Пример решения варианта контрольной работы

1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)\sqrt{\ln n}}.$$

Нам дан положительный числовой ряд. Рассмотрим n-ый член ряда

$$a_n = \frac{n}{(n^2+5)\sqrt{\ln n}}.$$

Его можно ограничить сверху следующим образом

$$a_n = \frac{n}{(n^2+5)\sqrt{\ln n}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$

По признаку сравнения, если числовой ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

сходится, то и исходный ряд будет сходящимся.

Исследуем этот ряд на сходимость с помощью интегрального критерия. Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл первого рода

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

Этот интеграл можно вычислить, используя замену

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \begin{bmatrix} \ln x = t \Rightarrow x = e^t,\ dx = e^t dt, \\ x = 2 \Rightarrow t = \ln 2,\ x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \end{bmatrix} = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{e^t dt}{e^t\sqrt{t}} = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} t^{-1/2} dt = 2\sqrt{t}\Big|_{\ln 2}^{\infty} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} 2\sqrt{t} - 2\sqrt{\ln 2} = \infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл не имеет конченого значения, а следовательно является расходящимся. Отсюда числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ является расходящимся по интегральному критерию. Отсюда исходный ряд является расходящимся по признаку сравнения.

2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+4)}{\sqrt{n^3+4n^2-1}}.$$

Нам дан знакочередующийся числовой ряд. Для него мы можем применить признак Лейбница. По признаку Лейбница, если $a_n = \dfrac{n+4}{\sqrt{n^3+4n^2-1}}$ монотонно стремится к нулю, то исходный числовой ряд сходится.

Проверим стремление к нулю

$$a_n = \frac{n+4}{\sqrt{n^3+4n^2-1}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{4}{n\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^3}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Проверим монотонность. Рассмотрим $(n+1)$-ый член ряда и сравним его с n-ым членом:

$$a_{n+1} = \frac{n+5}{\sqrt{n^3+7n^2+11n+4}}.$$

Легко видеть, что при $n \to \infty$ числитель будет возрастать медленнее, чем знаменатель, а тогда

$$a_{n+1} < a_n, \ \forall n.$$

Таким образом, монотонность доказана. Следовательно, числовой ряд сходится по признаку Лейбница.

3. Исследовать на абсолютную и неабсолютную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}.$$

Для абсолютной сходимости знакочередующегося ряда необходимо, чтобы ряд из модулей был сходящимся. Тогда рассмотрим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}.$$

Получили положительный числовой ряд. Для него применим признак Даламбера. По признаку Даламбера нам нужно исследовать предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1)+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3(n+1)-1)} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{(2n+1)!!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{(2n+1)!!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Таким образом, по признаку Даламбера ряд из модулей является сходящимся. Следовательно, исходный знакочередующийся ряд является абсолютно сходящимся.

4. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность
$$f_n(x) = \frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x}$$
на множестве $X = (0; +\infty)$.

У функциональной последовательности есть два типа сходимости: поточечная и равномерная; причем, если функциональная последовательность сходится равномерно, то поточечный предел совпадает с равномерным пределом.

Сперва найдем поточечный предел функциональной последовательности
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{4\sqrt{x}}{\frac{3}{n^2}+4x} = 0.$$
Таким образом, имеем поточечную сходимость
$$\frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x} \xrightarrow[n\to\infty]{X} 0.$$
Теперь исследуем функциональную последовательность на равномерную сходимость. По критерию равномерной сходимости
$$\frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x} \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$$
тогда и только тогда, когда
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x} - 0 \right| = 0.$$
Чтобы найти значение супремума, исследуем функцию под модулем на экстремумы. Пусть
$$g(x) = \frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x} - 0 = \frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x}.$$
Тогда нам нужны точки, в которых производная этой функции обращается в ноль, то есть
$$g'(x) = \frac{6n\sqrt{n}}{(3+4n^2x)^2} = 0,$$
но это неверно для любых $x \in X$. Тогда нам остается исследовать краевые точки множества X:
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x} = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x} = 0.$$
Таким образом, максимальное значение функции под модулем – это 0, а значит
$$\sup_{x\in X} \left| \frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x} - 0 \right| = 0.$$
А тогда
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x} - 0 \right| = 0.$$
Следовательно, по критерию равномерной сходимости исходная функциональная последовательность равномерно сходится к нулю, то есть
$$\frac{4n\sqrt{nx}}{3+4n^2x} \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0.$$

5. Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+\cos x},\ x \in X = [0; +\infty).$$

Имеем знакочередующийся функциональный ряд. Для исследования сходимости воспользуемся признаком Дирихле. Представим n-ый член суммы как произведение

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n+\cos x} = \underbrace{(-1)^{n+1}}_{b_n(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+\cos x}}_{a_n(x)}.$$

Для выполнения признака Дирихле нам необходимо выполнение трех пунктов теоремы. Проверим каждый из пунктов.

I. $a_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} 0$, покажем это. Сперва найдем поточечный предел функциональной последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\cos x} = 0.$$

Покажем, что последовательность сходится равномерно к поточечному пределу. По критерию равномерной сходимости для выполнения условия

$$\frac{1}{n+\cos x} \xrightarrow[n\to\infty]{X} 0$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \frac{1}{n+\cos x} - 0 \right| = 0.$$

Действительно, введем функцию

$$g(x) = \frac{1}{n+\cos x}$$

и исследуем ее на экстремумы:

$$g'(x) = \frac{\sin x}{(n+\cos x)^2} = 0,$$

тогда точки, подозрительные на экстремум

$$x = \pi k,\ k = 0, 1, \ldots.$$

Граничная точка множества X также входит в эти точки. При этом из-за того, что значения чередуются, нам достаточно найти

$$g(0) = \frac{1}{n+1},\ g(\pi) = \frac{1}{n-1},$$

значения по всех последующих точках будут совпадать либо с первым, либо со вторым. Поскольку

$$\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n+1},$$

то в итоге получим

$$\sup_{x\in X} \left| \frac{1}{n+\cos x} - 0 \right| = \frac{1}{n-1}.$$

А тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \frac{1}{n+\cos x} - 0 \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0.$$

Таким образом, первое условие теоремы выполнено.

II. Частные суммы ряда $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}$ должны быть ограничены для любого $x \in X$. Действительно, если рассмотрим частные суммы этого ряда, то для каждого $N \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{n=2}^{N}(-1)^{n+1}\right| \leqslant 1.$$

III. Функциональная последовательность $a_n(x)$ монотонна при каждом фиксированном $x \in X$. Тогда зафиксируем x и рассмотрим $a_{n+1}(x)$ член суммы:

$$a_n(x) = \frac{1}{n+\cos x} > \frac{1}{n+1+\cos x} = a_{n+1}(x)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, функциональная последовательность является монотонно убывающей при каждом фиксированном $x \in X$.

Таким образом, все пункты признака Дирихле выполняются, следовательно, исходный функциональный ряд сходится равномерно на X.

6. Найти множество сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(x-10)^n}{(2n^3-3)\cdot 8^n}.$$

Имеем степенной ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, у которого

$$a_n = \frac{n}{(2n^3-3)\cdot 8^n}.$$

Применим признак Коши для вычисления радиуса сходимости R степенного ряда. В соответствии с признаком Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{(2n^3-3)\cdot 8^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(2n^3-3)\cdot 8^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{(2n^3-3)}} = [n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1] = \frac{1}{8} = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, по признаку Коши радиус сходимости степенного ряда равен

$$R = 8.$$

Отсюда имеет множество сходимости

$$|x-x_0| = |x-10| < 8,$$

то есть

$$2 < x < 18.$$

Остается выяснить, входят ли точки $x=2$, $x=18$ в множество сходимости. Для этого исследуем на сходимость значения степенного ряда в этих точках.

