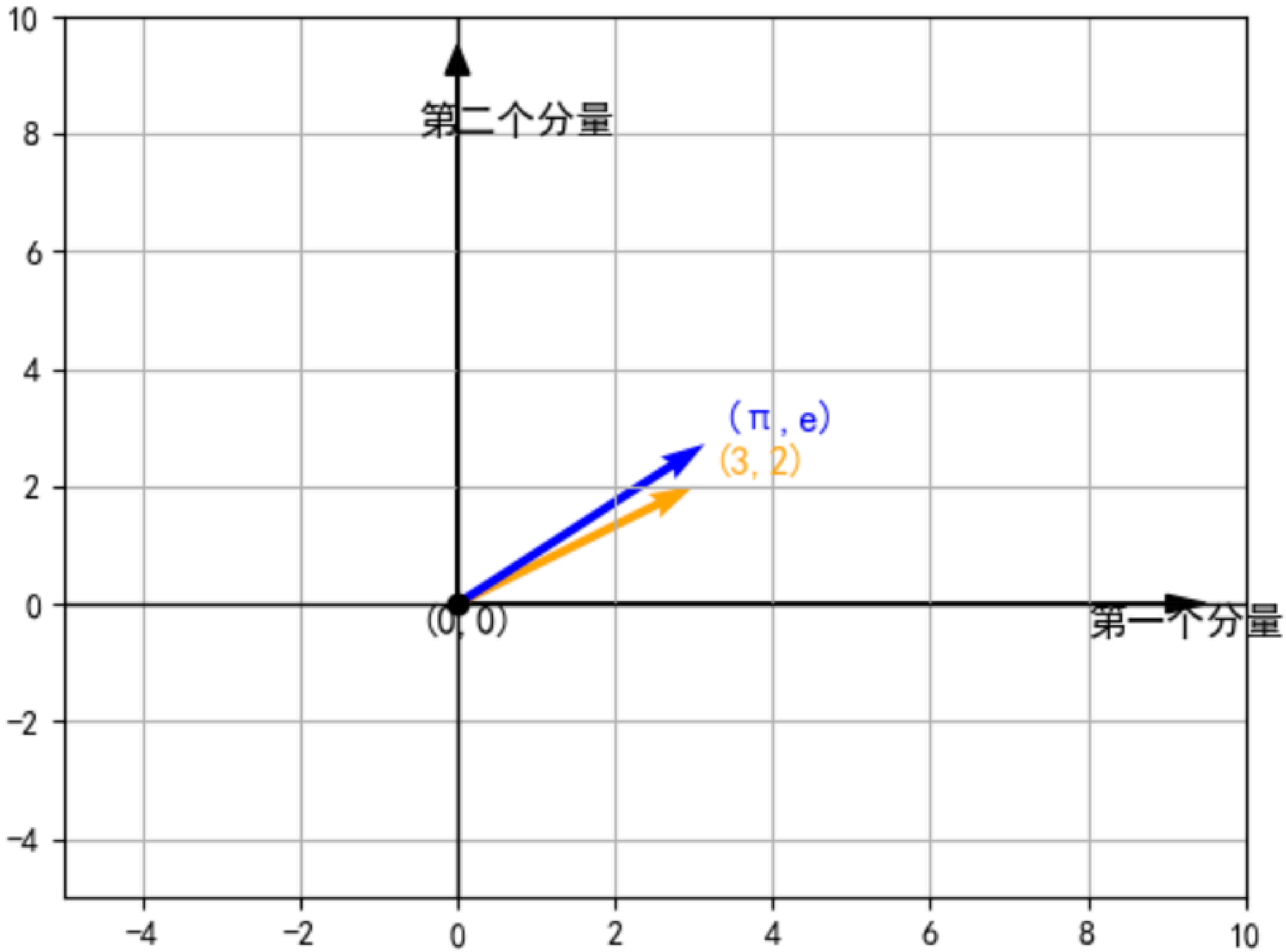
这是一个对称矩阵！
为什么呢，我们来证明一下是否正确，要知道我们判断矩阵是否对称的方法是看他的转置是否与原矩阵相同。那么$(RR^T)^T=(R^T)^TR^T=RR^T$，大家就可以看出端倪了！

