Дифференциальные уравнения

Конспект по 2 курсу специальности «прикладная математика»

(лектор А. В. Филипцов)

Оглавление

Глава 1

Основные понятия. Простейшие дифференциальные уравнения.

1.1 Основные понятия.

• ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** *называется выражение вида*

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.1.1}$$

где F — некоторая функция $(n+2)$-ух переменных, определенная в некоторой области, t — независимая переменная, $x = x(t)$ — неизвестная функция независимой переменной, $x', \ldots, x^{(n)}$ — производные функции $x(t)$, причем переменная t и функции F и x действительны.

• *Порядок старшей производной, присутствующей в уравнении* (1.1.1)*, называется* ***порядком*** *уравнения.*

• ***Решением*** *уравнения* (1.1.1) *называется функция, заданная и n раз дифференцируемая на некотором промежутке (связном множестве) $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ и обращающая уравнение* (1.1.1) *в верное равенство.*

• *График решения дифференциального уравнения называется* ***интегральной кривой****.*

Если функция $x(t) : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ является решением уравнения (1.1.1) на промежутке $\mathbb{I}$, то $\forall I_1 \subseteq \mathbb{I}$ функция $x_1(t) : I_1 \to \mathbb{R}$ такая, что $x_1(t) = x(t) \quad \forall t \in I_1$, является решением на промежутке I_1. При этом функция $x_1(t)$ называется **сужением** функции $x(t)$ на промежутке I_1, а функция $x(t)$ называется **продолжением** функции $x_1(t)$ на промежутке $\mathbb{I}$.

• *Решение, которое нельзя продолжить, называется* ***непродолжаемым****, а промежуток, на котором оно определено, называется* ***максимальным интервалом существования****.*

Каждое дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений.

• *Совокупность решений уравнения* (1.1.1) *вида $x = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n)$, зависящая от n существенно произвольных постоянных, называется* ***общим решением*** *уравнения* (1.1.1)*.*

Существенные постоянные — это постоянные, которые нельзя заменить на меньшее количество, не изменив совокупность решений, описанных общим решением.

• *Решение дифференциального уравнения, получающееся из общего решения при конкретных произвольных постоянных, называется* ***частным решением****.*

Возможны случаи, когда уравнение имеет решение, не входящее в общее решение.

• *Совокупность всех решений дифференциального уравнения называется* ***полным решением****.*

Часто на практике математическая модель, содержащая дифференциальное уравнение, содержит также некоторые дополнительные условия необходимые для выбора единственного решения, описывающего моделируемый процесс.

• *Дополнительные условия накладываемые на неизвестную функцию называются* ***начальными****, если они относятся к одному значению аргумента, и* ***граничными****, если относятся к разным значениям аргумента.*

• *Начальная задача вида*

$$\begin{cases} F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \\ x|_{t=t_0} = \xi_0, x'|_{t=t_0} = \xi_1, \dots, x^{(n-1)}|_{t=t_0} = \xi_{n-1}; \end{cases} \qquad t_0 \in \mathbb{I}$$

называется ***задачей Коши****.*

1.2 Простейшие дифференциальные уравнения.

Пусть D — оператор дифференцирования, то есть $D : x \mapsto x'$. Тогда первую производную функции x будем обозначать $Dx = x'$, вторую $D^2x = x''$ и так далее.

• ***Простейшим*** *называется дифференциальное уравнение вида*

$$D^n x = f(t), \ t \in \mathbb{I}, \tag{1.2.1}$$

где $\mathbb{I}$ — некоторый промежуток в $\mathbb{R}$, $f(t)$ — непрерывная в $\mathbb{I}$ функция.

Теорема. *Общее решение простейшего дифференциального уравнения первого порядка*

$$Dx = f(t), \ t \in \mathbb{I} \tag{1.2.2}$$

имеет вид

$$x(t) = \int f(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + C,$$

где $t_0 \in \mathbb{I}$, а C — произвольная постоянная.

⧫ Доказательство теоремы следует из курса математического анализа. ⊠

Заметим, что общее решение содержит все решения дифференциального уравнения (1.2.2). Следовательно, полученное общее решение является **полным** решением.

Теорема. *Задача Коши $Dx = f(t)$, $x|_{t=t_0} = \xi_0$, где $t, t_0 \in \mathbb{I}$, имеет единственное решение*

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + \xi_0.$$

♦ Подставим начальное условие в общее решение:

$$\xi_0 = x(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0} f(\tau)d\tau + C \Rightarrow C = \xi_0.$$

⊠

Решение простейшего дифференциального уравнения (1.2.1) можно свести к последовательному решению простейшего дифференциального уравнения первого порядка. Так как $D^n x = D(D^{n-1}x)$, то уравнение n-го порядка является уравнением первого порядка относительно функции $D^{n-1}x$. Следовательно, из первой теоремы получаем

$$D^{n-1}x = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau_1)d\tau_1 + C_1.$$

Тогда аналогично

$$D^{n-2}x = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1 + C_1\Big)d\tau_2 + C_2 = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1\Big)d\tau_2 + C_1(t - t_0) + C_2.$$

Заметим, что семейство функций $C_1(t - t_0) + C_2$ описывает множество всех многочленов первой степени. Следовательно, это множество не изменится, если заменить его на $\widetilde{C}_1 t + \widetilde{C}_0$. Тогда имеем

$$D^{n-2}x = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_2 \int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1 + \widetilde{C}_1 t + \widetilde{C}_0.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_n \int\limits_{t_0}^{\tau_n} d\tau_{n-1} \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1 + \widetilde{C}_{n-1}t^{n-1} + \ldots + \widetilde{C}_1 t + \widetilde{C}_0.$$

Теорема. *Общее решение (полное) уравнения* (1.2.1) *имеет вид*

$$x(t) = \underbrace{\int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau}_{y_1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{C}_i t^i}_{y_2}. \tag{1.2.3}$$

♦ Доказательство можно провести двумя способами: по формуле производной от интеграла, зависящего от параметра, или путем сведения кратных интегралов к повторным. Мы рассмотрим первый способ. Формула

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,\tau)d\tau\Big) = \beta'(t)f(t,\beta(t)) - \alpha'(t)f(t,\alpha(t)) + \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f'_t(t,\tau)d\tau$$

определяет производную от интеграла, зависящего от параметра. Тогда для нашего случая подставим вместо $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ соответственно t, t_0 и получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_{t_0}^{t} f(t,\tau)d\tau\Big) = f(t,t) + \int\limits_{t_0}^{t} f'_t(t,\tau)d\tau.$$

Отсюда получаем $D^n y_2 = 0$. Вычислим $D^n y_1$:

$$Dy_1 = \frac{(t-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(n-1)(t-\tau)^{n-2}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-2}}{(n-2)!} f(\tau) d\tau;$$

$$D^2 y_1 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-3}}{(n-3)!} f(\tau) d\tau;$$

$$\ldots$$

$$D^n y_1 = f(t).$$

⊠

Теорема. *Решение задачи Коши $D^n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$ (D^0 — тождественное отображение, то есть $D^0 x = x$), где $t, t_0 \in \mathbb{I}$, всегда существует, единственно и имеет вид*

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_i}{i!} (t-t_0)^i.$$

⧫ Разложим многочлен в общем решении простейшего дифференциального уравнения (1.2.3) по степеням $t - t_0$, то есть представим в виде

$$\tilde{\tilde{C}}_{n-1}(t-t_0)^{n-1} + \ldots + \tilde{\tilde{C}}_1(t-t_0) + \tilde{\tilde{C}}_0,$$

где $\tilde{\tilde{C}}_i$ — произвольные постоянные, зависящие от $\tilde{C}_i$.
Тогда $\xi_0 = x|_{t=t_0} = \tilde{\tilde{C}}_0$, $\xi_i = D^i x|_{t=t_0} = i! \cdot \tilde{\tilde{C}}_i \Rightarrow \tilde{\tilde{C}}_i = \dfrac{\xi_i}{i!}$. ⊠

• ***Комплекснозначной функцией действительного переменного*** *называется функция вида*

$$h(t) = f(t) + i \cdot g(t),$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — действительные функции, определенные на некотором промежутке $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$.

Производные и интегралы комплекснозначной функции определяются следующим образом:

$$h'(t) = f'(t) + i \cdot g'(t);$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau + i \cdot \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau.$$

Кроме того для таких функций справедливы свойства производных:

1. $(\alpha u)' = \alpha u'$;
2. $(u+v)' = u' + v'$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$.

Рассмотрим комплексное простейшее дифференциальное уравнение $Dz = h(t)$, где $h(t) = f(t)+i\cdot g(t)$. Если комплекснозначаная функция $z(t) = x(t)+i\cdot y(t)$ является решением этого дифференциального уравнения, то подставим его в уравнение и получим $\begin{cases} Dx = f(t), \\ Dy = g(t). \end{cases}$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$z(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + C_1 + i\cdot\Big(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau + C_2\Big) = \int\limits_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau + C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Тогда решение задачи Коши $Dz = h(t)$, $z|_{t=t_0} = \xi_0 + i\cdot\eta_0$ сводится к решению двух задач Коши:

$$\begin{cases} Dx = Re(h(t)), \\ x|_{t=t_0} = \xi_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} Dy = Im(h(t)), \\ y|_{t=t_0} = \eta_0; \end{cases}$$

Заметим, что любое дифференциальное уравнение можно рассматривать как комплексное простейшее дифференциальное уравнение, у которого мнимая часть неоднородности равна нулю. Следовательно, можем говорить о существовании комплекснозначных решений действительных уравнений.

Глава 2

Линейные стационарные уравнения.

2.1 Линейные стационарные дифференциальные уравнения. Существование и единственность решения задачи Коши.

• ***Линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка*** *называется уравнение вида*

$$D^n x + a_{n-1}(t) \cdot D^{n-1} x + \ldots + a_1(t) \cdot Dx + a_0(t) \cdot D^0 x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}, \tag{2.1.1}$$

где функции $a_i(t)$ и $f(t)$ непрерывны на промежутке $\mathbb{I}$.

• *Если $f(t) = 0$, то уравнение называется* ***однородным***, *в противном случае* ***неоднородным***.

• *Если $a_i(t)$ является постоянным, то уравнение* ***стационарное***.

Далее рассматриваем только стационарные линейные дифференциальные уравнения.

Обозначим через $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ оператор дифференцирования. Тогда уравнение (2.1.1) запишем в виде

$$L_n x = f(t). \tag{2.1.1}$$

Так как для любых дифференцируемых функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$

1. $D(\varphi_1 + \varphi_2) = D(\varphi_1) + D(\varphi_2)$,
2. $D(\alpha\varphi_1) = \alpha D(\varphi_1)$,

то оператор дифференцирования D является линейным. Оператор L_n является результатом композиции суммы и произведения на действительное число линейных операторов, а значит L_n — **линейный оператор**.

Кроме действительных стационарных уравнений будем также рассматривать комплексные стационарные уравнения вида $L_n z = h(t)$, где L_n — линейный стационарный оператор с комплексными коэффициентами, а $h(t)$ — комплекснозначная функция.

• *Любой комплекснозначный линейный оператор L_n можно представить в виде композиции (произведения) операторов вида $D - \lambda_0 D^0$. Такое представление линейного оператора*

L_n называется ***факторизацией*** *оператора.*

Для факторизации оператора L_n построим многочлен

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

с теми же коэффициентами, что и у оператора L_n. Найдем корни этого многочлена над полем $\mathbb{C}$.

• *При этом многочлен $\Delta(\lambda)$ называется* ***характеристическим многочленом*** *для оператора L_n, а уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ —* ***характеристическим уравнением*** *для оператора L_n.*

Многочлен $\Delta(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ с учетом кратности имеет столько корней, какова его степень. Обозначим эти корни через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

и, следовательно,

$$L_n = (D - \lambda_1 D^0)(D - \lambda_2 D^0)\ldots(D - \lambda_n D^0)$$

— **факторизация** линейного оператора L_n.

Лемма. *Решение задачи Коши $Dz - \lambda_0 z = h(t)$, $z|_{t=t_0} = \xi$, $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ для любой комплекснозначной функции $h(t)$ и для любых комплексных чисел ξ и λ_0 всегда существует и единственно.*

♦ Домножим уравнение задачи Коши на ненулевую функцию $e^{-\lambda_0 t}$ и получим

$$e^{-\lambda_0 t} Dz \underbrace{-\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}}_{D(e^{-\lambda_0 t})} z = h(t)e^{-\lambda_0 t},$$

$$D(e^{-\lambda_0 t} z) = h(t)e^{-\lambda_0 t}.$$

Полученное уравнение является простейшим относительно функции $e^{-\lambda_0 t} z$, следовательно, его общее решение имеет вид

$$e^{-\lambda_0 t} z = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\lambda_0 \tau} h(\tau)d\tau + C.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$z = \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda_0(t-\tau)} h(\tau)d\tau + Ce^{\lambda_0 t}.$$

Чтобы найти решение задачи Коши, подставим в общее решение начальные условия и получим $\xi = z|_{t=t_0} = Ce^{\lambda_0 t_0} \Rightarrow C = \xi e^{-\lambda_0 t_0} \Rightarrow$

$$z = \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda_0(t-\tau)} h(\tau)d\tau + \xi e^{\lambda_0(t-t_0)}.$$

⊠

Теорема. *Решение задачи Коши $L_n z = h(t)$, $D^i z|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$, $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ для любой непрерывной комплекснозначной функции $h(t)$, для любых комплексных чисел ξ_i и для любого комплексного линейного оператора L_n всегда существует и единственно.*

⧫ Факторизуем оператор L_n: $L_n = (D - \lambda_1 D^0)(D - \lambda_2 D^0) \dots (D - \lambda_n D^0)$ и обозначим через L_{n-1} следующий оператор: $L_{n-1} = (D - \lambda_2 D^0)(D - \lambda_3 D^0) \dots (D - \lambda_n D^0)$. Тогда уравнение задачи Коши представимо в виде

$$(D - \lambda_1 D^0)(L_{n-1} z) = h(t).$$

Если обозначим $z_1 = L_{n-1} z$, то уравнение имеет вид $(D - \lambda_1 D^0) z_1 = h(t) \Rightarrow z_1|_{t=t_0} = (L_{n-1} z)|_{t=t_0} = \mu_1$, где μ_1 — комплексное число, которое выражается через ξ_i.

По лемме решение задачи Коши всегда существует и единственно. Следовательно, функция $z(t)$ является решением задачи Коши $L_{n-1} z = z_1$, $D^i z|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-2}$. Продолжая рассуждения аналогичным образом еще $(n-1)$ раз, получим функцию, которая является решением исходной задачи Коши. ⊠

Следствие. *Действительное решение задачи Коши $L_n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$, $t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ для любой непрерывной действительной функции $f(t)$, для любых действительных чисел ξ_i и для любого действительного линейного оператора L_n всегда существует и единственно.*

⧫ Если рассматривать функцию $f(t)$ и числа ξ_i как комплекснозначную функцию и комплексные числа с нулевой мнимой частью, то по теореме задача Коши имеет единственное комплексное решение $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ действительные. Но линейный оператор L_n имеет действительные коэффициенты $L_n z = L_n x + i \cdot L_n y$.

Тогда, так как z — решение задачи Коши, подставим:

$$\begin{cases} L_n x + i \cdot L_n y = f(t) + i \cdot 0, \\ (D^i x + i \cdot D^i y)|_{t=t_0} = \xi_i + i \cdot 0; \end{cases}$$

приравняем действительные части и получим, что функция $x(t) = Re(z(t))$ является единственным действительным решением задачи Коши. ⊠

2.2 Структура множества решений линейного однородного стационарного уравнения.

Рассмотрим линейное стационарное однородное уравнение

$$L_n x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2.1}$$

Так как оператор L_n является линейным, то для любых двух решений $x(t)$ и $y(t)$ уравнения (2.2.1)

$$L_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot L_n x + \beta \cdot L_n y = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Следовательно, функция $\alpha x + \beta y$ также является решением уравнения (2.2.1), а значит множество решений уравнения (2.2.1) является **линейным (векторным) пространством**.

Покажем, что пространство конечномерно и имеет размерность n (равную порядку уравнения).

• *Функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ называются **линейно зависимыми**, если существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не обращающиеся в 0 одновременно такие, что $\alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t) = 0\ \forall t$. В противном случае функции называются **линейно независимыми**.*

• *Пусть $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — это $(n-1)$ раз дифференцируемые функции. Определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ D\varphi_1(t) & \ldots & D\varphi_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{n-1}\varphi_1(t) & \ldots & D^{n-1}\varphi_n(t) \end{vmatrix}$$

*называется **определителем Вронского**, или **вронскианом** этих функций.*

Теорема. *Если функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно зависимые, то вронскиан этих функций $W(t) = 0\ \forall t$.*

⧫ Пусть функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы. Тогда одна из этих функций линейно выражается через остальные. Пусть, например, это функция $\varphi_1(t)$, то есть

$$\varphi_1(t) = \beta_2\varphi_2(t) + \ldots + \beta_n\varphi_n(t).$$

Тогда

$$D^i\varphi_1(t) = \beta_2 D^i\varphi_2(t) + \ldots + \beta_n D^i\varphi_n(t) \quad \forall i = \overline{1, n-1}.$$

Следовательно, первый столбец вронскиана $W(t)$ линейно выражается через остальные столбцы и, следовательно, $W(t) = 0\ \forall t$. ⊠

Теорема. *Если n решений $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ уравнения* (2.2.1) *линейно независимы, то вронскиан этих функций $W(t) \neq 0\ \forall t$.*

⧫ От противного. Пусть $\exists t_0$, для которого $W(t_0) = 0$. Тогда линейная однородная система алгебраических уравнений с матрицей $W(t_0)$ имеет ненулевое решение, то есть существует ненулевой столбец $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ такой, что $W(t_0)X = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(t_0) + \alpha_2\varphi_2(t_0) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t_0) = 0, \\ \alpha_1 D\varphi_1(t_0) + \alpha_2 D\varphi_2(t_0) + \ldots + \alpha_n D\varphi_n(t_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 D^{n-1}\varphi_1(t_0) + \alpha_2 D^{n-1}\varphi_2(t_0) + \ldots + \alpha_n D^{n-1}\varphi_n(t_0) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t)$. Так как функция $\varphi(t)$ является линейной комбинацией решений уравнения (2.2.1), то она также является решением этого уравнения. При этом

$$D^i\varphi(t)|_{t=t_0} = (\alpha_1 D^i\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n D^i\varphi_n(t))|_{t=t_0} = 0\ \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Но функция тождественно равная нулю также является решением, удовлетворяющим тем же начальными условиям. И, следовательно, по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши функция $\varphi(t)$ и функция тождественно равная нулю равны между собой, то есть $\varphi(t) = 0\ \forall t \Rightarrow \alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t) = 0\ \forall t$. Тогда функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы, что противоречит условию теоремы. ⊠

Теорема. *Множество решений линейного стационарного однородного уравнения порядка n является конечномерным линейным пространством размерности n.*

⧫ Рассмотрим n задач Коши:

$$\begin{cases} L_n x = 0, \\ x|_{t=t_0} = 1, \\ Dx|_{t=t_0} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ D^{n-1}x|_{t=t_0} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} L_n x = 0, \\ x|_{t=t_0} = 0, \\ Dx|_{t=t_0} = 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ D^{n-1}x|_{t=t_0} = 0; \end{cases} \qquad \dots\dots\dots \qquad \begin{cases} L_n x = 0, \\ x|_{t=t_0} = 0, \\ Dx|_{t=t_0} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ D^{n-1}x|_{t=t_0} = 1; \end{cases} \tag{2.2.2}$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши каждая из этих задач Коши имеет единственное решение. Обозначим их через $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$. Заметим, что их вронскиан при $t = t_0$ равен определителю единичной матрицы, то есть равен 1. Следовательно, эти функции линейно независимы.

Покажем, что любое решение уравнения (2.2.1) линейно выражается через эти функции. Пусть $\varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (2.2.1), и пусть

$$\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_0, \quad D\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_1, \quad \dots, \quad D^{n-1}\varphi(t)|_{t=t_0} = \xi_{n-1}.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \xi_0\varphi_0 + \dots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}.$$

При этом

$$D^i\psi(t)|_{t=t_0} = (\xi_0 D^i\varphi_0 + \dots + \xi_{n-1}D^i\varphi_{n-1})|_{t=t_0} = \xi_i \ \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Следовательно, функция $\psi(t)$ является решением задачи Коши с теми же начальными условиями, что и функция $\varphi(t)$. Тогда по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши

$$\varphi(t) = \psi(t) = \xi_0\varphi_0 + \dots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}. \tag{2.2.3}$$

И, следовательно, произвольная функция $\varphi(t)$ линейно выражается через линейно независимые функции $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$. Значит функции $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ составляют базис пространства решений. ⊠

• *Базис пространства решений линейного однородного стационарного уравнения называется* ***фундаментальной системой решений***.

• *Фундаментальная система решений, удовлетворяющая условиям* (2.2.2) *называется* ***нормированной*** *при* $t = t_0$.

Используя фундаментальную систему решений нормированную при $t = t_0$, задача Коши с произвольными начальными условиями может быть найдена по формуле (2.2.3).

• *Функция* $\psi(t)$ *называется* ***сдвигом*** *функции* $\varphi(t)$ *на* $t = t_0$, *если* $\psi(t) = \varphi(t - t_0)$.

Теорема о сдвиге. *Если* $\varphi(t)$ *является решением задачи Коши* $L_n x = 0$, $D^i x|_{t=0} = \xi_i$, $\forall i = \overline{0, n-1}$, *то ее сдвиг* $\psi(t) = \varphi(t - t_0)$ *является решением задачи Коши* $L_n x = 0$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $\forall i = \overline{0, n-1}$.

♦ Так как $\varphi(t)$ — решение уравнения (2.2.1), то $L_n\varphi(t) = 0\ \forall t$, то есть

$$\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\varphi(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{d\varphi(t)}{dt} + a_0\varphi(t) = 0\ \forall t.$$

Так как равенство верно $\forall t$, оно останется верным, если заменить в нем t на $t-t_0$, то есть

$$\frac{d^n\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{d\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)} + a_0\varphi(t-t_0) = 0.$$

Заметим, что

$$\frac{d\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)} = \frac{d\varphi(t-t_0)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{d(t-t_0)}{dt}} = \frac{d\varphi(t-t_0)}{dt} = \frac{d\psi(t)}{dt} = D\psi(t) \Rightarrow \frac{d^i\varphi(t-t_0)}{d(t-t_0)^i} = D^i\psi(t).$$

И, следовательно,

$$D^n\psi(t) + a_{n-1}D^{n-1}\psi(t) + \ldots + a_1D\psi(t) + a_0\psi(t) = 0.$$

То есть $\psi(t)$ также является решением уравнения (2.2.1) и при этом

$$D^i\psi(t)|_{t=t_0} = D^i\varphi(t-t_0)|_{t=t_0} = \ D^i\varphi(t)|_{t=0} = \ \xi_i.$$

⊠

Следствие. *Если $\varphi_0(t),\ldots,\varphi_{n-1}(t)$ — фундаментальная система решений нормированная при $t=0$, то $\varphi_0(t-t_0),\ldots,\varphi_{n-1}(t-t_0)$ — фундаментальная система решений нормированная при $t=t_0$.*

Следовательно, решение задачи Коши $L_nx = 0$, $D^ix|_{t=t_0} = \xi_i\ \forall i = \overline{0,n-1}$ имеет вид

$$x(t) = \xi_0\varphi_0(t-t_0) + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t-t_0).$$

2.3 Построение фундаментальной системы решений линейного стационарного однородного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$L_nx = 0,\ t\in\mathbb{R}. \tag{2.3.1}$$

И пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристический многочлен оператора L_n, имеющего вид $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0D^0$.

Теорема. *Если $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ — корни над полем $\mathbb{C}$ характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ кратности $k_1,\ldots,k_s$ соответственно, то совокупность функций*

$$e^{\lambda_it}, te^{\lambda_it}, t^2e^{\lambda_it},\ldots,t^{k_i-1}e^{\lambda_it},\ i=\overline{1,s} \tag{2.3.2}$$

является системой линейно независимых решений уравнения (2.3.1).

♦ Покажем, что функции совокупности (2.3.2) являются решениями уравнения (2.3.1). Так как λ_i — корень характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ кратности k_i, то линейный оператор L_n при факторизации представим в виде

$$L_n = L_{n-k_i}(D-\lambda_iD^0)^{k_i},$$

где L_{n-k_i} — дифференциальный оператор $(n-k_i)$-ого порядка.

Следовательно, функция, являющаяся решением дифференциального уравнения $L_n x = L_{n-k_i}\underbrace{(D-\lambda_i D^0)^{k_i}x}_{=0}$, является решением уравнения (2.3.1).

Подействуем оператором $(D-\lambda_i D^0)^{k_i}$ на функцию $t^m e^{\lambda_i t}$, где $m < k_i$:

$(D-\lambda_i D^0)^{k_i}(t^m e^{\lambda_i t}) = (D-\lambda_i D^0)^{k_i-1}(D-\lambda_i D^0)(t^m e^{\lambda_i t}) = (D-\lambda_i D^0)^{k_i-1}(mt^{m-1}e^{\lambda_i t} + \lambda_i t^m e^{\lambda_i t} - \lambda_i t^m e^{\lambda_i t}) = m(D-\lambda_i D^0)^{k_i-1}(t^{m-1}e^{\lambda_i t}) = m(m-1)(D-\lambda_i D^0)^{k_i-2}(t^{m-2}e^{\lambda_i t}) = \ldots = m(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1(D-\lambda_i D^0)^{k_i-m}(e^{\lambda_i t}) = m!(D-\lambda_i D^0)^{k_i-m-1}\underbrace{(\lambda_i e^{\lambda_i t} - \lambda_i e^{\lambda_i t})}_{=0} = 0.$

Следовательно, функции $t^m e^{\lambda_i t}$ являются решениями уравнения (2.3.1) при $m < k_i$.

Покажем, что функции совокупности (2.3.2) линейно независимые. От противного. Пусть функции линейно зависимые, тогда существует нетривиальная линейная комбинация равная нулю. Она имеет вид

$$P_1(t)\cdot e^{\lambda_1 t} + P_2(t)\cdot e^{\lambda_2 t} + \ldots + P_s(t)\cdot e^{\lambda_s t} = 0,$$

где $P_i(t)$ — многочлен степени не выше $k_i - 1$.

