3.6 线性变换以及其对应矩阵形式

在许多课程中，线性变换的概念往往会比矩阵的概念先给出，而在这门课中，我们几乎是放到最后来讲！这是为什么呢，因为线性变换的了解，其实根本不需要矩阵的概念，（所以可以在矩阵学习之前就讲解线性变换！）但是线性变换却可以渗透与我们之前学过的所以内容（四个子空间，特征值，行列式等等！），而且线性变换也有矩阵的形式，所以我们在学完矩阵的内容后再来学习线性变换！也就是说这种几何化的方法最初避免了坐标的使用，但当需要进行计算时，坐标和矩阵最终仍是必不可少的。

线性变换

什么是线性变换：

线性的定义

一个变换 T 是线性的（把T理解为一个函数，是一个变换的工具），如果满足：

$$T(v+w)=T(v)+T(w)$$

以及

$$T(cv)=cT(v)$$

对所有向量 v, w 和所有标量 c 成立。等价地，也可以表示为：

$$T(cv+dw)=cT(v)+dT(w)$$

对所有向量 v, w 和标量 c, d 成立。值得注意的是，必然有 $T(0)=0$，否则 $T(c\cdot 0)=cT(0)$ 就不可能成立。

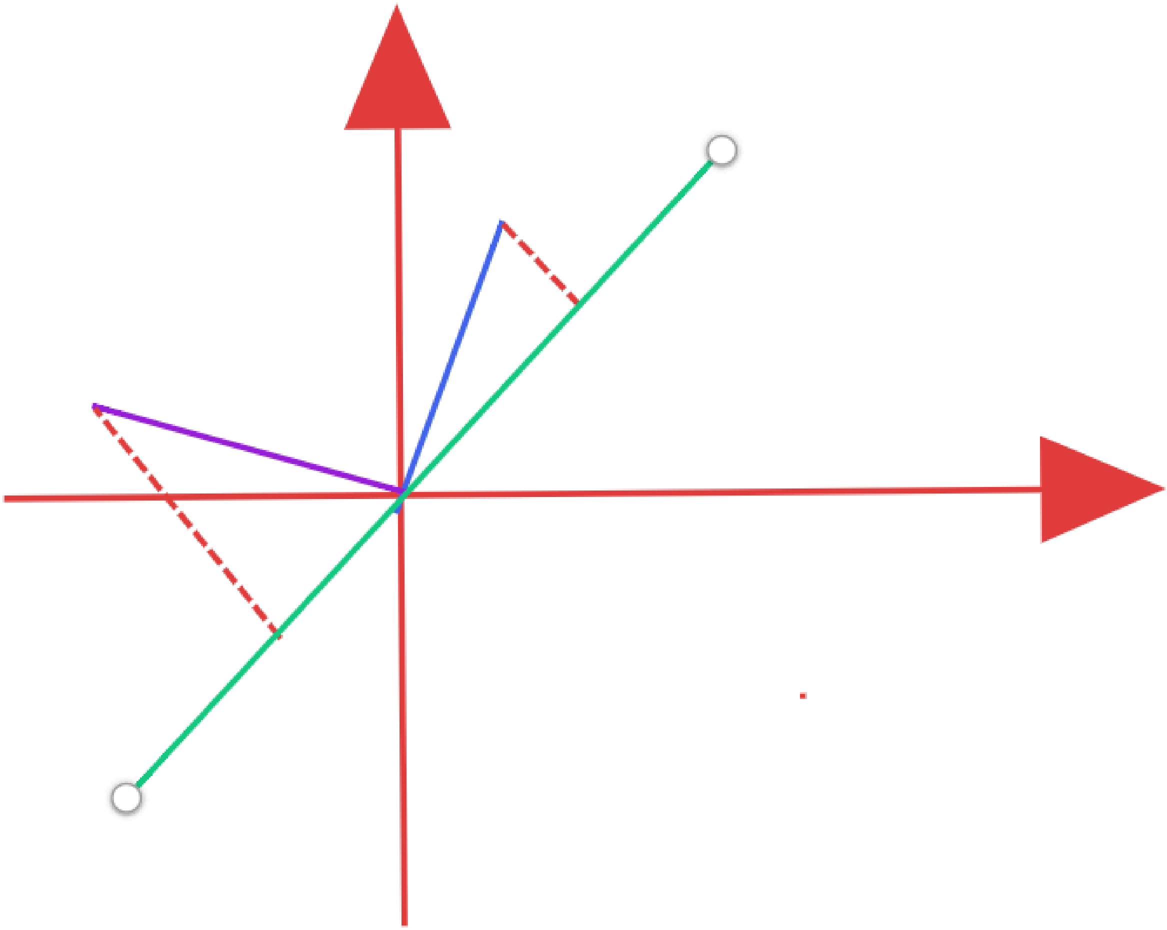
变换有许多种，下面我们举出三个例子：

例1：投影

我们可以将投影描述为一种线性变换 T，它将 $\mathbb{R}^2$ 中的每个向量映射到 $\mathbb{R}^2$ 中的另一个向量，即：

