1.3 线性代数关键思想的概述（这就像是一个对线性代数发展史的一个讲解，里面包含了线性代数一些核心的思想）

线性代数的发展是从**向量**发展到**矩阵**再发展到**子空间**。
那么我们从这三个方面去详细讲解。

1向量

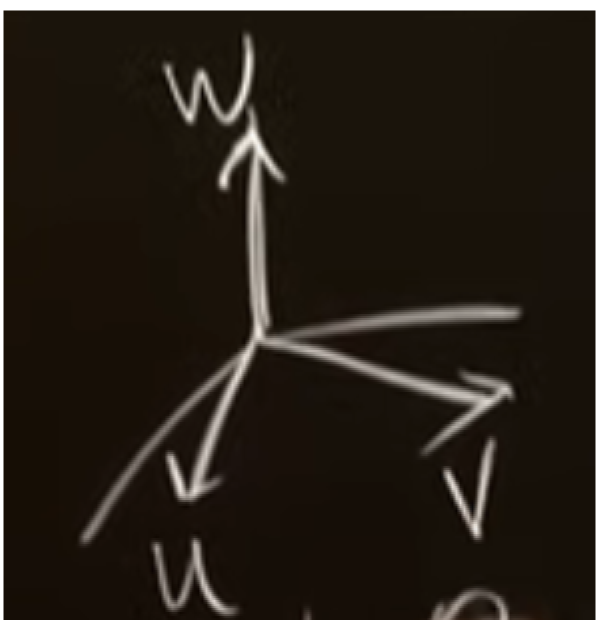
你会用向量拿来做什么?
我想我们会回答的是：线性组合

那么当我们有三个向量的时候。分别为u，v，w
那么

$$x_1u + x_2v + x_3w = b。$$

这便是他们的线性组合。
当假设暂时是一个三维的向量

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



当我们只是取u与V时，那么他们所有线性组合（加和乘）所得到的所有线段得到了一个平面（前提是他们不在一条直线上）。
而当我们加入w一起之后，不出意外的是我们会得到整个三维空间。

所以这便是在向量上的理解。

当然通过这样的加或者乘是效率低下的，我们可以把三个u,v,w放入一个矩阵当中，这样的效率是很高的，这便进入到了线性代数发展的下一个阶段，矩阵！

2.矩阵

矩阵 A 由向量 u、v 和 w 构成：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 与向量 x 的乘积为：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

这等于 $x_1u + x_2v + x_3w = b$。矩阵与向量的乘积是矩阵列向量的线性组合。

给个例子的具体计算过程，如下：

$$A \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -14 + 9 \\ -9 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

一个更深入的问题是从向量 b 开始，问“对于哪些向量 x，Ax=b？”。在我们的例子中，这意味着要解三个未知数的三个方程：

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

相当于解：

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \\ -x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

我们看到 $x_1 = b_1$，因此 x_2 必须等于 $b_1 + b_2$。用向量形式表示，解为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 + b_3 \end{bmatrix}$$

或者

$$x=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

或者

$$x=A^{-1}b$$

。如果矩阵 A 是可逆的，我们可以在等式两边同时乘以 A^{-1}，从而找到唯一的解 x 满足 Ax=b。

特别地，如果 $b=0$，那么 $x=0$。

第二个例子使用了相同的列向量 u 和 v，但用另一个向量替换了列向量 w：

$$C=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

那么：

$$Cx=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_3\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}$$

我们得到的三个未知数的三个方程组变成了循环的。

以前 $Ax=0$ 意味着 $x=0$，但现在存在非零向量 x 使得 $Cx=0$。对于任何满足 $x_1=x_2=x_3$ 的向量 x，都有 $Cx=0$。

矩阵 C 编码的方程组是：

$$\begin{cases}x_1-x_3=b_1\\x_2-x_1=b_2\\x_3-x_2=b_3\end{cases}$$

如果我们把这三个方程相加，我们得到：

$$0=b_1+b_2+b_3$$

这两个例子告诉我们，只有当 b 的分量之和为零时，

$$Cx=b$$

才有解 x。在一个物理系统中，这可能告诉我们，只要作用在系统上的力是平衡的，系统就是稳定的。

3子空间

从几何角度看，矩阵 C 的列向量位于同一个平面内（它们是线性相关的；而矩阵 A 的列向量是线性独立的）。在 $\mathbb{R}^3$ 中，有许多向量并不在这个平面上。这些向量无法表示为矩阵 C 的列向量的线性组合，因此对应的向量 b 使得方程 $Cx = b$ 无解。矩阵 C 的列向量的线性组合构成了 $\mathbb{R}^3$ 中的一个二维子空间。

这个由 u、v 和 w 的组合构成的平面可以描述为“所有向量 Cx”。但我们知道，满足 $Cx = b$ 的向量 b 需要满足条件 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$。因此，所有 u 和 v 的组合构成的平面包括了所有分量之和为零的向量。

