2.5 行列式的性质

终于我们的视线从矩形矩阵转移到方阵了。主要是要掌握求行列式的方法与行列式的一些性质，掌握行列式一般求解过程之后这部分不是很难。由于这部分主要在于技巧的掌握，抽象理解部分并不是很多!

行列式是跟每个方阵都有关的一个数字。这个数字包含了这个矩阵的很多性质，例如之前介绍过的，方阵是否可逆可以根据行列式进行判断，行列式为 0，则方阵不可逆。

首先，行列式记法：$|\mathbf{A}|$。另外，我们还知道：方阵可逆，等价于其对应的行列式值不为 0
这是我们到目前为止对行列式的所有了解内容，那么接下来我们会介绍行列式的更多性质，这部分为我们了解行列式做了铺垫。而行列式本身是包含了方阵大量信息的一个数字，或者说行列式是一个方阵的特征。但是strang教授不想一上来就给出一大堆公式去计算行列式，所以从他的性质开始

性质一

对于单位阵 I，有：$|\mathbf{I}|$ = 1

性质二

交换两行后，行列式的值相反

由上面的两个性质我们可以得到：之前学习的置换矩阵的行列式值为 1 或-1!
比如：$\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=1,\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=-1$
由于后面介绍的性质需要一些行列式的基础，所以这里先给出二阶行列式的计算方法，便于我们理解接下来的性质：
$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=ad-cd$。

性质三

1.行列式按行提出矩阵中的系数，即：$\begin{vmatrix}ta & tb\\c & d\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$! 或者理解为：矩阵一行乘系数等价于：整个行列式乘系数。

2.行列式是一个线性函数，但是这个线性单独反映在每一行上。即：
$\begin{vmatrix}a+a^{'} & b+b^{'}\\c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^{'} & b^{'}\\c & d\end{vmatrix}$。

> tips：这里并不是:$|A + B| = |A| + |B|$,这里的线性运算并不作用于整个矩阵上，而是只反映在每一行上。大家可以用二阶行列式验证一下。

上面三个是基础的性质，下面的全部性质都可以由上面的三个推导得来！

性质四

如果两行相等，那么行列式等于 0！
这个性质的理解并不难，从线性相关角度说明矩阵不可逆，不可逆说明行列式为0。另外，还可以用性质二证明，交换相同两行而不变号，那行列式只能是 0 了。

性质五

从矩阵的行 k 减去行 L 的 i 倍，对应的行列式值不发生改变。（这就是我们经常做的消元步骤，这个过程不影响行列式。）
怎么证明呢?
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$变成了$\begin{vmatrix} a & b \\ c-ia & d-ib \end{vmatrix}$，然后
$\begin{vmatrix} a & b \\ c-ia & d-ib \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -ia & -ib \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
可见，从矩阵的行 k 减去行 L 的 i 倍，对应的行列式值不发生改变。

性质六

如果有一行为零，那么 A 的行列式为 0
比如：
$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5\times 0 & 5\times 0 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\times 5 & 0\times 5 \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ c & d \end{vmatrix} = 0$

性质七

上三角矩阵对应的行列式的值等于其对角线上元素的乘积！

当我们有一个上三角矩阵，我们是一定能把他们化为对角矩阵的。
$\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ 0 & d_2 & & \\ 0 & 0 & d_3 & \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3 d_4$
那为什么对角矩阵的行列式的值是对角线元素的乘积，原因如下：
$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = d_2 d_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = \ = d_4 d_3 d_2 d_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = d_4 d_3 d_2 d_1$
。由性质1知道单位矩阵的行列式值为1，到此证明完毕！

性质八

$|\boldsymbol{A}|$不为零，当且仅当 A 可逆。

这个其实我们早就说到过了！一个方阵如果是线性无关的，那么他一定是可以化为上三角矩阵的，那么行列式是对角线元素的积！如果方阵是线性有关的，那么他化简后一定会出现全0行，行列式的值是0！所以可以这么说，一个方阵，行列式的值要么是0，要么是化为上三角矩阵后对角线元素的积！

