Коллоквиум ТФКП.

1.

Теорема (о первообразной). *Если функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D, то функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ является первообразной в области D для функции $f(z)$.*

♦ Возможность построения однозначной функции $F(z)$ вытекает из следствия 1 интегральной теоремы Коши. Необходимо доказать, что $\forall z \in D$ $F'(z) = f(z)$. Возьмем точки z, $z + \Delta z \in D$. Тогда

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta}{\Delta z} =$$
$$= [\text{из независимости от формы пути}] = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta}{\Delta z}.$$

$$F'(z) - f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \Big(\frac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - f(z) \Big) = \lim_{\Delta z \to 0} \Big(\frac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \frac{f(z)}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\zeta \Big) =$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} \Big(f(\zeta) - f(z) \Big) d\zeta = \Big[\frac{1}{|\Delta z|} \cdot \Big| \int\limits_{z}^{z+\Delta z} \Big(f(\zeta) - f(z) \Big) d\zeta \Big| \leqslant [$$

функция дифференцируема, следовательно, непрерывна в точке z, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall \zeta : |\zeta - z| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| \leqslant \varepsilon \Big] \leqslant \frac{1}{\Delta z} \varepsilon \cdot |\Delta z| = \varepsilon \Big] = 0.$$

⊠

2.

Теорема (о почленном дифференцировании степенного ряда). *Если комплексный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$, то функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ является бесконечно дифференцируемой в круге $|z| < R$ и m-ая производная имеет вид*

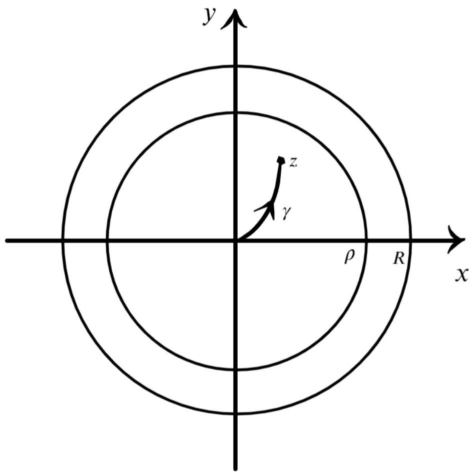
$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-m+1) \cdot z^{n-m}, \ |z| < R, \forall m \in \mathbb{N}.$$

♦ Рассмотрим ряд $S(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot z^{n-1}$. Из формулы Коши-Адамара следует, что радиус сходимости этого ряда равен

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{n \cdot |c_n|}} = R.$$

Следовательно, ряд, сходящийся в функции, $S(z)$ имеет тот же радиус схожимости, что и ряд, сходящийся к $f(z)$.

Возьмем окружность радиуса $\rho < R$. Тогда в круге $\overline{B}(0,\rho)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot z^{n-1}$ сходится равномерно по лемме Абеля. Возьмем произвольную точку z и кривую γ, которая лежит в круге радиуса ρ и соединяет точку z с началом координат.



Тогда интеграл $\int\limits_{\gamma} z^{n-1}dz$ не зависит от кривой интегрирования, так как функ ция z^{n-1} дифференцируема на всей плоскости. Следовательно,

$$\int\limits_{\gamma} z^{n-1}dz = \int\limits_{0}^{z} \zeta^{n-1}d\zeta = \frac{z^n}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot nz^{n-1}$ сходится равномерно на кривой γ. Тогда по теореме о почленном интегрировании

$$\int\limits_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot z^{n-1}dz = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = f(z) - c_0.$$

Причем интеграл слева не зависит от кривой интегрирования, следовательно

$$\int\limits_{0}^{z} S(\zeta)d\zeta = f(z) - c_0. \tag{1}$$

Используя доказательство теоремы о первообразной, можно доказать, что $\int\limits_{0}^{z} S(\zeta)d\zeta$ — первообразная для функции $S(z)$.

Из равенства (1) получаем, что функция $f(z)$ является первообразной для функции $S(z)$. Значит $f'(z) = S(z)$. Отсюда функция $f(z)$ является дифференцируемой в круге $B(0,\rho)$. А так как ρ можно вызять сколь угодно близким к R, то функция $f(z)$ дифференцируема в круге $B(0,R)$. Тогда

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot z^{n-1}.$$

Повторяя аналогичные рассуждения к функции $f'(z)$, можно показать, что через $(m-1)$ шагов получим

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-m+1) \cdot z^{n-m}.$$

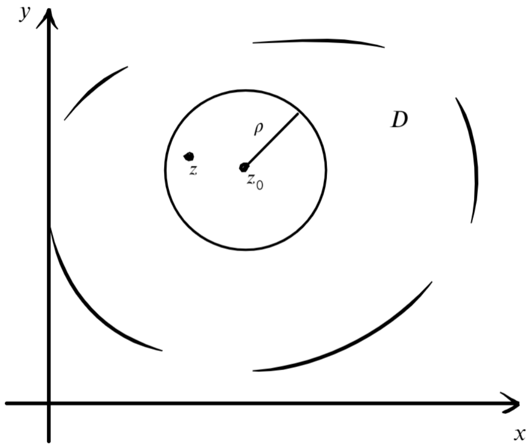
⊠

3.

Теорема (критерий регулярности функции в области)**.** *Функция $f(z)$ регулярна в области $D \iff$ функция $f(z)$ дифференцируема в области D.*

♦ $\Rightarrow$) Если функция регулярна в области, то она разложима в степенной ряд в этой области. А сумма комплексного степенного ряда — функция дифференцируема по теореме о почленном дифференцировании степенного ряда.

$\Leftarrow$) Возьмем в области D окружность $C(z_0, \rho)$ таким образом, чтобы она целиком лежала в области D. И возьмем произвольную точку z.



