

# MSM semestrální práce

Jakub Znamenáček

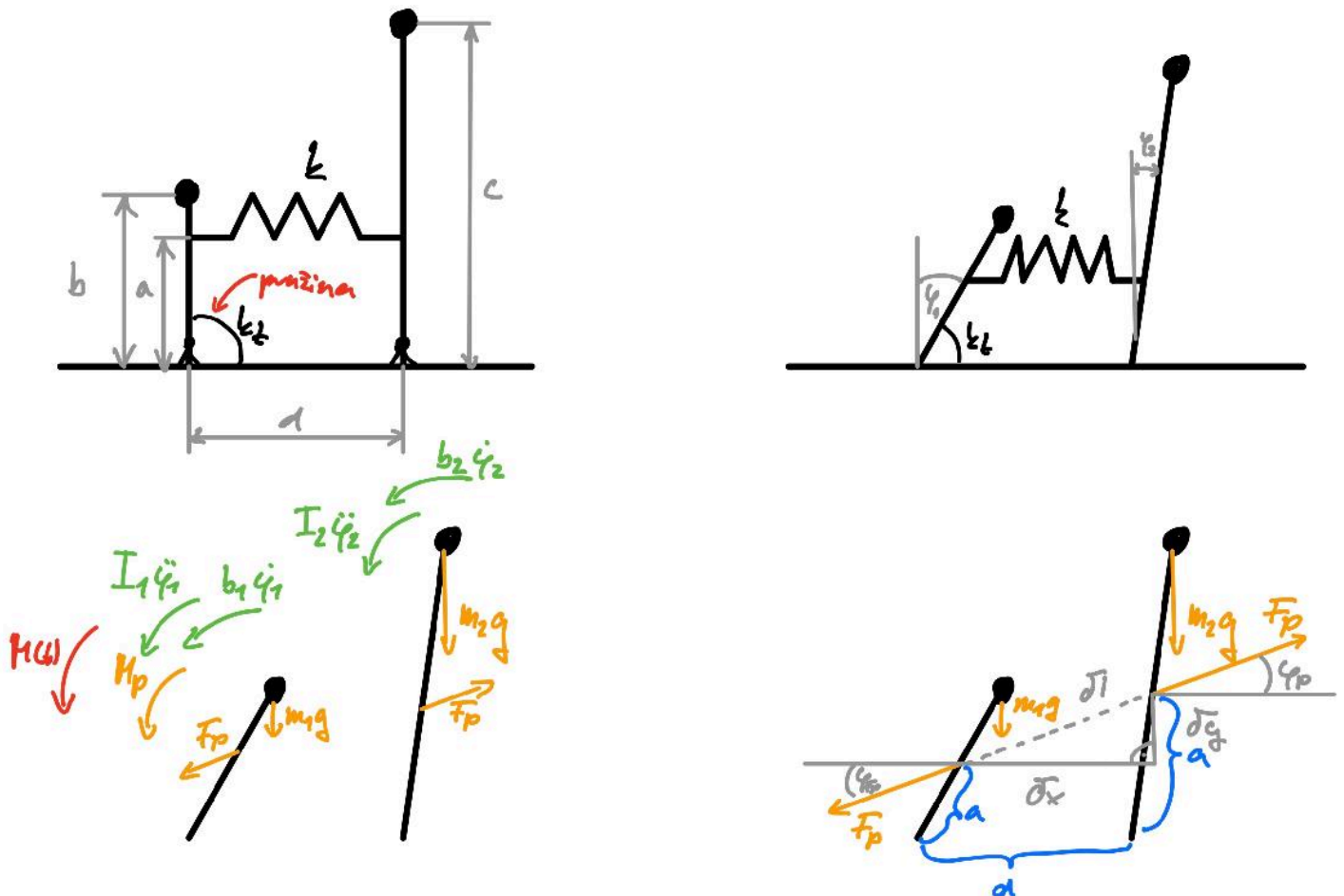
## Zadání

Cílem této semestrální práce je analýza systému představovaného dvěma inverzními kyvadly spojenými pružinou. Na první kyvadlo dále působí síla od torzní pružiny  $k_t$ . Časově proměnný moment  $M_t$  by pak měl sloužit k řízení polohy prvního kyvadla.

