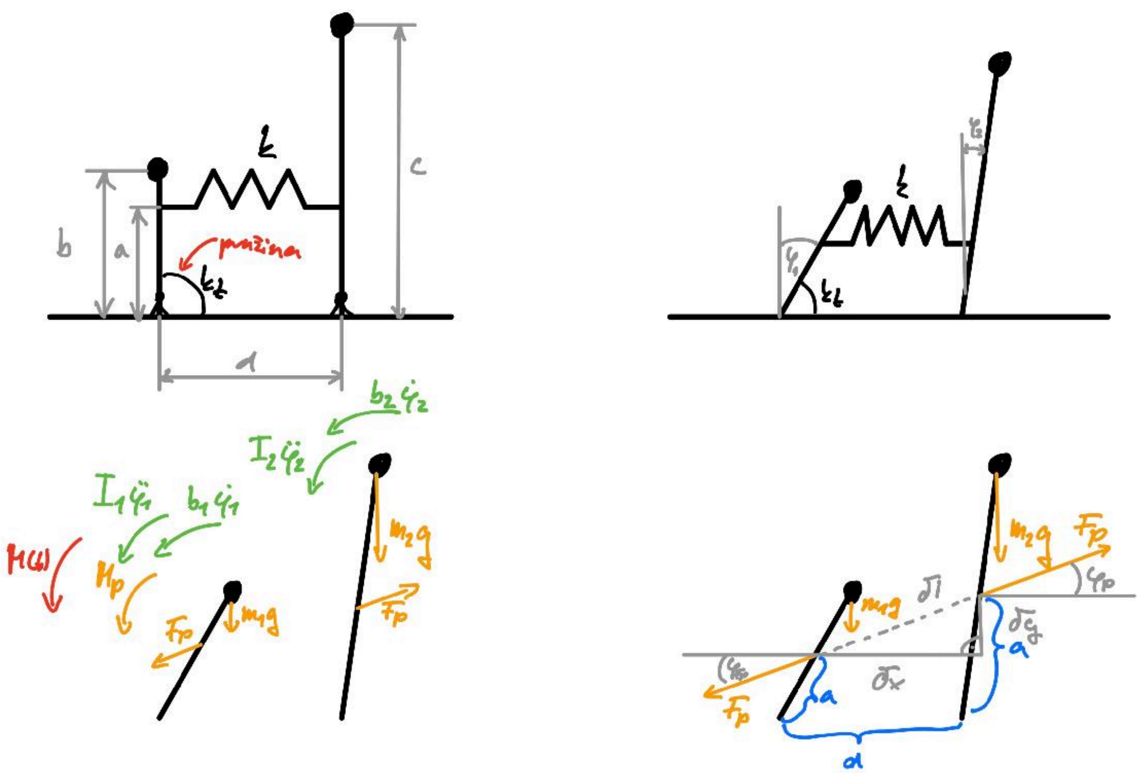
MSM semestrální práce

Jakub Znamenáček

Inicializace

zadání

$m_1 = 5\text{kg}$, $m_2 = 2\text{kg}$, $a = 0,5\text{m}$, $b = 0,75\text{m}$, $c = 1,25\text{m}$, $d = 1\text{m}$, $k = 5800\text{N/m}$, $k_t = 1100\text{Nm/rad}$, $b_1 = 6,1\text{Ns}$, $b_2 = 8,8\text{Ns}$, $g =$



dopočtené hodnoty

$G_1 = m_1 g, G_2 = m_2 g, I_1 = m_1 b^2, I_2 = m_2 c^2$

nelineární model

stavový popis

stavové proměné jsou: $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \dot{\varphi}_1$, $x_3 = \varphi_2$, $x_4 = \dot{\varphi}_2$

stavové rovnice systému jsou:

$\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = \frac{-x_1 k_t - b_1 x_2 - k\left(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}\right) \cos\left(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right) a \cos(x_1)\right.}{I_1}$$

