3.9 第三单元复习

第三单元的复习仍然是以题目的方式出现，当然我们也会提及一些理论复习!

现在我们先来说说这次复习的大纲:
首先我们要复习如何求解特征向量特征值（相信大家经过这一单元的学习，大家深入认识到特征向量的重要性！）
然后我们要求大家来求解微分方程与矩阵指数e^{At}。
然后我们要针对对称矩阵来复习。对称矩阵我们必须知道的就是他的一些基本性质，(1）特征值都为实数。(2）不同特征值对应的特征向量正交。(3）对称矩阵是一定可以对角化的，而且她的分解是$Q\lambda Q^T$。这时由于她特殊的特征向量的功劳!
紧接着我们需要知晓正定矩阵。这其实就是一种特殊的对称矩阵。
然后就是相似矩阵，相似矩阵之间特征值是一样的。还记得我们在讲解相似矩阵的时候有一段莫名其妙的话吗，其实他就是线性变换的知识。
最后就是奇异值分解。

下面我们来看题目吧!

问题 1：反对称矩阵的微分方程

设

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad \text{其中} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

通解形式为

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} x_3$$

这是一个常微分方程组抽象出来的矩阵形式!

解答:

(a) 求矩阵 A 的特征值

- 矩阵 A **奇异**，第一行与第三行线性相关，故有一个特征值 $\lambda_1 = 0$。(这个我们在特征值那一讲可推导过哦！）
- 又 A **反对称**（$A^T = -A$)，其特征值为**纯虚数**。(仍然在2.8提到过，当时是一个2阶的反对称矩阵)
- 解特征方程 $|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \sqrt{2}i, \quad \lambda_3 = -\sqrt{2}i$$

(b) 解的周期性

- 解为**周期函数**(这个可以由欧拉公式证明，这里我们不深入讨论)，何时回到初始值？就是说当t等于多少的时候$U(t) = U(0)$。
- 显然，我们知道的是$e^0 = e^{2\pi i} = 1$。就是要让$e^{\sqrt{2}it} = 1 = e^{2\pi i}$ 当 $\sqrt{2}t = 2\pi$，即周期 $t = \pi\sqrt{2}$。
  注意哦，这个矩阵可不是周期的，因为我们在2.12中说到了周期矩阵的条件！

(c) 证明两个特征向量正交

对称或反对称矩阵的特征向量**总正交**。我们总结一下上面情况下矩阵的特征向量正交：
就是满足$AA^T = A^TA$的矩阵，他们的特征向量正交！那么对称矩阵，反对称矩阵，正交矩阵都是满足这样的条件的！

- 注：矩阵具有正交特征向量的充要条件为 $AA^T = A^TA$（与转置可交换）。对称、反对称、正交矩阵均满足。
- 一组可能的特征向量为：

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \\ i\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \\ -i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- 计算复向量内积时，**第一个向量需取共轭**。

(d) 如何计算 e^{At}

- 若 $A = S\Lambda S^{-1}$，则

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}, \quad e^{\Lambda t} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t})$$

这个计算我们就不深入讨论了！

问题 2：给定特征值与特征向量的矩阵性质

已知 3×3 矩阵 A 的特征值为

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = c, \quad \lambda_3 = 2$$

对应特征向量为

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(a) 这个矩阵可对角化吗

可对角化条件就是要有足够多的特征向量：

- 已有 3 个**线性无关**且**正交**的特征向量，故对**任意实数** c 均可对角化。

(b) c取何值，这个矩阵对称

- 对称矩阵特征值均为实数；若 c 为实数，则 A 对称。 而我们以及知道特征向量们正交了（大家计算的看看！）
- 故对**所有实数** c 均对称。

(c) c取何值，这个矩阵是正定条件

首先这个矩阵以及有一个0值的特征值，所以这个矩阵不可能为正定矩阵，但是有可能为半正定矩阵！

- 正定矩阵必对称，故 c 需为实数。
- 特征值需全部为正，但含 0，因此**对任何 c 均不正定**；若 $c \geq 0$ 则为**半正定**。

(d) 是否为马尔可夫矩阵

- 马尔可夫矩阵特征值中必有 1，其余绝对值小于 1。
- 现有特征值 2，故**对任何 c 均非马尔可夫矩阵**。

(e) 若 $P = \frac{1}{2}A$，能否为投影矩阵?

- 投影矩阵实对称，特征值为 1 或 0。 （这两个性质我没有再前文提及是因为当时没有学习对称矩阵，现在我来证明这两个性质。1：投影矩阵是$A(A^TA)^{-1}A^T$， 前后两个A刚好调换位置不变，而A^TA本身就是对称矩阵，他的逆也是对称矩阵，那么他的转置也等于本身，所以符合对称矩阵性质！2：这个性质其实很好证明，投影矩阵的性质有$P^2 = P$，那么对于的特征值也要符合平方等于本身，那么只有1和0符合！）
- 故当且仅当 $c = 0$ 或 $c = 2$ 时，P 可为投影矩阵。

奇异值分解（SVD）

$$A = U\Sigma V^T$$

- U, V 为正交矩阵，Σ 为对角矩阵（奇异值非负）。
- 关键：考察对称矩阵

$$A^TA = V\Sigma^T\Sigma V^T, \quad AA^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

