Решение задач к коллоквиуму.

1. Доказать, что в нормированном пространстве E открытый шар $B\left(x_0, r\right)$ является открытым множеством.

   ♦ E — НВП. Докажем, что шар $B(x_0, r_0) \subset E$ открыт. Возьмем точку $x_1 \in B(x_0, r_0) \Rightarrow \|x_1 - x_0\| < r_0$. Тогда

   $$\exists r_1 = r_0 - \|x_1 - x_0\| > 0 \Rightarrow \exists B(x_1, r_1).$$

   Пусть произвольное $x \in B(x_1, r_1) \Rightarrow \|x - x_1\| < r_1$. Тогда покажем, что $x \in B(x_0, r_0)$:

   $$\|x - x_0\| \leqslant \|x - x_1\| + \|x_1 - x_0\| < r_1 + \|x_1 - x_0\| = r_0.$$

   То есть $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$. ⊠

2. Доказать, что для любых элементов $B(0, r)$ выполнено неравенство $\|x\| \leqslant \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}$.

   ♦ $\forall x, y \in B(0, r)$

   $$2\left\|x\right\| = \left\|2x\right\| = \left\|x + y + x - y\right\| \leqslant \left\|x + y\right\| + \left\|x - y\right\|.$$

   $$\|x\| \leqslant \frac{\|x + y\| + \|x - y\|}{2} \leqslant \max\{\left\|x + y\right\|, \left\|x - y\right\|\}.$$

   ⊠

3. Доказать, что алгебраическая сумма и объединение двух ограниченных множеств - ограниченное множество.

   ♦ Рассмотрим алгебраическую сумму множеств, то есть

   $$C = \{c : c = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

   Множество C ограничено, если $\forall c \in C \quad \|c\| < +\infty$. Тогда

   $$\|c\| = \|a + b\| \leqslant \underbrace{\|a\|}_{<+\infty} + \underbrace{\|b\|}_{<+\infty} < +\infty.$$

   Рассмотрим объединение множеств, то есть

   $$C = A \cup B.$$

   Множества A и B ограничены, то есть

   $$\exists B_1(x_1, r_1 < +\infty),\ B_2(x_2, r_2 < +\infty).$$

   Тогда

   $$\exists x_3 \in C : \exists B_3(x_3, \underbrace{r_3 < +\infty}_{r_1 + r_2}) \Rightarrow C \subset B_3.$$

   ⊠

4. Пусть в пространстве со скалярным произведением E последовательности $x^{(n)}, y^{(n)} \in B[0, 1]$ и $\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\left\|x^{(n)} - y^{(n)}\right\| \to 0$ при $n \to \infty$.

   ♦ Из того, что $(x_n), (y_n) \in B[0, 1]$ следует, что $\|x_n\| \leqslant 1$, $\|y_n\| \leqslant 1$. При этом $(x_n, y_n) \to 1$.

   $$\left\|x_n - y_n\right\|^2 = (x_n - y_n, x_n - y_n) = \left\|x_n\right\|^2 + \left\|y_n\right\|^2 - 2(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 + 1 - 2 = 0.$$

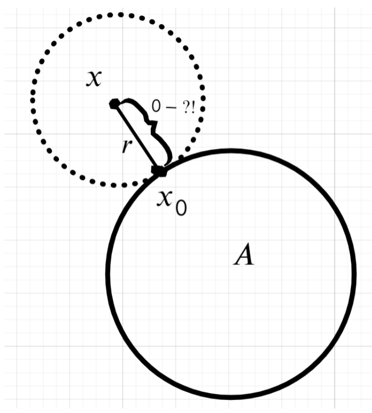
   ⊠

5. Пусть M и N такие множества в гильбертовом пространстве H, что $M \subset N$. Доказать, что $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

⧫ $M, N \subset H : M \subset N$. Тогда
$$(H \backslash N) \subset (H \backslash M).$$
Мы можем представить пространство как прямую сумму
$$H = N \oplus N^{\perp} = M \oplus M^{\perp}.$$
Тогда
$$(H \backslash M) = M^{\perp} \cup \{0\}, \quad (H \backslash N) = N^{\perp} \cup \{0\}.$$
Отсюда $N^{\perp} \subset M^{\perp}$. ⊠

6. Пусть A - замкнутое множество в E. Доказать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.

⧫ $\Rightarrow$) Пусть $\rho(x, A) = 0$, но $x \notin A$. Тогда, поскольку A замкнуто, $E \backslash A$ открыто и $x \in E \backslash A$. То есть $\exists r > 0 : B(x, r) \subset E \backslash A$. Но из того, что $\rho(x, A) = \inf\limits_{x_0 \in A} \|x - x_0\| = 0$, следует, что такого шара не существует (иначе должно быть $\rho(x, A) > r$), что является противоречием.