Пусть $P_m(t)$, $m < s$ — последний ненулевой многочлен из многочленов $P_i(t)$. Тогда полученная линейная комбинация имеет вид

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + P_m(t)e^{\lambda_m t} = 0,\ P_m(t) \neq 0. \tag{2.3.3}$$

Домножим равенство (2.3.3) на функцию $e^{-\lambda_1 t}$ и получим

$$P_1(t) + P_2(t)\cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \ldots + P_m(t)\cdot e^{(\lambda_m-\lambda_1)t} = 0.$$

Затем продифференцируем полученное равенство k_1 раз:
$D^{k_1}P_1(t) = 0;$
$D^{k_1}(P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) = D^{k_1-1}(DP_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + (\lambda_2-\lambda_1)P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) =$
$= D^{k_1-1}(\underbrace{(DP_2(t) + (\lambda_2-\lambda_1)P_2(t))}_{Q_2(t)}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) = D^{k_1-1}(Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) = D^{k_1-2}(\widetilde{Q}_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}) =$
$= \ldots = \widetilde{\widetilde{Q}}_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$, где $Q_2(t)$, $\widetilde{Q}_2(t)$, $\widetilde{\widetilde{Q}}_2(t)$ — многочлены той же степени, что и $P_2(t)$. Тогда

$$\widetilde{\widetilde{Q}}_2(t)\cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \ldots + \widetilde{\widetilde{Q}}_m(t)\cdot e^{(\lambda_m-\lambda_1)t} = 0.$$

Проведем с полученным равенством ту же процедуру, что и с равенством (2.3.3), то есть домножим на $e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}$, а затем продифференцируем k_2 раз. В результате получим равенство вида

$$\widetilde{\widetilde{R}}_3(t)\cdot e^{(\lambda_3-\lambda_2)t} + \ldots + \widetilde{\widetilde{R}}_m(t)\cdot e^{(\lambda_m-\lambda_2)t} = 0,$$

где многочлены $\widetilde{\widetilde{R}}_i(t)$ имеют ту же степень, что и многочлен $P_i(t)$.
Продолжим эту процедуру $(m-1)$ раз. В результате получим выражение вида

$$\widetilde{\widetilde{\widetilde{U}}}_m(t)\cdot e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t} = 0,$$

где многочлен $\widetilde{\widetilde{\widetilde{U}}}_m(t)$ имеет ту же степень, что и многочлен $P_m(t)$.

Из последнего равенства следует, что $\widetilde{\widetilde{\widetilde{U}}}_m(t) = 0$, но тогда и $P_m(t) = 0$, что противоречит выбору P_m. Значит функции линейно независимые. ⊠

Следствие. *Если характеристический многочлен* $\Delta(\lambda)$ *над полем* $\mathbb{C}$ *имеет только действительные корни, то совокупность* (2.3.2) *является фундаментальной системой решений уравнения* (2.3.1).

♦ Если все $\lambda_i \in \mathbb{R}$, то (2.3.2) — совокупность n действительных линейно независимых решений уравнения (2.3.1). ⊠

Если среди корней λ_i существует мнимый корень $\lambda = \alpha + \beta i$, то в совокупности (2.3.2) этому корню соответствуют комплекснозначные решения вида $t^m e^{(\alpha+\beta i)t}$. А так как многочлен $\Delta(\lambda)$ имеет действительный коэффициент, то существует сопряженное число $\lambda = \alpha - \beta i$, также являющееся корнем характеристического уравнения, и, следовательно, в совокупности (2.3.2) будут содержаться решения вида $t^m e^{(\alpha-\beta i)t}$.

Заменим в совокупности (2.3.2) пару функций на функции

1. $\dfrac{t^m e^{(\alpha+\beta i)t} + t^m e^{(\alpha-\beta i)t}}{2} = t^m e^{\alpha t}\cos\beta t = Re(t^m e^{(\alpha+\beta i)t})$;
2. $\dfrac{t^m e^{(\alpha+\beta i)t} - t^m e^{(\alpha-\beta i)t}}{2i} = t^m e^{\alpha t}\sin\beta t = Im(t^m e^{(\alpha+\beta i)t})$.

Заметим, что новые функции являются линейными комбинациями функций из совокупности (2.3.2), следовательно, они также являются решениями. При этом матрица перехода от исходной линейно независимой системы функций к новой системе имеет определитель равный произведению определителей вида $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2i} \neq 0$. Следовательно, полученная система функций также линейно независимая, так как матрица перехода невырожденная.

2.4 Неоднородные стационарные линейные уравнения. Метод Коши. Метод Лагранжа.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$L_n x = f(t),\ t \in \mathbb{I} \tag{2.4.1}$$

и соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$L_n x = 0. \tag{2.4.2}$$

Пусть $f(t)$ — непрерывная на $\mathbb{I}$ функция, и пусть оператор L_n имеет вид $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0$.

Свойства решений линейных неоднородных уравнений:

1. *Если* x_1 *— решение уравнения* (2.4.1), *то* $\forall x_0$ *решения уравнения* (2.4.2) *функция* $x_1 + x_0$ *— решение уравнения* (2.4.1).

   ♦ $L_n(x_1 + x_0) = L_n x_1 + L_n x_0 = f(t) + 0 = f(t)$. Следовательно, функция $x_1 + x_0$ является решением. ⊠

2. *Если* x_1 *— решение уравнения* (2.4.1), *то* $\forall x_2$ *решения уравнения* (2.4.1) *функция* $x_2 - x_1$ *— решение уравнения* (2.4.2).

   ♦ $L_n(x_2 - x_1) = L_n x_2 - L_n x_1 = f(t) - f(t) = 0$. Следовательно, функция $x_2 - x_1$ является решением. ⊠

3. **Принцип суперпозиции:** *Если $x_1(t)$ — решение уравнения $L_n x = f_1(t)$, а $x_2(t)$ — решение уравнения $L_n x = f_2(t)$ с непрерывными функциями f_1 и f_2, то $x_1 + x_2$ — решение уравнения $L_n x = f_1(t) + f_2(t)$.*

Из свойств 1 и 2 следует, что все решения неоднородного линейного уравнения (2.4.1) можно получить, если прибавить к частному решению неоднородного уравнения (2.4.1) все решения однородного уравнения (2.4.2). То есть

$$x_{\text{ОН}} = x_{\text{ОО}} + x_{\text{ЧН}}.$$

• *Пусть $\varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (2.4.2) нормированная при $t = 0$. Тогда функция $\varphi_{n-1}(t)$ называется* ***функцией Коши*** *линейного оператора L_n.*

Теорема (Метод Коши)**.** *Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $\mathbb{I}$ и пусть $\varphi_{n-1}(t)$ — функция Коши оператора L_n. Тогда функция*

$$x_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{2.4.3}$$

является решением уравнения (2.4.1) $\forall t_0 \in \mathbb{I}$.

⧫ По формуле производной от интеграла, зависящего от параметра, получаем

$$\Big(\int\limits_{t_0}^{t} F(t,\tau)d\tau\Big)' = F(t,t) + \int\limits_{t_0}^{t} F'_t(t,\tau)d\tau.$$

Отсюда получаем

$$Dx_1 = \underbrace{\varphi_{n-1}\underbrace{(t-t)}_{=0}}_{=0} f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} D\varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)d\tau;$$

$$D^2 x_1 = \underbrace{D\varphi_{n-1}(t-t)f(t)}_{=0} + \int\limits_{t_0}^{t} D^2\varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)d\tau;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^{n-1} x_1 = \underbrace{D^{n-2}\varphi_{n-1}(t-t)f(t)}_{=0} + \int\limits_{t_0}^{t} D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)d\tau;$$

$$D^n x_1 = \underbrace{\underbrace{D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-t)}_{=1} f(t)}_{f(t)} + \int\limits_{t_0}^{t} D^n\varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)d\tau.$$

Подставим и получим

$$L_n x_1 =$$

$$= f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big(D^n\varphi_{n-1}(t-\tau) + a_{n-1}D^{n-1}\varphi_{n-1}(t-\tau) + \ldots + a_1 D\varphi_{n-1}(t-\tau) + a_0 D^0\varphi_{n-1}(t-\tau)\Big) f(\tau)d\tau =$$

$$= f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} (L_n\varphi_{n-1}(t-\tau)) f(\tau)d\tau.$$

Так как функция φ_{n-1} является функцией Коши оператора L_n, то эта функция является решением уравнения (2.4.2). А функция $\varphi_{n-1}(t-\tau)$ является сдвигом функции Коши на τ, а значит также является решением уравнения (2.4.2). Тогда $L_n\varphi_{n-1}(t-\tau)=0$. Отсюда $L_nx_1=f(t)$, и, следовательно, x_1 является решением уравнения (2.4.1). ⊠

Следствие. *Функция* (2.4.3) *является решением задачи Коши* $L_nx=f(t)$, $D^ix|_{t=t_0}=0$, $\forall i=\overline{0,n-1}$.

Следствие. *Если* $\varphi_0(t),\ldots,\varphi_{n-1}(t)$ *— фундаментальная система решений уравнения* (2.4.2), *нормированная при* $t=0$, *то задача Коши* $L_nx=f(t)$, $D^ix|_{t=t_0}=\xi_i$, $\forall i=\overline{0,n-1}$ *имеет решение*

$$x(t)=\xi_0\varphi_0(t-t_0)+\ldots+\xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t-t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Теорема (Метод Лагранжа)**.** *Пусть* $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ *— фундаментальная система решений уравнения* (2.4.2). *Тогда функция*

$$x_1(t)=u_1(t)\varphi_1(t)+\ldots+u_n(t)\varphi_n(t)$$

является решением уравнения (2.4.1), *если функции* $u_i(t)$ *удовлетворяют системе*

$$\begin{cases}Du_1\varphi_1+\ldots+Du_n\varphi_n=0,\\ Du_1D\varphi_1+\ldots+Du_nD\varphi_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Du_1D^{n-2}\varphi_1+\ldots+Du_nD^{n-2}\varphi_n=0,\\ Du_1D^{n-1}\varphi_1+\ldots+Du_nD^{n-1}\varphi_n=f(t);\end{cases} \tag{2.4.4}$$

♦ Определитель матрицы системы (2.4.4) равен вронскиану системы функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$. Следовательно, он ненулевой, и система имеет единственное решение. Причем из принципа Крамера следует, что это решение состоит из непрерывных функций ($\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i непрерывная, Δ непрерывная и ненулевая). Тогда функции Du_i интегрируемые, а следовательно и дифференцируемые.

Покажем, что функция $x_1(t)$ с найденными таким образом функциями u_i является решением уравнения (2.4.1):

$$Dx_1=\underbrace{Du_1\varphi_1+\ldots+Du_n\varphi_n}_{=0}+u_1D\varphi_1+\ldots+u_nD\varphi_n;$$

$$D^2x_1=\underbrace{Du_1D\varphi_1+\ldots+Du_nD\varphi_n}_{=0}+u_1D^2\varphi_1+\ldots+u_nD^2\varphi_n;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D^{n-1}x_1=\underbrace{Du_1D^{n-2}\varphi_1+\ldots+Du_nD^{n-2}\varphi_n}_{=0}+u_1D^{n-1}\varphi_1+\ldots+u_nD^{n-1}\varphi_n;$$

$$D^nx_1=\underbrace{Du_1D^{n-1}\varphi_1+\ldots+Du_nD^{n-1}\varphi_n}_{f(t)}+u_1D^n\varphi_1+\ldots+u_nD^n\varphi_n.$$

Теперь подставим и вычислим L_nx_1:

$$L_nx_1=f(t)+u_1(t)\cdot\underbrace{L_n\varphi_1(t)}_{=0}+\ldots+u_n(t)\cdot\underbrace{L_n\varphi_n(t)}_{=0}.$$

Множители нулевые, так как являются решениями уравнения (2.4.1). Следовательно, $L_nx_1=f(t)$, то есть x_1 — решение уравнения (2.4.1). ⊠

2.5 Стационарное линейное неоднородное уравнение со специальной правой частью. Метод Эйлера.

Пусть линейный оператор L_n имеет вид $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0$, и пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристический многочлен этого оператора.

Теорема. *Уравнение*

$$L_n z = P(t) \cdot e^{\gamma t},$$

где L_n — оператор дифференцирования с комплексными коэффициентами, $P(t)$ — многочлен с комплексными коэффициентами степени m и γ — комплексное число (то есть $P(t) \in \mathbb{C}[t]$, $\deg P(t) = m$, $\gamma \in \mathbb{C}$), имеет частное решение вида

$$z_1(t) = t^k Q(t) \cdot e^{\gamma t},$$

где $Q(t) \in \mathbb{C}[t], \deg Q(t) \leqslant m$, k — кратность корня γ характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ (если γ не корень, то $k = 0$).

♦

1. Пусть $\gamma = 0$ и пусть γ не является корнем характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, то есть кратность $k = 0$. Пусть

$$P(t) = b_m t^m + \ldots + b_1 t + b_0.$$

Подставим функцию

$$z_1(t) = d_m t^m + d_{m-1} t^{m-1} + \ldots + d_1 t + d_0$$

и приравняем соответствующие коэффициенты у многочленов в полученном равенстве:
$t^m : a_0 \cdot d_m = b_m$, так как γ не является корнем, то $a_0 \neq 0$, следовательно, $d_m = \dfrac{b_m}{a_0}$.
$t^{m-1} : a_1 \cdot m \cdot d_m + a_0 \cdot d_{m-1} = b_{m-1}$ и $d_{m-1} = \dfrac{1}{a_0}(b_{m-1} - a_1 \cdot m \cdot d_m)$.
$t^{m-2} : a_2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot d_m + a_1 \cdot (m-1) \cdot d_{m-1} + a_0 \cdot d_{m-2} = b_{m-2}$
и $d_{m-2} = \dfrac{1}{a_0}(b_{m-2} - a_1 \cdot (m-1) \cdot d_{m-1} - a_2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot d_m)$.
Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим коэффициенты многочлена, являющиеся решением уравнения, причем его степень не выше m.

2. Пусть $\gamma = 0$ и пусть число γ является корнем характеристического уравнения кратности $k > 0$. Тогда оператор L_n имеет вид

$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_k D^k,$$

причем $a_k \neq 0$.

Введем функцию $D^k z = u$. Тогда $\widetilde{L}_{n-k} u = P(t)$, где $\widetilde{L}_{n-k}$ — оператор дифференцирования порядка $n-k$, причем $\gamma = 0$ не является для него корнем характеристического уравнения. По доказанному выше это уравнение имеет частное решение вида $u_1(t) = Q(t)$, где $\deg Q(t) \leqslant m$. Следовательно, $D^k z_1 = Q(t)$. Тогда z_1 можно найти, проинтегрировав полученное равенство k раз. В результате получим $z_1 = \widetilde{Q}(t)$. где $\deg \widetilde{Q}(t) = m + k$. Причем последние k коэффициентов этого многочлена являются произвольными постоянными. Так как нужно найти лишь одно решение, выберем значения этих произвольных постоянных равные нулю. В результате полученное решение имеет вид $z_1 = t^k \widetilde{\widetilde{Q}}(t)$, где $\deg \widetilde{\widetilde{Q}}(t) \leqslant m$.

3. Пусть $\gamma \neq 0$. И пусть кратность корня γ равна k. Сделаем замену неизвестных функций $z(t) = u(t) \cdot e^{\gamma t}$. Тогда
   $Dz = Due^{\gamma t} + u\gamma e^{\gamma t}$;
   $D^2 z = D^2 ue^{\gamma t} + 2Du\gamma e^{\gamma t} + u\gamma^2 e^{\gamma t}$;
   $D^3 z = D^3 ue^{\gamma t} + 3D^2 u\gamma e^{\gamma t} + 3D^2 u\gamma^2 e^{\gamma t} + u\gamma^3 e^{\gamma t}$;
   И так далее.
   Подставим полученные выражения в уравнение и сократим полученное равенство на $e^{\gamma t}$. В результате получим уравнение вида $\widetilde{L}_n u = P(t)$. При этом оператор $\widetilde{L}_n$ имеет следующие коэффициенты:
   $u : a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \ldots = \Delta(\gamma)$;
   $Du : a_1 + 2\gamma a_2 + 3\gamma^2 a_3 + \ldots = \Delta'(\gamma)$;
   $D^2 u : a_2 + 3\gamma a_3 + 6\gamma a_4 + \ldots = \dfrac{1}{2!}\Delta''(\gamma)$;
   $D^i u : \dfrac{1}{i!}\Delta^{(i)}(\gamma)$.
   Так как γ является корнем многочлена $\Delta(\lambda)$ кратности k, то γ является корнем и для всех $\Delta^{(i)}(\lambda)\ \forall i < k$. Следовательно, все коэффициенты оператора $\widetilde{L}_n$ при $D^{(i)}u$ равны нулю, если $i < k$. Значит оператор $\widetilde{L}_n$ имеет корень характеристического уравнения равный нулю кратности k. Тогда по доказанному выше уравнение $\widetilde{L}_n u$ имеет решение вида $u(t) = t^k Q(t)$, где $\deg Q(t) \leqslant m$. И следовательно, решение исходного уравнения имеет вид $z_1(t) = t^k Q(t) e^{\gamma t}$.

⊠

Следствие. *Уравнение*

$$L_n x = P(t) \cdot e^{\gamma t},$$

где $x(t)$ — неизвестная действительная функция, $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, $\deg P(t) = m$, $\gamma \in \mathbb{R}$, имеет частное решение вида

$$x_1(t) = t^k Q(t) \cdot e^{\gamma t},$$

где $Q(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q(t) \leqslant m$, k — кратность корня γ характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$.

⧫ Рассмотрим комплексное уравнение

$$L_n z = P(t) \cdot e^{\gamma t} + i \cdot 0.$$

Тогда из теоремы следует, что это уравнение имеет частное решение вида

$$z_1 = t^k Q(t) \cdot e^{\gamma t},$$

где $Q \in \mathbb{C}[t], \deg Q(t) \leqslant m$. Но оператор L_n имеет действительные коэффициенты, следовательно $Re(z)$ является решением уравнения

$$L_n x = Re(P(t) \cdot e^{\gamma t} + i \cdot 0) = P(t) \cdot e^{\gamma t},$$

то есть $Re(z)$ является решением исходного уравнения, то есть

$$x_1(t) = t^k \widetilde{Q}(t) \cdot e^{\gamma t},$$

где $\widetilde{Q}(t) = Re(Q(t))$ и $\deg \widetilde{Q}(t) \leqslant m$. ⊠

Следствие. *Уравнение*

$$L_n x = e^{\alpha t}(P_1(t)\cdot\cos(\beta t) + P_2(t)\cdot\sin(\beta t)),$$

где $P_1(t), P_2(t) \in \mathbb{R}[t]$, *причем* $\max\{\deg P_1(t), \deg P_2(t)\} = m$, *и* $(\alpha + \beta i)$ *— корень многочлена* $\Delta(\lambda)$ *кратности* k *имеет решение вида*

$$x_1(t) = t^k e^{\alpha t}(Q_1(t)\cdot\cos(\beta t) + Q_2(t)\cdot\sin(\beta t)),$$

где $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q_1(t) \leqslant m$, $\deg Q_2(t) \leqslant m$, k *— кратность корня* $(\alpha + \beta i)$ *характеристического многочлена* $\Delta(\lambda)$.

⧫ Рассмотрим уравнение

$$L_n z = (P_1(t) - iP_2(t))\cdot e^{(\alpha+\beta i)t}.$$

Тогда по теореме это уравнение имеет решение вида

$$z_1 = t^k Q(t)\cdot e^{(\alpha+\beta i)t},$$

где $Q(t) \in \mathbb{C}[t], \deg Q(t) \leqslant m$. Так как L_n имеет действительные коэффициенты, то $Re(z_1)$ является действительным решением уравнения

$$L_n = Re((P_1(t) - iP_2(t))\cdot e^{(\alpha+\beta i)t}).$$

При этом

$$Re((P_1 - iP_2)\cdot e^{(\alpha+\beta i)t}) = Re(P_1 - iP_2)\cdot e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) = e^{\alpha t}(P_1\cos\beta t + P_2\sin\beta t).$$

То есть $Re(z_1)$ является решением исходного уравнения. Обозначим

$$Q_1(t) = Re(Q(t)),\ Q_2(t) = -Im(Q(t)).$$

Тогда

$$Re(t^k Q(t)\cdot e^{(\alpha+\beta i)t}) = Re(t^k(Q_1 - iQ_2)\cdot e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)) = t^k e^{\alpha t}(Q_1\cos\beta t + Q_2\sin\beta t),$$

где $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q_1(t), \deg Q_2(t) \leqslant m$. ⊠

2.6 Непрерывная зависимость решений от начальных данных.

Рассмотрим уравнение

$$L_n x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{2.6.1}$$

с непрерывной на промежутке $\mathbb{I}$ функцией $f(t)$. Пусть $x_0(t)$ — решение задачи Коши $L_n x = f(t)$, $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

• *Тогда для любого решения* $x(t)$ *уравнения* (2.6.1) *сумма*

$$\Delta x(t) = \sum_{i=0}^{n-1}\left|D^i x(t) - D^i x_0(t)\right|$$

называется ***отклонением*** *решения* $x(t)$ *от решения* $x_0(t)$. *А сумма*

$$\Delta x(t_0) = \Delta x(t)|_{t=t_0} = \sum_{i=0}^{n-1}\left|D^i x(t_0) - D^i x_0(t_0)\right|$$

называется ***начальным отклонением***.

• *Решение $x_0(t)$ называется* ***непрерывно зависящим от начальных данных*** *на промежутке $\mathbb{I}$, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta : \forall x(t)\ \Delta x(t_0) < \delta \Rightarrow \Delta x(t) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{I}.$$

Пусть решение $x(t)$ при $t = t_0$ имеет начальные значения $D^i x(t)|_{t=t_0} = \xi_i + \Delta\xi_i$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда

$$\Delta x(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta\xi_i|.$$

Если $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ — фундаментальная система решений нормированная при $t = 0$ соответствующего однородного уравнения $L_n x = 0$, то по правилу Коши

$$x_0(t) = \xi_0\varphi_0(t - t_0) + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

$$x(t) = (\xi_0 + \Delta\xi_0)\varphi_0(t - t_0) + \ldots + (\xi_{n-1} + \Delta\xi_{n-1})\varphi_{n-1}(t - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

$$x(t) - x_0(t) = \Delta\xi_0\varphi_0(t - t_0) + \ldots + \Delta\xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t - t_0).$$

Тогда с помощью этого выражения получим следующее (обозначим его (2.6.2))

$$\Delta x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big| D^i x(t) - D^i x_0(t) \Big| = \sum_{i=0}^{n-1} \Big| D^i(x(t) - x_0(t)) \Big| =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \Big| \Delta\xi_0 D^i\varphi_0(t - t_0) + \ldots + \Delta\xi_{n-1} D^i\varphi_{n-1}(t - t_0) \Big|.$$

Из (2.6.2) следует, что отклонение решения $x(t)$ от решения $x_0(t)$ не зависит от самого решения $x_0(t)$, а зависит лишь от начального отклонения решения $x(t)$ от решения $x_0(t)$. Следовательно, все решения уравнения (2.6.1) будут либо одновременно зависеть от начальных данных, либо одновременно не зависеть.

Кроме того из уравнения (2.6.2) следует, что отклонение $x(t)$ от $x_0(t)$ зависит лишь от функций $\varphi_i(t)$, которые являются решениями уравнения $L_n x = 0$ и не зависят от неоднородности $f(t)$. Следовательно, непрерывная зависимость от начальных данных решений зависит лишь от оператора L_n.

Теорема. *Если промежуток $\mathbb{I}$ является отрезком, то любое решение уравнения* (2.6.1) *непрерывно зависит от начальных данных.*

⧫ Каждая из функций $\varphi_i(t)$ является решением уравнения $L_n x = 0$. Следовательно, они и все их производные до $(n-1)$-го порядка непрерывны на всей числовой прямой. А так как функции непрерывные на замкнутом множестве ограничены, то

$$\exists M : |D^i\varphi_j(t)| \leqslant M \quad \forall i, j = \overline{0, n-1}.$$

Тогда из (2.6.2)

$$\Delta x(t) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta\xi_j| \cdot \Big| D^i\varphi_j(t - t_0) \Big| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta\xi_j| \cdot M = \sum_{i=0}^{n-1} \Big(M \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta\xi_j| \Big) = n \cdot M \cdot \Delta x(t_0).$$

Следовательно, если начальное отклонение $\Delta x(t_0) < \delta = \dfrac{\varepsilon}{n \cdot M}$, то $\Delta x(t) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{I}$. ⊠

• *Решение уравнения* (2.6.1) *называется* ***интегрально непрерывным*** *на промежутке* $\mathbb{I}$*, если оно непрерывно зависит от начальных данных на любом отрезке* $I_1 \subset \mathbb{I}$*.*

Следствие. *Любое решение уравнения* (2.6.1) *с непрерывной на промежутке* $\mathbb{I}$ *функцией* $f(t)$ *интегрально непрерывно на* $\mathbb{I}$*.*

2.7 Устойчивость решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейное уравнение

$$L_n x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{2.7.1}$$

с непрерывной на промежутке $\mathbb{I}$ функцией $f(t)$. Пусть $\mathbb{I} = [t_0; +\infty)$.

• *Решение* $x_0(t)$ *уравнения* (2.7.1) *называется* ***устойчивым по Ляпунову****, если оно непрерывно зависит от начальных данных на промежутке* $\mathbb{I} = [t_0; +\infty)$*. То есть*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \forall x(t) \; \Delta x(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big| D^i x(t_0) - D^i x_0(t_0) \Big| < \delta \Rightarrow \Delta x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big| D^i x(t) - D^i x_0(t) \Big| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0.$$

• *Если кроме того* $\lim\limits_{t \to +\infty} \Delta x(t) = 0$*, то решение* $x_0(t)$ *называется* ***асимптотически устойчивым****. Решение не являющееся устойчивым называется* ***неустойчивым****.*

Из определения устойчивости и свойств непрерывной зависимости от начальных данных следует, что все решения уравнения (2.7.1) либо одновременно устойчивы, либо одновременно неустойчивы.

• *Уравнение называется* ***устойчивым****, если все его решения устойчивы (аналогично* ***неустойчивым*** *и* ***асимптотически устойчивым****).*

Кроме того, так как непрерывная зависимость решений от начальных данных не зависит от неоднородности $f(t)$, то неоднородность не влияет на устойчивость уравнения. Следовательно, исследование устойчивости любого решения уравнения (2.7.1) можно заменить исследованием устойчивости нулевого решения соответствующего однородного уравнения $L_n x = 0$. Таким образом, уравнение (2.7.1) является устойчивым, если

$$\forall \varepsilon \; \exists \delta : \forall x(t) \; \sum_{i=0}^{n-1} \Big| D^i x(t_0) \Big| < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \Big| D^i x(t) \Big| < \varepsilon.$$

Теорема. 1. *Уравнение* (2.7.1) *устойчиво* $\Longleftrightarrow$ *действительные части корней характеристического уравнения оператора* L_n *неположительны, причем корни с нулевой действительной частью имеют кратность* $k = 1$*.*

2. *Уравнение* (2.7.1) *асимптотически устойчиво* $\Longleftrightarrow$ *действительные части корней характеристического уравнения отрицательны.*

♦ $\Rightarrow$)

1. Пусть среди корней характеристического уравнения существует корень $\lambda_0 > 0$ или $\alpha_0 + \beta_0 i$, где $\alpha_0 > 0$. Тогда среди решений уравнения $L_n x = 0$ есть решения $Ce^{\lambda_0 t}$ или $Ce^{\alpha_0 t}\cos(\beta_0 t)$, $Ce^{\alpha_0 t}\sin(\beta_0 t)$, где C — некоторая постоянная.

