МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра вычислительной математики

Лабораторная работа №1

«Аппроксимация дифференциальных задач разностными операторами»

Вариант 2

Выполнил:

Бовт Тимофей Анатольевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:

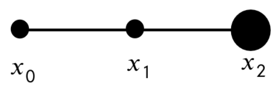
Репников Василий Иванович

Минск, 2024 г.

Задача 1

Постановка задачи. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов

$$Lu = u''(x_2).$$



Решение. Пусть у нас имеется равномерная сетка узлов с шагом h. Введем следующие обозначения

$$x = x_2,\ x - h = x_1,\ x - 2h = x_0,$$

где h – шаг равномерной сетки. Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u''(x),$$

и шаблон

$$\text{Ш}(x) = \{x - 2h, x - h, x\}.$$

Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x - h) + a_2 u(x - 2h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x - h) + a_2 u(x - 2h) - u''(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки x:

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 \left(u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - \frac{h^3}{6} u'''(x) \right) + \\ + a_2 \left(u(x) - 2hu'(x) + \frac{4h^2}{2} u''(x) - \frac{8h^3}{6} u'''(x) \right) + O(h^4) - u''(x).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\psi(x) = (a_0 + a_1 + a_2) \cdot u(x) - h(a_1 + 2a_2) \cdot u'(x) + \\ + \frac{h^2}{2} \left(a_1 + 4a_2 - \frac{2}{h^2} \right) \cdot u''(x) + \frac{h^3}{6} (a_1 + 8a_2) \cdot u'''(x) + O(h^4).$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 = 0, \\ a_1 + 4a_2 = \dfrac{2}{h^2}. \end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнения второе и получим

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 = 0, \\ 2a_2 = \dfrac{2}{h^2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_2 = \frac{1}{h^2}.$$

Тогда из второго уравнения

$$a_1 = -\frac{2}{h^2},$$

а из первого уравнения

$$a_0 = \frac{1}{h^2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x) - 2u(x-h) + u(x-2h)}{h^2} = u_{\overline{x}\overline{x}}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые три слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

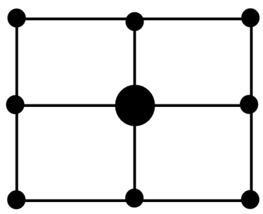
$$\psi(x) = \left(-\frac{h^3}{6} \cdot \frac{2}{h^2} + \frac{8h^3}{6} \cdot \frac{1}{h^2}\right) \cdot u'''(x) + O(h^4) = hu'''(x) + O(h^4) = O(h).$$

То есть мы получаем аппроксимацию первого порядка, а главный член погрешности это $hu'''(x)$.

Задача 2

Постановка задачи. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов

$$Lu = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}.$$



Решение. Пусть у нас имеется равномерная сетка узлов. Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть

$$\begin{aligned} L_h u(x) = {} & a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 - h, x_2 - h) + a_2 u(x_1 - h, x_2) + a_3 u(x_1 - h, x_2 + h) + a_4 u(x_1, x_2 - h) + \\ & + a_5 u(x_1, x_2 + h) + a_6 u(x_1 + h, x_2 - h) + a_7 u(x_1 + h, x_2) + a_8 u(x_1 + h, x_2 + h). \end{aligned}$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 - h, x_2 - h) + a_2 u(x_1 - h, x_2) + a_3 u(x_1 - h, x_2 + h) + a_4 u(x_1, x_2 - h) +$$
$$+ a_5 u(x_1, x_2 + h) + a_6 u(x_1 + h, x_2 - h) + a_7 u(x_1 + h, x_2) + a_8 u(x_1 + h, x_2 + h) - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}.$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора, используя формулу разложения функции двух переменных

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^2 u(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^2 u(x_0, y_0) + \ldots,$$

в окрестности точек x_1, x_2 по степеням h. Для упрощения записи, сразу же будем выносить общие множители за скобки, тогда

$$\psi(x) = u \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) +$$
$$+ h\frac{\partial u}{\partial x_1}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + h\frac{\partial u}{\partial x_2}(-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8 - \frac{2}{h^2}\right) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) +$$
$$+ h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 x_2}(-a_1 + a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}(-a_1 - a_3 + a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^4}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(a_1 + a_3 + a_6 + a_8) + O(h^5).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого нам нужно построить систему из 9 уравнений. Очевидно, что приравнивая сейчас все коэффициенты при производных от функции u, мы получим сильно больше уравнений. Заметим, что некоторые из этих коэффициентов повторяются.