Пусть $x=2$. Тогда, подставляя это в исходный степенной ряд, получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(2-10)^n}{(2n^3-3)\cdot 8^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 8^n\cdot n}{(2n^3-3)\cdot 8^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot n}{(2n^3-3)}.$$

Получили знакочередующийся ряд, исследование сходимости которого можно провести по признаку Лейбница. Выбрав для этого ряда

$$a_n = \frac{n}{(2n^3-3)},$$

получим, что

$$a_n = \frac{n}{(2n^3-3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

причем в числителе и знаменателе монотонно возрастающие функции для $n>2$, но знаменатель будет возрастать быстрее. Следовательно, вся числовая последовательность будет монотонно убывающей. Таким образом, выполняются условия признака Лейбница, следовательно, числовой ряд сходится по признаку Лейбница.

Пусть $x=18$. Тогда, подставляя это в исходный степенной ряд, получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(18-10)^n}{(2n^3-3)\cdot 8^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8^n\cdot n}{(2n^3-3)\cdot 8^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(2n^3-3)}.$$

Получили положительный числовой ряд. Применим для него степенной признак:

$$a_n = \frac{n}{(2n^3 - 3)} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

таким образом, исходный числовой ряд сходится по степенному признаку.

В итоге мы получили, что в обеих граничных точках степенной ряд также сходится, а значит они входят в множество сходимости, то есть

$$2 \leqslant x \leqslant 18.$$

7. Представить степенным рядом по степеням $x - \dfrac{\pi}{4}$ функцию $f(x) = 1 + \cos^2 x$.

Известно, что

$$1 + \cos^2 x = 1 + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\cos 2x}{2},$$

при этом

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Тогда разложим в ряд Тейлора по степеням $x - \dfrac{\pi}{4}$

$$\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

В итоге

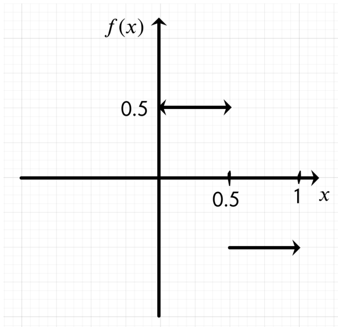
$$f(x) = \frac{3}{2} + \cdot\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

8. Представить функцию

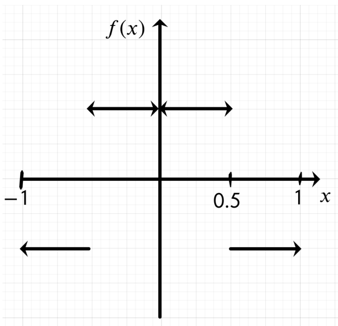
$$f(x) = \begin{cases} 0.5, \ x \in (0, 0.5), \\ -0.5, \ x \in [0.5, 1) \end{cases}$$

рядом Фурье по косинусам. Нарисовать график суммы ряда Фурье этой функции.

Сперва изобразим график исходной функции



(стрелки нужны для индикации того, что точки не включаются в отрезок). Поскольку нам нужно разложить функцию в ряд Фурье по косинусам (четная функция), то доопределим данную функцию четным образом от -1 до 0



9.

10. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} \operatorname{arctg}^2 x dx.$$

В данном случае мы имеем несобственный интеграл (НИ), у которого 2 особые точки: $x = 0$ и $x = +\infty$. Причем точка $x = 0$ является особой только при значениях параметра $p < 0$.

Для исследования сходимости разобьем этот интеграл на сумму двух несобственных интегралов, каждый из которых будет иметь всего одну особую точку:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} \operatorname{arctg}^2 x dx = \int_0^{1} \frac{x^p}{1+x} \operatorname{arctg}^2 x dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} \operatorname{arctg}^2 x dx.$$

Далее нам нужно исследовать сходимость каждого из этих несобственных интегралов, используя соответствующие признаки.

(a) Исследуем на сходимость НИ-1

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} \operatorname{arctg}^2 x dx.$$

Рассмотрим подынтегральную функцию. Попытаемся ограничить сверху эту функцию:

$$\frac{x^p}{1+x} \operatorname{arctg}^2 x \leqslant \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^p}{1+x} \leqslant \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^p}{x} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x^{1-p}}.$$

А НИ-1

$$\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{x^{1-p}} dx$$

будет сходиться по степенному признаку при значениях

$$1 - p > 1 \Rightarrow p < 0.$$

Используя признак сравнения, мы можем заключить, что и рассматриваемый НИ-1 сходится при $p < 0$.