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

该映射的规则是将每个向量 v 投影到某条直线上的向量 $T(v)$。投影是一个线性变换。
如图：



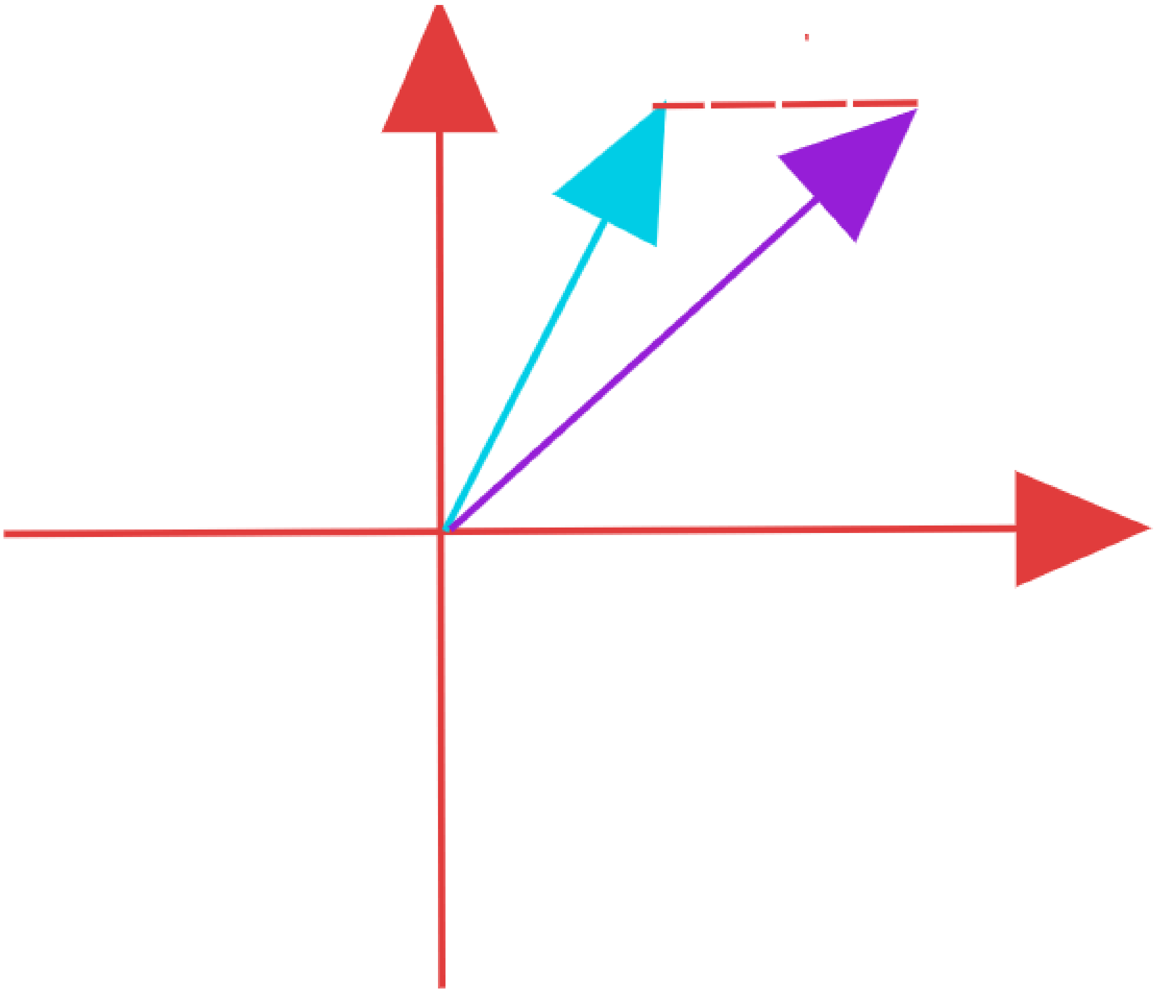
两条紫色线投影到绿线上！这就是一种变换

例子2：平面平移

考虑变换 $T(v) = v + v_0$，它将平面上的每个向量平移了一个固定的向量 v_0（下图的红色虚线）。这不是线性变换，因为：

$$T(2v) = 2v + v_0 \neq 2T(v)$$

如图：



这就是平面向量的平移！

例子3：取模

变换 $T(v) = \|v\|$ 将任意向量映射为其长度，也不是线性变换，因为当 $c < 0$ 时：

$$T(cv) = \|cv\| \neq cT(v)$$

也就是变换了向量方向后长度不变！

例4：旋转45°

这个变换 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 将输入向量 v 绕原点逆时针旋转45°，输出为 $T(v)$。我们可以无需坐标就能描述这个变换，并验证它是线性的。因为旋转后相加或数乘对线性变换运算无影响。所以这个操作 T 是线性变换。

所以上面4个例子只有一个是线性变换，然而在线性代数这门课中，值得研究且相关性强的只有线性变换！从现在起，我们只研究线性变换。

整体视角

