1.11 线性相关性， 基，维度

这一节我们将从一组向量开始，串联其一系列的内容！并且解释一些新的概念！

线性相关性

什么是线性无关

除系数全为 0 的情况外，没有其他线性组合方式能得到零向量，则这组向量线性无关。
设向量组为 x_1，x_2，$x_3 \dots x_n$。即c_i不全为 0 时，任何$c_1x_1+c_2x_2+\dots\dots c_nx_n$线性组合的结果都不为零，则此向量组线性无关。

什么是线性相关

除了零组合之外还有其他的线性组合方式能得到零向量，则这组向量线性相关。
这么一看其实是与矩阵的相关性是一样的，

但是值得注意的是如果一个向量组中有零向量存在，那么这个向量组一定是线性相关的。
下面我们举例子来看：
1.v_1与$2v_1$组成的向量组：$-2(v_1)+(2v_1)=0$ 线性相关
2.v_1与零向量组成的向量组：$0(v_1)+1(0)=0$线性相关
相信这些例子会让大家有更深的理解！再进一步我们从空间角度来看：
当我们有m个向量，他们的维度为n，如果m<=n，那么他们只要不处于同一维度，就会线性无关，但是如果m>n，无论如何都会是线性相关的！
1.当我们有两个向量，他们维度是3，只要他们不共线，那么他们就是线性无关的！
2.当我们有三个向量，他们维度是3，只要他们三个不共线且不共面，那么他们就是线性无关的！
3.当我们有三个向量，他们维度是2，他们一定是会有两个向量是共线共面的！一定是线性相关的！

更进一步吧，我们引入矩阵

张成空间

当我们把视角放到矩阵的时候，在向量在空间的角度不就是列空间吗。那么列空间就是有矩阵中向量的所有线性组合得来的，我们也叫做张成空间！所以我们称张成空间就是一堆向量（可以说单独的，也可以是同属一个矩阵的）所有的线性组合所形成的空间！

那么结合向量空间和矩阵的视角。如果说一组向量线性无关，那么根据定义，只有全为0才会得到0。那么往矩阵的视角看是不是说一个矩阵如果是线性无关的，那么他的零空间只有零向量！

这也为1.10的提到的内容做了解释！所以我们说如果一个矩阵的零空间只有零向量，那么他是线性无关的！

基

什么是基呢？当我们有一组向量，进行线性组合张成了一个空间，或者说一个矩阵张成他的列空间，如果是线性无关，毫无疑问，每一个向量都不可缺少，但是如果是线性相关的，去掉一些向量张成的空间是一样的！那么剩下的这些向量构成了基！那么我们可以这么来定义基：由最少的可以张成空间的向量组成的向量！在空间视角来看，一个空间的基一定不止一个的，而是有许多个。上升到矩阵的话，如果不是线性无关的话，那么可以生成列空间的向量组也不止一种。而是有许多种组合的！比如在一个矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，那么这个矩阵的基可以是$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，也可以是$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。同样的在一个方阵中，我们知道，如果他可逆那么$AA^-1=I$，首先$I$是一个线性独立的矩阵，A可以变化成$I$，那么A肯定也是线性独立的！所以矩阵可逆确实意味着该矩阵的所有列向量（以及所有行向量）都是线性无关的。所以一个可逆矩阵的各列就是他的基！除开方阵外，我们延申到一般矩阵。那么我们说过的秩，主元，自由变量，他们之间有什么关系呢！很明显，主元所在的列就是属于基的，而自由变量对应的列的不属于基的！秩的数量就是基包含的向量数。
总结一下他们的关系：
一个m行n列的矩阵，秩为n，那么他线性无关，零空间只有零向量，没有自由变量，基内的向量数是n！没错，他们就是这样精妙的串联在一起了！

维度

维度是基于空间去讲述的！那么对于一个n维空间，张成他需要的条件是什么！比如一个4维空间，仅仅有3个向量可以吗，很明显不可以的，无论向量的维度是多少，哪怕是5维，三个向量也无法张成一个4维空间！那么4个3维向量可以吗，也是不行的，多出的一个会让他们线性相关，为不会突出维度！所以张成一个n维空间的基本要素就是n个n维的向量！那么什么是维度，就是基的向量数。那么我们可以得到一个定理：同一个空间内，即使基不同，基向量的个数也必须相等。同样我们延申到矩阵，矩阵列空间的维度，就是有多少个张成此空间的向量也就是有多少个主元列！同样一个矩阵的零空间维度，就是有多少个张成此零空间的向量，也就是有多少个自由列！

上面的介绍了许多概念，从一组向量出发，到空间再到矩阵，他们之间有许多巧妙的关联，下面我们通过一个例题来回顾！
有矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\1 & 1 & 2 & 1\\1 & 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$，回答下面的问题。
（1）A的各列是A矩阵的基吗
我们怎么来判断？方法一：判断各列是否线性无关？显然一组系数$[1,0,0,-1]$是可以组合为0，所

以是线性相关的，那么我们就说各列不是A矩阵的基！

方法二：如果说A矩阵的各列是A矩阵的基，那么是不是说A矩阵的秩为4，有4个主元，没有自由变量！那么我们消元为R得到$R=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，发现有两个主元，秩为2，显然不是4，所以是错误的！

（2）找出矩阵A的基

怎么找，方法一：首先我们要确认A矩阵的列空间的维度，上面我们知道是由两个向量张成的，维度是2！那么找到A的基是不是只需要在矩阵A中任意挑选两个线性无关的向量即可！那么我就挑选出$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\\!&2\end{bmatrix}$这两列！方法二：或者我们也可以直接通过矩阵的秩，由于A矩阵的秩是2，那么不用疑问，A列空间的维度就是2，然后直接找主元列作为基地即可！

