Уравнения высших порядков. Понижение порядка уравнения.

Все рассмотренные в теме "Элементарные дифференциальные уравнения"имели первый порядок. Теперь же мы переходим к рассмотрению уравнений n-ого порядка.

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где F — функция определенная и непрерывная по всем своим аргументам в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$.

На самом деле, всё достаточно незамысловато. Имея уравнение n-ого порядка, мы всего навсего понижаем его порядок до тех пор, пока не получим такое уравнение, методы интегрирования которого мы уже знаем. И понижаем порядок мы с помощью замен независимой переменной или неизвестной функции. Рассмотрим эти замены.

1. **Уравнения, не содержащие функции y и несколько первых производных этой функции.**

   Рассмотрим уравнение вида

   $$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

   Порядок уравнения может быть понижен заменой

   $$y^{(k)} = z(x) \Rightarrow F(x, z, \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

   Если в результате рещения полученного уравнения получаем общее решение

   $$z(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}),$$

   то общее решение исходного уравнения является решением ПДУ

   $$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}).$$

2. **Уравнение, не содержащее независимой переменной.**

   Рассмотрим уравнение вида

   $$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

   Порядок уравнения можно понизить с помощью замены

   $$y' = z(y).$$

   Тогда

   $$\begin{aligned} y' =& z(y), \\ y'' =& z' \cdot y' = z' \cdot z, \\ y''' =& (z'' \cdot z + z'^2) z = z'' \cdot z^2 + z'^2 \cdot z, \\ &\vdots \end{aligned}$$

   В результате замены получим уравнение вида

   $$\Phi(y, z, \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

   Если функция $z(y) = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1})$ — общее решение этого уравнения, то, сделав обратную замену, получим УРП

   $$y' = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1}).$$

3. **Уравнения однородные относительно неизвестной функции и ее производных.**

• *Функция* $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ *называется* ***однородной*** *относительно* $y, y', \dots, y^{(n)}$, *если*

$$F(x, py, py', \dots, py^{(n)}) = p^m \cdot F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Соответственно уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ *называется* ***однородным***.

Порядок однородного уравнения может быть понижен заменой

$$y' = y \cdot z(x).$$

Тогда

$$y'' = z'y + zy' = z'y + z^2 y = (z' + z^2) \cdot y;$$

$$y''' = (z'' + 2zz') \cdot y + (z' + z^2) \cdot y \cdot z = (z'' + 3zz' + z^3) \cdot y.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим, что

$$y^{(k)} = (z, z', \dots, z^{(k-1)}).$$

Выполнив эту замену, получим

$$F(x, y, \varphi_1(z) \cdot y, \varphi_2(z, z') \cdot y, \dots, \varphi_n(z, z', \dots, z^{(n-1)}) \cdot y) = 0.$$

Отдельно рассмотрев ситуацию $y = 0$, можем сократить на y. Тогда получим новое уравнение с неизвестной функцией z порядка $(n - 1)$:

$$F(x, 1, \varphi_1(z), \varphi_2(z, z'), \dots, \varphi_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

4. **Обобщенное однородное уравнение.**

• *Уравнение* $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ *называется* ***обобщенным однородным уравнением***, *если для функции* F *выполняется соотношение*

$$F(px, p^k y, p^{k-1} y', \dots, p^{k-n} y^{(n)}) = p^m \cdot F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Выполним замену неизвестной функции и независимой переменной следующим образом

$$x = e^t, \quad y = z \cdot e^{kt}.$$

Тогда

$$y' = (z' + kz) \cdot e^{(k-1)t}.$$

$$y'' = \Big(z'' + (kz - 1) \cdot z' + k \cdot (k-1) \cdot z'\Big) \cdot e^{(k-2)t}.$$

$$y''' = (z''' + \dots) \cdot e^{(k-3)t}.$$

Подставив эти замены в уравнение, получим

$$F(e^t, ze^{kt}, (z' + kz)e^{(k-1)t}, (z'' + \dots)e^{(k-2)t}, \dots, (z^{(n)} + \dots)e^{(k-n)t}) = 0.$$

$$p^m \cdot F(1, z, z' + kz, z'' + \dots, \dots, z^{(n)} + \dots) = 0.$$

Получим уравнение, в котором не содержится независимой переменной. Порядок этого уравнения может быть понижен способом 3. Зачастую принято брать $k = 1$.

5. **Уравнение в точных производных**.

   - *Уравнение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ называется* ***уравнением в точных производных****, если*
$$\exists \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) : \frac{d\Phi}{dx} = F.$$
   Тогда уравнение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ равносильно уравнению
$$\frac{d\Phi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C$$
   — уравнение $(n-1)$-ого порядка. Иногда исходное уравнение не является уравнением в точных производных, но его можно получить, умножив его на некий множитель.

Разберем на каждый случай по одному примеру.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение
$$y''(e^x + 1) + y' = 0.$$

Решение. Так как в данном уравнении отсутствует переменная y, то данное уравнение подходит под 1-ый тип. Введем замену
$$y' = z(x), \ y'' = z'(x).$$
Подставим эту замену и получим УРП
$$z'(e^x + 1) + z = 0.$$
Приведем его к более привычному виду
$$\frac{dz}{z} + \frac{dx}{e^x + 1} = 0.$$
Проинтегрируем и получим
$$\int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{z} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{e^x + 1} = C_1.$$
$$\ln z + \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = C_1.$$
Преобразуем его, чтобы выделить z. Тогда
$$z = C_1 \frac{e^x + 1}{e^x} = C_1 + C_1 e^{-x}.$$
Сделаем обратную замену, то есть
$$y' = C_1 + C_1 e^{-x}.$$
Данное уравнение является простейшим. Проинтегрируем обе части по x и получим общее решение исходного уравнения:
$$y = \int\limits_{x_0}^{x} (C_1 + C_1 e^{-x}) dx + C_2 = C_1 x - C_1 e^{-x} + C_2.$$

Ответ:
$$y = C_1 x - C_1 e^{-x} + C_2.$$

Замечание. *Также под первый тип могут попасть уравнения, в которых нет ни x, ни y, ни первых k производных от y. Например, порядок уравнения*

$$y'' \cdot y''' + 1 = 0$$

можно понизить заменой $y'' = z(x)$. Тогда получим

$$z \cdot z' + 1 = 0.$$

Далее интегрируем и делаем обратную замену.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y'^2 + 2yy'' = 0.$$

Решение. Данное уравнение подходит ко 2-му типу. Тогда введем замену

$$y' = z(y),\ y'' = z'y' = z'z.$$

Подставим эту замену и получим

$$z^2 + 2z'zy = 0.$$

Запомним случай
$$z = 0$$
и сократим уравнение на z. Тогда получим УРП

$$z + 2z'y = 0.$$

$$\frac{dz}{z} + \frac{dy}{2y} = 0.$$

Отсюда
$$\ln z + \frac{1}{2}\ln y = C_1.$$
$$z = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Сделаем обратную замену и получим снова УРП

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

$$\sqrt{y}dy = C_1 dx.$$

Тогда получим общее решение уравнения

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2.$$

Ответ: $y = \left(\frac{3}{2}(C_1 x + C_2)\right)^{\frac{2}{3}}$.