Приведение уравнений в общей форме к уравнениям в нормальной форме.

• ***Обыкновенным дифференциальным уравнением в общей форме**, или **уравнением неразрешенным относительно производной (УНОП)** называется уравнение вида*

$$F(x, y, y') = 0,$$

где функция F определена в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Исходя из названия, данный тип уравнений мы не можем разрешить известными нам методами. Однако такие уравнения мы можем свести к тем, с которыми сталкивались уже ранее, а именно к разрешенным относительно производной. Для этого рассмотрим 2 метода.

Первый метод. Уравнение вида

$$(y')^n + a_{n-1}(x, y)(y')^{n-1} + \ldots + a_1(x, y)y' + a_0(x, y) = 0$$

называется **алгебраическим относительно производной**. С помощью вынесения общих множителей, выделения полных квадратов, кубов и т.д. данные уравнения можно свести к нескольким разрешенным относительно производной уравнениям.

Второй метод. Продифференцировав УНОП по x, мы получим

$$\Big(F(x, y, y')\Big)'_x = F'_x + F'_y \cdot y' + F_{y'} \cdot y'' = 0.$$

Данное уравнение является разрешенным относительно y''. Но в таком случае возникают некоторые нюансы в связи с повышением порядка уравнения. А именно, если все рещения исходного уравнения находились во множестве $\mathbb{I}_1$, то теперь они перейдут во множество $\mathbb{I}_2 \supseteq \mathbb{I}_1$, т.е. появятся новые решения, которые не входят в исходное множество. Поэтому их необходимо исключать.

Пример 1. Найти полное решение уравнения

$$(y')^2 - 2xy' = 8x^2.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение. Если мы прибавим к обеим частям уравнения x^2, то левую часть можно свернуть в полный квадрат:

$$(y')^2 - 2xy' + x^2 = 9x^2 \;\Rightarrow\; (y' - x)^2 = 9x^2.$$

Перенесём правую часть равенства влево и получим разность квадратов:

$$(y' - x)^2 - 9x^2 = 0 \;\Rightarrow\; (y' - x - 3x)(y' - x + 3x) = (y' - 4x)(y' + 2x) = 0.$$

Мы получили произведение двух уравнений разрешенных относительно производной. Поэтому полным решеним исходного уравнения будет совокупность функций, которые являются решениями каждого из множителей.

Рассмотрим уравнение $y' - 4x = 0$. Тогда $y' = 4x$ — простейшее ДУ (т.к. $y = y(x)$). Проинтегрируем его

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} 4\tau d\tau + C = 2x^2 + C.$$

Теперь рассмотрим уравнение $y' + 2x = 0$. Уравнение $y' = -2x$ также является простейшим. Аналогично проинтегрируем его

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} (-2)\tau d\tau + C = -x^2 + C.$$

Тогда полным решением исходного уравнения будет совокупность двух функций

$$\left[\begin{array}{l} y = 2x^2 + C, \\ y = -x^2 + C. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = 2x^2 + C, \\ y = -x^2 + C. \end{array}\right.$

Пример 2. Найти полное решение уравнения

$$(y')^3 - (x^2 + xy + y^2)((y')^2 - xyy') - x^3y^3 = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение. Для начала раскроем скобки и получим

$$(y')^3 - x^2y^2 + x^3yy' - xy(y')^2 + x^2y^2y' - y^2(y')^2 + xy^3y' - x^3y^3 = 0.$$

Вынесем общие множители

$$(y')^2(y' - xy) + x^2y^2(y' - xy) - y^2y'(y' - xy) - x^2y'(y' - xy) = 0.$$

$$(y' - xy) = ((y')^2 + x^2y^2 - y^2y' - x^2y') = 0.$$

Снова вынесем общие множители и получим

$$(y' - xy)(y' - y^2)(y' - x^2) = 0.$$

В итоге у нас получилось произведение уравнений разрешенных относительно y'.

Рассмотрим уравнение $y' - xy = 0$. Это уравнение линейно относительно y и его общее решение имеет вид

$$y = Ce^{x^2/2}.$$

Рассмотрим уравнение $y' - y^2 = 0$. Это УРП. Проинтигреруем его

$$\frac{dy}{y^2} - dx = 0.$$

Тогда $-\dfrac{1}{y} - x = C$. Отсюда общее решение

$$y = -\frac{1}{x + C}.$$

Рассмотрим уравнение $y' - x^2 = 0$. Это уравнение простейшее, следовательно его общее решение

$$y = \frac{x^3}{3} + C.$$

Таким образом, полным решеним исходного уравнения является совокупность функций

$$\left[\begin{array}{l} y = Ce^{x^2/2}, \\ y = -\dfrac{1}{x+C}, \\ y = \dfrac{x^3}{3} + C. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = Ce^{x^2/2}, \\ y = -\dfrac{1}{x+C}, \\ y = \dfrac{x^3}{3} + C. \end{array}\right.$

Пример 3. Найти полное решение уравнения

$$(y')^2 - 4y = 0.$$

Решение. Данное уравнение можно также преобразовать. Однако попробуем в этот раз воспользоваться вторым методом. Проинтегрируем данное уравнение по x. Тогда

$$2y' \cdot y'' - 4y' = 0.$$

Тогда

$$2y'(y'' - 2) = 0.$$

Получаем совокупность простейших уравнений

$$\left[\begin{array}{l} y' = 0, \\ y'' = 2. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = C, \\ y' = 2x + C_1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = C, \\ y = x^2 + C_1 x + C_2. \end{array}\right.$$

Однако данные уравнения не являются решениями исходного, так как мы расширили множество решений, повысив порядок уравнения. Поэтому выделим из совокупности те решения, которые удовлетворяю исходному уравнению.

Возьмем $y = C$ и подставим в исходное уравнение

$$0 - 4C = 0 \ \Rightarrow \ C = 0.$$

То есть из всех решений $y = C$ для исходного уравнения подходит только решение

$$y = 0.$$

Проделаем аналогичные действия с решением $y = x^2 + C_1 x + C_2$. Подставим его в исходное уравнение

$$4x^2 + C_1^2 + 4xC_1 - 4x^2 - 4xC_1 - 4C_2 = 0.$$

Отсюда

$$C_1^2 = 4C_2 \ \Rightarrow \ C_1 = \pm 2\sqrt{C_2}.$$

Возьмем $C_1 = 2\sqrt{C}_2$ и подставим в уравнение $y = x^2 + C_1 x + C_2$. Тогда

$$y = x^2 + 2\sqrt{C}_2 x + C_2 \ \Rightarrow \ y = (x + \sqrt{C}_2)^2.$$

Причем $\sqrt{C}_2$ можно заменить на другую константу $C = \sqrt{C}_2$. Тогда получаем решение

$$y = (x + C)^2.$$

Теперь возьмем $C_1 = -2\sqrt{C_2}$. Также подставим в $y = x^2 + C_1 x + C_2$ и получим

$$y = (x - \sqrt{C_2})^2.$$

Здесь мы также можем заменить $C = -\sqrt{C_2}$, тем самым получив то же самое решение

$$y = (x + C)^2.$$

В итоге полное решение исходного уравнения будет составлять совокупность функций

$$\left[\begin{aligned} &y = 0, \\ &y = (x + C)^2. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{aligned} &y = 0, \\ &y = (x + C)^2. \end{aligned}\right.$