1.2 线性方程的几何理解

线性代数的基本问题是求解有n个未知数的n个线性方程。（这是线性代数的核心挑战，即通过给定的线性方程组找到满足这些方程的未知数值。这是许多数学分支和实际应用中的基础任务，涉及到从简单的二维直线交叉点到复杂系统模拟的各种问题。）

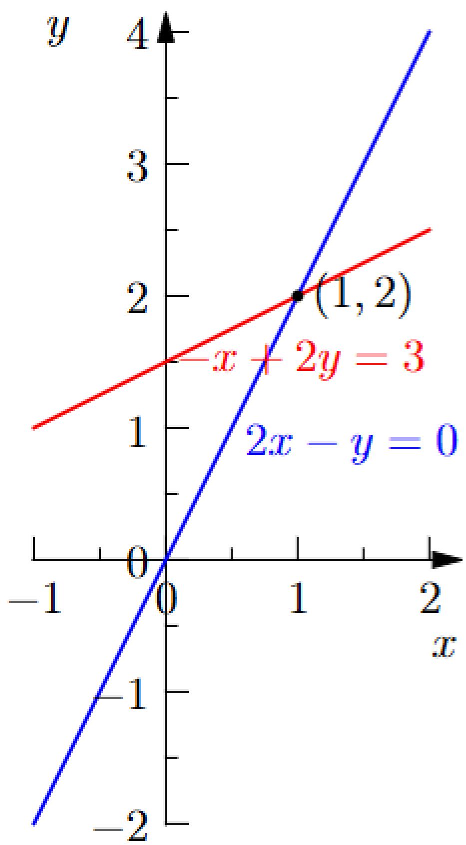
来个例子：

$2x - y = 0$
$-x + 2y = 3.$

那么对于这个我们将从三个维度去看待这个方程组。

1维度一：行空间

想想有一个二维的平面直角坐标系，然后我们需要画出两条直线，这两条直线分别是$2x - y = 0$和$-x + 2y = 3$的几何体现。



交点正好是这个方程组的解。

如果方程组为三维的
给定线性方程组：

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ -x + 2y + 2z &= 3 \\ -x + 4y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

那么我们需要在三维空间中去画出这三个面（由于是三维的，所以他的几何表示是面而不是线）的交（可能是点，可能是线），这就是他们的解（如果有的话。）

2维度二：列空间（这里就引入向量了）

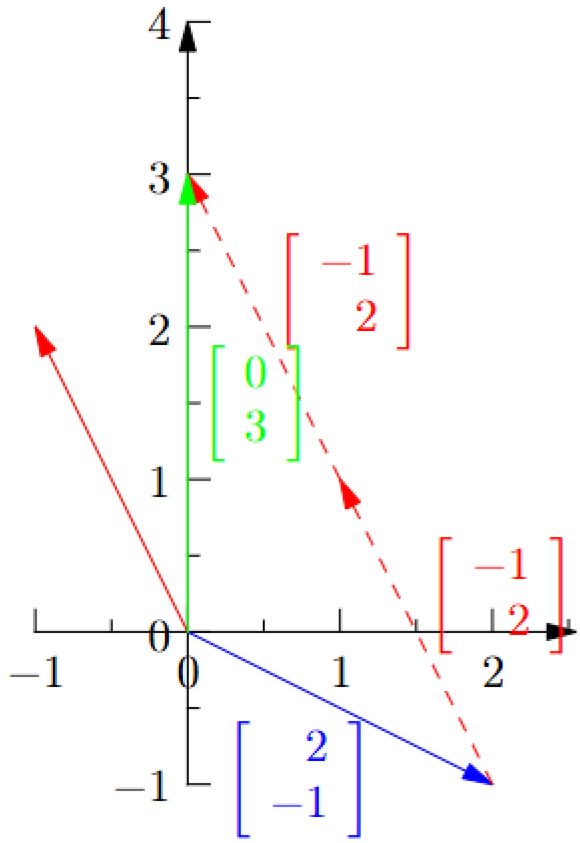
还是这个例子：

`2x - y = 0`
`-x + 2y = 3`

我们把这个方程组转化：

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

给定两个向量 c 和 d 以及标量 x 和 y，则 `xc + yd` 之和称为 c 和 d 的线性组合。线性组合在整个课程中很重要。我们可以再抽象理解一下：
通过改变x，y 这两个值去变化对应矩阵，然后得到结果。
（也可以这么理解，有两个矩阵，两个数，需要通过组合去得到另外的向量！）
那么我们画出对于的向量：