   Выбирая постоянную C достаточно малую, можно получить решение, имеющее сколь угодно малое начальное отклонение от нулевого решения, но при этом стремящееся к ∞ при $t \to +\infty$, что делает невозможным устойчивость решения.
   Если характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_0 = 0$ или $\beta_0 i$ кратности $k > 1$, то такими свойствами будут обладать решения вида Ct, $Ct\cos(\beta_0 t)$, $Ct\sin(\beta_0 t)$.

2. Если же корни характеристического уравнения $\lambda_0 = 0$ или $\beta_0 i$ имеют кратность $k = 1$, то уравнение имеет решения вида C, $C\cos(\beta_0 t)$, $C\sin(\beta_0 t)$, которые при подходящем выборе постоянной C будут иметь малое начальное отклонение от нулевого решения, но при этом к нулю стремиться не будут, что делает невозможным асимптотическую устойчивость.

$\Leftarrow$) Общее решение однородного уравнения является линейной комбинацией функций вида $t^k e^{\lambda t}$, $t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ и $t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, где λ, $\alpha + \beta i$ — корни характеристического уравнения. Если $\lambda < 0$ и $\alpha < 0$, то все эти функции и их производные стремятся к нулю при $t \to +\infty$. А следовательно и все решения уравнения стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Следовательно, уравнение асимптотически устойчиво.

Если $\lambda = 0$ и $\alpha = 0$, причем эти корни имеют кратность 1, то среди решений уравнения будут также решения вида 1, $\cos(\beta t)$, $\sin(\beta t)$. Эти функции вместе со своими производными являются ограниченными на всей числовой прямой. Следовательно, за счет выбора малого начального отклонения мы можем получить малое отклонение этого решения $x(t)$ от этого отклонения. ⊠

Теорема. *Для асимптотической устойчивости линейного уравнения необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического многочлена были положительны.*
Для устойчивости линейного уравнения необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического многочлена были неотрицательны.

♦

1. Пусть линейное уравнение (2.7.1) является асимптотически устойчивым. Все корни характеристического уравнения имеют вид $-\lambda_i$, $-\alpha_j \pm \beta_j i$, где λ_i, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\lambda_i > 0$, $\alpha_j > 0$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$\prod_i(\lambda+\lambda_i)\cdot\prod_j(\lambda+\alpha_j-\beta_j i)(\lambda+\alpha_j+\beta_j i) = \prod_i(\lambda+\lambda_i)\cdot\prod_j(\lambda^2+2\alpha_j\lambda+\alpha_j^2+\beta_j^2)$$

   — произведение многочленов с положительными коэффициентами. Следовательно, характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ — многочлен с положительными коэффициентами.

2. Если уравнение (2.7.1) устойчиво, но не асимптотически, то среди корней могут быть корни $\lambda = 0$, $\pm\beta_k i$, причем кратности корней равны 1. Следовательно, характеристический многочлен имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \prod_i(\lambda+\lambda_i)\cdot\prod_j(\lambda^2+2\alpha_j\lambda+\alpha_j^2+\beta_j^2)\cdot\lambda\cdot(\lambda^2+\beta_k^2)$$

   — произведение многочленов с неотрицательными коэффициентами. Следовательно, $\Delta(\lambda)$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами.

⊠

2.8 Фазовая плоскость.

Рассмотрим линейное уравнение

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.8.1}$$

И пусть $x(t)$ — некоторое решение этого уравнения.

• ***Фазовым графиком*** *решения $x(t)$ называется график параметрически заданной функции вида*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = Dx(t); \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

• *Плоскость $\mathbb{R}^2$, на которой изображен фазовый график, называется* ***фазовой плоскостью****.*

В соответствии с теоремой о существовании и единственности задачи Коши для любой точки плоскости (x_0, y_0) найдется решение $x(t)$, которое при некотором $t = t_0$ удовлетворяет условию

$$\begin{cases} x|_{t=t_0} = x_0, \\ Dx|_{t=t_0} = y_0; \end{cases}$$

следовательно, через любую точку на фазовой плоскости проходит фазовый график.

Теорема. *Два графика уравнения* (2.8.1) *либо не имеют общих точек, либо совпадают.*

⧫ Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два решения уравнения (2.8.1), и предположим, что их фазовые графики проходят через точку (x_0, y_0), то есть $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}:$

$$\begin{cases} x_1|_{t=t_1} = x_0, \\ Dx_1|_{t=t_1} = y_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2|_{t=t_2} = x_0, \\ Dx_2|_{t=t_2} = y_0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\widetilde{x}(t) = x_1(t - t_2 + t_1)$. Функция $\widetilde{x}(t)$ является сдвигом решения x_1, следовательно, функция $\widetilde{x}(t)$ также является решением уравнения (2.8.1). При этом

$$\widetilde{x}|_{t=t_2} = x_1(t_2 - t_2 + t_1) = x_1|_{t=t_1} = x_0;$$

$$D\widetilde{x}|_{t=t_2} = Dx_1(t_2 - t_2 + t_1) = Dx_1|_{t=t_1} = y_0;$$

то есть функция $\widetilde{x}(t)$ имеет те же значения, что и функция x_2, то есть начальные значения функции $\widetilde{x}$ при $t = t_2$ совпадают с начальными значениями функции x_2. Следовательно, функция x_2 равна функции $\widetilde{x}$, и x_2 является сдвигом функции x_1. А значит фазовый график функций их сдвига совпадает. ⊠

• *Решение, сохраняющее постоянное значение при всех t, называется* ***стационарным****.*

Фазовый график стационарного решения $x(t) \equiv C$ состоит из единственной точки $(C, 0)$.

• *Точка, являющаяся фазовым графиком стационарного решения, называется* ***точкой покоя*** *уравнения.*

Фазовые графики нестационарных решений являются параметрически заданными линиями. На таких линиях принято указывать направление движения точки с координатами

$(x(t), y(t))$ при увеличении t. В дальнейшем под фазовым графиком будем понимать ориентированный фазовый график.

Пусть фазовый график решения $x(t)$ проходит через точку (x_0, y_0). Следовательно, $\exists t_0 : y_0 = Dx(t_0)$. Если $y_0 > 0$, то $Dx(t_0) > 0$. И, следовательно, функция $x(t)$ в точке t_0 возрастает. Тогда направление фазового графика в точках верхней полуплоскости происходит слева направо. Аналогично движение по графику в точках нижней полуплоскости происходит справа налево. Так как угловой коэффициент в точке $(x(t), y(t))$ равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{D^2x(t)}{Dx(t)} = \frac{-a_1Dx - a_0x}{Dx} = \frac{-a_1y - a_0x}{y},$$

то в точках плоскости, для которых $-a_1y - a_0x = 0$, касательные к фазовым графикам параллельны оси Ox. А в точках, для которых $y > 0$ (ось Ox), фазовые графики имеют касательные параллельные оси Oy.

2.9 Классификация точек покоя.

Рассмотрим линейное уравнение

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.9.1}$$

Любое уравнение вида (2.9.1) имеет стационарное решение $x(t) \equiv C$. Следовательно, точка $O(0,0)$ является точкой покоя для этого уравнения. Построим фазовый график для других решений. Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения (2.9.1) записанные с учетом кратности.

I группа. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
Тогда фазовые графики решений решений описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \tag{2.9.2}$$

1. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$. Тогда, исключая из системы t, получим уравнение $y = \lambda_1 x$. Причем, если $C_1 > 0$, то $x > 0$, а если $C_1 < 0$, то $x < 0$. Следовательно, лучи $y = \lambda_1 x, x > 0$ и $y = \lambda_1 x, x < 0$ являются фазовыми траекториями этих решений.

2. Пусть $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тогда фазовыми графиками являются лучи $y = \lambda_2 x, x > 0$ и $y = \lambda_2 x, x < 0$.

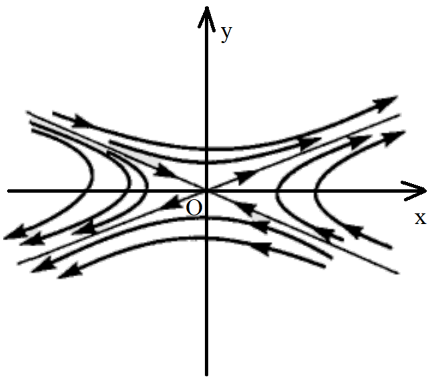
3. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Заметим, что при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$ фазовые графики уходят в бесконечность.

Найдем асимптоты фазовых графиков ($y = kx + b$):

$$k = \lim_{t\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}}{C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1\lambda_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2\lambda_2}{C_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2} = \lambda_2.$$

$$b = \lim_{t\to+\infty}(y - \lambda_2 x) = \lim_{t\to+\infty}(C_1e^{\lambda_1 t}(\lambda_1 - \lambda_2)) = 0.$$

Следовательно, прямая $y = \lambda_2 x$ является асимптотой фазовых графиков при $t \to +\infty$. Аналогично можно доказать, что при $t \to -\infty$ асимптотой является прямая $y = \lambda_1 x$.



• *Точки покоя, в окрестности которых фазовые графики имеют такой вид, называются* ***седлом***.

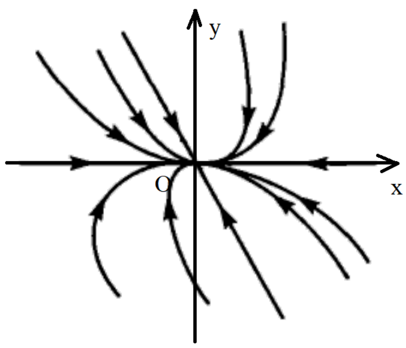
II группа. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.
Тогда фазовые графики описываются уравнениями (2.9.2).

1. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$, тогда фазовыми траекториями являются лучи $y = \lambda_1 x, x > 0$ и $y = \lambda_1 x, x < 0$.

2. Пусть $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, тогда фазовыми траекториями являются лучи $y = \lambda_2 x, x > 0$ и $y = \lambda_2 x, x < 0$.

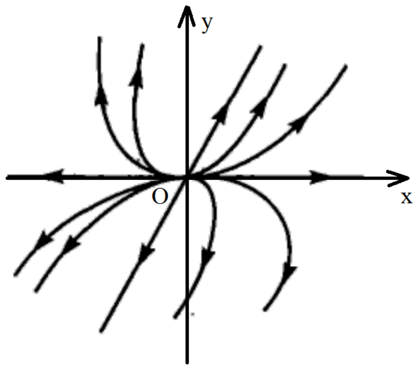
3. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.

    (a) Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Тогда при $t \to +\infty$ фазовый график стремится к точке $O(0, 0)$. А при $t \to -\infty$ уходит в бесконечность.
    Найдем асимптоты. $k = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lambda_2$. Следовательно, прямая $y = \lambda_2 x$ является асимптотой. При $t \to -\infty$ $k = \lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{y}{x} = \lambda_1$, а $b = \lim\limits_{t \to -\infty} (y - \lambda_1 x) = \infty$.

    (b) Аналогично можно получить, что фазовые графики для случая $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

выглядят следующим образом.



• *Точка покоя, в окрестности которой фазовый график имеет такой вид, называется* ***бикритическим узлом****. Причем* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым*** *соответственно.*

III группа. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тогда фазовые графики решений описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \\ y(t) = (C_2 + \lambda C_1 + \lambda C_2 t)e^{\lambda t}. \end{cases}$$

1. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$. Исключив из параметрического уравнения t, лучи $y = \lambda x$, $x > 0$ и $y = \lambda x$, $x < 0$ являются фазовыми графиками.

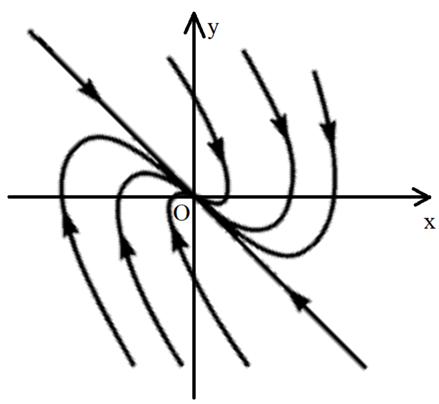
2. Пусть $C_2 \neq 0$.

   (a) Пусть $\lambda < 0$. Тогда фазовый график при $t \to +\infty$ стремится к точку $O(0,0)$. Если $t \to -\infty$, то фазовый график уходит на бесконечность.
   Найдем асимптотические направления:

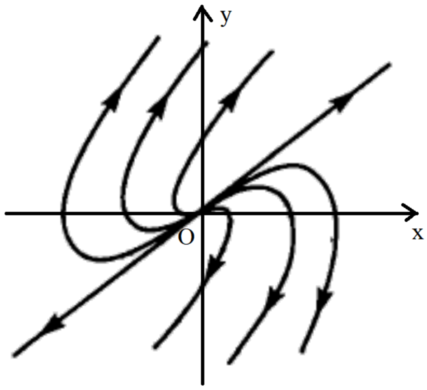
   $$k = \lim_{t \to +\infty} \frac{(C_2 + \lambda C_1 + \lambda C_2 t)e^{\lambda t}}{(C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}} = \lambda;$$

   $$b = \lim_{t \to +\infty} y(t) - \lambda x(t) = C_2 e^{\lambda t} = 0.$$

   Отсюда $y = \lambda x$ — асимптота фазовых графиков при $t \to +\infty$. Аналогично при $t \to -\infty$ асимптот нет. Прямая $y = \lambda x$ задает асимптотическое направление.



   (b) Пусть $\lambda > 0$. Тогда фазовый график при $t \to +\infty$ уходит на бесконечность, а при $t \to -\infty$ стремится к точке $O(0,0)$. Аналогично фазовый график выглядит следующим образом.



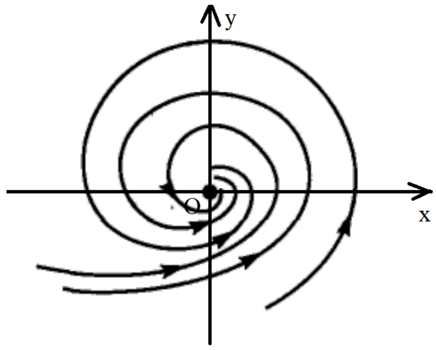
• *Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики имеют такой вид, называется* ***монокритическим узлом****. Причем* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым*** *соответственно.*

IV группа. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda = \alpha \pm \beta i$.

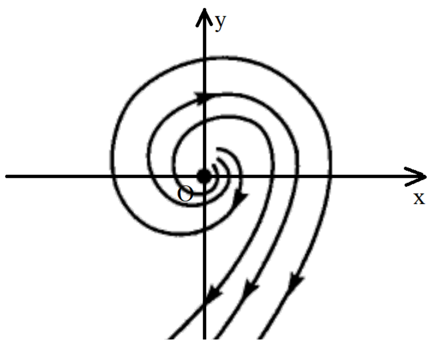
1. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \\ y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \alpha \cos(\beta t) + C_2 \alpha \sin(\beta t) - C_1 \beta \sin(\beta t) + C_2 \beta \cos(\beta t)). \end{cases}$$

   (a) Если $\alpha < 0$, то фазовый график при $t \to +\infty$ стремится к точке $O(0,0)$, а при $t \to -\infty$ уходит на бесконечность. При этом изменение t от $-\infty$ до $+\infty$ функции $x(t)$ и $y(t)$ меняют знак бесконечное количество раз. Следовательно, графики имеют вид



   (b) Если $\alpha > 0$, то аналогично можно получить, что фазовые графики имеют вид



• *Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики ведут себя таким образом, называются* ***фокусом****. Причем* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым*** *соответственно.*

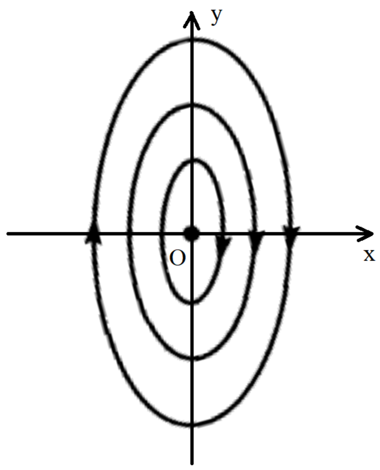
2. Пусть $\alpha = 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t), \\ y(t) = -C_1\beta\sin(\beta t) + C_2\beta\cos(\beta t). \end{cases}$$

Исключим из системы t. Тогда

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{\beta}\right)^2 = C_1^2 + \frac{C_2^2}{\beta} \text{ — эллипс.}$$

Следовательно, фазовые графики имеют вид

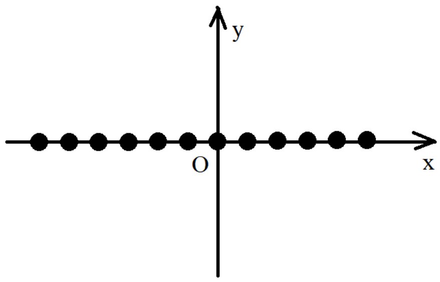


• *Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики ведут себя таким образом, называется* ***центром****.*

V группа. Пусть среди корней характеристического уравнения есть 0. Тогда в уравнении (1) $a_0 = 0$, и уравнение имеет бесконечно много решений вида $x = C$, фазовые графики которых описываются уравнениями

$$\begin{cases} x = C, \\ y = 0; \end{cases}$$

и имеют вид



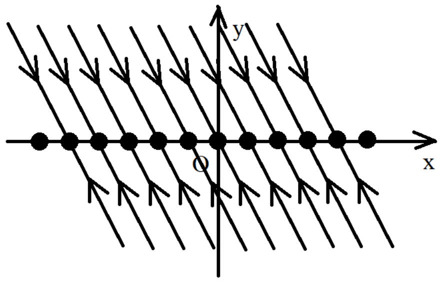
Следовательно, каждая точка оси Ox является точкой покоя.

• *Прямая, каждая точка которой является фазовым графиком, называется* ***прямой покоя****.*

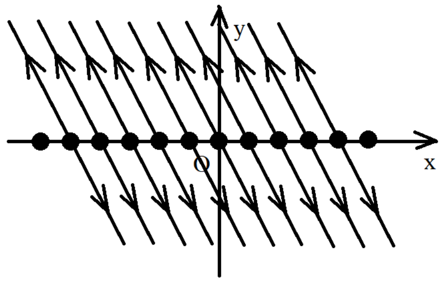
1. Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{\lambda t}, \\ y(t) = \lambda C_2 e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Исключив из системы t, получим $y = \lambda(x - C_1)$. Получаем, что фазовые графики имеют вид
$\lambda < 0$



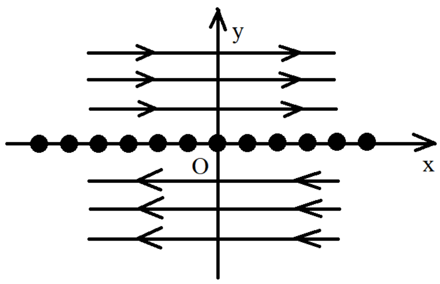
$\lambda > 0$



2. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда фазовые графики описываются уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 t, \\ y(t) = C_2. \end{cases}$$

Следовательно, фазовые графики имеют вид



Глава 3

Линейные стационарные векторные уравнения.

3.1 Системы стационарных линейных уравнений.

• ***Системой дифференциальных уравнений*** *называется совокупность выражений вида*

$$F_i(t, x_1(t), Dx_1, \ldots, D^{m_1}x_1, x_2(t), Dx_2, \ldots, D^{m_2}x_2, \ldots, x_k(t), D^k x, \ldots, D^{m_k}x_k) = 0,$$
$$i = 1, \ldots, s, \quad t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R},$$

где F_i — некоторая функция от своих $(m_1 + \ldots + m_k + k + 1)$ переменных.

• *Говорят, что система дифференциальных уравнений* ***имеет нормальную форму****, если она состоит из уравнений вида*

$$D^{m_i}x_i(t) = f_i(t, x_1(t), Dx_1, \ldots, D^{m_1-1}x_1, \ldots, x_k(t), Dx_k, \ldots, D^{m_k-1}x_k), \quad i = 1, \ldots, k.$$

• *Если функции f_i являются линейными функциями от неизвестных функций $x_i(t)$ и их производных, то система называется* ***линейной****.*

Линейную систему из k уравнений можно заменить эквивалентной ей системой из $m_1 + \ldots + m_k$ линейных уравнений первого порядка. Следовательно, любое линейное уравнение можно свести к системе из k уравнений.

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать лишь системы следующего вида

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}(t) \cdot x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t) \cdot x_n(t) + f_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Dx_n = a_{n1}(t) \cdot x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t) \cdot x_n(t) + f_n(t); \end{cases} \quad t \in \mathbb{I}. \tag{3.1.1}$$

• ***Решением*** *системы* (3.1.1) *называется совокупность непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{I}$ функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, обращающих систему* (3.1.1) *в верное равенство.*

• *Если коэффициенты систем* (3.1.1) *являются постоянными, то системы называются* ***стационарными линейными****.*

• ***Задачей Коши*** *для системы* (3.1.1) *называется задача отыскания решения системы* (3.1.1)*, удовлетворяющего условиям*

$$x_1|_{t=t_0} = \xi_1, x_2|_{t=t_0} = \xi_2, \ldots, x_n|_{t=t_0} = \xi_n, \quad t_0 \in \mathbb{I}.$$

Обозначив $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $DX(t) = \begin{pmatrix} Dx_1(t) \\ \vdots \\ Dx_n(t) \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, систему (3.1.1) можно записать в матричном виде

$$DX = AX + f(t). \tag{3.1.2}$$

А начальные условия задачи Коши в виде $X|_{t=t_0} = \xi$, где $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$.

• *Уравнение* (3.1.2) *называется* ***линейным стационарным векторным уравнением.***

• *Если в уравнении* (3.1.2) *матрицы X, A, f являются комплекснозначными, то уравнение называется* ***комплекснозначным.***

Лемма. *Задача Коши для комплекснозначного уравнения*

$$DZ = CZ + h(t), \quad Z|_{t=t_0} = \xi \tag{3.1.3}$$

с треугольной матрицей $C \in \mathbb{C}_{n,n}$ и непрерывной на $\mathbb{I}$ комплекснозначной функцией $h(t)$ имеет единственное решение $\forall t_0 \in \mathbb{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{C}_{n,1}$.

♦ Пусть C — нижняя треугольная матрица. Тогда задача Коши (3.1.3) в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} Dz_1 = c_{11}z_1 + h_1(t), \\ Dz_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + h_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dz_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \ldots + c_{nn}z_n + h_n(t); \end{cases}, \qquad \begin{cases} z_1|_{t=t_0} = \xi_1, \\ z_2|_{t=t_0} = \xi_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_n|_{t=t_0} = \xi_n. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $z_1(t)$ — решение задачи Коши для линейного стационарного уравнения первого порядка. Такое решение всегда существует и единственно. Подставим его во второе уравнение. Получим, что $z_2(t)$ также решение стационарного линейного уравнения первого порядка, которое также существует и единственно. Продолжая далее аналогично, построим векторную функцию $z(t)$, которая является единственным решением задачи Коши (3.1.3).

Лемма для верхней треугольной матрицы доказывается аналогично, начиная с последнего уравнения. ⊠

Теорема. *Задача Коши для действительного стационарного уравнения*

$$DX = AX + f(t), \quad X|_{t=t_0} = \xi \tag{3.1.4}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$ имеет единственное решение $\forall t_0 \in \mathbb{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}_{n,1}$.

♦ Любая действительная матрица A над полем $\mathbb{C}$ имеет жорданову нормальную форму, то есть подобную ей комплексную жорданову матрицу $J \in \mathbb{C}_{n,n}$. То есть существует невырожденная матрица $S(s_{ij}) \in \mathbb{C}_{n,n} : J = S^{-1}AS$. Сделаем в уравнении (3.1.4) замену $X = SZ$. Тогда

$$D(SZ) = D\begin{pmatrix} s_{11}z_1 + \ldots + s_{1n}z_n \\ \vdots \\ s_{n1}z_1 + \ldots + s_{nn}z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}Dz_1 + \ldots + s_{1n}Dz_n \\ \vdots \\ s_{n1}Dz_1 + \ldots + s_{nn}Dz_n \end{pmatrix} = SDZ.$$

Тогда $SDZ = ASZ + f(t)$, $SZ|_{t=t_0} = \xi$.

Домножим полученные уравнения на S^{-1} и получим

$$DZ = \underbrace{S^{-1}AS}_{J}Z + S^{-1}f(t), \quad Z|_{t=t_0} = S^{-1}\xi.$$

В результате получили задачу Коши для комплекснозначного уравнения с матрицей J, которая является треугольной, так как жорданова матрица треугольная. По лемме это уравнение имеет единственное решение $Z(t)$. Следовательно, функция $X(t) = SZ(t)$ является решением исходной задачи Коши (3.1.4).

Но в общем случае это решение является комплекснозначным, то есть имеет вид

$$X(t) = U(t) + iV(t),$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — действительные векторные функции. Подставим это выражение в уравнение (3.1.4):

$$DU + iDV = \underset{\in\mathbb{R}}{A}(U + iV) + \underset{\in\mathbb{R}}{f(t)}, \quad (U + iV)|_{t=t_0} = \underset{\in\mathbb{R}}{\xi}.$$

Приравняем в полученном равенстве действительные части слева и справа:

$$DU = AU + f(t), \quad U|_{t=t_0} = \xi.$$

Следовательно, векторная функция $U(t) = Re(X(t))$ является единственным решением задачи Коши (3.1.4). ⊠

3.2 Структура множества решений линейной стационарной системы однородных уравнений.

Рассмотрим стационарное линейное уравнение

$$DX = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}_{n,n}. \tag{3.2.1}$$

И пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — два решения уравнения (3.2.1). Тогда

$$D(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha DX_1 + \beta DX_2 = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = A(\alpha X_1 + \beta X_2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И, следовательно, векторная функция $\alpha X_1 + \beta X_2$ также является решением уравнения (3.2.1). Таким образом, множество решений системы (3.2.1) является **векторным пространством**.