(b) Исследуем на сходимость НИ-2

$$\int_0^{1} \frac{x^p}{1+x} \operatorname{arctg}^2 x dx.$$

Рассмотрим подынтегральную функцию. Воспользуемся эквивалентностью

$$\operatorname{arctg} x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

и получим

$$\frac{x^p}{1+x} \operatorname{arctg}^2 x \underset{x \to +0}{\sim} x^{p+2} = \frac{1}{x^{-p-2}}.$$

НИ-2
$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{-p-2}}dx$$
сходится по степенному признаку при значениях
$$-p-2<1 \Rightarrow p>-3.$$

Следовательно, и рассматриваемый интеграл сходится при $p>-3$.

Таким образом, область значений параметра p, при которых исходных несобственный интеграл сходится, можно задать как
$$-3<p<0.$$

11. Исследовать на равномерную сходимость

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{\sqrt[10]{x+x^{15}}}dx, \ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

В данном случае мы имеем несобственный интеграл первого зависящий от параметра (НИЗОП-1), так как у него одна особая точка $x = +\infty$.

Для исследования равномерной сходимости воспользуемся признаком Вейерштрасса. Для выполнения признака необходимо, чтобы существовала сходящаяся мажоранта. Ограничим подынтегральную функцию при каждом фиксированном $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{\sin(x^\alpha)}{\sqrt[10]{x+x^{15}}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt[10]{x+x^{15}}}.$$

Таким образом, необходимо исследовать на сходимость НИ-1

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{x+x^{15}}}.$$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$\frac{1}{\sqrt[10]{x+x^{15}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[10]{x^{15}}} = \frac{1}{x^{3/2}},$$

тогда по степенному признаку НИ-1 от мажорирующей функции является сходящимся. Следовательно, по признаку Вейерштрасса исходный НИЗОП-1 сходится равномерно по $\alpha \in \mathbb{R}$.

12. Вычислить

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x^2}-1}{x^2}dx,\ \alpha<0$$

дифференцированием по параметру.

Итак, обозначим функцию

$$F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x^2}-1}{x^2}dx,\ \alpha<0.$$

Сперва найдем значение интеграла, используя дифференцирование, а затем обоснуем возможность дифференцирования по параметру. Итак,

$$F'(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{e^{\alpha x^2}-1}{x^2}\right)'_\alpha dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2e^{\alpha x^2}-0}{x^2}dx=\int\limits_0^{+\infty}e^{\alpha x^2}dx.$$

Значение справа мы можем вычислить через Гамма-функцию:

$$F'(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{\alpha x^2}dx=\left[\alpha x^2=-t^2\Rightarrow x=\frac{t}{\sqrt{-\alpha}},\ dx=\frac{dt}{\sqrt{-\alpha}}\right]=\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}.$$

Таким образом, имеем простейшее дифференциальное уравнение первого порядка

$$F'(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}.$$

Чтобы получить не семейство решений, а одно конкретное решение, нужно задать начальные условия. Из исходной функции $F(\alpha)$ можно получить, что

$$F(-1)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx-\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx+\frac{1}{x}\Big|_0^{+\infty};$$

для первого слагаемого, применяя интеграл Эйлера-Пуассона, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx=\begin{bmatrix}u=e^{-x^2}\Rightarrow du=-2xe^{-x^2}\\ dv=\dfrac{dx}{x^2}\Rightarrow v=-\dfrac{1}{x}\end{bmatrix}=-\frac{e^{-x^2}}{x}\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_0^{+\infty}\frac{2xe^{-x^2}}{x}dx=-\frac{e^{-x^2}}{x}\Big|_0^{+\infty}-\sqrt{\pi};$$

а тогда

$$F(-1)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx+\frac{1}{x}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{e^{-x^2}}{x}\Big|_0^{+\infty}-\sqrt{\pi}+\frac{1}{x}\Big|_0^{+\infty};$$

поскольку

$$\left[\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x^2}}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{x}\underset{x\to0}{\sim}\left[e^x-1\underset{x\to0}{\sim}x\right]\underset{x\to0}{\sim}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-x^2}{x}=0,\end{array}\right]$$

