# 1.9 求解 Ax = 0：枢轴变量，特殊解

记得上一节中我们讨论了列空间和零空间的相关问题，那么这一节我们从它们的定义过渡到它们的计算，即如何求解出这些空间的一般形式。给出一种可以解出 Ax = 0 中的 x 构成的零空间的计算方法。现在让我们来寻找计算零空间的计算方法把，同时为了探寻一般解法，我们不再聚焦于方阵而是矩形矩阵！

# 如何求解零空间

首先我们需要解释一下枢轴变量，这不是新鲜的概念，而是在前面的内容出现过许多次的！具体概念是指在进行高斯消元法或其他类似算法过程中选定的作为操作基础的特定元素。还记得消元法吗，像这样：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}\rightarrow U=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$$

那么我们每一步消元所要运用到的元素就是枢轴。比如要消除第二行第一列的元素时，我们是依托第一行第一列的元素1的，那么元素1就是枢轴！后面的一样。很显然枢轴元素会分布在主对角线上（当然不是每个矩阵都这样）！如果大家有在本科阶段上过线性代数的课，我们称之为主元！我们在消元法的注释中说到过主元。但是为了适应strange教授的课程内容，我们称之为枢轴！

现在我们给出一个矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$$

让Ax = 0
现在我们对他消元（注意消元的过程中解是不会随之改变的，那么解空间就不变，那么作为解空间的一种的零空间自然不会变）：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&2&4\end{bmatrix}$$

这是第二行减去第一行的两倍，第三行减去第一行的三倍所得到的！
现在我们的消元法遇到瓶颈了，怎么办呢？想不到办法就把消元法进行到底吧！用第三行减去第二行：

$$\rightarrow U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\0 & 0 & 2 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

那么我们观察计算过程会发现在这个过程中充当枢轴的元素是第一行第一列的1和第二行第三列的2，那么我们有两个枢轴，所以矩阵A的秩是2！枢轴的个数被称为 秩。

现在我们来明确几个概念了。枢轴所在的列我们称之为主列，而其他的列我们称之为自由列！同样的在解向量中，对应自由列的元素称为自由变量，对应主列的变量称为主变量！
在上面的例子

$$Ax=0\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\2 & 4 & 6 & 8\\3 & 6 & 8 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\0 & 0 & 2 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0$$

中，$x_1,x_3$是主元素，而$x_2,x_4$是自由元素！
其中自由变量是可以随意赋值的。为什么呢？我们以矩阵乘法的视角去看Ux=0，发现无论第二列怎么变，第一列永远可以消除他，同样无论第四列怎么变，第三列也可以消除他达成0的结果！

我再针对自由变量来多说几句。自由变量意味着什么，其实是对应着其他相关向量的系数的，也就是说他们对应的向量是可以由其他向量组合而成的！所以他们的系数是可以随意取的，我们称之为自由变量！但是对于线性无关的向量的系数，就不可以随意取，至少是不可以取为0的！这是主元变量！

理清楚概念后我们回代求解！
首先给自由变量$x_2,x_4$赋值为1，0。那么

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+2x_4=0\\2x_3+4x_4=0\end{cases}$$

这个回代法应该可以理解，这是初中的内容了！那么此时的解向量是$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$。

然后再给自由变量赋值0，1。重复上面的回代法。得到此时的解向量是$\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$。

你以为这个1，0和0，1是随便取的吗，你再看看其他的赋值。我们把其他的赋值放到解向量中$\begin{bmatrix}x_1\\a\\x_3\\b\end{bmatrix}$，然后发现其他的任何赋值都有可以由$\begin{bmatrix}x_1\\1\\x_3\\0\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}x_1\\0\\x_3\\1\end{bmatrix}$他们两个线性组合得到。也就是说

$d\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$可以张成整个零空间！我们称这两个解向量为特解！
那么对于一个m行n列的矩阵而言，自由变量的数列就是n减去他的秩！

