3.2 复数矩阵与快速傅里叶变换

之前我们曾经谈论过复数矩阵，但是对于它的运算与性质并没有进行展开，仅仅是在第二单元复习的时候讨论了一下。本节中我们介绍复数矩阵的运算等特征。并介绍一个重要的复数矩阵：傅里叶矩阵。其中重点介绍快速傅里叶变换，可以显著减小运算量。

复数矩阵

首先我们从简单的向量说起！
首先什么是复数向量，**“复数向量”指的是分量全部在复数域中的向量**，而不是“至少有一个分量是复数”。显然复数向量属于的n维复平面。那么对于复数向量，我们需要与实数矩阵区分出两点，第一点是模长的计算，第二点是内积的计算！
模长的计算，实数矩阵我们是这样求解的：Z^TZ，然后再开根号！而复数向量是得是先共轭再转置，这个在上一级证明对称矩阵性质一的时候说过！所以正确求解是：$\bar{Z}^TZ$，然后开根号！
比如复数向量$\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$（这也是复数向量哦，因为1可以看为1+0i），那么他的模长就是$\begin{bmatrix}1 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$，但是如果是$\begin{bmatrix}1 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$那得到的结果就是0，显然模长是零的只要是零向量！
同时，内积的求解，实数矩阵是y^Tx，而复数向量内积求解就是$\bar{y}^Tx$！
而他们都有一个专门的符号H，所以符号可以写为Z^HZ!那么$Z^HZ = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2$

那么我们也需要对复数对称矩阵进行重新的认识了！
我们之前说对称矩阵的一个充要条件的$A^T = A$。而对于复数对称矩阵就得是$A^H = A$。显然对称矩阵为满足这个性质，对称轴元素得是实数！
举个复数对称矩阵的例子：$\begin{bmatrix}2 & 3+i\\3-i & 5\end{bmatrix}$。而复数对称矩阵还是满足特征值都为实数（上一讲证明过），特征向量相互垂直的！
说到复向量正交，就是说有一组复数向量：$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$，那么满足$q_i^Hq_j\begin{cases}0(i \neq j)\\1(i = j)\end{cases}$
那么他们这一组正交基可以组成一个矩阵$Q = [q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n]$，那么$Q^TQ = I = Q^HQ$
而这样的矩阵我们称之为：酉矩阵。
自然**酉矩阵**有如下性质：$QQ^H = I$

傅里叶矩阵

说到酉矩阵，那么傅里叶矩阵就是其中最经典的一个！
傅里叶级数把周期函数（或信号）表示为不同频率的正弦、余弦之叠加：

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \cdots$$

当处理**有限长度**的数据集时，关键在于**离散傅里叶变换**。

> 在电气工程与计算机科学中，行列编号通常从 **0** 开始（而非 1），到 **n − 1** 结束。下文讨论傅里叶矩阵时，我们沿用此约定。

傅里叶矩阵定义为

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

其中

- $(F_n)_{j,k} = w^{jk}, \quad j,k = 0,1,\dots,n-1$；
- 复数 $w = e^{i\cdot 2\pi/n}$（因此 $w^n = 1$）。
  这个第二点的结论是怎么得来的呢，又是欧拉公式，由于这个知识点用到很多，所以我们还是来解释一下：只要记住一条最基本的欧拉公式：$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$
  把 θ 换成 2π/n，就得到$w = e^{i\cdot 2\pi/n} = cos(2\pi/n) + isin(2\pi/n)$
  它代表复平面上一个**幅角为 2π/n** 的单位向量（模长为 1，方向与正实轴夹角 2π/n）。
  再把这个向量自乘 n 次，相当于把幅角放大 n 倍：
  $w^n = [e^{i\cdot 2\pi/n}]^n = e^{i\cdot 2\pi} = cos(2\pi) + isin(2\pi) = 1 + 0i = 1$
  因此 w 就是“n 次单位根”——模 1、幅角 2π/n 的复数，自乘 n 次恰好回到 1。

该矩阵的列向量彼此正交大家可以验算证明；矩阵所有元素位于复平面的单位圆上，就是说矩阵所有元素模长都为1，这个大家也可以套用欧拉公式证明，
$w^{jk} = [e^{i\cdot 2\pi/n}]^{jk} = e^{ikj\cdot 2\pi/n} = cos(kj2\pi/n) + isin(kj2\pi/n)$，计算其模长就是1；将任一元素自乘 n 次都得到 1，就是所任何元素n次方都是1，我们计算$(w^{jk})^n = (e^{ikj\cdot 2\pi/n})^n = e^{ikj\cdot 2\pi} = 1$。
所以傅里叶矩阵是一个正交矩阵，乘以一个适当的系数就是一个标准正交矩阵！而傅里叶矩阵的作用就是记录下完成傅里叶变换过程的操作！