## Zadané hodnoty

$m_1 = 5\text{kg}$ ,  $m_2 = 2\text{kg}$ ,  $a = 0,5\text{m}$ ,  $b = 0,75\text{m}$ ,  $c = 1,25\text{m}$ ,  $d = 1\text{m}$ ,  $k = 5800\text{N/m}$ ,  $k_t = 1100\text{Nm/rad}$ ,  $b_1 = 6,1\text{Ns}$ ,  $b_2 = 8,8\text{Ns}$ ,  $g$

## Zjednodušený nákras zadaného systému



## Dopočtené hodnoty

$$G_1 = m_1 g, G_2 = m_2 g, I_1 = m_1 b^2, I_2 = m_2 c^2$$

$$G_1 = 49.0500$$

$$G_2 = 19.6200$$

$$I_1 = 2.8125$$

$$I_2 = 3.1250$$

## Nelineární model

### Newton-Eulerovy pohybové rovnice

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = -M_p - b_1 \dot{\varphi}_1 - F_p \cos(\varphi_p) a \cos(\varphi_1) + G_1 b \sin(\varphi_1) - M_t$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 = -b_2 \dot{\varphi}_2 + F_p \cos(\varphi_p) a \cos(\varphi_2) + G_2 b \sin(\varphi_2),$$

kde poměnná  $F_p$  představuje sílu vyvolanou lineární pružinou a  $\varphi_p$  úhel působení této síly.

### Stavový popis

Stavové proměnné jsou  $x_1 = \varphi_1$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}_1$ ,  $x_3 = \varphi_2$ ,  $x_4 = \dot{\varphi}_2$  reprezentující úhel a rychlost prvního a druhého inverzního kyvadla. Metodou snižování řádu diferenciální rovnice získáme následující stavové rovnice nelineárního systému.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-x_1 k_t - b_1 x_2 - k(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3)))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}) \cos(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right)) a \cos(x_1))}{I_1}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-b_2 x_4 + k(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3)))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}) \cos(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right)) a \cos(x_3) + G_2 b \sin(x_3))}{I_2}$$

### Nastavení simulace

Pomocí táhla lze nastavit délku času simulace nelineárního modelu v symulinku ideální hodnotou je 5 s.

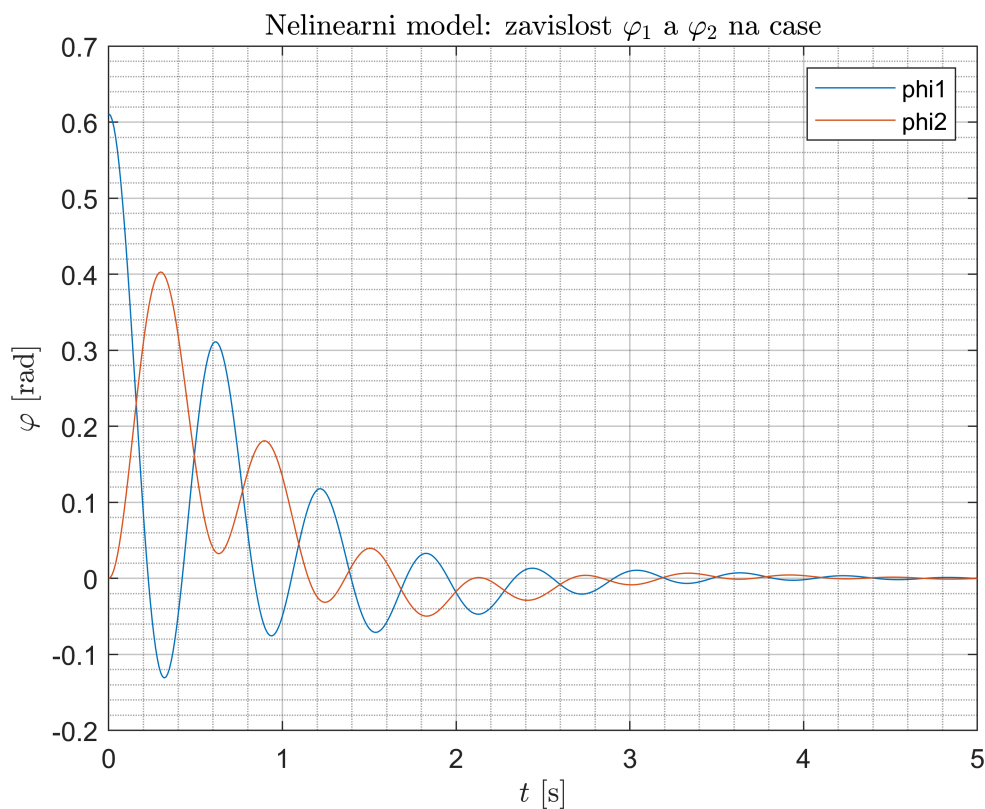
### Výpočet pomocí simuliku

Stisknutím tlačítka "spustit simulink" proběhne výpočet polohových úhlů  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ .

## Graf závislosti $\varphi_1$ a $\varphi_2$ na čase

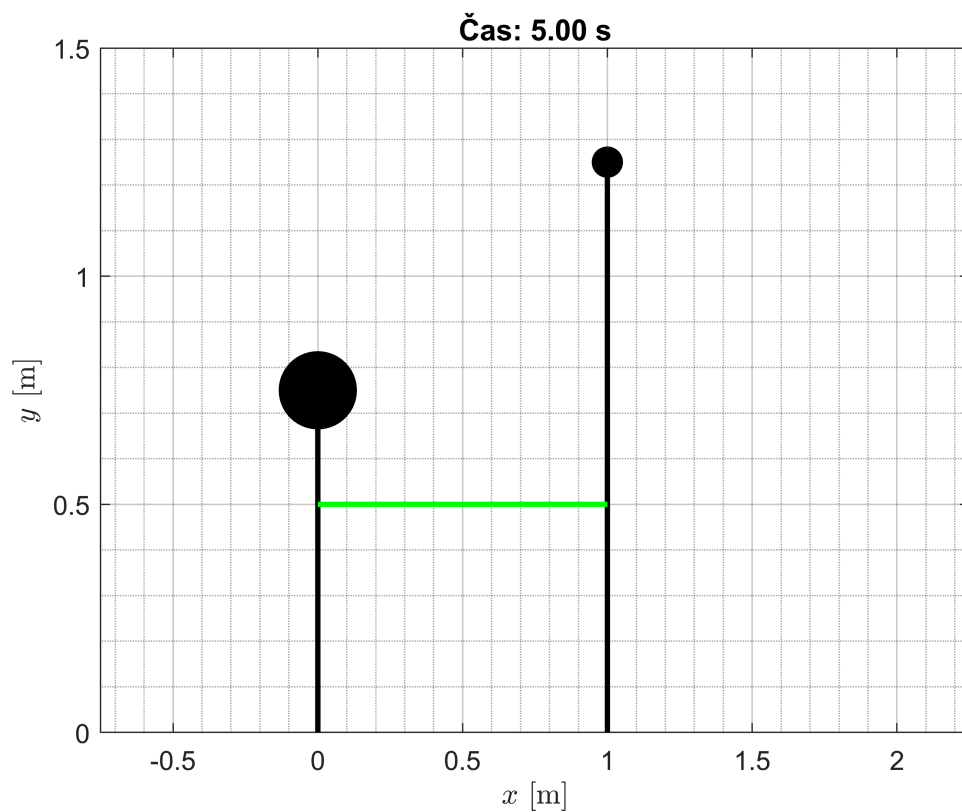
Následující graf představuje průběh pohybu inverzních kyvadel z počáteční polohy

$\varphi_{10} = 35^\circ$ ,  $\dot{\varphi}_{10} = 0 \text{ rad/s}$ ,  $\varphi_{20} = 0^\circ$ ,  $\dot{\varphi}_{20} = 0 \text{ rad/s}$  do ustáleného stavu bez jakéhokoli vnějšího působení na systém.



## Animace

Animace pohybu kyvadel vypočtená z nelineárního modelu pomocí simulinku. Pružina je znázorněna úsečkou spojující obě inverzní kyvadla. Barva úsečky je závislá na působení síly a to tak, že pokud jsou kyvadla odtlačována od sebe je barva úsečky červená a naopak pokud na ně působí síla vyvolaná pružinou tak, že jsou přitahována k sobě, tak je barva zelená.

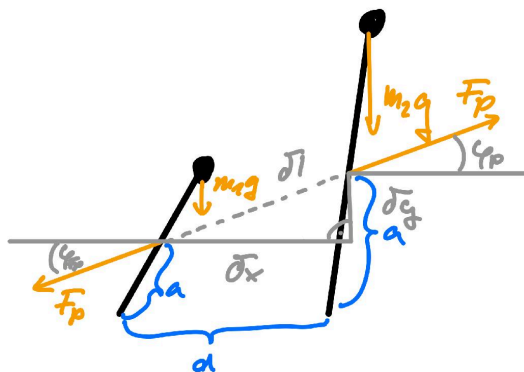


## Lineární model

### Linearizace

#### Stavový popis

Obdobně jako u nelineárního systému jsou stavové proměnné  $x_1 = \varphi_1$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}_1$ ,  $x_3 = \varphi_2$ ,  $x_4 = \dot{\varphi}_2$  reprezentující úhel a rychlost prvního a druhého inverzního kyvadla. Pro jednodušší práci s výpočty byly zavedeny následující pomocné proměnné, které jsou znázorněny na náčrtku.



$$\delta_x = d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))$$

$$\delta_y = a(\cos(x_3) - \cos(x_1))$$

$$\Delta l = d - \delta_l = d - \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}$$

$$F_p = k\Delta l$$

$$\varphi_p = \arctan\left(\frac{\delta_y}{\delta_x}\right)$$

Pro přehlednost jsou zde ještě jednou zobrazeny stavové rovnice nelineárního systému  $f_1$  až  $f_4$ .

$$\dot{x}_1 = f_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2 = \frac{-x_1 k_t - b_1 x_2 - k(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3)))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}) \cos(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right)) a \cos(x_1) + G_2 c}{I_1}$$

$$\dot{x}_3 = f_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = f_4 = \frac{-b_2 x_4 + k(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3)))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}) \cos(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right)) a \cos(x_3) + G_2 c}{I_2}$$