Функция $f(z)$ дифференцируема в области D, значит дифференцируема и в окружности $C(z_0, \rho)$. По интегральной формуле Коши.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Разложим в степенной ряд функцию $\dfrac{1}{\zeta - z}$ по степеням $z - z_0$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n},$$

Причем $\dfrac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} < 1$. И пусть $\zeta \in C(z_0, \rho)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}$ сходится равномерно на окружности $C(z_0, \rho)$ по признаку Вейрштрасса.

Таким образом, ряд

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

также сходится равномерно на окружности $C(z_0, \rho)$.

Проинтегрируем последнее равенство по окружности $C(z_0, \rho)$ и домножим обе части уравнения на $\dfrac{1}{2\pi i}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \Big(\int\limits_{C(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \Big) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in B(z_0, \rho).$$

⊠

4.

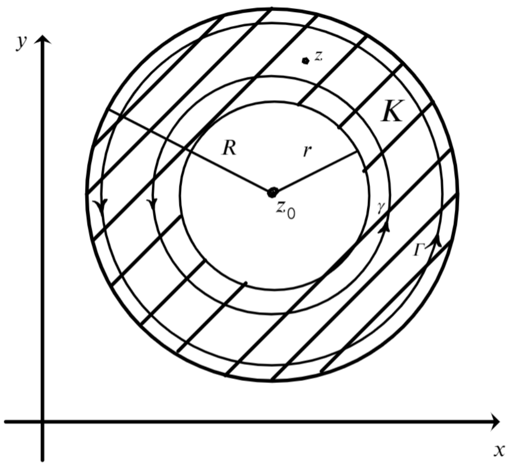
Теорема (о представлении регулярной в кольце функции рядом Лорана)**.** *Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 \leqslant r < |z - z_0| < R$, то эта функция является суммой ряда Лорана, то есть*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad r < \rho < R.$$

♦ Обозначим через K кольцо $r < |z - z_0| < R$. Рассмотрим кривые Γ и γ, лежащие в кольце K. Возьмем произвольную точку $z \in K$, лежащую между кривыми Γ и γ.



По следствию 1 из интегральной формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Рассмотрим интеграл по Γ. По критерию регулярности

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Отсюда
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Рассмотрим интеграл по γ. Разложим в степенной ряд функцию $-\dfrac{1}{\zeta - z}$ по степеням $z - z_0$:

$$-\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0})} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = [n + 1 = -k] = \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Полученный ряд сходится равномерно на окружности γ (это следует из леммы Абеля). Тогда ряд
$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \cdot (z - z_0)^k$$
также сходится равномерно на окружности γ. А так как γ — это компакт и функция $f(\zeta)$ непрерывна на этом компакте, то функция $f(\zeta)$ ограничена. Почленно проинтегрируем этот ряд:

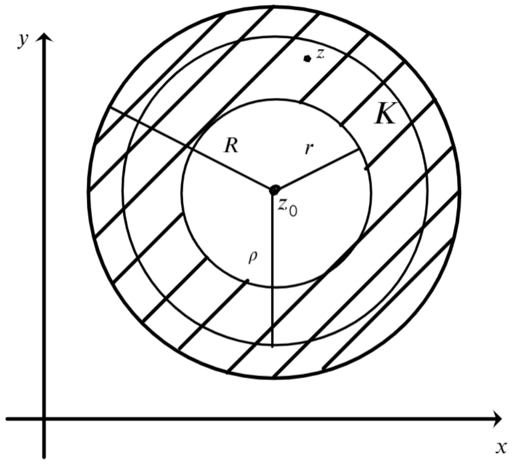
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-1}^{-\infty} \Big(\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\Big) \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot d\zeta.$$

Таким образом, ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\Big)(z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\Big) \cdot (z - z_0)^n.$$

Возьмем окружность радиуса ρ. Обе кривые γ и Γ можно деформировать в эту окружность. Следовательно, вместо γ и Γ можно взять окружность радиуса ρ.



Тогда ряд Лорана можно записать в виде

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(z_0,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

⊠

5.

Теорема (об устранимой особой точке)**.** *Точка z_0 — устранимая особая точка $\Longleftrightarrow$ главная часть разложения функции в ряд Лорана тождественно равна нулю.*

⧫ $\Rightarrow$) Рассмотрим функцию $f(z)$ такую, что z_0 для нее — устранимая особая точка. Докажем, что главная часть в разложении в ряд Лорана отсутствует. Берем ряд Лорана

$$f(z) = \ldots + c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots.$$

Точка z_0 — устранимая особая точка, следовательно, $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C} \Rightarrow$ функция $f(z)$ ограничена, то есть $\exists M : |f(z)| \leqslant M$ в круге $0 < |z - z_0| < \rho_1$. Воспользуемся неравенством для коэффициентов ряда Лорана:

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R_0^n},\ M = \max_{z \in C(z_0,\rho)} |f(z)|,$$

где $0 < R_0 < \rho_1$. Тогда $|c_{-n}| \leqslant MR_0^n$, но R_0 может быть сколь угодно близким к 0. Тогда, если $R_0 \to 0$, то $MR_0^n \to 0$, следовательно, $c_{-n} = 0$, то есть все коэффициенты главной части ряда Лорана равны нулю, значит, главная часть равна нулю.

$\Leftarrow$) Пусть главная часть разложения в ряд Лорана функции $f(z)$ отсутствует, то есть в круге $0 < |z - z_0| < \rho$

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots.$$

Берем функцию

$$g(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots.$$

Тогда $f(z) = g(z)$ в кольце $0 < |z - z_0| < \rho$. И функция $g(z)$ определена и непрерывна в круге $|z - z_0| < \rho$ (в то время как $f(z)$ может быть и не определена). Следовательно,

$$g(z_0) = A = \lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

⊠