# 3.4 相似矩阵和若尔当型

首先我们要补充一些正定矩阵的内容

# 正定矩阵的补充

（1）正定矩阵的逆矩阵是否也是正定矩阵?
答案是肯定的！证明如下：
矩阵A是正定矩阵，那么他的特征值$\lambda_1, \lambda_2 \dots .$都是大于0的！而他的逆矩阵$A^{-1}$对应的特征值是$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2} \dots$都是大于0的，所以也是正定矩阵！（这个特征值的结论大家还记得吧！）

（2）假定 A 和 B 是正定矩阵，那么 A+B 呢?
显然有两个已经成立的式子：$x^TAx > 0, x^TBx > 0$，那么加起来$x^T(A+B)x > 0$，这刚好是矩阵A+B的二次型！所以也是正定矩阵！

（3）A是$m \times n$的一个矩形矩阵。那么可以肯定的是$A^TA$是一个方阵，而且是对称的！
那么这个矩阵的判据式就是：$x^TA^TAx = (Ax)^TAx$。而Ax是一个列向量，所以$(Ax)^TAx$是一个常数，是Ax这个列向量的长度。那么这个列向量会不会等于0呢，其实就是在问A的零空间是不是只有零向量！如果是，那么这个等式恒大于0。所以当A是列满秩矩阵时，$A^TA$则是正定矩阵了！

在行化简（高斯消元）过程中永远不需要做行交换——其主元位置永远不会出现 0 或者非常小的数。

到这里我们总结一下正定矩阵！由于他的优良性质，我们不需要进行“行交换”，也不必担心主元过小或者等于零。这可以简化我们的很多计算。而且在这之前他串联了我们在之前学到的许多知识！比如主元，特征值，行列式，以及包括了一些解析几何的内容！希望这些有助于大家理解正定矩阵！

# 相似矩阵

什么是相似矩阵。就是说存在一个矩阵M，使得$B = M^{-1}AM$成立，那么矩阵B与矩阵A相似！
看到这个式子相信大家有一点熟悉，那就是对角化分解：$A = S\Lambda S^{-1}$，那么我们化简得到：$S^{-1}AS = \Lambda$。所以特征值矩阵是最特殊的相似矩阵！那么我们看到什么了呢，以这个式子为例子：$B = M^{-1}AM$，把A看成是一个线性变换矩阵（比如A代表着在旧基下的一个旋转操作），而M先把**新基的向量**“翻译”成**旧基的坐标**（因为 A 是在旧基下定义的）,那么是把结果再“翻译”回**新基的坐标**。所以相似矩阵就是同一个操作在不同基在的数学表示！这段话现在有点莫名其妙，但后面随着学习的深入我们会理解的！

那么相似矩阵的性质是什么呢？那就是相似矩阵之间的特征值是一样的！
比如：
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,求得他的特征值是1和3！

那么随意的$M^{-1}AM$是：$\begin{bmatrix}1 & -4\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -15\\1 & 6\end{bmatrix}$,特征值也是1和3。求出对角化矩阵特征值也是1和3！
我们来证明这个结论：

$$Ax=\lambda x$$

由$A=AI=AMM^{-1}$得到：

$$AMM^{-1}x=\lambda x$$

同时左乘$M^{-1}$得到：

$$M^{-1}AMM^{-1}x=M^{-1}\lambda x$$

$$BM^{-1}x=\lambda M^{-1}x$$

证明完毕！
相似矩阵的特征值相同，线性无关的特征向量数目也相同。但是特征向量不一定相同！

# 若尔当型

那么大家注意到我们上面讲到的例子，特征值都是不一样的！也就是说矩阵都是可对角化的，但是当矩阵的特征值是相同的，也就是有重根的情况下，会怎么样？我们需要份两类情况讨论（关于矩阵是否可以对角化我记得之前有总结过一次，大家可以重新回去复习如果不清楚的话）：
（1）形如$\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$。这个很特别，首先他虽然有重根，但是他是可以对角化的，提取公因式即可！然后与他相似的矩阵除了他本身，没有其他的矩阵了，为什么这么说，证明如下：
$M^{-1}\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}M=4M^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}M=4I$。又回到本身了！所以这样的矩阵很孤独！
（2）形如$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}$,这个矩阵的特征值也是4，但是差别在于他是无法对角化的，而且他是有无数个相似矩阵的！这样的矩阵我们称之为若尔当型矩阵！与之相似的还有
$\begin{bmatrix}5 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}a & ** & 8-a\end{bmatrix}$就是这样！也就是说若儿当型是最接近对角矩阵的！