用几何方式描述变换的一个优势是，它帮助我们把握整体视角，而不是只关注变换对单个点的影响。例如，我们能迅速看出旋转45°会如何改变平面上的一栋“房子”的图像。如果变换用矩阵而非旋转来描述，就很难猜测出这栋房子会被映射成什么样子。但是不代表着矩阵表示无意义，那么接下来我们就来讲解如何用矩阵描述变换！

引入坐标（矩阵登场）

我们上述讨论的所有线性变换都可以用矩阵来描述。从某种意义上说，线性变换就是矩阵乘法的抽象描述，如下例所示。

例5：$T(v) = Av$

给定矩阵 A，定义变换 $T(v) = Av$。（就是说矩阵A记录了这个操作过程！）这是一个线性变换，因为他满足如下性质：

$$A(v + w) = Av + Aw, \quad A(cv) = cAv$$

那么我们接下来引入一个具体的矩阵看看。

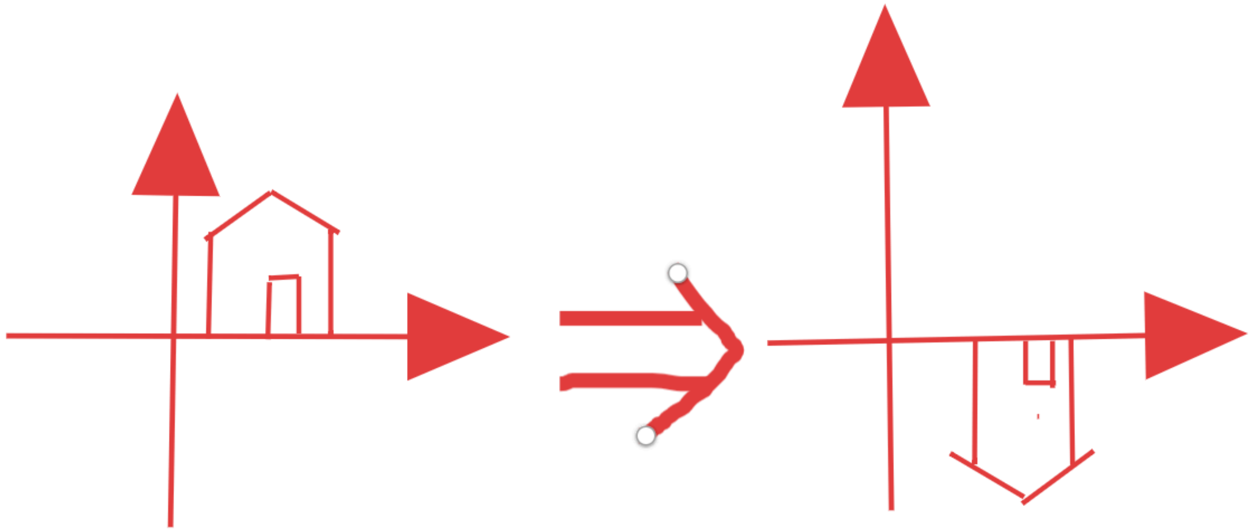
例6

假设：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

如何几何地描述变换 $T(v) = Av$?
假设V是一大票平面上的向量，这些向量组成了一个二维平面上的一个小房子。然后对其进行变换，数学表达就是：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
显然当我们用 A 乘以一个 $\mathbb{R}^2$ 中的向量 v 时，向量的 x 分量不变，而 y 分量取相反数。因

