1. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{x}{1-lh}, \quad 0<x<l, \quad t>0 \\ u\big|_{t=0} = x^2 - x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} - hu\Big|_{x=l} = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

Ищем решение в виде:

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где

$$\begin{cases} w\big|_{x=0} = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} - hw\Big|_{x=l} = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

Ищем $w(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$

$w\big|_{x=0} = c(t) = 0$

$\dfrac{\partial w}{\partial x} - hw\Big|_{x=l} = 2a(t)l + b(t) - ha(t)l^2 - hb(t)l = \dfrac{t^2}{2}$

Пусть $a(t) = 0$, тогда $b(t) = \dfrac{t^2}{2(1-hl)}$ $\Rightarrow$

$w(x,t) = \dfrac{t^2}{2(1-hl)}x$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{x}{1-lh} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \dfrac{x}{1-lh} - \dfrac{2x}{2(1-lh)} = 0 \\ v\big|_{t=0} = x^2 - x - w\big|_{t=0} = x^2 - x \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 - \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \\ v\big|_{x=0} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - hv\Big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

По методу раздел. переменных ищем

$v(x,t) = T(t) \cdot X(x)$, $T \neq 0$, $X \neq 0$

Подставим в диф. ур-е:

$T''X - TX'' = 0 \quad \big| : TX$

$\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$ $\Rightarrow$ составляем задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(l) - hX(l) = 0 \end{cases}$$, найдем ее решение:

$X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)$

$X(0) = C_1 = 0$

$X'(l) - hX(l) = \lambda C_2 \cos(\lambda l) - hC_2 \sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow$

$C_2 \neq 0$, тогда $\frac{\lambda}{h} = tg \lambda l$. Решения λ_k этого нелинейного ур-я явл. собственными значениями, тогда собств. ф-ции $X_k(x) = sin(\lambda_k x)$. Отсюда

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) sin(\lambda_k x)$$

Подставим в дифф. ур-е:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) sin(\lambda_k x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \lambda_k^2 sin(\lambda_k x) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t)\right) sin(\lambda_k x) = 0 \Rightarrow$$

$$T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = 0$$

Подставим выражение $U(x,t)$ в нач. условия:

$$U|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) sin(\lambda_k x) = x^2 - x = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k sin(\lambda_k x),$$ где

$$\varphi_k = \frac{\int_0^l (x^2 - x) sin \lambda_k x \, dx}{\int_0^l sin^2 \lambda_k x \, dx} = \left(-\frac{l^2}{\lambda_k} cos \lambda_k l + \frac{l}{\lambda_k} sin \lambda_k l + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{\lambda_k^3} cos \lambda_k l - \frac{l}{\lambda_k^3} + \frac{l}{\lambda_k} cos \lambda_k l - \frac{l}{\lambda_k^2} sin \lambda_k l \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{l}{2} - \frac{sin 2\lambda_k l}{4\lambda_k}\right)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) sin(\lambda_k x) = 0 \Rightarrow$$ можем

составить задачу Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t)+\lambda_k^2 T_k(t)=0 \\ T_k(0)=\varphi_k \\ T_k'(0)=0 \end{cases}$$, имеем решение:

$$T_k(t)=C_1\cos(\lambda_k t)+C_2\sin(\lambda_k t)$$

$$T_k(0)=C_1=\varphi_k \qquad \Rightarrow T_k(t)=\varphi_k\cos(\lambda_k t)$$

$$T_k'(0)=\lambda_k C_2=0\Rightarrow C_2=0$$

Тогда можем записать решение исходной задачи:

$$u(x,t)=\frac{t^2}{2(1-hl)}x+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cos(\lambda_k t)\sin(\lambda_k x)$$