МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра информационных систем управления

Отчет по лабораторной работе №7-8
Вариант 2

Бовта Тимофея Анатольевича
студента 3 курса
специальности «прикладная математика»

Преподаватель:

Д. Ю. Кваша

Минск, 2024 г.

1 Задача 1

Найдите решение игры заданной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Нижняя цена игры:

$$\alpha(A) = \max_{1 \le j \le 2} \min_{1 \le i \le 2} a_{ij} = 3.$$

Верхняя цена игры:

$$\beta(A) = \min_{1 \le i \le 2} \max_{1 \le j \le 2} a_{ij} = 4.$$

Таким образом, $\alpha(A) \neq \beta(A)$.

Реализуем программно данную проверку:

[39]:
```
import numpy as np
A = np.array([[3, 4], [5, 1]])

def lower_bound_price(A):
        return A.min(axis=1).max()

def upper_bound_price(A):
        return A.max(axis=0).min()
```

[40]:
```
lower_bound_price(A)
```

[40]: 3

[41]:
```
upper_bound_price(A)
```

[41]: 4

[42]:
```
lower_bound_price(A) == upper_bound_price(A)
```

[42]: False

Решать задачу будем в смешанных стратегиях.

Для первого игрока:

$$\begin{cases} 3p_1 + 4p_2 = \nu, \\ 5p_1 + p_2 = \nu, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Для второго игрока:

$$\begin{cases} 3q_1 + 5q_2 = \nu, \\ 4q_1 + p_2 = \nu, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases}$$

Построим программную реализацию решения данных СЛАУ. Матрицу системы для 1-го игрока обозначим через P, а матрицу системы для второго игрока через Q.

[43]:
```
b = np.array([0, 0, 1])
P = np.append(np.append(A, [[-1],[-1]], axis=1), [[1, 1, 0]], axis = 0)
Q = np.append(np.append(A.T, [[-1],[-1]], axis=1), [[1, 1, 0]], axis = 0)
```

[44]:
```
P
```

[44]:
```
array([[ 3,  4, -1],
       [ 5,  1, -1],
       [ 1,  1,  0]])
```

[45]:
```
Q
```

[45]:
```
array([[ 3,  5, -1],
       [ 4,  1, -1],
       [ 1,  1,  0]])
```

Тогда решения систем уравнений будут иметь вид

[46]:
```
np.linalg.solve(P, b)
```

[46]:
```
array([0.6, 0.4, 3.4])
```

[47]:
```
np.linalg.solve(Q, b)
```

[47]:
```
array([0.8, 0.2, 3.4])
```

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии и цена игры равны соответственно

$$p = [0.6, 0.4], \quad q = [0.8, 0.2], \quad \nu = 3.4.$$

2 Задача 2

Найдите решение игр, заданных матрицами A_1 и A_2:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.1 Игра с матрицей A_1

Найдем решение игры для матрицы A_1.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Нижняя цена игры:

$$\alpha(A_1) = \max_{1 \le j \le 4} \min_{1 \le i \le 2} a_{ij} = -2.$$

Верхняя цена игры:
$$\beta(A_1) = \min_{1\le i\le 2}\max_{1\le j\le 4} a_{ij} = 1.$$

[49]:
```
A_1 = np.array([[-2, 3, -2, 3],
                [6, -2, 1, 0]])

lower_bound_price(A_1)
```

[49]: -2

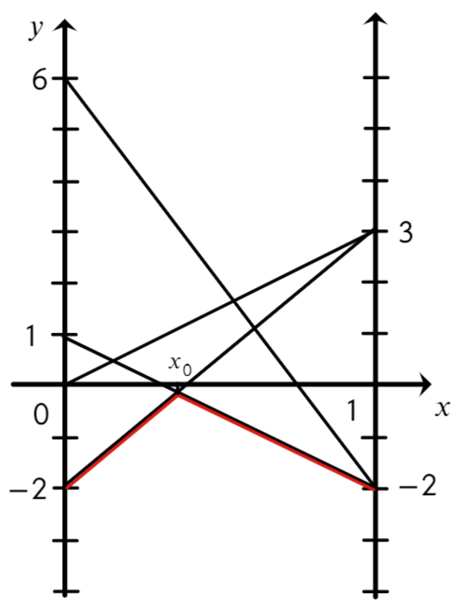
[50]:
```
upper_bound_price(A_1)
```

[50]: 1

Таким образом, $\alpha(A_1) \neq \beta(A_1)$. Решать задачу будем в смешанных стратегиях графическим методом.

