Метод Лобачевского для отыскания корней многочлена

Условие

Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$ корни алгебраического уравнения

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 10 = 0.$$

Алгоритм решения

Для решения задачи методом Лобачевского нам понадобятся следующие формулы:

1. соотношения для коэффициентов:

$$\begin{cases} a_0^{(1)} = a_0^2, \\ a_1^{(1)} = 2a_0a_2 - a_1^2, \\ a_2^{(1)} = 2a_0a_4 - 2a_1a_3 + a_2^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^{(1)} = (-1)^n a_n^2 \end{cases} \tag{1}$$

   (конкретно эта формула позволяет перейти от итерации 0 к итерации 1, но для перехода от k к $k+1$ соотношения такие же).

   Для нашего случая соотношения будут иметь вид

$$\begin{cases} a_0^{(1)} = a_0^2, \\ a_1^{(1)} = 2a_0a_2 - a_1^2, \\ a_2^{(1)} = -2a_1a_3 + a_2^2, \\ a_3^{(1)} = -a_3^2 \end{cases} \tag{2}$$

2. формула для вычисления корней

$$x_i \approx \sqrt[2^k]{-\frac{a_i^{(k)}}{a_{i-1}^{(k)}}}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Замечание. Метод Лобачевского после прохождения всего цикла возвращает значения корней *по модулю*. Поэтому необходимо подстановкой в исходное уравнение проверить, с каким знаком нужно раскрывать модуль.

Для решения методом Лобачевского удобно составить следующую таблицу (каждый столбец – это коэффициенты, а в конце значения корней на каждой итерации в порядке убывания):

	0
a_0	1.0000
a_1	-6.0000
a_2	3.0000
a_3	10.0000
x_1	6.0000
x_2	0.5000
x_3	-3.3333

где мы посчитали по формулам (3)

$$x_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad x_2 = -\frac{a_2}{a_1}, \quad x_3 = -\frac{a_3}{a_2}.$$

Считаем коэффициенты и корни из соотношений (2)

$$\begin{cases} a_0^{(1)} = a_0^2 = 1, \\ a_1^{(1)} = 2a_0 a_2 - a_1^2 = -30, \\ a_2^{(1)} = -2a_1 a_3 + a_2^2 = 129, \\ a_3^{(1)} = -a_3^2 = -100 \end{cases}$$

По формулам (3)

$$x_1^{(1)} = \sqrt{-\frac{a_1^{(1)}}{a_0^{(1)}}} \approx 5.4772, \quad x_2^{(1)} = \sqrt{-\frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}}} \approx 2.0736, \quad x_3^{(1)} = \sqrt{-\frac{a_3^{(1)}}{a_2^{(1)}}} \approx 0.8805.$$

	0	1
a_0	1.0000	1.0000
a_1	-6.0000	-30.0000
a_2	3.0000	129.0000
a_3	10.0000	-100.0000
x_1	6.0000	5.4772
x_2	0.5000	2.0736
x_3	-3.3333	0.8805

Вычислим погрешность. Лучше всего считать разницу для каждого корня, чтобы быть уверенными в том, что каждый корень достиг нужной точности:

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.228 > 10^{-1}, \quad |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 1.574 > 10^{-1}, \quad |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 4.214 > 10^{-1}.$$

Далее проделываем все то же самое, аналогично случаю отыскания одного корня. Тогда в конечном итоге получается таблица вида:

	0	1	2	3
a_0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
a_1	-6.0000	-30.0000	-642.0000	-390,882.0000
a_2	3.0000	129.0000	10,641.0000	100,390,881.0000
a_3	10.0000	-100.0000	-10,000.0000	-100,000,000.0000
x_1	6.0000	5.4772	5.0337	5.0004
x_2	0.5000	2.0736	2.0177	2.0008
x_3	-3.3333	0.8805	0.9846	0.9995

Таким образом, округлив, получим значения

$$x_1 \approx 5, \quad x_2 \approx 2, \quad x_3 \approx 1.$$

Но это абсолютные значения истинных корней. Далее непосредственной подстановкой необходимо выбрать, какие из значений $x = \{-5, -2, -1, 1, 2, 5\}$ действительно являются корнями исходного уравнения.

В данном случае подходят значения

$$x = \{1, 2, 5\}.$$