$\Leftarrow$) $x \in A \Rightarrow \rho(x, A) = \inf\limits_{x_0 \in A} \|x - x_0\| = \|x - x\| = 0.$ ⊠

7. Доказать, что для того, чтобы элемент $x \in H$ был ортогонален подпространству $L \subset H$ необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство $\|x\| \leqslant \|x - y\|$.

⧫ $x \in H$, $L \subset H$.
$$x \perp L \Longleftrightarrow \forall y \in L \quad \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

$$\|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{(x, x) - (y, x) - (x, y) + (y, y)} =$$
$$= [x \perp L \Longleftrightarrow (x, y) = 0 \forall y \in L] = \sqrt{(x, x) + (y, y)} \leqslant \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} = \|x\| + \|y\|.$$

⊠

8. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ множество $M^{\perp} \subset H$ является подпространством в H.

⧫ Доказательство проведем аналогично теореме о том, что ортогональное дополнение является подпространством. Имеем $M \subset H$. Тогда

(a) $M^{\perp}$ — линейное многообразие, т.е.

$$\forall z_1, z_2 \in M^{\perp}, \alpha, \beta \quad (\alpha z_1 + \beta z_2, m) = \alpha(z_1, m) + \beta(z_2, m) = 0 \ \forall m \in M$$

Это значит, что $(\alpha z_1 + \beta z_2) \in M^{\perp}$.

(b) $M^{\perp}$ — замкнутое множество (предел любой последовательности из $M^{\perp}$ лежит внутри $M^{\perp}$). Действительно

$$\forall (z_n) \in M^{\perp} : z_n \xrightarrow[n\to\infty]{H} z, \quad \forall m \in M \ (z_n, m) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} (z, m) = 0 \Rightarrow z \in M \perp .$$

⊠

9. Пусть $A, B \subset E$ и $\bar{A} \subset \bar{B}$. Следует ли, что $A \subset B$. Ответ обоснуйте и приведите пример.

⧫ Не следует. Данное свойство будет выполняться в том случае, когда оба множества являются замкнутыми. Однако, если они не замкнуты, то это неверно. Например, если

$$A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad B = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Во множестве A точка 0 не изолированная и не предельная, а остальные — изолированные. Следовательно, они образуют замыкание $\overline{A}$. В B все точки изолированные, следовательно, они также образуют замыкание $\overline{B}$. Однако $A \not\subset B$. ⊠

10. Доказать, что пространство ℓ_2 является строго нормированным.

⧫ Для доказательства того, что l_2 строго нормированное, рассмотрим условие строгой нормированности:

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

В l_2

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i)^2}$$

Возведем обе части в квадрат

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i)^2} + \sum_{i=1}^{\infty}(y_i)^2$$

Раскроем левое выражение

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}$$

Заметим, что это эквивалентно

$$(x, y) = \|x\| \, \|y\| .$$

С учетом того, что $(x, y)^2 = (x, y)(x, y) = [y = \lambda x] = (x, x)(y, y) = \|x\|^2 \, \|y\|^2$.

То есть, это равенство верно тогда и только тогда, когда $y = \lambda x$. ⊠

11. Доказать, что любое гильбертово пространство является строго нормированным.

◆ Покажем, что произвольное H строго нормированное, то есть

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Longleftrightarrow y = \lambda x,\ \lambda > 0$$

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y) =$$
$$= \begin{bmatrix} (x,y)^2 = (x,y)(x,y) = [y = \lambda x] = \\ = (x,x)(y,y) = \|x\|^2 \|y\|^2 \end{bmatrix} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = \Big(\|x\| + \|y\| \Big)^2.$$

⊠

12. Доказать, что ортогональная система без нулевого элемента линейно независима в гильбертовом пространстве.

◆ Возьмем систему $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\varphi_j \neq 0\ \forall j$. Система ортогональная, то есть

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0,\ i \neq j.$$

Возьмем произвольную конечную подсистему и рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_n \varphi_n = 0.$$

Домножаем скалярно на φ_k, $k = \overline{1,n}$. Тогда

$$\alpha_k \underbrace{(\varphi_k, \varphi_k)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0,\ k = \overline{1,n}.$$

То есть любая конечная подсистема линейно независимая $\Rightarrow$ исходная система линейно независимая. ⊠

13. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ в гильбертовом пространстве H имеет место включение $M \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Привести пример строгого включения.