### Singulární body

Nelineární systém může mít 0 až  $\infty$  singulárních bodů. Pro jednotlivé singulární body musí platit následující rovnice  $\dot{x} = 0$ ,  $u = u_s = \text{konst.}$  (v našem případě  $u_s = M_t = 0$ ). První rovnici lze též zapsat jako  $f(x_s, u_s) = 0$ . Hledáme tak řešení splňující následující soustavu rovnic.

$$0 = x_2$$

$$0 = \frac{-x_1 k_t - b_1 x_2 - k(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3)))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}) \cos(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right)) a \cos(x_1) + G_2 c}{I_1}$$

$$0 = x_4$$

$$0 = \frac{-b_2 x_4 + k(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3)))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}) \cos(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right)) a \cos(x_3) + G_2 c}{I_2}$$

Z výše zmíněných rovnic na první pohled vyplývá řešení pro  $x_2$  a  $x_4$ , zbývá tak nalézt řešení pro zbývajících  $x_1$  a  $x_3$ . Toto řešení bohužel nebylo možné řešit symbolicky a tak bylo přistoupeno k numerickému řešení.

### Numerické řešení singulárních bodů

Pomocí numerické metody lze zavedením pomocné funkce "stavovaRovnice" hledat řešení v blízkosti daného

bodu. Jelikož nás nejvíce zajímá okolí bodu  $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  budeme hledat numerické řešení rovnice  $f(x_s, u_x) = 0$  v

blízkosti námi zvoleného bodu  $z_g$

```
zg = 4x1
    0.1000
    0.1000
    0.1000
    0.1000
```

Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is near zero as measured by the value of the function tolerance, and the problem appears regular as measured by the gradient.

<stopping criteria details>

```
z = 4x1
10-9 x
-0.1107
 0.0000
-0.2914
      0
```

Jak je patrné z výsledku, jedním ze singulárních bodů by mohl být bod  $x_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , který nás i nejvíce zajímá,

neb mechanismus bude pracovat v jeho okolí. Ověřme tedy, že opravdu splňuje rovnici  $f = 0$

```
ans = 0
```

```
ans = 0
```

```
ans = 0
```

```
ans = 0
```

vidíme, že  $x_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  rovnici  $f = 0$ . Linearizaci systému tedy provedeme v tomto singulárním bodě splňuje stavového prostoru. Linearizaci lze provést podle následující rovnice.

$$f(x(t), u(t)) = f(x_s, u_s) + \frac{\partial f}{\partial x_s} \bigg|_s (x(t) - x_s) + \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_s (u(t) - u_s)$$

vzhledem k tomu, že  $x_s$ ,  $u_s$  a  $f(x_s, u_s)$  jsou rovny nule, zjednoduší se nám linearizované stavové rovnice systému na následující rovnici.

$$f(x(t), u(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_s} \bigg|_s x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_s u(t)$$

### Linearizované stavové rovnice v singulárním bodě $x_s = 0$

$$f1_{lin} = x_2$$

$$f2_{lin} =$$

$$\frac{464 x_3}{9} - \frac{5819 x_1}{75} - \frac{488 x_2}{225} - \frac{16 Mt}{45}$$

$$f3_{lin} = x_4$$

$$f4_{lin} =$$

$$\frac{232 x_1}{5} - \frac{4819 x_3}{125} - \frac{352 x_4}{125}$$

### Maticový zápis

Linearizované stavové rovnice lze též zapistovat v maticovém tvaru  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$ , který následně usnadní další práci se systémem. Matice  $A, B, C, D$  v tomto zápise pak mají následující podobu.

$$A =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5819}{75} & -\frac{488}{225} & \frac{464}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{232}{5} & 0 & -\frac{4819}{125} & -\frac{352}{125} \end{pmatrix}$$

$$B =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{16}{45} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

