Вариант 8

Найти электрический потенциал внутри сферического слоя при заданных диэлектрической проницаемости $\varepsilon = -1$, условиях на электрический потенциал на границах сферического слоя $u|_{r=1} = 297 sin^6(\theta) sin(6\varphi)$, $u|_{r=2} = cos^2(\theta) + cos(3\theta)$, если распределение зарядов изменяется по закону $\rho(r, \varphi, \theta) = r sin^3(\theta) sin(3\varphi)$.

Вар. 10. Борт 7гр.

Ищем реш-е в виде $u = v + w$

$$\begin{cases} \Delta v = r\sin^3\theta \sin 3\varphi \\ v|_{r=1} = v|_{r=2} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta v = r\sin^3\theta \sin 3\varphi = r\sin 3\varphi \sum_{n=0}^{\infty} B_{n3} P_n^{(3)}(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n3} P_n^{(3)}(\cos\theta) = \underbrace{\sin^3\theta}_{\deg(\cdot)=3}$$

$$\deg P_n^{(3)}(x) = \deg\left(\frac{(1-x^2)^{3/2}}{2^n \cdot n!} \frac{d^{n+3}}{dx^{n+3}}(x^2-1)^n\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 2 + 2n - (n+3) = n \leq 3 \Rightarrow$$

$$P_3^{(3)}(x) = 15(1-x^2)^{3/2} \Rightarrow$$

$$B_{33} \cdot 15(1-x^2)^{3/2} = (1-x^2)^{3/2} \Rightarrow B_{33} = \frac{1}{15} \Rightarrow$$

$$\Delta v = r \cdot \sin 3\varphi \cdot \frac{1}{15} P_3^{(3)}(\cos\theta)$$

Обозн. $Y_3^{(3)}(\varphi,\theta) = P_3^{(3)}(\cos\theta)\sin 3\varphi \Rightarrow$

ищем реш-е в виде

$$v(r,\varphi,\theta) = Z_1(r) \cdot Y_3^{(3)}(\varphi,\theta) \Rightarrow \text{подставим в ДУ}$$

$$\Delta v = \frac{Y_3^{(3)}(\varphi,\theta)}{r^2} \cdot (2r Z_1'(r) + r^2 Z_1''(r)) - \frac{Y_3^{(3)}(\varphi,\theta)\cdot Z_1(r)}{r^2} \cdot$$

$$\cdot 12 = \frac{1}{15} r\, Y_3^{(3)}(\varphi,\theta)$$

Тогда, приравнивая, получим

$$\begin{cases} r^2 Z_1''(r) + 2r Z_1'(r) - 12 Z_1(r) = \frac{r^3}{15} \\ Z_1(1) = 0 \\ Z_1(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Z_1^{oo}(r) = C_1 r^3 + C_2 r^{-4}$$

$$Z_1^{чн}(r) = A \cdot r^3 \ln r \Rightarrow \text{подставим}$$

$$r^2 (6rA\ln r + 3rA + 2Ar) + 2r(3r^2 A\ln r + Ar^2) -$$

$$- 12 Ar^3 \ln r = \frac{r^3}{15} \Rightarrow$$

$$5A + 2A = \frac{1}{15} \Rightarrow A = \frac{1}{105} \Rightarrow$$

$$Z_1(r) = C_1 r^3 + C_2 r^{-4} + \frac{r^3}{105} \ln r$$

$$\begin{cases} Z_1(1) = C_1 + C_2 + \cancel{\frac{1 \cdot 1}{105}} = 0 \\ Z_1(2) = C_1 2^3 + C_2 2^{-4} + \frac{2^3}{105} \ln 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_1 = -\frac{128 \ln 2}{13\,335}, \quad C_2 = \frac{128 \ln 2}{13\,335} \Rightarrow$$

$$Z_1(r) = -\frac{128 \ln 2}{13\,335} r^3 + \frac{128 \ln 2}{13\,335} r^{-4} + \frac{r^3}{105} \ln r \Rightarrow$$

$$U(r, \varphi, \theta) = \left(-\frac{128 \ln 2}{13335} r^3 + \frac{128 \ln 2}{13335} r^{-4} + \frac{r^3}{105} \ln r \right) \cdot$$

$$\cdot P_3^{(3)}(\cos\theta) \sin 3\varphi$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \\ w|_{r=1} = 297 \sin^6\Theta \sin 6\varphi \\ w|_{r=2} = \cos^2\Theta + \cos 3\Theta \end{cases}$$

Ищем решение в виде

$$w(r,\varphi,\Theta) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \Big[\Big(A_{nm}r^n + B_{nm}r^{-(n+1)}\Big)\cos m\varphi +$$

$$+\Big(C_{nm}r^n + D_{nm}r^{-(n+1)}\Big)\sin m\varphi\Big] P_n^{(m)}(\cos\Theta)$$

Подставим первое гр. усл.

$$w|_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(C_{n6}1^n + D_{n6}1^{-(n+1)}\Big) P_n^{(6)}(\cos\Theta)\sin 6\varphi =$$

$$= 297 \sin^6\Theta \sin 6\varphi$$, т.к. ост. коэфф-ты нулевые $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(C_{n6}1^n + D_{n6}1^{-(n+1)}\Big) P_n^{(6)}(\cos\Theta) = \underbrace{297\sin^6\Theta}_{\deg(\cdot)=6}$$

$$\deg P_n^{(6)}(\cos\Theta) = n \leq 6 \Rightarrow$$

$$P_6^{(6)}(x) = 10395\,(-x^2+1)^{6/2} \Rightarrow$$

$$\Big(C_{66}1^6 + D_{66}1^{-7}\Big)\cdot 10395\,(1-x^2)^3 = 297\,(1-x^2)^3 \Rightarrow$$

$$C_{66}r^6 + D_{66}r^{-7} = \frac{1}{35}$$

Подставим второе гр. у.

