1.13 矩阵空间，秩1矩阵和小世界图

本讲我们就要深入讨论矩阵空间的内容了!

矩阵空间

在上一节的末尾，我们提到过矩阵空间。记得我们在之前说到向量空间是，因为他本身在空间中的位置，因为他满足八条运算律，那么他就具备了张成一个空间的能力，我们称为向量空间（而列空间，零空间等等都是基于此的衍生）。然后我们发现矩阵与向量一样，本身在空间中就代表了一些空间，然后满足八条运算律，那么他也可以张成空间，我们叫做矩阵空间！所以矩阵空间就是由一些矩阵进行线性组合得到的空间！而且我们在上讲末尾说到了他的一些经典的子空间：对称矩阵，上三角矩阵和对角矩阵（他是对称矩阵和上三角矩阵的交集）！

基与维度

说到空间，这是我们避不开的话题。那么我们来说说对称矩阵，上三角矩阵，对角矩阵以及普通矩阵的基与维度是多少？

首先我们来讨论普通矩阵的基。假如是一个3行3列的矩阵。那么他的维度是9，他的矩阵空间类似是R^9的！那么他的基是

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ \ldots$$

他的维度就是9！

而对称矩阵的基就是：$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

他的维度是6。

上三角矩阵的基是：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

他的维度也是6。

对角矩阵的基是：$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,他的维度是3！

而我们知道对角矩阵是对称矩阵和上三角矩阵的交集，那么得到$dim(\text{上三角} \cap \text{对称}) = 3$，但是我们不能求解$dim(\text{上三角}U\text{对称})$，我们在讲向量空间的时候就过向量空间的并集是无意义的，他不满足向量空间的条件！但是我们可以求解上三角+对称。而 S+U集合包含了它们两个的线性组合，就是任意对称阵加上任意上三角矩阵的和都包含于这个集合里。另外，很容易看出来，这个

集合就是 M，所以 S+U 的维数是 9。那么我们可以得到这么个等式：
$dim(上三角)+dim(对称)=dim(上三角\cap对称)+dim(上三角+对称)$。

> tips：怎么确定维度，看矩阵由几个元素确定，由几个元素确定，维度是几！怎么确定基，确定矩阵的元素一个个来，论到那个，那个值为1，其他为0。当然这个方法也不是适用于所有，但是核心是找到组成的最基本单位，把他们作为基即可！

微分方程

这好像是微积分的内容，但是我们要以线性代数的视角来看。让我们了解到同样的“空间”概念还适用于很多地方，这样的线性空间内元素不一定是向量，矩阵，还可以是方程的解。
例如：$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$,那么对于这个方程，我们可以得到一些特解：$y=\sin x, y=\cos x, y=e^{ix}$。那么我们以空间视角，那么通解就是$y=c_1\sin x+c_2\cos x$。这很类似于零空间，也就是说我们将这些解看做线性空间中的元素也可以。所以我们可以称其为解空间。其中的元素是解，满足线性运算封闭条件。那么从空间的角度出发，这个解空间两个基就是 cosx 与 sinx，其线性组合构成了解空间，所以解空间维数为 2。（我觉得可以这么理解，这个微分方程与一般方程一样的是都可以化简为Ax=0，但是不一样的是一般方程的A矩阵可以写出，而微分方程无法具体写出！）。

秩一矩阵

首先秩为一的矩阵的优点是什么呢，就是便于分解！
例如：$A=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&8&10\end{bmatrix}$，这个矩阵的秩是1。而A可以分解为：$A=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&8&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\end{bmatrix}$
。
这就是秩一矩阵的优点，每一行都是第一行的几倍。可以被分解为一列乘一行的形式。都可以写为：$A=UV^T$，秩一矩阵的另外一个优点是它可以“搭建”其他矩阵，比如秩为 4 的矩阵，通过四个秩一矩阵就能搭建出来。具体过程类似于矩阵乘法中的“列乘行”形式，通过一列一行搭出一个矩阵。例如：假设你有四个线性独立的列向量A_1, A_2, A_3, A_4和对应的行向量$V_1^T, V_2^T, V_3^T, V_4^T$,你可以构造四个秩一矩阵$A_i=U_iV_i^T(i=1,2,3,4)$，然后将它们加起来得到一个新的矩阵
$B=A_1+A_2+A_3+A_4$，如果u_i和v_i被适当地选择以保证线性独立性，则B的秩将是4。这就是秩一矩阵搭建高秩矩阵的过程！