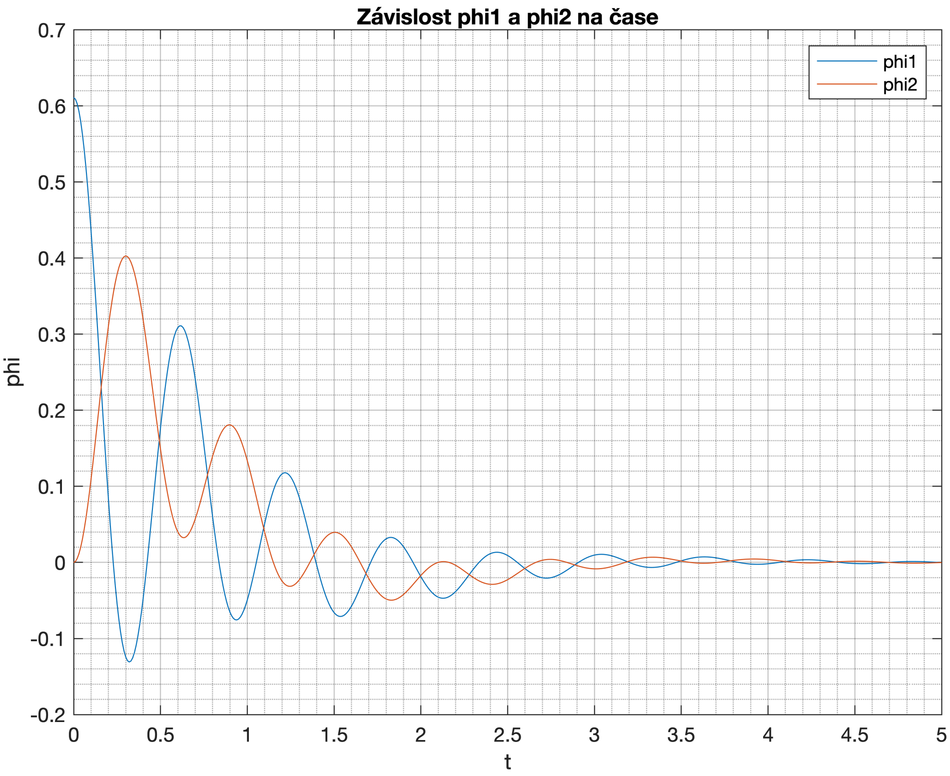
$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-b_2 x_4 + k\left(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}\right) \cos\left(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right) a \cos(x_3) + G_2\right.}{I_2}$$

