МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра вычислительной математики

Лабораторная работа №1

«Аппроксимация дифференциальных задач разностными операторами»

Вариант 4

Выполнила:

Гут Валерия Александровна
студентка 4 курса 7 группы

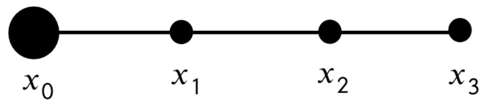
Преподаватель:

Репников Василий Иванович

Минск, 2024 г.

Задача 1

Постановка задачи. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов
$$Lu = u'(x_0).$$



Решение. Итак, мы имеем дифференциальный оператор
$$Lu(x) = u'(x),$$
и шаблон
$$Ш(x) = \{x, x+h, x+2h, x+3h\}.$$
Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть
$$L_h u(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) + a_2 u(x+2h) + a_3 u(x+3h).$$
Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:
$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) + a_2 u(x+2h) + a_3 u(x+3h) - u'(x).$$
Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки x:
$$\begin{aligned}\psi(x) = a_0 u(x) &+ a_1 \left(u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \frac{h^3}{6} u'''(x) + \frac{h^4}{24} u^{IV}(x) \right) + \\ &+ a_2 \left(u(x) + 2hu'(x) + \frac{4h^2}{2} u''(x) + \frac{8h^3}{6} u'''(x) + \frac{16h^4}{24} u^{IV}(x) \right) + \\ &+ a_3 \left(u(x) + 3hu'(x) + \frac{9h^2}{2} u''(x) + \frac{27h^3}{6} u'''(x) + \frac{81h^4}{24} u^{IV}(x) \right) + O(h^5) - u'(x).\end{aligned}$$
Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом
$$\begin{aligned}\psi(x) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \cdot u(x) &- h \left(a_1 + 2a_2 + 3a_3 - \frac{1}{h} \right) \cdot u'(x) + \\ &+ \frac{h^2}{2} (a_1 + 4a_2 + 9a_3) \cdot u''(x) + \frac{h^3}{6} (a_1 + 8a_2 + 27a_3) \cdot u'''(x) + \\ &+ \frac{h^4}{24} (a_1 + 16a_2 + 81a_3) \cdot u^{IV}(x) + O(h^5).\end{aligned}$$
Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$, $u'''(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов
$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \dfrac{1}{h}, \\ a_1 + 4a_2 + 9a_3 = 0, \\ a_1 + 8a_2 + 81a_3 = 0. \end{cases}$$

Будем искать решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Для этого выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{1}{h} \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 81 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -\frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 6 & 24 & -\frac{1}{h} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{2}{h} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{6h} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{18}{6h} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{6h} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{6h} \end{array}\right)$$

Отсюда

$$a_0 = -\frac{21}{6h},\ a_1 = \frac{18}{6h},\ a_2 = -\frac{9}{6h},\ a_3 = \frac{2}{6h}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{-21u(x) + 18u(x+h) - 9u(x+2h) + 2u(x+3h)}{6h}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые три слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

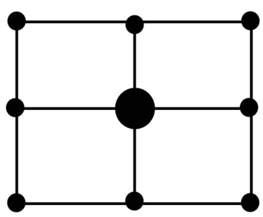
$$\psi(x) = \frac{h^4}{24}\left(\frac{18}{6h} - 16 \cdot \frac{9}{6h} + 81 \cdot \frac{2}{6h}\right) \cdot u'''(x) + O(h^4) = \frac{h^4}{4} u^{IV}(x) + O(h^5) = O(h^4).$$

То есть мы получаем аппроксимацию четвертого порядка, а главный член погрешности это $\frac{h^4}{4} u^{IV}(x)$.