• *Пусть* $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, ..., $X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ *— некоторые векторные функции. Определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

называется ***определителем Вронского*** *системы* $X_1, \dots, X_n$.

Теорема. *Если векторные функции* $X_1, \dots, X_n$ *линейно зависимы, то их* $W(t) = 0\ \forall t$.

⧫ Если эти функции линейно зависимы, то одна из них линейно выражается через остальные. Следовательно, один из столбцов определителя равен линейной комбинации остальных столбцов. Тогда $W(t) = 0$. ⊠

Теорема. *Если определитель Вронского системы решений* $X_1, \dots, X_n$ *равен нулю хотя бы в одной точке* t_0*, то эти векторные функции линейно зависимые.*

⧫ Пусть $\exists t_0 \in \mathbb{R} : W(t_0)$ системы решений $X_1, \dots, X_n$ равен нулю. Следовательно, ранг Вронскиана меньше его порядка и столбцы этой матрицы линейно зависимые. То есть существует нетривиальная линейная комбинация

$$\alpha_1 X_1(t_0) + \ldots + \alpha_n X_n(t_0) = 0.$$

Рассмотрим решение

$$X(t) = \alpha_1 X_1(t) + \ldots + \alpha_n X_n(t).$$

Так как столбец $X(t)$ является линейной комбинацией решений уравнения (3.2.1), то он также является решением уравнения (3.2.1) и при этом

$$X|_{t=t_0} = \alpha_1 X_1(t_0) + \ldots + \alpha_n X_n(t_0) = 0.$$

Заметим, что векторная функция $Y(t) \equiv 0$ также является решением уравнения (3.2.1), удовлетворяющим тем же начальным условиям. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши $Y(t) = X(t)$, то есть $X(t) \equiv 0$ и, следовательно, решения $X_1, \dots, X_n$ линейно зависимые. ⊠

Следствие. *Если определитель Вронского решений системы* (3.2.1) *равен нулю при некотором* t_0*, то он равен нулю при любом* t.

⧫ Если при некотором t_0 вронскиан $W(t_0) = 0$, то по второй теореме решения линейно зависимые. Следовательно, по первой теореме $W(t) = 0\ \forall t$. ⊠

Следствие. *Если система решений уравнения* (3.2.1) *линейно независимая, то их* $W(t) \neq 0\ \forall t$.

⧫ Следует из второй теоремы. ⊠

Рассмотрим n задач Коши $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = E_i$, где E_i — i-ый столбец единичной матрицы $E = [E_1, \dots, E_n]$. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши все эти задачи Коши имеют единственные решения. Обозначим их $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Вронскиан этой системы решений при $t = t_0$ равен $\det E = 1 \neq 0$. Следовательно, эти решения линейно независимые.

Покажем, что любое решение уравнения (3.2.1) является линейной комбинацией этих решений. Пусть $X(t)$ — произвольное решение уравнения (3.2.1) и пусть

$$X(t_0) = \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n,1}.$$

Рассмотрим векторную функцию $Y(t) = \xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n$. Так как $Y(t)$ — линейная комбинация решений системы (3.2.1), то $Y(t)$ — также решение и при этом

$$Y(t_0) = \xi_1 X_1(t_0) + \ldots + \xi_n X_n(t_0) = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \xi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

То есть $X(t)$ и $Y(t)$ являются решениями одной задачи Коши. Тогда по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши $X(t) = Y(t) = \xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n$. Следовательно, $X_1, \ldots, X_n$ — базис пространства решений системы (3.2.1). Таким образом, общее решение имеет вид

$$X_{\text{OP}}(t) = C_1 X_1 + \ldots + C_n X_n, \quad \forall C_i \in \mathbb{R}.$$

• *Базис пространства решений однородного уравнения* (3.2.1) *называется* ***фундаментальной системой решений****.*

• *Матрица* $\Phi(t) = [X_1(t), \ldots, X_n(t)]$ *называется* ***фундаментальной матрицей*** *системы* (3.2.1).

Фундаментальная матрица невырожденная при любом t.

• *Фундаментальная система решений называется* ***нормированной при*** $t = t_0$*, если ее* $\Phi(t_0) = E$*.*

Общее решение уравнения (3.2.1) в матричном виде с использованием фундаментальной матрицы может быть записано следующим образом:

$$X_{\text{OP}}(t) = \Phi(t) \cdot C, \quad \forall C \in \mathbb{R}_{n,1}.$$

Если $X(t)$ — решение задачи Коши $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = \xi$, то $X(t_0) = \Phi(t_0) \cdot C = \xi$. Так как матрица $\Phi(t_0)$ невырожденная, то $\exists \Phi^{-1}(t_0) : C = \Phi^{-1}(t_0)\xi$. Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\xi.$$

3.3 Метод Эйлера построения фундаментальной системы решений линейных векторных уравнений.

Рассмотрим линейное векторное уравнение

$$DX = AX, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.3.1}$$

Найдем решение этого уравнения в виде

$$X(t) = B_0 e^{\lambda t}, \tag{3.3.2}$$

где B_0 — некоторый ненулевой столбец ($B_0 \in \mathbb{R}_{n,1}$). Подставим функцию (3.3.2) в уравнение (3.3.1):

$$\lambda B_0 e^{\lambda t} = A B_0 e^{\lambda t} \Longleftrightarrow AB_0 - \lambda B_0 = 0 \Longleftrightarrow (A - \lambda E)B_0 = 0.$$

Столбец B_0 является ненулевым решением полученного матричного уравнения, если $\det(A - \lambda E) = 0$. Следовательно, λ — собственное значение матрицы A, а B_0 — собственный вектор, соответствующий этому значению.

Таким образом, функция (3.3.2) является ненулевым решением уравнения (3.3.1), если B_0 — собственный вектор, λ — собственное значение.

Если матрица A является матрицей простой структуры, то существует базис пространства $\mathbb{R}_{n,1}$ составленный из собственных векторов матрицы A. Тогда, используя этот базис, можем построить n решений вида (3.3.2) системы (3.3.1), которые являются линейно независимыми, так как определитель Вронского этой системы решений при $t = 0$ равен определителю матрицы, составленной из n линейно независимых собственных векторов, а значит не равен нулю.

Если матрица A не является матрицей простой структуры, то для нее всегда существует в общем случае комплексная подобная жорданова матрица, а следовательно для этой матрицы существует в общем случае комплексный жордановый базис.

Теорема. *Если $B_0, B_1, \ldots, B_k$ — жорданова цепочка матрицы A, соответствующая собственному значению λ_0, то векторная функция*

$$X(t) = \Big(B_0 \frac{t^k}{k!} + B_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + B_2 \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + B_{k-1} \frac{t}{1!} + B_k\Big) \cdot e^{\lambda_0 t} \tag{3.3.3}$$

является решением уравнения (3.3.1).

♦ Вычислим для векторной функции (3.3.3) векторную функцию $AX - DX$:

$$AX - DX = A\Big(B_0 \frac{t^k}{k!} + B_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + B_{k-1} \frac{t}{1!} + B_k\Big) \cdot e^{\lambda_0 t} - \Big(B_0 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \\ + B_1 \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + B_{k-1}\Big) \cdot e^{\lambda_0 t} - \lambda_0 \Big(B_0 \frac{t^k}{k!} + B_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + B_{k-1} \frac{t}{1!} + B_k\Big) \cdot e^{\lambda_0 t}$$

Сравним коэффициенты:
$t^k e^{\lambda_0 t}$: $AB_0 \dfrac{1}{k!} - \lambda_0 B_0 \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{k!}(A - \lambda_0 E)B_0 = 0$, так как B_0 — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_0.
$t^{k-1} e^{\lambda_0 t}$: $\dfrac{1}{(k-1)!} AB_1 - \dfrac{1}{(k-1)!} B_0 - \dfrac{1}{(k-1)!} \lambda_0 B_1 = \dfrac{1}{(k-1)!}(AB_1 - \lambda_0 B_1 - B_0) =$
$\dfrac{1}{(k-1)!}(\underbrace{(A - \lambda_0 E)B_1}_{B_0} - B_0) = 0$, так как B_1 — вектор присоединенный к B_0.
Продолжая аналогично, получим, что $AX - DX = 0$. Следовательно, $DX = AX$, то есть X — решение уравнения (3.3.1). ⊠

Так как для жордановой цепочки $B_0, \ldots, B_k$ длины $(k+1)$ любая ее подсистема $B_0, B_1, \ldots, B_m$,

$0 \leqslant m \leqslant k$, также является жордановой цепочкой, то, используя жоданову цепочку длины $(k+1)$, можно построить $(k+1)$ решение системы (3.3.1).

Следовательно, используя жорданов базис матрицы A составленный из жордановых цепочек, можно построить ровно n различных решений уравнения (3.3.1).

Если вычислить значение фундаментальной матрицы составленной из этих решений при $t = 0$, получим матрицу, состоящую из жорданового базиса матрицы A, которая невырожденная. Следовательно, построенная система решений линейно независимая.

Если среди собственных значений матрицы A существуют мнимые, то собственные и присоединенные векторы, соответствующие этим собственным значениям, также мнимые. И построенные решения являются комплекснозначными. Но так как матрица A действительная, их действительные и мнимые части являются линейно независимыми действительными решениями. Следовательно, используя комплексное собственное значение кратности k можно построить $2k$ линейно независимых действительных решений. При этом аналогично построенные решения для сопряженного мнимого значения новыми независимыми решениями не являются.

3.4 Матричный метод построения фундаментальной системы решений линейных стационарных векторных уравнений.

Рассмотрим уравнение
$$DX = AX, \tag{3.4.1}$$
где A — матрица $n \times n$, X — вектор-функция. Пусть $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ — последовательность матриц одного порядка.

- *Матрица A называется* ***пределом*** *этой последовательности, если*
$$\forall \varepsilon \ \exists N : \forall i > N \quad \|A - A_i\| < \varepsilon.$$
- *Ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A_i$ *называется* ***сходящимся****, если существует предел частных сумм.*

Матричный ряд сходится $\iff$ сходятся все ряды, образованные из соответствующих элементов этих матриц.

Рассмотрим ряд
$$E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots. \tag{3.4.2}$$
Модуль любого элемента матрицы A^k не превосходит $\left\|A^k\right\|$, которая по определению матричной нормы не превосходит $\|A\|^k$. Тогда ряды, состоящие из соответствующих элементов матриц $\dfrac{A^i}{i!}$, имеют сходящуюся числовую мажоранту
$$1 + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \ldots = e^{\|A\|},$$
а, следовательно, являются сходящимися.

• *Ряд* (3.4.2) *также является сходящимся матричным рядом, обозначается* e^A *и называется* ***матричной экспонентой***.

Ряд (3.4.2) является сходящимся для любой матрицы A.

Свойства матричной экспоненты:

1. $e^0 = E$ (0 — *нулевая матрица*).

2. *Если матрицы* A, B *перестановочны, то есть* $AB = BA$, *то* $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

   ♦ $e^A \cdot e^B = \Big(E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots\Big)\Big(E + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \ldots\Big) = E + \Big(\frac{A}{1!} + \frac{B}{1!}\Big) + \Big(\frac{A^2}{2!} + \frac{A \cdot B}{1!} + \frac{B^2}{2!}\Big) + \ldots = E + \frac{A+B}{1!} + \frac{A^2 + 2AB + B^2}{2!} + \ldots = [AB = BA, \text{иначе свернуть нельзя}] = E + \frac{A+B}{1!} + \frac{(A+B)^2}{2!} + \ldots = e^{A+B}$. ⊠

3. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

   ♦ Так как матрицы A и $-A$ перестановочны, то по второму свойству $e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = E$. ⊠

Рассмотрим матричную экспоненту

$$e^{At} = E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{A^k}{k!}t^k + \ldots, \tag{3.4.3}$$

где t — некоторая действительная переменная. При любом фиксированном t ряд (3.4.3) является сходящимся. На любом ограниченном промежутке ряд (3.4.3) является равномерно сходящимся, так как для него существует сходящийся числовой мажорирующий ряд. Тогда

$$D(e^{At}) = A + \frac{2A^2}{2!}t + \frac{3A^3}{3!}t^2 + \ldots = A\Big(E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots\Big) = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Теорема. *Задача Коши* $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = \xi$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}_{n,1}$ *имеет единственное решение*

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi.$$

♦ Задача Коши имеет единственное решение по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши.

Покажем, что вектор-функция $X(t)$ является этим решением:

$$DX = D(e^{A(t-t_0)}\xi) = D(e^{At}e^{-At_0}\xi) = D(e^{At})e^{-At_0}\xi = Ae^{At}e^{-At_0}\xi = Ae^{A(t-t_0)}\xi = AX(t),$$

то есть $X(t)$ — решение. И при этом $X|_{t=t_0} = e^{A(t-t_0)}\xi = e^{A \cdot 0}\xi = e^0\xi = E\xi = \xi$. ⊠

Следствие. *Матрица* $e^{A(t-t_0)}$ *является фундаментальной матрицей уравнения* (3.4.1), *нормированной в точке* $t = t_0$.

♦ Так как i-ый столбец матрицы $e^{A(t-t_0)}$ представим в виде $e^{A(t-t_0)}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} i$, то он является решением задачи Коши для уравнения (3.4.1) с начальным условием $X|_{t=t_0} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.

Следовательно, каждый столбец матрицы $e^{A(t-t_0)}$ — решение уравнения (3.4.1). При $t = t_0$ матрица $e^{A(t-t_0)} = E$, следовательно, совокупность решений уравнения (3.4.1), образующих матрицу $e^{A(t-t_0)}$, имеет невырожденный вронскиан в точке $t = t_0$. А значит эти решения линейно независимые. То есть матрица $e^{A(t-t_0)}$ фундаментальная. ⊠

Таким образом, общее решение уравнения (3.4.1) имеет вид

$$X_{\text{OO}}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_n\end{pmatrix}.$$

Вычисление матричной экспоненты.

$\forall A \in \mathbb{C}_{n,n}$ $\exists J$ — жорданова нормальная форма, то есть $\exists$ невырожденная матрица $S : J = S^{-1}AS \Rightarrow A = SJS^{-1}$. Следовательно,

$$e^{At} = e^{(SJS^{-1})t} = SES^{-1} + \frac{SJS^{-1}}{1!}t + \frac{SJS^{-1}SJS^{-1}}{2!}t^2 + \ldots =$$
$$= S \cdot \Big(E + \frac{J}{1!}t + \frac{J^2}{2!}t^2 + \frac{J^3}{3!}t^3 + \ldots\Big) \cdot S^{-1} = Se^{Jt}S^{-1}.$$

Пусть $J = \operatorname{diag}[J_1, \ldots, J_k]$, где J_i — жордановы клетки. Следовательно, $e^{Jt} = \operatorname{diag}(e^{J_1t}, \ldots, e^{J_kt})$. Вычислим матричную экспоненту для клетки Жордана:

$$J = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda\end{pmatrix}; \quad J^2 = \begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\lambda\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^2\end{pmatrix}; \quad J^3 = \begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^3\end{pmatrix}.$$

Тогда первый элемент матрицы e^{Jt} равен

$$1 + \frac{\lambda}{1!}t + \frac{\lambda^2}{2!}t^2 + \frac{\lambda^3}{3!}t^3 + \ldots = e^{\lambda t}.$$

Второй элемент матрицы e^{Jt} равен

$$0+\frac{1}{1!}t+\frac{2\lambda}{2!}t^2+\frac{3\lambda^2}{3!}t^3+\ldots=t\Big(1+\frac{\lambda}{1!}t+\frac{\lambda^2}{2!}t^2+\frac{\lambda^3}{3!}t^3+\ldots\Big)=te^{\lambda t}.$$

Следующий элемент будет равен $\dfrac{t^2}{2!}e^{\lambda t}$. И так далее. В итоге получим

$$e^{Jt}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \ldots\\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \ldots\\ 0 & 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

3.5 Неоднородные стационарные линейные векторные уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$DX=AX+f(t),\quad t\in\mathbb{I} \tag{3.5.1}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$ и соответствующее ему однородное уравнение

$$DX=AX. \tag{3.5.2}$$

Теорема. *Если* $X_1(t)$ *— некоторое решение уравнения* (3.5.1), *то* $\forall X_0(t)$ *решения уравнения* (3.5.2) *вектор-функция* X_1+X_0 *— решение уравнения* (3.5.1).

♦ $D(X_1+X_0)=DX_1+DX_0=AX_1+f(t)+AX_0=A(X_1+X_0)+f(t).$ ⊠

Теорема. *Если* $X_1(t)$ *— решение уравнения* (3.5.1), *то* $\forall X_2(t)$ *решения уравнения* (3.5.1) *вектор-функция* $X_0=X_2-X_1$ *— решение уравнения* (3.5.2).

♦ $DX_0=D(X_2-X_1)=DX_2-DX_1=AX_2+f(t)-(AX_1+f(t))=A(X_2-X_1)=AX_0.$ ⊠

Из предыдущих теорем следует, что все решения неоднородного уравнения можно получить, прибавив к некоторому частному решению все решения соответствующего однородного уравнения, то есть

$$X_{\text{ОН}}=X_{\text{ОО}}+X_{\text{ЧН}}.$$

Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено **методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа)**.

Пусть $\Phi(t)=[X_1(t),\ldots,X_n(t)]$ — фундаментальная матрица уравнения (3.5.2). Частное решение уравнения (3.5.1) будем искать в виде

$$X(t)=X_1(t)\cdot u_1(t)+\ldots+X_n(t)\cdot u_n(t),$$

где $u_i(t)$ — некоторые дифференцируемые функции. Если обозначим $U(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ \vdots\\ u_n(t)\end{pmatrix}$, то частное решение можно представить как

$$X(t)=\Phi(t)\cdot U(t).$$

Подставим функцию $X(t)$ в уравнение (3.5.1):

$$DX_1u_1 + X_1Du_1 + \ldots + DX_nu_n + X_nDu_n = A(X_1u_1 + \ldots + X_nu_n) + f(t).$$

Так как X_i являются решениями уравнения (3.5.2), то $DX_i = AX_i$. Следовательно, $DX_iu_i = AX_iu_i$. Тогда получаем

$$X_1Du_1 + \ldots + X_nDu_n = f(t),$$

в матричном виде

$$\Phi(t) \cdot DU(t) = f(t).$$

Так как $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (3.5.2), то ее столбцы — линейно независимые решения однородного уравнения. Следовательно, определитель фундаментальнй матрицы является вронскианом решений $X_1(t), \ldots, X_n(t)$, а значит

$$\det\Phi(t) \neq 0 \quad \forall t \Rightarrow \exists \Phi^{-1}(t) : DU(t) = \Phi^{-1}(t) \cdot f(t).$$

Тогда в качестве векторной функции $U(t)$ можно выбрать функцию

$$U(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad t, t_0 \in \mathbb{I}.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$X_{\text{он}} = \Phi(t) \cdot C + \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau = \Phi(t) \cdot (C + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau). \tag{3.5.3}$$

Используя формулу (3.5.3), найдем решение задачи Коши $DX = AX + f(t)$, $X|_{t=t_0} = \xi$. Для этого подставим в (3.5.3) начальные условия: $X|_{t=t_0} = \Phi(t_0) \cdot C = \xi \Rightarrow C = \Phi^{-1}(t_0)\xi$. Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\xi + \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

В качестве фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ можно взять матрицу e^{At} ($\Phi(t) = e^{At}$). Тогда решение задачи Коши примет вид

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \tag{3.5.4}$$

Из уравнения (3.5.4) следует, что задача Коши для уравнения (3.5.1) с нулевыми начальными условиями ($\xi = 0$) имеет вид

$$X(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \tag{3.5.5}$$

То есть функция (3.5.5) является частным решением уравнения (3.5.1).

• *Формула* (3.5.5) *называется* ***методом Коши*** *отыскания частного решения неоднородного уравнения.*

Следовательно, общее решение уравнения (3.5.1) можно записать в виде

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}C + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

3.6 Непрерывная зависимость решений стационарного линейного векторного уравнения от начальных значений.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{3.6.1}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$ и соответствующее ему однородное уравнение

$$DX = AX. \tag{3.6.2}$$

• *Решение $X_0(t)$ уравнения* (3.6.1) *называется* ***непрерывно зависящим*** *на промежутке* $\mathbb{I}$ ***от начальных значений****, если*

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \forall X(t) \text{ решения } (3.6.1)\ \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < \varepsilon\ \forall t \in \mathbb{I}.$$

• *Функция $\|X(t) - X_0(t)\|$ называется* ***отклонением*** *$X(t)$ от $X_0(t)$, а ее значение при $t = t_0$, то есть $\|X(t_0) - X_0(t_0)\|$, называется* ***начальным отклонением****.*

Пусть $X_0(t)|_{t=t_0} = \xi$, а $X(t)|_{t=t_0} = \xi + \Delta\xi$, где $\xi, \Delta\xi \in \mathbb{R}_{n,1}$. Тогда по правилу Коши

$$X_0(t) = e^{A(t-t_0)}\xi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau; \quad X(t) = e^{A(t-t_0)}(\xi + \Delta\xi) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau.$$

Отсюда

- $X(t) - X_0(t) = e^{A(t-t_0)}\Delta\xi$ — отклонение;
- $X(t_0) - X_0(t_0) = E\Delta\xi$ — начальное отклонение.

Следовательно, отклонение решения $X(t)$ от $X_0(t)$ не зависит от самих решений, а зависит лишь от их начальных отклонений. То есть все решения уравнения (3.6.1) либо одновременно зависят от начальных данных, либо нет. Кроме того отклонение зависит лишь от матрицы A и не зависит от неоднородности $f(t)$. Следовательно, и непрерывная зависимость от начальных данных зависит только от матрицы A.

Теорема. *Если промежуток $\mathbb{I}$ является отрезком, то любое решение уравнения* (3.6.1) *непрерывно зависит от начальных значений.*

♦ Так как $e^{A(t-t_0)}$ — фундаментальная матрица уравнения (3.6.2), то все ее компоненты являются непрерывными. Следовательно, по теореме Вейрштрасса на отрезке $\mathbb{I}$ они все являются ограниченными. То есть

$$\exists M : \left\|e^{A(t-t_0)}\right\| \leqslant M \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| = \left\|e^{A(t-t_0)}\Delta\xi\right\| \leqslant \left\|e^{A(t-t_0)}\right\| \cdot \|\Delta\xi\| \leqslant M \cdot \|X(t_0) - X_0(t_0)\|.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} : \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

⊠

• *Решение уравнения* (3.6.1) *называется* ***интегрально зависящим от начальных значений*** *на промежутке $\mathbb{I}$, если оно зависит от начальных значений на любом отрезке $I_0 \subseteq \mathbb{I}$.*

3.7 Устойчивость стационарных линейных векторных уравнений.

Рассмотрим уравнение
$$DX = AX + f(t),\ t \in \mathbb{I} = [t_0; +\infty) \tag{3.7.1}$$
с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$.

• *Решение $X_0(t)$ уравнения* (3.7.1) *называется* ***устойчивым по Ляпунову****, если*

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \forall X(t) \quad \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < \varepsilon\ \forall t > t_0.$$

Таким образом, решение $X_0(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если оно непрерывно зависит от начальных данных на промежутке $\mathbb{I}$ вида $[t_0; +\infty)$.

• *Если кроме того*
$$\lim_{t\to+\infty} \|X(t) - X_0(t)\| = 0,$$
то решение $X_0(t)$ называется ***асимптотически устойчивым****.*

Из определения устойчивости и свойств непрерывной зависимости от начальных значений следует, что все решения уравнения (3.7.1) либо одновременно устойчивы, либо нет.

• *Уравнение, все решения которого устойчивы, называется* ***устойчивым*** *(аналогично* ***неустойчивым, асимптотически устойчивым****).*

Кроме того, так как неоднородность уравнений не влияет на непрерывную зависимость от начальных значений, то и устойчивость уравнения не зависит от неоднородности $f(t)$. Следовательно, в дальнейшем для исследования устойчивости будем исследовать нулевое решение уравнения
$$DX = AX. \tag{3.7.2}$$
То есть

• *Уравнение называется* ***устойчивым****, если*

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \forall X(t) \quad \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < \varepsilon\ \forall t > t_0.$$

Лемма. *Уравнение* (3.7.2) *является устойчивым на $\mathbb{I}$ $\Longleftrightarrow$ каждое его решение является ограниченным на $\mathbb{I}$.*

♦ $\Rightarrow$) От противного. Пусть (3.7.2) устойчиво, но $\exists Y(t)$ решение неограниченное на промежутке $\mathbb{I}$. Тогда векторная функция $X(t) = CY(t)$ является также решением уравнения (3.7.2), и при этом, выбирая C сколь угодно малым, можем получить решение, которое при $t = t_0$ будет сколь угодно близко к нулевому решению, но при этом являться неограниченным.

$\Leftarrow$) Пусть все решения уравнения (3.7.2) ограничены на $\mathbb{I}$. Тогда фундаментальная матрица $e^{A(t-t_0)}$ тоже ограничена. То есть $\exists M : \left\|e^{A(t-t_0)}\right\| \leqslant M\ \forall t > t_0$. Тогда

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} : \forall X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi \quad \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t)\| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

⊠

Теорема (Критерий устойчивости). *Неоднородное уравнение* (3.7.1) *устойчиво* $\Longleftrightarrow$ *действительные части собственных значений матрицы A неположительны, при этом собственные значения с нулевой действительной частью имеют равные алгебраические и геометрические кратности.*

♦ Так как неоднородность не влияет на устойчивость, то уравнение (3.7.1) устойчиво $\Longleftrightarrow$ уравнение (3.7.2) устойчиво. А по лемме это уравнение устойчиво $\Longleftrightarrow$ все его решения ограничены.

Из метода Эйлера построения фундаментальной системы решения однородного уравнения для ограниченности решений необходимо и достаточно, чтобы действительные части собственных значений были неположительны. Причем собственным значениям с нулевой действительной частью в жордановом базисе матрицы A должны соответствовать цепочки длины 1. А это возможно, когда алгебраическая и геометрическая кратности этого собственного значения равны. ⊠

Следствие. *Неоднородное уравнение* (3.7.1) *устойчиво* $\Longleftrightarrow$ *действительные части собственных значений матрицы A неположительны, при этом собственным значениям с нулевой действительной частью в жордановой нормальной форме матрицы A соответствуют клетки порядка* 1.

Лемма. *Уравнение* (3.7.2) *является асимптотически устойчивым* $\Longleftrightarrow$ *все его решения стремятся к нулю при* $t \to +\infty$.

