1.15 第一单元的复习

这一讲是习题课，strang教授将会以习题的形式带着我们回顾前面14讲的内容，接下来我们将会有13个例题！希望通过这13题，大家对前面的内容有一个系统的了解！

（1）

设 u，v，w 是R^7空间内的非零向量，由他们生成了一个属于R^7的向量子空间，则此空间的维数是多少?
这一题，我来帮大家回顾一下相关知识，对于一个n维向量， 他最多可以形成的空间是n维的，无法再向上升了。而n个向量，如果n是小于向量维度的，那么可以张成n维空间！具体怎么说呢，比如：我们有4个3维向量，那么他只能形成3维空间，多出来的一个会使得他们线性相关。而如果是有2个3维向量，那么他只能2维空间！（这个内容我们在之前说过，但是我忘记具体在哪一讲了。）回到我们的题目：3个向量，他们生成了一个属于R^7的向量子空间，说明他们维度是7，那么这样来看，他们张成的维度最多是3，最少是1。

（2）

有一个 5x3 的阶梯形矩阵 U，秩为 3，求矩阵 U 的零空间?

我来回顾一下相关的知识：
什么是零空间：使得 Ax = 0 成立的所有解向量张成的空间。

什么是行阶梯矩阵：在化简后的矩阵中可画出一条阶梯线，线的下方全为 0，每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线(每段竖线的长度为一行)，后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元。

什么是行最简形矩阵：非零行的第一个非零元都为 1，且这些非零元所在的列的其他元素都为0。通过观察行最简形矩阵，我们一眼能看出主元列和自由列，一眼能看出矩阵的秩是多少！

下面我们回到问题：
U已经是最简形式了。我们知道矩阵的秩代表了他有多少个主元列（线性无关列)。显然这个矩阵就是列满秩的！列满秩说明他的零空间是只有零向量的！

(3)

给定 10x3 矩阵 B，B 中含有矩阵 R 和 2R：B = $\begin{bmatrix} R \\ 2R \end{bmatrix}$（R 是行最简形矩阵）问：该矩阵的秩是多少？其阶梯型矩阵又是怎样的?

记得分块矩阵吗，我们以分块矩阵的思想来看这题，很显然B是可以化简为$\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$的，这就是 B 的阶梯型矩阵，它的秩即为矩阵 R 的秩。我们由题目知道矩阵R的秩是3，所以矩阵的秩是3！

进一步呢，矩阵C为$\begin{bmatrix} R & R \\ R & 0 \end{bmatrix}$的行最简形是什么，零空间维度是多少？

我们来化简看看：$\begin{bmatrix} R & R \\ R & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R & R \\ 0 & -R \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R & R \\ 0 & R \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$。当然严格来说这样并没有化到最简，我们应该把矩阵中 R 的下面零行移到整体的最下面一行，这才是标准的行最简型矩阵。这就是他的行最简形！而零空间维度是n-r，这在矩阵C中的秩是6，所以零空间维度是4！

（4）

已知：$AX = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。求 A 的行空间的维数，并写出A矩阵？什么样的b，是得Ax=b一定有解！

首先我们可以看出A矩阵的形状：首先X是3行1列的，所以矩阵A是3列的，然后矩阵AX的结果是3行一列的，所以矩阵A是3行的。所以矩阵A是3行3列的！

再看矩阵A的秩：从通解来看矩阵A的零空间维度是2，那么矩阵A的秩r=n-2，秩就为1！那么矩阵A的行空间维度就是r=1。

那么我们怎么求出A呢：首先$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$是A零空间的特解！那么A$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$=0，那么A的第三列是$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。而AX=$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$的特解是$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。代入得A的第一列是$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$。同样A$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$=0，得到A的第二列是$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$。那么A矩阵是$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$。

而我们把A化成行最简形，知道第一列是他的主元列，那么我们得到b得是$c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，这样才一定有解！

（5）

如果一个方阵 A 的零空间只包含零向量，那它转置矩阵的零空间呢？

假设矩阵A是n行n列的，如果矩阵的零空间只有零向量，那么矩阵的秩是n，而左零空间的维度是由n-r的，也是为0，那么转置矩阵的零空间也只有零向量！

（6）

5 阶可逆方阵的集合是否构成向量空间？

首先，我们说过矩阵满秩与矩阵可逆是充要条件（证明就略过）！那么5 阶可逆方阵一定是满秩的，所以0矩阵一定不是5 阶可逆方阵，那么在5 阶可逆方阵的集合不包含0矩阵，那么他无法构成向量空间！

（7）

存在除零矩阵外的平方为零的矩阵吗?

当然存在，$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$，这个矩阵很危险，我们在第二单元中会有许多的讲解！

（8）

方阵的列线性无关，Ax = b 是否总是有解的?

当然，当矩阵线性无关且是方阵，那么他就可逆！矩阵是满秩的。假设A是n行n列的，那么矩阵A的列空间是n维的，且是填满整个n维空间的！而b一定也是属于n维空间的！所以总是有解！

（9）

$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，那么B的零空间的维度是多少，B的零空间的基是什么?

