Вар. 11. Боря Т. А.

1) $\psi(x,t) = u_t - \Delta u - \varphi = \dot u + \frac{\tau}{2}\ddot u + O(\tau^2) -$

$- u'' - \frac{h^2}{12}u^{IV} + O(h^4) - \varphi = f + \frac{\tau}{2}\ddot u - \frac{h^2}{12}u^{IV} -$

$-\varphi + O(\tau^2 + h^4) = f + \frac{\tau}{2}(\dot u'' + \dot f) - \frac{h^2}{12}(\dot u'' - f'') -$

$-\varphi + O(\tau^2 + h^4) = f + \frac{\tau}{2}\dot f + \frac{h^2}{12}f'' +$

$+ \left(\frac{1}{2}\tau - \frac{h^2}{12\tau}\right)\dot u'' - \varphi + O(\tau^2 + h^4)$

Тогда при

1) $\varphi = f + \frac{\tau}{2}\dot f + \frac{h^2}{12}f'' + \cancel{O(\tau^2 + h^4)}$

и

2) $\frac{h^2}{12\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tau = \frac{h^2}{6}$

РС будет иметь пор. аппрокс. $O(\tau^2 + h^4)$

Также при

1) $\varphi = f + \frac{h^2}{12}f''$ $\Rightarrow O(\tau + h^4)$

$\tau = \frac{h^2}{6}$

(2.) $y_{\overset{\circ}{t}} + a\,\hat{y}_{\overset{\circ}{x}} = \varphi$

В индексн. форме для соотв. однор. ур-я

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^{j-1}}{2\tau} + a\,\frac{y_{k+1}^{j+1} - y_{k-1}^{j+1}}{2h} = 0$$

(1)

Иссл. методом гармоник: $y_k^j = q^j e^{ik\varphi}$

$$\frac{q - \frac{1}{q}}{2\tau} + a\frac{q\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)}{2h} = 0$$

$$q - \frac{1}{q} + \gamma q (2i\sin\varphi) = 0, \quad \gamma = \frac{a\tau}{h}$$

$$q^2 (1 + 2\gamma i \sin\varphi) - 1 = 0$$

$$q = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + 2\gamma i \sin\varphi}}$$

$$|q|^2 = \frac{1}{1 + 4\gamma^2 \sin^2\varphi} \leq 1 \Rightarrow$$

$4\gamma^2 \sin^2\varphi \geq 0$ верно, т.к. $\varphi \in [0; 2\pi)$

$\gamma = \frac{a\tau}{h}$

Т.е. схема ~~абсолютно~~ безусл. устойчива при любых шагах h, τ.

③ $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -(x_1^2+x_2^2), \quad G = [0,1]\times[0,2] \\ \dfrac{\partial u(0,x_2)}{\partial x_1} = x_2 \\ u(1,x_2) = x_2^4 \\ \dfrac{\partial u(x_1,0)}{\partial x_2} = x_1 \\ u(x_1,2) = 2x_1 \end{cases}$$

②

$$\psi(x_1,x_2) = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2} + (x_1^2+x_2^2) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{h_1^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{h_2^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + (x_1^2+x_2^2) +$$

$$+ O(h_1^4+h_2^4) = O(h_1^2+h_2^2)$$

$$\nu(0,x_2) = u_{x_1}(0,x_2) - x_2 = \frac{\partial u(0,x_2)}{\partial x_1} +$$

$$+ \frac{h_1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(0,x_2)}{\partial x_1^2} + O(h_1^2) - x_2 = \frac{h_1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(0,x_2)}{\partial x_1^2} + O(h_1^2)$$

Тогда $y_{x_1}(0,x_2) = \mu_0(x_1,x_2)$, где

$$\mu_0(x_1,x_2) = x_2 + \frac{h_1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(0,x_2)}{\partial x_1^2}$$ => замечании апроксим.

~~Из исх. дифф. ур-я:~~

$$\mu_0(x_1,x_2) = x_2 + \frac{h_1}{2}\cdot y_{\bar{x}_1 x_1}(0,x_2) + O(h_1^2)$$

По аналогии

$$y_{x_2}(x_1,0) = \mu_1(x_1,x_2), \text{ где}$$

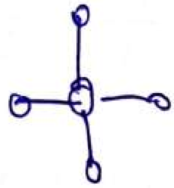
$$\mu_1(x_1,x_2) = x_1 + \frac{h_2}{2}\cdot y_{\bar{x}_2 x_2}(x_1,0) + O(h_2^2)$$

Однако с такой аппроксимацией мы не во всех точках сможем найти значение; в точке $(0,0)$

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(0,0)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \mu_0(0,0) = \mu_1(0,0) = 0$$ ③

В итоге на сетке

$$\overline{\omega} = \underbrace{\{x_1 = ih_1,\ i=\overline{1,N_1},\ h_1=\tfrac{1}{N_1}\}}_{\overline{\omega}_{h_1}} \times \underbrace{\{x_2 = jh_2,\ j=\overline{1,N_2},\ h_2=\tfrac{2}{N_2}\}}_{\overline{\omega}_{h_2}}$$

при шаблоне 

можем построить РС $\psi = O(h_1^2 + h_2^2)$, т.е. со 2-ым пор. аппрокс.

$$\begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \omega \\ y_{x_1}(0, x_2) = x_2 + \frac{h_1}{2} y_{\bar{x}_1 x_1}(0, x_2) + O(h_1^2), \quad x_2 \in \overline{\omega}_{h_2} \\ y(1, x_2) = x_2^4, \quad x_2 \in \overline{\omega}_{h_2} \\ y_{x_2}(1, 0) = x_1 + \frac{h_2}{2} y_{\bar{x}_2 x_2}(x_1, 0) + O(h_2^2), \quad x_1 \in \overline{\omega}_{h_1} \\ y(x_1, 2) = 2x_1 + 14, \quad x_1 \in \overline{\omega}_{h_1} \\ y_{x_1}(0,0) = y_{x_2}(0,0) = 0 \end{cases}$$