♦ $\Rightarrow$) Пусть уравнение асимптотически устойчиво. Тогда и его нулевое решение асимптотически устойчиво, то есть

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \forall X(t) \quad \|X(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Пусть $Y(t)$ — произвольное решение уравнения (3.7.2). Тогда векторная функция $CY(t)$, $C \in \mathbb{R}$ также является решением уравнения (3.7.2). Причем, выбирая C достаточно малым, можно получить решение сколь угодно близкое к 0 при $t = t_0$. Следовательно, из определения устойчивости нулевого решения

$$\lim_{t\to+\infty} \|CY(t)\| = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{|C|} \|CY(t)\| = 0.$$

$\Leftarrow$) Пусть для решения $X(t)$ уравнения (3.7.2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0$. Тогда $X(t)$ является ограниченной функцией, так как из существования предела при $t \to +\infty$ следует ограниченность этой функции на интервале $(t_1; +\infty)$, $t_1 \in \mathbb{I}$. А на отрезке $[t_0; t_1]$ функция $X(t)$ ограничена, так как непрерывна. Следовательно, уравнение (3.7.2) является устойчивым. А так как $\forall X(t)\ \lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0$, то и асимптотически устойчиво. ⊠

Теорема (Критерий асимптотической устойчивости). *Неоднородное уравнение* (3.7.1) *асимптотически устойчиво* $\Longleftrightarrow$ *все собственные значения матрицы A отрицательны.*

♦ Уравнение (3.7.1) асимптотически устойчиво $\Longleftrightarrow$ асимптотически устойчиво уравнение (3.7.2). А по лемме уравнение (3.7.2) асимптотически устойчиво $\Longleftrightarrow$ все его решения стремятся к 0 при $t \to +\infty$.

Из метода Эйлера построения фундаментальной системы решений уравнения (3.7.2) его решения будут стремиться к 0, если действительная часть собственных значений отрицательна. ⊠

3.8 Фазовая плоскость линейных стационарных векторных уравнений порядка 2.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX, \tag{3.8.1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ а } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

— неизвестная векторная функция.

• ***Фазовым графиком*** *решения $X(t)$ называется график параметрически заданной функции*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t). \end{cases}$$

• *Плоскость Ox_1x_2, на которой располагаются фазовые графики решений, называется* ***фазовой плоскостью уравнения****.*

• *Фазовый график, состоящий из одной точки, называется* ***точкой покоя****.*

Начало координат (точка (0; 0)) всегда является точкой покоя для уравнения (3.8.1). Рассмотрим классификации точек покоя.

I группа.

1. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда система в координатном виде записывается следующим образом

   $$\begin{cases} Dx_1 = 0, \\ Dx_2 = 0; \end{cases}$$

   и, следовательно, решения этой системы имеют вид $X(t) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$. То есть любая точка фазовой плоскости является фазовым графиком и других фазовых графиков нет.

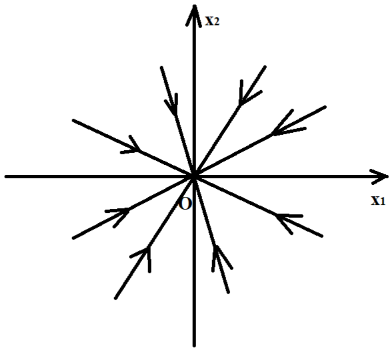
2. Пусть $A = aE$, то есть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Тогда в координатной форме система имеет вид

   $$\begin{cases} Dx_1 = ax_1, \\ Dx_2 = ax_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1e^{at}, \\ x_2 = C_2e^{at}. \end{cases}$$

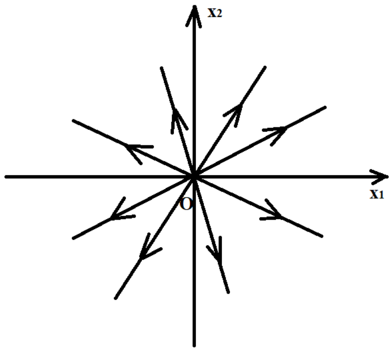
   Если $C_1 \neq 0$, то $e^{at} = \dfrac{x_1}{C_1} \Rightarrow x_2 = \dfrac{C_2}{C_1}x_1$ — прямая, проходящая через начало координат.

   Если $C_1 = 0$, то $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = C_2e^{at}. \end{cases}$ — прямая $x_1 = 0$.

При этом, если $a < 0$, то точка $(x_1(t); x_2(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.



А если $a > 0$, то точка $(x_1(t); x_2(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} \infty$.



• *Точка покоя, в окрестности которой фазовые графики имеют такое расположение, называется* ***дикритическим узлом*** *соответственно* ***устойчивым*** *и* ***неустойчивым****.*

II группа. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, причем $A \neq aE$. Рассмотрим матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & \mathrm{Sp}A \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}A = a + d$. И рассмотрим их характеристические матрицы:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}, \quad B - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\det A & \mathrm{Sp}A - \lambda \end{pmatrix}.$$

Построим для них системы НОД миноров.

$A - \lambda E$: $d_1(\lambda) = 1$ (если какое-то c или b не равно нулю, то оно является ненулевым минором первого порядка; а если $c = b = 0$, то $a \neq d$ и многочлены $a - \lambda$ и $d - \lambda$ взаимно простые).
$d_2(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$.
$B - \lambda E$: $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\mathrm{Sp}A + \det A$.

Следовательно, матрицы $A - \lambda E$ и $B - \lambda E$ эквиваленты. Тогда матрицы A и B подобны, то есть существует невырожденная матрица $S : B = S^{-1}AS$.

Выполним замену в уравнении (3.8.1) неизвестной функции $X = SY$. Тогда $SDY = ASY \Rightarrow DY = S^{-1}ASY = BY$. Получили

$$DY = BY. \qquad (3.8.2)$$

Координатная форма уравнения (3.8.2) имеет вид

$$\begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = -(\det A)y_1 + (\mathrm{Sp}A)y_2. \end{cases}$$

Исключим из второго уравнения y_1 и получим

$$D^2y_1 - (\mathrm{Sp}A)Dy_1 + (\det A)y_1 = 0.$$

Тогда решение $y_1(t)$ имеет фазовую траекторию, являющуюся графиком параметрически заданной функции

$$\begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = Dy_1(t); \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = y_2(t). \end{cases} \tag{3.8.3}$$

— фазовая траектория решения уравнения (3.8.2).

То есть уравнение (3.8.3) и уравнение (3.8.2) имеют одинаковый фазовый портрет. Выполнив преобразование плоскости $X = SY$, получим фазовый портрет уравнения (3.8.1). Заметим, что матрица S невырожденная. Тогда линейное преобразование $X = SY$ невырожденное. Следовательно, оно сводится к последовательному выполнению преобразования поворота и преобразования растяжения-сжатия вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений. Таким образом, типы точек покоя уравнения (3.8.1) будут совпадать с типами точек покоя уравнений (3.8.2) и (3.8.3).

Глава 4

Элементарные дифференциальные уравнения.

4.1 Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия.

• ***Дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме*** *называется выражение вида*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{4.1.1}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — функции, определенные в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Если в области D $Q(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in D$, то уравнение (4.1.1) можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \text{ где } f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

• *Уравнение в такой форме записи называется* ***разрешенным относительно производной****.*

Аналогично, если $P(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in D$, то уравнение (4.1.1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dy} = g(x,y), \text{ где } g(x,y) = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

• *Точка $(x_0, y_0) \in D$ такая, что $P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$, называется* ***особой точкой*** *уравнения.*

• ***Решением*** *уравнения называется функция $y(x)$ (или $x(y)$) определенная и дифференцируемая на некотором промежутке $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, такая, что выполняется равенство*

$$P(x,y(x))dx + Q(x,y(x)) \cdot y'(x)dy = 0.$$

• *График решения дифференциального уравнения называется* ***интегральной кривой****.*

Решение уравнения может быть также задано или параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{I},$$

или неявно $\varphi(x, y) = 0$.

• ***Общим решением*** *дифференциального уравнения называется семейство решений*

1. $y = y(x, C)$, $x = x(y, C)$, *если решения заданы функциями*;

2. $\begin{cases} x = x(t, C), \\ y = y(t, C). \end{cases}$ *если решения заданы параметрически*;

3. $\varphi(x, y, C) = 0$, *если решения заданы неявно*;

зависящие от произвольной постоянной $C \in \mathbb{R}$.

• *Если в общем решении можно выразить произвольную постоянную C, то соотношение*

$$u(x, y) = C$$

называется ***общим интегралом*** *уравнения.*

• *Множество всех решений дифференциального уравнения называется* ***полным решением***.

4.2 Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения с разделенными переменными.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{4.2.1}$$

Если Ф2П $u(x, y)$ дифференцируема по каждой переменной, то ее полный дифференциал имеет вид

$$du(x, y) = u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy.$$

• *Уравнение* (4.2.1) *называется* ***уравнением в полных дифференциалах****, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, то есть*

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда выполняется условие Эйлера

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В этом случае уравнение (4.2.1) принимает вид

$$du(x, y) = 0.$$

Следовательно, функция $u(x, y) = C$ является общим интегралом уравнения (4.2.1) и полным решением уравнения (4.2.1).

Любое C, для которого это равенство определено неявно, задает дифференцируемую функцию.

Найдем функцию $u(x,y)$. Если уравнение (4.2.1) является уравнением в полных дифференциалах, то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \end{cases}$$

И пусть $(x_0, y_0) \in D$. Тогда первое уравнение является простейшим относительно x. И, следовательно,

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \varphi(y).$$

Продифференцируем это равенство по y. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y) =$$

$$= Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y).$$

Тогда из второго уравнения системы

$$Q(x,y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y).$$

$$\varphi'(y) = Q(x_0,y).$$

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C.$$

Подставим обратно в $u(x,y)$ и получим

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C.$$

Выбрав одну из этих функций $u(x,y)$, например с $C = 0$, получим общий интеграл уравнения

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C.$$

Если начать поиск функции $u(x,y)$ с интегрирования второго уравнения системы, то общий интеграл будет иметь вид

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C.$$

Функция $u(x,y)$ может быть также найдена как КРИ-2:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Задача Коши для уравнения в полных дифференциалах с начальными условиями $y|_{x=x_0} = y_0$ имеет решение

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

если точка (x_0, y_0) не является особой.

• *Уравнение*

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

*называется **уравнением с разделенными переменными**.*

Оно является уравнением в полных дифференциалах, так как $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Общий интеграл для него имеет вид

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x)dx + Q(y)dy = C.$$

4.3 Интегрирующий множитель. Уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнение в нормальной форме

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad (x,y) \in D. \tag{4.3.1}$$

И пусть уравнение (4.3.1) не является уравнением в полных дифференциалах.

• *Функция* $\mu(x,y)$ *называется **интегрирующим множителем** для уравнения* (4.3.1), *если уравнение*

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{4.3.2}$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Заметим, что при домножении уравнения на функцию $\mu(x,y)$ полученное уравнение может либо приобрести дополнительные решения, либо потерять какие-либо решения. Так как уравнение (4.3.2) должно быть уравнением в полных дифференциалах, то функция $\mu(x,y)$ должна удовлетворять равенству

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\mu(x,y) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P.$$

Будем искать решение последнего уравнения в виде $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = \omega(x,y)$ — некоторая функция. Тогда

$$\mu(\omega) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot P.$$

Следовательно,
$$\frac{\frac{\partial\mu}{\partial\omega}}{\mu(\omega)} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\cdot Q - \dfrac{\partial\omega}{\partial y}\cdot P}.$$
$$(\ln\mu(\omega))' = -\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\cdot P - \dfrac{\partial\omega}{\partial x}\cdot Q}.$$
Если функция справа является функцией от ω, то есть имеет вид $\varphi(\omega)$, то
$$(\ln\mu(\omega))' = \varphi(\omega).$$
Следовательно, отсюда
$$\ln\mu(\omega) = \int\limits_{\omega_0}^{\omega}\varphi(\tau)d\tau + C \quad\Rightarrow\quad \mu(\omega) = e^{\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\varphi(\tau)d\tau + C} \qquad \Rightarrow$$
$$\mu(x,y) = e^{\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\varphi(\tau)d\tau + C}$$
является интегрирующим множителем уравнения (4.3.1) для любого C.

• *Уравнение вида*
$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$$
называется ***уравнением с разделяющимися переменными****.*

Интегрирующий множитель этого уравнения имеет вид
$$\mu(x,y) = \frac{1}{Q_1(x)P_2(y)},$$
так как в результате домножения получаем уравнение
$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = 0$$
— уравнение с разделенными переменными.

Уравнение с разделяющимися переменными в виде разрешенном относительно производной имеет вид
$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y).$$

4.4 Линейные уравнения. Уравнения Бернулли. Уравнения Риккати.

Рассмотрим линейное уравнение первого порядка в нормальном виде
$$(p(x)\cdot y + q(x))dx + r(x)dy = 0, \quad (x,y)\in D$$

или в виде разрешенном относительно производной

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x).$$

$$y' - P(x) \cdot y = Q(x).$$

Домножим уравнение так, чтобы свернуть в производную

$$y' - P(x) \cdot y = Q(x) \,\Big|\, \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}.$$

$$y' \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} - P(x) \cdot y \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} = Q(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}.$$

$$\Big(y \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}\Big)' = Q(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}.$$

$$y \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} = \int\limits_{x_0}^{x} Q(t) \cdot e^{-\int\limits_{t_0}^{t} P(\tau)d\tau} dt + C.$$

Тогда формула

$$y = e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} \cdot \Big(C + \int\limits_{x_0}^{x} Q(t) \cdot e^{-\int\limits_{t_0}^{t} P(\tau)d\tau} dt\Big)$$

— полное решение линейного уравнения первого порядка.

- ***Уравнением Бернулли*** *называется уравнение вида*

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x) \cdot y^k, \quad k \in \mathbb{Z} \backslash \{0, 1\}.$$

Разделим это уравнение на y^k. Получим

$$\frac{y'}{y^k} = P(x) \cdot y^{1-k} + Q(x),$$

если $k > 0$, можем потерять решение $y = 0$.

Выполним замену неизвестной функции $z(x) = y(x)^{1-k}$. Тогда $z' = (1-k) \cdot y^{-k} \cdot y'$. Отсюда следует, что

$$\frac{y'}{y^k} = \frac{z'}{1-k}.$$

И, следовательно,

$$\frac{z'}{1-k} = P(x) \cdot z + Q(x).$$

$$z' = (1-k) \cdot P(x) \cdot z + (1-k) \cdot Q(x)$$

— линейное уравнение первого порядка.

Решив линейное уравнение и выполнив обратную замену, получим общее решение уравнения Бернулли (полное решение получим, добавив $y = 0$, если $k > 0$).

- ***Уравнением Риккати*** *называется уравнение вида*

$$y' = p(x) \cdot y^2 + q(x) \cdot y + r(x). \tag{4.4.1}$$

Если $p(x) \equiv 0$, то (4.4.1) — линейное уравнение. Если $r(x) \equiv 0$, то (4.4.1) — уравнение Бернулли. Пусть $p(x) \not\equiv 0$, $r(x) \not\equiv 0$.

Уравнение Риккати в общем случае в квадратурах не интегрируется (то есть нельзя получить его решение в виде какого-то интеграла). Но в частных случаях уравнение может быть проинтегрировано:

1. Если $p(x) = q(x) = r(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot (a_2 y^2 + a_1 y + a_0) \text{ — уравнение с разделяющими переменными;}$$

$$2.\ y' = a_2 \cdot \frac{y^2}{x^2} + a_1 \cdot \frac{y}{x} + a_0 \text{ — однородное уравнение;}$$

Если известно хотя бы одно частное решение уравнения Риккати $y_1(x)$, то уравнение Риккати может быть приведено к линейному заменой неизвестной функции $y(x) = y_1(x) \pm \dfrac{1}{z(x)}$ или $z(x) = \dfrac{1}{y - y_1}$. При этом может быть потеряно решение $y = y_1$. Тогда

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = p(x) \cdot \left(y_1^2 + 2 \cdot \frac{y_1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + q(x) \cdot \left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + r(x).$$

Так как y_1 является решением уравнения Риккати, то

$$y_1' = p(x) \cdot y_1^2 + q(x) \cdot y_1 + r(x).$$

Следовательно,

$$-\frac{z'}{z^2} = p(x) \cdot \frac{2y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} + q(x) \cdot \frac{1}{z} \quad \Big| \quad \cdot (-z^2).$$

$$z' = (-p(x) \cdot 2y_1 - q(x)) \cdot z - p(x) \text{ — линейное уравнение.}$$

- *Уравнение Риккати называется* ***каноническим****, если оно имеет вид*

$$y' = \pm y^2 + R(x).$$

Уравнение Риккати может быть приведено к каноническому виду заменой неизвестной функции вида

$$y = \alpha(x) \cdot z(x) + \beta(x),$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Найдем $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Подставим замену и получим

$$\alpha' z + \alpha z' + \beta' = p(\alpha^2 z^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta z) + q(\alpha z + \beta) + r.$$

$$\alpha z' = p\alpha^2 z^2 + z(2p\alpha\beta + q\alpha - \alpha') + p\beta^2 + q\beta + r - \beta'.$$

$$z' = p\alpha z^2 + \left(2p\beta + q - \frac{\alpha'}{\alpha}\right) z + \frac{1}{\alpha}(p\beta^2 + q\beta + r - \beta^2).$$

Подберем функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ так, чтобы

$$p\alpha = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{p};$$

$$2p\beta + q - \frac{\alpha'}{\alpha} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2p}\left(\frac{\alpha'}{\alpha} - q\right).$$

4.5 Однородные уравнения.

• *Функция двух переменных* $F(x,y)$ *называется* ***однородной функцией степени*** k*, если* $F(tx,ty)=t^kF(x,y)$*.*

• *Уравнение*

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

называется ***однородным уравнением****, если функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *являются однородными функциями одной степени.*

Если однородное уравнение представить в виде разрешенном относительно производной, то получим

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

При этом

$$\frac{P(tx,ty)}{Q(tx,ty)}=\frac{t^kP(x,y)}{t^kQ(x,y)}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Следовательно, эта функция также является однородной функцией степени 0. Любая однородная функция степени 0 представима в виде

$$F(x,y)=F\Big(x,x\cdot\frac{y}{x}\Big)=x^0F\Big(1,\frac{y}{x}\Big)=F\Big(1,\frac{y}{x}\Big)=f\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Следовательно, однородное уравнение имеет вид

$$y'=f\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Выполнив замену независимой переменной $z(x)=\dfrac{y(x)}{x}$, или $y(x)=x\cdot z(x)$, получим

$$z(x)+xz'=f(z).$$

Тогда

$$x\frac{dz}{dx}=f(z)-z \text{ — уравнение с разделяющимися переменными.}$$

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}.$$

Заметим, что могут быть потеряны решения вида $f(z)-z=0$ либо приобретены решения вида

$$\frac{1}{f(z)-z}=0.$$

Если однородное уравнение задано в нормальной форме, то, выполнив замену $y(x)=x\cdot z(x)$, получим

$$P(x,xz)dx+Q(x,xz)(xdz+zdx)=0.$$

$$(\underbrace{P(x,xz)}_{x^kP(1,z)}+z\cdot\underbrace{Q(x,xz)}_{x^kQ(1,z)})dx+x\cdot\underbrace{Q(x,xz)}_{x^kQ(1,z)}dz=0.$$

$$\underbrace{(P(1,z)+z\cdot Q(1,z))}_{f_1(z)}dx+\underbrace{Q(1,z)}_{f_2(z)}\cdot\underbrace{x}_{g_1(x)}\cdot dz=0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнение
$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big).$$

1. Пусть $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$. Тогда $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$. Тогда уравнение имеет вид
$$y' = g(ax + by).$$
Выполним замену неизвестной функции
$$ax + by(x) = z(x) \Rightarrow y = \frac{1}{b}(z - ax).$$
$$\frac{1}{b}(z' - a) = g(z).$$
$$z' = bg(z) + a \text{ — уравнение с разделяющимися переменными.}$$

2. Пусть $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$. Выполним замену
$$\begin{cases} x = t + \alpha, \\ y = z + \beta, \end{cases}$$
где t — новая независимая переменная, z — новая неизвестная функция, зависящая от t, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} \Rightarrow y' = f\Big(\frac{a_1(t + \alpha) + b_1(z + \beta) + c_1}{a_2(t + \alpha) + b_2(z + \beta) + c_2}\Big).$$
Подберем свободные константы так, чтобы
$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$
Так как $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, и система невырожденная и имеет единственное решение. Следовательно, уравнение имеет вид
$$z' = f\Big(\frac{a_1t + a_2z}{b_1t + b_2z}\Big),$$
причем
$$f\Big(\frac{a_1t + a_2z}{b_1t + b_2z}\Big) = f\Big(\frac{t(a_1 + a_2\frac{z}{t})}{t(b_1 + b_2\frac{z}{t})}\Big) = f\Big(\frac{a_1 + a_2\frac{z}{t}}{b_1 + b_2\frac{z}{t}}\Big) = g\Big(\frac{z}{t}\Big).$$
То есть уравнение имеет вид
$$z' = g\Big(\frac{z}{t}\Big) \text{ — однородное уравнение.}$$

4.6 Существование и единственность решения задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y),\ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \\ y(x_0) = y_0,\ (x_0,y_0) \in D; \end{cases} \tag{4.6.1}$$

где $f(x,y)$ — непрерывная в D функция.

Лемма (интегральный признак)**.** *Непрерывная функция $y : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{I}$ — некоторый промежуток, является решением задачи Коши* (4.6.1) $\iff$ *она удовлетворяет следующему условию*

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad x_0, x \in \mathbb{I}.$$

♦ $\Rightarrow$) Так как $y(x)$ — решение задачи Коши (4.6.1), то

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Проинтегрируем это равенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} y'(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau,$$

$$y(x)\Big|_{x_0}^{x} = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

$\Leftarrow$) Так как функции $y(x)$ и $f(x,y)$ непрерывные, то функция $f(x,y(x))$ также непрерывная как композиция непрерывных функций. Следовательно, правая часть интегрального уравнения — дифференцируемая функция, а тогда функция $y(x)$ также дифференцируема. Продифференцируем это уравнение

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Тогда $y(x_0) = y_0$ — решение задачи Коши. ⊠

Теорема (Пикара-Линделефа)**.** *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и в некоторой окрестности содержащейся в D удовлетворяет условию Липшица, то есть*

$$\exists L : \forall (x,y_1),(x,y_2) \in U \quad |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

то задача Коши (4.6.1) *имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений:*

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x),\ \text{где}\ y_0(x) = y_0,\ y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau,\ n = 1, 2, \ldots$$

♦

1. Существование.

Рассмотрим прямоугольник

$$\Pi = \{(x,y) \bigm| |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant a\},$$

который целиком содержится в области U. Так как функция f в прямоугольнике Π непрерывна, то она ограничена.

Пусть $|f(x,y)| \leqslant M$, $\forall (x,y) \in \Pi$. Покажем, что если $\delta = \min\{a, \frac{a}{M}\}$, то $\forall \mathbb{I} = [x_0-\delta, x_0+\delta]$ функция $y_n(x)$ содержится в Π.

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_0) d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} |f(\tau, y_0)| d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} M d\tau\Big| =$$
$$= |M \cdot (x-x_0)| = M \cdot |x-x_0| \leqslant M \cdot \delta \leqslant M \cdot \frac{a}{M} = a.$$

То есть точка $(x, y_1(x)) \in \Pi$ $\forall x \in \mathbb{I}$.

$$|y_2(x) - y_0(x)| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_1) d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} |f(\tau, y_1)| d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} M d\tau\Big| \leqslant a.$$

Аналогично рассуждая, получим, что $|y_n(x) - y_0| \leqslant a$, то есть точки $(x, y_n(x)) \in \Pi$ $\forall x \in \mathbb{I}$.

Покажем, что $\forall x \in \mathbb{I}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$. Заметим, что

$$y_n(x) = y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)).$$

Следовательно, функция $y_n(x)$ является частичной суммой ряда

$$y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (y_i - y_{i-1}). \tag{4.6.2}$$

Докажем сходимость этого ряда по признаку Вейерштрасса, для этого найдем мажорирующую константу.

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} |f(\tau, y_0) d|\tau\Big| \leqslant M \cdot |x-x_0|.$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} \Big|f(\tau, y_1(\tau)) d\tau - \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_0(\tau))\Big| d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} L|y_1(\tau) - y_0(\tau)| d\tau\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x} LM(\tau - x_0) d\tau\Big| = LM\frac{(\tau-x_0)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x} = LM\frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

$$|y_3(x)-y_2(x)| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x}\big|f(\tau,y_2(\tau))d\tau-\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_1(\tau))\big|d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x}L|y_2(\tau)-y_1(\tau)|d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x}L^2M\frac{(\tau-x_0)^2}{2}d\tau\Big| = L^2M\frac{(\tau-x_0)^3}{2\cdot 3}\Big|_{x_0}^{x} = L^2M\frac{(x-x_0)^3}{3!}.$$

Продолжая рассуждать аналогично, получим что

$$|y_i(x)-y_{i-1}(x)| \leqslant L^{i-1}M\frac{|x-x_0|^i}{i!}.$$

Следовательно, ряд $y_0+\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-y_{i-1})$ мажорируется числовым рядом

$$|y_0|+\sum_{i=1}^{\infty}L^{i-1}M\frac{|x-x_0|^i}{i!} = [|x-x_0|\leqslant\delta] \leqslant |y_0|+\frac{M}{L}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(L\delta)^i}{i!} = |y_0|+\frac{M}{L}\cdot(e^{L\delta}-1).$$

То есть ряд (4.6.2) по признаку Вейерштрасса сходится равномерно, значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Покажем, что построенная функция является решением задачи Коши (4.6.1). Так как последовательность $y_n(x) \rightrightarrows y(x)$, а функция f удовлетворяет условию Липшица, то последовательность $f(x,y_n(x)) \rightrightarrows f(x,y(x))$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} f(x,y_n(x)) = f(x,\lim_{n\to\infty} y_n(x)) = f(x,y(x)).$$

И, следовательно,

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\Big(y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_{n-1}(\tau))d\tau\Big) =$$

$$= y_0+\lim_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_{n-1}(\tau))d\tau = y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y(\tau))d\tau.$$

Следовательно, по интегральному признаку функция $y(x)$ — решение задачи Коши.

2. Единственность.

Пусть задача Коши имеет 2 различных решения $z(x)$, $y(x)$, то есть в любой окрестности точки x_0 $\exists\varepsilon : z(\varepsilon) \neq y(\varepsilon)$.

