МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра вычислительной математики

Лабораторная работа №2

«Разностные схемы для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка»

Вариант 2

Выполнил:

Бовт Тимофей Анатольевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:

Репников Василий Иванович

Минск, 2024 г.

Постановка задачи

Поставлена дифференциальная задача, описывающая процесс стационарного распределения тепла в стержне единичной длины

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x),\ 0 < x < 1, \\ u(0) = \mu_1, \\ -u'(1) = \sigma_2 u(1), \end{cases} \tag{1}$$

где

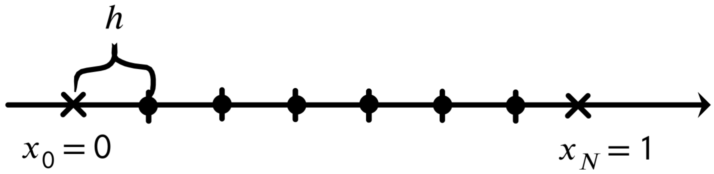
- $k(x) = 4 - x^2$ – это коэффициент теплопроводности материала стержня;
- $q(x) = x^2$ отвечает за мощность стоков или источников тепла;
- $f(x) = 4\cos x - 2x\sin x$ – это плотность распределения внешних источников или стоков тепла;
- $\mu_1 = 1$;
- $\sigma_2 = \operatorname{tg} 1$;
- $u(x) = \cos x$ – температура стержня (точное решение).

1. Построить разностную схему, заменяя дифференциальные производные разностными;
2. Методом баланса построить консервативную схему, составив уравнение баланса и проведя интегрирование по $[x_{i-1}, x_i]$;
3. Построить вариацинно-разностную схему методом Ритца;
4. Используя метод разностной прогонки, составить программу решения исходной задачи с помощью разностных схем п.п. 1-2, выполнить контрольные расчеты на ЭВМ и провести сравнительный анализ результатов.

1 Построение разностной схемы

Зададим равномерную сетку узлов на отрезке $[0, 1]$, на котором поставлена наша задача, следующим образом

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ h = \frac{1}{N} \right\}. \tag{2}$$



На этой сетке определим сеточную функцию $y = y(x)$, которая будет являться приближенным решением поставленной задачи (1), то есть это будет сеточное приближение функции $u = u(x)$.

Заменяя дифференциальные производные разностными, можем построить разностную схему в безиндексной форме

$$\begin{cases} \left(k\left(x-\frac{h}{2}\right)y(x)_{\overline{x}}\right)_x - q(x)y(x) = -f(x),\ x \in \omega_h, \\ y(0) = \mu_1, \\ -y_{\overline{x}}(1) = \sigma_2 y(1). \end{cases} \tag{3}$$

Если мы распишем все разностные производные, то получим разностную схему в индексной форме

$$\begin{cases} \dfrac{k_{i+\frac{1}{2}}y_{i+1} - k_{i+\frac{1}{2}}y_i - k_{i-\frac{1}{2}}y_i + k_{i-\frac{1}{2}}y_{i-1}}{h^2} - q(x_i)y_i = -f(x_i),\ i = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = \mu_1, \\ -\dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} = \sigma_2 y_N \end{cases} \tag{4}$$

Исследуем порядок аппроксимации дифференциальной задачи построенной разностной схемой. Сперва рассмотрим погрешность аппроксимации дифференциального уравнения

$$\psi_h(x) = \left(k\left(x-\frac{h}{2}\right)u_{\overline{x}}\right)_x - q(x)u(x) + f(x)$$

Учитывая, что

$$\left(k\left(x-\frac{h}{2}\right)u_{\overline{x}}\right)_x = (k(x)u'(x))' - \frac{h^2}{8}k''(x)u''(x) + O(h^3),$$

подставим в уравнение для погрешности и получим

$$\psi_h(x) = (k(x)u'(x))' - \frac{h^2}{8}k''(x)u''(x) + O(h^3) - q(x)u(x) + f(x) = -\frac{h^2}{8}k''(x)u''(x) + O(h^3) = O(h^2).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение аппроксимируется на шаблоне со вторым порядком.

