1.8列空间与零空间

对子空间的补充

在这之前我们提出一个定理，一个在这之前没有来得及提出的定理。还记得我们在1.7讲的讨论课中的问题一吗，问两个子空间的交集是什么，答案是零空间。那么零空间是不是一个子空间，很明显是的。所以我们说对于两个空间S,T的交集所形成的更小的空间V，他同样是子空间！为什么呢，当我们在这个空间中选取基的时候，很明显，他们即来自S，也来自于T，那么他们的加法结果，肯定是即在S中也在T中。数乘也是如此！那么这个定理就是成立的！所以我们说两个空间的交集一定是一个子空间。但是交集不一定是零空间！

列空间

我们在1.7中对列空间以及有了一个基础的讲解。接下来我们继续对他的讨论！

首先我们有这么个矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

我们来看看这个矩阵的列空间是什么几维空间的子空间（根据我们上讲的内容）。我们看到A矩阵中每个列向量都有4个分量，所以很显然，A的列空间是4维空间的子空间！那么他有可能填充满整个思维空间吗，或者说他的列空间等于4维空间吗！答案是不能的。我们可以这么认为（在n维空间中，要想让向量们的线性组合填满整个空间，至少需要n个向量。这个定理我虽然无法给你严谨的数学证明，但是这是可靠的！）。当然，我们也可以结合线性方程来想。我们看成是AX = b，这就是一个四个方程，三个未知数的线性方程组。那么问题就转变成了是否所有的b都有解！我们知道，n个方程无法解决n+1个未知数，同样反过来也是成立的！

既然提到了AX = b，那么我来问大家一个问题：AX = b中，我们说是否所有的b都有解与A矩阵是否线性相关是充要关系吗？我们在1.2中讨论过这部分内容，但是没有系统性的去讲解！答案是NO，他们的关系是这样的：如果A矩阵线性相关，那么不是所有的b都有解。但是如果不是所有的b都有解，A矩阵不一定是线性相关的！其实我们经过对空间的了解之后，是否所有的b都有解可以等价于**矩阵 A 的列空间是否等于整个** R^n，当A的列向量无法张成整个空间的时候，答案自然是否定的！所以当我们以空间视角去理解的时候，我们再去看待：是否所有的b都有解与A矩阵是否线性相关的关系时，其实我们发现，管你相关不相关，看的是你的列空间大小！如果你的列空间很小，比如A这样，在4维空间中只能张成一个三维甚至更低维度的空间，你是线性无关又如

何，还是无法解决所有的b，但是如果A变成了

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&1&2&1&3&7\\2&1&3&1&9&9\\3&1&4&1&6&8\\4&1&5&1&5&6\end{bmatrix}$$

这样，就算你是线性相关的，我照样可以形成所有的b！

现在我们更进一步，在b是怎么样的情况下，无论A是什么样子，我都可以解出对应的X。

首先我想到的是当$b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$的时候，那么我们一眼看出$x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$。还有没有特殊情况呢，有的，比如当$b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，我们看出来$x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，当$b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$。当$b=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$时，$x=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，没错，就是这样简单！但是还有没有其他的情况呢，有的，**只要是b在A的列空间中，那么我们都是可以解出X的，只是运算量的大小而已，反之则无解！**
比如例子中的A，显然他的列空间是一个平面（第三列可由前面两列相加得到），所以b如果在A的这个平面中，那么是有解的！

零空间

我的理解是他是解空间的一种，虽然不知道严不严谨。还是用到前面那个矩阵A，我们还是把视角落到线性方程上面。那么

$$AX=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$$

当我们让b=0的时候，那么找出所有解X，那么零空间就是所有解向量张成的空间！
显然，$x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$是一定满足的，所有矩阵都满足这一点。那么还有吗？还有，比如：$x=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}$，以及一切的$x=\begin{bmatrix}c\\c\\-c\end{bmatrix}$。那么他的零空间显然是在三维空间中的一条直线！

好，现在我们考虑一下，零空间是不是都是子空间。答案是肯定的！（简单证明，比如由俩个解X，Y，那么A(x+y)=Ax+Ay=0+0=0，A(cx)=c(Ax)=c0=0，所以他线性组合后的结果都在零空间中）相信不难理解！那么我们推广一下，当b是非0的时候，是否还成立，或者这么问，是不是所

有解空间都是子空间呢，答案是否定的，其实很好证明，比如当$b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$时，$x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$显然不是他的解，那么解空间是不包含原点的！一个不包含原点的空间就一定不是子空间了！

通过上面的例子我们其实可以发现去形成一个子空间的方式有两种，一种是给几个向量，让他们线性组合，张成一个空间去形成子空间。一种是给一个方程组，让所有满足特定结果的解向量张成一个空间形成子空间！

讨论课

当我们给三维空间的子集$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$，判断在不同情况下他张成的空间是否是子空间。意思就是说给出的向量是可以在一定条件下任意改变的，在所有的变化集合在一起的时候，形成的空间是不是子空间。下面给出条件：