Пусть $x > x_0$. Тогда

$$|y(x)-z(x)| = \Big|\int\limits_{x_0}^{x}\big(f(\tau,y(\tau))-f(\tau,z(\tau))\big)d\tau\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x}\big|f(\tau,y(\tau))-f(\tau,z(\tau))\big|d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\int\limits_{x_0}^{x}L\big|y(\tau)-z(\tau)\big|d\tau\Big| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x}L\big|y(\tau)-z(\tau)\big|d\tau;$$

$$\underbrace{|y(x)-z(x)|}_{\varphi'(x)} - \underbrace{\Big|\int\limits_{x_0}^{x}L\big|y(\tau)-z(\tau)\big|d\tau\Big|}_{\varphi(x)} \leqslant 0.$$

$$\varphi'(x) - L\varphi(x) \leqslant 0.$$

Домножим неравенство на e^{-Lx}. Тогда

$$\varphi'(x) \cdot e^{-Lx} - L\varphi(x) \cdot e^{-Lx} \leqslant 0.$$

$$D(\varphi(x) \cdot e^{-Lx}) \leqslant 0.$$

Следовательно, функция $\varphi(x) \cdot e^{Lx}$ не возрастает на отрезке $[x_0; x]$. Поэтому

$$\varphi(x) \cdot e^{-Lx} \leqslant \varphi(x_0) \cdot e^{-Lx_0} \leqslant 0.$$

Но так как подынтегральная функция $\varphi(x)$ неотрицательна и $x > x_0$, то $\varphi(x) \cdot e^{-Lx} \geqslant 0$. И, следовательно, $\varphi(x) \cdot e^{-Lx} = 0$, то есть $\varphi(x) = |y(x) - z(x)| = 0$. Отсюда следует, что $y(x) = z(x)$.

⊠

Теорема (Пеано). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то задача Коши* (4.6.1) *имеет по крайней мере одно решение $y(x)$ на некотором промежутке $I = [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$.*

⧫ Без доказательства. ⊠

Теорема (об условии Липшица). *Если на некотором замкнутом ограниченном множестве $U \subseteq \mathbb{R}^2$ функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей частной производной f'_y, то функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y.*

⧫ Так как функция $f(x, y)$ дифференцируема по y, то по теореме Лагранжа

$$\exists \xi : |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = f'_y(x, \xi) \cdot |y_1 - y_2|.$$

И так как множество U замкнуто и ограничено и $f(x, y)$ непрерывна на U, то непрерывная функция $f'_y(x, y)$ ограничена. Следовательно, $\exists L : |f'_y(x, \xi)| \leqslant L \Rightarrow$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|.$$

Что и является условием Липшица. ⊠

4.7 Особые решения.

Рассмотрим дифференциальное уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{4.7.1}$$

• *Точка $M(x, y)$ — **точка существования** для уравнения* (4.7.1)*, если через нее проходит хотя бы одна интегральная кривая уравнения* (4.7.1)*, то есть график решения.*

• *Точка существования, обладающая окрестностью, внутри которой все интегральные кривые, проходящие через эту точку, совпадают, называется **точкой единственности**.*

• *Точка существования, через которую проходят две интегральные кривые с одной касательной в этой точке, отличающиеся в любой окрестности этой точки, называется **точкой ветвления**.*

• *Решение, каждая точка которого является точкой ветвления, называется* ***особым решением.***

Замечание. Если уравнение имеет особое решение, то кроме него и частных решений, входящих в общее решение уравнение будет иметь **составные решения**, построенные из частей частных и особых решений.

Для поиска особых решений уравнения (4.7.1) могут использоваться два подхода.

I подход. Функции, подозрительные на особые решения для уравнения $y' = f(x,y)$ могут быть найдены из теоремы о существовании и единственности задачи Коши, так как графики особых решений состоят из точек ветвлений, а значит, в каждой его точке нарушается теорема о существовании и единственности, а единственность нарушается в случае невыполнения условия Липшица. В частности, функциями, подозрительными на особые решения, могу быть функции, вдоль которых функция $f'_y(x,y)$ не определена.

II подход. Особое решение может быть найдено, если известно общее решение. Пусть общее решение уравнения (4.7.1) имеет вид

$$F(x,y,C) = 0. \tag{4.7.2}$$

Это уравнение задает на плоскости однопараметрическое семейство интегральных кривых.

• *Линия* Γ *называется* ***огибающей*** *однопараметрического семейства линий, если она в каждой своей точке касается одной из линий семейства и ни на каком участке не совпадает с этой линией.*

Таким образом, огибающая семейства решений является особым решением уравнения, так как в каждой своей точке имеет касательную, совпадающую с касательной одного из решений семейства. Огибающая семейства функций (4.7.2) может быть найдена следующим образом. Если Γ — огибающая семейства (4.7.2), то в каждой своей точке $(x_0, y_0) \in \Gamma$ она касается линии Γ_{C_0}, которая получается из уравнения (4.7.2) при $C = C_0$.

Если аналогично поступить с каждой точкой линии Γ, получим параметрическое уравнение огибающей.

$$\begin{cases} x = \varphi(C), \\ y = \psi(C); \end{cases}$$

где C — параметр. Причем

$$F(\varphi(C), \psi(C), C) = 0.$$

Если функция $F(x,y,C)$ является дифференцируемой по каждой из своих переменных, то продифференцируем последнее равенство по C. Тогда

$$\underbrace{F'_x(\varphi(C), \psi(C), C) \cdot \varphi'(C) + F'_y(\varphi(C), \psi(C), C) \cdot \psi'(C)}_{A} + F'_C(\varphi(C), \psi(C), C) = 0.$$

Покажем, что $A = 0$. Пусть $F'^2_x + F'^2_y \neq 0$. Найдем угловые коэффициенты касательных к линиям Γ и Γ_{C_0} в точке $(\varphi(C), \psi(C))$.

Найдем для Γ:

$$y' = \frac{\varphi'(C)}{\psi'(C)}.$$

Найдем для Γ_{C_0}. Неявное задание этой функции имеет вид $F(x,y,C)=0$, следовательно получим:

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0.$$

Отсюда

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Так как эти угловые коэффициенты равны, то

$$\frac{\varphi'(C)}{\psi'(C)} = -\frac{F'_x(\varphi(C),\psi(C),C)}{F'_y(\varphi(C),\psi(C),C)}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем, что $A=0$, следовательно, $F'_C=0$.
Таким образом, точки, лежащие на огибающей, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0, \\ F'_C(x,y,C)=0; \end{cases} \tag{4.7.3}$$

• *Функции, точки которой удовлетворяют системе* (4.7.3)*, называются* ***дискриминантными кривыми*** *семейства* (4.7.2)*. Если на дискриминантных кривых нет точек, для которых* $F'^2_x + F'^2_y = 0$*, то эта дискриминантная кривая является огибающей.*

4.8 Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной.

Рассмотрим уравнение 1-го порядка

$$F(x,y,y')=0 \qquad (4.8.1),$$

и пусть функция F непрерывна по всем своим аргументам в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Если это уравнение можно разрешить относительно y', то из (4.8.1) можно получить одно или несколько уравнений вида $y'=f_i(x,y)$. Интегрируя эти уравнения, получим одно или несколько семейств решений исходного уравнения. Но кроме них уравнение (4.8.1) может иметь составные решения, не являющиеся решениями ни одного из полученных уравнений. Это происходит, когда некоторая интегральная кривая одного уравнения касается в некоторой точке интегральной кривой другого уравнения.

Отсутствие составных решений гарантируется отсутствием точек ветвления, а отсутствие точек ветвления означает единственность решения расширенной задачи Коши для (4.8.1).

$$F(x,y,y')=0, \quad y|_{x=x_0}=y_0, \quad y'|_{x=x_0}=y_1 \tag{4.8.2}$$

Теорема (о существовании и единственности решения расширенной задачи Коши)**.** *Если в некоторой замкнутой окрестности точки* $(x_0,y_0,p_0)\in\mathbb{R}^3$ *функция* $F(x,y,p)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1. $F(x_0,y_0,p_0)=0$;
2. $\exists \dfrac{\partial F}{\partial p}(x_0,y_0,p_0)\neq 0$.

Тогда решение задачи Коши (4.8.2) *имеет единственное решение.*

♦ Если выполняются условия теоремы, то по теореме о неявной функции в окрестности точки (x_0, y_0, p_0) уравнение (4.8.1) задает однозначную функцию $y' = f(x, y)$, которая непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0), и при этом $f(x_0, y_0) = p_0$. По теореме Пикара-Линделёфа для полученного уравнения решение задачи Коши существует и единственно. ⊠

• *Множество точек (x_0, y_0), в которых нарушается единственность решения расширенной задачи Коши, называется* ***особым множеством*** *для уравнения* (4.8.1).

• *Если график какой-либо функции $y = \varphi(x)$ лежит в особом множестве и при этом является интегральной кривой, то функция $y = \varphi(x)$ называется* ***особым решением****.*

Таким образом, особые решения удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0. \end{cases}$$

Исключим p и получим функции, подозрительные на особые решения.

4.8.1 Метод введения параметра.

Пусть уравнение (4.8.1) допускает параметрическое представление, то есть существуют функции

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ y' = \xi(u, v); \end{cases}$$

такие, что

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \xi(u, v)) \equiv 0.$$

Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \xi(u, v) = \frac{\psi'_u du + \psi'_v dv}{\varphi'_u du + \varphi'_v dv}.$$

Следовательно,

$$(\psi'_u - \varphi'_u \xi) du + (\psi'_v - \varphi'_v \xi) dv = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение в нормальной форме.

Если $v = v(u)$ — решение этого дифференциального уравнения, то

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v(u)), \\ y = \psi(u, v(u)); \end{cases}$$

— решение исходного уравнения (4.8.1).

Уравнения, разрешенные относительно x и y.

1. *Уравнения, разрешённые относительно y.*

Пусть уравнение (4.8.1) сводится к $y = f(x, y')$. Это уравнение допускает параметризацию вида:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = f(u, v), \\ y' = v; \end{cases}$$

или в более традиционной форме

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x, p), \\ y' = p. \end{cases}$$

Из $y' = p$ следует, что

$$\frac{f'_x dx + f'_p dp}{dx} = p$$

$$(f'_x - p)dx + f'_p dp = 0$$

Если общее решение имеет вид $x = \varphi(p, C)$, то общее решение уравнения (4.8.1) имеет параметрическое задание

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C), \\ y = f(\varphi(p, C), p); \end{cases}$$

где p — параметр.

Если же общее решение последнего уравнения имеет вид $p = \varphi(x, C)$, то общее решение (4.8.1) задано явно

$$y = f(x, \varphi(x, C)).$$

2. *Уравнения, разрешенные относительно x.*

Пусть уравнение (4.8.1) сводится к $x = f(y, y')$. Это уравнение допускает параметризацию вида:

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = u, \\ y' = v; \end{cases}$$

или в более традиционной форме

$$\begin{cases} x = f(y, p), \\ y = y, \\ y' = p. \end{cases}$$

Из $y' = p$ следует, что

$$\frac{dy}{f'_y dy + f'_p dp} = p$$

$$(1 - f'_y p)dy - p f'_p dp = 0$$

Если общее решение имеет вид $y = \varphi(p, C)$, то общее решение уравнения (4.8.1) имеет параметрическое задание

$$\begin{cases} x = f(\varphi(p, C), p), \\ y = \varphi(p, C); \end{cases}$$

где p — параметр.

Если же общее решение последнего уравнения имеет вид $p = \varphi(y, C)$, то общее решение (4.8.1) задано явно

$$y = f(y, \varphi(y, C)).$$

Уравнение Клеро.

• *Уравнение вида*

$$y = xy' + g(y')$$

называется ***уравнением Клеро***.

Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = x, \\ y = xp + g(p), \\ y' = p; \end{cases}$$

Отсюда $dy = pdx$, $dy = pdx + (x + g'(p))dp$. Тогда

$$pdx = pdx + (x + g'(p))dp \Rightarrow (x + g'(p))dp = 0.$$

Рассмотрим 2 случая.

1. $dp = 0$. Тогда $p = C$. Отсюда

$$y = xc + g(C) \text{ — общее решение.}$$

2. $x + g'(p) = 0$. Тогда

$$\begin{cases} x = -g'(p), \\ y = -g'(p) \cdot p + g(p); \end{cases} \quad \text{— особое решение.}$$

Найдем дискриминантные кривые семейства линий $y = xC + g(C)$:

$$\begin{cases} y = xC + g(C), \\ 0 = x + g'(C); \end{cases}$$

Следовательно, найденное решение — дискриминантная кривая

$$\underbrace{y - xC - g(C)}_{\varphi} = 0.$$

$\varphi_y = 1$, отсюда особых точек семейство линий не имеет, следовательно, найденная дискриминантная кривая является огибающей.

Уравнение Лагранжа.

• *Уравнение вида*

$$y = x \cdot f(y') + g(y'), \quad f(y) \not\equiv y'$$

называется ***уравнением Лагранжа***.

Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = x, \\ y = xf(p) + g(p), \\ y' = p; \end{cases}$$

Отсюда $dy = pdx$, $dy = f(p)dx + (xf' + g')dp$. Тогда

$$pdx = f(p)dx + (xf' + g')dp.$$

$$\underbrace{(p - f(p))}_{\not\equiv 0} dx = (xf' + g')dp.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{dx}{dp} = \frac{xf' + g'}{p - f(p)} \text{ — линейное уравнение относительно } x.$$

Находя общее решение $x = \varphi(p, C)$, подставляем его в $y = xf(p) + g(p)$ и получим параметрически заданное решение исходного уравнения

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C), \\ y = \varphi(p, C) \cdot f(p) + g(p). \end{cases}$$

Причем, если $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha - f(\alpha) = 0$, то уравнение Лагранжа имеет также решение

$$y = x \cdot f(\alpha) + g(\alpha).$$

Неполные уравнения.

1. Уравнение вида $F(x, y') = 0$. Если данное уравнение допускает параметризацию вида

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \psi(t); \end{cases}$$

то есть $\exists \varphi(t), \psi(t) : F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$.

Тогда

$$dy = \psi(t)dx \Rightarrow dy = \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Следовательно,

$$y = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\varphi'(\tau)d\tau + C.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\varphi'(\tau)d\tau + C. \end{cases}$$

2. Уравнение вида $F(y, y') = 0$. Если данное уравнение допускает параметризацию вида

$$\begin{cases} y = \varphi(t), y' = \psi(t); \end{cases}$$

то из равенства $dy = \psi(t)dx$ получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\varphi'(t)dt = \psi(t)dx.$$

Тогда

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt \Rightarrow x = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau + C.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

3. Уравнение вида $F(y') = 0$. Если уравнение $F(p) = 0$ имеет изолированные корни $p = \alpha_k$ (т.е. $\exists \alpha_k : F(\alpha_k) = 0$), то решение исходного уравнения сводится к решению уравнения

$$y' = \alpha_k \Rightarrow y = \alpha_k x + C \Rightarrow \alpha_k = \frac{y - C}{x}.$$

Следовательно, общее решение в неявном виде может быть записано следующим образом

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

Если в уравнении $F(p) = 0$ корни заполняют некоторый интервал, то уравнение $F(y') = 0$ может иметь и другие решения.

4.9 Дифференциальные уравнения высших порядков.

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4.9.1}$$

где F — функция определенная и непрерывная по всем своим аргументам в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. По теореме о неявной функции, если в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ выполняются условия

$$F(x_0, y_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|_{x=x_0, y=y_0, y^{(i)}=\xi_i} \neq 0,$$

то в окрестности этой точки уравнение представимо в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4.9.2}$$

Задача Коши для уравнения (4.9.2) имеет вид

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = \xi_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \xi_{n-1}. \end{cases}$$

Уравнение (4.9.2) и задачу Коши для него можно свести к системе n уравнений первого порядка. Для этого введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned}
&y_1(x) = y(x),\\
&y_2(x) = y'(x),\\
&y_3(x) = y''(x),\\
&\quad\vdots\\
&y_n(x) = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).
\end{aligned}$$

В результате получаем систему

$$\begin{cases}
\begin{cases}
y_1' = y_2,\\
y_2' = y_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-1}' = y_n,\\
y_n' = f(x, y, y_1, \ldots, y_n),
\end{cases}\\
y_1(x_0) = y_0,\\
y_2(x_0) = \xi_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n(x_0) = \xi_{n-1};
\end{cases} \tag{4.9.3}$$

Для системы n дифференциальных уравнений первого порядка справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если функции $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $\forall i = \overline{1, n}$ непрерывны по всем своим аргументам в области D и удовлетворяют условию Липшица по каждой переменной y_i в окрестности некоторой точки $(x_0, y_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, то задача Коши*

$$\begin{cases}
y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n),\\
y_i|_{x=x_0} = \xi_i;
\end{cases}$$

имеет единственное решение в окрестности этой точки.

⧫ Аналогично доказательству теоремы Пикара-Линделефа. ⊠

Заметим, что условие Липшица по переменным y_i выполняется, если в D существуют и непрерывны частные производные по y_i. Таким образом, из теоремы следует, что решение задачи Коши (4.9.3) (а значит и задачи Коши (4.9.2)) существует и единственно, если функция f непрерывна по всем своим аргументам и имеет непрерывные частные производные по всем y_i в области D.

4.9.1 Простейшие способы понижения порядка дифференциального уравнения.

1. **Уравнение в точных производных**.

   - *Уравнение* (4.9.1) *называется* ***уравнением в точных производных,*** *если*

$$\exists \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) : \frac{d\Phi}{dx} = F.$$

Тогда уравнение (4.9.1) имеет вид

$$\frac{d\Phi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C$$

— уравнение $(n-1)$-ого порядка. Иногда уравнение (4.9.1) не является уравнением в точных производных, но его можно получить, умножив уравнение (4.9.1) на некий множитель.

2. **Уравнения, не содержащие функции y и несколько первых производных этой функции.**

   Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

   Порядок уравнения может быть понижен заменой

$$y^{(k)} = z(x) \Rightarrow F(x, z, \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

   Если в результате решения полученного уравнения получаем общее решение

$$z(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}),$$

   то общее решение исходного уравнения является решением простейшего дифференциального уравнения

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}).$$

3. **Уравнение, не содержащее независимой переменной.**

   Рассмотрим уравнение вида

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

   Порядок уравнения можно понизить с помощью замены

$$y' = z(y).$$

   Тогда

$$\begin{aligned} y' &= z(y), \\ y'' &= z' \cdot y' = z' \cdot z, \\ y''' &= (z'' \cdot z + z'^2)z = z'' \cdot z^2 + z'^2 \cdot z, \\ &\vdots \end{aligned}$$

   В результате получим, что производные $y^{(i)}$ выражаются через функцию z и ее производные не выше $i-1$. Следовательно, в результате замены получим уравнение вида

$$\Phi(y, z, \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

   Если функция $z(y) = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1})$ — общее решение этого уравнения, то, сделав обратную замену, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = \varphi(y, C_1, \ldots, C_{n-1}).$$

4. **Уравнения однородные относительно неизвестной функции и ее производных.**

• *Функция* $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ *называется* ***однородной*** *относительно* $y, y', \dots, y^{(n)}$, *если*

$$F(x, py, py', \dots, py^{(n)}) = p^m \cdot F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Соответственно уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ *называется* ***однородным***.

Порядок однородного уравнения может быть понижен заменой

$$\frac{y'}{y} = z(x) \Rightarrow y' = y \cdot z(x).$$

Тогда

$$y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = (z' + z^2) \cdot y;$$

$$y''' = (z'' + 2zz') \cdot y + (z' + z^2) \cdot y \cdot z = (z'' + 3zz' + z^3) \cdot y.$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим, что

$$y^{(k)} = (z, z', \dots, z^{(k-1)}).$$

Выполнив эту замену, получим

$$F(x, y, \varphi_1(z) \cdot y, \varphi_2(z, z') \cdot y, \dots, \varphi_n(z, z', \dots, z^{(n-1)}) \cdot y) = 0.$$

Можем вынести y за функцию, тогда

$$y^m \cdot F(x, 1, \varphi_1(z), \varphi_2(z, z'), \dots, \varphi_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Отдельно рассмотрев ситуацию $y = 0$, можем сократить на y. Тогда получим новое уравнение с неизвестной функцией z порядка $(n-1)$:

$$F(x, 1, \varphi_1(z), \varphi_2(z, z'), \dots, \varphi_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

5. **Обобщенное однородное уравнение.**

• *Уравнение* $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ *называется* ***обобщенным однородным уравнением***, *если для функции* F *выполняется соотношение*

$$F(px, p^ky, p^{k-1}y', \dots, p^{k-n}y^{(n)}) = p^m \cdot F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Выполним замену неизвестной функции и независимой переменной следующим образом

$$x = e^t, \quad y = z \cdot e^{kt}.$$

Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = (z'e^{kt} + kze^{kt}) \cdot e^{-t} = (z' + kz) \cdot e^{(k-1)t}.$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \Big((z'' + kz') \cdot e^{(k-1)t} + (z' + kz) \cdot (k-1) \cdot e^{(k-1)t}\Big) \cdot e^{-t} =$$

$$= \Big(z'' + (2k-1) \cdot z' + k \cdot (k-1) \cdot z'\Big) \cdot e^{(k-2)t}.$$

$$y''' = (z''' + \ldots) \cdot e^{(k-3)t}.$$

Подставив эти замены в уравнение, получим

$$F(e^t, ze^{kt}, (z' + kz)e^{(k-1)t}, (z'' + \ldots)e^{(k-2)t}, \ldots, (z^{(n)} + \ldots)e^{(k-n)t}) = 0.$$

$$p^m \cdot F(1, z, z' + kz, z'' + \ldots, \ldots, z^{(n)} + \ldots) = 0.$$

Получим уравнение, в котором не содержится независимой переменной. Порядок этого уравнения может быть понижен способом 3.

Глава 5

Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

5.1 Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = f(t), \tag{5.1.1}$$

где функции $a_i(t)$ непрерывны на некотором промежутке $\mathbb{I}$. Обозначим оператор дифференцирования

$$L_n = D^n + a_{n-1}(t) \cdot D^{n-1} + \ldots + a_1(t) \cdot D + a_0(t) \cdot D^0.$$

По теореме о существовании и единственности задача Коши

$$\begin{cases} L_n x = f(t), \\ x|_{t=t_0} = \xi_0, \\ x'|_{t=t_0} = \xi_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(n-1)}|_{t=t_0} = \xi_{n-1}. \end{cases}$$

имеет единственное решение, если функции $a_i(t)$ и $f(t)$ непрерывны. Введем некоторые утверждения, которые мы доказали ранее для стационарных линейных уравнений:

1. Множество решений линейного однородного уравнения n-го порядка является **векторным пространством**;

2. Если $x_1(t)$ — частное решение линейного неоднородного уравнения $L_n x = f(t)$, а U_o — множество решений линейного однородного уравнения с тем же оператором дифференцирования L_n, то множество решений линейного неоднородного уравнения имеет вид
$$\{x_1 + x \mid \forall x \in U_o\} = x_1 + U_o.$$

3. **Принцип суперпозиции.** Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — решения линейных неоднородных уравнений $L_n x = f_1(t)$ и $L_n x = f_2(t)$ соответственно с одним и тем же оператором L_n, то функция $x_1(t) + x_2(t)$ является решением линейного неоднородного уравнения $L_n x = f_1(t) + f_2(t)$.

Если известно общее решение линейного однородного уравнения $L_n x = 0$, то частное решение линейного неоднородного уравнения $L_n x = f(t)$ может быть найдено **методом Лагранжа**, или методом вариации произвольной постоянной.

5.1.1 Методы понижения порядка линейного уравнения.

Линейное однородное уравнение является однородным относительно неизвестной функции и ее производных. Следовательно, порядок уравнения может быть понижен заменой

$$\frac{x'}{x} = y(t).$$

Однако в результате замены уравнение, которое мы получим, не является линейным.

К примеру, рассмотрим уравнение

$$x'' + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = 0.$$

Сделаем замену $x' = xy(t)$. Тогда

$$x'' = x'y + xy' = xy^2 + xy'.$$

Подставим в уравнение и получим

$$x \cdot (y' + y^2) + a_1(t) \cdot xy + a_0(t) \cdot x = 0.$$

Сократим на x и получим уравнение Риккати

$$y' + y^2 + a_1(t) \cdot y + a_0(t) = 0.$$

Если известно ненулевое частное решение $x_1(t)$ линейного однородного уравнения $L_n x = 0$, то порядок уравнения может быть понижен заменой

$$z(t) = \left(\frac{x}{x_1}\right)'.$$

Выполним сначала замену $y = \dfrac{x}{x_1}$, то есть $x = x_1 y$. Тогда

$$x' = x_1' y + x_1 y'.$$

$$x'' = x_1'' y + x_1' y' + x_1' y' + x_1 y''.$$

Так как все выражения x и ее производных являются линейными относительно y и ее производных, то в результате замены получим уравнение вида

$$b_n(t) \cdot y^{(n)} + \ldots + b_1(t) \cdot y' + b_0(t) \cdot y = 0.$$

Так как $y = \dfrac{x}{x_1}$ и x_1 — решение исходного линейного уравнения, то функция $y_1 = \dfrac{x_1}{x_1} = 1$ является решением полученного уравнения. Подставив это частное решение в полученное уравнения, будем иметь $b_0 = 0$, и, следовательно, уравнение не содержит явно неизвестной функции $y(t)$. Выполнив замену $y' = z$, получим линейное уравнение $(n-1)$-го порядка

$$b_n(t) \cdot z^{(n-1)} + \ldots + b_1(t) \cdot z = 0. \tag{5.1.2}$$

Пусть $z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (5.1.2). Тогда система решений

$$x_1(t), x_1(t) \cdot \int\limits_{t_0}^{t} z_1(\tau) d\tau, \ldots, x_1(t) \cdot \int\limits_{t_0}^{t} z_{n-1}(\tau) d\tau$$

образует фундаментальную систему решений исходного уравнения. Так как $z = \left(\dfrac{x}{x_1}\right)'$, то

$$x = x_1(t) \cdot \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau.$$

Функция $x_1(t)$ является решением исходного уравнения, а функции $x_1(t) \cdot \int\limits_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau$ являются решениями исходного уравнения, так как получены в результате обратной замены.

Покажем, что они линейно независимые. Предположим противное: пусть существует нетривиальная линейная комбинация этих функций равная нулю

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_1(t) \cdot \int\limits_{t_0}^{t} z_1(\tau) d\tau + \ldots + \alpha_n x_1(t) \cdot \int\limits_{t_0}^{t} z_{n-1}(\tau) d\tau = 0.$$

Сократим это равенство на x_1 (так как $x_1 \neq 0$) и продифференцируем полученное равенство:

$$\alpha_2 z_1 + \ldots + \alpha_n z_{n-1} = 0.$$

Так как $z_1, \ldots, z_{n-1}$ — фундаментальная система решений уравнения (5.1.2), то эти функции линейно независимые, и, следовательно, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Подставив эти коэффициенты в исходную линейную комбинацию, получим, что и $\alpha_1 = 0$, что является противоречием с тем, что исходная линейная комбинация линейно зависимая. Таким образом, решив уравнение (5.1.2), получим фундаментальную систему решений исходного уравнения (5.1.1).

