期末考试

1（共 11 分）

设 A 为 3×4 矩阵，且方程 $Ax = 0$ 恰好有两个特解：

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) 求其行最简形 R。

(b) 求四个基本子空间 $C(A), N(A), C(A^\top), N(A^\top)$ 的维数，并给出你能确定的一个或多个子空间的基底。

解答

(a)

由特解可知自由变量为第 3、4 列（这个是在第一单元提到过的知识点），主元列为第 1、2 列，故

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b)

- **零空间** $N(A)$：维数 $4 - 2 = 2$，基底为 x_1, x_2。
- **行空间** $C(A^\top)$：维数 2，基底可取 R 的前两行：

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- **列空间** $C(A)$：维数 2，基底为 A 的前两列（未知具体数值）。
- **左零空间** $N(A^\top)$：维数 1，基底为与 $C(A)$ 正交的非零向量。

2（共 11 分）

设上三角矩阵

$$U=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{bmatrix},\quad a,b,c,d,e,f\neq 0.$$

(a) 求 U^{-1}。

(b) 若 U 的列是某矩阵 A 的特征向量，证明 A 也是上三角矩阵。

(c) 说明此 U 不可能等于 SVD 中的 U 因子。

解答

(a)

$$U^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf}\\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{df}\\ 0 & 0 & \frac{1}{f}\end{bmatrix}.$$

(b)

$A=U\Lambda U^{-1}$，其中 Λ 为对角矩阵，U 与 U^{-1} 均为上三角，故 A 亦上三角。

(c)

SVD 要求 U 的列正交，而 U 前两列内积为 $ab\neq 0$，非正交，故不可能。

3（共 11 分）

(a) 对同阶矩阵 A,B，比较 $\operatorname{rank}(A)$ 与 $\operatorname{rank}\big([A\ B]\big)$。

(b) 若 $B=A^2$，比较两者秩。

(c) 若 A 为 $m\times n$ 秩为r，求 $N(A)$ 与 $N\big([A\ A]\big)$ 的维数。

解答

- (a) $\operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}([A\ B])$。矩阵A可以有任意数量r个主元列，这些列都是$[AB]$的主元列；但B的列中可能还有更多的主元列
- (b) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A\ A^2])$，因为 A^2 的列均为 A 列的线性组合。例如，如果我们将A的第一列称为a_1，则Aa_1是A^2的第一列。因此，在$[AA^2]$的A^2部分中没有新的主元列。
- (c) $\dim N(A) = n - r$；$\dim N([A\ A]) = 2n - r$。

4（共 12 分）

设 A 为 5×3 矩阵且 $Ax \neq 0$ 对所有非零 x 成立。

(a) 关于 A 的列有何结论?

(b) 证明 $A^\top Ax \neq 0$ 对所有非零 x 成立。

(c) 说明 $B = (A^\top A)^{-1}A^\top$ 为 A 的左逆，而非右逆。

解答

- (a) 列线性无关，$\operatorname{rank}(A) = 3$。
- (b) 若 $A^\top Ax = 0$，则 $x^\top A^\top Ax = \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$，与题设矛盾。
- (c) $BA = I_3$，故为左逆；但 AB 为 5×5 秩为 3的矩阵，不可能等于 I_5因为单位矩阵是满秩的，故非右逆。

5（共 10 分）

设 3×3 对称正定矩阵 A 有正特征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ 及对应标准正交特征向量 q_1, q_2, q_3。令 $x = c_1q_1 + c_2q_2 + c_3q_3$。

(a) 计算 $x^\top x$ 与 $x^\top Ax$。

(b) 求使 Rayleigh 商 $\dfrac{x^\top Ax}{x^\top x}$ 最大的 x 形式。

解答

- (a)

$$x^{\mathsf{T}}x = (c_1q_1^{\mathsf{T}} + c_2q_2^{\mathsf{T}} + c_3q_3^{\mathsf{T}})(c_1q_1 + c_2q_2 + c_3q_3) = c_1^2q_1^{\mathsf{T}}q_1 + c_1c_2q_1^{\mathsf{T}}q_2 + \cdots + c_3c_2q_3^{\mathsf{T}}q_2 + c_3^2q_3^{\mathsf{T}}q$$

$$x^{\mathsf{T}}Ax = (c_1q_1^{\mathsf{T}} + c_2q_2^{\mathsf{T}} + c_3q_3^{\mathsf{T}})(c_1Aq_1 + c_2Aq_2 + c_3Aq_3) = (c_1q_1^{\mathsf{T}} + c_2q_2^{\mathsf{T}} + c_3q_3^{\mathsf{T}})(c_1\lambda_1q_1 + c_2\lambda_2q_2 +$$

