2.6 行列式公式和代数余子式

我们由上一讲得到的行列式的基础性质去推导出计算行列式的公式！但是在这之前大家可能会有点疑惑，我们由行列式的性质推导行列式公式，由最基础的3个性质推导出10个性质，那最开始的性质怎么来的，还有二阶矩阵行列式的计算公式怎么来的，这涉及到行列式的定义，行列式的绝对值可以看作是矩阵所代表的线性变换对面积的缩放因子。我们不需要知道这么深入，这里略过这一部分的讲解！

行列式公式

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$,结果是：0 + ad + (-bc) + 0，与我们上一讲说到的：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cd$结果一样。

观察上面的求解过程，不难发现，行列式其实取决于那些分解后非零的行列式的和，这些非零行列式有这样一个特点：各行格列均有元素。根据这个特点，我们可以简化更高阶的行列式解法。

当我们把问题扩展到三阶时得到：

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} +$

很明显，如果是 n 阶矩阵的话，得到的非零拆分一共有 n！种。拿这个三阶矩阵为例，非零拆分选各行格列元素时，第一行选择有3 种，第二行有 2 中，最后一行有 1 种，所以最后一共是 3！个矩阵相加的结果。

那么我们可以总结出一个公式：$|A| = \sum_{n!} \pm a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}\ldots a_{n\omega}$。通过这个公式我们可以推导出许多之前的性质，比如单位矩阵的行列式为1的原因！当然他还可以证明其他性质，我们这里不一一列举！

举个例子说说：

矩阵：$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

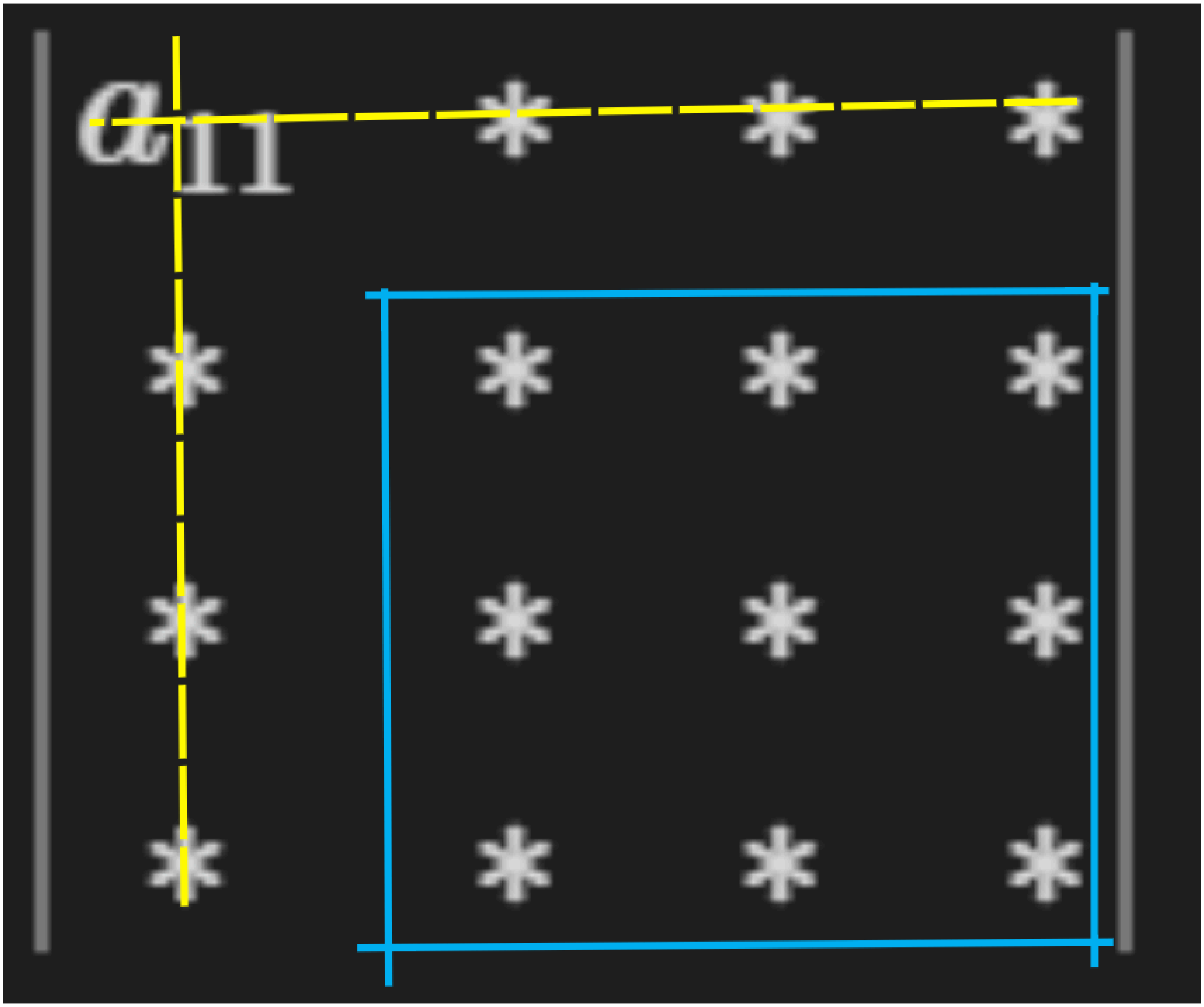
按照公式找，先确定每一行要选一个元素，先从第一行开始a_{13}，然后第二行就只能a_{22},第三行就只能是a_{31}，第四行是a_{44}，最后结果是（3，2，1，4)。同样如果刚开始第一行选a_{14}，那么第4行就只能选a_{41},那么第三行只能选a_{32}，第二行只能选a_{23}，最后结果是（4，3，2，1)。然后根据行的置换算出最后结果为0！