到此为止，我们就已经完成了线性代数的基本运算和基本概念的介绍！从矩阵运算方法到逆矩阵到矩阵的分解，顺带着我们还了解了矩阵的思想。大家可以抽空对前面的内容进行一个复习！

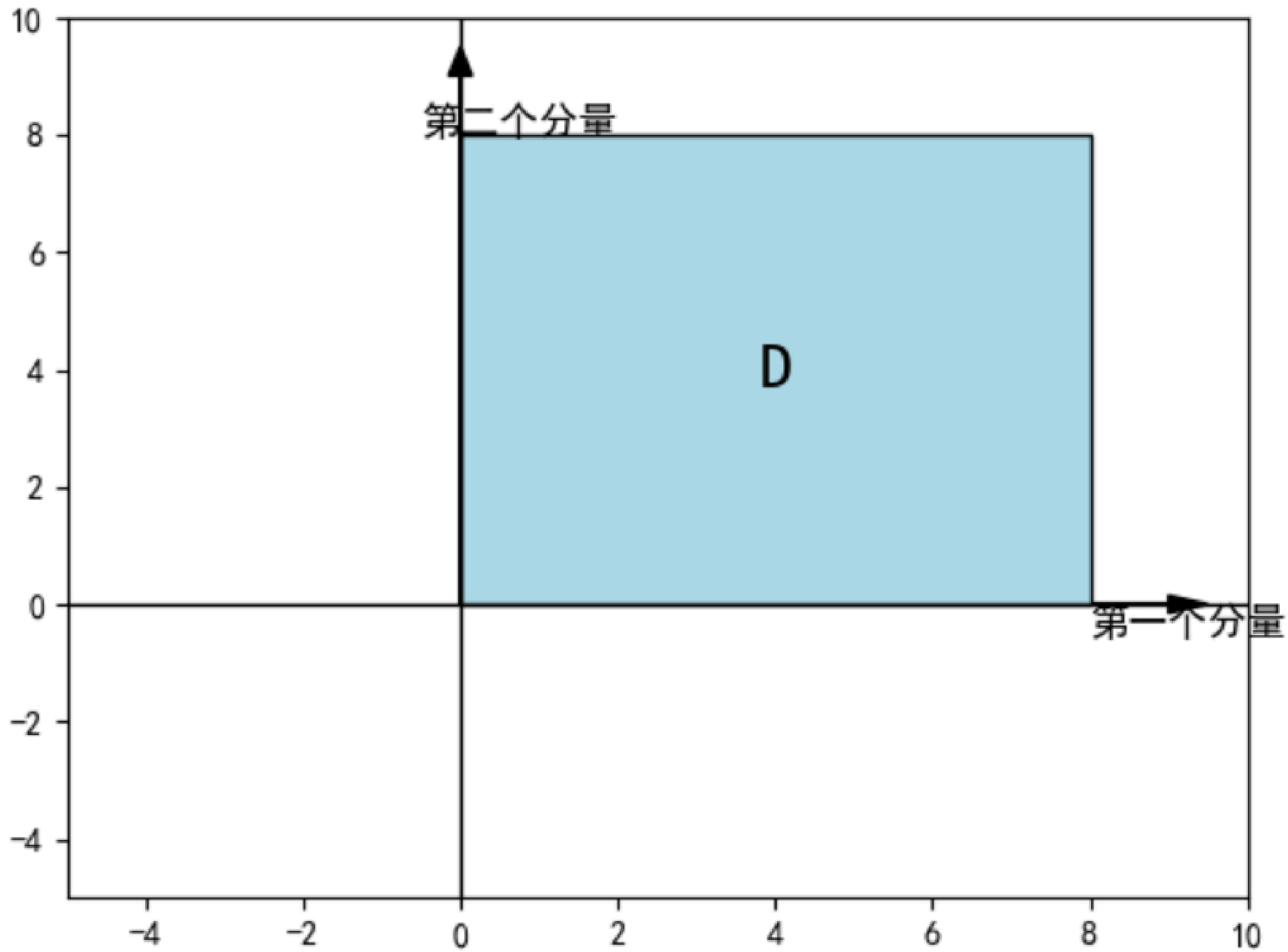
向量空间

什么是向量空间呢，我们可以这么理解，是向量的集合。但是需要注意的是，不是任意向量的集合都能被称为向量空间，不仅仅是不同向量的维度差异（比如二维向量是构成二维向量空间的，而三维向量则是三维向量空间的组成部分），而且需要满足一定规则，这个规则就是对向量进行任意的线性组合的结果都在这个空间中（比如：v → 3v 或 v，w → v+w运算，若得到的 3v 或者 v+w 都仍然在此空间中，那么这个空间可称为向量空间。）。那么我们可以这么去理解，对于已有的向量，对已有向量进行所有的线性组合，他们结果所张成的空间，就是已有向量的向量空间。

一个向量空间就像一个“装了很多向量的盒子”，这些向量可以做加法和乘标量（比如乘数字），而且结果还在这盒子里。也许上面我的说法有些不严谨，向量空间独立于向量的，没有向量的向量空间这一说，只有一个空间是不是向量空间的正确解释。但是我觉得这样说会更好理解！下面举些例子：
先来个二维的例子：
我们现在又矩阵$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$以及$\begin{bmatrix}\pi\\e\end{bmatrix}$。对于这三个矩阵，我们画出他的图像！



这三个向量的任意线性组合都在 `XYO` 这个平面上，那么 `XOY` 坐标系所在平面就是一个向量空间，我们称其为R^2。
那么同样的在R^3以及R^n上都是这个道理！
那么我们举一个不是向量空间的例子，