Задача 2

Постановка задачи. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов

$$Lu = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}.$$



Решение. Пусть у нас имеется равномерная сетка узлов. Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 - h, x_2 - h) + a_2 u(x_1 - h, x_2) + a_3 u(x_1 - h, x_2 + h) + a_4 u(x_1, x_2 - h) +$$
$$+ a_5 u(x_1, x_2 + h) + a_6 u(x_1 + h, x_2 - h) + a_7 u(x_1 + h, x_2) + a_8 u(x_1 + h, x_2 + h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 - h, x_2 - h) + a_2 u(x_1 - h, x_2) + a_3 u(x_1 - h, x_2 + h) + a_4 u(x_1, x_2 - h) +$$
$$+ a_5 u(x_1, x_2 + h) + a_6 u(x_1 + h, x_2 - h) + a_7 u(x_1 + h, x_2) + a_8 u(x_1 + h, x_2 + h) - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}.$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точек x_1, x_2 по степеням h. Для упрощения записи, сразу же будем выносить общие множители за скобки, тогда

$$\begin{aligned}
\psi(x) = u \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) &+ \\
+ h\frac{\partial u}{\partial x_1}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + h\frac{\partial u}{\partial x_2}(-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) &+ \\
+ \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8 - \frac{2}{h^2}\right) &+ \\
+ h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) &+ \\
+ \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) &+ \\
+ \frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 x_2}(-a_1 + a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}(-a_1 - a_3 + a_6 + a_8) &+ \\
+ \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) &+ \\
+ \frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) &+ \\
+ \frac{h^4}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(a_1 + a_3 + a_6 + a_8) + O(h^5)&.
\end{aligned}$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого нам нужно построить систему из 9 уравнений. Очевидно, что приравнивая сейчас все коэффициенты при производных от функции u, мы получим сильно больше уравнений. Заметим, что некоторые из этих коэффициентов повторяются. Мы имеем 9 уникальных коэффициентов, которые позволяют нам построить СЛАУ для отыскания неизвестных a_k, если мы приравняем их к нулю. Итак, выпишем расширенную матрицу получившейся системы уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{2}{h^2} \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Методом Гаусса приводим матрицу слева к единичной и, опуская все преобразования, получаем

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{h^2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Отсюда

$$a_0 = -\frac{2}{h^2},\ a_4 = a_5 = \frac{1}{h^2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x_1, x_2 - h) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 - h)}{h^2}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации. Все коэффициенты обратятся в ноль кроме коэффициента при $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$, то есть

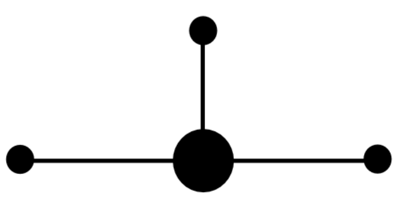
$$\psi(x) = \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + O(h^4) = O(h^2).$$

То есть мы получаем аппроксимацию второго порядка, а главный член погрешности это $\dfrac{h^2}{12}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$.

Задача 3

Постановка задачи. Аппроксимировать дифференциальную задачу разностной схемой на заданном шаблоне. Определить погрешность аппроксимации.

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ 0 < x < 1, t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), 0 \leqslant x \leqslant 1, \\
u(0,t) = \mu_0(t),\ \dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \mu_1(t),\ t \geqslant 0.
\end{cases}$$



Решение. У нас задана сетка узлов $\overline{\omega}_{h\tau}$. На данном шаблоне мы заменим дифференциальные операторы разностными. Для этого дифференциальному оператору $Lu = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$

поставим в соответствие разностный оператор

$$L_h u = \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) u_{\overline{x}}\right)_x.$$

В данном случае мы имеем аппроксимацию второго порядка

$$\psi(x) = \frac{h^2}{8} k'' u'' + O(h^3).$$

Итак, заменив дифференциальные операторы на разностные, получим разностную схему в безиндексной форме

$$\begin{cases} y_t = \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) y_{\overline{x}}\right)_x + f(x,t),\ (x,t) \in \overline{\omega}_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t),\ t \in \overline{\omega}_\tau, \\ y_x(1,t) = \mu_1(t),\ t \in \overline{\omega}_\tau, \end{cases}$$

или в индексной форме

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \dfrac{k^j_{i+\frac{1}{2}} y_{i+1} - k^j_{i+\frac{1}{2}} y_i - k^j_{i-\frac{1}{2}} y_i + k^j_{i-\frac{1}{2}} y_{i-1}}{h^2} + f(x_i, t_j),\ i = \overline{1, N-1},\ j = 0, 1, \ldots, \\ y_i^0 = u_0(x_i),\ i = \overline{0, N}, \\ y_0^j = \mu_0(t_j),\ j = 0, 1, \ldots, \\ \dfrac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} = \mu_1(t_j),\ j = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

Оценим погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным

$$\psi(x,t) = u_t - \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) u_{\overline{x}}\right)_x - f(x,t)$$

Зная, что

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau),\ \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) u_{\overline{x}}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{h^2}{8} k'' u'' + O(h^3),$$

подставим в уравнение для погрешности и получим

$$\psi(x,t) = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{8} k'' u'' + O(\tau^2 + h^3) = O(\tau + h^2).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение аппроксимируется на шаблоне с первым порядком по t и вторым порядком по x.