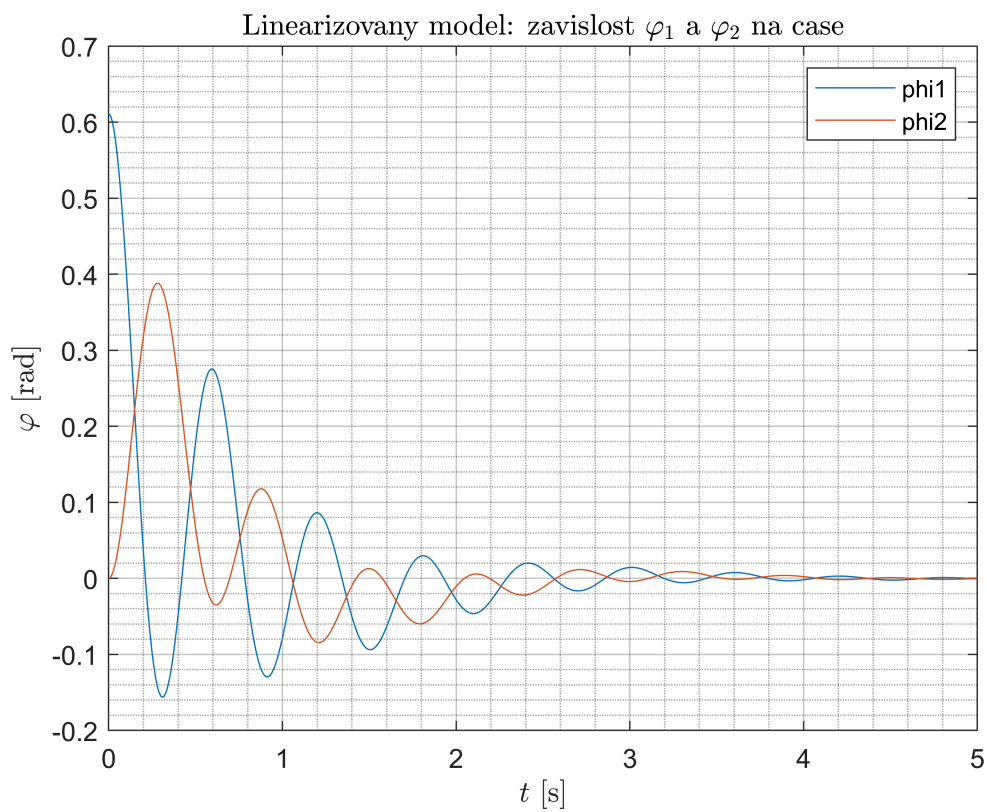
### Nastavení simulace

Pomocí táhla lze obdobně jako u nelineárního systému nastavit délku času simulace nelineárního modelu v symulinku i zde je ideální hodnotou je 5 s.

### Výpočet pomocí simuliku

Stisknutím tlačítka "spustit simulink" proběhne výpočet polohových úhlů  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ .

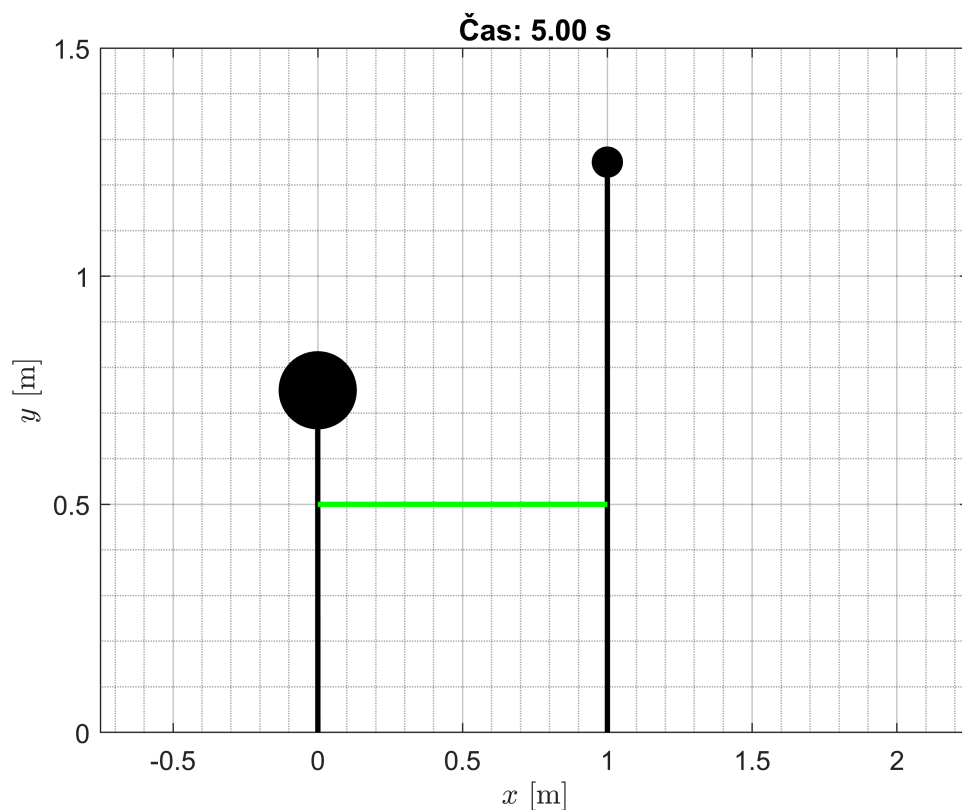
### Graf závislosti $\varphi_1$ a $\varphi_2$ na čase





## Animace

Stejně jako u nelinearizovaného modelu je zde zobrazena animace pohybu kyvadel. Pružina je opět znázorněna úsečkou spojující obě inverzní kyvadla, jejíž barva opět závisí na směru působení síly.



