Определить АСТ

Условие

Определить алгебраическую степень точности указанной квадратурной формулы

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{4}\left(f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right)$$

Алгоритм решения

Для построения для решения понадобятся следующие соотношения. Если

$$\begin{cases} \int\limits_a^b \rho(x)x^i dx = \sum\limits_{k=0}^n A_k x_k^i, \quad i = \overline{0, m}, \\ \int\limits_a^b \rho(x)x^{m+1} dx \neq \sum\limits_{k=0}^n A_k x_k^i; \end{cases} \tag{1}$$

то в этом случае говорят, что квадратурная формула **имеет алгебраическую степень точности равную** $\boldsymbol{m}$.

Таким образом, для решения задачи необходимо строить по одному уравнению из соотношений (1) до тех пор, пока мы не получим неравенство.

Теперь обратим внимание на составляющие элементы формулы (1), а именно $\rho(x), A_k, x_k$. Квадратурная формула записывается в общем случае в виде

$$I(f) = \int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

Из условия следует, что $\rho(x) = 1$. Также из условия можно сделать вывод, что

$$A_0 = \frac{b-a}{4}, \quad A_1 = 3 \cdot \frac{b-a}{4}; \quad x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+2b}{3}.$$

Начнем записывать соотношения из (1). Возьмем $i = 0$, тогда

$$x^0 : \int\limits_a^b dx = A_0 + A_1.$$

Вычислим интеграл и подставим значения A_k, x_k

$$x^0 : b - a \stackrel{?}{=} \frac{b-a}{4} + 3 \cdot \frac{b-a}{4} = 4 \cdot \frac{b-a}{4}.$$

Равенство выполняется. Далее по аналогии берем $i = 1$:

$$x^1 : \int\limits_a^b x dx = A_0 x_0 + A_1 x_1.$$

Вычисляем значение интеграла и подставляем неизвестные:

$$x^1 : \frac{b^2 - a^2}{2} \stackrel{?}{=} \frac{b-a}{4}\left(a + 3 \cdot \frac{a+2b}{3}\right) = 2\frac{b^2 - a^2}{4}.$$

Равенство выполняется. Берем $i = 2$:

$$x^2 : \int\limits_a^b x^2 dx = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2.$$

$$x^2 : \frac{b^3 - a^3}{3} \stackrel{?}{=} \frac{b-a}{4}\left(a^2 + 3 \cdot \frac{(a+2b)^2}{9}\right) = \frac{b-a}{4} \cdot \left(\frac{4a^2 + 4ab + 4b^2}{3}\right) = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Равенство выполняется. Берем $i = 3$:

$$x^3 : \int\limits_a^b x^3 dx = A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3.$$

$$x^2 : \frac{b^4 - a^4}{4} \stackrel{?}{=} \frac{b-a}{4}\left(a^3 + 3 \cdot \frac{(a+2b)^3}{27}\right) = \frac{b-a}{4} \cdot \left(\frac{10a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3}{9}\right).$$

Отсюда уже видно, что равенство не выполняется, так как справа мы не получим как минимум $-\dfrac{1}{4}a^4$.

Таким образом, берем последнюю степень, на которой выполнялось равенство. Это $i = 2$. Тогда же и АСТ $= 2$.