

## Колебание прямоугольного контура.

**Постановка задачи.** Методом разделения переменных найти решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l_1} = 0, \\ u_y|_{y=0} = u_y|_{y=l_2} = 0, \\ u|_{t=0} = 1, \\ u_t|_{t=0} = xy. \end{cases} \quad (1)$$

где  $l_1, l_2 > 0$ ,  $a$  – параметр.

**Решение задачи.** Мы имеем смешанную задачу для гиперболического уравнения на плоскости с однородными граничными условиями с однородным уравнением. Будем искать решение этой задачи в виде

$$u(x, y, t) = T(t) \cdot V(x, y), \quad T \neq 0, V \neq 0. \quad (2)$$

Подставляем этот вид решения в дифференциальное уравнение задачи (1)

$$T''(t)V(x, y) = a^2 T(t)V(x, y).$$

Разделяем переменные и получаем

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Delta V(x, y)}{V(x, y)} = -\lambda^2, \quad (3)$$

справа константа  $\lambda^2$ , так как обе части равенства являются функциями различных переменных. Используя правое равенство, мы можем построить дифференциальное уравнение

$$\Delta V + \lambda^2 V = 0,$$

и, подставляя выражение (2) в граничные условия и комбинируя получившиеся условия с уравнением выше, получим задачу двумерную Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda^2 V = 0, \\ V_x|_{x=0} = V_x|_{x=l_1} = 0, \\ V_y|_{y=0} = V_y|_{y=l_2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Упростим эту задачу. Для этого будем искать ее решение в виде

$$V(x, y) = X(x) \cdot Y(y), \quad X \neq 0, Y \neq 0. \quad (5)$$

Подставим это выражение в дифференциальное уравнение задачи (4) и получим

$$X''Y + XY'' + \lambda^2 XY = 0.$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda^2 = -\mu^2, \quad (6)$$

то есть мы снова разделяем переменные и получаем справа константу  $\mu^2$ . Введем еще одну константу  $\nu^2$  такую, что

$$\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2.$$

Тогда при добавлении дополнительных условий задачи (4) к выражению (6), мы можем сформулировать две одномерных задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(l_1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0, \\ Y(0) = 0, \\ Y'(l_2) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Найдем собственные значения и собственные функции из задачи (7). Общее решение задачи (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Подставим первое краевое условие

$$X'(0) = \lambda C_2 = 0.$$

Отсюда  $C_2 = 0$ . Подставим второе краевое условие

$$X(l_1) = C_1 \cos \mu l_1 = 0.$$

Тогда

$$\mu l_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

а отсюда собственные значения и собственные функции равны соответственно

$$\mu_n = \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1}, \quad X_n(x) = \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Аналогично решим задачу (8). Общее решение имеет вид

$$Y(y) = C_1 \cos \nu y + C_2 \sin \nu y,$$

подставим первое краевое условие и получим

$$Y(0) = C_1 = 0.$$

Подставим второе краевое условие и получим

$$Y'(l_2) = \nu C_2 \cos \nu l_2 = 0,$$

отсюда собственные значения и собственные функции равны

$$\nu_m = \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2}, \quad Y_m(y) = \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y, \quad m = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Таким образом, мы можем построить искомые функции

$$\lambda_{nm}^2 = \left( \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} \right)^2 + \left( \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} \right)^2, \quad V_{nm}(x, y) = \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y. \quad (11)$$

Тогда, подставляя это в (2), мы можем представить решение исходной задачи в виде суммы

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{nm}(t) \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y. \quad (12)$$

Вид  $T_{nm}(t)$  мы можем определить из второго уравнения, которые мы получили из разделения переменных (3), а именно

$$T_{nm}''(t) + a^2 \lambda_{nm}^2 T_{nm}(t) = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение, общее решение которого мы можем построить в виде

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \cos \lambda_{nm} at + B_{nm} \sin \lambda_{nm} at,$$

где коэффициенты  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$  подлежат определению. Подставим этот вид общего решения в (12) и получим

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ A_{nm} \cos \lambda_{nm} at + B_{nm} \sin \lambda_{nm} at \right] \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y. \quad (13)$$

Неизвестные коэффициенты мы можем определить, подставляя в (13) начальные условия исходной задачи. В частности, подставив первое условие, мы получим

$$u|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y = 1.$$

Представим выражение справа в виде ряда Фурье по собственным функциям

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{nm} \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y,$$

а тогда

$$A_{nm} = \varphi_{nm} = \frac{\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} 1 \cdot \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y \, dx dy}{\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \cos^2 \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin^2 \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y \, dx dy} \quad (14)$$

Подставляя второе начальное условие, получим

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a \lambda_{nm} B_{nm} \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y = xy.$$

Представим выражение справа в виде ряда Фурье по собственным функциям

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{nm} \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y,$$

а тогда

$$B_{nm} = \frac{1}{a \lambda_{nm}} \psi_{nm} = \frac{1}{a \lambda_{nm}} \cdot \frac{\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} xy \cdot \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y \, dx dy}{\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \cos^2 \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin^2 \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y \, dx dy}. \quad (15)$$

Таким образом, вычисляя коэффициенты из (14) и (15) мы можем построить решение исходной дифференциальной задачи по формуле (13).