2.8 特征值和特征向量

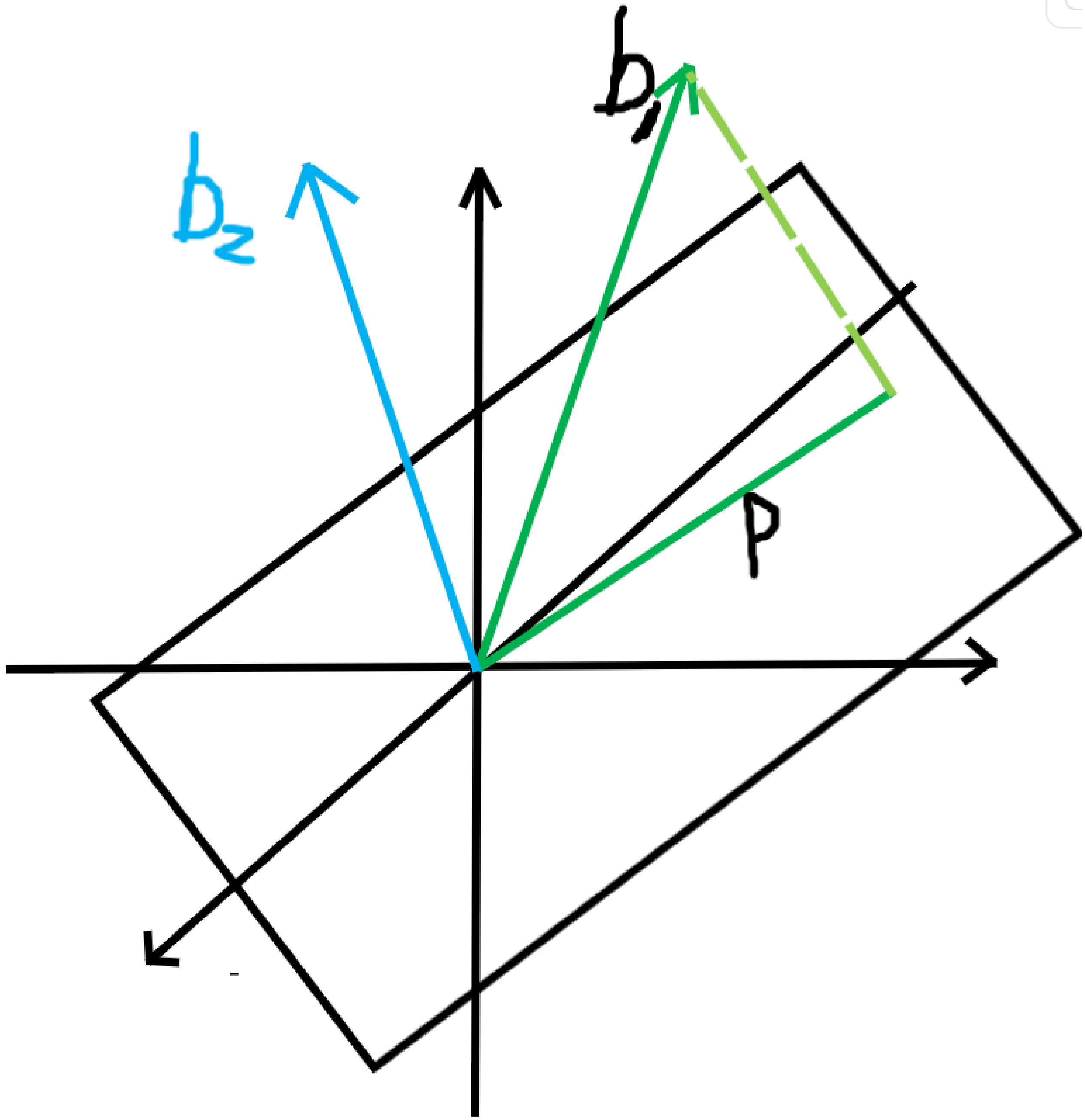
我们再一次进入到新的章节，特征值与特征向量！本讲内容就是对一些基础概念的说明，特殊例子的讲解和一些求解的技巧方法！并不困难！