◆ Возьмем произвольный $x \in M$. Он ортогонален всем $y \in M^{\perp}$. Если теперь взять произвольный $y \in M^{\perp}$, то он будет ортогонален всем $x \in (M^{\perp})^{\perp}$. Таким образом, $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$.

Приведем пример строгого включения. Рассмотрим

$$M = \{x \in l_2 : x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)\}$$

Для него

$$M^{\perp} = \{z \in l_2 : z = (z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots),\ (z,x) = 0\ \forall x \in M\}$$

А для него

$$(M^{\perp})^{\perp} = \{x \in l_2 : x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots),\ (x,z) = 0\ \forall z \in M^{\perp}\}$$

Таким образом, $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. ⊠

14. Пусть $M \subset E$ выпуклое множество и α - некоторое число. Доказать, что множество $\alpha M = \{x \in E \mid x = \alpha y, y \in M\}$ - выпукло. Будет ли множество всех выпуклых подмножеств пространства E векторным пространством?

♦ Пусть $M \subset E$ — выпуклое множество и α — некоторое число. Доказать, что множество $\alpha M = \{x \in E | x = \alpha y, y \in M\}$ выпукло. Будет ли множество всех выпуклых подмножеств пространства E векторным пространством?

Возьмем $x_1, x_2 \in \alpha M$. Тогда $\exists y_1, y_2 \in M : x_1 = \alpha y_1,\ x_2 = \alpha y_2$. Нам известно, что

$$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in M,$$

т.е. M — выпуклое. Проверим для αM

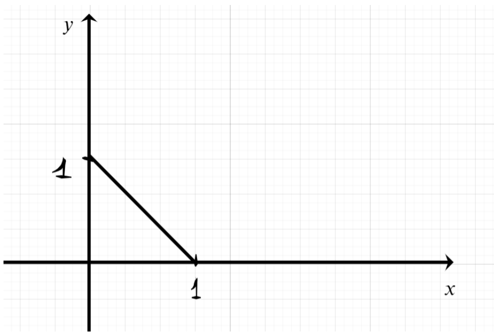
$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \lambda(\alpha y_1) + (1-\lambda)(\alpha y_2) = \alpha(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in \alpha M.$$

Что означает выпуклость αM.

Для второго пункта приведем пример. Рассмотрим $E = \mathbb{R}^2$ и на нем множества

$$A = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}.$$

Они выпуклы. Но если взять $C = A \cup B$, то оно уже не будет выпуклым, т.к. мы не сможем провести отрезок между $(0, 1)$ и $(1, 0)$



⊠

15. Будет ли замыкание выпуклого множества $M \subset E$ в нормированном векторном пространстве E выпуклым множеством? Ответ обоснуйте.

♦ Рассмотрим замыкание $\overline{M}$ множества $M \subset E$. Замыкание множества представляет собой объединение внутренних и предельных точек множества. Пусть $x, y \in \overline{M}$ — предельные точки M (иначе очевидно выполняется). Тогда в M найдутся последовательности, которые сходятся к этим точкам. Пусть это x_n и y_n. Очевидно, что раз все точки этих последовательностей лежат в M, то

$$\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \in M.$$

При стремлении $n \to \infty$ получим

$$\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \to \lambda x + (1-\lambda) y \in \overline{M}.$$

Значит $\overline{M}$ выпукло. ⊠

16. Пусть $A, B \subset E$ - замкнутые множества и их пересечение $A \cap B$ пусто. Может ли расстояние $\rho(A, B) = 0$?

♦ От противного. Пусть $A, B \subset E$ — замкнутые множества и $A \cap B = \varnothing$, причем $\rho(A, B) = 0$. Поскольку $\rho(A, B) = \rho(a, b) = 0$, $a \in A$, $b \in B$, то $a = b$. Но $A \cap B = \varnothing$. Получили противоречие. ⊠

17. Пусть M и N - подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что M и N - подпространство в H.

18. Пусть $M, N \subset H$ и $H = M + N$ Верно ли, что $N = M^{\perp}$.

19. Пусть $M, N \subset H$ такие, что любой $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = y + z, y \in N, z \in M$. Следует ли отсюда, что N и M - подпространства в H. Ответ обосновать.

20. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением выполнено равенство

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

♦ В пространстве введено скалярное произведение $\Rightarrow$ можно воспользоваться равенством параллелограмма

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\Big(\|z - y - (z - x)\|^2 + \|z - x + z - y\|^2 \Big) = \\ = \frac{1}{2}\|x - y\| + \frac{1}{2}\|2z - (x + y)\| = \frac{1}{2}\|x - y\| + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|$$

⊠

21. Доказать, что в унитарном пространстве H элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

♦ Для доказательства воспользуемся аксимомами скалярного произведения:

$$\|\alpha x + \beta y\|^2 = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = (\alpha x, \alpha x) + (\alpha x, \beta y) + (\beta y, \alpha x) + (\beta y, \beta y) = \\ = \alpha\overline{\alpha}(x, x) + \alpha\overline{\beta}(x, y) + \beta\overline{\alpha}(y, x) + \beta\overline{\beta}(y, y) = |\alpha|^2 \|x\|^2 + |\beta|^2 \|y\|^2 + \alpha\overline{\beta}(x, y) + \beta\overline{\alpha}(y, x) = \\ = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 + \alpha\overline{\beta}(x, y) + \beta\overline{\alpha}(y, x).$$

Для того, чтобы нужное нам равенство выполнялось, необходимо, чтобы

$$\alpha\overline{\beta}(x, y) + \beta\overline{\alpha}(y, x) = 0.$$

Если $\alpha, \beta \neq 0$, то это возможно лишь при условии

$$(x, y) = (y, x) = 0 \Longleftrightarrow x \perp y.$$

⊠

22. Доказать, что в пространстве $C[a,b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.

   ⧫ Зададим скалярное произведение в $C[a,b]$ согласованное с нормой как

$$(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t)y(t)|.$$

   Проверим, выполняются ли аксиомы скалярного произведения:

   (a) $(x,x) \geqslant 0$, $(x,x) = 0 \iff x = 0$ очевидно выполняется.

   (b) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$.

$$\max_{t\in[a,b]} |\alpha x(t)y(t)| = |\alpha| \max_{t\in[a,b]} |x(t)y(t)|,$$

   таким образом, эта аксиома, вообще говоря, не выполняется.

⊠

23. Пусть $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(y^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty} \subset E$ - фундаментальные последовательности. Доказать, что числовая последовательность $\lambda_n = \|x^{(n)}) - y^{(n)})\|$ сходится.

   ⧫ $(x_n), (y_n) \subset E$ — последовательности Коши $\Rightarrow$ каждая из них имеет предел

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

   Тогда распишем

$$\lambda_n = \|x_n - y_n\| = \|x_n - x + x - y + y - y_n\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x - y\| + \|y - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x - y\|.$$

⊠

24. Доказать, что если отображение $f : X \to Y$ непрерывно, то для любого $A \subset X$ справедливо включение $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

25. Пусть множество $A \subset E$ фиксировано. Доказать, что функция $f(x) = = \rho(x,A)$ непрерывно отображает E в $\mathbb{R}$.

   ⧫ Докажем, что отображение является Липшицевым, а следовательно и равномерно непрерывным. Для этого мы воспользуемся свойством инфимума и неравенством треугольника.

$$|f(x) - f(y)| = |\rho(x,A) - \rho(y,A)| = \left| \inf_{a\in A} \|x - a\| - \inf_{a\in A} \|y - a\| \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \|x - a\| - \|y - a\| \right| \leqslant \|x - a - (y - a)\| = \|x - y\|.$$

   То есть отображение Липшицево, значит непрерывно. ⊠

26. Образует ли в пространстве $C[0,1]$ подпространство множество многочленов степени не выше чем n ?

   ⧫ Обозначим это множество как

$$P = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n | a_i \in \mathbb{R}\}.$$

   Чтобы оно являлось подпространством, необходимо, чтобы оно было замкнуто относительно тех же операций, что и $C[0,1]$. Проверим это:

(a) $\forall f(x), g(x) \in P \ f(x)+g(x) \in P$.

(b) $\forall f(x) \in P, \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha f(x) \in P$

При выполнении этих операций мы не выходим за границы множества P, следовательно, обе операции выполняются и P является подпространством $C[0,1]$. ⊠

27. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой. Доказать, что множество $\{t \in \mathbb{R} : f(t) < 1\}$ открыто на числовой прямой.

♦ Необходимо доказать, что $A = \{t \in \mathbb{R} | f(t) < 1\}$ открыто при условии, что f непрерывное. По определению открытого множества из того, что $\forall t_0 \in A \ \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset A$ следует, что $\forall t \in B(t_0, \delta) \Rightarrow t \in A$. То есть, нужно показать, что если $t \in B(t_0, \delta)$, а это значит $\|t - t_0\| < \delta$, то $t \in A$, что означает $f(t) < 1$. Воспользуемся условием непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t : \|t - t_0\| < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon.$$

$t \in B(t_0, \delta)$, значит $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = f(t_0) < 1$, т.к. $t_0 \in A$. Значит и $f(t) < 1$, то есть $t \in A$. ⊠

28. Пусть $f : X \to Y$ непрерывное отображение пространства X на все пространство Y, A - всюду плотное в X множество. Доказать, что $f(A)-$ множество, всюду плотное в Y.