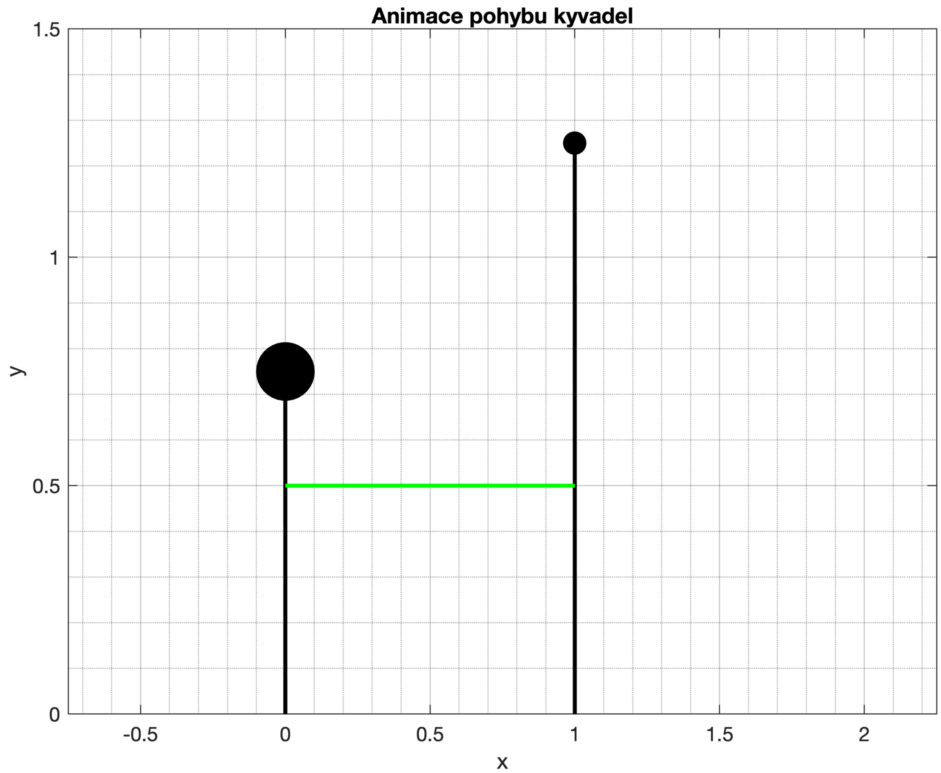
nastavení simulace

výpočet pomocí simuliku

graf závislosti phi1 a phi2 na čase



animace



Lineární model

Linearizace

stavový popis

stavové proměné jsou: $x_1 = \varphi_1,\ x_2 = \dot{\varphi}_1,\ x_3 = \varphi_2,\ x_4 = \dot{\varphi}_2$

pomocné výpočty:

$\delta x = d - a(sin(x_1) - sin(x_3))$

$\delta y = a(cos(x_3) - cos(x_1))$

$\Delta l = d - \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$

$F_p = k\Delta l$

$\varphi_p = \arctan\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)$

stavové rovnice nelineárního systému:

$\dot{x}_1 = f_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = f_2 = \frac{-x_1 k_t - b_1 x_2 - k\left(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right) a \cos\right.}{I_1}$$

$$\dot{x}_3 = f_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = f_4 = \frac{-b_2 x_4 + k\left(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right) a \cos(x_3) +\right.}{I_2}$$

singulární body

hledání singulárních bodů

Nelineární systém může mít 0 až ∞ singulárních bodů. Pro singulární body musí platit nádledující rovnice $\dot{\boldsymbol{x}} = 0$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s = const$ (v našem případě $\boldsymbol{u}_s = M_t = 0$). První rovnici lze též zapsat jako $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{u}_x) = \boldsymbol{0}$. Hledáme tak řešení splňující následující soustavu rovnic:

$$0 = x_2$$

$$0 = \frac{-x_1 k_t - b_1 x_2 - k\left(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right) a \cos(x_1)\right.}{I_1}$$

$$0 = x_4$$

$$0 = \frac{-b_2 x_4 + k\left(d - \sqrt{(d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))^2 + (a(\cos(x_3) - \cos(x_1)))^2}\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{a(\cos(x_3) - \cos(x_1))}{d - a(\sin(x_1) - \sin(x_3))}\right) a \cos(x_3) + G_2 c\right.}{I_2}$$

z které již na první pohled plyne řešení pro x_2 a x_4, zbývá tak nalézt řešení pro zbývající x_1 a x_3.

numerické řešení singulárních bodů

numerické řešení rovice $\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{u}_x) = \boldsymbol{0}$ v blízkosti bodu zg

```
Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is near zero
as measured by the value of the function tolerance, and
the problem appears regular as measured by the gradient.

<stopping criteria details>
z = 4×1
10^-9 ×
   -0.1107
    0.0000
   -0.2914
         0
```

Jak je patrné, singulárním bodem je bod $\boldsymbol{x_s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, který nás nejvíce zajímá, neb mechanizkus bude pracovat v jeho okolí. Ověřme tedy, že opravdu splňuje rovnici splňuje rovnici $\boldsymbol{f} = 0$

```
ans = 0
ans = 0
ans = 0
ans = 0
```

vidíme, že $\boldsymbol{x_s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ splňuje rovnici $\boldsymbol{f} = 0$. Linearizaci systému tedy provedeme v tomto singulárním bodě stavového prostoru.