Подчеркнем все уникальные коэффициенты:

$$\begin{gathered}\psi(x) = u\cdot\underline{(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8)}+\\
+h\frac{\partial u}{\partial x_1}\underline{(-a_1-a_2-a_3+a_6+a_7+a_8)}+h\frac{\partial u}{\partial x_2}\underline{(-a_1+a_3-a_4+a_5-a_6+a_8)}+\\
+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\underline{\left(a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8-\frac{2}{h^2}\right)}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\underline{(a_1+a_3+a_4+a_5+a_6+a_8)}+\\
+h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\underline{(a_1-a_3-a_6+a_8)}+\\
+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(-a_1-a_2-a_3+a_6+a_7+a_8)+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(-a_1+a_3-a_4+a_5-a_6+a_8)+\\
+\frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 x_2}\underline{(-a_1+a_3-a_6+a_8)}+\frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2}\underline{(-a_1-a_3+a_6+a_8)}+\\
+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8)+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(a_1+a_3+a_4+a_5+a_6+a_8)+\\
+\frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3\partial x_2}(a_1-a_3-a_6+a_8)+\frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_2^3}(a_1-a_3-a_6+a_8)+\\
+\frac{h^4}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\underline{(a_1+a_3+a_6+a_8)}+O(h^5).\end{gathered}$$

Итого мы имеем 9 уникальных коэффициентов, которые позволяют нам построить СЛАУ для отыскания неизвестных a_k, если мы приравняем их к нулю (заметим, что коэффициент при $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$ мы не считаем уникальным, потому что в таком случае матрица системы будет иметь линейно независимые строки). Итак, выпишем расширенную матрицу получившейся системы уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{2}{h^2}\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Методом Гаусса приводим матрицу слева к единичной и, опуская все преобразования, получаем

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{h^2}\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{h^2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Отсюда

$$a_0 = -\frac{2}{h^2},\ a_2 = a_7 = \frac{1}{h^2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x_1 - h, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 + h, x_2)}{h^2}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации. Все коэффициенты обратятся в ноль кроме коэффициента при $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$, то есть

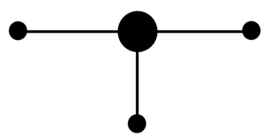
$$\psi(x) = \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + O(h^4) = O(h^2).$$

То есть мы получаем аппроксимацию второго порядка, а главный член погрешности это $\dfrac{h^2}{12}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$.

Задача 3

Постановка задачи. Аппроксимировать дифференциальную задачу разностной схемой на заданном шаблоне. Определить погрешность аппроксимации.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t),\ u(1,t) = \mu_1(t),\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

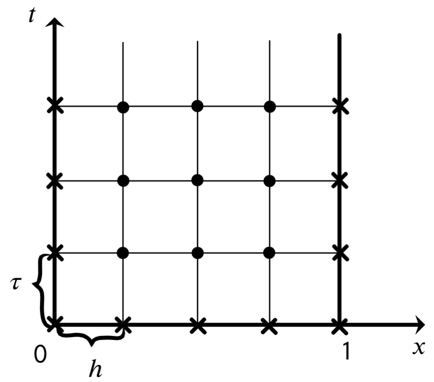


Решение. Сперва зададим равномерную сетку узлов $\overline{\omega}_{h\tau}$ такую, что

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \omega_\tau,$$

$$\overline{\omega}_h = \left\{x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ h = \frac{1}{N}\right\},$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots\}.$$



На этой сетке определяем дискретную функцию $y(x,t)$, которая является аппроксимацией решения исходной задачи $u(x,t)$. Далее на сетке мы заменяем дифференциальные операторы разностными. Для этого дифференциальному оператору $Lu = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ поставим в соответствие разностный оператор

$$L_h u = \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) u_{\overline{x}}\right)_x.$$