Рассмотрим погрешность аппроксимации левого граничного условия. Так как на левой границе у нас отсутствует аппроксимация производной, то левое граничное условие аппроксимируется точно, то есть

$$\nu_h(0) = u(0) - \mu_1 = 0.$$

Рассмотрим погрешность аппроксимации правого граничного условия

$$\nu_h(1) = -u_{\overline{x}}(1) - \sigma_2 u(1).$$

Так как

$$u_{\overline{x}}(x) = u'(x) - \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2),$$

то

$$\nu_h(1) = -u'(1) + \frac{h}{2}u''(1) + O(h^2) - \sigma_2 u(1) = \frac{h}{2}u''(1) + O(h^2) = O(h).$$

Таким образом, правое граничное условие аппроксимируется с первым порядком. Тогда общий порядок аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой равен

$$\Psi_h(x) = \psi_h(x) + \nu_h(0) + \nu_h(1) = O(h),$$

то есть получили аппроксимацию первого порядка.

Повысим порядок аппроксимации разностной схемы, не изменяя минимального шаблона. Поскольку мы получаем аппроксимацию первого порядка именно из-за правого граничного условия, то представим его в другом виде

$$-y_{\overline{x}}(1) = \overline{\sigma}_2 y(1) + \overline{\mu}_2,$$

где $\overline{\sigma}_2, \overline{\mu}_2$ – это сеточные параметры, которые подлежат определению. Рассмотрим невязку над точным решением, чтобы определить вид введенных параметров

$$\nu_h(1) = -u_{\overline{x}}(1) - \overline{\sigma}_2 u(1) - \overline{\mu}_2 = -u'(1) + \frac{h}{2}u''(1) + O(h^2) - \overline{\sigma}_2 u(1) - \overline{\mu}_2.$$

Предположим, что дифференциальное уравнение поставленной задачи (1) выполняется на правой границе, то есть

$$(k(1)u'(1))' - q(1)u(1) = -f(1),$$

тогда получим

$$k'(1)u'(1) + k(1)u''(1) - q(1)u(1) = -f(1).$$

Отсюда можем получить

$$u''(1) = \frac{q(1)u(1) - f(1) - k'(1)u'(1)}{k(1)}.$$

Таким образом, учитывая, что $-u'(1) = \sigma_2 u(1)$, получим

$$\nu_h(1) = \sigma_2 u(1) + \frac{h}{2} \cdot \frac{q(1)u(1) - f(1) + k'(1)\sigma_2 u(1)}{k(1)} + O(h^2) - \overline{\sigma}_2 u(1) - \overline{\mu}_2.$$

Тогда можно выбрать

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_2 = \sigma_2 \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{k'(1)}{k(1)}\right) + \frac{h}{2} \cdot \frac{q(1)}{k(1)}, \\ \overline{\mu}_2 = -\frac{h}{2} \cdot \frac{f(1)}{k(1)}. \end{cases}$$

При таком выборе мы получим аппроксимацию правого граничного условия со вторым порядком. Следовательно, вся дифференциальная задача будет аппроксимироваться со вторым порядком разностной схемой вида

$$\begin{cases} \left(k\left(x - \frac{h}{2}\right) y(x)_{\overline{x}}\right)_x - q(x)y(x) = -f(x),\ x \in \omega_h, \\ y(0) = \mu_1, \\ -y_{\overline{x}}(1) = \left[\sigma_2 \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{k'(1)}{k(1)}\right) + \frac{h}{2} \cdot \frac{q(1)}{k(1)}\right] y(1) - \frac{h}{2} \cdot \frac{f(1)}{k(1)}. \end{cases} \tag{5}$$