如果我们取所有向量 u、v 和 w 的线性组合：
$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
我们得到整个空间 $\mathbb{R}^3$；方程 $Ax = b$ 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的每一个 b 都有解。我们说 u、v 和 w 构成了 $\mathbb{R}^3$ 的一个基。

$\mathbb{R}^n$ 的一个基是由 n 个线性独立的向量组成的集合。等价地，一个基是由 n 个向量组成的集合，这些向量的线性组合覆盖了整个空间。或者，当一个矩阵的列向量构成一个基时，这个矩阵是可逆的。

一个向量空间是由向量组成的集合，这个集合在进行线性组合时是封闭的。一个子空间是一个向量空间内部的另一个向量空间；例如，通过原点的平面是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个子空间。一个子空间可以等于它所在的向量空间；最小的子空间只包含零向量。

$\mathbb{R}^3$ 的子空间包括：

- 原点，
- 通过原点的直线，
- 通过原点的平面，
- 整个 $\mathbb{R}^3$ 。

上面关于子空间的内容是一个前瞻性的提及，不理解没有关系，我们后面会讲到！

总结：

当你看到一个矩阵时，试着去理解“它在做什么？”
比如当我们看到一个矩阵时，不仅要关注它的具体数值，还要思考它在数学运算中所代表的含义。例如：

- **矩阵乘法**：矩阵 A 乘以向量 x 可以看作是对向量 x 进行某种变换（如旋转、缩放、投影等）。
- **线性方程组**：矩阵 A 在方程 Ax=b 中表示一组线性方程，矩阵的作用是将输入向量 x 映射为输出向量 b。

理解矩阵的作用可以帮助我们更好地分析问题，而不仅仅是进行机械的计算。

矩阵可以是矩形的；我们可以有七个方程和三个未知数。矩形矩阵是不可逆的，但在研究矩形矩阵时经常出现的对称方阵 $A^T A$ 可能是可逆的。就是说：
矩阵可以是矩形的

矩阵不一定总是方阵（行数和列数相等），也可以是矩形矩阵（行数和列数不相等）。例如：

- **方阵**：行数和列数相等，如 3×3 矩阵。
- **矩形矩阵**：行数和列数不相等，如 7×3 矩阵（7行3列）。

矩形矩阵在实际应用中非常常见，例如在数据科学中，数据通常以矩形矩阵的形式存储（行表示样本，列表示特征）。

当然，老教授在课程中补充了一点，就是结果矩阵总是与右侧的两个矩阵是对称的！也就是上一节最后一道题目揭示的定理！

讨论课讲解了一个题目：

题：$Ax=b$，而有 $x=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$，请给出关于A的所有信息！

可知 $Ax=b$，$x=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$，那么设 $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ 为 x_p，$\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$ 为 x_s，代入可得：

$A(x_p+cx_s)=b \Rightarrow Ax_p+cAx_s=b$ ①

当 $c=0$ 时：　　　　当 $c=1$ 时

① 为 $Ax_p=b$　　　　① 为 $Ax_p+Ax_s=b$

那么 $Ax_s=0$

设 A 为 $\begin{bmatrix}\vdots&\vdots&\vdots\\c_1&c_2&c_3\\\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}$ 代入到 $c=0$ 时，那么 $\begin{bmatrix}\vdots&\vdots&\vdots\\c_1&c_2&c_3\\\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}=c_2+c_3$ ②

可得 $c_2+c_3=\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$

代入到 $c=1$ 时，$\begin{bmatrix}\vdots&\vdots&\vdots\\c_1&c_2&c_3\\\vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=2c_2+c_3=0$ ③

那由②,③得 $c_3=-2c_2$，那么 $-c_2=\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$ 所以 $c_2=\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$ $c_3=\begin{bmatrix}-2\\-8\\-2\end{bmatrix}$

现在解决 c_1 的相关信息。

~~那么当 $c=0$ 时，$A\cdot x_p=b$，那么我们~~

给定解 x 表示为 $x_p+c\cdot x_s$，而 x_p 是一个特解，x_s 为一个特解向量，

而 x_s 是满足 $A\cdot x_s=0$ 的，这时 A 的零空间维度为1

由秩-零化度定理知，A的秩为2，那么 c_1 就得为非b的倍数，不然秩会小于2.

这里附上题解，为什么要手写，因为有些符号在公式软件中无法识别，所以就将就用吧！

还有需要注意的是在讨论C1的信息的时候，有许多未学到的理论，入秩，零化度定理，特解向量

等，这个不必勉强，以后学习中会有涉及，但是前面的C2，C3的讨论还是要尽量看懂的。

对于本节推荐去看introduction to Linear Algebra的1.3节。