Предполагаем, что игрок 1 использует свою смешанную стратегию
$$p^0 = (p_1, p_2)^T = (x, 1-x)^T,$$
а игрок 2 использует свою чистую стратегию j. Тогда средний выигрыш игрока 1 равен
$$g_j(x) = xa_{j1} + (1-x)a_{j2}.$$
Чтобы нарисовать графики функций $y = g_j(x)$ на координатной плоскости (x, y), мы проводим две вертикальных координатных оси, проходящие через точки $x = 0$ и $x = 1$.

Затем рисуем графики функций
$$y = g_1(x) = -2x + 6(1-x),$$
$$y = g_2(x) = 3x - 2(1-x),$$
$$y = g_3(x) = -2x + (1-x),$$
$$y = g_4(x) = 3x.$$



Функция $g(x) = \min_{j \in \{1,2,3,4\}} g_j(x)$ есть функция выигрышей игрока 1. Рисуем график $y = g(x)$ как нижнюю огибающую семейчтва прямых $y = g_j(x)$. Стремясь максимизировать свой выигрыщ, игрок 1 должен найти точку x_0 максимума функции $g(x)$. Тогда $(x_0, 1 - x_0)$ есть оптимальная стратегия игрока 1, $g(x_0)$ есть цена игры $\nu(A_1)$.

Точку x_0 можно вычислить как точку пересечения прямых $y = g_2(x)$ и $y = g_3(x)$. Тогда

$$3x_0 - 2(1 - x_0) = -2x_0 + (1 - x_0).$$

Выражая отсюда x_0, получим

$$x_0 = \frac{3}{8}.$$

Отсюда оптимальная смешанная стратегия игрока 1

$$p^0 = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right).$$

А цена игры высиялется как значение $g_2(x_0)$ или $g_3(x_0)$:

$$\nu(A_1) = g_2(x_0) = g_3(x_0) = -\frac{1}{8}.$$

Теперь вычислим стратегию игрока 2. Использование неактивных стратегий не может увеличить выигрыш игрока 2. Если игрок 2 откажется от любой своей неактивной стратегии, то функция проигрышей игрока 1 может измениться, но минимум новой функции будет достигаться в той же самой точке x_0. Следовательно, можно считать, что игрок 1 применяет свои неактивные стратегии с нулевой вероятностью. В данном случае активными являются стратегии 2 и 3, а неактивными – 1 и 4. Тогда

$$q_1 = q_4 = 0, \quad q_3 = 1 - q_2.$$

Найдем q^0, решая игру с учесенной матрицей

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

которая получается путем обрасывания столбцов матрицы, соответствующих неактивным стратегиям 1 и 4.

Зная, что $q_3 = 1 - q_2$, по первой строке матрицы A' мы можем построить уравнение

$$3q_2 - 2(1 - q_2) = -\frac{1}{8} = \nu(A_1).$$

Таким образом,

$$q_2 = \frac{3}{8}.$$

А отсюда имеем оптимальную стратегию игрока 2 равную

$$q^0 = \left(0, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, 0\right)$$

2.2 Игра с матрицей A_2

Найдем решение игры для матрицы A_2.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Нижняя цена игры:

$$\alpha(A_2) = \max_{1 \leq j \leq 4} \min_{1 \leq i \leq 2} a_{ij} = 2.$$

Верхняя цена игры:

$$\beta(A_2) = \min_{1 \leq i \leq 2} \max_{1 \leq j \leq 4} a_{ij} = 3.$$

[52]:
```
A_2 = np.array([[2, 3],
                [6, -2],
                [0, 2]])

lower_bound_price(A_2)
```

[52]: 2

[53]:
```
upper_bound_price(A_2)
```

[53]: 3

Таким образом, $\alpha(A_2) \neq \beta(A_2)$. Решать задачу будем в смешанных стратегиях графическим методом.

