МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе №2
«Решение смешанных задач для уравнения теплопроводности»
Вариант 2

Бовта Тимофея Анатольевича
студента 3 курса
специальности «прикладная математика»

Преподаватель:

И. С. Козловская

Минск, 2024 г.

Постановка задачи

Решить следующую смешанную задачу

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \cos\dfrac{2\pi}{l}x, \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \\ u_x\big|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos\dfrac{2\pi}{l}x. \end{cases}$$

Решение задачи аналитически

По методу разделения переменных для решения смешанных задач мы будем искать решение данной задачи в виде суммы

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(t), \tag{1}$$

где $X_k(t)$ — это собственные функции соответствующей задачи Штурма-Лиувилля в предположении, что уравнение однородное.

Решение задачи Штурма-Ливувилля

Пусть мы решаем соответствующую задачу для однородного уравнения. Тогда по методу разделения переменных мы получаем задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Задача (2) поставлена для линейного стационарного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка, поэтому для ее решения будем строить соответствующее характеристическое уравнение

$$\nu^2 + \lambda = 0.$$

Считая $\lambda > 0$, получаем

$$\nu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Тогда общее решение для уравнения из задачи (2) имеет вид

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x. \tag{3}$$

Подставим граничные условия задачи (2) в данное решение. Для этого вычислим производную от функции $X(x)$:

$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x.$$

Тогда для первого условия

$$X'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0.$$

Поскольку считаем $\lambda > 0$, то $B = 0$. Для второго условия, учитывая $B = 0$, имеем

$$X'(l) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Тривиальное решение данной задачи нас не интересует, поэтому $A \neq 0$. Также $\lambda \neq 0$, а значит
$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$
Отсюда
$$\sqrt{\lambda}l = \pi k, \quad k = 0, 1, \ldots$$
Таким образом, получаем, что собственные значения для оператора Штурма-Лиувилля равны
$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k = 0, 1, \ldots.$$
А отсюда можем построить собственные функции для этого оператора, которые и являются решениями поставленной задачи. Для этого подставим все найденные значения в общее решение (3) и получим
$$X_k(x) = A\cos\frac{\pi k}{l}x.$$
Поскольку собственные функции для каждого собственного значения определены с точностью до постоянного множителя, то для упрощения дальнейших вычислений примем $A = 1$. Таким образом, из задачи Штурма-Лиувилля мы имеем собственные значения и соответствующие им собственные функции вида
$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{\pi k}{l}x, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Построение решения поставленной задачи

Итак, подставляя найденное значение $X_k(x)$ в общий вид решения (1), мы получаем
$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cos\frac{\pi k}{l}x.$$
Чтобы определить вид функций $T_k(t)$, подставим данный вид решения в уравнение исходной задачи:
$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k'(t)\cos\frac{\pi k}{l}x + a^2\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2\cos\frac{\pi k}{l}x = \cos\frac{2\pi}{l}x.$$
Преобразуем левую часть уравнения
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(T_k'(t) + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k(t)\right)\cos\frac{\pi k}{l}x = \cos\frac{2\pi}{l}x.$$
Итак, рассмотрим получившееся равенство. Слева мы имеем сумму, причем она является разложением в ряд Фурье по собственным функциям. Функцию с правой стороны равенства мы можем также разложить в ряд Фурье по собственным функциям вида
$$\cos\frac{2\pi}{l}x = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k\cos\frac{k\pi}{l}x, \quad \varphi_k = \begin{cases}1, & k = 2,\\ 0, & k \neq 2.\end{cases}$$
Поскольку ряды равны, то их соответствующие коэффициенты совпадают. Тогда приравняем коэффициенты ряда слева к коэффициентам ряда справа и получим систему уравнений вида
$$T_2'(t) + \left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 T_2(t) = 1, \tag{5}$$

$$T_k'(t) + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k(t) = 0, \quad k \neq 2. \tag{6}$$

А это линейные ОДУ второго порядка. Найдем их общие решения.

