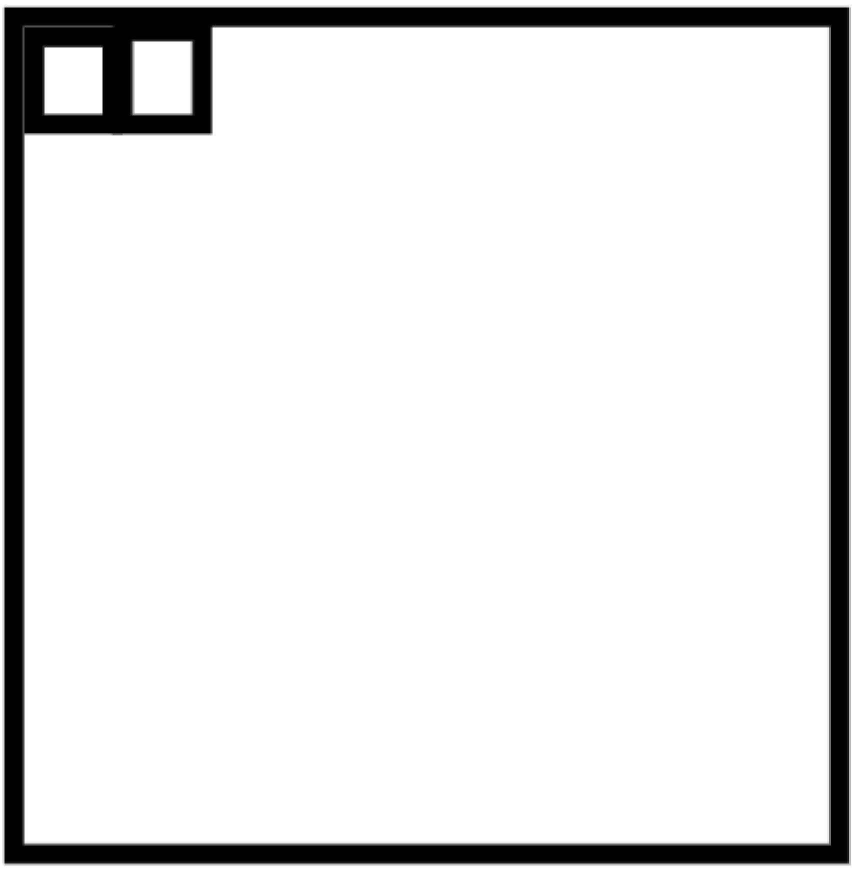
3.7 基变换和图像压缩

我们已经知道，通过选择合适的基底，计算可以变得更简单。这一原理的一个应用就是图像压缩。视频讲座、音乐和其他数据源包含大量信息；只有在我们改变记录这些信息所用的基底后，这些信息才能被高效地存储和传输。

图像的压缩

当我们有一个静态图像，他是512×512的。就是说他会被分为512^2个小格子，每格代表一个像素。就像是：



每一个小格子就是一个像素点（像素越多图像越清晰！），当这个图像是黑白的时候，每个像素点都有一个值代表其的灰度，那么总共有512^2个小格子，把他们全部放在一个向量中，这个向量就有512^2个分量！就像是：$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_{512^2} \end{bmatrix}$而如果是彩色的图片，向量长度就是三倍，就是$3 \times 512 \times 512$。因为我们需要三个值来代表颜色。

如果我们要标准基来表示上面的向量的话就得有512^2个系数！在512^2维空间中，标准基是：

$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\dots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\dots\\0\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\dots\\1\end{bmatrix}$,然后存储这些前面的系数需要$512^2$个！