то

$$F(-1)=-\sqrt{\pi}.$$

В итоге мы можем сформулировать задачу Коши

$$\begin{cases} F'(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{-\alpha}}, \\ F(-1) = -\sqrt{\pi}. \end{cases}$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения, проинтегрировав с двух сторон по α:

$$F(\alpha) = \int \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} d\alpha + C = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2\sqrt{-\alpha} + C = -\sqrt{-\pi\alpha} + C.$$

Подставим начальное условие, чтобы определить значение C:

$$F(-1) = -\sqrt{\pi} + C = -\sqrt{\pi},$$

тогда

$$C = 0.$$

Таким образом, значение исходного интеграла равно

$$F(\alpha) = -\sqrt{-\pi\alpha}.$$

Докажем возможность дифференцирования данного НИЗОП:

(a) Функция $f(x, \alpha) = \dfrac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2}$ непрерывна по $x \in (0; +\infty)$ при каждом фиксированном $\alpha < 0$ как комбинация элементарных функций.

(b) Функция $f'_\alpha(x, \alpha) = e^{\alpha x^2}$ непрерывна на прямоугольнике $(0; +\infty) \times (-\infty; 0)$ как элементарная функция.

(c) НИ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2} dx$ сходится при каждом фиксированном $\alpha \in (-\infty, 0)$. Действительно, для любого фиксированного $\alpha < 0$ мы можем представить этот НИ как

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2} dx = \int\limits_0^{1} \frac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2} dx.$$

Рассмотрим каждый интеграл по отдельности.

i. Рассмотрим

$$\int\limits_0^{1} \frac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2} dx.$$

В частности, возьмем подынтегральную функцию

$$\frac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2} \underset{x \to +0}{\sim} -\frac{\alpha x^2}{x^2} = \frac{-\alpha}{x^0},$$

то есть по степенному признаку НИ-2 данный интеграл сходится.

ii. ассмотрим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2} dx.$$

В частности, возьмем подынтегральную функцию

$$\frac{e^{\alpha x^2} - 1}{x^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2},$$

то есть по степенному признаку НИ-1 данный интеграл сходится.

(d) НИЗОП $\int\limits_0^{+\infty} e^{\alpha x^2} dx$ сходится равномерно по $\alpha \in (-\infty, 0)$. Действительно, мы знаем, что это Гамма-функция, значение которой определено при $\alpha < 0$. Таким образом, имеется равномерная сходимость по α.

Таким образом, теорема о дифференцировании НИЗОП по параметру выполняется, следовательно, дифференцирование по параметру возможно. Тогда конечное значение интеграла будет равно

$$F(\alpha) = -\sqrt{-\pi\alpha},\ \alpha < 0.$$

13. Вычислить

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} dx.$$

Для вычисления значения интеграла введем замену $3x = t$, чтобы попытаться привести его к интегралу Дирихле:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} dx = \begin{bmatrix} 3x = t \Rightarrow x = \dfrac{t}{3},\ dx = \dfrac{dt}{3}, \\ x \to 0 \Rightarrow t \to 0,\ x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \end{bmatrix} = 9 \int\limits_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^3} dt =$$

$$9 \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt \right) = \begin{bmatrix} u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt \\ dv = \dfrac{dt}{t^3} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{2t^2} \end{bmatrix} = -9\frac{1}{t}\Big|_0^{+\infty} + 9\frac{\sin t}{2t^2}\Big|_0^{+\infty} - \frac{9}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t dt \\ dv = \dfrac{dt}{t^2} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{t} \end{bmatrix} = -9\frac{1}{t}\Big|_0^{+\infty} + 9\frac{\sin t}{2t^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{9}{2}\frac{\cos t}{t}\Big|_0^{+\infty} + \frac{9}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} \lim\limits_{t \to \infty} -9\dfrac{1}{t} + 9\dfrac{\sin t}{2t^2} + \dfrac{9}{2}\dfrac{\cos t}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t \to 0} -9\dfrac{1}{t} + 9\dfrac{\sin t}{2t^2} + \dfrac{9}{2}\dfrac{\cos t}{t} = 0 \end{bmatrix} = \frac{9}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{4}.$$