Рассмотрим уравнение (5). Домножим обе его части на $e^{\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t}$. Тогда

$$T_2'(t) \cdot e^{\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t} + \left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 T_2(t) \cdot e^{\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t} = e^{\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t}$$

и свернем левую часть уравнения как производную произведения

$$\left(T_2(t) \cdot e^{\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t}\right)' = e^{\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t}.$$

Получили простейшее ОДУ первого порядка. Проинтегрируем его с двух сторон по t

$$T_2(t) \cdot e^{\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t} = \left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2 e^{\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t} + A_2, \quad A_2 \in \mathbb{R},$$

где A_2 — постоянная, которая подлежит определению. Тогда общее решение рассматриваемого уравнения равно

$$T_2(t) = \left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2 + A_2 e^{-\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t}. \tag{7}$$

Рассмотрим уравнение (6). Домножим обе его части на $e^{\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t}$ и свернем получившееся выражение слева как производную произведения:

$$\left(T_k(t) \cdot e^{\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t}\right)' = 0.$$

Получили простейшее ОДУ первого порядка. Интегрируем обе стороны уравнения по t и тогда общее решение уравнения (6) равно

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t}. \tag{8}$$

Теперь, когда мы получили вид функций $T_k(t)$, мы можем подставить выражения (5) и (6) также в общий вид (1). Тогда получим

$$u(x,t) = \left(\left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2 + A_2 e^{-\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t}\right) \cos\frac{2\pi}{l}x + \sum_{k\neq 2}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\pi k}{l}x. \tag{9}$$

Или же

$$u(x,t) = \left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2 \cos\frac{2\pi}{l}x + \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\pi k}{l}x.$$

Но мы не определили коэффициенты A_k. Для их определения подставим в уравнение (9) граничное условие и получим

$$u(x,0) = \left(\left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2 + A_2\right) \cos\frac{2\pi}{l}x + \sum_{k\neq 2}^{\infty} A_k \cos\frac{\pi k}{l}x = \cos\frac{2\pi}{l}x.$$

Отсюда видно, что $A_k = 0$, $k \neq 2$ и

$$\left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2 + A_2 = 1.$$

Тогда имеем

$$A_k = \begin{cases} 1 - \left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2, \ k = 2, \\ 0, \ \ k \neq 0. \end{cases}$$

В итоге, подставляя эти значения коэффициентов в выражение (9), получаем решение исходной задачи

$$u(x,t) = \left(\left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2 + e^{-\left(\frac{2a\pi}{l}\right)^2 t}\left(1 - \left(\frac{l}{2\pi a}\right)^2\right)\right)\cos\frac{2\pi}{l}x.$$

Решение задачи с помощью Wolfram Mathematica

Запишем в программном виде постановку исходной задачи

```
In[1]:= $Assumptions = {a > 0, l > 0};
        eq = u^(0,1)[x, t] - a^2 u^(2,0)[x, t] == Cos[2 π x / l];
        cc = {u^(1,0)[0, t] == 0, u^(1,0)[l, t] == 0};
        bc = u[x, 0] == Cos[2 π x / l]
Out[4]= u[x, 0] == Cos[2 π x / l]
```

Сперва подставим найденное нами в предыдущем пункте решение для того, чтобы убедиться в правильности:

```
In[5]:= Simplify[{eq, cc, bc} /.
          u → Activate[Function[{x, t}, ((1 - (l/(2 π a))^2) e^(t (-(2 π a/l)^2)) + (l/(2 π a))^2) cos(2 π x/l)]]]
Out[5]= {True, {True, True}, True}
```

То есть решение было построено верно. Значит найденное с помощью Wolfram Mathematica решение должно совпадать с построенным решением.

Для получения решения поставленной задачи в Wolfram Mathematica воспользуемся командой DSolve:

```
In[6]:= sol = DSolve[{eq, bc, cc}, u, {x, t}]
Out[6]= {{u → Function[{x, t}, l^2 (1/(4 a^2 π^2) + (e^(-(4 a^2 π^2 t)/l^2) (-l^2 + 4 a^2 π^2))/(4 a^2 l^2 π^2)) Cos[2 π x / l]]}}
```

Как можно видеть, мы получили ту же функцию, что и была построена нами аналитически.

