

未来试题 题解

Tags : 计数 / 概率DP / 发现性质

考虑 DP, 设 $f_{i,j}$ 表示长度为 i 的随机排列, 逆序对数在对 k 取模的意义下为 j 的概率。

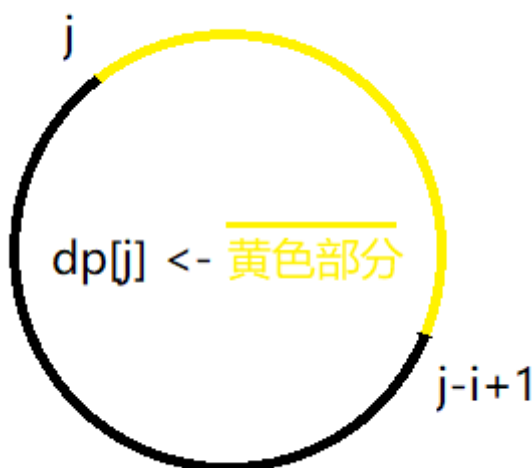
则有:

$$f_{i,j} = \frac{1}{i} \sum_{x=0}^{i-1} f_{i-1, j-x \bmod k}$$

$$f_{1,0} = 1$$

可以用前缀和优化到 $O(nk)$ 。

观察 DP 式, 发现每次关于 $f_{i,x}$ 的转移是关于 $f_{i-1,x}$ 在模 k 意义下的环上连续 i 个数的平均数。



考虑 $i = k$ 的时候, 这连续 k 个数恰好为 $f_{k-1,0}, f_{k-1,1}, \dots, f_{k-1,k-1}$ 整个环。

所以 $f_{k,0} = f_{k,1} = \dots = f_{k,k-1} = \frac{1}{k}$ 。

再根据 DP 式可以归纳出, 当 $x \geq k, y \in [0, k-1]$ 时均有 $f_{x,y} = \frac{1}{k}$ 。

所以, DP 递推最多只需进行 k 次, 当 $n \geq k$ 时, 答案恒为 $\frac{1}{k}$ 。

总时间复杂度 $O(k^2)$ 。