14. Вычислить, используя эйлеровы интегралы,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx.$$

Вид данного интеграла напоминает одну из форм записи Бета-функции. Следовательно, сведем данный интеграл в Бета-функции, сделав замену:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \begin{bmatrix} x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t},\ dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} dt, \\ x \to \infty \Rightarrow t \to \infty, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}}{1+t} \cdot \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{1+t} dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3}{4}-1}}{(1+t)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

15. Исследовать на абсолютную и неабсолютную сходимость

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x + \cos 3x - 2}{x^2\sqrt{x}} dx.$$

В данном случае мы имеем несобственный интеграл, у которого две особые точки: $x = 0$, $x = +\infty$.

Исследуем интеграл на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим несобственный интеграл вида

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\cos 2x + \cos 3x - 2}{x^2\sqrt{x}}\right| dx.$$

Данный НИ имеет две особые точки, поэтому для исследования сходимости представим его в виде суммы двух НИ, каждый из которых имеет по одной особой точке

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\cos 2x + \cos 3x - 2}{x^2\sqrt{x}}\right| dx = \int\limits_0^{1} \left|\frac{\cos 2x + \cos 3x - 2}{x^2\sqrt{x}}\right| dx + \int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos 2x + \cos 3x - 2}{x^2\sqrt{x}}\right| dx.$$

Рассмотрим по отдельности каждый из интегралов.

(a) Рассмотрим НИ-2

$$\int\limits_0^{1} \left|\frac{\cos 2x + \cos 3x - 2}{x^2\sqrt{x}}\right| dx.$$

Рассмотрим подынтегральную функцию. По свойствам модуля поменяем знак:

$$\left|\frac{\cos 2x + \cos 3x - 2}{x^2\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{2 - \cos 2x - \cos 3x}{x^2\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{1 - \cos 2x + 1 - \cos 3x}{x^2\sqrt{x}}\right|.$$

Оба слагаемых $1 - \cos 2x \geqslant 0$, $1 - \cos 3x \geqslant 0$, а также $x^2\sqrt{x} \geqslant 0$ для любого их из $(0, 1]$, поэтому можем записать следующим образом

$$\left|\frac{1 - \cos 2x + 1 - \cos 3x}{x^2\sqrt{x}}\right| = \frac{|1 - \cos 2x|}{x^2\sqrt{x}} + \frac{|1 - \cos 3x|}{x^2\sqrt{x}}.$$

То есть мы разделили рассматриваемый НИ-2 на два. Исследуем каждое слагаемое по отдельности, используя эквивалентность

$$1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2},$$

тогда

$$\frac{|1 - \cos 2x|}{x^2\sqrt{x}} \underset{x\to +0}{\sim} \frac{\frac{4x^2}{2}}{x^2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

то есть по степенному признаку для НИ-2 мы получаем, что НИ-2 от этой функции будет сходящимся.

Аналогично для второго слагаемого

$$\frac{|1 - \cos 3x|}{x^2\sqrt{x}} \underset{x\to +0}{\sim} \frac{\frac{9x^2}{2}}{x^2\sqrt{x}} = \frac{9}{2\sqrt{x}},$$

также сходится по степенному признаку для НИ-2.

Таким образом, НИ-2 $\int\limits_0^1 \left|\frac{\cos 2x+\cos 3x-2}{x^2\sqrt{x}}\right| dx$ сходится как сумма двух сходящихся НИ-2.

(b) Рассмотрим НИ-1

$$\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos 2x+\cos 3x-2}{x^2\sqrt{x}}\right| dx.$$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$\left|\frac{\cos 2x+\cos 3x-2}{x^2\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}},$$

таким образом по степенному признаку для НИ-1 интеграл от функции справа сходится, а значит по предельному признаку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos 2x+\cos 3x-2}{x^2\sqrt{x}}\right| dx$ сходится.

Таким образом, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\cos 2x+\cos 3x-2}{x^2\sqrt{x}}\right| dx$ сходится как сумма двух сходящихся интегралов, а значит исходный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x+\cos 3x-2}{x^2\sqrt{x}} dx$ сходится абсолютно.