Интерполяционный многочлен с кратными узлами

Условие

Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = x^6$ по следующей таблице входных данных: f(0), f'(0), f''(0), f(1), f'(1). Вычислить с его помощью приближенное значение f(0.5) и оценить погрешность найденного значения.

Алгоритм решения

Для решения данной задачи потребуются следующие формулы:

1. остаток интерполирования при интерполировании с кратными узлами

$$r_n(x) = \Omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \Omega(x) = (x - x_0)^{\alpha_0} \dots (x - x_m)^{\alpha_m}, \ \xi \in [a, b].$$
 (1)

2. представление многочлена Эрмита через разделенные разности

$$P_{n}(x) = f(x_{0}) + (x - x_{0})f(x_{0}, x_{0}) + \dots + (x - x_{0})^{\alpha_{0} - 1}f(x_{0}, \dots, x_{0}) +$$

$$+ (x - x_{0})^{\alpha_{0}}f(x_{0}, \dots, x_{0}; x_{1}) + (x - x_{0})^{\alpha_{0}}(x - x_{1})f(x_{0}, \dots, x_{0}; x_{1}, x_{1}) + \dots +$$

$$+ \dots + (x - x_{0})^{\alpha_{0}}(x - x_{1})^{\alpha_{1} - 1}f(x_{0}, \dots, x_{0}; x_{1}, \dots, x_{1}) + \dots +$$

$$+ \dots + (x - x_{0})^{\alpha_{0}}(x - x_{1})^{\alpha_{1}}\dots(x - x_{m})^{\alpha - 1}f(x_{0}, \dots, x_{0}; x_{1}, \dots, x_{1}; \dots; x_{m}, \dots, x_{m}).$$

$$(2)$$

3. для построения таблицы разделенных разностей, необходимо учитывать соотношение

$$f(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{j+1}) = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$$
 (3)

- 4. аппарат разделенных разностей:
 - разделенная разность нулевого порядка для функции f(x) совпадают со значениями функции $f(x_i)$ в узлах интерполирования;
 - разделенная разность первого порядка есть

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$
 (4)

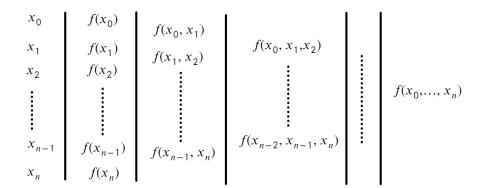
• разделенная разность второго порядка

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$
 (5)

• разделенная разность (k+1)-ого порядка

$$f(x_0, \dots, x_{k+1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{k+1}) - f(x_0, \dots, x_k)}{x_{k+1} - x_0}.$$
 (6)

5. таблица разделенных разностей



Алгоритм решения задачи следующий: составляем таблицу разделенных разностей, записываем интерполяционный многочлен, вычисляем значение в нужной точке, оцениваем остаток интерполирования в этой точке.

Для начала рассчитаем входные данные:

$$f(0) = 0$$
, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 6$.

Далее составляем таблицу конечных разностей, которая в нашем случае примет вид

Заполним первые два столбца известными нам значениями:

По формуле (3)
$$f(x_0,x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}=0, \quad f(x_1,x_1)=\frac{f'(x_1)}{1!}=6.$$
 По формуле (4)
$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=1.$$

По формуле (3)

$$f(x_0, x_0, x_0) = \frac{f'(x_0)}{2!} = 0.$$

По формуле (5)

$$f(x_0, x_0, x_1) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_0, x_0)}{x_1 - x_0} = 1, \quad f(x_0, x_1, x_1) = \frac{f(x_1, x_1) - f(x_0, x_1)}{x_1 - x_0} = 5.$$

Далее аналогично по формуле (6)

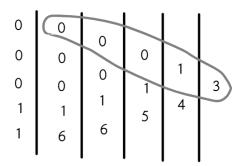
$$f(x_0, x_0, x_0, x_1) = \frac{f(x_0, x_0, x_1) - f(x_0, x_0, x_0)}{x_1 - x_0} = 1, \quad f(x_0, x_0, x_1, x_1) = \frac{f(x_0, x_1, x_1) - f(x_0, x_0, x_1)}{x_1 - x_0} = 4.$$

И в итоге

$$f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1) = \frac{f(x_0, x_0, x_1, x_1) - f(x_0, x_0, x_0, x_1)}{x_1 - x_0} = 3.$$

Тогда таблица принимает окончательный вид

Из этой таблицы нам нужны лишь значения



Далее по формуле (2) запишем сначала интерполяционный многочлен в общем виде для нашего случая (5 узлов \Rightarrow 4 степень многочлена)

$$P_4(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_0) + (x - x_0)^2 f(x_0, x_0, x_0) + (x - x_0)^3 f(x_0, x_0, x_0, x_1) + (x - x_0)^3 (x - x_1) f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1).$$

Подставляем все известные нам значения и получаем

$$P_4(x) = 0 + x \cdot 0 + x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 + x^3(x_1) \cdot 3 = 3x^4 - 2x^3.$$

Можно, подставив известные точки и их значения, убедиться в том, что многочлен был построен правильно.

Вычислим значение в точке x = 0.5:

$$P_4(0.5) = \frac{3}{16} - \frac{2}{8} = -\frac{1}{16}.$$

Оценим остаток по формуле (1). Для начала запишем его в общем виде для нашего случая:

$$r_4(x) = (x - x_0)^3 (x - x_1)^2 \cdot \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}, \quad \xi \in [0, 1].$$

Нам неизвестно значение $f^{(5)}(\xi)$. Оценим его сверху:

$$f^{(5)}(x) = (x^6)^{(5)} = 720x \Rightarrow |f^{(5)}(x)| \le 720 \quad x \in [0, 1].$$

Тогда оценка для остатка примет вид

$$|r_4(x)| \le \left| x^3(x-1)^2 \cdot \frac{720}{120} \right| = 6 \left| x^3(x-1)^2 \right|.$$

Отсюда погрешность вычисленного значения в точке x=0.5 составляет

$$|r_4(0.5)| \le 6 \left| \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^2} \right| = \frac{3}{16}.$$