特征值与特征向量

定义

首先什么是特征值，什么是特征向量！我们有一个矩阵方程：$Ax=b$。我们这个时候可以把A看成是一个函数，我们放进去一个向量x，会得到一个向量b！当b是等于x的倍数的时候（0倍或者负的倍数都可以），我们记作：$Ax=\lambda x(\lambda\text{可以为0或者负数})$。而此时称为特征向量，λ称为特征值！而且特征值和特征向量是针对方阵而言的！

下面我们通过一些特殊的例子来看看特征值与特征向量：
（1）当A的零空间不仅仅包含零向量时（A是不可逆矩阵），我们就可以得到Ax=0，或者Ax=0x。特征向量是x（在零空间中），0是特征值！但是注意了，零向量可不能作为特征向量！
在此我们做一个总结：
当矩阵为可逆矩阵，那么他的特征值一定不为0。而矩阵为不可逆矩阵时，特征值至少包含0！
（2）当A是一个投影矩阵。如图：



当$x = b_1$时，明显不是特征向量！但是当$x = P$时，这时就是特征向量了，而特征值是1（投影向量投到本身）。当$x = b_2$时，也是特征向量，这时特征值是0！

（3）当A是置换矩阵时，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。这个矩阵就是替换两行的内容的，那么明显向量$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$是特征向量，特征值是1和-1！

由此我们也得到一个结论：**特征值的和等于矩阵主对角线上元素的和（也称为迹！）**，还有的是特征值的积等于矩阵行列式（这个证明略过）。特征值的乘积等于矩阵主对角线元素的乘积，但是前提是这个矩阵是上或者下三角矩阵或者是对角矩阵，而当矩阵可以不通过行交换化简为上三角时，这个矩阵也是符合的！

求解方法

接下来我们要讨论特征值与特征向量的求解方法。
首先：$Ax=\lambda x \Rightarrow (A-\lambda I)x=0$，由这个等式看出，特征向量x在矩阵（A-λI）的零空间中，且矩阵（A-λI）的行列式等于0（矩阵不可逆！因为如果矩阵可逆，零空间就只有零向量了，就没有符合条件的特征向量了！）。以这些信息为基础去求解特征向量与特征值！
我们举个具体例子来熟悉求解流程：
$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$。然后我们得到矩阵$(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{bmatrix}$。那么由于这个矩阵行列式为0，那么我们得到$(3-\lambda)^2-2=0$，求解得到$\lambda=4 or \lambda=2$。那么当$\lambda=4$时，$(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，那么$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}x=0$，求解得到x=$\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$,当$\lambda=2$时，$(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}x=0$，求解得到$x=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$。
而且又有$\lambda_1\lambda_2=8$，即为行列式$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$的值，这也是一个重要结论，特征值之积为 A 矩阵行列式的值。

继续基于这个例子，我们来讨论一些特殊的情况：
当$A+3I$，那么它的特征值，特征向量将如何变化？证明如下：我们知道$Ax=\lambda x$。那么

$$(A+3I)x=Ax+3Ix=\lambda x+3x=(\lambda+3)x$$

也就是说，新的特征值变为$\lambda+3$，而对应的特征向量不会改变，因为等式两边同等的有$3Ix$ 与 $3x$。不会影响特征向量的值。但是如果我们加的不是单位向量而是普通的向量呢？A+B。我们求解矩阵（A+B）的特征向量时，Ax=λx和By=λy，他的特征向量不一样，那么就无法合并同类型，所以加上普通向量完全没有研究意义！

除此之外，还有值得一提的是求解中可能遇到的特殊情况。当我们有矩阵$Q=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,求解特征值与特征向量。$\lambda_1\lambda_2=1, \lambda_1+\lambda_2=0$。按照上面的求解过程得到：$\lambda^2+1=0$。这样他的解就只能是：i和-i！
我们发现 Q 是反对称矩阵($A^T=-A$)，而我们之前求的都是对称矩阵的特征值，也就是说，对称矩阵的特征值为实数，而反对称矩阵的特征值为虚数，这是两个极端。