linearizaci provedeme podle následující rovnice

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_s}, \boldsymbol{u_s}) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x_s}}|_S(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_s}) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}|_S(\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u_s})$$

vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{x_s}$, $\boldsymbol{u_s}$ a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_s}, \boldsymbol{u_s})$ je rovno nule, zjednoduší se nám linearizované stavové rovnice systému na následující rovnici:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x_s}}|_S \boldsymbol{x}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}|_S \boldsymbol{u}(t)$$

Linearizované stavové rovnice v singulárním bodě $x_s = \mathbf{0}$

f1_lin = x_2

f2_lin =

$$\frac{464\,x_3}{9} - \frac{5819\,x_1}{75} - \frac{488\,x_2}{225} - \frac{16\,\mathrm{Mt}}{45}$$

f3_lin = x_4

f4_lin =

$$\frac{232\,x_1}{5} - \frac{4819\,x_3}{125} - \frac{352\,x_4}{125}$$

Maticový zápis

$\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$

A =

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5819}{75} & -\frac{488}{225} & \frac{464}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{232}{5} & 0 & -\frac{4819}{125} & -\frac{352}{125} \end{pmatrix}$$

B =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{16}{45} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

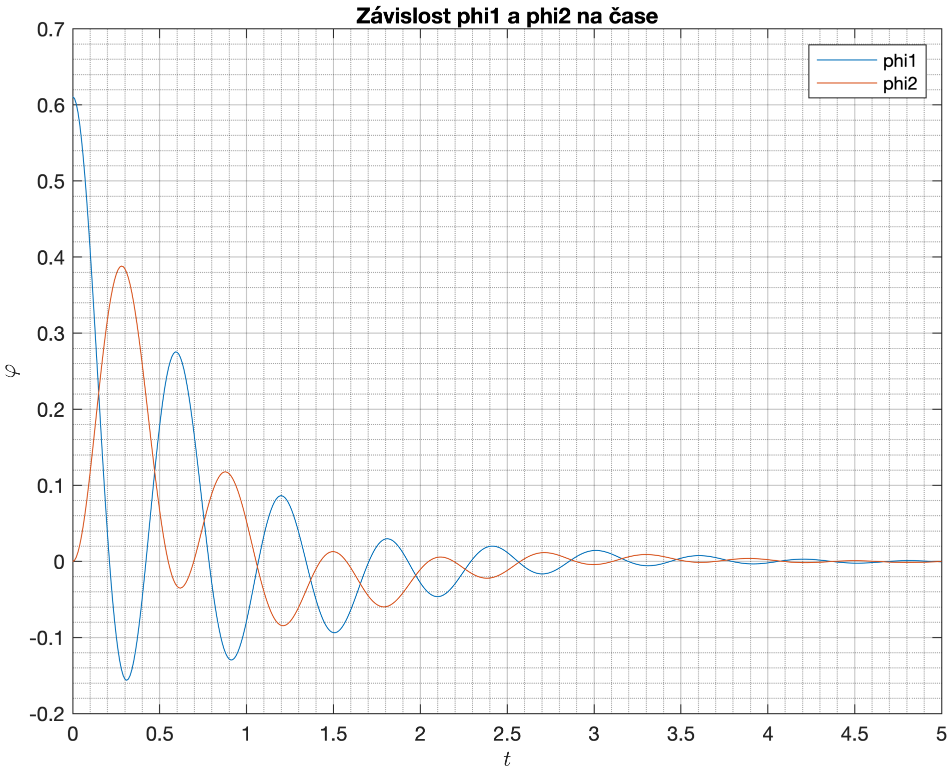
D =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