Но для реализации разностной схемы нам нужна индексная форма записи

$$\begin{cases} \frac{k_{i+\frac{1}{2}} y_{i+1} - k_{i+\frac{1}{2}} y_i - k_{i-\frac{1}{2}} y_i + k_{i-\frac{1}{2}} y_{i-1}}{h^2} - q(x_i)y_i = -f(x_i),\ i = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = \mu_1, \\ -\frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \left[\sigma_2 \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{k'(1)}{k(1)}\right) + \frac{h}{2} \cdot \frac{q(1)}{k(1)}\right] y_N - \frac{h}{2} \cdot \frac{f(1)}{k(1)} \end{cases} \tag{6}$$

Чтобы применить к разностной схеме метод прогонки, выпишем коэффициенты, которые будут образовывать трехдиагональную матрицу. Если мы задаем трехдиагональную матрицу в виде

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \gamma_0 & \beta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & g_0 \\ \alpha_1 & \gamma_1 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & \alpha_1 & \gamma_2 & \dots & 0 & 0 & g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_{N-1} & \beta_{N-1} & g_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_N & \gamma_N & g_N \end{array}\right) \tag{7}$$

то в соответствии с нашей разностной схемой (6) имеем

$$\gamma_0 = 1,\ \beta_0 = 0,\ g_0 = \mu_1,$$

$$\alpha_i = \frac{k(x_i - \frac{h}{2})}{h^2},\ \gamma_i = -\frac{k(x_i - \frac{h}{2}) + k(x_i + \frac{h}{2})}{h^2} - q(x_i),\ \beta_i = \frac{k(x_i + \frac{h}{2})}{h^2},\ g_i = -f(x_i),$$

$$\alpha_N = \frac{1}{h},\ \gamma_N = -\left[\frac{1}{h} + \sigma_2 \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{k'(1)}{k(1)}\right) + \frac{h}{2} \cdot \frac{q(1)}{k(1)}\right],\ g_N = -\frac{h}{2} \cdot \frac{f(1)}{k(1)}.$$

Покажем, что в данном случае метод прогонки сходится. Для сходимости метода необходимо выполнение следующих условий:

$$|\beta_0| \leqslant |\gamma_0|,\ |\alpha_i| + |\beta_i| \leqslant |\gamma_i|,\ |\alpha_N| \leqslant |\gamma_N|.$$

Действительно,

$$|\beta_0| \leqslant |\gamma_0| \Rightarrow 0 < 1,$$

то есть первое условие верно, причем равенство строгое;

$$|\alpha_i| + |\beta_i| \leqslant |\gamma_i| \Rightarrow \left|\frac{k(x_i - \frac{h}{2})}{h^2}\right| + \left|\frac{k(x_i + \frac{h}{2})}{h^2}\right| \leqslant \left|-\frac{k(x_i - \frac{h}{2}) + k(x_i + \frac{h}{2})}{h^2} - q(x_i)\right|,$$

оба выражения под модулями слева неотрицательны, так как являются сеточными функциями, а справа при раскрытии модуля меняем знак

$$\frac{k(x_i - \frac{h}{2})}{h^2} + \frac{k(x_i + \frac{h}{2})}{h^2} \leqslant \frac{k(x_i - \frac{h}{2}) + k(x_i + \frac{h}{2})}{h^2} + q(x_i),$$

отсюда

$$q(x_i) \geqslant 0,$$

что верно для каждого x_i из сетки;

$$|\alpha_N| \leqslant |\gamma_N| \Rightarrow \left|\frac{1}{h}\right| \leqslant \left|-\left[\frac{1}{h} + \sigma_2 \cdot \left(1 + \frac{h}{2} \cdot \frac{k'(1)}{k(1)}\right) + \frac{h}{2} \cdot \frac{q(1)}{k(1)}\right]\right|,$$

где при раскрытии модулей очевидно неравенство будет выполняться, так как справа мы прибавляем положительное число к $\dfrac{1}{h}$. Таким образом, метод прогони для реализации разностной схемы сходится.