若尔当型的作用就是当一个矩阵A **不能**通过普通的相似变换变成对角矩阵（即 **不能相似对角化**，公式是$S^{-1}AS=\Lambda$无法成立），我们仍然可以找到一个“**近似对角化**”的办法，把它变成 **若尔当标准型**（Jordan 标准型）。也就是说把一个无法对角化的矩阵转化为$\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}$的样子！我们叫做相似对角化！

下面我们来举一个有着四重根的例子：$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$
这个矩阵的四个特征值都是 0，对应的无关特征向量是两个，零空间的维数也为 n-r = 4-2 = 2。所以 Ax = 0 的解空间是二维的，A 有两个特征向量。当然可以把A写成：

$A=\begin{bmatrix}0&1&7&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 但是这样不是若尔当型。而矩阵 $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 这个矩阵的四个特征值同样都是 0，同样有有两个特征向量,但是与上一个矩阵不相似哦！那我们怎么去分辨他是不是相似的呢，这里我们引入若尔当块的概念！

$J_i$ 表示 i 阶的若尔当块，它只有一个重复的特征值。所以一个若尔当块是这样的：

$$\begin{bmatrix}\lambda_i&0&\dots&0\\0&\lambda_i&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&\lambda_i\end{bmatrix}$$

若尔当块的对角线上都是同一个数，即重特征值$\lambda i$。而对角线元素上方的第一个元素为 1，矩阵其余元素皆为 0。另外注意，若尔当块的特征向量只有一个。

而且若尔当块可以构成若尔当矩阵，像：$\begin{bmatrix}[J_1]&&&&\\&[J_2]&&&\\&&[J_3]&&\\&&&\dots&\\&&&&[J_d]\end{bmatrix}$

（1）若尔当块的个数等于矩阵特征向量的个数。因为每一块对应于一个特征向量。

（2）而如果矩阵的特征值不相同，那么它就是一个可对角化的矩阵（对应的图中的 d 就是 n），所对应的若尔当阵就是对角阵 $\Lambda$。或者这种情况根本不是做若尔当矩阵，而是特征值矩阵！

（3）每个方阵都相似于一个若尔当阵 J

所以如果两个若尔当矩阵，分解的若尔当块是一样的，那么两个矩阵就是相似的！

上面的例子如果要分为若尔当块就是：

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right],\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&0&0\\0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

而我们并不去介绍如何求得若尔当矩阵，这曾经是线性代数的巅峰之作，但是现在他已经落伍，不再运用于数值计算中，所以我们不再去讲！所以我们无需掌握给定一个具体矩阵，怎样

一步步求出它的 Jordan **形式**过程！
只需要记住一下三点（这是再次强调）：

- 让你理解 Jordan 标准形的定义、结构（Jordan 块、对角线上是特征值、对角线上方可能是 1）。
- 让你知道每个方阵都“相似于”某个 Jordan 矩阵（Jordan 定理）。
- 让你能通过 Jordan 块的大小、数量来判断两个矩阵是否相似（例如特征值相同但 Jordan 块大小不同 ⇒ 不相似）。
  知道概念、会用它做“相似判定”即可。

# 讨论课

说说下面三句话对吗，给出理由：
（1）如果矩阵A和B是相似的，那么矩阵$2A^3+A-3I$和矩阵$2B^3+B-3I$也是相似的吗？
（2）矩阵A和B是3行3列的，他们的特征值都是1，0，-1，然后这两个矩阵相似！
（3）两个若尔当矩阵$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$,他们相似吗？