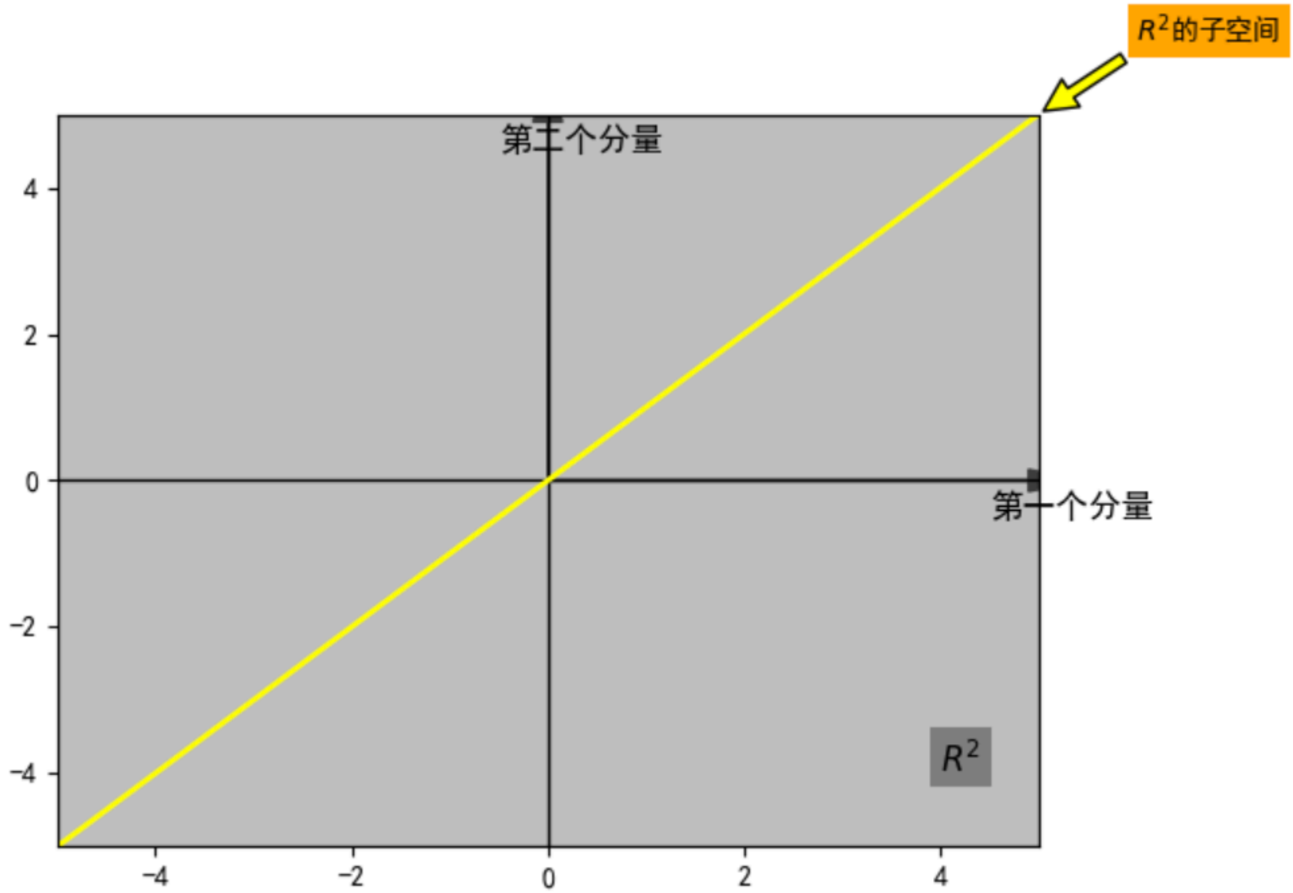


这次我们只取第一象限内的区域 D，那么这部分空间无法满足“线性组合仍在空间中”的要求，比如数乘运算时，随便取个负数，向量就跑到第三象限去，脱离 D 空间范围内了。

所以经过上面的例子，我们再来给出一个向量空间准确的定义：
向量空间可以是有限维的也可以是无限维的。在有限维向量空间中，空间的一个基是一组线性无关的向量，使得该空间中的任何向量都可以通过这组基向量的线性组合来表示。这个基向量的数量就是向量空间的维度。
还有值得一提的是，一个向量空间中，无论是几维的，都必须有着0向量，这是必须的，从定义中可以看出。

子空间（他衍生出许多类型，行空间，列空间以及零空间等等）

在向量空间里随便取其一部分，很可能得到的不是向量空间。那如果我们取向量空间的一部分，将其打乱，构成的有没有可能是向量空间呢？
答案是有的：



在这个图中，我们先从新选择一个基（基的数量是由空间维度觉得的，一条线的维度是一，那么我们选择一个向量作为基即可），而且这个基得是在R^2这个空间中的。那么聪明的小伙伴会说，是不是一个二维平面上的所有线都是子空间，不难发现，当我们随意去选择一个基时，任何的线性组合似乎在其他的线上都满足，但是当我们乘以0，那这不就炸了吗，所以只有过原点的线才是子空间！

下面我们总结一下R^2子空间的存在范围：

（1）Z，原点。当我们选择0向量作为基的时候！

（2）过原点的直线。

（3）还有他本身

那么我们推广到R^3上面的话：

（1） 穿过原点的平面。

（2） 穿过原点的直线。

（3） Z，原点。

（4）他本身

推广到R^n上面的话：

（1）穿过原点的n-1维空间。

（2）穿过原点的n-2维空间。

....

