2.13 18.06SC 第二单元考试

问题一

设 q_1, q_2, q_3 是 $\mathbb{R}^3$ 中的标准正交向量。求下列 3×3 行列式的所有可能取值，并用一句话给出理由。

（a）求$det[q_1,q_2,q_3]$。首先毫无疑问的是这个矩阵是一个标准正交矩阵，所以$QQ^T=I$那么$\det(QQ^T)$=1。而矩阵的转置行列式是不变的，那么他们的行列式就是± 1。

（b）求$det[q_1+q_2,q_2+q_3,q_3+q_1]$。我们是否记得性质4，是否还记得性质10的结论，那么我们可以得到的是矩阵行列式是可以按照列拆解的！所以我们可以这么来推导：

$$det[q_1+q_2,q_2+q_3,q_3+q_1]=det[q_1,q_2+q_3,q_3+q_1]+det[q_2,q_2+q_3,q_3+q_1]=det[q_1,q_2,q_3+q_1]+de$$

这个推导当然可以以行的视角来看！

（c）求$det[q_1,q_2,q_3]\cdot det[q_2,q_3,q_1]$，显然后面的矩阵是通过前面矩阵通过两次列变换得来的！那就矩阵的行列式不变，那么行列式的平方一定就是1。

问题二

在 21 个等距时刻 t = –10, –9, …, 10 上进行测量，除中间时刻 t = 0 时 b_{11} = 1，其他的所有测量值 b_i = 0，。

(a) 用最小二乘法求最佳直线 C + Dt 的参数 $\hat{C}$ 与 $\hat{D}$。
(b) 说明向量 b 被投影到哪个子空间（给出基），并找一个与该子空间正交的非零向量。

解答：

(a)：我们是可以抽象出矩阵：$\begin{bmatrix}1 & -10\\1 & -9\\\dots & \dots\\\dots & \dots\\1 & 0\\\dots & \dots\\1 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\dots\\1\\\dots\\0\end{bmatrix}_{21\times 1}$

可以得到：$A^TA=\begin{bmatrix}21 & 0\\0 & 770\end{bmatrix},A^Tb=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

代入公式：$A^TA\hat{x}=A^Tb$

$$\begin{bmatrix}21 & 0\\0 & 770\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{C}\\\hat{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}=\frac{1}{21}\\\hat{D}=0\end{cases}$$

(b)：这个问题我们其实在讲座与复习中讲过无数次，投影到的是A矩阵的列空间！而与列空间正交的就是A的左零空间，但是我们要求解左零空间有点复杂，我们知道的是误差向量e是在左零空间中的，b-Pb就是答案，这里我们就不求解了！

问题三

Gram–Schmidt 过程把线性无关的 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^5$ 变为标准正交向量 q_1, q_2, q_3。令 5×3 矩阵 $A=[a_1,a_2,a_3]$，$Q=[q_1,q_2,q_3]$。
(a) 用 Q 和 A 写出投影到 Col(Q) 与 Col(A) 的投影矩阵 P_Q与 P_A 的表达式。
(b) 说明 P_A 与 P_Q 的关系并给出理由。
(c) 若新增向量 a_4 使得 a_1, a_2, a_3, a_4 线性无关，Gram–Schmidt 下一步得到的 q_4 是下列哪一个?
$1)\|P_Q a_4\| P_Q a_4 \quad 2)\|a_4 - P_A a_4\|(a_4 - P_A a_4) \quad 3)$其他

解：
(a)：$P_A = A(A^TA)^{-1}A^T, P_Q = Q(Q^TQ)^{-1}Q^T = QQ^T$
(b)：显然，他们会把一个向量投影到同一个子空间中！
(c)：选项一这是把 a_4 投影到 **已有 q_1,q_2,q_3 组成的空间** 后再乘长度，但 Gram–Schmidt 需要的是 **正交分量**，不是投影本身。而选项二正好是正交分量再单位化的形式（注意官方写成了“长度 × 方向”，单位化后就是 q_4）。

问题四

设 4×4 矩阵 A 的第一行与第一列所有元素均为 x，其余 9 个元素可为任意数。
(a) 问 det A 作为 x 的多项式，最高次数是多少？说明理由。
(b) 若这 9 个数使其余部分成为单位矩阵 I_3，求 det A，并指出使 det A = 0 的所有 x 值。

解：
（a）用 **“行列式的大公式”**（Leibniz 公式）来看：

- det A 的每一项取 **不同行、不同列** 的 4 个元素相乘再带符号。
- 要出现 x，只能从 **第 1 行或第 1 列** 选（因为其余位置没有 x）。
- **最多** 只能选 **2 个 x**：
  一个来自第 1 行，一个来自第 1 列——再多就冲突（行列重复）。
- 因此 det A 里 x 的幂次 **≤ 2**，最高次数是 **2**。

（b）

给定矩阵$A = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

按照代数余子式求解得到：

$$\det A = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= x \cdot 1 \quad - x \cdot \big(x \cdot 1 \cdot 1\big) \quad + x \cdot \big(x \cdot (0-0) - 1 \cdot (x \cdot 1 - x \cdot 0)\big) \quad - x \cdot \big(x \cdot (0-0) - 1 \cdot (x \cdot 0 - x \\
&= x - x^2 + x \cdot (-x) - x \cdot (x) \\
&= x - x^2 - x^2 - x^2 \\
&= x - 3x^2 \\
&= x(1-3x)
\end{aligned}$$

因此

$$\boxed{\det A = x(1-3x)}$$

这次考试题题目虽然很难而且计算量大，但是都是讲座中讨论过的套路，大家写之前建议复习第二单元的所有内容！