Или же в другой записи

$$L_h u =$$
$$= \frac{k\left(x+\frac{h}{2},t\right)u(x+h,t) - k\left(x+\frac{h}{2},t\right)u(x,t) - k\left(x-\frac{h}{2},t\right)u(x,t) + k\left(x-\frac{h}{2},t\right)u(x-h,t)}{h^2}.$$

Покажем, что в данном случае мы имеем аппроксимацию второго порядка (доказывать будем для оператора $Lu = (k(x)u'(x))'$). Запишем, чему равна погрешность, предварительно разложив все функции в ряд Тейлора в окрестности точки x. Затем сократим подобные слагаемые и получим

$$\psi(x) = \frac{1}{h^2}\Big[\left(k + \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k''\right)\left(u + hu' + \frac{h^2}{2}u''\right) - \left(k + \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k''\right)u -$$
$$- \left(k - \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k''\right)u + \left(k - \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k''\right)\left(u - hu' + \frac{h^2}{2}u''\right)\Big] + O(h^3) - (ku')' =$$
$$= \frac{h^2}{8}k''u'' + O(h^3).$$

Итак, заменив дифференциальные операторы на разностные, а реальную функцию $u(x,t)$ дискретной $y(x,t)$, получим разностную схему вида в безиндексной форме

$$\begin{cases} y_{\overline{t}}(x,t) = \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) y_{\overline{x}}(x,t)\right)_x + f(x,t),\ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ y_x(0,t) = \mu_0(t),\ t \in \omega_\tau, \\ y(1,t) = \mu_1(t),\ t \in \omega_\tau, \end{cases}$$

где

$$y_{\overline{t}} = \frac{y(x,t) - y(x,t-\tau)}{\tau},\ y_x = \frac{y(x+h,t) - y(x,t)}{h}.$$

По t мы берем левую производную в соответствии со спецификой минимального шаблона.

Построим эту же схему в индексной форме, заменяя $y(x_i,t_j) = y_i^j$, $k(x_i,t_j) = k_i^j$,

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \dfrac{k^j_{i+\frac{1}{2}}y^j_{i+1} - k^j_{i+\frac{1}{2}}y^j_i - k^j_{i-\frac{1}{2}}y^j_i + k^j_{i-\frac{1}{2}}y^j_{i-1}}{h^2} + f(x_i,t_j),\ i = \overline{1,N-1},\ j = 1,2\ldots, \\ y_i^0 = u_0(x_i),\ i = \overline{0,N}, \\ \dfrac{y_0^{j+1} - y_0^j}{h} = \mu_0(t_j),\ j = 0,1\ \ldots, \\ y_N^j = \mu_1(t_j),\ j = 0,1,\ldots r \end{cases}$$

Оценим погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным

$$\psi_{h\tau}(x,t) = u_{\bar{t}} - \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) u_{\bar{x}}\right)_x - f(x,t)$$

Зная, что

$$u_{\bar{t}} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + O(\tau),$$

$$\left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) u_{\bar{x}}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) - \frac{h^2}{8}\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O(h^3),$$

подставим в уравнение для погрешности и получим

$$\psi(x,t) = -\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{h^2}{8}\frac{\partial^2 k(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O(\tau^2 + h^3) = O(\tau + h^2).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение аппроксимируется на шаблоне с первым порядком по t и вторым порядком по x.

Начальное условие аппроксимируется точно

$$\nu_{h\tau}(x,0) = u(x,0) - u_0(x) = 0.$$

Определим значение погрешности для аппроксимации левого граничного условия, аналогично раскладывая разностный оператор в ряд Тейлора,

$$\nu_{h\tau}(0,t) = u_x(0,t) - \mu_0(t) = \frac{u(h,t) - u(0,t)}{h} - \mu_0(t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \mu_0(t) =$$
$$= \left[\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t)\right] = \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2) = O(h).$$

Таким образом, левое граничное условие аппроксимируется с первым порядком по x.