（3）A 对应零空间的维数为多少？

零空间的维度，我们也可以理解为零空间的基包含多少个矩阵，或者理解为矩阵有多少个自由变量。那么零空间维度就是：n-r了。

> tips:对于自由变量与主元个数与维度对应的关系，我决定需要给出一个空间上的理解！我们知道主元列是矩阵中线性无关的向量，那么他们就是张成列空间的基。同样自由变量对应的列，自由列就是由主元列给组合形成的。那么自由列只需要反向的赋予系数，那么就可以把主元列抵消得到零，也就是说整个零空间都是由这些自由列进行组合对抗主元列的组合而形成的，无论自由列本身是否是线性无关的，每一个自由列都代表着一个零空间的维度！所以这也对应了主元个数等于秩等于列空间维度，而自由变量个数等于零空间维度！

讨论课

有一个向量空间有一下四个向量张成：

$[1\quad 1\quad -2\quad 0\quad 1]$，$[1\quad 2\quad 0\quad -4\quad 1]$，$[0\quad 1\quad 3\quad -3\quad 2]$，$[2\quad 3\quad 0\quad -2\quad 0]$，由这四个向量张成，求张成向量的空间的维度和基。

是不是我们只需要先把四个向量放入矩阵当中，然后消元找主元，找到主元列后主元列个数就是维度，主元列就是基！

（1）

$$\begin{bmatrix}1&1&-2&0&1\\1&2&0&-4&1\\0&1&3&-3&2\\2&3&0&-2&0\end{bmatrix}$$

我们进行消元得到：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 0 & 1\\0 & 1 & 2 & -4 & 2\\0 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

注意了，我们要的是向量张成的空间，那么在矩阵中不再是列空间而是行空间！在矩阵中，第1，2，3行都有主元，第4行没有，那么第四行是没有用的！前三行是基，那么维度是3，但是基是消元前的前三行还是消元后的前三行，我们一会揭晓！

（2）我们把向量转置过来

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\1 & 2 & 1 & 3\\-2 & 0 & 3 & 0\\0 & -4 & -3 & -2\\1 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

那么现在矩阵的列空间就是四个向量所张成的空间了！进行消元后得到：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

那么有三个主元，前三列是主元列，维度是三！那么他的基是消元前的前三列还是消元后的前三列！

我们在1.5讲说了初等变换（在消元法中经常用到的那些以及其他的操作）对矩阵各个方面的影响，我们可以发现初等变换对矩阵影响是很小的。但是在这里我需要补充初等变换对行空间（下一讲会讲到行空间）和列空间的影响！
首先，初等变换分为两类，一个是基于行操作的，一种是基于列操作的。而基于列操作的在消元法中几乎不会出现，但是基于行操作的初等变换在消元法中屡见不鲜！那么基于行操作基于列操作这两种操作的区别是什么呢？一：基于行操作为例子，他进行交换，相乘，相加这些操作在矩阵的行之间，那么产生新的行，不过是其他行的线性组合，那么新的行向量在空间的位置一定是在原先行向量张成的空间之中！但是在行操作的过程中产生的新列，就不一定是在原来的列张成的空间中了！二：同样，基于列操作，他进行交换，相乘，相加这些操作在矩阵的列之间，那么产生新的列，不过是其他列的线性组合，那么新的列向量在空间的位置一定是在原先列向量张成的空间之中！但是在列操作的过程中产生的新行，就不一定是在原来的行张成的空间中了！而基于列操作还会对矩阵有其他的影响具体去看1.5讲。而基于行操作影响几乎是对矩阵没有什么影响的，而我们的消元法也是以行操作为主的！

现在我们回到题目，由于消元法是基于行操作的！那么在第一种解法中，对于向量而言，新产生的向量也是在原来向量张成的空间中的，那么我们可以选择消元前的前三行，也可以是消元后的前三行，不过注意如果在消元过程中交换了行，那我们用消元前的矩阵时注意对应好位置！而在第二种解法中，由于我们消元法对于向量而言，产生的新向量不再属于原来向量张成的空间中，那么我们只能选择前面的三列！

习题课

问题一：

有6个向量(1，-1，0，0)，（1，0，-1，0)，（1，0，0，-1)，（0，1，-1，0)，（0，1，0，-1)，（0，0，1，-1)。找到以下范围内找到最大可能的独立向量数。

解答：很简单，合并为矩阵，找出矩阵的秩。
$\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\-1&0&0&1&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\\0&0&-1&0&-1&-1\end{bmatrix}$，那么化简矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0.5\\0&0&0&0&2&-1\end{bmatrix}$,可以看到有三个主元，那么秩为3。那么最大可能独立向量数是3！

问题二：

找到R^3中平面$x-2y+3z=0$的一个基。然后找到该平面与xy平面交集的一个基。最后，找到所有垂直于该平面的向量的一个基。

解答：首先，矩阵$\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\end{bmatrix}$的零空间就是该平面！为什么呢，首先该矩阵是不是可以化为方程组

$$\begin{cases}x-2y+3z=0\\0x+0y+0z=0\end{cases}$$

第一个方程是满足的，第二个全是0不提供任何信息。那么接触零空间的两个特解，就可以当成是基了！得到特解为：$\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$,它们构成了 A 的零空间的一个基，也是该平面的一个基。那么与xy平面的交集一定是一条直线，我们发现$\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$是在xy平面上的，所以这个特解可以当初交集线的基！最后找垂直于该平面的向量的一个基。由于是向量的基，那么一个向量即可！我们是否还

记得叉乘呢，如果忘记去看1.1讲复习一下！叉乘得到解为：$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$。我们以这个为基地，到处此题完成！