此，变换 $v \mapsto Av$ 是将 xy 平面沿 x 轴进行反射。那么这个小房子就反过来了!就像这样：



不仅仅是如此，用矩阵还可以有一些用几何描述无法触及的变换！

例5

如何找到一个线性变换 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$，将三维空间映射到二维空间？（就是把一个三维空间的向量转化到二维空间中）只需任选一个 2×3 的矩阵 A，定义 $T(v) = Av$ 即可。根据矩阵乘法，最后结果是一个 2×1的向量。他在二维空间中！

所以这没有什么复杂的，任何一个线性变换，都会有一个矩阵去描述他！

如何描述 $T(v)$

我们需要多少信息才能确定所有 v 的 $T(v)$？如果我们知道 T 如何变换单个向量 v_1，利用线性性质，我们就能计算任意标量 c 下的 $T(cv_1)$。如果我们知道两个线性无关的向量 v_1, v_2 的变换结果，我们就能预测 T 如何变换由 v_1, v_2 张成的平面内的任意向量 $cv_1 + dv_2$。如果我们想知道所有输入空间 $\mathbb{R}^n$ 中向量的变换结果，只需知道基向量 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 的变换结果即可。因为任意输入空间中的向量 v 都可以写成基向量的线性组合，而 T 是线性的：

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \quad \Rightarrow \quad T(v) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_nT(v_n)$$

也就是说只要知道空间中的一组基的变换结果，那么我们就可以知道空间中其他向量的变换结果！我们仅仅需要基底变换结果的线性组合就可以得到变换的结果！

而且值得一提的是，这就是我们从无坐标的线性变换到基于坐标的矩阵的转换方式。这里的 c_i 就是坐标。一旦选定基，空间中的每个向量都可以唯一地表示为这些基向量的线性组合，其系数即为该向量在该基下的坐标。

坐标来源于基；改变基就会改变空间中向量的坐标。我们知道在笛卡尔坐标系下。坐标就是x，y——这实际上是取坐标轴上的一组单位向量作为基向量的结果。这就是标准基！我们并不总是使用标准基——有时也会使用特征向量基或其他基。这要根据现实情况而定！但是大部分情况都是使用的标准基！

举一个标准基的例子，一般在三维空间中，我们都是以 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，那么向量 $\begin{bmatrix}3\\2\\6\end{bmatrix}$ 就可以表示为 $3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,所以他的坐标就是(3,2,6)！如果我们选择其他基，那么坐标就会改变！
到此我们成功引入坐标，我们就可以用坐标表示向量了！

那么现在我们如果有一个线性变换，我们怎么用矩阵表示他?

线性变换的矩阵表示

给定一个线性变换 T，如何构造一个矩阵 A 来表示它?

我们需要选择两个基：输入空间 $\mathbb{R}^n$ 的基 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 和输出空间 $\mathbb{R}^m$ 的基 $w_1, w_2, \ldots, w_m$（但是注意，后面的基是可以由前面的基T来的，就是$w_1 = T(v_1)$）。我们希望找到一个矩阵 A，使得：

$$T(v) = Av$$

其中 v 和 Av 的坐标由上述基给出。

矩阵 A 的第1列由 $T(v_1)$ 在基 $w_1, w_2, \ldots, w_m$ 下的坐标构成：

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m$$

类似地，第 i 列由 $T(v_i)$ 的坐标构成：

$$T(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \cdots + a_{mi}w_m$$

由于我们对每个基向量 v_i 保证了 $T(v_i) = Av_i$，且 T 是线性的，因此对输入空间中所有向量 v 都有 $T(v) = Av$。一句话：**把输入向量在输入基下的坐标，映射到输出向量在输出基下的坐标**，这就是矩阵A的作用，改变坐标！