Если известно k линейно независимых частных решений $x_1(t), \ldots, x_k(t)$ однородного уравнения (5.1.1), причем $k < n$, то замена $z = \left(\dfrac{x}{x_1}\right)'$ приводит исходное уравнение к линейному уравнению (5.1.2), для которого функции $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)', \ldots, \left(\dfrac{x_k}{x_1}\right)'$ являются частными решениями уравнения (5.1.2). Причем эти частные решения также линейно независимые, так как в противном случае существует нетривиальная линейная комбинация

$$\alpha_1 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)' + \ldots + \alpha_{k-1} \left(\frac{x_k}{x_1}\right)' = 0.$$

В результате ее интегрирования получаем равенство

$$\alpha_1 \frac{x_2}{x_1} + \ldots + \alpha_{k-1} \frac{x_k}{x_1} = C;$$

$$\alpha_1 x_2 + \ldots + \alpha_{k-1} x_k - C x_1 = 0,$$

что является нетривиальной линейной комбинацией частных решений $x_1, \ldots, x_k$ — противоречие с их линейной независимостью.

Таким образом, полученное уравнение линейно и для него известно $(k-1)$ линейно независимое решение. А значит аналогично можно понизить порядок этого уравнения $(k-1)$ раз.

5.1.2 Приведение линейного уравнения n-ого порядка к линейному стационарному уравнению.

Запишем уравнение (5.1.1) через оператор дифференцирования

$$D^n x + a_{n-1}(t)\cdot D^{n-1}x + \ldots + a_1(t)\cdot Dx + a_0(t)\cdot x = f(t). \qquad (5.1.1)$$

Выполним в уравнении (5.1.1) замену независимой переменной $\tau = \varphi(t)$. Тогда

$$D_t x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = D_\tau x \cdot \varphi'(t),$$

$$D_t^2 x = \frac{d}{dt}(D_t x) = D_\tau^2 x\cdot\varphi'\cdot\varphi' + D_\tau x\cdot\varphi'',$$

$$D_t^3 x = \frac{d}{dt}(D_t^2 x) = D_\tau^3 x\cdot(\varphi')^3 + D_\tau^2 x\cdot 2\varphi'\cdot\varphi'' + D_\tau^2 x\cdot\varphi'\cdot\varphi'' + D_\tau x\cdot\varphi'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_t^n x = D_\tau^n x\cdot(\varphi')^n + \ldots + D_\tau x\cdot\varphi^{(n)}.$$

В результате такой замены получим уравнение

$$(\varphi')^n\cdot D^n x + \ldots + a_0(t)\cdot x = f(t).$$

Разделим его на $(\varphi')^n$:

$$D^n x + \ldots + \frac{a_0(t)}{(\varphi')^n}x = \frac{f(t)}{(\varphi')^n}.$$

Если в результате такой замены полученное уравнение является стационарным, то функция $\dfrac{a_0(t)}{(\varphi')^n}$ должна быть постоянной. Обозначим $\dfrac{a_0(t)}{(\varphi')^n} = \dfrac{1}{C^n}$. Тогда $(\varphi')^n = C^n a_0(t)$, тогда

$$\varphi' = C\sqrt[n]{a_0(t)} \Rightarrow \varphi(t) = C\cdot\Big(\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt[n]{a_0(t)}dt + D\Big).$$

Коэффициенты C и D можно выбрать произвольно с учетом $C \neq 0$. Таким образом, если уравнение (5.1.1) можно свести к уравнению с постоянными коэффициентами, то это можно сделать с помощью замены

$$\tau = C\cdot\Big(\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt[n]{a_0(t)}dt + D\Big).$$

5.2 Уравнения Эйлера.

• ***Уравнением Эйлера*** *называется линейное уравнение вида*

$$(t-\alpha)^n D^n x + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1}D^{n-1}x + \ldots + a_1(t-\alpha)Dx + a_0 x = f(t), \quad t\in\mathbb{I}, a_i\in\mathbb{R}. \quad (5.2.1)$$

Для уравнения (5.2.1) точка $t=\alpha$ является особой. Следовательно, $\forall t\in\mathbb{I}$ или $t>\alpha$, или $t<\alpha$. Рассмотрим первую ситуацию. Для второй рассуждения проводятся аналогично.

Разделим уравнение (5.2.1) на $(t-\alpha)^n$:

$$D^n x + \frac{a_{n-1}}{(t-\alpha)}D^{n-1}x + \ldots + \frac{a_1}{(t-\alpha)^{n-1}}Dx + \frac{a_0}{(t-\alpha)^n}x = \frac{f(t)}{(t-\alpha)^n}.$$

Выполним в этом уравнении замену независимой переменной

$$\tau = C\cdot\Big(\int\sqrt[n]{\frac{a_0}{(t-\alpha)^n}}dt\Big) = C\sqrt[n]{a_0}\cdot\Big(\int\frac{1}{(t-\alpha)}dt\Big) = C\sqrt[n]{a_0}\cdot(\ln(t-\alpha)+D).$$

Выберем $C = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_0}}$, $D = 0$. В результате получаем замену

$$\tau = \ln(t-\alpha) \Rightarrow t = \alpha + e^{\tau}.$$

Выполним эту замену. Для этого производные по t выразим через производные по τ.

$$D_t x = D_\tau x\cdot\frac{dt}{d\tau} = D_\tau x\cdot\frac{1}{t-\alpha} \Rightarrow D_\tau x = (t-\alpha)D_t x,$$

$$D_t^2 x = D_\tau^2 x\cdot\frac{1}{(t-\alpha)}\cdot\frac{1}{(t-\alpha)} + D_\tau x\cdot\frac{(-1)}{(t-\alpha)^2} = \frac{1}{(t-\alpha)^2}(D_\tau^2 x - D_\tau x) \Rightarrow (t-\alpha)^2 D_t^2 x = (D_\tau^2 x - D_\tau x),$$

$$\begin{aligned} D_t^3 x = -\frac{2}{(t-\alpha)^3}(D_\tau^2 x - D_\tau x) + \frac{1}{(t-\alpha)^2}(D_\tau^3 x - D_\tau^2 x)\frac{1}{(t-\alpha)} = \\ = \frac{1}{(t-\alpha)^3}(D_\tau^3 x - 3D_\tau^2 x + 2D_\tau x) \Rightarrow (t-\alpha)^3 D_t^3 x = D_\tau^3 x - 3D_\tau^2 x. \end{aligned}$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что функция $(t-\alpha)^k D_t^k x$ является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами функций $D_\tau^i x$. Тогда подставим эти выражения в уравнение (5.2.1) и получим уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$D_\tau^n x + b_{n-1}D_\tau^{n-1}x + \ldots + b_1 D_\tau x + b_0 x = f(\alpha + e^{\tau}) \tag{5.2.2}$$

Если уравнение (5.2.2) является однородным, то есть $f(t) = 0$, то для построения общего решения этого уравнения необходимо найти корни характеристического уравнения

$$\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0 = 0.$$

А это уравнение получено из уравнения (5.2.2) в результате подстановки $x = e^{\lambda t}$ с последующим сокращением на функцию $e^{\lambda t}$. Следовательно, это же уравнение можем получить после подстановки в уравнение (5.2.1) функции $x = e^{\lambda\ln(t-\alpha)}$ с последующим сокращением на $(t-\alpha)^{\lambda}$:

$$\begin{aligned} (t-\alpha)^n\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1)\cdot(t-\alpha)^{\lambda-n} + a_{n-1}(t-\alpha)^{n-1}\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot \\ \cdot(\lambda-n+2)\cdot(t-\alpha)^{\lambda-n+1} + \ldots + a_1\cdot(t-\alpha)\cdot\lambda\cdot(t-\alpha)^{\lambda-1} + a_0\cdot(t-\alpha)^{\lambda} = 0. \end{aligned}$$

• *Полученное уравнение называется* ***определяющим уравнением*** *для уравнения Эйлера.*

Определяющее уравнение (5.2.3) для уравнения Эйлера и характеристическое уравнение для уравнения (5.2.2) совпадают. Общим решением однородного уравнения (5.2.2) является линейная комбинация функций вида $\tau^m e^{\lambda t}$, $\tau^m e^{\gamma\tau}\cos(\beta\tau)$, $\tau^m e^{\gamma\tau}\sin(\beta\tau)$, где λ, $\gamma\pm\beta i$ — корни характеристического уравнения, m — целое неотрицательное число, не превосходящее кратности соответствующего корня. Выполним обратную замену и получим, что общее решение уравнения (5.2.1) является линейной комбинацией функций вида

$$(t-\alpha)^{\lambda}\cdot\ln^m(t-\alpha),\ (t-\alpha)^{\gamma}\cdot\ln^m(t-\alpha)\cdot\cos(\beta\ln(t-\alpha)),\ (t-\alpha)^{\gamma}\cdot\ln^m(t-\alpha)\cdot\sin(\beta\ln(t-\alpha)).$$

Если уравнения (5.2.1) и (5.2.2) являются неоднородными, то общее решение уравнения (5.2.2) может быть найдено по правилу Коши

$$x(\tau) = C_1\varphi_1(\tau) + \ldots + C_n\varphi_n(\tau) + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \varphi_n(\tau - u) \cdot f(u)du,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — фундаментальная система решений уравнения (5.2.2) нормированная при $\tau = 0$. Выполним обратную замену и получим общее решение исходного уравнения

$$x(t) = C_1\varphi_1(\ln(t-\alpha)) + \ldots + C_n\varphi_n(\ln(t-\alpha)) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_n(\ln(t-\alpha) - u) \cdot f(u)du.$$

5.3 Интегрирование линейных уравнений с помощью степенных рядов.

• *Функция $u(t)$ называется* ***голоморфной*** *на интервале $\mathbb{I}_0 = (t_0 - R; t_0 + R)$, где $t_0, R \in \mathbb{R}$, если она определена на $\mathbb{I}_0$ и представима в виде сходящегося на $\mathbb{I}_0$ степенного ряда*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t-t_0)^k.$$

Из свойств голоморфной функции следует, что линейная комбинация и производная голоморфных функций есть голоморфная функция.

Рассмотрим линейное уравнение

$$D^n x + a_{n-1}(t) \cdot D^{n-1}x + \ldots + a_1(t) \cdot Dx + a_0(t) \cdot x = f(t) \tag{5.3.1}$$

с голоморфными функциями $a_i(t)$ и $f(t)$.

• *Ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t-t_0)^k \tag{5.3.2}$$

называется ***формальным степенным рядом****, если о его сходимости не делается никаких предположений.*

• ***Формальным решением уравнения*** (5.3.1) *называется формальный степенной ряд, который после подстановки в уравнение* (5.3.1) *дает в обеих частях уравнения степенной ряд с равными соответствующими коэффициентами.*

Действия с формальными степенными рядами определяются по аналогии с действиями со сходящимися степенными рядами.

Теорема (о существовании формального решения)**.** *Для любых чисел $A_0, \ldots, A_{n-1}$ существуют однозначно определенные коэффициенты $A_n, A_{n+1}, \ldots$ такие, что ряд* (5.3.2) *является формальным решением уравнения* (5.3.1).

⧫ Доказательство проведем для случая $n = 2$. Для остальных случаев доказательно аналогично. Рассмотрим линейное уравнение

$$D^2x + p(t) \cdot Dx + q(t) \cdot x = f(t), \tag{5.3.1'}$$

где
$$p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t-t_0)^k,\quad q(t)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(t-t_0)^k,\quad f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t-t_0)^k.$$
Подставим в уравнение (5.3.1$'$) вместо x ряд формальный степенной ряд
$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_i(t-t_0)^i.$$
Тогда
$$Dx=\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot A_i(t-t_0)^{i-1}=[i-1=k]=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot A_{k+1}(t-t_0)^k.$$
$$D^2x=\sum_{i=2}^{\infty}i\cdot(i-1)\cdot A_i(t-t_0)^{i-2}=[i-2=k]=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot(k+2)\cdot A_{k+2}(t-t_0)^k.$$
Подставим и получим
$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot(k+2)\cdot A_{k+2}(t-t_0)^k+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t-t_0)^k\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot A_{k+1}(t-t_0)^k\Big)+$$
$$+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}q_k(t-t_0)^k\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{\infty}A_k(t-t_0)^k\Big)=f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t-t_0)^k.$$
Выпишем коэффициенты при соответствующих степенях $(t-t_0)$:
$$(t-t_0)^m:(m+2)\cdot(m+1)\cdot A_{m+2}+\sum_{i+j=m}p_i(j+1)\cdot A_{j+1}+\sum_{i+j=m}q_i\cdot A_j=f_m.$$
При $m=0$ получаем
$$2\cdot1\cdot A_2+p_0\cdot1\cdot A_1+q_0\cdot A_0=f_0\Rightarrow A_2=\frac{1}{2}\cdot(f_0-p_0A_1-q_0A_0).$$
При $m=1$ получаем
$$3\cdot2\cdot A_3+p_0\cdot2\cdot A_2+p_1\cdot1\cdot A_1+q_0\cdot A_1+q_1\cdot A_0=f_1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_3=\frac{1}{6}\cdot(f_1-2p_0A_2-(p_1+q_0)A_1-q_1A_0).$$
Подставив в это выражение вместо A_2 полученное ранее выражение A_2 через A_1 и A_0, получим, что коэффициент A_3 также выражается через A_1 и A_0. Продолжая аналогичным образом, можем получить, что все коэффициенты $A_3,A_4,\ldots$ выражаются через коэффициенты A_0 и A_1. ⊠

Теорема (о существовании голоморфного решения)**.** *Если уравнение* (5.3.1) *имеет голоморфные на* $\mathbb{I}_0$ *коэффициенты и неоднородность, то любое его формальное решение* (5.3.2) *сходится на* $\mathbb{I}_0$*, то есть является голоморфным решением.*

⧫ Без доказательства. ⊠

Так как значение функции $x(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k(t-t_0)^k$ и первых его производных при $t=t_0$ равно
$$x|_{t=t_0}=A_0,\ Dx|_{t=t_0}=1!\cdot A_1,\ D^2x|_{t=t_0}=2!\cdot A_2,\ \ldots,\ D^{n-1}x|_{t=t_0}=(n-1)!\cdot A_{n-1},$$
то решение задачи Коши с начальными условиями $D^ix|_{t=t_0}=\xi_i$, где $i=\overline{0,n-1}$ имеет голоморфное решение (5.3.2), где первые n коэффициентов равны $A_i=\dfrac{\xi}{i!}$, $i=\overline{0,n-1}$. Остальные же коэффициенты можно найти методом неопределенных коэффициентов.

5.4 Колеблющиеся решения.

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$D^2x + p(t)\cdot Dx + q(t)\cdot x = 0,\ t\in\mathbb{I}, \tag{5.4.1}$$

с непрерывными на $\mathbb{I}$ коэффициентами $p(t)$ и $q(t)$. Тогда по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши любая задача Коши для этого уравнения однозначно разрешима на $\mathbb{I}$. В частности, задача Коши с нулевыми начальными условиями $x|_{t=t_0}=0$, $Dx|_{t=t_0}=0$ имеет единственное нулевое решение.

Следовательно, если некоторое ненулевое решение $x(t)$ в некоторой точке $t_0\in\mathbb{I}$ принимает нулевое значение $x(t_0)=0$, то $Dx|_{t=t_0}\neq 0$. Следовательно, функция $x(t)$ при переходе через точку t_0 меняет знак.

• *Точка t_0 называется **нулем функции** $x(t)$, если $x(t_0)=0$.*

• *Ненулевое решение называется **колеблющимся** на промежутке $\mathbb{I}_0\subset\mathbb{I}$, если оно на этом промежутке имеет более одного нуля. В противном случае решение называется **неколеблющимся**.*

Теорема. *Любое ненулевое решение уравнения* (5.4.1) *не может иметь бесконечное количество нулей на любом отрезке* $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{I}$.

♦ От противного. Пусть существует ненулевое решение $x(t)$, имеющее на некотором отрезке $[\alpha,\beta]$ бесконечное количество нулей. Так как множество этих нулей ограничено, то из них можно выбрать сходящуюся последовательность $\{t_i\}$, причем

$$\lim_{i\to\infty} t_i = T\in[\alpha,\beta].$$

Так как $\forall i\ x(t_i)=0$, $x(t_{i+1})=0$ и функция $x(t)$ непрерывна и дифференцируема, то по теореме Ролля

$$\exists\tau_i\in(t_i;\ t_{i+1}) : Dx(\tau_i)=0.$$

При этом

$$\lim_{i\to\infty}\tau_i = T.$$

Так как функции $x(t)$ и $Dx(t)$ непрерывны, то

$$\lim_{i\to\infty} x(t_i) = x(T),\quad \lim_{i\to\infty} Dx(\tau_i) = Dx(T).$$

Но $\forall i\ x(t_i)=0$ и $Dx(\tau_i)=0$, следовательно, $x(T)=Dx(T)=0$. Тогда функция $x(t)$ является решением уравнения с нулевыми начальными условиями при $t=T$, следовательно, $x(t)\equiv 0$ — противоречие с условием теоремы (так как выбирали ненулевое решение). ⊠

Теорема (признак отсутствия колеблющихся решений)**.** *Если на промежутке $\mathbb{I}_0\subset\mathbb{I}$ функция $q(t)\leqslant 0$, то любое ненулевое решение уравнения* (5.4.1) *не является колеблющимся на $\mathbb{I}_0$.*

♦ От противного. Пусть существует колеблющееся решение $x(t)$ и t_0, t_1 — два последовательных нуля этого решения, $t_0, t_1\in\mathbb{I}$ и для определенности $t_0<t_1$. Следовательно, между точками t_0 и t_1 нет других нулей решения $x(t)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}\cdot x(t)\cdot Dx(t).$$

Тогда

$$D\varphi = e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \cdot p(t) \cdot x(t) \cdot Dx(t) + e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \cdot ((Dx)^2 + xD^2x) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \cdot (pxDx + (Dx)^2 + xD^2x) =$$
$$= e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \cdot (x \cdot (pDx + D^2x) + (Dx)^2) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \cdot ((Dx)^2 - qx^2).$$

Так как $q(t) \leqslant 0$, то $D\varphi(t) \geqslant 0$ $\forall t \in [t_0;\ t_1]$. Следовательно, функция $D\varphi(t)$ на этом отрезке неубывающая, причем $D\varphi(t_0) = D\varphi(t_1) = 0$, так как t_0 и t_1 — нули решения $x(t)$. Тогда $\varphi(t) \equiv 0$ $\forall t \in [t_0;\ t_1]$, а следовательно и $Dx(t) \equiv 0$ $\forall t \in (t_0;\ t_1)$.

А так как функция Dx непрерывна, то она принимает нулевое значение и на концах этого множества, в частности $x(t_0) = 0$. Следовательно, функция $x(t)$ является решением задачи Коши с нулевыми начальными условиями при $t = t_0$, следовательно, $x(t) \equiv 0$ — противоречие с условием теоремы. ⊠

Лемма. *Если 2 решения уравнения* (5.4.1) *обращаются в нуль в некоторой точке* $t_0 \in \mathbb{I}$, *то эти решения линейно зависимые.*

♦ Если решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ уравнения (5.4.1) принимают в точке t_0 нулевые значения, то их вронскиан

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ Dx_1(t) & Dx_2(t) \end{vmatrix} = x_1Dx_2 - x_2Dx_1 = 0.$$

Следовательно, функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно зависимые. ⊠

Теорема (Штурма)**.** *Если* t_1 *и* t_2 *— два последовательных нуля решения* $x_1(t)$, *то для любого линейно независимого с* x_1 *решения* x_2 *в интервале* $(t_1;\ t_2)$ *существует ровно один нуль.*

♦

1. Существование.

   Так как решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейно независимые, то их вронскиан $W(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{I}$. Следовательно,

   $$W(t_i) = x_1(t_i) \cdot Dx_2(t_i) - x_2(t_i) \cdot Dx_1(t_i) = 0 - x_2(t_i) \cdot Dx_1(t_i) \neq 0, \quad \forall i = 1, 2.$$

   Следовательно, $x_2(t_1) \neq 0$ и $x_2(t_2) \neq 0$. То есть если решение $x_2(t)$ не имеет на интервале $(t_1;\ t_2)$ нуля, то функция $x_2(t)$ на этом интервале является знакопостоянной.

   Тогда $\forall t \in (t_1;\ t_2)$

   $$\frac{W(t)}{x_2^2} = \frac{x_1Dx_2 - x_2Dx_1}{x_2^2} = -D\Big(\frac{x_1}{x_2}\Big) \Rightarrow \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{W(t)}{x_2^2}dt = -\int\limits_{t_1}^{t_2} D\Big(\frac{x_1}{x_2}\Big)dt =$$
   $$= -\frac{x_1}{x_2}\Big|_{t_1}^{t_2} = -\frac{x_1(t_2)}{x_2(t_2)} + \frac{x_1(t_1)}{x_2(t_1)} = 0.$$

   Но, с другой стороны, функция $x_2(t)$ знакопостоянная и функция $W(t)$ также знакопостоянная, так как на промежутке $\mathbb{I}$ не равна нулю. Следовательно, $\int\limits_{t_1}^{t_2} \dfrac{W(t)}{x_2^2(t)} \neq 0$, что является противоречием. Значит между точками t_1 и t_2 существует нуль решения x_2.

2. Единственность.

   Если предположить, что этих нулей 2, то, поменяв ролями решения x_1 и x_2, получим, что между этими нулями должен существовать нуль решения x_1, что является противоречием с тем, что t_1 и t_2 — два соседних нуля для решения x_1.

$\boxtimes$

Следствие. *Если на некотором интервале* $\mathbb{I}_0 \subset \mathbb{I}$ *какое-либо ненулевое решение уравнения* (5.4.1) *имеет более 2 нулей, то все решения уравнения* (5.4.1) *являются колеблющимися.*

• *Линейное однородное уравнение второго порядка называется* ***каноническим****, если* $p(t) \equiv 0$*, то есть оно имеет вид*

$$D^2x + Q(t)x = 0. \tag{5.4.2}$$

Упростим уравнение (5.4.1), выполнив замену $x(t) = u(t)\cdot y(t)$ с новой неизвестной функцией $y(t)$, где $u(t)$ подберем так, чтобы полученное уравнение было каноническим. Подставим эту замену в уравнение (5.4.1):

$$Dx = Duy + uDy;$$

$$D^2x = D^2uy + 2DuDy + uD^2y;$$

$$D^2uy + 2DuDy + uD^2y + p(Duy + uDy) + quy = 0;$$

$$uD^2y + Dy(2Du + pu) + y(D^2u + pDu + qu) = 0.$$

Подберем u так, чтобы выполнялось $2Du + pu = 0$.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}pu \Rightarrow u = Ce^{-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}.$$

Выберем функцию

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}.$$

Тогда

$$x(t) = y(t)\cdot e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau},$$

и

$$Q(t) = \frac{D^2u + pDu + qu}{u} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} Du = -\frac{1}{2}p(t)\cdot e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}, \\ D^2u = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot p(t)\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot p(t) + e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdot Dp \end{array}\right] =$$

$$= \frac{p^2}{4} - \frac{1}{2}Dp + p^2\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big) + q = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}Dp.$$

Если функция p непрерывно дифференцируема, а q непрерывна, то в результате замены получим каноническое уравнение (5.4.2) с непрерывной функцией $Q(t)$. Причем, так как $u(t) \neq 0$, то расположение нулей решения уравнения (5.4.1) будет иметь один и тот же характер.

Теорема (сравнения)**.** *Рассмотрим 2 канонических уравнения*

$$D^2x + Q_1(t)x = 0, \tag{5.4.3}$$

$$D^2y + Q_2(t)y = 0 \tag{5.4.4}$$

с непрерывными коэффициентами Q_1 и Q_2. Если $Q_1(t) \leqslant Q_2(t)$ $\forall t \in \mathbb{I}$, причем равенство возможно лишь в отдельных точках промежутка $\mathbb{I}$, то между двумя соседними нулями t_1 и t_2 решения $x(t)$ уравнения (5.4.3) *лежит по крайней мере один нуль любого ненулевого решения $y(t)$ уравнения* (5.4.4).

♦ Пусть t_1 и t_2 — 2 последовательных нуля некоторого решения $x(t)$ уравнения (5.4.3). Предположим противное. Пусть существует решение $y(t)$ уравнения (5.4.4), которое на интервале $(t_1;\ t_2)$ не имеет нулей. Тогда на этом интервале функции $x(t)$ и $y(t)$ знакопостоянные.

Без ограничения общности будем считать, что $x(t) \geqslant 0$, $y(t) > 0$. В противном случае можем рассмотреть функции $-x(t)$ и $-y(t)$ имеющие те же нули. Тогда $Dx(t_1) > 0$, $Dx(t_2) < 0$, а $y(t) \geqslant 0$ на $[t_1;\ t_2]$.

Так как $x(t)$ и $y(t)$ — решения уравнений (5.4.3) и (5.4.4) соответственно, то

$$D^2x = -Q_1(t)x,$$

$$D^2y = -Q_2(t)y.$$

Домножим первое уравнение на y, а второе на x. Затем вычтем из получившегося первого уравнения второе и получим

$$yD^2x - xD^2y = xy(Q_2 - Q_1).$$

Заметим, что функция $yD^2x - xD^2y$ является полной производной функции $yDx - xDy$, так как
$$D(yDx - xDy) = DyDx + yD^2x - DxDy - xD^2y.$$

Следовательно,
$$D(yDx - xDy) = (Q_2 - Q_1)xy.$$

Проинтегрируем обе части по t и получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}(Q_2 - Q_1)xydt = \int\limits_{t_1}^{t_2} D(yDx - xDy)dt = (yDx - xDy)\Big|_{t_1}^{t_2} =$$
$$= y(t_2)Dx(t_2) - x(t_2)Dy(t_2) - y(t_1)Dx(t_1) + x(t_1)Dy(t_1) = y(t_2)Dx(t_2) - y(t_1)Dx(t_1) \leqslant 0.$$

Но с другой стороны функция $(Q_2 - Q_1)xy$ на отрезке $[t_1;\ t_2]$ неотрицательна, непрерывна и не равна тождественно нулю. Следовательно, $\int\limits_{t_1}^{t_2}(Q_2 - Q_1)xydt > 0$ — противоречие. ⊠

Следствие. *Пусть $Q_1(t) \leqslant Q_2(t)$ не некотором интервале $\mathbb{I}$. Причем равенство возможно в отдельных промежутках. Если t_0 — общий нуль решений $x(t)$ и $y(t)$ уравнений* (5.4.3) *и* (5.4.4) *соответственно, то ближайший к t_0 справа (слева) нуль решения $y(t)$ расположен ближе, чем нуль решения $x(t)$.*

Следствие. *Если для функции $Q(t)$ существуют числа $m, M \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$0 < m \leqslant Q(t) \leqslant M \quad \forall t \in \mathbb{I} = (\alpha;\ +\infty),$$

то все решения уравнения являются на $\mathbb{I}$ колеблющимися. Причем расстояние $T_i = t_{i+1} - t_i$ между двумя соседними нулями произвольного решения удовлетворяет неравенству

$$\frac{2\pi}{\sqrt{M}} \leqslant T_i \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{m}}.$$

⧫ Рассмотрим линейное уравнение

$$D^2x + mx = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1\cos(\sqrt{m}t) + C_2\sin(\sqrt{m}t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\sin(\varphi + \sqrt{m}t),$$

где φ определяется коэффициентами C_1 и C_2.