2 Построение консервативной разностной схемы методом баланса

Для построения разностной схемы нам нужно привести поставленную задачу (1) к подходящему виду. В общем случае разностная схема по методу баланса строится для задачи вида

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x),\ 0 < x < 1, \\ k(0)u'(0) = \sigma_1 u(0) - \mu_1, \\ -k(1)u'(1) = \sigma_2 u(1) - \mu_2. \end{cases}$$

В нашей задаче граничные условия имеют другой вид, поэтому приведем их к нужному виду. Рассмотрим левое граничное условие. Если мы полагаем, что наше решение $u'(0) = 0$ и $\sigma_1 = 1$, то как раз получим левое граничное условие задачи (1):

$$0 = u(0) - \mu_1 \Rightarrow u(0) = \mu_1,$$

поэтому в левом граничном условии мы ничего менять не будем. В задаче у правого граничного условия есть множитель $k(1)$, который в нашем случае равен

$$k(1) = 4 - 1^2 = 3.$$

Таким образом, мы должны домножить на это значение правое граничное условие, тогда

$$-3u'(1) = 3\sigma_2 u(1).$$

Таким образом, метод баланса мы будем применять к дифференциальной задаче

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x),\ 0 < x < 1, \\ u(0) = \mu_1, \\ -3u'(1) = 3\sigma_2 u(1), \end{cases} \tag{8}$$

Из предыдущего пункта мы возьмем заданную равномерную сетку узлов $\overline{\omega}_h$ и заданную на ней сеточную функцию $y = y(x)$.

По методу баланса можно построить разностную схему в безиндексном виде

$$\begin{cases} (ay_{\overline{x}})_x - dy = -\varphi,\ x \in \omega_h, \\ a_1 y_{x,0} = \left(\sigma_0 + \frac{h}{2}d_0\right) y_0 - \left(\mu_0 + \frac{h}{2}\varphi_0\right), \\ -a_N y_{\overline{x},N} = \left(\sigma_1 + \frac{h}{2}d_N\right) y_N - \left(\mu_1 + \frac{h}{2}\varphi_N\right); \end{cases} \tag{9}$$

где

$$a_i = \left[\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)}dx\right]^{-1},\ d_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx,\ \varphi_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx, \tag{10}$$

$$d_0 = \frac{2}{h}\int\limits_0^{\frac{h}{2}} q(x)dx,\ \varphi_0 = \frac{2}{h}\int\limits_0^{\frac{h}{2}} f(x)dx, \tag{11}$$

$$d_N = \frac{2}{h} \int\limits_{1-\frac{h}{2}}^{1} q(x)dx, \;\; \varphi_N = \frac{2}{h} \int\limits_{1-\frac{h}{2}}^{1} f(x)dx. \tag{12}$$

Или, что то же самое, в индексном виде

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) - d_i y_i = -\varphi_i, \;\; i = \overline{1, N-1} \\ a_1 y_{x,0} = \left(\sigma_0 + \frac{h}{2}d_0\right) y_0 - \left(\mu_0 + \frac{h}{2}\varphi_0\right), \\ -a_N y_{\overline{x},N} = \left(\sigma_1 + \frac{h}{2}d_N\right) y_N - \left(\mu_1 + \frac{h}{2}\varphi_N\right); \end{cases} \tag{13}$$

Для того, чтобы явно записать консервативную разностную схему для поставленной задачи (1), нам необходимо подогнать схему вида (11) под вид дифференциальной задачи (6) и вычислить коэффициенты по формулам (8), (9), (10). Причем будем строить наилучшую консервативную разностную схему, а значит интегралы будем вычислять точно. Итак, учитывая вид граничных условий задачи (6), получим разностную схему