$$w|_{r=2} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(A_{n0}2^n + B_{n0}2^{-(n+1)}\Big) P_n^{(0)}(\cos\Theta) =$$

$$= \cos^2\Theta + \cos 3\Theta = \cos^2\Theta + \cos 2\Theta\cos\Theta - \sin 2\Theta \sin\Theta =$$

$$= \cos^2\Theta + 2\cos^3\Theta - \cos\Theta - 2\sin^2\Theta\cos\Theta = \cos^3\Theta + \cos\Theta -$$

$$- 2\sin^2\Theta\cos\Theta - 2\sin^2\Theta\cos\Theta = \underbrace{\cos^3\Theta + \cos\Theta - 4\sin^2\Theta\cos\Theta}_{\deg(\cdot)=3}$$

3

$\deg P_n^{(0)}(\cos\Theta) = n \leq 3$

$P_0^{(0)}(x) = 1$

$P_1^{(0)}(x) = x$

$\Rightarrow$

$P_2^{(0)}(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3^{(0)}(x) = x \cdot \frac{1}{2}(5x^2-3)$

$(A_{00} + B_{00} 2^{-1}) + (A_{10} 2 + B_{10} 2^{-2})x + (A_{20} 2^2 + B_{20} 2^{-3}) \cdot$

$\cdot \frac{1}{2}(3x^2-1) + (A_{30} 2^3 + B_{30} 2^{-4}) \cdot \frac{1}{2} x (5x^2-3) = x^2 + x -$

$- 4(1-x^2)x$

$x^3: (A_{30} 2^3 + B_{30} 2^{-4}) \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = 4 \Rightarrow A_{30} 2^3 + B_{30} 2^{-4} = \frac{8}{5}$

$x^2: (A_{20} 2^2 + B_{20} 2^{-3}) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 1 \Rightarrow A_{20} 2^2 + B_{20} 2^{-3} = \frac{2}{3}$

$x: (A_{10} 2 + B_{10} 2^{-2}) \cdot 1 = \frac{\cancel{8}\,4}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{8}} \cdot 3 = \cancel{3} \Rightarrow A_{10} 2 + B_{10} 2^{-2} = \frac{-3}{5}$

$x^0: (A_{00} + B_{00} 2^{-1}) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow A_{00} + B_{00} 2^{-1} = \frac{1}{3}$

Из равенства нулю ~~коэф~~ остальных коэф-ов можем получить системы:

$\begin{cases} C_{66} 1^6 + D_{66} 1^{-7} = \frac{1}{35} \\ C_{66} 2^6 + D_{66} 2^{-7} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_{66} = -\frac{1}{286685}, \; D_{66} = \frac{8192}{286685}$

$\begin{cases} A_{30} 2^3 + B_{30} 2^{-4} = \frac{8}{5} \\ A_{30} + B_{30} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{30} = \frac{128}{635}, \; B_{30} = -\frac{128}{635}$

$\begin{cases} A_{20} 2^2 + B_{20} 2^{-3} = \frac{2}{3} \\ A_{20} + B_{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{20} = \frac{16}{93}, \; B_{20} = -\frac{16}{93}$

$\begin{cases} A_{10} 2 + B_{10} \cdot 2^{-2} = -\frac{3}{5} \\ A_{10} + B_{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{10} = -\frac{12}{35}, \; B_{10} = \frac{12}{35}$

$$\begin{cases} A_{00} + B_{00}\cdot 2^{-1} = \frac{1}{3} \\ A_{00} + B_{00} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{00} = \frac{2}{3},\ B_{00} = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$w(r,\varphi,\Theta) = \left(-\frac{1}{286685} r^{6} + \frac{8192}{286685} r^{-7}\right) P_6^{(6)}(\cos\Theta)\sin 6\varphi +$$

$$+\left(\left(\frac{128}{635} r^{3} + \frac{128}{635} r^{-4}\right) P_3^{(0)}(\cos\Theta) + \left(\frac{16}{93} r^{2} - \frac{16}{93} r^{-3}\right) P_2^{(0)}(\cos\Theta) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{12}{35} r + \frac{12}{35} r^{-2}\right) P_1^{(0)}(\cos\Theta) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} r^{-1}\right) P_0^{(0)}(\cos\Theta)\right).$$

Тогда реш-ие исх. задачи

$$\begin{cases} \Delta u = r\sin^3\Theta \sin 3\varphi \\ u|_{r=1} = 297\sin^6\Theta \sin 6\varphi \\ u|_{r=2} = \cos^2\Theta + \cos 3\Theta \end{cases}$$

имеет вид

$$u(r,\varphi,\Theta) = \left(-r^{6} + 8192 r^{-7}\right)\cdot\frac{1}{286685} P_6^{(6)}(\cos\Theta)\sin 6\varphi +$$

$$+\left(\frac{128}{635}(r^{3} - r^{-4}) P_3^{(0)}(\cos\Theta) + \frac{16}{93}(r^{2} - r^{-3}) P_2^{(0)}(\cos\Theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{12}{35}(-r + r^{-2}) P_1^{(0)}(\cos\Theta) + \frac{2}{3}(1 - r^{-1}) P_0^{(0)}(\cos\Theta)\right) +$$

$$+\left(\frac{128\ln 2}{13335}(-r^{3} + r^{-4}) + \frac{r^{3}}{105}\ln r\right)\cdot P_3^{(3)}(\cos\Theta)\sin 3\varphi$$