Канонический вид метода простой итерации

Условие

Привести к каноническому виду, обеспечивающему сходимость метода итераций, уравнение

$$x^7 - 2x - 2 = 0.$$

Проверить выполнение условий теоремы о сходимости.

Алгоритм решения

Для решения задачи нам понадобятся следующие утверждения:

1. **Теорема 1.** Если функция $f(x) \in C[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то на этом отрезке существует по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$. Если при этом функция $f(x)$ будет монотонной на отрезке $[a,b]$, то она может иметь только один корень.

2. для канонического вида метода простой итерации $x = \varphi(x)$ функция $\varphi(x)$ определена на отрезке

$$|x - x_0| \leqslant \delta, \tag{1}$$

непрерывна на нем и удовлетворяет условию

$$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1, \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \tag{2}$$

где x_0 — начальное приближение. Тогда метод простой итерации при правильном выборе начального приближения x_0 будет сходящимся.

Алгоритм следующий: отделяем корень, выводим формулу для канонического вида, который будет удовлетворять условию теоремы о сходимости.

Мы имеем

$$f(x) = x^7 - 2x - 2 = 0.$$

Попытаемся подбором найти отрезок, на котором находится единственный корень уравнения. Начнем с нуля:

$$f(0) = -2 < 0,$$

то есть нужно найти точку, в которой $f(x) > 0$. Причем уже из формулы $f(x)$ можно заметить, что эта функция будет очень быстро возрастать, то есть мы быстро обнаружим нужную точку. Возьмем единицу:

$$f(1) = 1 - 2 - 2 = -3 < 0,$$

то есть единица не подходит. Возьмем двойку:

$$f(2) = 2^7 - 4 - 2 > 0,$$

эта точка подходит.

Таким образом на отрезке $[1,2]$ по теореме 1 существует хотя бы один корень уравнения. Докажем единственность, для этого вычислим производную

$$f'(x) = 7x^6 - 2, \quad x \in [1,2].$$

Из известных свойств функции $x^6 = 0$, мы можем утверждать, что функция $f'(x)$ на отрезке $[1, 2]$ будет возрастающей. Тогда

$$f'(1) = 2 \leqslant f'(x) \leqslant 7 \cdot 2^6 - 2 = f'(2), \quad x \in [1, 2].$$

Теперь необходимо задать формулу канонического вида для итерационного процесса $x = \varphi(x)$. Будем строить ее следующим образом. Возьмем наше уравнение

$$f(x) = 0,$$

домножим с двух сторон на постоянную λ и прибавим с двух сторон x, то есть

$$x = \underbrace{x + \lambda f(x)}_{\varphi(x)}.$$

Для сходимости необходимо выполнение условия (2)

$$|\varphi'(x)| = |1 + \lambda f'(x)| < 1, \quad x \in [1, 2].$$

Отсюда

$$-2 < \lambda f'(x) < 0.$$

Нам известно, что на отрезке d производная имеет положительный знак. Тогда

$$-\frac{2}{M} < \lambda < 0, \quad M = \max_{[1;2]} |f'(x)|.$$

Причем ранее мы выяснили, что $f'(x) \leqslant 7 \cdot 2^6 - 2 = 446$. Тогда $M = 446$. Тогда мы можем выбрать

$$\lambda \in (-\frac{1}{223}; 0) \approx (-0.00448, 0).$$

Тогда возьмем, к примеру, $\lambda = -0.00224$ (можно выбрать и другое, но лучше выбирать середину полученного интервала).

Таким образом, мы можем задать функцию для канонического вида:

$$\varphi(x) = x - 0.00224 \cdot (x^7 - 2x - 2).$$

Тогда канонический вид для сходящегося метода итераций задается формулой

$$x = x - 0.00224 \cdot (x^7 - 2x - 2).$$