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) - d_i y_i = -\varphi_i, \;\; i = \overline{1, N-1} \\ y_0 = \mu_1, \\ -a_N\frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \left(3\sigma_2 + \frac{h}{2}d_N\right) y_N - \frac{h}{2}\varphi_N; \end{cases} \tag{14}$$

в которой мы исключили аппроксимацию левого граничного условия, поскольку оно вычисляется точно. Определим коэффициенты, используя входные данные,

$$a_i = \left[\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{4-x^2}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{2+x}{2-x}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\right]^{-1} = \frac{2h}{\ln\dfrac{(2+x_i)(2-x_{i-1})}{(2-x_i)(2+x_{i-1})}},$$

$$d_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} x^2 dx = \frac{1}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{h}\cdot\frac{(x^3_{i+\frac{1}{2}} - x^3_{i-\frac{1}{2}})}{3},$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [4\cos x - 2x\sin x]dx = \frac{2}{h}(\sin x + x\cos x)\Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{h}(\sin x_{i+\frac{1}{2}} - \sin x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}\cos x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\cos x_{i-\frac{1}{2}}),$$

$$d_N = \frac{2}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{1-\frac{h}{2}}^{1} = \frac{2}{3h} - \frac{2\left(1-\frac{h}{2}\right)^3}{3h},$$

$$\varphi_N = \frac{4}{h}(\sin x + x\cos x)\Big|_{1-\frac{h}{2}}^{1} = \frac{4}{h}\left(\sin 1 + \cos 1 - \sin\left(1-\frac{h}{2}\right) - \left(1-\frac{h}{2}\right)\cos\left(1-\frac{h}{2}\right)\right).$$

Таким образом, мы имеем общую формулу (12) для итераций и явные выражения для всех коэффициентов из этой разностной схемы.

Полученная таким образом разностная схема обладает вторым порядком аппроксимации, а также для нее сходится метод прогонки. Запишем в соответствии с матрицей (7) вид коэффициентов для метода прогонки

$$\gamma_0 = 1,\ \beta_0 = 0,\ g_0 = \mu_1,$$

$$\alpha_i = \frac{a_i}{h^2},\ \gamma_i = -\frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} - d_i,\ \beta_i = \frac{a_{i+1}}{h^2},\ g_i = -\varphi_i,$$

$$\alpha_N = \frac{a_N}{h},\ \gamma_N = -\left[\frac{a_N}{h} + 3\sigma_2 + \frac{h}{2}d_N\right],\ g_N = -\frac{h}{2}\varphi_N.$$

3 Построение вариационно-разностной схемы методом Ритца

Из первого пункта мы возьмем заданную равномерную сетку узлов $\overline{\omega}_h$ и заданную на ней сеточную функцию $y = y(x)$.

По методу Ритца мы можем построить трехдиагональную систему вида

$$\begin{cases} \alpha_{ii-1}y_{i-1} + \alpha_{ii}y_i + \alpha_{ii+1}y_{i+1} = \beta_i,\ i = \overline{1, N-1}, \\ \alpha_{00}y_0 + \alpha_{01}y_1 = \beta_0, \\ \alpha_{NN-1}y_{N-1} + \alpha_{NN}y_N = \beta_N, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k(x)dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})^2 dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x_{i+1} - x)^2 dx\right],\ i = \overline{1, N-1},$$

$$\alpha_{ii+1} = \frac{1}{h^2}\left[-\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x - x_i)(x_{i+1} - x)dx\right],\ i = \overline{0, N-1},$$

причем $\alpha_{ii+1} = \alpha_{i+1i}$. Тогда можно вычислить

$$\beta_i = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1})dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x)dx\right],\ i = \overline{1, N-1},$$

$$\alpha_{00} = \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_0^h k(x)dx + \int\limits_0^h q(x)(x - h)^2 dx\right] + \sigma_1,$$

$$\alpha_{NN} = \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_{1-h}^1 k(x)dx + \int\limits_{1-h}^1 q(x)(x - 1 + h)^2 dx\right] + \sigma_2,$$

$$\beta_0 = \frac{1}{h}\left[\int\limits_0^h f(x)(h - x)dx + \mu_1\right],\ \beta_N = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{1-h}^1 f(x)(x - 1 + h)dx + \mu_2\right].$$