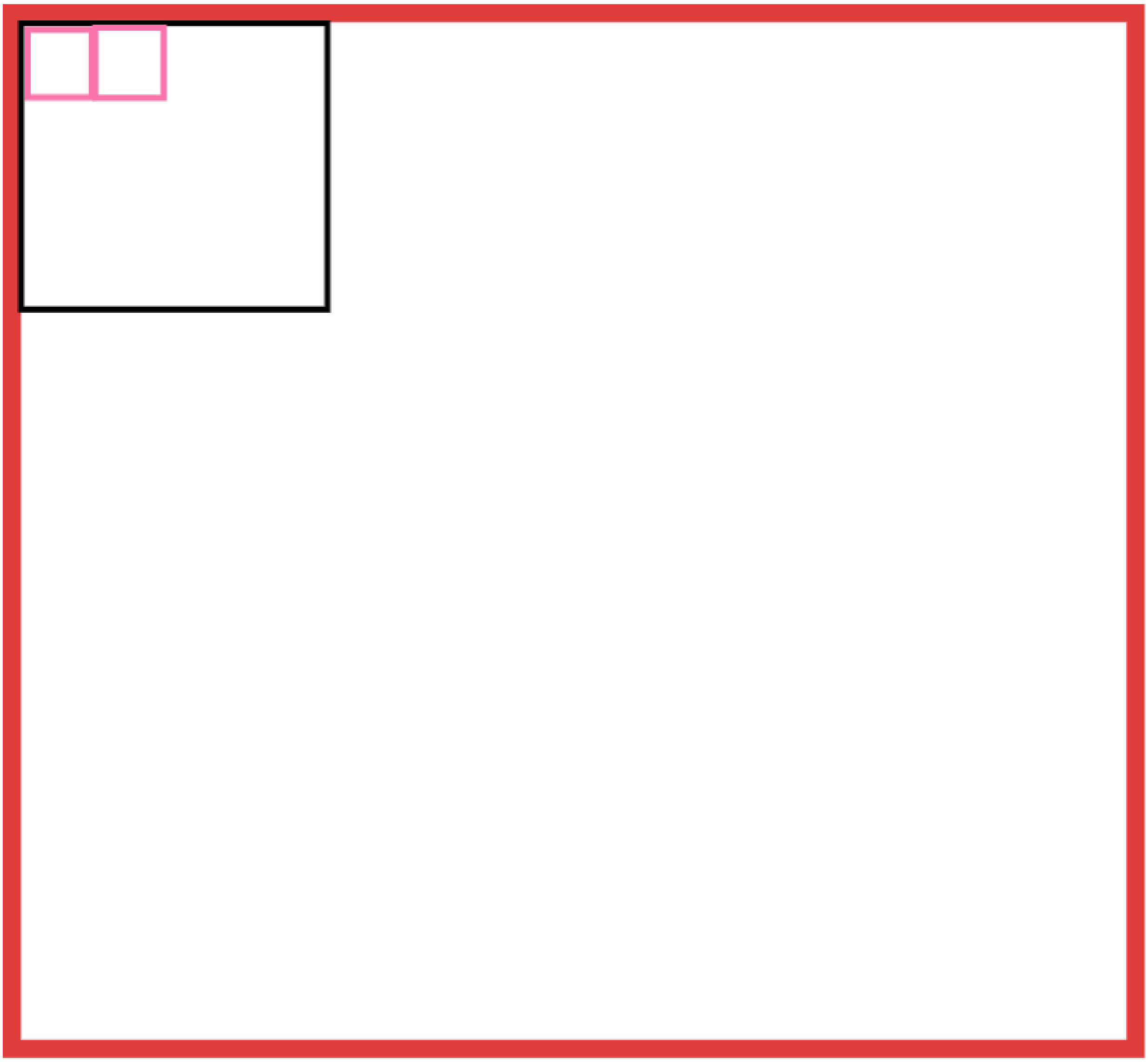
那么我们上课的视频也是需要这样去存储信息的。这个时候我们想象看，视频大部分都是对着黑板的，黑板大部分时间都是黑色的，就是黑板被写满，也只要一部分是白色的！那么大部分像素的数值是一样的，那么这个时候我们不用标准基，而是用$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\dots\\1\end{bmatrix}$这样，或者是$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\\\dots\end{bmatrix}$，或者是$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\dots\\-1\\-1\\\dots.\end{bmatrix}$。具体的我们没有算出，但是这些基一定是比标准基更简单的，同样在不同电源，等等画面场景，基地的选择都是不同的！

那么接下来我们来说说最常用的几个基！

傅里叶基

傅里叶基，很简单，就是傅里叶矩阵的列向量。

对于一个512×512的图像，我们会把他分为64个大块，每一块有64个像素！如图：



就是这样的！然后一大块一大块的处理！那么对每一大块进行处理的时候，使用的傅里叶基是：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ w \\ w^2 \\ \cdots \\ w^7 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 \\ w^7 \\ w^{14} \\ \cdots \\ w^{49} \end{bmatrix}$$