代数余子式

接下来我们说说代数余子式！其作用即是将 n 阶行列式化成 n-1 阶。

根据前面所讲的公式和求解例子的过程中，不难发现，在选元素做累乘时，例如从第一行中选了

第一个元素，则剩余因子从剩余的 n-1 行和 n-1 列中选取，于是剩余的因子组成一个 n-1 阶行列式，这就是所谓代数余子式。而反应到公式中就是提取公因式！给个图片参考一下：有一个矩阵A：



假设蓝色框中矩阵是B，那么$|A| = a_{11}|B|$。
其实就是将原来的公式中所有含a_{11}项放在一起提取公因式，对应的剩余因子就是代数余子式基础(当然还需要进一步考虑正负问题)。

刚才我们忽略掉了行列式正负的问题！比如在上文中的$|A| = a_{11}|B|$，在算出|B|时，我们还需要考虑的是取的正负问题，而正负问题怎么判定呢，其实有一个方法论的！如下：

$\boldsymbol{a_{ij}}$位置对应的代数余子式（记为$\boldsymbol{C_{ij}}$）为：去掉原行列式中第 i 行第 j 列后剩余元素组成的行列式值与a_{ij}的乘积的正或负值——当 i+j 为偶数时为正，奇数为负，可以理解为：
$(-1)^{i+j} \times$ 剩余元素组成的行列式值。
那么以一个4行4列的矩阵为例子，那么他的代数余子式的符号规律是：

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{a_{ij}}$对应的余子式：去掉代数余子式的正负符号就是其对应的余子式了。
所以现在行列式公式可以改为：$|\mathbf{A}| = \boldsymbol{a_{11}C_{11}} + \boldsymbol{a_{12}C_{12}} + \ldots\ldots + \boldsymbol{a_{1n}C_{1n}}$