（1）$b_1+b_2-b_3=0$

（2）$b_1b_2-b_3=0$

（3）$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

（4）$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

在这四个不同的条件下，哪些可以张成子空间，哪些不行，我们一一来看！
第一个：

我们可以把他写成矩阵形式（这是线性代数的艺术）：$(1,1,-1)\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=0$

我们可以写成这样，然后我们会发现我们要寻找的空间正是这个方程的零空间，那么零空间一定是子空间，所以第一个条件是可以的！

第二个：

我们可以通过反证法！比如当b_1,b_2,b_3都是1的时候，是成立的。也就是说向量$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$是在这个所形成的空间中的。如果这个空间是子空间的话，那么$n\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$也是在这个空间中的。但是我们发现

$2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$是不满足条件2的，所以他不满足子空间的条件！

第三个：

我们可以通过画图来发现端倪，发现$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$他们是在同一平面上的，也都不共线，不共线且在一个平面上，那么一定是可以张成整个二维平面的，那么一定是子空间了。当然，由于三维图片不好画，那么我们再给出代数的解答。$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，那么第三个条件可以替换为$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = (c_1 + \frac{1}{2})\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + (c_2 + \frac{1}{2})\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，那么我们看向结果，我们发现这就是一个任意线性组合的式子，那么一定是一个子空间！

第四个：

还是先画图，我们发现$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$不再同一平面了。怎么办，没错，反证法。怎么反证，想想是否包含零向量就可以决定他的生死了。其实我们画出他们的三维图像后发现，后两个向量在同一平面，可能相加结果为0，但是不再一个平面的怎么样都不会被消除，所以一定不包含零向量。如果大家画不出，我们也有代数的证明。$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = 0$，证明这个成立，我们关注到第二个分量，那么$1 + c_1 0 + c_2 0$可能等于0吗，不可能，所以条件4不满足！

习题课

问题 一：

（来源于 Gilbert Strang 的《线性代数导论》3.1 节第 30 题）假设 S 和 T 是向量空间 V 的两个子空间。

- **a)** 定义：和 S + T 包含了 S 中任一向量 s 与 T 中任一向量 t 的所有和 s + t。证明 S + T 满足向量空间的要求（加法和标量乘法）。
- **b)** 如果 S 和 T 是 R^m 空间中的两条直线，那么 S + T 与 S ∪ T 有什么区别？并集 S ∪ T 包含了来自 S 或 T 或同时来自两者的所有向量。解释这句话：“S ∪ T 的生成空间就是 S + T”。

问题 二：

（3.2 节第 18 题）平面 x - 3y - z = 12 与平面 x - 3y - x = 0 平行。这个平面上的一个特定点是 (12, 0, 0)。该平面上的所有点具有如下形式（填写第一个分量部分）：

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}?\\0\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}?\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}?\\0\\1\end{bmatrix}.$$

问题 三：

（3.2 节第 36 题）如果 $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$，零空间 N(C) 如何与空间 A 的零空间 N(A) 和 B 的零空间 N(B) 相关联？

题解

问题一第一问：
就是问s与t的和向量是否可以张成一个子空间。证明如下：
证明(s+t)+(s'+t')与c(s+t)是否还在S+T空间中即可。
$(s+t)+(s'+t')=(s+s')+(t+t')$，其中s+s'还在S中，t+t'还在T中，那么(s+s')+(t+t')一定还在S+T的空间。同理$c(s+t)=cs+ct$仍然在其中！

问题二第二问：
S+T是一个平面，而S ∪ T仅仅是一个两个直线的并集，前者是可以生成一整个平面的，而后者只是在这两个直线的方向上进行无线的沿伸，所以S+T包含S ∪ T！

问题二解答：
也许这个题意不太好理解，就是要求你找出并描述与给定平面 x−3y−z=12 上所有点的坐标形式。具体来说，题目给出了一个特定点 (12, 0, 0) 在这个平面上，并要求以向量的形式表示该平面上的所有点。我们看题目给的等式知道，等式左边就是一个向量，一个存在于这个平面的向量，由于他是变化的，所以是可以张成真个平面的，而等式右边的标量是点的坐标，矢量是向量。其实很好理解，连接每个在平面的点与原点的向量，就是对应的等式左边。我们其实可以代入几个特殊的例子去得到答案。首先点是(12, 0, 0)在平面上，那么代入式中，得到等式左边第一个向量为$\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。
然后我们对 x - 3y - z = 12变形可得x = 12 + 3y + z。那么为了满足这个条件，则必须为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

其实我没有理解题目中为什么要给一个平面 x - 3y - z = 12 与平面 x - 3y - x = 0 平行这个条件！
如果有知道的大佬请为我解惑！

问题三解答：
问题三把C矩阵分块表示了，分为了AB两个部分。C的零空间满足$CX = AX + BX = 0$，其中AX + BX就是A,B的零空间。那么要使得他们和为0，要么都是0，要么是相反数（就是结果向量方向相反）。但是题目要求了是0空间，那么结果向量只能为0。所以他们只能为0。翻译过来就是其零

空间 N(C)包含了所有同时满足 $Ax=0$和 $Bx=0$的向量 x。换句话说，N(C)是那些既在 N(A) 中也在 N(B) 中的向量的集合。所以结果为：$N(C)=N(A)\cap N(B)$。