讨论课

有矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$，找到$A^2, A^{-1}, A^{-1}-I$这三个矩阵的特征向量和特征值！
解：
$Av=\lambda v$，那么$A^2v=A(Av)=A\lambda v=\lambda Av=\lambda(\lambda v)=\lambda^2 v$，$A^{-1}v=A^{-1}\frac{Av}{\lambda}=A^{-1}A\frac{v}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}v$，$(A^{-1}-I)v=A^{-1}v-v=\frac{1}{\lambda}v-v=(\lambda^{-1}-1)v$
到此我们推导出来这些A的变形的特征向量与特征值与A的特征值与特征向量的联系！
现在我们仅仅需要求解出A的特征值与特征向量就可以得到他的变形的特征值与特征向量！

$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & 1-\lambda & -2\\ 0 & 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)$。解得他的特征值是1，2，3！

然后当λ=1时，$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$,那$|A-\lambda I|x=0$，解答x=$\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$。剩下的我就不求了，大家可以自己去求解！

习题课

问题 一

已知一个3×3矩阵B的特征值为0、1和2。仅凭这些信息，可以确定以下四个量中的哪几个？请给出答案（如果可以确定）：

a) B的秩
b) B^TB的行列式
c) B^TB的特征值
d)$(B^2+I)^{-1}$的特征值

解答：
a) 因为矩阵B有一个特征值为0，所以B是奇异矩阵（不可逆）。由于B是3×3矩阵，这意味着它的秩最多为2。又因为B有两个非零的不同特征值1和2，所以它的秩恰好为2。
b) 因为B是奇异矩阵，所以det(B) = 0。因此，det(B^TB) = det(B^T)·det(B) = 0。

c) 仅凭所给信息无法确定B^TB的特征值。例如：

- 若 B = $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$；，则 B^TB = $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$；
- 若 B = $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 B^TB = $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$。

显然，这两种情况下B^TB的特征值不同，因此无法仅凭B的特征值确定B^TB的特征值。

d) 设$p(t)$是一个多项式，若x是矩阵A对应特征值λ的特征向量，则有 $p(A)x=p(\lambda)x$(这是个重要结论，我们在讲座中，讨论课中有多个例子的证明！)。
我们还知道，若λ是A的特征值，则$1/\lambda$是A^{-1}的特征值。
因此，$(B^2+I)^{-1}$ 的特征值为：
$1/(0^2+1)=1$，
$1/(1^2+1)=1/2$，
$1/(2^2+1)=1/5$。

其实这个题很明显是可以推导出的，根据讨论课中的那个例子。所以我再强调一遍那个定理：设 $p(t)$是一个多项式，若x是矩阵A对应特征值λ的特征向量，则有 $p(A)x = p(\lambda)x$

**问题二

求以下矩阵A、B、C的特征值：

$$A = [123\,045\,006] B = [001\,020\,300] C = [222\,222\,222]$$

解答：

- 对于上三角矩阵A，其特征值即为对角线元素，因此A的特征值为1、4、6。
  这里我们得到一个定理：**上三角矩阵直接看对角线就能读出所有特征值**证明如下：- 上三角矩阵 T 的特征多项式为：
  $det(T - \lambda I) = (t_{11} - \lambda)(t_{22} - \lambda) \cdots (t_{nn} - \lambda)$, 它的根显然就是$t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{nn}$。
- 对于矩阵B，计算特征多项式：
  $det(B - \lambda I) = (-\lambda)(2 - \lambda)(-\lambda) - 3(2 - \lambda) = (\lambda^2 - 3)(2 - \lambda)$
  因此，B的特征值为 $\pm\sqrt{3}$和2。
- 对于矩阵C，计算特征多项式：
  $det(C - \lambda I) = (2 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 - 4] - 2[2(2 - \lambda) - 4] + 2[4 - 2(2 - \lambda)]$
  = λ^3 - 6λ^2 = λ^2(λ - 6)
  因此，C的特征值为6、0、0。

我们可以通过计算A和B的行列式来快速验证上述结果，并注意到C是一个奇异矩阵（行列式为0），这与特征值中有0是一致的。
这题看似是算特征值，其实是求行列式！