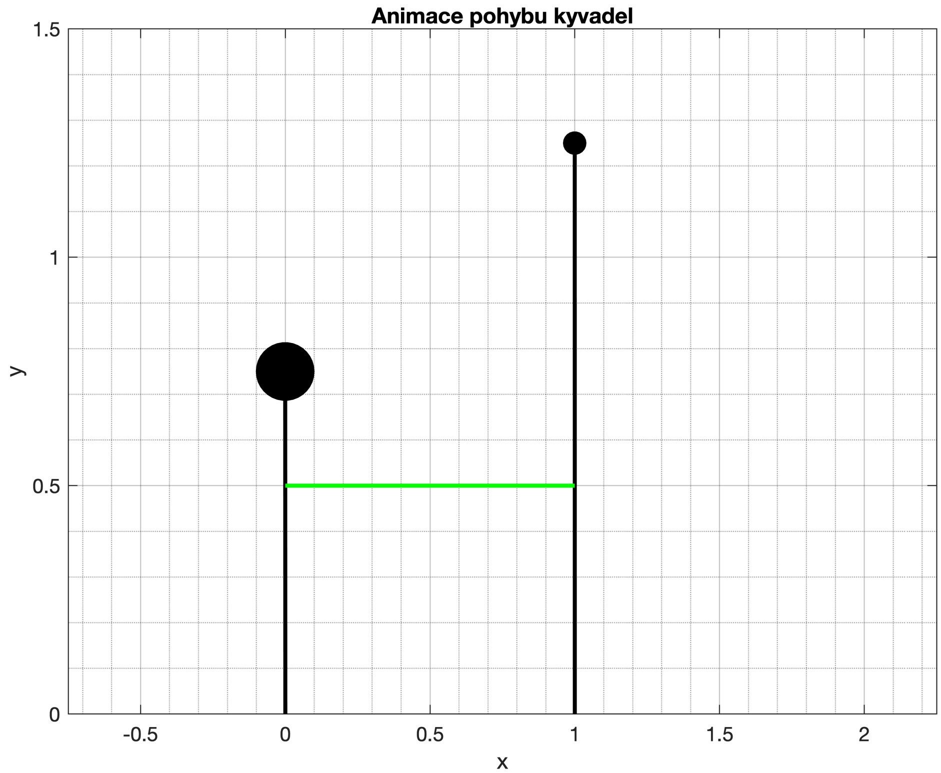
nastavení simulace

výpočet pomocí simuliku

graf závislosti phi1 a phi2 na čase


Závislost phi1 a phi2 na čase
phi1
phi2
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
φ
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
t

animace



graf rozdílu mezi linearizovaným a nelinearizovaným modelem

stabilita systému

stabilita systému je dána vlastními čísly matice $\mathbf{A}$. Ta musí ležet na leve polorovině (jejich reálná část musí být záporná)

```
ans = 4×1 complex
  -1.1851 +10.4513i
  -1.1851 -10.4513i
  -1.3073 + 1.9247i
  -1.3073 - 1.9247i
```

vidíme, že tato podmínka je splněna. Jelikož je linearizovaný systém v bodu rovnováhy stabilní je podle Ljapunovovi první věty v tomto bodě stabilní i původní nelineární systém.

návrh regulátoru

```
Auro =
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{17297}{225} & -\frac{488}{225} & \frac{464}{9} & 0 & -\frac{32}{45} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{232}{5} & 0 & -\frac{4819}{125} & -\frac{352}{125} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Buro =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Curo = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Duro = 0

aby byl uzavřený regulační obvod (URO) stabilní a nekmitavý musí platit, že vlatní čísla matice $\mathbf{A_{URO}}$ jsou záporná a reálná

```
ans = 5×1 complex
  -1.1883 +10.4283i
  -1.1883 -10.4283i
  -1.3276 + 1.8808i
  -1.3276 - 1.8808i
   0.0470 + 0.0000i
```