3.10 18.06SC 第三单元考试

本讲考试三大题，每个大题三小题！

1 (34 分)

(a)

设一个 $n \times n$ 方阵 A 在奇异值分解 (SVD) 中所有 n 个奇异值都等于 1，问 A 属于下列哪些基本矩阵类别?
(奇异、对称、正交、正定或半正定、对角)

解
若所有 $\sigma_i = 1$，则

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}} = UV^{\mathrm{T}},$$

这是两个正交矩阵的乘积，故 A 本身正交。 验证：$UV^{\mathrm{T}}(UV^{\mathrm{T}})^T = I$
另一种证法：所有 $\sigma_i = 1 \Rightarrow A^{\mathrm{T}}A = I$，所以 A 正交。
(注意：A 永远非奇异，但不一定对称——例如取

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = I$$

上面的例子即可说明它不一定对角，然后上面的例子特征值也存在负数，所以不是正定或半正定。)

(b)

设矩阵 H 的列已经正交归一化，并且是 B 的特征向量：

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad H^{-1} = H^{\mathrm{T}}.$$

B 的特征值为 $\lambda = 0, 1, 2, 3$。
将 B 写成三个特定矩阵的乘积，再将 $C = (B + I)^{-1}$ 写成三个矩阵的乘积。

解
首先，矩阵B的特征值全部为实数，而且他的特征向量是正交的，这代表B是一个对称矩阵，对称矩阵就可以拆分为下面形式，而且刚好H就是他的特征向量矩阵！

$$B = H\Lambda H^{-1}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(0, 1, 2, 3).$$

$(B+I)^{-1}=(H\Lambda H^{-1}+I)^{-1}=(H\Lambda H^{T}+HIH^{T})^{-1}=(H(\Lambda+I)H^{T})^{-1}=H(\Lambda+I)^{-1}H^{-1},\quad (\Lambda$ -

那么$C=H(\Lambda+I)^{-1}H^{-1}$

(c)

利用 (a) 中的类别列表，分别指出 B 和 C 所属的类别。

解

- B：奇异(因为特征值包含0，所以矩阵行列式为0，那么矩阵不可逆，就是奇异矩阵)、对称、半正定。
- C：对称、正定。

---

2 (33 分)

(a)

求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

的三个特征值，并给出其特征向量矩阵 S。

解

A 为上三角矩阵，特征值为对角线元素：$-1,0,1$。

- $\lambda=-1$ 对应特征向量
  $x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
- $\lambda=0$ 对应特征向量
  $x=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$
- $\lambda=1$ 对应特征向量
  $x=\begin{bmatrix}7\\5\\1\end{bmatrix}$

将以上向量作为列，可得 S（仍是上三角）。

(b)

说明为什么 $A^{1001}=A$？是否 $A^{1000}=I$？求 e^{At} 的三个对角元素。

解
$A=S\Lambda S^{-1}\Rightarrow A^{1001}=S\Lambda^{1001}S^{-1}$。
注意到

$$\Lambda^{1001}=\Lambda,$$

故 $A^{1001}=A$。

但 $\Lambda^{1000}\neq I$（因为 Λ 中有 0，$0^{1000}=0\neq 1$），因此 $A^{1000}\neq I$。

e^{At} 的对角元素为 （这个直接套公式算）

$$e^{-t},\quad e^{0t}=1,\quad e^{t}.$$

(c)

对同样的 A，

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & 8\\ -4 & 8 & 42\end{bmatrix}.$$

问：$A^{\mathrm{T}}A$ 有多少个正、零、负特征值？（不计算具体值，仅说明理由）
$A^{\mathrm{T}}A$ 与 A 是否有相同的特征向量？

解

- $A^{\mathrm{T}}A$ 的秩为 2，故有一个零特征值。
- 对称矩阵的特征值非负，因此有两个正特征值，无负特征值。
- （也可通过消元：主元为 $1,0,42-16=26$，符号与特征值一致。）

$A^{\mathrm{T}}A$ 与 A 的特征向量一般不相同。

---

3 (33 分)

设 $n\times n$ 矩阵 A 有 n 个正交归一化特征向量 $q_1,\dots,q_n$，以及 n 个正特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$，满足 $Aq_j=\lambda_j q_j$。

(a)

求 A^{-1} 的特征值与特征向量，并证明。

解
由

$$Aq_j = \lambda_j q_j \Longrightarrow q_j = \lambda_j A^{-1} q_j \Longrightarrow A^{-1} q_j = \frac{1}{\lambda_j} q_j.$$

故 A^{-1} 的特征值为 $\dfrac{1}{\lambda_j}$，特征向量仍为 q_j。

(b)

任意向量 b 可表示为

$$b = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_n q_n.$$

利用 q_j 的正交归一性，给出 c_1 的快速公式。

解
两边同乘 q_1^{T}：

$$q_1^{\mathrm{T}} b = c_1 q_1^{\mathrm{T}} q_1 = c_1 \Longrightarrow c_1 = q_1^{\mathrm{T}} b.$$

这个推导在讲座中也进行过！

(c)

方程 $Ax = b$ 的解

$$A^{-1} b = d_1 q_1 + d_2 q_2 + \cdots + d_n q_n.$$

给出 d_1 的快速公式（可用 (b) 中的 c_j）。

解
首先$b = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_n q_n.$，那么$A^{-1} b = A^{-1} c_1 q_1 + A^{-1} c_2 q_2 + \cdots + A^{-1} c_n q_n$
将 b 乘以 A^{-1}，相当于把每个 q_j 乘以 $\dfrac{1}{\lambda_j}$（见 (a),把a的结论代入上式中）。
因此

$$d_1 = \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{q_1^{\mathrm{T}} b}{\lambda_1}.$$

到此考试结束！本门课程也临近尾声了，新的知识也全部讲述完成！