在解决这个问题之前，我们需要讨论一个事实：ABX=0，当A是可逆矩阵时，那么AB矩阵的零空间与B的零空间是一样的！我们可以从两个方面来证明这个定理：（1）当A矩阵可逆时，A矩阵的零空间就只有零向量，那么AB矩阵的零空间就和B的零空间是一样的！（2）也可以严谨的证明：$ABx=0\rightarrow A^{-1}ABx=A^{-1}0\rightarrow IBx=0\rightarrow Bx=0$!

回到题目，那么求B的零空间就是求解$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$的零空间！而求解这个矩阵的零空间，可知已经是最简形式了，主元列是第一列和第二列，有两个特解，那么经过对自由变量赋值得到两个特解为：$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$（这个计算过程略过，不清楚的话可以去看看1.9的内容！）那么通解就是：$c\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$。

那更进一步求解：$Bx=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，当然我们可以把B求解出来，然后解出他的特解（忘记看1.10），然后写出通解！但是这里，我们可以一眼看出他的特解！首先B矩阵的第一列等于后面矩阵第一

列的（1，0，0）分别乘以前面矩阵的三个列，得到第一列是（1，0，1），刚好与解相等，那么特解只需要保留第一列即可：$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$！所以$Bx=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$的通解是：$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$！

（10）

如果矩阵是方阵，是否意味着矩阵的行空间等于列空间？

当然错误，方阵的行向量与列向量又不一定相等！比如$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$就不是这样的！

（11）

如果 A 与 B 的四个子空间相同，则 A 是 B 的倍数？

错误，不一定是成倍数的，只要是通维度的可逆矩阵，都有相同的子空间！

（12）

给定矩阵 A，交换其中的两行，哪些子空间没变？

首先行空间一定没有变，这个毋庸置疑！而除此之外，零空间也没有变。证明如下：交换矩阵的行就相当于左乘了一个置换矩阵。$PAx=0\rightarrow P^{-1}PAx=P^{-1}0\rightarrow Ax=0$。所以零空间根本没有变。

(13)

为什么向量（1，2，3）不能既是 A 的某一行，又在 A 零空间中？

直接代入矩阵就可以发现：$\begin{bmatrix}1&2&3\\.&.&.\\.&.&.\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，我们运用矩阵乘法就可以知道这不可能！实际上对于给定矩阵，其行空间与零空间共享的向量只能是零向量，矩阵的零空间与行空间正交！这是下一单元的内容！

讨论课

我们有矩阵A为：$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&4&k\end{bmatrix}$。回答下面三个问题：

（1）k为什么的时候，$Ax=\begin{bmatrix}2\\3\\7\end{bmatrix}$拥有唯一的解？

（2）k为什么的时候，$Ax=\begin{bmatrix}2\\3\\7\end{bmatrix}$有许多个解？

（3）当k=4的时候，把A分解为LU的形式。

（4）写出最后的完整解，针对所有的k。

解答：

（1）首先我们需要说明一个事实，矩阵A可逆的时候，Ax=b只有唯一解！（这个内容也许我应该加到1.10里面去！）下面我们从两方面来证明：首先从空间的角度来看，当矩阵A可逆的时候，代表着他是满秩矩阵，他的每一个列向量代表着一个维度，那么根据空间的唯一性来说，就只有唯一的解！然后我们来严谨的数学求证：

$Ax=b\to A^{-1}Ax=A^{-1}b\to Ix=A^{-1}b\to x=A^{-1}b$，由此可知解是唯一了的！

回到题目，现在我们只需要证明k是满秩的即可！那么我们先把他们化为行最简形式：

$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&4&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\3&4&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&1&k-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&k-5\end{bmatrix}$！那么要使得A满秩，那么$k\neq5$即可！

（2）要使得他有许多个解，我们得让矩阵A不能是满秩，且结果矩阵得在A的列空间中！我们还是来化简A，不过这次得带上结果矩阵一起，形成一个增广矩阵！

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&2&3&3\\3&4&k&7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&2&1\\3&4&k&7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&2&1\\0&1&k-3&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&2&1\\0&0&k-5&0\end{array}\right]$。那么要使得A不是满秩，$k=5$。可知结果矩阵就等于A的第一个列向量和第二个列向量的和！

（3）当k等于4时，可以得到$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&2&1\\0&0&k-5&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&1&2&1\\0&0&-1&0\end{array}\right]$，得到$U=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-1\end{bmatrix}$。那么L就直接填写系数即可：$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&1&1\end{bmatrix}$，那么他的LU分解为：$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-1\end{bmatrix}$！

（4）写出完整的解。那么我们需要分类讨论了：

当$k\neq5$时，矩阵A满秩，只有唯一解！对于$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&k-5\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，我们可以得到$x_3=0$，那么通过回代法求解得到：$x_2=1,x_1=1$。那么我们得到一个解是：$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$。

当k=5时，$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，可以对自由变量赋值得一个特解：$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$。而他零空间的通解是（这个计算过程我们略过）：$\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$。那么这个的通解就是：$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$。

希望这部分内容能够让大家很好的复习前面的内容！