（3） 穿过原点的平面。

（4）穿过原点的直线。

（5）Z，原点。

（6）他本身。

所以我们这么说，子空间就是向量空间中的向量空间！

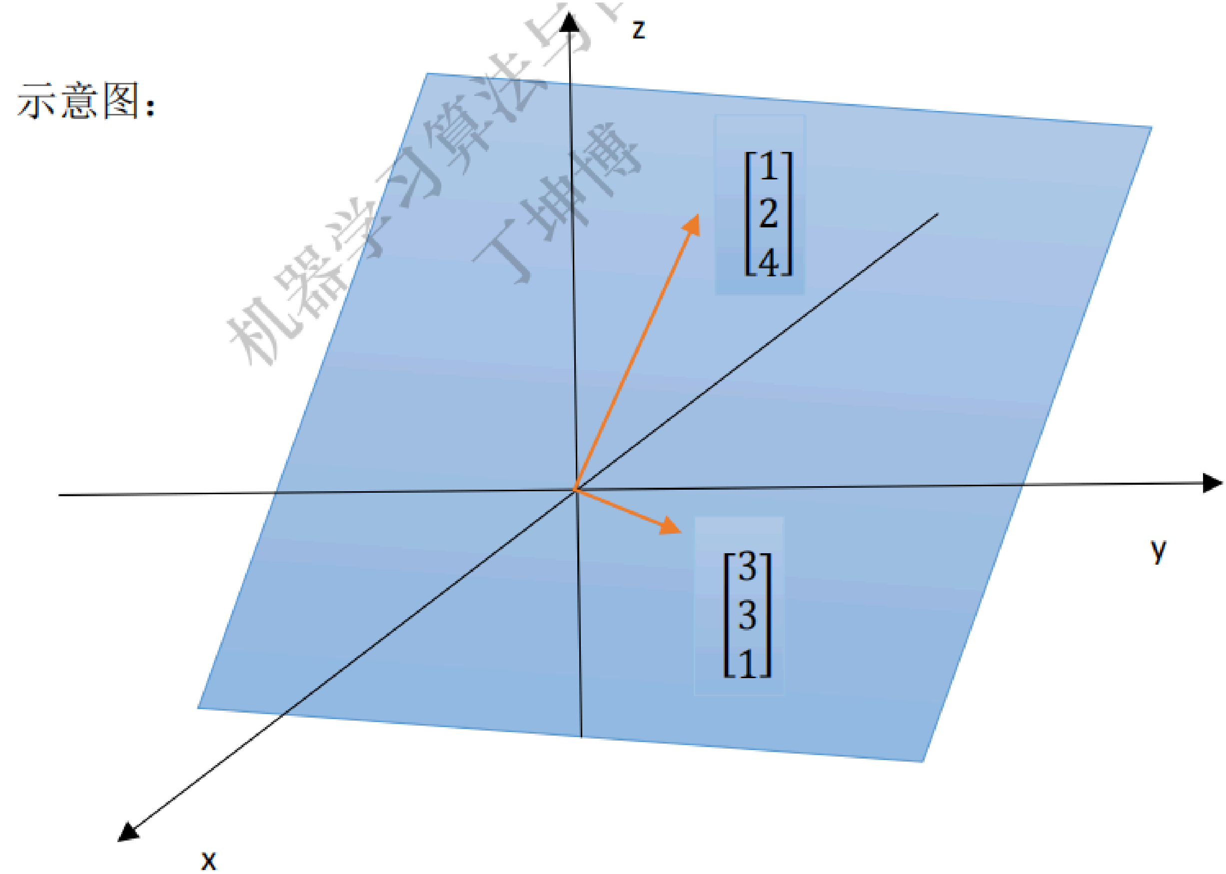
好。说到底线性代数是矩阵的艺术，但是上面说了半天都是在说向量没扯到矩阵啊，下面我们就要说说矩阵相关的空间了，也是四大子空间之一：列空间

列空间

下面我们运用一个矩阵构造一个子空间：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

有一个矩阵A，我们挑选出其中的列向量，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 这俩个列向量。他们都是三维的，那么他们是可以作为R^3向量空间的子空间的基。发现他们只有两个，所以是无法构成R^3本身的子空间的，还好他们是线性无关的，不然连平面都无法张成。那么他们通过线性组合张成的空间是一个平面：（由于三维的图片也好难画，我就借用了GitHub上另外一个star很高的关于mit这门课程的笔记项目的图片！）