性质九

方阵乘积的行列式=方阵行列式的乘积，即：$|\boldsymbol{AB}|$= $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
如果要证明的话，我们可以通过矩阵乘法的视角来想：AB相乘，以前面为主体用列的视角来看，无非是每个列相乘，就是平方了一下！刚好与公式对应！

由此结论可知：
（1） 可逆矩阵的行列式与其逆矩阵的行列式互为倒数:$AA^{-1} = \boldsymbol{I} \to |A||A^{-1}| = 1$
（2）$|A^2| = (|A|)^2$(矩阵平方的行列式等于矩阵行列式的平方)
（3）$|A| = {}^n|A|$（k 为常数，A 为 n 阶矩阵，提出了每一行中的 k，那么就会由n个k相乘）
当然，如果A是奇异的，那么上面的公式都不成立！

性质十

$|\boldsymbol{A^T}| = ||$
这么证明呢：
$|\boldsymbol{A^T}| = || \to |^{TT}| = || \to |^T||^T| = ||||$，由于三角矩阵的行列式的值是对角线元素的积，所以他们相等！重点是这个性质，我们就可以把上面的9个性质从行带到列！这个思想很重要！

行交换的奇偶问题

最后教授提到了行交换的奇偶问题，这个问题很重要，因为行交换的奇偶性会影响最终值的正负号，所以置换矩阵行列式的正负性受其行交换次数影响。这个应该不难理解！

讨论课

找到下面四个矩阵的行列式的值：
A=$\begin{bmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{bmatrix}$
B=$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$

C=$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -4 & 5\end{bmatrix}$

D= $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\-1 & 0 & 4\\3 & -4 & 0\end{bmatrix}$

第一题：

$$|A|=\begin{vmatrix}101 & 201 & 301\\102 & 202 & 302\\103 & 203 & 303\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}101 & 201 & 301\\102 & 202 & 302\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}101 & 201 & 301\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

有两行一样的矩阵，那么行列式值为0！

第二题：

$$\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\0 & b-a & b^2-a^2\\0 & c-a & c^2-a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\0 & b-a & (b+a)(b-a)\\0 & c-a & (a+c)(c-a)\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\0 & 1 & b+a\\0 & 1 & a+c\end{vmatrix}=(b-a$$

第三题：
这题根本不用算，由乘法矩阵可以得到的是每一行都是（1，-4，5）的倍数，很显然他是奇异的，那么行列式为0！

第四题：
可知$D^T=-D$，然后然后我们知道$|D^T|=|D|$，那么说明$|D|=|-D|$，而|-D|是等于$(-1)^3|D|=-|D|$的。即$|D|=-|D|$，说明|D|等于0！

习题课

问题一

如果一个方阵 A 的每一行元素之和为零，求解 Ax = 0 并证明 $\mathrm{d}\,A=0$ 。
如果这些元素之和为 1，证明 $\mathrm{d}(A-I)=0$ 。这是否意味着 $\mathrm{d}\,A=1$ ？

解答：

- 若 A 的每一行元素之和为零，根据矩阵乘法则取 $x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 时，有 $Ax=0$ 。

  因此 A 存在非零的零空间，不是满秩的，不可逆，故 $\mathrm{d}\,A=0$ 。
- 若 A 的每一行元素之和为 1，则矩阵 $A-I$ 的每一行元素之和为零(因为$A-I$矩阵的，每一行元素之和就是0)。 根据第一问的结论，于是 $A-I$ 存在非零的零空间，故 $\mathrm{d}(A-I)=0$ 。
- 但 $\mathrm{d}(A-I)=0$ **并不**意味着 $\mathrm{d}\,A=1$ 。
  例如

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

每行元素之和为 1，而 $\mathrm{d}\, A = -1$。大家会问，$det(A - I) = det(A) + det(-I) = 0$，所以 $det(A) = 1$。但是其实这时一个陷阱，因为$det(-I) \neq -\mathrm{d}(I)$,而是 $= (-1)^n\, \mathrm{d}(I)$，矩阵中的关系是线性的！在我们举出的反例中，矩阵就刚好是违反的！