那么他们的具体压缩流程是怎么样的呢，如下：
信号 x →经过调换傅里叶基得到 64 个系数 c →丢掉其中很小的系数（即忽略肉眼看不出来的区别）得到 $\hat{g}$（很多零），$\hat{g}$就是一组压缩后的系数→ 使用压缩后的系数重构基向量得到 $\hat{x} = \Sigma \hat{c}_i v_i$

如上，整个处理过程中，第一步傅里叶基的变换过程是无损处理，而第二部的压缩过程是有损处理，最后导致 C'中很多项都是 0，需要储存的仅剩下很少的几项，这个过程中我们完成了压缩。

在视频中，我们不仅要考虑压缩每一帧，还要考虑压缩帧序列。相邻两帧之间的差异非常小。如果我们处理得当，就只需要对帧与帧之间的差异进行编码和压缩，而不需要对每一帧都完整

地处理。而上面使用的傅里叶基的方法有一个著名的商业应用，JPEG，如果你经常和计算基打交道，一定是熟悉他的！

除此之外还有一个很好的基，那就是哈尔小波基底，我们简称小波基。

哈尔小波基底

同样处理上面图像的一大块，8×8的维度，那么我们得到的小波基是：

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

JPEG 编码方法最接近的竞争对手是使用小波基底。（JPEG2000 改进了上述的哈尔小波。）在 R⁸ 的哈尔小波基底中，非零项一半是 1，一半是 -1（除了全为 1 的向量）。然而，一个基底向量的一半甚至四分之三的分量可能是 0。这些向量被选为正交的，并且可以调整为标准正交。

同样，他处理信息也是很不错的！比如一个任意的图形，整合为向量后是：$[c_1,c_2,\dots,c_n]$。然而这是在标准基下的，如果我们使用的小波基，那么我们把小波基整合为一个矩阵：$\begin{bmatrix}1&1&\dots\\1&1&\dots\\1&1&\dots\\1&1&\dots\\\dots&\dots&\\1&-1&\dots\end{bmatrix}$。我们称这个矩阵为W，那么怎么求$[c_1,c_2,\dots,c_n]$转变基后的系数呢，那么就是$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\\dots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&\dots\\1&1&\dots\\1&1&\dots\\1&1&\dots\\\dots&\dots&\\1&-1&\dots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\..\\w_n\end{bmatrix}$，这样变化后的系数求一下矩阵的逆就出来的，当然上面的傅里叶基也是这样求解的！然后我们也需要舍弃一些系数进行压缩！小波基被用到许多新的技术上，比如指纹识别！当然他们的基底选择会比我们这里的例子更复杂！

好，那为什么这两个基我们说他们是常用的呢，他们好在哪里：
（1）容易求逆，从上面我们知道，要求改变基后的系数，那么对基底矩阵求逆是必须的，所以求逆非常重要。而这两个基组成的矩阵，一个是傅里叶矩阵，一个是正交矩阵，前者有傅里叶变换可以简化其的求基流程！后者我们之前说过的，一个正交矩阵的基等于他的转置！所以两者这两方面都很性质优良！
（2）有着很好的压缩性能！这个我就无法深入讲解了。大家可能需要深入的去学习非常前言的图像压缩技术才会理解！但是记住着两个基底的性质，会有助于你去理解的！
所以这两个矩阵都有很好的商业应用！

上面我们说了许多应用，都是涉及基的转换。下面我们就来从纯线性代数的角度来看看！

基变换

设矩阵 W 的列是新基底的基底向量。那么如果 x 是旧基底下的向量，我们可以用以下关系将其转换为新基底下的向量 c：x=Wc
但是注意哦，这里的W可不是变换矩阵哦，这里的向量仅仅是对一个向量变换基底后的坐标变换进行求解，所以W就可以是新基地的列向量集成，但是我们求解线性变换的矩阵的时候可不是这么简单，或者说W这个矩阵对应的变换就是不变！