Предполагаем, что игрок 2 использует свою смешанную стратегию

$$q^0 = (q_1, q_2)^T = (x, 1 - x)^T,$$

а игрок 1 использует свою чистую стратегию i. Тогда средний выигрыш игрока 1 2 равен

$$g_i(x) = x a_{i1} + (1 - x) a_{i2}.$$

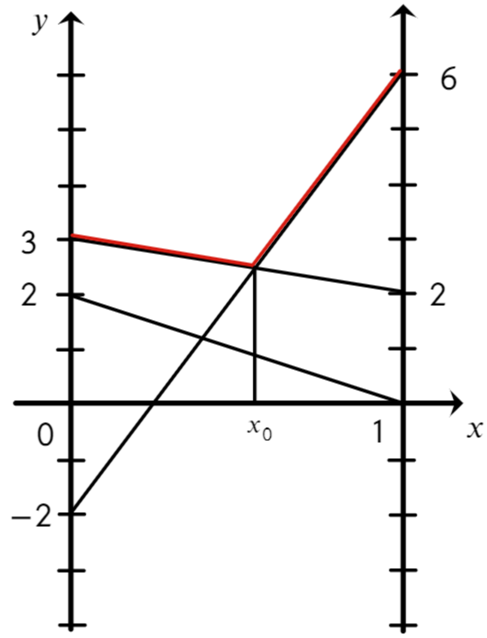
Чтобы нарисовать графики функций $y = g_i(x)$ на координатной плоскости (x, y), мы проводим две вертикальных координатных оси, проходящие через точки $x = 0$ и $x = 1$.

Затем рисуем графики функций

$$y = g_1(x) = 2x + 3(1 - x),$$

$$y = g_2(x) = 6x - 2(1 - x),$$

$$y = g_3(x) = 2(1 - x),$$



Функция $g(x) = \max_{i \in \{1,2,3\}} g_i(x)$ есть функция проигрышей игрока 2. Рисуем график $y = g(x)$ как нижнюю огибающую семейчтва прямых $y = g_j(x)$. Стремясь минимизировать свой проигрыш, игрок 2 должен найти точку x_0 минимума функции $g(x)$. Тогда $(x_0, 1 - x_0)$ есть оптимальная стратегия игрока 1, $g(x_0)$ есть цена игры $\nu(A_2)$.

Точку x_0 можно вычислить как точку пересечения прямых $y = g_1(x)$ и $y = g_2(x)$. Тогда

$$2x_0 + 3(1 - x_0) = 6x_0 - 2(1 - x_0).$$

Выражая отсюда x_0, получим

$$x_0 = \frac{5}{9}.$$

Отсюда оптимальная смешанная стратегия игрока 2

$$q^0 = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right).$$

А цена игры вычисляется как значение $g_1(x_0)$ или $g_2(x_0)$:

$$\nu(A_2) = g_1(x_0) = g_2(x_0) = \frac{22}{9}.$$

Теперь вычислим стратегию игрока 1. В данном случае активными являются стратегии 1 и 2, а неактивными – 3. Тогда

$$p_2 = 1 - p_1, \quad p_3 = 0.$$

Найдем p^0, решая игру с учесенной матрицей

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix},$$

которая получается путем обрасывания строки матрицы, соответствующей неактивной стратегии 3.

Зная, что $p_2 = 1 - p_1$, по первой строке матрицы A' мы можем построить уравнение

$$2p_1 + 3(1 - p_1) = \frac{22}{9} = \nu(A_2).$$

Таким образом,

$$p_1 = \frac{5}{9}.$$

А отсюда имеем оптимальную стратегию игрока 1 равную

$$p^0 = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, 0\right).$$

3 Задача 3

Планирование посева.