- (b)
  我们最大化 $\dfrac{(c_1^2\lambda_1 + c_2^2\lambda_2 + c_3^2\lambda_3)}{(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)}$ 当 $c_1 = c_2 = 0$ 时，结果等于λ_3，所以 $x = c_3q_3$ 是具有最大特征（因为特征值3最大）值 λ_3 的特征向量 q_3 的倍数。所以取 $c_1 = c_2 = 0$，x 与 q_3 共线时取得最大值 λ_3。因为特征值3最大，这就是为什么我们让c_1, c_2等于0的原因！

（还要注意，这个“Rayleigh 商” $x^{\mathsf{T}}Ax/x^{\mathsf{T}}x$ 的最大值本身就是最大的特征值。这是寻找特征向量的另一种方法：通过数值最大化 $x^{\mathsf{T}}Ax/x^{\mathsf{T}}x$。）

6（共 12 分）

(a) 求与 u 正交且能由线性无关向量 v 和 u 线性表示的向量 w。

(b) 对于 2 列矩阵 $A = [u \quad v]$，找到 Q（列正交归一）和 R（2 乘 2 上三角）使得 $A = QR$。

(c) 仅使用 Q，通过 $A = QR$ 找到投影矩阵 P 到由 u 和 v 张成的平面上。

解答

(a) 你可以简单地写下 $w = 0u + 0v = 0$ —— 这是与任何向量都垂直的！但一个更有用的选择是减去足够的 u 使得 $w = v - cu$ 与 u 正交。这意味着 $0 = w^{\mathsf{T}}u = v^{\mathsf{T}}u - cu^{\mathsf{T}}u$，所以 $c = \frac{v^{\mathsf{T}}u}{u^{\mathsf{T}}u}$ 并且 $w = v - \frac{(v^{\mathsf{T}}u)u}{u^{\mathsf{T}}u}$。

(b) 我们已经知道 u 和 w 是正交的；只需对它们进行归一化！取 $q_1 = \frac{u}{|u|}$ 和 $q_2 = \frac{w}{|w|}$，他们就可以作为Q的列。然后解出 R 的列 r_1, r_2：$Qr_1 = u$ 所以 $r_1 = \begin{bmatrix} |u| \\ 0 \end{bmatrix}$，并且 $Qr_2 = v$ 所以 $r_2 = \begin{bmatrix} c|u| \\ |w| \end{bmatrix}$。（其中 $c = \frac{v^{\mathsf{T}}u}{u^{\mathsf{T}}u}$ 如前所述。）然后 $Q = [q_1 \; q_2]$ 和 $R = [r_1 \; r_2]$。

(c) $P = A(A^{\mathsf{T}}A)^{-1}A^{\mathsf{T}} = (QR)(R^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}}QR)^{-1}(R^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}}) = (QR)(R^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}}) = QQ^{\mathsf{T}}$。这个正常计算就可以得到！

7（共 11 分）

(a) 求矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的特征值。

(b) 这两个都是置换矩阵。求它们的逆 C^{-1} 和 $(C^2)^{-1}$?

(c) 求 C 和 $C+I$ 以及 $C+2I$ 的行列式。

解答

(a) 取 $C-\lambda I$ 的行列式（我通过余子式展开）：$\lambda^4 - 1 = 0$。这个“特征方程”的根是特征值：+1, -1, i, -i。

C^2 的特征值就是 $\lambda^2 = \pm 1$（各两个）。

（这里有一种“猜测”方法。由于 $C^4 = I$，所有 C^4 的特征值 λ^4 都是 1：所以 $\lambda = 1, -1, i, -i$ 是唯一可能的。只需检查哪些是可行的。然后 C^2 的特征值必须是 ± 1。）