Следовательно, все решения этого уравнения периодические. Их период равен $\dfrac{2\pi}{\sqrt{m}}$, а расстояние между нулями равно $\dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$.

По теореме сравнения все решения уравнения (5.4.2) колеблющиеся и между двумя соседними нулями решения $x(t)$ будет существовать по крайней мере 1 нуль решения уравнения (5.4.2).

Следовательно, расстояние между двумя соседними нулями решения $y(t)$ не превосходят $\dfrac{2\pi}{\sqrt{m}}$.

Неравенство $\dfrac{2\pi}{\sqrt{M}} \leqslant T_i$ доказывается аналогично. ⊠

Глава 6

Системы дифференциальных уравнений.

6.1 Нелинейные системы. Первые интегралы систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} Dx_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ Dx_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dx_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Или

$$Dx = f(t, x),$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}$$

с непрерывными функциями f_i в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Так как функции f_i непрерывны в D, то через любую точку $(t_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in D$ проходит по крайней мере 1 решение системы (6.1.1).

Если при этом функции f_i имеют непрерывные частные производные по всем x_i, то такое решение в окрестности этой точки будет одно.

• *Дифференцируемая функция* $\Phi(t, x_1, \dots, x_n) \not\equiv const$ *называется* ***первым интегралом*** *системы* (6.1.1)*, если оно принимает постоянное значение вдоль любого решения этой системы. То есть для любого решения* $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$$\Phi(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = C - const.$$

Часто первым интегралом также называют равенство $\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = C$, где C — произвольная постоянная из области допустимых значений, то есть тех значений, которые может принимать функция Φ в области D.

Теорема (о первом интеграле)**.** *Дифференцируемая функция* $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ *является первым интегралом системы* (6.1.1) $\Longleftrightarrow$ *ее производная по* t *в силу системы равна нулю для любой точки* $(t, x_1, \ldots, x_n) \in D$*, то есть*

$$\frac{d\Phi(t,x)}{dt}\Big|_{(6.1.1)} = \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x_1} f_1(t,x) + \ldots + \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x_n} f_n(t,x) = 0. \tag{6.1.2}$$

♦ $\Rightarrow$) Так как функция $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ является первым интегралом системы (6.1.1), то для любого решения $x(t)$

$$\Phi(t,x) = C.$$

Продифференцируем это равенство по t:

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t} = 0.$$

Так как $x(t)$ — решение системы (6.1.1), то

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(t, x(t)).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x_1} f_1(t,x) + \ldots + \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x_n} f_n(t,x) = 0.$$

Тогда равенство (6.1.2) выполняется для любой точки из области D, лежащей на произвольном решении системы (6.1.1). Так как функции f_i непрерывны, то через любую точку области D проходит решение системы (6.1.1). Следовательно, равенство (6.1.2) справедливо для любой точки из D.

$\Leftarrow$) Пусть равенство (6.1.2) справедливо для любой точки из D. Следовательно, оно будет справедливо для любой точки $(t, x_1, \ldots, x_n) \in D$, лежащей на некоторых решениях $x_1(t), \ldots, x_n(t)$. Но в этой точке

$$f_i(t, x(t)) = \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Phi(t,x(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t,x(t))}{\partial x_1} f_1(t,x(t)) + \ldots + \frac{\partial \Phi(t,x(t))}{\partial x_n} f_n(t,x(t)) =$$
$$= \frac{\partial \Phi(t,x(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t,x(t))}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial \Phi(t,x(t))}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t} = 0.$$

Тогда

$$\frac{d\Phi(t,x(t))}{dt} = 0 \Rightarrow \Phi(t, x(t)) = const$$

для любого решения $x(t)$. Тогда функция Φ — первый интеграл системы (6.1.1). ⊠

• *Система функций* $\varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, \varphi_k(t_1, \ldots, t_n)$ *называется* ***функционально зависимой****, если существует функция* $\Phi(u_1, \ldots, u_k)$ *такая, что*

$$\Phi(\varphi_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, \varphi_k(t_1, \ldots, t_n)) = 0 \quad \forall t_i.$$

В противном случае — ***функционально независимой****.*

Если матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right)$, то есть матрица составленная из частных производных по всем переменным, имеет ранг r, то среди функций φ_i существует r функций функционально независимых, через которые выражаются остальные $k-r$ функций. Следовательно, k функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ функционально независимы $\Longleftrightarrow$ ранг матрицы Якоби равен k, то есть $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) = k$.

Теорема. *Совокупность первых интегралов системы* (6.1.1)

$$\Phi_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_k(t, x_1, \ldots, x_n)$$

функционально независима $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right) = k.$

♦ $\Rightarrow$) Так как функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ независимы, то ранг матрицы Якоби этой системы равен k, то есть

$$\operatorname{rank} \mathcal{I} = \operatorname{rank} \left(\begin{array}{ccc|c} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial t} \end{array}\right) = k.$$

Так как функции Φ_i являются первыми интегралами системы (6.1.1), то по теореме о первом интеграле

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \cdot f_1 + \ldots + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \cdot f_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} \cdot f_1 + \ldots + \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_n} \cdot f_n = 0. \end{cases}$$

Следовательно, система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \cdot y_1 + \ldots + \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \cdot y_n = -\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} \cdot y_1 + \ldots + \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial x_n} \cdot y_n = -\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial t}. \end{cases}$$

имеет решения $(y_1, \ldots, y_n) = (f_1, \ldots, f_n)$, то есть система совместна. Следовательно, по критерию совместности линейных систем ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, то есть

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right) = \operatorname{rank} \mathcal{I} = k.$$

$\Leftarrow$) Если $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right) = k$, то ранг матрицы Якоби также равен k, то есть $\operatorname{rank} \mathcal{I} = k$. Следовательно, функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ функционально независимы. ⊠

Следствие. *Система* (6.1.1) *не может иметь более* n *функционально независимых первых интегралов.*

♦ Матрица $\left(\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right)$ имеет ровно n столбцов. ⊠

Следствие. *Если система* (6.1.1) *имеет ровно n функционально независимых первых интегралов* $\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, *то* $\forall \Phi(t, x_1, \ldots, x_n)\ \exists H(u_1, \ldots, u_n)$:

$$\Phi(t, x_1, \ldots, x_n) = H(\Phi_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_n(t, x_1, \ldots, x_n)).$$

♦ По следствию (6.1.1) система $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi$ является функционально зависимой и при этом функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ функционально независимы. Следовательно, первый интеграл Φ выражается функционально через $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. ⊠

• *Функционально независимая система из n первых интегралов системы* (6.1.1) *называется* ***базисом первых интегралов***.

6.2 Интегрирование систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{6.2.1}$$

где функции f_i непрерывные на области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Методы интегрирования систем дифференциальных уравнений.

1. **Сведение системы (6.2.1) к уравнению (или системе уравнений) с одной неизвестной.**

   Продифференцируем одно из уравнений системы $(n-1)$ раз по t, считая x_i функциями от t, то есть $x_i = x_i(t)$, и заменим при каждом дифференцировании функции x_i' на f_i. В результате получим систему вида (если, например, дифференцируем первое уравнение)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^nx_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

   Если матрица частных производных $\left(\dfrac{D(f_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\right)$ является невырожденной, то из первых $(n-1)$-го уравнений можно выразить переменные $x_2, \ldots, x_n$ через $t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n)}$. Подставим их в последнее уравнение и получим выражение вида

$$\frac{d^nx_1}{dt^n} = G(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n)}).$$

2. **Редукция системы дифференциальных уравнений** (то есть уменьшение порядка системы с сохранением линейности).

Если известен первый интеграл системы, то порядок системы может быть понижен на 1 с сохранением нормальной формы. Пусть

$$\Phi(t, x_1, \ldots, x_n) = C \tag{6.2.2}$$

— первый интеграл системы (6.2.1). Если все частные производные $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$, то $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n) = \Phi(t)$. Следовательно, функция $\Phi(t)$ может быть постоянна вдоль решений системы, если она постоянна, то есть если $\Phi(t) = C$, — противоречие с тем, что Φ — первый интеграл системы (6.2.1).

Таким образом, $\exists \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} \neq 0$, следовательно, одну из переменных x_i можно выразить из равенства (6.2.2) через t и остальные переменные x_i. Например, если $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} \neq 0$, то можно выразить $x_1 = \varphi(t, x_2, \ldots, x_n, C)$. Подставив это выражение x_1 в систему (6.2.1) во все уравнения кроме первого, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, \varphi(t, x_2, \ldots, x_n, C), x_2, \ldots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, \varphi(t, x_2, \ldots, x_n, C), x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

состоящую из $(n-1)$-го уравнения с $(n-1)$-ой неизвестной функцией в нормальной форме. Если эта система имеет решения $x_2(t), \ldots, x_n(t)$, то функции

$$\varphi(t, x_2(t), \ldots, x_n(t)), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

являются решениями исходной системы (6.2.1).

Если известно k $(k > n)$ первых интегралов

$$\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_n) = C_i, \quad i = \overline{1, k}, \tag{6.2.3}$$

то

$$\operatorname{rank} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right) = k.$$

Следовательно, существует базисный минор этой матрицы k-го порядка. Если он расположен, например, в первых k столбцах, то есть матрица $\left(\dfrac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)} \right)$ невырожденная, то по теореме о неявной функции из системы равенств (6.2.3) можно выразить переменные $x_1, \ldots, x_k$ через $t, x_{k+1}, \ldots, x_n, C_1, \ldots, C_k$. Подставив эти выражения в систему (6.2.1), понизим порядок системы на k.

Если известно n независимых первых интегралов Φ_i, то решение системы (6.2.1) сведется к решению системы алгебраических уравнений относительно x_i

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_n(t, x_1, \ldots, x_n) = C_n. \end{cases} \tag{6.2.4}$$

В результате получим общее решение исходной системы (6.2.1).

• *Система* (6.2.4) *называется* ***общим интегралом*** *системы* (6.2.1).

При построении первых интегралов системы (6.2.1) часто удобно использовать *метод интегрируемых комбинаций.* Если в результате преобразования уравнений системы (6.2.1) можно получить уравнение, которое можно проинтегрировать, то такое уравнение называется **интегрируемой комбинацией**.

Иногда интегрируемые комбинации строить легче, если система (6.2.1) записана в симметрической форме.

• ***Системой дифференциальных уравнений в симметрической форме*** *называется совокупность выражений вида*

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1,\ldots,x_n)}, \tag{6.2.5}$$

где функции f_i не обращаются в нуль одновременно в области D.

Система (6.2.1) в симметрическом виде записывается следующим образом

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{dt}{t}.$$

И наоборот система (6.2.5) в нормальном виде может быть записана как

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n} = \dfrac{f_1(x_1,\ldots,x_n)}{f_n(x_1,\ldots,x_n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} = \dfrac{f_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_n(x_1,\ldots,x_n)}. \end{cases}$$

То есть система (6.2.5) — это система из $(n-1)$-го уравнений. При составлении интегрируемых комбинаций часто пользуются свойством пропорций

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}\ \forall k_1, k_2 \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{k_1a_1 + k_2a_2}{k_1b_1 + k_2b_2}.$$

6.3 Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными.

• ***Дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка*** *называется уравнение вида*

$$F(x_1,\ldots,x_n,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, \tag{6.3.1}$$

где $x_1,\ldots,x_n$ — независимые переменные, $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ — неизвестная функция, F — некоторая функция своих $2n$ аргументов.

• *Функция $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ называется* ***решением уравнения*** (6.3.1) *в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема в D и обращает уравнение в верное равенство.*

• ***Линейным однородным уравнением с частными производными первого порядка*** *называется уравнение вида*

$$f_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+f_2(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+f_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \tag{6.3.2}$$

где функции f_i определены, непрерывны и не обращаются одновременно в нуль в некоторой окрестности $D\subseteq\mathbb{R}^n$.

Далее для компактности иногда будем записывать $x=(x_1,\dots,x_n)$.

Уравнение вида (6.3.2) всегда имеет решение вида

$$u\equiv C,$$

где C — некоторая произвольная постоянная.

• *Такие решения называются **тривиальными**.*

Теорема. *Дифференцируемая не постоянная функция $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ является решением уравнения (6.3.2) $\Longleftrightarrow$ она является первым интегралом системы*

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{f_2(x_1,\dots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{f_n(x_1,\dots,x_n)}. \tag{6.3.3}$$

♦ $\Rightarrow$) Пусть функция $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ — решение уравнения (6.3.2). Найдем производную этой функции в силу системы (6.3.3) по одной из переменных. Например, если $f_1(x_1,\dots,x_n)\neq 0$, то найдем производную по x_1. Для этого системы (6.3.3) запишем в нормальном виде

$$\begin{cases}\dfrac{dx_2}{dx_1}=\dfrac{f_2(x_1,\dots,x_n)}{f_1(x_1,\dots,x_n)},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{dx_n}{dx_1}=\dfrac{f_n(x_1,\dots,x_n)}{f_1(x_1,\dots,x_n)}.\end{cases} \tag{6.3.3$'$}$$

Тогда

$$\left.\frac{d\Phi}{dx_1}\right|_{(6.3.3')}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\cdot\frac{f_2}{f_1}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\cdot\frac{f_n}{f_1}=\frac{1}{f_1}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\cdot f_1+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\cdot f_2+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\cdot f_n\right)}_{=0,\text{т.к. }\Phi\text{ — решение уравнения (6.3.2)}}=0.$$

Следовательно, по теореме о первом интеграле функция Φ является первым интегралом системы (6.3.3).

$\Leftarrow$) Если функция $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ — первый интеграл системы (6.3.3), то по теореме о первом интеграле ее производная по x_1 в силу системы (6.3.3) равна нулю, то есть

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\cdot\frac{f_2}{f_1}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\cdot\frac{f_n}{f_1}=0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{f_1}\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\cdot f_1+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\cdot f_2+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\cdot f_n\right)=0,$$

причем $\dfrac{1}{f_1} \neq 0$, тогда

$$\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \cdot f_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \cdot f_n\Big) = 0,$$

следовательно, функция Φ является решением уравнения (6.3.2). ⊠

Следствие. *Если функции* $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$ *— базис первых интегралов системы* (6.3.3), *то все решения уравнения* (6.3.3) *имеют вид*

$$u = H(\Phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)), \tag{6.3.4}$$

где H *— произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.*

• *Равенство* (6.3.4) *называется* ***общим решением*** *уравнения* (6.3.2).

Задача Коши для линейного однородного уравнения с частными производными (6.3.2) имеет вид

$$u|_{x_i=a} = \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Для удобства будем рассматривать начальные условия вида

$$u|_{x_n=a} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Пусть $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$ — базис первых интегралов системы (6.3.3). Обозначим через $y_1, \ldots, y_{n-1}$ следующие функции:

$$\begin{cases} y_1 = \Phi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, a), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = \Phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, a). \end{cases}$$

Выразим из этой системы переменные $x_1, \ldots, x_{n-1}$ через $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Это возможно сделать в окрестности некоторой точки, если $f_n \neq 0$. В этом случае матрица частных производных правых частей последних равенств невырожденная. В результате получим равенства

$$\begin{cases} x_1 = v_1(y_1, \ldots, y_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = v_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}). \end{cases}$$

Тогда функция

$$u = \varphi\Big(v_1\big(\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{n-1}(x)\big), \ldots, v_{n-1}\big(\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{n-1}(x)\big)\Big)$$

является решением исходной задачи Коши. Так как она является функцией от первых интегралов системы (6.3.3), значит она и решение уравнения (6.3.2). При этом

$$u|_{x_n=a} = \varphi\Big(\underbrace{v_1\big(\underbrace{\Phi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, a)}_{y_1}, \ldots, \underbrace{\Phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, a)}_{y_n}\big)}_{x_1}, \ldots,$$

$$\underbrace{v_{n-1}\big(\underbrace{\Phi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, a)}_{y_1}, \ldots, \underbrace{\Phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, a)}_{y_n}\big)}_{y_{n-1}}\Big) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

• ***Квазилинейным уравнением с частными производными первого порядка*** *называется уравнение вида*

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+f_2(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+f_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=g(x_1,\ldots,x_n,u). \tag{6.3.5}$$

Теорема. *Если функция $\Phi(x_1,\ldots,x_n,u)$ является решением уравнения*

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+f_2(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_2}+\ldots+f_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_n}+g(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0, \tag{6.3.6}$$

то функция $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, удовлетворяющая соотношению

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n,\varphi(x_1,\ldots,x_n))=0, \tag{6.3.7}$$

является решением уравнения (6.3.5).

⧫ Продифференцируем равенство (6.3.7) по каждой переменной

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0,\quad \forall i=\overline{1,n}.$$

Умножим каждое из равенств на $f_i(x,u)$ и сложим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\cdot f_i(x,u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot f_i(x,u)=0.$$

Функция Φ является решением уравнения (6.3.6), следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\cdot f_i(x,u)+g\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial u}=0.$$

Подставим полученное равенство в предыдущее и получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot f_i(x,u)=g\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial u}.$$

Подставим в получившееся равенство вместо u функцию $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(x,\varphi)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot f_i(x,\varphi)=g(x,\varphi)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}.$$

Следовательно, функция φ является решением уравнения (6.3.5). ⊠

Из теоремы следует, что если функция $\Phi(x_1,\ldots,x_n,u)$ есть решение уравнения (6.3.6), то равенство

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,u)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_1}+\ldots+f_n(x_1,\ldots,x_n,u)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_n}=0$$

является неявно заданным решением уравнения (6.3.5).

Так как уравнение (6.3.6) является линейным однородным, то его общее решение имеет вид

$$v=H(\Phi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\Phi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)),$$

где $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \Phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n, u)$ — базис первых интегралов системы, соответствующей уравнению (6.3.6), а H — произвольная дифференцируемая функция. Следовательно, равенство

$$H(\Phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \tag{6.3.8}$$

является неявно заданным решением уравнения (6.3.5).

• *Равенство* (6.3.8) *называется* ***общим решением*** *уравнения* (6.3.5).

Заметим, что в отличие от линейных однородных у квазилинейных уравнений могут существовать решения, которые не попадают в общее решение.

• *Такие решения называются* ***специальными***.

Подозрительными на специальные решения являются функции, в точках которых нарушается непрерывная дифференцируемость коэффициентов f_i уравнения (6.3.5).

Задача Коши для квазилинейного уравнения (6.3.5) имеет вид

$$u|_{x_n=a} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Пусть $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \Phi_n(x_1, \ldots, x_n, u)$ — базис первых интегралов системы, соответствующей уравнению (6.3.6). Введем обозначения

$$\begin{cases} y_1 = \Phi_1(x_1, \ldots, a, u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \Phi_n(x_1, \ldots, a, u). \end{cases}$$

Выразим из системы переменные $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и получим

$$\begin{cases} x_1 = v_1(y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = v_{n-1}(y_1, \ldots, y_n), \\ u = v_n(y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Отсюда получаем решение задачи Коши в неявно заданном виде:

$$\begin{aligned} &v_n(\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \Phi_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = \\ &= \varphi\Big(v_1\big(\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \Phi_n(x_1, \ldots, x_n, u)\big), \ldots, v_n\big(\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \Phi_n(x_1, \ldots, x_n, u)\big)\Big). \end{aligned}$$

6.4 Устойчивость решений дифференциальных систем.

Рассмотрим дифференциальную систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{6.4.1}$$

с определенным на полуоси $t \in \mathbb{I} = [t_0; +\infty)$ и непрерывными функциями f_i. Эту систему в векторной форме можно записать как

$$Dx = f(x,t), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Пусть векторная функция $f(t,x)$ обеспечивает единственность решения любой задачи Коши

$$\begin{cases} Dx = f(t,x), \\ x|_{t=t_0} = x_0 \end{cases}$$

и бесконечную продолжимость этого решения вправо.

• *Решение $x_0(t)$ системы* (6.4.1) *называется **устойчивым по Ляпунову**, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall x(t) \quad \|x(t_0) - x_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$$

($x(t)$ — произвольное решение системы (6.4.1)*). Если кроме того*

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t) - x_0(t)\| = 0,$$

*то решение называется **асимптотически устойчивым**. Если решение не является устойчивым, то оно называется **неустойчивым**.*

• *Система* (6.4.1) *называется **приведенной**, если $f(0,t) \equiv 0$.*

Приведенная система всегда имеет нулевое решение $x \equiv 0$.

Исследование устойчивости произвольного решения $x_0(t)$ системы (6.4.1) можно свести к исследованию устойчивости некоторого решения приведенной системы.

Для приведения системы выполним замену $y(t) = x(t) - x_0(t)$ (то есть $x(t) = y(t) + x_0(t)$). Подставим эту замену в систему и получим

$$Dy + \underbrace{Dx_0}_{=f(x_0,t)} = f(y + x_0, t).$$

Тогда

$$Dy = f(y + x_0, t) - f(x_0, t).$$

Обозначим $f(y + x_0, t) - f(x_0, t) = g(y,t)$. Таким образом, уравнение будет иметь вид

$$Dy = g(y,t),$$

причем оно является приведенным, так как

$$g(0,t) = f(0 + x_0, t) - f(x_0, t) = 0.$$

Заметим, что при замене решение $x_0(t)$ переходит в нулевое решение. Таким образом, в дальнейшем будем исследовать устойчивость нулевого решения приведенной системы.

• *Нулевое решение приведенной системы называется **устойчивым по Ляпунову**, если*

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \forall x(t) \quad \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0$$

($x(t)$ — произвольное решение системы).

• *Непрерывная функция $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется* ***положительно определенной*** *в окрестности u некоторой точки $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$, если $v(0) = 0$ и*

$$\forall x \in u, x \neq 0 \quad v(x) > 0.$$

Теорема (Ляпунова об устойчивости нулевого решения приведенной системы)**.** *Если существует функция $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ положительно определенная в некоторой окрестности u точки $O = (0, \ldots, 0)$ и при этом*

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot f_1(t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \cdot f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0 \quad \forall x \in u, t > t_0, \tag{6.4.2}$$

то нулевое решение системы (6.4.1) *устойчиво.*

Если кроме того существует положительно определенная в окрестности u функция $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot f_1(t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \cdot f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant -w \quad \forall x \in u, t > t_0,$$

то нулевое решение является асимптотически устойчивым.

♦ Для наглядности будем рассматривать двумерную систему (6.4.1).

1. Функция $v(x_1, x_2)$ в начале координат имеет минимум. И при этом эта функция является непрерывной в окрестности точки O. Следовательно, при достаточно малых C линии уровня $v(x_1, x_2) = C$ являются замкнутыми. Причем для любых точек внутри этой линии $v(x) < C$.

   Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует некоторая линия уровня $v(x_1, x_2) = C$, целиком содержащаяся в ε-окрестности начала координат, и δ-окрестность начала координат, целиком лежащая внутри линии уровня. Следовательно, для любой точки $x(t_0)$, лежащей внутри δ-окрестности, $v(x(t_0)) < C$. Вычислим производную функции $v(x(t))$ по t, где $x(t)$ — некоторое решение системы:

   $$\frac{dv(x(t))}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot f_1(t, x) + \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot f_2(t, x) \leqslant 0.$$

   Следовательно, функция $v(x(t))$ не возрастает, значит $v(x(t)) < C$, то есть все точки $x(t)$ (и всё решение $x(t)$ соответственно) лежат внутри линии уровня $v(x(t)) = C$, значит, и внутри ε-окрестности начала координат.

2. Если же выполняется второе условие теоремы, то функция $v(x(t))$ убывает. А так как она неотрицательна, то есть ограничена снизу, значит существует предел

   $$\lim_{t \to \infty} \underbrace{v(x(t))}_{\geqslant 0} = \alpha \geqslant 0.$$

   Покажем, что $\alpha = 0$. От противного. Пусть $\alpha > 0$. Тогда траектория решения $x(t)$ лежит в замкнутом множестве, ограниченном линиями $\|x\| = \varepsilon$ и $v(x) = \alpha$ (последняя — линия уровня).

Так как функция $w(x)$ является положительно определенной и непрерывной, то на этом множестве у нее существует положительный минимум. Обозначим его через β ($w(x) \geqslant \beta$). Тогда

$$\frac{dv(x(t))}{dt} \leqslant -\beta.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{dv(x(t))}{dt} dt \leqslant -\int\limits_{t_0}^{t} \beta dt.$$

$$v(x(t))\Big|_{t_0}^{t} \leqslant -\beta t\Big|_{t_0}^{t}.$$

$$v(x(t)) \leqslant -\beta(t - t_0) + \underbrace{v(x(t_0))}_{\in\mathbb{R}}.$$

Следовательно, переходя к пределу при $t \to +\infty$ функция справа будет стремиться к $-\infty$. Но значит и функция $v(x(t))$ тоже будет стремиться к $-\infty$, что противоречит положительной определенности функции v.

⊠

Следствие. *Если система* (6.4.1) *имеет положительно определенный стационарный (то есть не зависящий от t) первый интеграл, то нулевое решение приведенной системы* (6.4.1) *устойчиво.*

• *Положительно определенная функция $v(x)$, удовлетворяющая неравенству* (6.4.2), *называется* ***функцией Ляпунова*** *для системы* (6.4.1).

• *Если приведенная система имеет непрерывно дифференцируемые функции f_i, то линейная система*

$$Dx = A(t) \cdot x, \quad A(t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)\Big|_{x=0},$$

называется ***системой первого приближения*** *для системы* (6.4.1).

Теорема. *Если система первого приближения для приведенной системы* (6.4.1) *является стационарной и асимптотически устойчивой, то нулевое решение системы* (6.4.1) *асимптотически устойчиво. А если стационарной и неустойчивой, то нулевое решение неустойчиво.*