我们可知当X = 1以及 y = 2 时是正确解，那么我们反向代入一下，那么我们通过向量的移动可以得到最后的结果。

同样的，当我们把维度上升到三时，也不过是三段向量的移动而已。
所以当x与y我们取任意值的时候，理论上是可以填满整个平面的！

3维度三：矩阵图

还是相同例子：

`2x - y = 0`
`-x + 2y = 3`

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}.$$

变成矩阵之间的变换：
矩阵 A =

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

称A为系数矩阵。

矩阵 B =

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

称为未知数的向量。

最后形成结果。

4矩阵乘法(后续有专门章节，这里简单说明是为了后面两讲的学习做铺垫)

当然，我们这里提一下矩阵的乘法

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \quad ?$$

怎么计算（前者称为A，后者称为x）：

4.1法一（列向量与矩阵）（行向量与矩阵）：

（列向量与矩阵）：一种方法是将 x 的项视为矩阵的列向量的线性组合的系数：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

表明 Ax 是 A 列的线性组合。
（行向量与矩阵）：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 \end{bmatrix}.$$

如果大家观察这个过程，无非是矩阵行与矩阵列的线性组合！

4.2法二：

通过将 A 的每一行的点积与向量 x 来计算乘积 Ax：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

下面的三个方法不是重点，同样也不便于你去理解矩阵的乘法规则，但是不妨碍他们是很快的运算方法，在考试的时候有下面的这些方法，你的运算会快很多！这在考试中至关重要！

4.3法三：

$$[1 \quad 2 \quad 3] \times \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} = 1 \times [2,0,0] + 2 \times [0,1,0] + 3 \times [0,0,3]$$

等于：

$$[2,2,9]$$

4.4 法四：

由法三衍生而来：可知的是如果以行为准则，那么是以左边为行。

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$b_1 = 1 \times [1,0,0] + 0 \times [0,1,0] + 0 \times [0,-2,1] = [1,0,0]$$

$$b_2 = -3 \times [1,0,0] + 1 \times [0,1,0] + 0 \times [0,-2,1] = [-3,1,0]$$

$$b_3 = 0 \times [1,0,0] + 0 \times [0,1,0] + 1 \times [0,-2,1] = [0,-2,1]$$

那么他的结果是：

$$\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ [-3 & 1 & 0] \\ 0 & -2 & 1\end{matrix}$$

4.5 法五：

由法一为准则，一右边为行！

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix} = [b_1 \; b_2 \; b_3]$$

$$b_1 = \begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix} \times 1 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \times 0 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times 0 = \begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix} \times 0 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \times 1 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times -2 = \begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$$

$$b_3 = \begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix} \times 0 + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \times 0 + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \times 1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

那么他的结果是：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

5.线性独立（也叫做矩阵的可解性或者线性无关）

线性无关（Linear Independence） 在列向量和矩阵图像中，方程右边是一个向量 b。给定一个矩阵 A ，我们是否能对所有可能的向量 b 解出：

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

换句话说，这些列向量的所有线性组合是否能够填满整个 `xy` 平面（在二维情况）或三维空间? 解释 这里讨论的是一个重要的线性代数概念：**矩阵的可解性**。 下面是解释：

- 矩阵 A 的每一列可以看作一个向量。$A\mathbf{x}$ 实际上就是这些列向量的线性组合。
- 所以问题转化为：这些列向量的线性组合能不能“覆盖”整个空间（二维平面、三维空间等）？
- 如果可以覆盖整个空间，那么对于任意给定的 $\mathbf{b}$，这个方程都有解。
- 如果不能覆盖整个空间，说明有些 $\mathbf{b}$ 是无法通过这些列向量组合得到的。 如果答案是“否”，我们就称 A 是一个 **奇异矩阵（singular matrix）**。在这种情况下，它的列向量是 **线性相关（linearly dependent）** 的；所有这些向量的线性组合都位于： - 一个点、一条直线（二维情况） - 或者一个点、一条直线、一个平面（三维情况）上 它们不能填满整个空间。
  - 概念详解 - **奇异矩阵（Singular Matrix）**：指不可逆的矩阵，通常是因为其列向量之间存在某种“重复”或“冗余”的关系。
  - **线性相关（Linearly Dependent）**：意味着至少有一个向量可以用其他向量的线性组合表示。
  - 举例说明：
    - 在二维空间中，如果两个列向量方向相同（共线），那它们的线性组合只能形成一条直线，而不是整个平面。 - 在三维空间中，如果三个列向量共面，那它们的线性组合也只能在一个平面上，而不是整个三维空间。总结这段话的核心思想是： > 我们可以通过研究矩阵 A 的列向量之间的线性关系，来判断是否对任何 b 都能求解

      $$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

      如果列向量是 **线性无关（linearly independent）** 的，那么它们能“撑起”整个空间，方程有解； 如果列向量是 **线性相关** 的，则不能覆盖整个空间，此时矩阵是 **奇异** 的，某些 b 就无法被表示出来。