Нас интересуют граничные условия другого вида, поэтому мы будем вычислять

$$a_i = -h\alpha_{ii-1},\ \varphi_i = \frac{1}{h}\beta_i,\ d_i = \frac{1}{h}(\alpha_{ii-1} + \alpha_{ii} + \alpha_{ii+1}),$$

$$d_0 = \frac{2}{h^2}\int\limits_0^h q(x)(h-x)dx,\ d_N = \frac{2}{h^2}\int\limits_{1-h}^1 q(x)(x-1+h)dx,$$

$$\varphi_0 = \frac{2}{h^2}\int\limits_0^h f(x)(x-h)dx,\ \varphi_N = \frac{2}{h^2}\int\limits_{1-h}^1 f(x)(x-1+h)dx,$$

откуда разностная схема будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{a_i}{h^2}y_{i-1} - \left(\frac{a_i + a_{i+1}}{h} + d_i\right) y_i + \frac{a_{i+1}}{h^2}y_{i+1} = -\varphi_i,\ i = \overline{1, N-1} \\ a_1 y_{x,0} = \left(\sigma_0 + \frac{h}{2}d_0\right) y_0 - \left(\mu_0 + \frac{h}{2}\varphi_0\right), \\ -a_N y_{\overline{x},N} = \left(\sigma_1 + \frac{h}{2}d_N\right) y_N - \left(\mu_1 + \frac{h}{2}\varphi_N\right); \end{cases}$$

но в нашем случае (по аналогии с методом баланса)

$$\begin{cases} \frac{a_i}{h^2}y_{i-1} - \left(\frac{a_i + a_{i+1}}{h} + d_i\right) y_i + \frac{a_{i+1}}{h^2}y_{i+1} = -\varphi_i,\ i = \overline{1, N-1} \\ y_0 = \mu_1, \\ -a_N \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \left(3\sigma_2 + \frac{h}{2}d_N\right) y_N - \frac{h}{2}\varphi_N; \end{cases} \tag{16}$$

Тогда, подставляя известные значения, получим

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{h^2}\left[\left(4x - \frac{x}{3}\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} + \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4 x_{i-1}}{2} + \frac{x^3 x_{i-1}^2}{3}\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4 x_{i+1}}{2} + \frac{x^3 x_{i+1}^2}{3}\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}\right],$$

$$\alpha_{ii+1} = \frac{1}{h^2}\left[-\left(4x - \frac{x}{3}\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \left(\frac{x^4(x_i + x_{i+1})}{4} - \frac{1}{3}x_i x_{i+1} x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}\right],$$

$$\alpha_{ii-1} = \frac{1}{h^2}\left[-\left(4x - \frac{x}{3}\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \left(\frac{x^4(x_{i-1} + x_i)}{4} - \frac{1}{3}x_{i-1} x_i x^3 - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\right],$$

$$\beta_i = \frac{1}{h}\left[-2(x_{i-1}\sin x - x(x - x_{i-1})\cos x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + 2(x_{i+1}\sin x + x(x_{i+1} - x)\cos x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}\right],$$

$$d_N = \frac{2}{12h^2}\left[x^3 \cdot (4h + 3x - 4)\right]\Big|_{1-h}^1,$$

$$\varphi_N = \frac{2}{h^2}\left[2(h-1)\sin x + 2x(h + x - 1)\cos x\right]\Big|_{1-h}^1.$$

Полученная таким образом разностная схема обладает вторым порядком аппроксимации, а также для нее сходится метод прогонки.

Для нее коэффициенты метода прогонки возьмем такие же, как и в предыдущем случае, поскольку мы привели разностную схему к такому же виду, как для метода баланса.