具体例子：F_4

取 $n = 4$，则 $w = e^{2\pi i/4} = i$，于是

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

对含 4 个数据点的向量做傅里叶变换，只需乘以 F_4。

验证可知 F_4 的列正交（计算时记得取共轭），但列长为 2，因而 F_4 并非酉矩阵。将每个元素除以 2 即可得到标准正交列的矩阵：

$$\frac{1}{4} F_4^H F_4 = I.$$

所以傅里叶矩阵的逆矩阵很好求，显然，他是一个性质优良的矩阵！

举个例子来看看傅里叶矩阵的妙处：

冲激信号示例

零时刻的冲激信号可表示为

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

其傅里叶变换为

$$F_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

> **结论**：单个冲激在所有频率上分量相等。不懂没关系，理解是一个变化的描述即可！当然如果你是通信专业的话就有关系了！

若再乘以 F_4 并除以 4，即可回到原信号：

$$\frac{1}{4}F_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{n}}F_n$ 是酉矩阵，因此“乘 F_n 再除以 n”即完成逆变换。因为傅里叶矩阵 F_4 的逆矩阵恰好是 $\frac{1}{4}F_4^H$，所以“再乘一次 F_4 再除以 4”就等于乘了逆矩阵，自然就把原来的信号还原了。

快速傅里叶变换（Fast Fourier Transform）

> 傅里叶矩阵可拆分为含大量零的子块；傅里叶本人可能未注意到。然而高斯发现了，却未意识到其重要性。(饶命，不是我评价的高斯和傅里叶，而是教授提到的一个史实！)

F_n 与 F_{2n} 之间存在一个优美的关系，其依据是

$$w_{2n}^2=w_n.$$

因为$w_n=e^{2\pi i/n},w_{2n}=e^{2\pi i/2n}$,显然就是平方关系！记住这个结论，这将是我们推导快速傅里叶变换的关键！
于是

$$F_{2n}=\begin{bmatrix}I & D\\I & -D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_n & 0\\0 & F_n\end{bmatrix}P,$$

下面我们来推导这个公式的由来!
其中 D 是一个对角矩阵，D是

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & w_{2n} & & & \\ & & w_{2n}^2 & & \\ & & & \cdots. & \\ & & & w_{2n}^{n-1} & \end{bmatrix}$$

P 是一个 $2n \times 2n$ 置换矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

那么我们这么来看:

$$F_{2n}x = \begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{bmatrix} Px ----(1)$$

x是任意的一个复数向量。P矩阵的作用就是把一个向量的偶数分量放到前面，奇数分量放到后面（注意是从0开始计数哦！）
先给符号
长度为 $2n$ 的输入向量写成

$$x = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1})^T$$

矩阵 P的作用P 只是把下标“偶数在前、奇数在后”重新排列:

$$Px = (x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n-2},\ x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n-1})^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{even}} \\ \mathbf{x}_{\text{odd}} \end{bmatrix},$$

其中

$$x_{\text{even}} = (x_0, x_2, \ldots, x_{2n-2})^T, \quad x_{\text{odd}} = (x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1})^T.$$

2 两个 n 点 FFT 同时作用把偶、奇两部分分别送进 F_n:

$$\begin{bmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{even}} \\ \mathbf{x}_{\text{odd}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \mathbf{x}_{\text{even}} \\ F_n \mathbf{x}_{\text{odd}} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\text{even}} \\ \mathbf{y}_{\text{odd}} \end{bmatrix}.$$

这一步得到两个长度为 n 的向量 $\mathbf{y}_{\text{even}}$ 和 $\mathbf{y}_{\text{odd}}$。
3.对角矩阵 D 是什么

$$D = \text{diag}(1,\ w_{2n},\ w_{2n}^2,\ \ldots,\ w_{2n}^{n-1}).$$

它把 $\mathbf{y}_{\text{odd}}$ 的每个分量 k 再乘一个相位 w_{2n}^{k}。

4.把结果拼回去
现在看（1）式右侧乘出来的结果：

$$\begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\text{even}} \\ \mathbf{y}_{\text{odd}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\text{even}} + D\mathbf{y}_{\text{odd}} \\ \mathbf{y}_{\text{even}} - D\mathbf{y}_{\text{odd}} \end{bmatrix}.$$

把这两个 n 维向量上下拼起来，就得到 $2n$ 维向量。

5.验证它就是 $F_{2n}\mathbf{x}$把 F_{2n} 的 (j,k) 元素写成 w_{2n}^{jk}，直接按定义乘 $\mathbf{x}$，会发现：