## Graf rozdílu mezi linearizovaným a nelinearizovaným modelem

Na následujícím grafu je znázorněn průběh  $\varphi_{1nelin.} - \varphi_{1lin.}$  a  $\varphi_{2nelin.} - \varphi_{2lin.}$ . Jak je patrné, k největší maximální odchylce od nelineárního modelu řešeného přímo pomocí simulinku dochází v oblasti mezi první a druhou sekundou pohybu. Toto je dáno tím, že obě kyvadla ze začátku pohybu nabývají největších vychýlení, které se dále díky tlumení zmenšují. V oblasti kolem singulárního bodu systému (na grafu například oblast mezi čtvrtou a pátou sekundou pohybu) jsou odchylky od nelineárního modelu blízké nule.



### Stabilita linearizovaného systému

Stabilita systému je dána vlastními čísly matice  $\mathbf{A}$ . Ta musí ležet na levé polovině komplexní roviny, tedy jejich reálná část musí být záporná. Hodnoty vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$  linearizovaného systému jsou následující.

```
ans = 4x1 complex
-1.1851 +10.4513i
-1.1851 -10.4513i
-1.3073 + 1.9247i
-1.3073 - 1.9247i
```

Jak je patrné, je tato podmínka je splněna a jelikož je linearizovaný systém v bodu rovnováhy stabilní je podle Ljapunovovy první věty v tomto bodě stabilní i původní nelineární systém.

## Návrh regulátoru

### Stavový regulátor pro regulaci do polohy $\varphi_1 = 0$

Stavový regulátor má v tomto případě za úkol regulovat systém tak aby dospěl do  $\varphi_1 = 0$  požadovaným způsobem. Tento nový systém si lze představit jako původní systém, kde vstup  $\mathbf{u}_{r0}$  je roven  $-\mathbf{K}_{r0}\mathbf{x}_{r0}$ .

#### Výběr požadovaných pólů a výpočet matice $\mathbf{K}$ stavového regulátoru

Systém s regulátorem by měl být stabilní s nekmitavou dynamikou. Stabilita systému je dána polohou pólů (vlastních čísel) matice  $\mathbf{A}_{r0}$ , které se musí nacházet na levé polovině komplexní roviny. Jinak řečeno, jejich

reálná složka musí být záporná. Nekmitavou dynamiku pak představují póly ryze reálné, tedy bez imaginární složky. Zvolíme tedy například následující póly.

$$p_1 = -10$$

$$p_2 = -8$$

$$p_3 = -11$$

$$p_4 = -9$$

Nové matice systému  $A_{r0}$ ,  $B_{r0}$ ,  $C_{r0}$ ,  $D_{r0}$  lze spočítat jako  $A_{r0} = A - BK_{r0}$ ,  $B_{r0} = 0$ ,  $C_{r0}$  a  $D_{r0}$  volíme stejné jako u původního systému.

$$Ar0 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{24823733833719203}{61847529062400} & -\frac{34816695400495867}{989560464998400} & \frac{1006836544361443}{6184752906240} & -\frac{7637776723540069}{395824185999360} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{232}{5} & 0 & -\frac{4819}{125} & -\frac{352}{125} \end{pmatrix}$$

$$Br0 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Cr0 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dr0 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla nové matice  $A_{r0}$  by tedy měli být schodné s požadovanými. Což jak vidíme platí.

$$\begin{aligned} \text{vlastni\_cisla\_Ar0} &= 4 \times 1 \\ &-11.0000 \\ &-10.0000 \\ &-9.0000 \\ &-8.0000 \end{aligned}$$