1. Фермеру необходимо определить, в каких пропорциях сеять свое поле 5 культурами, если урожайность этих культур, а, значит, и прибыль, зависят от того, каким будет лето: прохладным и дождливым, нормальным, или жарки и сухим.

2. Фермер подсчитал чистую прибыль с 1 га от разных культур в зависимости от погоды:

	погода 1	погода 2	погода 3	погода 4	погода 5
Культура 1	2	4	1	4	2
Культура 2	1	3	2	2	4
Культура 3	3	2	5	2	3
Культура 4	1	3	2	5	2
Культура 5	2	1	3	3	2

3. здесь фермера нет реального противника.

4. Но, если фермер планирует свою деятельность в расчете на наихудшие погодные условия, то можно считать Природу активным субъектом, который пытается создать наихудшую (с точки зрения фермера) погоду.

5. В таком случае, мы можем смоделировать задачу фермера как матричную игру, в которой фермер является игроком 1, а Природа – игроком 2.

6. Матрица A выигрышей в данной игре – это таблица доходов фермера.

Построим матрицу, соответствующую условию задачи:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вычислим нижнюю и верхнюю цены игры.

[59]:
```
A = np.array([[2, 4, 1, 4, 2],
              [1, 3, 2, 2, 4],
              [3, 2, 5, 2, 3],
```

```
              [1, 3, 2, 5, 2],
              [2, 1, 3, 3, 2]])

lower_bound_price(A)
```

[59]: 2

[58]:
```
upper_bound_price(A)
```

[58]: 3

Таким образом, $\alpha(A) = 2 < 3 = \beta(A)$, то есть игра не имеет решения в чистых стратегиях.

Решим игру в смешанныз стратегиях. Поскольку $\alpha = 2 > 0$, то матрицу A не нужно модифицировать.

Сведем решение матричной игры к решению задачи линейного программирования. Запишем получившуюся задачу линейного программирования:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 \le 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 \le 1, \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 \le 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

С помощью библиотеки OR-Tools найдем решение данной задачи линейного программирования

[73]:
```
#!pip install ortools
```

[93]:
```
from ortools.linear_solver import pywraplp



def create_data_model():
    data = {}
    data["constraint_coeffs"] = [
            [2, 4, 1, 4, 2],
            [1, 3, 2, 2, 4],
            [3, 2, 5, 2, 3],
            [1, 3, 2, 5, 2],
            [2, 1, 3, 3, 2],
    ]
    data["bounds"] = [1, 1, 1, 1, 1]
    data["obj_coeffs"] = [1, 1, 1, 1, 1]
    data["num_vars"] = 5
    data["num_constraints"] = 5
```

```python
    return data


def LinearProgramming():
    data = create_data_model()
    solver = pywraplp.Solver.CreateSolver("GLOP")
    if not solver:
        return

    infinity = solver.infinity()
    x = {}
    for j in range(data["num_vars"]):
        x[j] = solver.IntVar(0, infinity, "x[%i]" % (j+1))

    for i in range(data['num_constraints']):
        constraint_expr = [data['constraint_coeffs'][i][j] * x[j] for j in␣
 ↪range(data['num_vars'])]
        solver.Add(sum(constraint_expr) <= data['bounds'][i])

    objective = solver.Objective()
    for j in range(data["num_vars"]):
        obj_expr = [data['obj_coeffs'][j] * x[j] for j in␣
 ↪range(data['num_vars'])]
    solver.Maximize(solver.Sum(obj_expr))

    print(f"Solving with {solver.SolverVersion()}")
    status = solver.Solve()

    if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL:
        print("Objective value =", solver.Objective().Value())
        for j in range(data["num_vars"]):
            print(x[j].name(), " = ", x[j].solution_value())
        print()
        print(f"Problem solved in {solver.iterations():d} iterations")
    else:
        print("The problem does not have an optimal solution.")

LinearProgramming()
```

```
Solving with Glop solver v9.9.3963
Objective value = 0.375
x[1]  =  0.25
x[2]  =  0.125
x[3]  =  0.0
x[4]  =  0.0
x[5]  =  0.0
```

```
Problem solved in 2 iterations
```