那么我来靠靠大家如果一个矩阵有三个自由变量，那么怎么取值：
答案是：1，0，0和0，1，0和0，0，1！

# 更加简便的计算零空间

还是沿用上面的一个例子：
我们成功把矩阵A简化为了矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

那么我们继续化简，把枢轴上的元素化简：
用第一行减去第二行的一倍得到：

$$\begin{bmatrix}1&2&0&-2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

这样的目的是为了使得主元列除了主元元素都是0！
然后我们把第二行的元素除以2，使得主元都是1。那么此时的矩阵为：

$$\begin{bmatrix}1&2&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

我们话要进一步化简了。
我们把第二列与第三列进行交换，得到了：

$$\begin{bmatrix}1&0&2&-2\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

当然上面我们的全部操作是基于行置换，行加法，行乘法等的。而这次我们涉及了列置换！而行置换，行加法，行乘法是对解空间是没有任何影响的！而列置换却是有影响的。那么我们怎么去消除这个影响呢！其实我们仅仅需要把X向量的对于元素位置调换即可，而由于解向量的都是0，那么我们完全没必要去改变结果矩阵的任何东西！

现在我们把最后所得的矩阵称为R！
那么$R=\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix}$，对比上面的R，这个R应该很好理解！那么：

$$Ax=Rx=\begin{bmatrix}I & F\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{主元}\\ X_{自由变量}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & F\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\\ x_2\\ x_4\end{bmatrix}=0$$

那么我们现在假设有一个零空间矩阵：即零空间矩阵各列由特解组成，记 N 为零空间矩阵。那么得到

$$Rx=RN=\begin{bmatrix}I & F\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{主元}\\ X_{自由变量}\end{bmatrix}=0$$

那么我们可以得到N为$\begin{bmatrix}-F\\ I\end{bmatrix}$，那么与R中的$F$和$I$进行对比得到$N=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，那么特解是$\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$，就是如此简单的（要把N的行根据主元的变化而换过来）！

那么我们再次解决一个例题来复习这两个算法的过程：

有一个矩阵A为$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 2 & 6 & 8\\ 2 & 8 & 10\end{bmatrix}$，求解 Ax = 0 的零空间！

先化简A为U，U为$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，那么我们可以发现第一列与第二列都是主元列，第三列是自由列！那么对应的$x_1,x_2$是主元变量，$x_3$是自由变量！我们进行赋值，当赋值自由变量为0时，$x_1,x_2,x_3$都是0，也不谈上面空间了，就是一个原点！再进行赋值自由变量为1，回代得：

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\ 2x_2+2x_3=0\end{cases}$$

我们得到X向量为$\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$。

那么零空间为$d\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$。

然后我们继续化简为R，$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}R=\begin{bmatrix}I & F\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，那么可以得到N为$\begin{bmatrix}-F\\ I\end{bmatrix}$，为$\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$。解得的结果是与上面的一样的！如此简单！

# 讨论课

在这里我们需要解释一下在线性代数中的齐次方程！在线性代数中如果所有常数项为0，那么就是齐次方程！这与微分方程与其他代数方程是不同的！

今天的题目是关于求解齐次线性方程组 Ax=0，但它同时也为下一讲和下一次习题课做铺垫，那些内容将涉及求解非齐次线性方程组 Ax=b。

这个问题是一个填空题。题目如下：

所有满足方程 x−5y+2z=9 的点 (x,y,z) 构成的集合 S 是 $R_3$ 中的一个 ____。它与另一个集合 $S$（即所有满足线性方程 x−5y+2z=0 的点 (x,y,z 所构成的集合）之间存在 ____关系。

然乎我们需要描述出所有在$S$平面中点的形式，像下面这样：

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}?\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}?\\0\\1\end{bmatrix}$$

解答如下：
首先对于S，在三维空间中一定是一个平面，因为他是一个三元一次方程。这在高中的向量章节中是经常出现的。但是如果你要追究为什么一个三元一次方程可以表示一个平面，那么我推荐给大家一篇知乎的文章去阅读(25 封私信 / 80 条消息) 为什么一个三元一次方程可以表示一个平面？ - 知乎。如果没有进一步的时间和欲望也是无伤大雅的！所以第一个空填平面！