同秩矩阵的空间

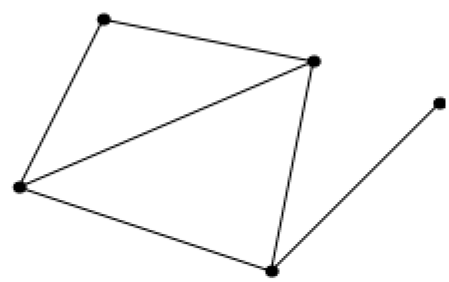
有一个值得推敲的问题是对于所有同秩矩阵他张成的空间是子空间吗，或者说是向量空间吗？答案是否定的，在上面我们说
$dim(上三角)+dim(对称)=dim(上三角\cap对称)+dim(上三角+对称)$。
所以$dim(上三角)+dim(对称)<dim(上三角+对称)$。也就是说
$dim(A)+dim(B)<dim(A+B)$
,就不在同秩空间中了！所以同秩矩阵是无法构成空间的！

子空间的转化

其实这部分的内容都是strang教授帮助我们回顾之前关于子空间的内容，我们这里不再重复赘述，但是这里有一个很有意思的部分我觉得值得一提：集合S中有四个向量$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$，集合中的向量都满足$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$，现在需要我们来判断S是否可以张成空间？若是，维度是多少？基是什么？
首先显然$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$是符合张成空间的条件的！但是他的维度怎么求，基怎么求？重点来了，我们构建一个A矩阵：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，由于$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$，那么Ax=0是成立的！所以求S的维度与基，不就是求A矩阵的零空间的基与维度的！那么矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的秩是1，那么自由变量有3个，那么零空间维度是3。求零空间基就是求特解，对自由变量进行赋值得到三个特解：$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。这就是他的基了！这就是很聪明的地方，从对一个向量集合的空间维度求解转移到一个矩阵的零空间上了，这很棒，很有想法！当然如果大家想要复习一下子空间的内容，大家可以去看看讲座！

小世界图

这部分是对下一节“图与网络”的引出，主要渗透一下图与矩阵的关联。
图就是由若干节点和若干边组成的。如果一个图是由5个节点和6条边组成的，那么一个5行6列的



矩阵是可以完整表示其所有信息的！像这样：
还有就是大家听说过六度分割理论吗，大概就是任何两位素不相识的人之间，通过一定的联系方式，总能够产生必然联系或关系。比如strang教授之前大学的同学现在是参议员，而那个参议员与克林顿认识，而我们又听过strang的课，那么我们与克林顿也是有联系的！

讨论课

在包含所有2行3列且零空间包含$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$的矩阵的集合S可以张成一个空间吗？如果是，他的基是什么？还有另外一个所有列空间包含$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$的矩阵的集合$S_1$，可以张成一个空间吗？

解答：
首先我们要明确的是集合S中包含的是矩阵，不是向量，那么我们是求解矩阵空间而不是向量空

间！那要证明是一个空间，我们是需要证明集合中的矩阵八项运算律的结果还在集合中。怎么证明：又一个方法论就是先证明集合中的两个矩阵的线性组合结果在集合中，再证明单个矩阵的倍数仍然在集合中。那么取集合中的两个矩阵A，B。首先$A\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=0,B\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=0$,那么如果$(A+B)\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=0$就成立了。现在我们证明：首先$(A+B)\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=0$可以推导出式$A\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=0$，然后$A\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=0,B\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=0$,所以结果成立！同样的$CA\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$仍然为0。那么这足以证明他是可以张成一个空间的！