- 当 k 是偶数时，$w_{2n}^{j(2t)} = w_{n}^{jt} \quad \rightarrow \quad$ 对应偶数部分正好等于 $F_n\mathbf{x}_{\text{even}}$；
- 当 k 是奇数时，$w_{2n}^{j(2t+1)} = w_{2n}^{j}\, w_{n}^{jt} \quad \rightarrow \quad$ 对应奇数部分正好是 $w_{2n}^{j}(F_n\mathbf{x}_{\text{odd}})_t$。

把这两部分合起来，和步骤 4 得到的

$$\mathbf{y}_{\text{even}} \pm D\mathbf{y}_{\text{odd}}$$

完全一致。因此

$$F_{2n}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n & 0 \\ 0 & F_n \end{bmatrix} Px$$

这就是（1）式。

换句话说： P 把 x 拆成偶/奇；

- 两个 F_n 分别做 n 点 FFT；
- 再用 $\begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix}$ 做“蝶形合并”。
  每一步只有 $O(n)$ 工作量，于是 $2n$ 点变成 2 个 n 点外加 $O(n)$ 额外运算，递归下去就是 FFT。

因此，一个 $2n$ 点傅里叶变换 $F_{2n}\mathbf{x}$——原本看似需要

$$(2n)^2 = 4n^2$$

次运算——现在可以改用两次 n 点傅里叶变换（共 $2n^2$ 次运算）加上两次非常简单的矩阵乘法（大约 n 次乘法）来完成。矩阵 P 先把向量的偶数下标分量

$$x_0, x_2, x_4, \ldots$$

选出来排在前面，然后排奇数下标分量——这一计算可以非常迅速地进行。

于是，我们可以通过对向量先分出奇偶分量，再分别对两半各做一次 32 点傅里叶变换，最后通过一个涉及对角矩阵 D 的过程把两部分重新组合，来完成对一个长度为 64 的向量的傅里叶变换。

$$D=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & w & & & \\ & & w^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & w^{n-1}\end{bmatrix}.$$

当然，这两个 F_{32} 又可以各自拆成两个 F_{16}，依此类推。最终，我们不再用大约$\frac{1}{2}n^2$次运算去乘 F_n，而是只用大约

$$\frac{1}{2}n\log_2 n$$

次运算就得到同样的结果。

一个典型的情况是

$$n=1024=2^{10}$$

。直接乘 F_n 需要超过一百万次计算。快速傅里叶变换只需

$$\frac{1}{2}n\log_2 n=5\cdot 1024=5120$$

次计算，快了 200 倍！
这之所以可行，仅仅因为傅里叶矩阵是列正交的特殊矩阵。

> 内心os：这节课过于烧脑，推导以及理解起来太难，可以说FFT是这门线性代数课中最难的部分，FFT的应用十分广泛，在科学计算中更是十分常用，大家如果要理解，任重道远，希望大家拜读教材，进一步理解！

在下一讲中，我们将回到纯实数，并学习在应用中最常出现的正定矩阵。

讨论课

我们有一个可对角化矩阵A：

$$\begin{bmatrix}2 & 1-i\\ 1+i & 3\end{bmatrix}$$

找出这个矩阵的特征值矩阵和特征向量并写出他的对角化形式！

首先求解特征值：

$$\begin{bmatrix}2-\lambda & 1-i\\ 1+i & 3-\lambda\end{bmatrix}$$

那么得到等式：

$$(2-\lambda)(3-\lambda)-(1+i)(1-i)$$

解得特征值为1或者4！

当特征值为1时，得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

得到解为：$\begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix}$
当特征值为4时，得到：

$$\begin{bmatrix} -2 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

得到解为：$\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$
那么我们得到了特征值矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

特征向量矩阵是：

$$\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}$$

而要求出他的对角化形式，需要特征向量矩阵的逆矩阵！而这个矩阵差一点能够成为**酉矩阵**，所以我们让他成为**酉矩阵**，那么就是$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}$，而他的逆矩阵就是他的转置共轭矩阵为：$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$
所以对角化形式是：$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$!

习题课

问题一

求解F_2
首先我们知道的初始是$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w \end{bmatrix}$
而此时$w = e^{i2\pi/2} = e^{i\pi} = cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$
所以为$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

问题二

找出用于以下分解的矩阵 D 和 P：

$$\begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} P = F_4$$

然后通过乘法验证你的答案。

解答

我们在上一题中计算得出：

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

矩阵 D 我们套用公式，求解$w_{2n} = e^{i2\pi/4} = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

而 $-D$ 则包含另外两个根（即 -1 和 $-i$）。
矩阵 P 是一个置换矩阵，它将输入向量的偶数分量排在前面。对于 F_4，这意味着将第 1 个和第 2 个分量交换位置：

$$P \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

因此：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最后，我们通过乘法验证结果：

$$\begin{bmatrix} I & D \\ I & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算后得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} = F_4$$