Визуализация решения с помощью Wolfram Mathematica

Построим интерактивную температурную карту стержня для построенного решения. Для визуализации будем использовать функцию DensityPlot, которая строит двумерную цветную карту плотностей. По умолчанию цветовая функция принимает аргументы из отрезка $[0, 1]$, поэтому нужно определить минимум и максимум функции из начального уравнения исходной задачи

```
In[7]:= xsol = Solve[D[bc[[2]], x] == 0 && 0 ≤ x ≤ 1, x]

Out[7]= {{x → 0}, {x → 1/2}, {x → 1}}
```

Преобразуем полученный результат в список стационарных точек

```
In[8]:= xsol = Table[x /. sol, {sol, xsol}]

Out[8]= {0, 1/2, 1}
```

Таким образом, мы имеем список точек, в которых возможны глобальные экстремумы нашей функции. Найдем эти экстремумы:

```
In[9]:= vals = Table[bc[[2]], {x, xsol}]
        minVal = Min[vals]
        maxVal = Max[vals]

Out[9]= {1, -1, 1}

Out[10]= -1

Out[11]= 1
```

Линейное преобразование, переводящее отрезок [minVal, maxVal] в отрезок $[0, 1]$, может быть задано в виде анонимной функции следующего вида

```
In[12]:= linFunc = (#1 - minVal) / (maxVal - minVal) &;
```

где $\#1$ – это первый (для данной функции – единственный) аргумент анонимной функции.

Зададим параметры для построения температурной карты:

```
In[13]:= a0 = 1;
         l0 = 3;
         tFinal = 0.1;
         thickness = 1 / 5;
         colFunc = ColorData["TemperatureMap"][linFunc[#1]] &;
```

где $a0$, $l0$ – конкретные значения для параметров a, l исходной задачи, $tFinal$ – конечный момент времени для интерактивного графика, $thickness$ – толщина стержня, а функция *colFunc* будет задавать окраску сечений стержня в зависимости от его температуры в них. TemperatureMap – это предустановленная в Wolfram Mathematica цветовая схема, в которой нулю (низкая температура) соответствует синий цвет, единице (высокая температура) – красный.

Зададим функцию, для которой будет проводиться построение температурной карты, на основе построенного нами решения:

```
In[18]:= usol = u[#1, #3] /. sol[[1, 1]] /. {a → #4, l → #5} &;
         usol[x, y, t, a, l]
```

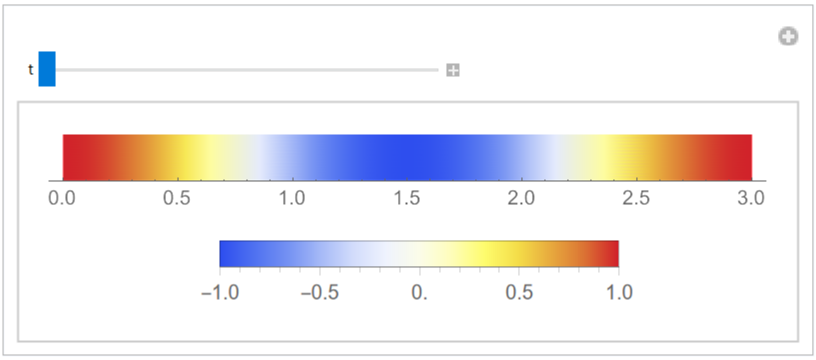
$$\text{Out[19]=}\quad l^2\left(\frac{1}{4\,a^2\,\pi^2}+\frac{e^{-\frac{4\,a^2\,\pi^2\,t}{l^2}}\left(-l^2+4\,a^2\,\pi^2\right)}{4\,a^2\,l^2\,\pi^2}\right)\mathrm{Cos}\left[\frac{2\,\pi\,x}{l}\right]$$

В этой функции параметры x, t, a, l имеют тот же смысл, что и в исходной задаче, а y – это координата продольного сечения стержня, которая является фиктивной.