接下来我们通过线性变换的角度再谈一谈，若一线性变换 T，是从 8 维到 8维的：$R^8 \to R^8$，那么：一组基 v1，v2，v3……v8，线性变换矩阵为 A，另外一组基 w1，w2，w3……w8，线性变换矩阵为 B。
首先注意这里的背景，这里是在讨论两种情况，即线性变换输入输出空间相同（就是基不变），也就是 A 作用前输入向量的基为 vi，则 A 作用后输出空间基还是 vi。B 也是一样。线性变换方式没有变化，只是在不同基下对应的坐标不同，线性变换矩阵不同。我们这里举这个例子是为了从线性变换矩阵的角度认识：不同基下，同一个线性变换对应的线性变换矩阵会有什么关系。

直接给出结论：如果是同一种线性变换，在不同基下对应的线性变换矩阵为：
AB，则 A 与 B 相似。即：$B = M^{-1}AM$ （其中的M可以与W相同）！

所以这里我们区分一下，如果是线性变换的求坐标，那么就是上一讲说的求解方法。但是如果不涉及线性变换，仅仅是给一个向量的基做变换，那么就是用原来的基集合的矩阵乘以原来基的坐标等于新的基集合的矩阵乘以后面的坐标！数学表达就是：

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

。（$v_1 \dots v_n$和$w_1 \dots w_n$都是列向量！）
我们前面的例子是标准基，那么前面就是I，所以我们没有写出来！

然后接下来教授复习了对线性变换矩阵的求解的过程！简单来说，任何一个向量在原来的基下，都可以表示为原来的基的线性组合，换了基后，任何一个向量也可以转化为新的基的线性组合，组合的系数就是坐标！然而加上线性变换后，那么他们就存在一个子集关系，然后推理出新的求解过程。（大家可以去看看上一讲内容复习！）。而重点在于特征向量的出现！当我们把线性变换矩阵的特征向量作为新的基底的时候，线性变换矩阵一定是对角矩阵，这个我们需要记住！

这大概就是本节课的内容了！

讨论课

这节讨论可涉及多项式的向量空间，没有介绍更多的基转化的内容，也没有强调计算范式。而且这讲本身也就是知识扩展，没什么计算的！我觉得没有什么价值，所以略过，大家感兴趣看原视频！
但是我觉得值得说的就是多项式的向量空间的映射！

比如我们有一个多项式：$a_1 1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \cdots + a_n x^n$
那么我们分为两个向量来看待这个多项式，一个是基向量，就是$(1, x, x^2, \ldots, x^n)$，他是**随 x 变化的**，所以每个 x 都对应一个不同的向量；然后有一个系数向量$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，这是唯一确定的！
但是如果我们有许多个多项式，那么许多多项式也可以构成空间，这就是讨论课我觉得有价值的东西！

习题课

问题1

验证讲义中给出的 Haar 小波基向量彼此正交，并把它们的模长调整到 1，从而得到一组标准正交基。

解答
讲义给出的 Haar 小波基向量为：

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

容易验证：第 2～8 个向量都与第 1 个向量正交，因为它们的内积都是“相同数量的 1 与 −1 之和”，结果为零。同样的观察适用于其余所有配对。由于所有两两内积均为 0，这组向量相互正交。

为得到标准正交基，只需将每个向量除以其长度：

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

问题2

我们把所有元素为实数的 2×2 矩阵构成的集合看成一个向量空间。给出两种不同的基，并比较它们在描述对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵时哪个更方便。

解答
答案有多种可能，最显然的一组基是：

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

第二组基最好显著不同于上面这组。下面给出两个例子：

例 1

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}.$$

例 2

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}.$$

如果你怀疑这些矩阵是否线性无关，可以把它们看成 $\mathbb{R}^4$ 里的向量，然后检查正交性或线性无关即可（上面的例子都满足）。

比较：

- **描述对角矩阵**：第一种基最直观，只需前两与第四基矩阵的线性组合即可；第三种基也合适，因为对角矩阵可仅用第一、第二基矩阵表示。

- **描述三角矩阵**：第一种基同样方便，只需前三（上三角）或第一、第二、第四（下三角）即可。
- **描述对称矩阵**：第三种基最方便，因为对称矩阵总可写成前三个基矩阵的线性组合，第四个基矩阵（反对称部分）系数为零。