而对于集合S_1，他可以张成一个空间吗，首先如果我们想要像上面一样取证明，似乎很困难，因为要求证一个向量是否属于一个列空间是一个很困难的事情！所以我们用反证法，我们发现在这个集合中是不包含零矩阵的，那么集合所张成的矩阵空间是不包括原点的，所以这是错误的，无法张成空间！

习题课

问题一：

假设我们有一个3行3列的单位矩阵，他是由5个单位置换矩阵线性组合而来的！而且这5个矩阵满足
$c_1P_1+c_2P_2+c_3P_3+\cdots+c_5P_5=0\ (这5个矩阵可以通过检查矩阵元素可以证明所有c_i必须为零)$。现在我们要证明这5个矩阵线性无关，就是要证明这5个置换矩阵是类似于我们上面这个3行3列的单位矩阵集合的基。

解答：首先对于这5个矩阵，要组合成单位矩阵，我们是可以给出很多个例子的，只要他们的最后组合使得对角线元素为1即可（但是我们需要选择矩阵元素为1的矩阵，且最好矩阵的向量是单个维度的）。但是他要满足的条件是通过检查矩阵元素可以证明所有c_i必须为零。首先面对$c_1P_1+c_2P_2+c_3P_3+\cdots+c_5P_5=0$这样的式子我们就知道这5个矩阵一定线性无关（这就是线性无关的定义，如果忘记了那么你需要去回顾1.9章的内容！），那么要线性无关，是不是说这5个矩阵的每个列都得不一样。根据这些条件，我们给出如下5个矩阵：
$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$，分别命名为$P_1....p_5$，那么
$P_1+P_2+\cdots+P_5=I$。而由
$c_1P_1+c_2P_2+c_3P_3+\cdots+c_5P_5=0\ (这5个矩阵可以通过检查矩阵元素可以证明所有c_i必须为零)$
得到矩阵$\begin{bmatrix}c_3&c_1+c_4&c_2+c_5\\c_1+c_5&c_2&c_3+c_4\\c_2+c_4&c_3+c_5&c_1\end{bmatrix}$=0，可得$c_1$到$c_5$都为0。都为零了，由于各个矩阵只有系数都为0时才等于0，那么他们一定线性无关！

问题二：

设M为所有3×3矩阵的空间。对任意矩阵$X\in M$，左乘矩阵：$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$。值得注意的是$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$。回答下面问题：

a) 哪些矩阵 X 满足 AX=0?

b) 哪些矩阵可以表示为 AX（即形如 AX 的矩阵）？

c) （a）求的是M左乘A 的“零空间”，(b）求的是M“列空间”。这两个子空间的维数是多少？为什么它们的维数之和为9?

解答：(a）首先，我们知道A矩阵的零空间的基是$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$。那我们要满足AX=0，我们就必须要求X矩阵的列空间在A矩阵的零空间中，那怎么办，所以X矩阵的列空间必须是一维的，那么我们得到X矩阵的样式是：$\begin{bmatrix}a&b&c\\a&b&c\\a&b&c\end{bmatrix}$。

（b）然后AX矩阵可以表示为什么样，可以知道的是X在矩阵A的零空间中，那么AX是一定等于0的。所以可以肯定的是A矩阵的每一行加起来是等于0的！所以AX矩阵是：
$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\-(a+d)&-(b+e)&-(c+f)\end{bmatrix}$。

（c）首先我们需要解释一下这里要求的零空间和列空间代表什么：

零空间（nullspace）：所有满足 AX=0 的矩阵 X 构成的子空间。

列空间（column space）：所有可以写成 AX 形式的矩阵构成的子空间。

那么这些空间就不是向量空间而是矩阵空间，那么矩阵空间。

可以知道零空间中矩阵的所有元素由a,b,c控制，那么这个空间的维度是3。而列空间中的矩阵由a,b,c,d,e,f控制，那么这个空间的维度是6。他们维度之和为9是因为空间M的维度是9，而他们两个是由其线性变化而来的！