Для этой функции построим карту температуры внутри стержня:

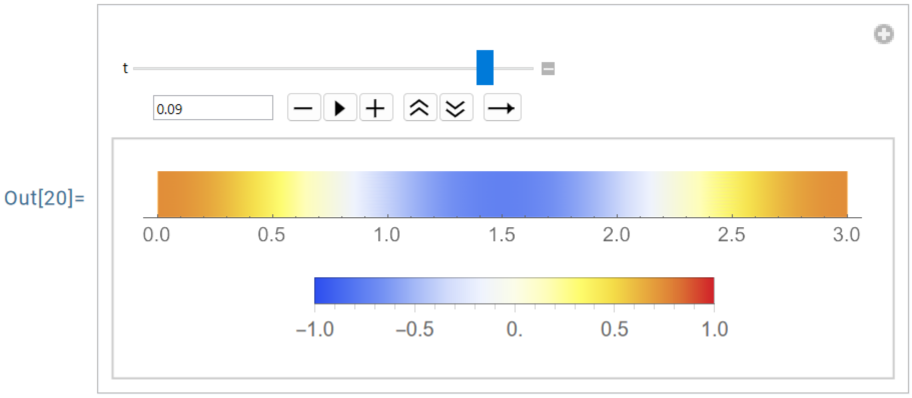
```
In[20]:= iPlot = Manipulate[
           DensityPlot[usol[x, y, t, a0, l0], {x, 0, l0}, {y, 0, 1},
            AspectRatio → thickness / l0,
            PlotLegends → BarLegend[{colFunc, {minVal, maxVal}}],
            ColorFunction → colFunc,
            ColorFunctionScaling → False,
            Frame → {True, False, False, False}], {t, 0, tFinal}, ControlPlacement → Top]
```

Out[20]=



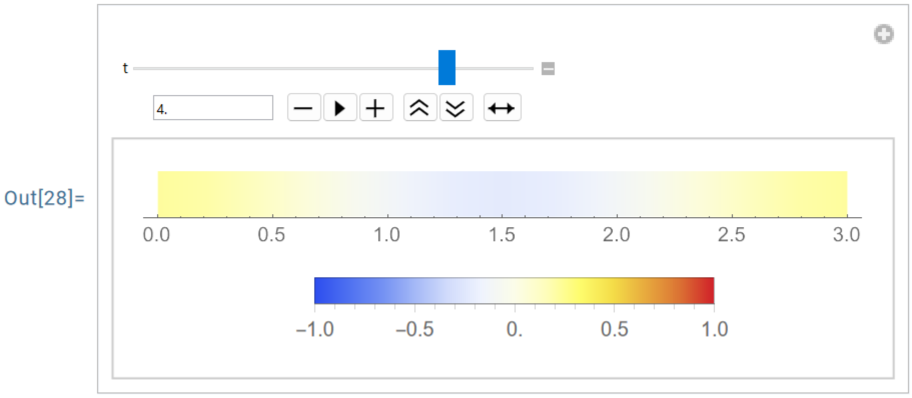
Таким образом, мы построили температурную карту для стержня в момент времени $t = 0$. То есть в начальный момент времени мы имеем максимальную температуру на концах стержня и минимальную в середине.

При $t = 0.09$ карта имеет вид



То есть с течением времени температура начинает равномерно распространятся вдоль всего стержня. На концах стержня температура постепенно снижается, а в середине – повышается.

Если повысить максимальное значение времени, то, например, в момент времени $t = 4$ можно увидеть, что температура вдоль всего стержня близка к средней температуре (между максимальным и минимальным значениями)



Вывод

Таким образом, мы нашли решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом разделения переменных, а затем проверили, правильно ли оно было вычислено, с помощью Wolfram Mathematica. Для построенного решения мы привели температурную карту, которая при заданных значениях a, l, t и толщины стержня позволяет визуализировать процесс распространения тепла в стержне.