> tips：当然这仅仅是沿第一行展开的形式——如果沿第 i 行展开则只要将 1 换成 i 即可。或者我们可以沿着列来展开：$|\mathbf{A}| = \boldsymbol{a_{11}C_{11}} + \boldsymbol{a_{21}C_{21}} + \ldots\ldots + \boldsymbol{a_{n_1}C_{n_1}}$，如果沿着第i列展开只要将1换成i即可。这个列展开由性质10可以证明。（本讲讨论课中的A矩阵你可以转置过来看，验证一下这个定理）

所以到此我们学习了三种计算行列式的方法：
（1）将矩阵 A 化成三角矩阵（最简单也是最常用的）
（2）使用代数余子式按一行展开计算（稍复杂）
（3）按行列式公式完全展开计算（很复杂）
但是3种方法的灵活搭配才会是最简单便捷的方法！
举个例子：

$$A_1 = 1, A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

我们发现$|A_1| = 1$，而A_2，A_3可以计算得到$|A_2| = 0, |A_3| = -1$。这里我们用的是法（2）！
然后我们计算$|A_4| = a_{11}|A_3| - a_{21}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$这就用到了法（3）！可以看出：
$|An| = |A_{n-1}| - |A_{n-2}|$
刚好的是有一个规律在这样类型的矩阵中：1，0，-1，-1，0，1刚好6个一个周期！

讨论课

$$有矩阵A = \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} x & y & y & y & y \\ y & x & y & y & y \\ y & y & x & y & y \\ y & y & y & x & y \\ y & y & y & y & x \end{vmatrix}$$

求出他们的行列式！

解答：求A的话，我们观察，当以第一行第一列的元素x为辅因子的时候，刚好下面组成一个上三角，当以第五行第一列的元素y为辅因子的时候，刚好上面有一个下三角，那么我们展开第一列得到的是：$|A| = x \times x^4 + y \times y^4 = y^5 + x^5$。求B，这个矩阵看起来很是麻烦的，每一任何思路，难道我们只能用大公式一一展开吗？就像srang教授说的，如果你对一个矩阵没有办法了，那就消元试试看！我们一步步来看：

$$B = \begin{vmatrix} x & y & y & y & y \\ y & x & y & y & y \\ y & y & x & y & y \\ y & y & y & x & y \\ y & y & y & y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & y & y & y \\ y-x & x-y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-x & x-y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y-x & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y-x & x-y \end{vmatrix}$$

，然后我们进行行列之间的消元，过

程如下：

$$\begin{vmatrix} x & y & y & y & y \\ y-x & x-y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-x & x-y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y-x & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y-x & x-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & y & 2y & y \\ y-x & x-y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-x & x-y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y-x & x-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-y \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} x & y & 3y \\ y-x & x-y & 0 \\ 0 & y-x & x-y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right.$$

。然后行列式就可以直接看出：$(x+4)(x-y)^4$
当然求解这两个行列式的方法有许多种，并不局限于这个，但是我是想告诉你的重点是灵活运用这三个方法的组合去求解行列式！

习题课

问题一

计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的行列式。

解答
首选**余子式展开法**。使用“行列式大公式”：
$\det A = \sum_{\text{所有排列 } P=(\alpha,\beta,...,\omega)} \text{sign}(P)\, a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega}$
对矩阵 (A) 的非零项仅有两项：

- $+1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = +1$（排列$(4,1,2,3)$，符号为负）
- $-1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$（排列$(1,2,3,4)$，符号为正）
  因此 $\det A = -1$
  比行交换法更快：
  $$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

问题二

对称的帕斯卡矩阵行列式为 1。若将第 n 行第 n 列元素减 1，为何行列式变为 0？（用规则 3 或余子式法。）

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} = 1 \quad (\text{已知}) \quad \Rightarrow \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 19 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{需解释})$$

解答

第 n 行第 n 列元素的变化（从 20 到 19）乘以其余子式，即 $(n-1)\times(n-1)$ 的对称帕斯卡矩阵：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 3 & 6\end{bmatrix}$$

我们求出改该子矩阵行列式为 1。因变化为“减 1”，整体行列式减少 1，从 1 变为 0。这个就是简单的计算证明，无需多说！