Составим задачу линейного программирования двойственную к составленной нами ранее

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + y_3 + 4y_4 + 2y_5 \geq 1, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 4y_5 \geq 1, \\ 3y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 2y_4 + 3y_5 \geq 1, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 5y_4 + 2y_5 \geq 1, \\ 2y_1 + 1y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 2y_5 \geq 1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0.$$

Также с помощью OR-Tools найдем решение двойственной задачи ЛП.

[94]:
```python
def DualLinearProgramming():
    data = create_data_model()
    solver = pywraplp.Solver.CreateSolver("GLOP")
    if not solver:
        return

    infinity = solver.infinity()
    y = {}
    for j in range(data["num_vars"]):
        y[j] = solver.IntVar(0, infinity, "y[%i]" % (j+1))

    for i in range(data['num_constraints']):
        constraint_expr = [data['constraint_coeffs'][i][j] * y[j] for j in␣
↪range(data['num_vars'])]
        solver.Add(sum(constraint_expr) >= data['bounds'][i])

    objective = solver.Objective()
    for j in range(data["num_vars"]):
        obj_expr = [data['obj_coeffs'][j] * y[j] for j in␣
↪range(data['num_vars'])]
    solver.Minimize(solver.Sum(obj_expr))

    print(f"Solving with {solver.SolverVersion()}")
    status = solver.Solve()

    if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL:
        print("Objective value =", solver.Objective().Value())
        for j in range(data["num_vars"]):
            print(y[j].name(), " = ", y[j].solution_value())
        print()
        print(f"Problem solved in {solver.iterations():d} iterations")
    else:
        print("The problem does not have an optimal solution.")
```

```
DualLinearProgramming()
```

```
Solving with Glop solver v9.9.3963
Objective value = 0.375
y[1]  =  0.0
y[2]  =  0.0
y[3]  =  0.08333333333333338
y[4]  =  0.16666666666666666
y[5]  =  0.12499999999999997

Problem solved in 5 iterations
```

Итого имеем оптимальное решение исходной и двойственной к ней задач

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Найдем цену игры:

$$\nu(A) = \frac{1}{y_1^0 + y_2^0 + y_3^0 + y_4^0 + y_5^0} = \frac{1}{\frac{2}{24} + \frac{4}{24} + \frac{3}{24}} = \frac{24}{9} \approx 2.67.$$

Тогда оптимальная стратегия игрока 1 равна

$$p^0 = \nu(A) y^0 = \left(0, 0, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{3}{9}\right).$$

Оптимальная стратегия игрока 2 (природы) равна

$$q^0 = \nu(A) x^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right).$$

Таким образом, смешанная стратегия рекомендует фермеру засеять 2/9 поля культурной 3, 3/9 культурой 4, 4/9 культурой 5. При любой погоде доход фермера будет не меньшим цены $\nu(A) = \dfrac{24}{9}$ данной игры.

4 Задача 4

Магазин имеет некоторый запас товаров ассортиментного минимума. Если запас товаров недостаточен, то необходимо завести его с базы; если запас превышает спрос, то магазин несет расходы по хранению нереализованного товара. Пусть спрос на товары лежит в пределах S ($5 \leq S \leq 8$ единиц), расходы по хранению одной единицы товара составляют c руб., а расходы по завозу единицы товара k руб., цена за единицу товара составляет p руб. Составить платежную матрицу, элементами которой является прибыль магазина (доход от продажи с учетом расходов по хранению или по завозу). Определить оптимальную стратегию магазина по завозу товаров, используя критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha = 0.5$, Лапласа.

