Сплайн-интерполирование с заданными на концах моментами

Условие

Построить кубический сплайн для функции $y = f(x)$ заданной таблицей значений

x	1	2	5
$f(x)$	0	1	9
$f''(x)$	3	-	5

Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 3$.

Алгоритм решения

Для решения данной задачи нам понадобятся следующие формулы (N – количество узлов):

1. расстояние между i-ым и $(i-1)$-ым узлами

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = \overline{1, N} \tag{1}$$

2. формула кубического сплайна

$$S_3(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \\ + \left(f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{(x_i - x)}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, N} \tag{2}$$

3. формулы для коэффициентов кубического сплайна

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, N-1} \tag{3}$$

4. граничные условия для коэффициентов

$$M_0 = f''(a), \quad M_N = f''(b). \tag{4}$$

Сначала по формуле (1) найдем расстояния между узлами:

$$h_1 = x_1 - x_0 = 1$$
$$h_2 = x_2 - x_1 = 3.$$

Теперь составим по формулам (3) и (4) СЛАУ для коэффициентов кубического сплайна:

$$\begin{cases} M_0 = f''(a), \\ \dfrac{h_1}{6}M_0 + \dfrac{h_1 + h_2}{3}M_1 + \dfrac{h_2}{6}M_2 = \dfrac{f_2 - f_1}{h_2} - \dfrac{f_1 - f_0}{h_1}, \\ M_2 = f''(b). \end{cases}$$

Подставим в эту систему значения (h_i нам известны, f_i и $f''(a)$, $f''(b)$ берем из заданной таблицы):

$$\begin{cases} M_0 = 3, \\ \dfrac{1}{6}M_0 + \dfrac{1+3}{3}M_1 + \dfrac{3}{6}M_2 = \dfrac{9-1}{3} - \dfrac{1-0}{1}, \\ M_2 = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_0 = 3, \\ \dfrac{1}{6}M_0 + \dfrac{4}{3}M_1 + \dfrac{1}{2}M_2 = \dfrac{5}{3}, \\ M_2 = 5. \end{cases}$$

Найдем решение методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

То есть

$$M_0 = 3, \quad M_1 = -1, \quad M_2 = 5.$$

У нас есть все необходимые значения для того, чтобы построить кубический сплайн, кроме x_i, x_{i-1}. По условию необходимо вычислить значение в точке $x = 3$, она находится между узлами $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$. Тогда кубический сплайн по формуле (2) мы будем строить на узлах x_1, x_2.

В нашем случае формула (2) примет вид

$$S_3(x) = M_1\frac{(x_2-x)^3}{6h_2} + M_2\frac{(x-x_1)^3}{6h_2} + \left(f_2 - M_2\frac{h_2^2}{6}\right)\frac{x-x_1}{h_2} + \\ + \left(f_1 - M_1\frac{h_2^2}{6}\right)\frac{(x_2-x)}{h_2}, \quad x \in [x_1, x_2].$$

Подставляем все известные нам значения:

$$S_3(x) = -\frac{(5-x)^3}{18} + 5\cdot\frac{(x-2)^3}{18} + \left(9 - 5\cdot\frac{9}{6}\right)\frac{x-2}{3} + \left(1 + \frac{9}{6}\right)\frac{(5-x)}{3}, \quad x \in [2, 5].$$

Сделаем некоторые преобразования для упрощения формулы

$$S_3(x) = \frac{5(x-2)^3 - (5-x)^3}{18} + \frac{x-2}{2} + \frac{5(5-x)}{6}, \quad x \in [2, 5].$$

Найдем значение в точке $x = 3$:

$$S_3(3) = \frac{5-8}{18} + \frac{1}{2} + \frac{5\cdot 2}{6} = 2.$$