6 习题课

问题 1.1：
（《线性代数导论》：斯特兰格，第1章第3节，第4题） 找到一个组合 $x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + x_3\vec{w}_3$，使其

结果为零向量：

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

说明这些向量是 **线性相关的**。这三个向量位于一个平面内。以这些向量为列向量的矩阵 W 不可逆。 我们这么来看这个题： 我们可以通过寻找非零解来验证这些向量是否线性相关。考虑以下方程：

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

线性相关性的检验： 为了确定是否存在非零解，我们可以计算该矩阵的行列式：

$$\det(W) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

这个题目非常有意思，他是有着一个非常重要的内在的思想，就是存在一组系数使得矩阵的列向量组合为0，那么就是说明该矩阵的列向量线性相关的，反之则无关。（这么想，如果几个向量可以简化为0，说明他们在同一平面内，那么无论如何不可以填满整个的空间！注意：二维的就是在同一方向上）
用国内的术语来说就是如果行列式的值为零，这意味着矩阵 W 是奇异的（不可逆的），因此这些向量是 **线性相关的**。 结论： 这些向量位于同一个平面上，不能“撑起”整个三维空间。因此，存在一组不全为零的系数 x_1, x_2, x_3，使得上述线性组合等于零向量。

问题1.2：计算以下矩阵与向量的乘积：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

问题1.3：判断对错：一个3行2列的矩阵A乘以一个2行3列的矩阵B等于一个3行3列的矩阵AB。如果这是错误的，请写出一个正确的类似句子。

解答：

1：

我们需要找到标量 x_1, x_2 和 x_3，使得向量 $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ 和 $\vec{w}_3$ 的线性组合等于零向量。也就是说，我们需要解方程：

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这可以写成一个线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

我们可以使用高斯消元法来解这个方程组。首先，写出该方程组的增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 2 & 5 & 8 & | & 0 \\ 3 & 6 & 9 & | & 0 \end{bmatrix}$$

第一步：从第二行减去第一行的两倍

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 3 & 6 & 9 & | & 0 \end{bmatrix}$$

第二步：从第三行减去第一行的三倍

$$R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & -6 & -12 & | & 0 \end{bmatrix}$$

第三步：从第三行减去第二行的两倍

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

这个简化后的矩阵告诉我们，第三个方程是前两个方程的线性组合，因此可以忽略。现在我们有如下简化系统：

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

解第二个方程：

$$-3x_2 = 6x_3 \Rightarrow x_2 = -2x_3$$

将

$$x_2 = -2x_3$$

代入第一个方程：

$$x_1 + 4(-2x_3) + 7x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - 8x_3 + 7x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$$

因此，通解为：

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = -2x_3$$

我们可以选择 $x_3 = 1$ 作为特解，于是：

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1$$

结论：

存在一组**非零系数** x_1, x_2, x_3，使得这些向量的线性组合为零向量，说明向量 $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ 是 **线性相关的**。
这三个向量位于同一个平面内，以这些向量为列向量构成的矩阵不可逆。

2：

我们逐行计算：

- 第一行：

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 3 - 4 + 0 = -1$$

- 第二行：

$$2 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 6 + 0 + 3 = 9$$

- 第三行：

$$4 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 12 - 2 + 1 = 11$$

因此，乘积结果是：

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

3：
解答：这个陈述是错误的。为了进行矩阵乘法，第一个矩阵A的列数必须等于第二个矩阵B的行数。乘积AB的行数将与第一个矩阵相同，列数将与第二个矩阵相同：

A（m行n列）乘以B（n行p列）等于AB（m行p列）。

这里的第三题揭露了一个矩阵乘法的重要定理，这个定理会经常使用的！

阅读：对于本节内容推荐阅读introduction to Linear Algebra 的 1.1 1.2 2.1这三节内容。