- V 为 A^TA 的特征向量矩阵，$\Sigma^T\Sigma$ 为特征值矩阵（奇异值平方）。
- 同理，U 为 AA^T 的特征向量矩阵。

当然这里无法一言说尽SVD的特殊，其实我们在讲座中也没有说尽，但是大家需要理解我们在讲座中推导SVD计算方法的过程，就是那个行空间基与列空间基之间的变换，正是因为这个原因，他几乎是可以显示出一个矩阵行空间，列空间，零空间的很多信息的。可以说奇异值分解是线性代数的一个巅峰，之前说行列式是，其实SVD就是取代他的地位的那个。大家通过看下面的几个例子感受一下：

给定 Σ 的 SVD 信息

(a) 若

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U, V\text{各有两列}$$

- 则 A 为 2×2 矩阵，且因 U, Σ, V 均可逆，故 A **非奇异**。就是说他本身是可以对角化分解的！

(b) 若

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

- **不可能**，因 SVD 中奇异值必须非负。

(c) 若

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 则 A 为**秩 1 的奇异矩阵**，零空间维数为 1。
- 四个基本子空间可由 U, V 的列向量张成；例如，V 的第二列为 A 的零空间的一组基。

问题 4：既对称又正交的矩阵

已知矩阵 A 既对称又正交。

(a) 特征值特点

- 对称矩阵特征值为**实数**。
- 正交矩阵特征值满足 $|\lambda| = 1$。
  事实上正交矩阵的特征值的绝对值为 1（只改变方向，不改变大小）

证明：记正交矩阵为 Q，有:$Qx = \lambda x$
接下来对等式两边取长度，首先我们要知道，正交矩阵不改变向量的长度，
因为如果求 Qx 的长度，即为x^TQ^TQx，而$Q^TQ = I$，所以$x^TQ^TQx = x^Tx$。所以 Q不改变向量长度。
对等式两端同时取长度：$||x|| = |\lambda|||x||$ (正交矩阵不改变长度)
于是证得结论，特征值绝对值为 1。

- 故 A 的特征值只能为 **1 或 -1**。
正交矩阵的这条性质大家牢记哦！

(b) 判断：A 必为正定

- **错误**，例如（这个例子很好找）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) 判断：A 无重特征值

- **错误**，若 A 为 3×3 或更高阶，必存在重特征值（因特征值只能是 1 或 -1）。

(d) 是否可对角化

- A 有重复的特征值，但是任何对称矩阵和任何正交矩阵都可以对角化。不仅如此，还可以选择正交的特征向量构成它们的正交阵 Q。

(e) 是否非奇异（就是问是否可逆）

- **是**，所有正交矩阵均非奇异。这是因为正交矩阵特征值不可能是 0。所以一定会可逆的，或者说所有奇异值都不为0！

(f) 证明 $P = \frac{1}{2}(A + I)$ 为投影矩阵

方法一：

- 验证对称性与幂等性：

$$P^2 = \frac{1}{4}(A + I)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + 2A + I)$$

- 因 A 正交且对称，$A^2 = A^TA = I$，故

$$P^2 = \frac{1}{4}(I + 2A + I) = \frac{1}{2}(A + I) = P$$

方法二：

- 或注意到 A 特征值为1 或 -1，则 P 特征值为 $\frac{(1+1)}{2}$ 或 $\frac{(-1+1)}{2}$，而投影矩阵的特征值只能为0或者1，故 P 为投影矩阵。（这个性质好像我们之前证明过，所以这里不赘述！）

讨论课

讨论课仍然是一些计算特征值特征向量的题目讲解，这样的题目我们做的足够多，所以略过！但是由于我忘记了投影矩阵特征值只能是1或者0这个性质有没有证明（内容太多，真的忘记了！），所以在这里我们再证明一遍：
设 P 是一个**正交投影矩阵**，即满足

$$P^2 = P \quad \text{且} \quad P^\top = P.$$

设 λ 是 P 的任意特征值，对应的非零特征向量为 x，则

$$Px = \lambda x.$$

两边再作用一次 P：

$$P^2x = P(\lambda x) = \lambda Px = \lambda^2 x.$$

由于 $P^2 = P$，因此

$$Px = \lambda^2 x.$$

与 $Px = \lambda x$ 比较，得

$$\lambda x = \lambda^2 x.$$

因为 $x \neq 0$，所以

$$\lambda = \lambda^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(1-\lambda) = 0.$$

于是

$$\boxed{\lambda = 0 \quad \text{或} \quad \lambda = 1.}$$

除了这个证明外，这节讨论课还有几个重点：
（1）如果一个矩阵A，乘以一个向量a，Aa结果不为零，那么这个时候存在一个b向量垂直于a，那么矩阵A乘以b，Ab结果是0！
（2）一个矩阵，当对其进行一个多项式的计算，他的特征值也会随之改变！这个我们讨论过。而特征向量一般情况下会随之改变，什么时候不变呢，就是当矩阵加减一些标量矩阵。而典型的标量矩阵就是I或者aI。

当然这节讨论课讨论了许多有意思的矩阵，比如旋转矩阵，反射矩阵等等。只是我认为对于一个cser来说，这些矩阵的了解可以说是不需要的，可以完全忽略的！所以我没有把题目写过来与大家讨论！

到此我们复习完成！其实我们发现这个特征值与特征向量贯穿了复习课的始终，这反映了他的重要性！