## Nastavení simulace

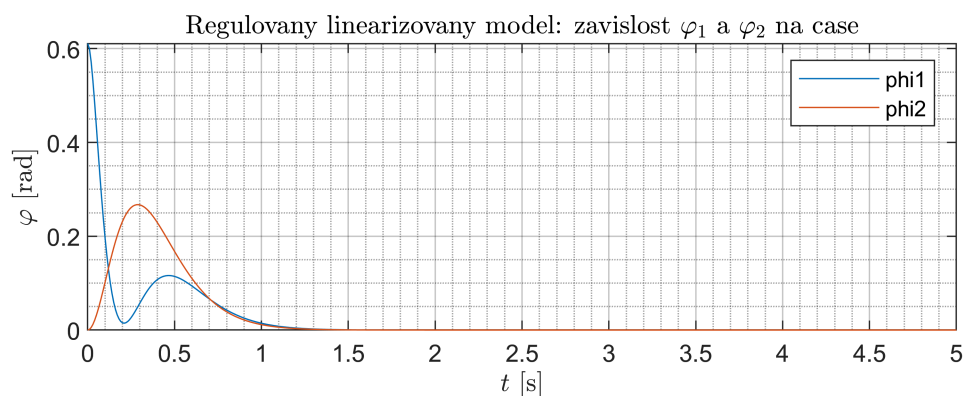
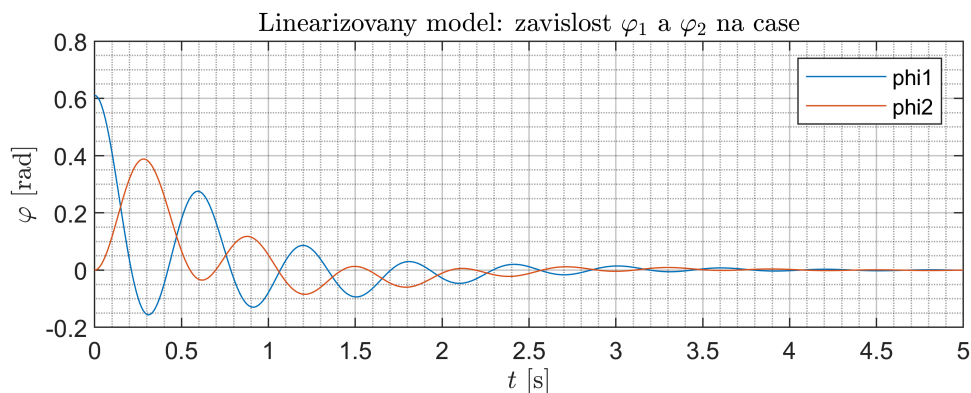
Pomocí táhla lze nastavit délku času simulace nelineárního modelu v simulinku ideální hodnotou je 5 s.

## Výpočet pomocí simulinku

Stisknutím tlačítka "spustit simulink" proběhne výpočet polohových úhlů  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ .

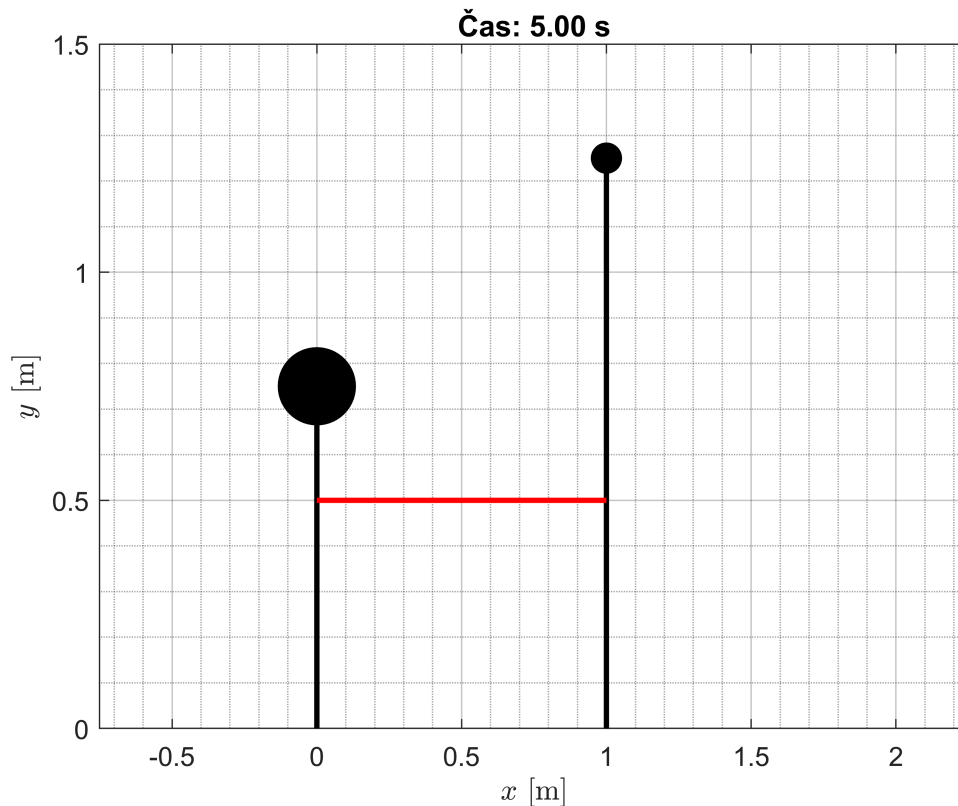
## Graf závislosti $\varphi_1$ a $\varphi_2$ na čase pro regulovaný a neregulovaný systém

Jak je patrné z následujících grafů, linearizovaný systém regulovaný pomocí stavového regulátoru dospěje ze stejných počátečních podmínek do rovnovážného stavu do jedné a půl sekundy, kdežto neregulovaný linearizovaný systém až za pět sekund, což je více než třikrát pomaleji.



## Animace

Pomocí tlačítka "Spustit animaci" se spustí animace pohybu kyvadel regulovaného linearizovaného systému. Pružina je znázorněna úsečkou spojující obě inverzní kyvadla. Barva úsečky představující pružinu závisí na působení síly, kterou pružina vyvolává.



