Построение интерполяционного многочлена

Условие

Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = 2^x$ по ее значениям в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Вычислить с его помощью приближенное значение $f(0.5)$ и оценить погрешность найденного значения.

Алгоритм решения

Для построения интерполяционного многочлена нам понадобятся следующие формулы:

1. формула Ньютона для интерполяционного многочлена

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$
$$\ldots + (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \cdot f(x_0, \ldots, x_n). \quad (1)$$

2. аппарат разделенных разностей:

   - **разделенная разность нулевого порядка для функции** $f(x)$ совпадают со значениями функции $f(x_i)$ в узлах интерполирования;
   - **разделенная разность первого порядка** есть

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}. \quad (2)$$

   - **разделенная разность второго порядка**

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}. \quad (3)$$

   - **разделенная разность $(k+1)$-ого порядка**

$$f(x_0, \ldots, x_{k+1}) = \frac{f(x_1, \ldots, x_{k+1}) - f(x_0, \ldots, x_k)}{x_{k+1} - x_0}. \quad (4)$$

3. таблица разделенных разностей

x_0	$f(x_0)$				
		$f(x_0, x_1)$			
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$		
		$f(x_1, x_2)$			
x_2	$f(x_2)$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f(x_0, \ldots, x_n)$
			$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$		
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$				
		$f(x_{n-1}, x_n)$			
x_n	$f(x_n)$				

4. представление остатка интерполирования в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \omega_{n+1}(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in [a, b]. \quad (5)$$

Алгоритм решения задачи следующий: мы строим таблицу разделенных разностей, а затем, используя построенные разделенные разности, строим интерполяционный многочлен. После чего мы оцениваем остаток интерполирования, который и будет являться погрешностью в данном случае.

Составляем таблицу разделенных разностей. Число столбцов таблицы = число узлов + 1. В нашем случае это 4:

x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	

Первый столбец заполняем значениями узлов, которые даны по условию. Для второго столбца вычислим значения функции в узлах:

$$f(x_0) = 2^0 = 1, \quad f(x_1) = 2^2 = 4, \quad f(x_2) = 2^3 = 8.$$

0	1	$f(x_0, x_1)$	
2	4		$f(x_0, x_1, x_2)$
3	8	$f(x_1, x_2)$	

По формуле (2) вычисляем значения для третьего столбца:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{4-1}{2-0} = \frac{3}{2}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{3-2} = 4.$$

0	1	1.5	
2	4		$f(x_0, x_1, x_2)$
3	8	4	

По формуле (3) вычисляем последнее неизвестное значение:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{4 - 1.5}{3 - 0} = \frac{5}{6}.$$

Окончательно таблица имеет следующий вид, из которого нам понадобятся только выделенные значения:

0	1	1.5	
2	4		$\frac{5}{6}$
3	8	4	

По формуле (1) строим интерполяционный многочлен, который в нашем случае имеет вид

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2).$$

Подставляем все известные значения:

$$P_2(x) = 1 + x \cdot \frac{3}{2} + x(x-2) \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 1.$$

Найдем значение в точке $x = 0.5$:

$$P_2(0.5) = \frac{5}{24} - \frac{1}{12} + 1 = \frac{27}{24}.$$

Оценим остаток интерполирования, используя формулу (5):

$$|r_n(x)| \leqslant \left| \omega_{n+1}(x) \frac{\max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \right|.$$

В нашем случае

$$|r_2(x)| \leqslant \left| (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \frac{\max\limits_{x \in [0,3]} |(2^x)^{(3)}(x)|}{3!} \right|.$$

Так как $(28)^{(n)} = \ln^n 22^x$, то

$$\max_{x \in [0,3]} |2^x \cdot \ln^3 2| \leqslant (2 \ln 2)^3.$$

Тогда

$$|r_2(x)| \leqslant \left| x(x-2)(x-3) \frac{(2 \ln 2)^3}{6} \right|.$$

Подставим точку, в которой мы проводили интерполирование, $x = 0.5$:

$$|r_2(0.5)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{(2 \ln 2)^3}{6} = \frac{5}{2} \ln^3 2 \approx 0.83256.$$

Графически это можно представить как