解答：
（1）可知$M^{-1}AM=B$，那么
$2A^3+A-3I=2(MBM^{-1}MBM^{-1}MBM^{-1})+MBM^{-1}+3MIM^{-1}$，然后我们对矩阵$2A^3+A-3I$代入求解相似矩阵公式。
$M^{-1}[2(MBM^{-1}MBM^{-1}MBM^{-1})+MBM^{-1}+3MIM^{-1}]M=2B^3+B-3I$证明完毕！

（2）这是我们讲座中说到就结论，特征值相同的矩阵互相相似！
然而在这里我们将一个另类的证明方法：
矩阵A有三个不同的特征值，那么他是可以对角化的，所以$A=S\Lambda S^{-1}$
同样的B也可以对角化写为：$B=T\Lambda T^{-1}$。由于他们的特征值相等，那么他们的特征值矩阵都是一样的！所以A与B同时与$\Lambda$相似，根据传递性，显然他们是相似的！

（3）若尔当块分解是：

$$\left[\begin{array}{ccc|}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ \hline\end{array}\right] 和 \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1\end{array}\right]$$

分块不同，所以不相似！

# 习题课

# 习题一

我们有两个若尔当矩阵：$J=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},K=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

这两个矩阵的特征值都是0。但是显然他们的若尔当块拆分是不一样的！所以他们不相似！但要求我们从$JM=MK$的角度出发去证明他们不相似！

解答：首先我们写出M矩阵的形式$\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}&\dots&m_{14}\\m_{21}&m_{22}&\dots&m_{24}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\m_{41}&m_{42}&\dots&m_{44}\end{bmatrix}$。

那么JM=$\begin{bmatrix}m_{21}&m_{22}&\dots&m_{2n}\\0&0&0&0\\m_{41}&m_{42}&m_{43}&m_{44}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

MK=$\begin{bmatrix}0&m_{11}&m_{12}&0\\0&m_{21}&m_{22}&0\\0&m_{31}&m_{32}&0\\0&m_{41}&m_{42}&0\end{bmatrix}$

如果JM=Mk，那么$m_{11}=m_{22}=0,m_{21}=0,m_{31}=m_{42}=0,m_{41}=0$。

那么显然M的第一列都是为0的，那么M的行列式为0，显然矩阵就不可逆，那么无法使得$K=M^{-1}JM$成立，所以不相似！

> tips：注意，值得一提的是，当两个矩阵如果不出现重根的情况下，我们可以得到的是如果特征值一样那么这两个矩阵相似，但是有重根出现，那就只能根据若尔当分块的思路去判断相似！

# 习题二

为什么这些陈述都是正确的?

（1）如果 A 相似于 B，那么 $A^2$ 相似于 $B^2$。

（2） 当 A 和 B 不相似时，$A^2$ 和 $B^2$ 可能相似（尝试 λ=0,0)。

（3）矩阵$\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}$相似于 $\begin{bmatrix}3&1\\0&4\end{bmatrix}$.

（4）矩阵$\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}$不相似于 $\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}$

（5）给定一个矩阵 A，令 B 是通过交换 A 的第 1 行和第 2 行，然后再交换 A 的第 1 列和第 2 列得到的矩阵。证明 A 相似于 B。

解答：

（1）可知$A=M^{-1}BM$，那么$A^2=M^{-1}BMM^{-1}BM=M^{-1}B^2M$。证明完毕

（2）当A=$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$。这个条件成立！那我们是怎么找到他们的呢！首先，零矩阵只有和自己是相似的，然后找到另外一个平方是零矩阵的矩阵即可！

（3）可以知道两个矩阵的特征值都是3和4，且没有重根，那么他们就相似！

（4）由于两个矩阵都有重根存在。而这两个矩阵在讲座中，我们明显把他们分了类，第一个矩阵除了自己，没有其他相似矩阵了！

（5）上面说到的变换，可以左乘一个矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,而且这个矩阵可逆，那么自然是可以转化为相似矩阵公式的！