Правое граничное условие аппроксимируем точно

$$\nu_{h\tau}(1,t) = u(1,t) - \mu_1(t) = 0.$$

Значит аппроксимация дополнительных условий

$$\nu_{h\tau}(x,t) = \nu_{h\tau}(x,0) + \nu_{h\tau}(0,t) + \nu_{h\tau}(1,t) = O(h).$$

В итоге построенная разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу с первым порядком по t и по x, то есть общая погрешность аппроксимации равна

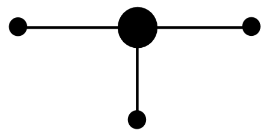
$$\Psi_{h\tau}(x,t) = \psi_{h\tau}(x,t) + \nu_{h\tau}(x,t) = O(\tau + h).$$

Замечание. Также мы могли бы взять аппроксимацию $L_h u = \left(k\left(x,t\right) u_{\bar{x}}\right)_x$. Но в таком случае мы бы получили погрешность $O(h)$, то есть аппроксимация по x была бы также первого порядка.

Задача 4

Постановка задачи. Повысить порядок аппроксимации разностной схем на минимальном шаблоне, используя вид дифференциальной задачи.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t),\ u(1,t) = \mu_1(t),\ t \geqslant 0. \end{cases}$$



Решение. Из предыдущей задачи известно, что дифференциальная задача аппроксимируется разностной схемой на выбранном шаблоне с погрешностями $\psi_{h\tau}(x,t) = O(\tau + h^2)$ для уравнения и $\nu_{h\tau}(0,t) = O(h)$ для краевого условия. Задача ставится следующим образом: за счет повышения порядка аппроксимации граничного условия требуется повысить общий порядок аппроксимации задачи с $O(\tau+h)$ до $O(\tau+h^2)$. Разностную аппроксимацию граничного условия будем искать в следующем виде

$$y_x(0,t) = \overline{\mu}_0(t),$$

где сеточная функция $\overline{\mu}_0(t)$ подлежит определению. Определим погрешность аппроксимации граничного условия:

$$\nu_{h\tau}(0,t) = u_x(0,t) - \overline{\mu}_0(t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \overline{\mu}_0(t) =$$
$$= \left[\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t)\right] = \mu_0(t) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \overline{\mu}_0(t).$$

Таким образом, мы должны выбрать

$$\overline{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}.$$

Но для записи мы не можем использовать эту производную неизвестной функции, поэтому заменим ее. Из исходного уравнения поставленной дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + k(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

мы можем выразить

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{k(x,t)}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - f(x,t)\right).$$

Предполагая, что оно верно для $x = 0$, имеем

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{k(0,t)}\left(\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - \frac{\partial k(0,t)}{\partial x}\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - f(0,t)\right).$$

Из самого граничного условия мы можем взять $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t)$. А частные производные $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial t}, \dfrac{\partial k(0,t)}{\partial x}$ в рамках аппроксимации (так как $\overline{\mu}_0(t)$ – сеточная функция) уместно заменить на разностные производные $u_{\bar{t}}(0,t), k_{\bar{x}}(0,t)$ соответственно. Тогда в итоге мы получим

$$\overline{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}\frac{1}{k(0,t)}\left(u_{\bar{t}}(0,t) - k_{\bar{x}}(0,t)\cdot\mu_0(t) - f(0,t)\right).$$

Таким образом, мы получаем разностную схему повышенного порядка аппроксимации

$$\begin{cases} u_{\bar{t}} = \left(k\left(x - \dfrac{h}{2}, t\right) u_{\bar{x}}\right)_x + f(x,t),\ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ u_x(0,t) = \mu_0(t) + \dfrac{h}{2}\dfrac{1}{k(0,t)}\left(u_{\bar{t}}(0,t) - k_{\bar{x}}(0,t)\cdot\mu_0(t) - f(0,t)\right),\ t \in \omega_\tau, \\ u(1,t) = \mu_1(t),\ t \in \omega_\tau, \end{cases}$$

в частности она аппроксимирует дифференциальную задачу с первым порядком по t и вторым порядком по x.