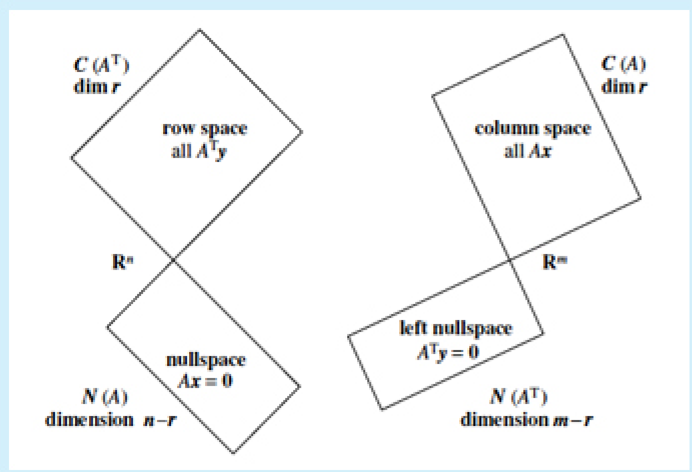
1.1单元总述



这个图片包含了四个子空间
这张图描绘了线性代数中的四个基本子空间及其相互关系，通常与矩阵 A 相关联。这四个子空间分别是行空间、列空间、零空间和左零空间，它们在矩阵理论和线性方程组的求解中扮演着核心角色。

- **行空间**（`Row Space`）：表示为 $C(A^T)$，是所有可能的 A^Ty 的集合，其中 y 是任意向量。它的维度等于矩阵 A 的秩 r。
- **列空间**（`Column Space`）：表示为 $C(A)$，是所有可能的 Ax 的集合，其中 x 是任意向量。同样，它的维度也等于矩阵 A 的秩 r。
- **零空间**（`Nullspace`）：表示为 $N(A)$，是所有满足 $Ax=0$ 的向量 x 的集合。它的维度是 $n-r$，其中 n 是矩阵 A 的列数。
- **左零空间**（`Left Nullspace`）：表示为 $N(A^T)$，是所有满足 $A^Ty=0$ 的向量 y 的集合。它的维度是 $m-r$，其中 m 是矩阵 A 的行数。

这些子空间之间的关系可以用正交补的概念来描述，即行空间与零空间正交，列空间与左零空间正交。这种几何视角有助于理解线性方程组的解的存在性和唯一性，以及矩阵的秩如何影响这些解的性质。当然上述内容不懂没有关系，正如`Gilbert Strang`老教授所说的那样，这门课程没有先决条件，尽管会有些学生在开始时领先，但是你会很快赶上！

在这个单元中，我们以矩阵形式 Ax = b *编写线性方程组。我们探讨了 A 和 b 的性质如何确定解 x（如果存在），并特别注意 _Ax = 0 的解。对于给定的矩阵 A*，我们询问哪个 b 可以写成 Ax 的形式。（这部分的内容大家可以在学完这个单元后来复习，那个时候会更有感触！）

在正文内容之前，也许我们需要去先复习一下向量加减法，乘法（点乘与叉乘）。还有什么叫线性无关，线性相关吧!等其他概念！

向量的加减法我相信大家可以回忆起来。
点乘：

1. **代数定义（分量形式）**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

2. **几何定义**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| \cos(\theta)$$

叉乘：
这里需要注意的是，叉乘只适用于三维向量。假设我们有两个三维向量 $\vec{a} = [1, 2, 3]$ 和 $\vec{b} = [4, 5, 6]$，它们的叉乘计算如下：

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5)\mathbf{i} - (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4)\mathbf{j} + (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

即，$\vec{a} \times \vec{b} = [-3, 6, -3]$。
几何定义：结果向量的方向垂直于原来两个向量所张成的平面

如果非要在二维向量中用叉乘也行，但是结果会是一个标量。而更高维度的情况下叉乘的定义会变得复杂，代数结构也会改变，我们这里不讨论！