> tips：到这里大家是不是有点懵，在上面不是说知道输入空间的基的变换结果，就可以由输入空间的基的变换结果线性组合出其他任何向量的变换结果吗，那为什么输出空间的基是与输入空间的基的变换结果不一样！首先前面的这是没错的，但是这不意味着输入空间的基的变换结果就是输出空间的基，其实不是，输入空间所有的变换结果，并不等同于整个输出空间，而是输出空间的子集！所以可以这么说，输入空间的基变换后的结果其实是输出空间子集的基，而这个子集是可以包含所有输入空间向量的变换结果的！那有人问为什么不只研究这个子集空间，而是要找出一个更大是输出空间包含这个子集！这是因为我们事先并不知道空间到底多大！所以我们开始就要搞一个足够大的空间包含他！

下面我们就为大家举出一个具体的例子：
在投影变换的例子中，输入和输出空间都是二维的（$n = m = 2$），变换将每个向量投影到某条直线上。此时，输入和输出使用相同的基是合理的（这是前提条件！）。为了简化计算，我们选 v_1 为投影方向上的单位向量，v_2 为与之垂直的单位向量。于是：

$$T(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1v_1 + 0 \cdot v_2$$

因此，投影变换的矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

没错啊，这个矩阵A就是一个投影矩阵，但是他可不是标准基下的哦，而是在投影方向与垂直投影方向上的为基！视角放回矩阵A，那么矩阵A的特征向量是$(1, 0), (0, 1)$。上面我们规定了基是沿着投影方向与垂直方向的，按照坐标系的求解法，刚好基的坐标就是(1,0),(0,1)。（这都是基于新的基下的坐标，不是标准基！）

这是一个非常简洁的矩阵！如果我们选择的基恰好是特征向量，那么变换的矩阵将是对角矩阵Λ，其对角线元素就是特征值。这是一个定律！

为了说明基选择的重要性，我们尝试用标准基来描述将平面投影到45°角直线上的变换。如果我们选择：

$$v_1 = w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则投影矩阵为：

$$P = \frac{aa^T}{a^Ta} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

我们可以通过画图验证这个矩阵是正确的，但用特征向量基计算会更简单。

到此我就觉得是时候说说特征向量的本质了：
首先一个矩阵就代表着一个线性变换！
特征向量 v 在经过矩阵 A 所代表的线性变换后，并没有改变方向，只是被拉伸或压缩了 λ 倍。
从几何视角来看：想象一个三维空间，你有一个矩阵 **A** 代表一个线性变换，比如旋转、拉伸或投影。 **普通向量：** 大多数向量在变换后，不仅长度会改变，方向也会发生偏转。比如，一个指向北方的向量被变换后，可能指向东北方，并且长度也变了。 **特征向量：** 但**特征向量是那个特别的方向**。当你用变换 **A** 作用在它上面时，它**仍然指向原来的方向**（或正好相反），只是长度变成了原来的 **λ** 倍。
所以明白为什么以特征向量为基，会使得计算简单了吧！
当然，“方向不变、只被缩放”是**所有**线性变换都可能出现的现象，而**不仅限于投影**。投影只是最容易想象的！下面三个也是，但是就比较复杂了：

- 纯缩放：A=diag(2,3)，x 轴方向 λ=2，y 轴方向 λ=3；
- 旋转+缩放：A=[cosθ −sinθ; sinθ cosθ]·2，旋转 90° 并放大 2 倍，复特征值 ±2i，对应复特征向量；

- 剪切：A=[1 1;0 1]，x 轴方向 λ=1，向量 (1,0) 不变形。

最后来看看最后一个特殊的例子吧：

例6：微分算子

设变换 T 为导数运算（求导也是一个线性变换哦！）：

$$T(c_1+c_2x+c_3x^2)=c_2+2c_3x$$

输入空间为二次多项式构成的三维空间，基为：

$$v_1=1,\quad v_2=x,\quad v_3=x^2$$

输出空间为二次多项式空间的一个二维子空间，基为：

$$w_1=1,\quad w_2=x$$

这是一个线性变换！我们可以构造矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

于是变换可表示为矩阵乘法：

$$T\left(\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_2\\2c_3\end{bmatrix}$$

结论

对于任意线性变换 T，我们都能找到一个矩阵 A 使得 $T(v)=Av$。如果变换可逆，则逆变换的矩阵为 A^{-1}。两个变换的复合 $T_1:v\mapsto A_1v$ 和 $T_2:w\mapsto A_2w$ 对应的矩阵为 A_2A_1。这就是矩阵乘法的由来！