## Stavový regulátor pro regulaci na požadovaný úhel

Stavový regulátor má v tomto případě za úkol regulovat systém tak, aby dospěl do ztoleného  $\varphi_{1k}$  požadovaným způsobem.

### Výběr požadovaných pólů a výpočet matice $K$ stavového regulátoru

Podobně jako v případě kdy systém měl dospět do  $\varphi_1 = 0$  i zde má mít systém s regulátorem stabilní a nekmitavou dynamiku. Stabilita systému je opět dána polohou pólů (vlastních čísel) matice  $A_{rx}$ . Jelikož se v tomto případě jedná o stavový regulátor, u něž lze volit požadovaná hodnota, zvýší se řád systému o jedna. Voleny jsou tedy následující vlastní čísla.

$$p1_{rx} = -6$$

$$p2_{rx} = -8$$

$$p3_{rx} = -5$$

$$p4_{rx} = -9$$

$$p5_{rx} = -7$$

Nové matice systému  $A_{rx}$ ,  $B_{rx}$ ,  $C_{rx}$ ,  $D_{rx}$  mají následující podobu.

$$A_{rx} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5819}{75} & -\frac{488}{225} & \frac{464}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{232}{5} & 0 & -\frac{4819}{125} & -\frac{352}{125} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**B** $\mathbf{r}\mathbf{x}$  =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{16}{45} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**C** $\mathbf{r}\mathbf{x}$  =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**D** $\mathbf{r}\mathbf{x}$  =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nyní zvolme požadovanou polohu  $\varphi_{1k} = x_{1k}$ , do které by měl systém dospět.

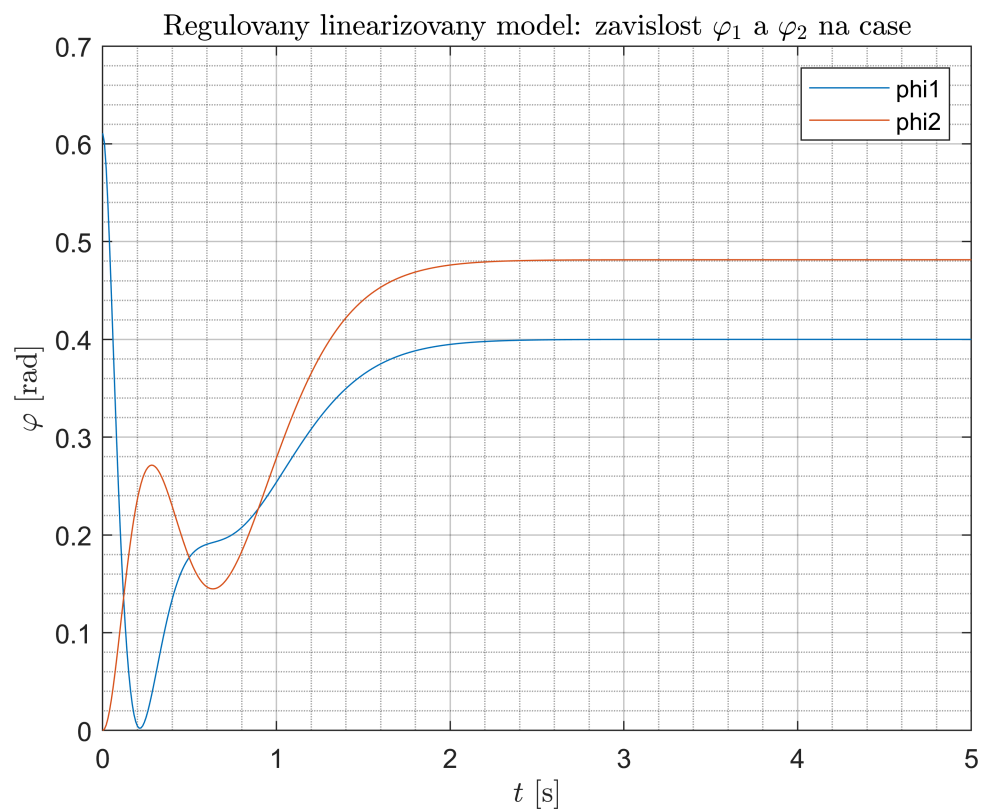
### Nastavení simulace

Pomocí táhla lze nastavit délku času simulace nelineárního modelu v simulinku ideální hodnotou je 5 s.

### Výpočet pomocí simuliku

Stisknutím tlačítka "spustit simulink" proběhne výpočet průběhu polohových úhlů  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ .

### Graf závislosti $\varphi_1$ a $\varphi_2$ na čase



### Animace

Pomocí tlačítka "Spustit animaci" se spustí animace pohybu kyvadel regulovaného linearizovaného systému, který má dospět do požadovaného konečného stavu  $\varphi_{1k} = x_{1k}$ .