这两个列向量组成的子空间就是这样的。记住C(A)。其实就是与原来自由选基，改成了以矩阵中列向量为基。

当我们推广到更高维度的时候，也是这样的！
这就是列空间！

讨论课

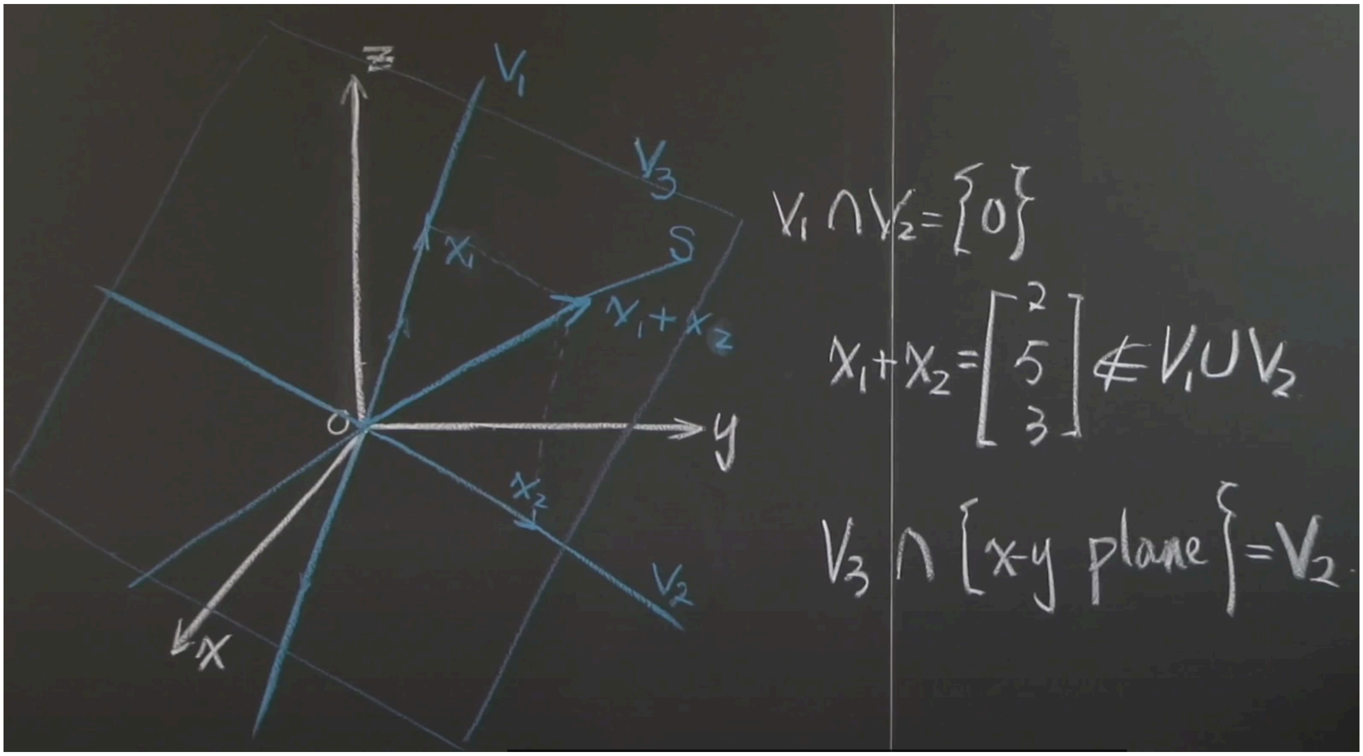
给了两个列矩阵：

$$\mathrm{X}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}\quad X_2=\begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix}$$

问题一：
找到X_1的子空间V_1，以及X_2的子空间V_2。并且描述一下$V_1 \cap V_2$是什么。
问题二：
找到以X_1和X_2为基的子空间V_3。并判断$V_3=V_1 \cup V_2$吗，以及找到一个V_3的子空间S，S是不包含X_1和X_2的。
问题三：
V_3与XY平面的交集是什么？

问题一解答：
V_1就是一个过X_1向量的一条直线，同理V_2也是。V_1与V_2的交集那肯定是原点了！
问题二的解答：
V_3肯定是包含V_1和V_2且过原点的平面！显然$V_3 \neq V_1 \cup V_2$
而S显然就可以是与X_1+X_2重合的一条直线！
问题三解答：
V_3与XY平面的交集是X_2!