(b) 对于任何置换矩阵，$C^{-1} = C^{\mathsf{T}}$：所以

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和 $(C^2)^{-1} = C^2$ 是它自己。

(c) C 的行列式是其特征值的乘积：$1(-1)i(-i) = -1$。

将每个特征值加 1 得到 $C+I$ 的特征值（如果 $C = S\Lambda S^{-1}$，那么 $C+I = S(\Lambda+I)S^{-1}$）：$2(0)(1+i)(1-i) = 0$（或者让 $\lambda = -1$ 在特征方程 $\det(C-\lambda I)$ 中。）

加 2 得到 $C+2I$ 的特征值（或者让 $\lambda = -2$）：$3(1)(2+i)(2-i) = 15$。

8（共 11 分）

假设一个矩形矩阵 A 有独立的列。

(a) 如何找到 $Ax = b$ 的最佳最小二乘解 $\hat{x}$？通过这些步骤，给我一个 $\hat{x}$ 和 $p = A\hat{x}$ 的公式（字母而不是数字）。

(b) 投影 p 在与 A 相关的哪个基本子空间中？误差向量 $e = b - p$ 在哪个基本子空间中？

(c) 通过任何方法找到投影矩阵 P 到 A 的列空间：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

解答

(a)这个在讲座中就推导过！

$Ax = b$最小二乘“解”： $A^\top A\hat{x} = A^\top b A^\top A$ 是可逆的： $\hat{x} = (A^\top A)^{-1}A^\top b$并且 $p = A\hat{x}$ 是： $A\hat{x}$

(b) $p = A\hat{x}$ 是 A 的列的线性组合，所以它在列空间 $C(A)$ 中。误差 $e = b - p$ 与这个空间正交，所以它在左零空间 $N(A^\top)$ 中。

(c) 我使用了 $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$。由于 $A^\top A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$，它的逆是 $\begin{bmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}$，并且

$$P = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

9（共 11 分）

考虑主对角线上有 3，主对角线上方有 2，主对角线下方有 1 的矩阵：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 2 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

(a) 求 A_2 和 A_3 的行列式。

(b) A_n 的行列式是 D_n。使用第一行和第一列的余子式找到 D_n 的递推公式中的系数 a 和 b：

$$D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}.$$

(c) 这个方程 ($D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}.$) 与下列矩阵的特征方程相同：

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix}$$

从该矩阵的特征值来看，行列式 D_n 的增长速率如何？（如果你没有找到 a 和 b，说明你将如何回答任何 a 和 b 的情况下的 (c) 部分。）对于第一点，求出 D_5。

解答

(a) $\det(A_2) = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 7$ 和 $\det(A_3) = 3 \cdot \det(A_2) - 2 \cdot 1 \cdot 3 = 15$。

(b) $D_n = 3D_{n-1} + (-2)D_{n-2}$。（这个代入数据展开即可得到！）

(c) （就是一个差分方程！）该矩阵A的迹是 $a = 3$，行列式是 $-b = 2$。所以特征方程为 $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$，其根（即特征值）为 $\lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = 1$ 或 2。而$D_n = a2^n + b1^n$ （这个公式是换元得来，我们首先需要假定解进行反推！这个公式就是递推关系的通解形式！），由这个公式得到D_n 的增长速率与 A_n 的最大特征值 $\lambda_n = 2^n$ 相同。但是我们说了这个其实也是一个差分方程，考试中让我们推导出递推关系的通解有点困难，但是差分方程的通解我们知道的，通解为$u_k = c_1\lambda_1^k x_1 + c_2\lambda_2^k x_2$，明显特征值为1的那一项对增长没有什么作用，主要是特征值为2的那一项对增长有贡献！

最后的一点：$D_5 = 3D_4 + 2D_3 = 3(3D_3 + 2D_2) + 2D_3 = 11D_3 + 6D_2 = 207$。

本章除了最后一题第二问比较困难，其他题目没有计算上与理解上的刁难（当然如果大家能够联想到差分方程，也是很简单的！），大家好好写这张试卷检验自己的学习成果！

到此，本门课程全部结束！完结撒花！线性代数虽然难以理解，但是这门课程尽量讲得通俗易懂，正如教授所说，数学是给每个人准备的，如果别人可以会，当然，你也可以！