Погрешность интерполирования при равноотстоящих узлах

Условие

Определить погрешность квадратичной интерполяции функции $f(x) = \ln(x+2)$ на равномерной сетке узлов $x_i \in [-1; 1]$ с шагом $h = 0.1$.

Алгоритм решения

Для оценки погрешности интерполирования функции нам понадобятся следующие формулы:

1. остаток интерполирования при равноотстоящих узлах в начале таблицы
$$r_k(x) = h^{k+1}\frac{t(t-1)\dots(t-k)}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi),\ \xi \in [x_0, x_0+kh],\ t \in [0,1]. \tag{1}$$
2. остаток интерполирования при равноотстоящих узлах в конце таблицы
$$r_k(x) = h^{k+1}\frac{t(t+1)\dots(t+k)}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi),\ \xi \in [x_n, x_n-kh],\ t \in [-1,0]. \tag{2}$$

Мы построим оценки для остатка интерполирования в начале таблицы и в конце таблицы и сравним полученные результаты.

Сперва выпишем все данные, которые нам известны:

- интерполируемая функция $f(x) = \ln(x+2)$;
- сетка узлов на отрезке $[a,b] = [-1,1]$;
- шаг $h = 0.1$;
- степень интерполяционного полинома $k = 2$ (по условию квадратичная интерполяция).

Оценим остаток из формулы (1) при $k = 2$:
$$|r_2(x)| = \left|h^3\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}f^{(3)}(\xi)\right| \leqslant h^3\left|\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\right| \cdot \max_{x\in[a,b]}|f^{(3)}(x)|,\ t \in [0,1].$$

Оценим максимальное значение третьей производной на отрезке. Для этого вычислим третью производную от исходной функции
$$f'(x) = \frac{1}{x+2},\quad f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2},\quad f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}.$$

Функция $\dfrac{2}{(x+2)^3}$ убывающая, следовательно, ее наибольшее значение в точке $x = -1$:
$$\max_{x\in[-1,1]}|f^{(3)}(x)| = |f'''(-1)| = 2.$$

Тогда, подставляя полученное значение и известное значение h в формулу для оценки остатка, имеем
$$|r_2(x)| \leqslant \frac{1}{3}\cdot 10^{-3}\left|t(t-1)(t-2)\right|,\ t \in [0,1].$$

Оценим значение выражения $|t(t-1)(t-2)|$. Для этого с помощью производной найдем точку максимума. Но сразу учтем, что $t \in [0,1]$ и при подстановке в это выражение точек 0 и 1 значение будет равно нулю, поэтому эти значения нас не интересуют. Рассмотрим функцию

$$f(t) = t(t-1)(t-2) = t^3 - 3t^2 + 2t.$$

Тогда

$$f'(t) = 3t^2 - 6t + 2 = 0.$$

Отсюда точки подозрительные на экстремумы

$$t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Но, так как $0 < t < 1$, то точка $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ не подходит. Найдем значения в оставшейся точке

$$f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$|t(t-1)(t-2)| \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Тогда мы можем вычислить оценку остатка интерполирования:

$$|r_2(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot 10^{-3} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \cdot 10^{-3}.$$

Проделаем все то же самое для остатка интерполирования в конце таблицы из формулы (2):

$$|r_2(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \left|t(t+1)(t+2)\right|, \; t \in [-1, 0].$$

То есть, нужно лишь оценить значение множителя с t. Снова точки -1, 0 не рассматриваем. Рассмотрим функцию

$$f(t) = t(t+1)(t+2) = t^3 + 3t^2 + 2t.$$

Тогда

$$f'(t) = 3t^2 + 6t + 2.$$

Отсюда

$$t = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Точка $-1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ не подходит. Вычислим значение в оставшейся точке:

$$f\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{9\sqrt{3}} \cdot 10^{-3}.$$

То есть значение оценки остатка интерполирования будет таким же, что и в предыдущем случае.