由于三维图片好难画，所以我把课上的图片截图过来了：



习题课

问题1：

(来源于《线性代数导论》Strang的2.7#13)

- a) 找出一个3x3的置换矩阵，满足P^3 = I（但不是P = I）。
- b) 找出一个4x4的置换矩阵P'，满足$(P')^4$ = I。

问题2：

假设A是一个四阶方阵。如果：

- a) A是对称的，那么A中有多少个元素可以独立选择？
- b) A是反对称的（即A的转置等于-A），那么A中有多少个元素可以独立选择？

问题3：

判断下列说法是否正确（验证加法或给出反例）：

- a) 在所有矩阵M中，对称矩阵（满足A的转置等于A）构成子空间。
- b) 在所有矩阵M中，反对称矩阵（满足A的转置等于-A）构成子空间。
- c) 在所有矩阵M中，非对称矩阵（满足A的转置不等于A）构成子空间。

解答

关于问题一的第一小问，我们可以这么去想，让矩阵的每一行循环移动不就可以了吗，比如让第一行到第二行，第二行到第三行，第三行到第一行。 因为要让P自乘两次，也就是说按照这个顺序换行两次，那么我们从 `I` 反过去推！让 `I` 的第二行到第一行，第三行到第二行，第一行到第三行。这样操作两次，得到 `P` 矩阵为：

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

关于问题一的第二小问，也是这样的一个过程，反过来即可！
得到P'为：

$$\mathrm{P}'=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

关于问题二的第一小问：
首先，一个对称矩阵的主对角线上的元素是可以自由选择的。那么就有4个。然后，由于两边对称，那么半边元素是可以自由选择的，有6个。那么总共是10个！

关于问题二的第二小问：
首先，-A是什么意思，就是把矩阵所有元素都取他的相反数！乍一想，不也是10个吗，反对称的话，取相反数就可以了，另一边还是可以自由选择的！但是注意对角线上的元素，这个值得思考的是，主对角线元素是自己于自己反对称的，那么什么数的相反数等于自己呢，只有0了。所以这样的话可以自由选择的数就只有6个了！

关于问题三的第一小问：
让我们理解题目的意思：首先，空间不是相对于向量而言的吗，关矩阵什么事情，前面说到的列空间也是针对矩阵中的向量而言的啊。这里我们需要解释一下了：虽然我们在日常用语中可能更习惯于将“向量”理解为具有方向和大小的量，但在数学中，尤其是在线性代数里，任何满足向量空间公理的对象（包括矩阵）都可以被视为向量。因此，讨论由矩阵构成的空间及其子空间是完全合理的。也许这段话不太好理解，其实我们可以这么想，矩阵就是由一些向量组成的。那么矩阵之间是不是可以进行任何的线性组合，得到的结果也是一个矩阵！当所有结果铺展开来构成一个空间（当然，我也不知道怎么去描述这个空间），但是就是存在这么个空间，准确来说是矩阵空间！

很明显，矩阵是满足向量空间公理的。所以我们可以这么理解这个题目：在所有n×n阶方阵组成的向量空间M中，那些满足自身转置等于自身的矩阵（即对称矩阵）的构成了一个集合。而我们要证明这个集合是否是一个子空间呢，那么就要证明集合中的任意两个矩阵，做任意的线性组合结果都在这个集合中。
那么我们可以得到：

$$(A+B)^T=(A)^T+(B)^T=A+B$$

这个证明了A+B仍然是对称矩阵，仍然在这个集合中。
以及：

$$(cA)^T = cA$$

证明了cA仍然在这个集合中。所以可以构成一个子空间！

关于问题三的第二小问：
题目的意思就是：在所有n×n阶方阵组成的向量空间M中，那些满足自身转置等于自身反矩阵的矩阵（即反对称矩阵）的构成了一个集合。而我们要证明这个集合是否是一个子空间呢，那么就要证明集合中的任意两个矩阵，做任意的线性组合结果都在这个集合中。
那么我们：

$$(A+B)^T = (A)^T + (B)^T = -A - B = -(A+B)$$

发现A+B仍然是反对称矩阵。
以及：

$$(cA)^T = -cA$$

证明了cA仍然在这个集合中。所以可以构成一个子空间！

关于问题三的第三小问：
题目的意思是：在所有n×n阶方阵组成的向量空间M中，那些不是对称矩阵的矩阵构成了一个集合。而我们要证明这个集合是否是一个子空间呢，那么就要证明集合中的任意两个矩阵，做任意的线性组合结果都在这个集合中。
我们直接反证法：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

那么两个不是对称矩阵的矩阵得到了对称矩阵，那么就不是子空间！