В соответствии с вариантом входные данные:

- $p = 350$ – цена за единицу товара;
- $c = 60$ – расход по хранению одной единицы товара;
- $k = 70$ – расходы по завозу одной единицы товара.

Матрица в общем виде, где по горизонтали необходимое количество товара, а по вертикали количество товара, которое есть в наличие, при условии, что количество товара изменяется от 5 до 8, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 5p & 6p-k & 7p-2k & 8p-3k \\ 5p-c & 6p & 7p-k & 8p-2k \\ 5p-2c & 6p-c & 7p & 8p-k \\ 5p-3c & 6p-2c & 7p-c & 8p \end{bmatrix}$$

Вычислим программно вид матрицы при подставленных входных данных:

[143]:
```
def init_matrix(p, c, k):
    n = 4
    matrix = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                matrix[i, j] = (5+i)*p
            for l in range(1, 4):
                if i == j-l:
                    matrix[i, j] = (5+j)*p - l*k
            for l in range(1, 4):
                if i == j+l:
                    matrix[i, j] = (5+j)*p - l*c
    return matrix
```

[184]:
```
C = init_matrix(300, 50, 70)
B = init_matrix(210, 20, 60)
A = init_matrix(350, 60, 70)
A
```

[184]:
```
array([[1750., 2030., 2310., 2590.],
       [1690., 2100., 2380., 2660.],
       [1630., 2040., 2450., 2730.],
       [1570., 1980., 2390., 2800.]])
```

Воспользуемся критерием Вальда:

$$W = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Программно реализуем функцию, которая будет вычислять значение W.

[158]:
```
def W(A):
        return A.min(axis=1).max()


W(A)
```

[158]: 1750.0

То есть оптимальная стратегия – завоз 5 единиц.

Воспользуемся критерием Сэвиджа

$$S = \min_i \max_j r_{ij}$$

$$b_j = \max_i a_{ij}$$

$$r_{ij} = b_j - a_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$$

Составим компьютерный метод, который будем вычислять по соответствующим формулам матрицу (r_{ij}) и находить число S.

[203]:
```
def S(A):
    r = np.array(A.shape)
    b = A.max(axis=1)
    r = np.array([b for _ in range(4)]) - A
    S = r.max(axis=1).min()
    return r, S
```

[204]:
```
S(A)
```

[204]:
```
(array([[ 840.,  630.,  420.,  210.],
        [ 900.,  560.,  350.,  140.],
        [ 960.,  620.,  280.,   70.],
        [1020.,  680.,  340.,    0.]]),
 840.0)
```

Таким образом, максимальное значение риска по каждой строке равно $[840, 900, 960, 1020]$, а значение критерия Сэвиджа равно $S = 840$. Отсюда следует, что оптимальная стратегия – завоз 5 товаров.

Воспользуемся критерием Гурвица ($\lambda = 0.5$):

$$H = \max_i(\lambda \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \min_j a_{ij})$$

Составим программный метод, который возвращает получившийся вектор и максимальное значение в нем.

[214]:
```
def H(A, l):
    h = l * A.max(axis=1) + (1-l)*A.min(axis=1)
    return h, h.max()
```

[215]:
```
H(B, 0.5)
```

[215]:
```
(array([1275., 1295., 1315., 1335.]), 1335.0)
```

Таким образом, вектор равен $[1275, 1295, 1315, 1335]$, а значение критерия Гурвица равно $H = 1335$.

Воспользуемся критерием Лапласа:

$$L = \max_{i \in \overline{1,m}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Составим программный метод, который возвращает получившийся вектор и максимальное значение в нем.

[221]:
```
def L(A):
    l = np.mean(A, axis=1)
    return l, l.max()
```

[223]:
```
L(A)
```

[223]: `(array([2170. , 2207.5, 2212.5, 2185. ]), 2212.5)`

Таким образом, вектор равен $[2170, 2207.5, 2212.5, 2185]$, а значение критерия Лапласа равно $L = 2212.5$.