接下来是第二个空，对于两个平面之间，无非是平行，相交，重合这三种情况。但是显然重合是排除在外的！现在我们来分析是相交还是平行！

$$\begin{cases}x-5y+2z=9\\x-5y+2z=0\end{cases}$$

从这两个式子可以看出是不存在任何一个x,y,z使得同时满足这两个方程的！那么我们可以认为是无法相交的！所以这两个平面是平行的！

接下来我们要填写3，4，5这三个空了！
首先，我们这两个参数$c_1,c_2$是可以随意表示的，那我们全部写为0。可以得打$y=0,z=0$，那么我们代入方程中，得到x = 9，那么第三个空是填9！

我们知道平面S与平面$S$是平行的，可知点（0，0，0）是在S上的，而点（9，0，0）是在平面$S$上的！点（0，0，0）是沿着向量（9，0，0）到达点（9，0，0）的！那么我们可以这么认为S上的任何点都可以沿着向量（9，0，0）方向到平面$S$。

然后我们先写出平面S的描述！就是$\begin{bmatrix}1 & -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$。那么用上我们赋值的方法可以得到，1是一个枢轴，而其他的是自由变量！然后我们给出0，1的赋值，得到X = -2，给出1，0的赋值得到X = 5。那么得到描述 所以在平面S上的点为：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由于两平面平行，S上的任何点都可以沿着向量（9，0，0）方向到平面$S$。所以描述出所有在$S$平面中点的形式为：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

当然大家在学完下一讲后再来看看这一讲的朗读课，看看这一题的奥秘之处！

# 习题课

## 问题1：

a) 求下列矩阵的行简化形式：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}$$

b) 此矩阵的秩是多少？

c) 找出方程Ax=0的任何特殊解。

## 问题2：(选自《线性代数导论》Strang 第3.3节#17.b)

找到矩阵A1和A2使得与矩阵B=

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

相乘时，有rank($A_1B$)=1且rank($A_2B$)=0。就是结果矩阵的秩分别为1和0！

# 解答：

## 问题1：

a) 将矩阵A化简为其行简化形式：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}$$

通过一系列的行操作实现（不同的操作可能得到相同的结果！）。首先，将第一行乘以2并从第三行减去它：

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 7 & 9\\0 & 4 & 1 & 7\\2 & -2 & 11 & -3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 5 & 7 & 9\\0 & 4 & 1 & 7\\0 & -12 & -3 & -21\end{bmatrix}$$

然后将第二行乘以1/4使得第二个主元为1：

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 7 & 9\\0 & 4 & 1 & 7\\0 & -12 & -3 & -21\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 5 & 7 & 9\\0 & 1 & 1/4 & 7/4\\0 & -12 & -3 & -21\end{bmatrix}$$

将第二行乘以12并加到第三行：

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 7 & 9\\0 & 1 & 1/4 & 7/4\\0 & -12 & -3 & -21\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 5 & 7 & 9\\0 & 1 & 1/4 & 7/4\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

最后，将第二行乘以5并从第一行减去：

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 7 & 9\\0 & 1 & 1/4 & 7/4\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 23/4 & 1/4\\0 & 1 & 1/4 & 7/4\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

b) 矩阵的秩为2，因为它有两个主元。

c) 方程Ax=0的特殊解为：
然后对剩下的两个自由变量进行赋值！通过回代法得到下面两个特解！

$$\begin{bmatrix}-23/4\\-1/4\\1\\0\end{bmatrix} 和 \begin{bmatrix}-1/4\\-7/4\\0\\1\end{bmatrix}$$

这道题目就太过于的常规了！

## 问题2：(选自《线性代数导论》Strang 第3.3节#17.b)

解答：
对于$A_1$是取$A_1 = I_2$（二阶单位矩阵）。我们可以计算得到B的秩为1，而单位矩阵是不会改变原矩阵任何东西的，那么秩仍然为1

对于$A_2$：最简单的方法就是让$A_2B$的结果矩阵为0，因为零矩阵的秩为0。那么我们求得$A_2$为：

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

关于计算这个$A_2$，使用高斯消元法，忘记了的话去复习1.5的内容！