Начальное условие аппроксимируется точно.

Левое граничное условие аппроксимируем точно.

Определим значение погрешности для аппроксимации правого граничного условия, аналогично раскладывая разностный оператор в ряд Тейлора, а также используя тот факт, что $\dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \mu_1(t)$,

$$\nu(1,t) = u_x(1,t) - \mu_1(t) = \frac{u(h+1,t) - u(1,t)}{h} - \mu_0(t) = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \mu_1(t) =$$
$$= \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} + O(h^2) = O(h).$$

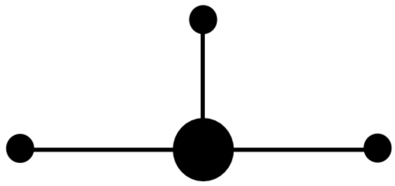
Таким образом, правое граничное условие аппроксимируется с первым порядком по x.

В итоге построенная разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу с первым порядком по t и по x.

Задача 4

Постановка задачи. Повысить порядок аппроксимации разностной схем на минимальном шаблоне, используя вид дифференциальной задачи.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0,t) = \mu_0(t),\ \dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \mu_1(t),\ t \geqslant 0. \end{cases}$$



Решение. Из предыдущей задачи известно, что дифференциальная задача аппроксимируется разностной схемой на выбранном шаблоне с погрешностями $\psi(x,t) = O(\tau + h^2)$ для уравнения и $\nu(1,t) = O(h)$ для краевого условия. Задача ставится следующим образом: за счет повышения порядка аппроксимации граничного условия требуется повысить порядок аппроксимации задачи с $O(\tau + h)$ до $O(\tau + h^2)$. Разностную аппроксимацию граничного условия будем искать в следующем виде

$$y_x(1,t) = \overline{\mu}_1(t),$$

где сеточная функция $\overline{\mu}_1(t)$ подлежит определению. Определим погрешность аппроксимации граничного условия:

$$\nu(1,t) = u_x(1,t) - \overline{\mu}_1(t) = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \overline{\mu}_1(t) =$$
$$= \mu_1(t) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \overline{\mu}_1(t).$$

Таким образом, мы должны выбрать

$$\overline{\mu}_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2}.$$

Из исходного уравнения поставленной дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + k(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

мы можем выразить

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{k(x,t)}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - f(x,t)\right).$$

Принимая $x = 1$, имеем

$$\frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{k(1,t)} \left(\frac{\partial u(1,t)}{\partial t} - \frac{\partial k(1,t)}{\partial x} \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} - f(1,t) \right).$$

Из самого граничного условия мы можем взять $\dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \mu_0(t)$. А частные производные $\dfrac{\partial u(1,t)}{\partial t}, \dfrac{\partial k(1,t)}{\partial x}$ в рамках аппроксимации уместно заменить на разностные производные $u_{\overline{t}}(1,t), k_{\overline{x}}(1,t)$ соответственно. Тогда в итоге мы получим

$$\overline{\mu}_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h}{2} \frac{1}{k(1,t)} \left(y_{\overline{t}}(1,t) - k_{\overline{x}}(1,t) \cdot \mu_1(t) - f(1,t) \right).$$

Таким образом, мы получаем разностную схему повышенного порядка аппроксимации

$$\begin{cases} y_t = \left(k \left(x - \dfrac{h}{2}, t \right) y_{\overline{x}} \right)_x + f(x,t), \; (x,t) \in \overline{\omega}_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x), \; x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t), \; t \in \overline{\omega}_\tau, \\ y_x(1,t) = \mu_1(t) + \dfrac{h}{2} \dfrac{1}{k(1,t)} \left(y_{\overline{t}}(1,t) - k_{\overline{x}}(1,t) \cdot \mu_1(t) - f(1,t) \right), \; t \in \overline{\omega}_\tau, \end{cases}$$

в частности она аппроксимирует дифференциальную задачу с первым порядком по t и вторым порядком по x.