讨论课

当然了，讨论课认然是让大家熟悉计算流程！

这次我们讨论的线性变换是转置，这个大家很熟悉了！
（1）为什么转置是线性变换，如果我们称转置操作为T，那么T^{-1}是什么？
首先$T(A+B)=(A+B)^T=A^T+B^T=T(A)+T(B)$
然后$T(c\times A)=cA^T=cT(A)$所以他是线性变换！

而对于转置操作，我们这么来想，先转置一次，列变成行，行变成列，这个时候我们再转置一次，行变成列，列变成行，变回去了！而T^{-1}就是一个逆操作，变回原来的矩阵，所以转置操作的逆操作就是操作本身。所以

$$T^{-1}=T$$

（2）在下面两组基的情况下，转置操作的矩阵是什么！

$v_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},v_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

输入输出共用上面同一个基，求出具体矩阵T！我们发现上面的基就是2维矩阵的基！

首先：$T(v_1)=v_1,T(v_2)=v_3,T(v_3)=v_2,T(v_4)=v_4$

那么变换结果的线性组合，第一列为：(1,0,0,0)

第二列等于：(0,0,1,0)，第三列等于：(0,1,0,0)，第四列是：(0,0,0,1)！（上面我们说过计算过程，这一步就是每一列等于对应的基变换结果等于输出基的线性组合的系数！）

所以结果矩阵是$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

我们来验证一下：随便来个矩阵$\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}$,那么这个矩阵的坐标是(2,3,4,5)，而他的转置结果是$\begin{bmatrix}2&4\\3&5\end{bmatrix}$，他的坐标是(2,4,3,5)！那么$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\3\\5\end{bmatrix}$,验证正确！

$w_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},w_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},w_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},w_4=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

同样输入输出共用上面同一个基，求出具体矩阵T！

同样$T(w_1)=w_1,T(w_2)=w_2,T(w_3)=w_3,T(w_4)=-w_4$

那么对于矩阵是$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$。

习题课

问题 1：

考虑一个变换 T，它将每个点到原点的距离变为原来的两倍，但不改变这些点相对于原点的方向。在极坐标系中，这个变换可以表示为：

$$T(r,\theta)=(2r,\theta).$$

a) 判断：T 是一个线性变换吗？（回答“是”或“否”）
b) 用笛卡尔坐标系（xy 坐标）描述这个变换，并通过验证该变换确实将向量的长度变为原来的两倍来检查你的答案。
c) 如果你对 (a) 的回答是“是”，请找出 T 的矩阵表示；如果对 (a) 的回答是“否”，请解释为什么 T 不是线性的。

解答：

a) **是**。从向量角度看，$T(\mathbf{v})=2\mathbf{v}$，因此：

- $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$
- $T(c\mathbf{v}) = 2c\mathbf{v} = cT(\mathbf{v})$

b) 在笛卡尔坐标系中，这个变换可以表示为：

$$T(x, y) = (2x, 2y).$$

我们知道向量 (x, y) 的长度为 $\sqrt{x^2 + y^2}$，经过变换后的长度为：

$$\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

这验证了变换确实将向量的长度变为原来的两倍。

c) 我们来求解，首先如果没有声明特别的基，那么输入空间和输出空间都是用标准基！
那么在二维空间中，基是(1,0)，(0,1)。那么T(v_1)=2(1,0)。所以第一列是（2，0）。同理第二列是（0，2）。所以矩阵是：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

问题 2：

请描述一个变换，它保持零向量不变，但它不是一个线性变换。

解答：
如果我们仅限于“简单”的变换，这个问题并不容易解决！

一种解决方法是找到一个在平面的不同部分表现不同的变换。例如，考虑变换 T 满足：

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

但此时：

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

而：

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

这个例子并不满足要求，因为这个变换实际上是线性的（恒等变换）。

另一种方法是使用非线性函数来定义变换。例如，考虑变换：

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2\\y^2\end{pmatrix},$$

此时：

$$T\left(c\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}cx\\cy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c^2x^2\\c^2y^2\end{pmatrix}\neq c\begin{pmatrix}x^2\\y^2\end{pmatrix}=cT\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

因此这个变换不是线性的，且显然零向量 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 保持不变。