1.16 18.06SC 第一单元考试

我们学习线性代数这么长时间，是时候来一次测验了！记得写完题目再看答案哦！其实题目并不难，这门课是给大一新手讲的，内容虽然比较难，但是题目并不难，相信自己吧！

1 (24 分) 本题讨论一个 m×n 的矩阵 A，满足

- 方程组

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  无解；
- 方程组

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  有且仅有一个解。

(a) 给出关于 m、n 以及矩阵 A 的秩 r 的所有可能信息。
(b) 求方程组 $Ax = 0$ 的所有解并给出解释。
(c) 写出一个符合 (a) 中所描述条件的矩阵 A 的例子。

---

2 (24 分) 一个 3×3 的矩阵 A 通过以下三次行变换（按顺序）可化为单位矩阵 I：

- E_{21}：将第 1 行的 4 倍从第 2 行中减去；
- E_{31}：将第 1 行的 3 倍从第 3 行中减去；
- E_{23}：将第 3 行从第 2 行中减去。

(a) 用这些 E 的逆矩阵表示 A^{-1}，然后计算 A^{-1}。
(b) 求出原来的矩阵 A。
(c) 求 $A = LU$ 分解中的下三角因子 L。

---

3 (28 分) 下列 3×4 的矩阵含有参数 c：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&4\\3&c&2&8\\0&0&2&2\end{bmatrix}$$

(a) 对每个 c，求 A 的列空间的一组基。
(b) 对每个 c，求 A 的零空间的一组基。
(c) 对每个 c，求方程组

$$Ax=\begin{bmatrix}1\\c\\0\end{bmatrix}$$

的通解。

---

4 (24 分)

(a) 若 A 是一个 3×5 的矩阵，关于 A 的零空间你能得出哪些信息?
(b) 假设对 A 进行行变换后得到如下矩阵 $R=\mathrm{rref}(A)$：

$$R=\begin{bmatrix}1&4&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

写出关于 A 的列的所有已知信息。
(c) 在所有 3×3 矩阵构成的向量空间 M（可称为“矩阵空间”）中，由所有可能的行最简形矩阵 R 所张成的子空间 S 是什么?

答案

1.(a)：首先$Ax=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$只有一个解代表着矩阵A是列满秩的。那么证明了r=n！然后$Ax=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$没有解代表着矩阵A的列空间他是没有填满整个3维空间的，而由矩阵乘法可以知道的是m=3，那么可以得到的是n<m且r<m！
那么关于他们的信息我们可以分析得到两种情况：
m=3，而r=n=1！
m=3，而r=n=2！

1.(b)：我们在上一小问分析出了A矩阵是列满秩的，列满秩代表着他没有自由变量，所以矩阵的零空间是只有零向量的！

1.(c)：那就需要写一个m行列数小于3的列满秩矩阵，那么就是：$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$!当然答案不唯一！

2.(a)：由题目可以知道的是$E_{23}E_{31}E_{21}A=I$，那么可以推导出$E_{23}E_{31}E_{21}AA^{-1}=IA^{-1}$，所以$E_{23}E_{31}E_{21}=A^{-1}$。我们可以由题意得到的是：$E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$E_{31}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$,
$E_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$。相乘得到$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\-3&0&1\end{bmatrix}$！

2.(b)：可以知道的是$[A|I]\to[I|A^{-1}]$，那么我们反过来就是：$[I|A^{-1}]\to[A|I]$，把这个增广矩阵进行行操作即可得到：$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&1\\3&0&1\end{bmatrix}$！

2.(c)：A求出来了，我们先把A化为行最简型：$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,那么就是第2行减去第1行的4倍，第3行减去第1行的3倍，我们填写系数得到L为：$\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$。

3.(a)：化简A得到：$A=\begin{bmatrix}1&1&2&4\\0&c-3&0&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}$。

如果c=3。那么矩阵有两个主元列，第一列和第3列。这个时候基为$\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$！

如果$c\neq 3$，那么矩阵有3个主元列，1，2，3列都是，那么基为：$\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\c\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$！

3.(b)：如果c=3，那么有两个自由变量。赋值得到$x_2=0$，$x_4=1$时，解为：$\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$,赋值$x_2=1$，$x_4=0$，解为：$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$,得到通解为：$c\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$！

如果$c\neq 3$，只有一个自由变量，我们赋值$x_4=1$，得到解为$c\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$。

3.(c)：可以知道的是$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$是一个特解！那么当c=3，得到通解为：$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$！当

$c \neq 3$时，通解为：$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$!

4.(a)：这是一个3行5列矩阵，那么零空间最多是4维的，最少是2维的！

4.(b)：1，4，5列是列空间的基！

4.(c)：矩阵空间，而且是R的矩阵空间。可以知道的是R都是上三角矩阵且都是阶梯型的（有不同的1，2，3秩！）。那么他的基就是：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$