29. Доказать, что множество $A \subset E$ является ограниченным тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x^{(n)} \in A$ и любой последовательности $\alpha_n \in \mathbb{C}, \alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ последовательность $\alpha_n x^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

♦ $\Rightarrow$) A ограничено, т.е. $\forall x \in A \ \exists M : \|x\| \leqslant M$

$$\left\|\alpha_n x^{(n)}\right\| = |\alpha_n| \left\|x^{(n)}\right\| \leqslant |\alpha_n| M \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

$\Leftarrow$) Возьмем $\alpha_n = 1$. Тогда если $\alpha_n x^{(n)} \to 0$, то $x^{(n)} \to 0$, т.е. множество ограничено. ⊠

30. Пусть $M, N \subset H$ - подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что $M + N$ - подпространство в H.

♦ Из условия следует, что мы можем представлять элементы $x \in M + N$ единственным образом как $x = m + n, m \in M, n \in N$. Исследуем замкнутость относительно сложения и относительно умножения на скаляр:

(a) $\forall m_1, m_2 \in M, \ n_1, n_2 \in N \ (m_1 + n_1) + (m_2 + n_2) = \underbrace{(m_1 + m_2)}_{\in M} + \underbrace{(n_1 + n_2)}_{\in N} \in M + N$

(b) $\forall m \in M, \ n \in N, \forall \alpha \in \mathbb{C} \ \alpha(m + n) = \underbrace{\alpha m}_{\in M} + \underbrace{\alpha n}_{\in N} \in M + N$

Значит $M + N$ удовлетворяет свойствам подпространства. ⊠

31. Пусть $E = E_1 \times E_2$, где $(E_1, \|\cdot\|_1), (E_2, \|\cdot\|_2)$ - нормированные векторные пространства. Будет ли E нормированным пространством относительно нормы

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$$

♦ Проверим выполнение аксиом нормы:

(a) Очевидно из свойств норм.

(b) $\|\alpha(x_1, x_2)\| = \|(\alpha x_1, \alpha x_2)\| = \|\alpha x_1\|_1 + \|\alpha x_2\|_2 = |\alpha|(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2)$

(c) $\|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| = \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\| = \|x_1 + y_1\|_1 + \|x_2 + y_2\|_2 \leqslant \|x_1\|_1 + \|y_1\|_1 + \|x_2\|_2 + \|y_2\|_2 = \|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\|$

⊠

32. В пространстве m ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup_i |x_i|$ построить замыкание множества

$$A = \left\{ x\,(x_1, \ldots, x_i, \ldots) : \sum_{i=1}^{n} |x_i| < \infty \right\}$$

33. Пусть $A, B \subset E$ - всюду плотные множества в нормированном пространстве E. Возможно ли, что $A \cap B = \varnothing$?

    ⧫ Если рассмотреть всюду плотные множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ в пространстве $\mathbb{R}$. Их пересечение $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \varnothing$ ⊠

34. Пусть E - вещественное нормированное пространство, $x, y \in E$. Доказать, что функция $f(t) = \|x - ty\|, t \in \mathbb{R}$, достигает своей точной нижней грани.

35. В пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $C^{(1)}[a, b]$ введем норму по формуле

$$\|x\| = \left(\int_a^b \left(|x(t)|^2 + |x'(t)|^2 \right) \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

    Будет ли пространство $C^1[a, b]$ банаховым?

    ⧫ Возьмем отрезок $[0, 1]$ и на нем последовательность Коши $x_n(t) = \sin(\pi n t)$. Она сходится поточечно к $x = 0$. Но $x_n'(t) = \pi n \cos(\pi n t)$ не сходится на отрезке. Таким образом, последовательность Коши не сходится по норме, а значит это пространство не является банаховым. ⊠

36. Пусть $A, B \subset E-$ произвольные множества в нормированном пространстве E, причем $\rho_x(A, B) = 0$. Возможно ли, что $\rho_y(f(A), f(b)) \neq 0$, если $f : X \to Y$ есть:

    - непрерывное отображение;
    - равномерно непрерывное отображение?

37. Доказать, что непрерывное отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, обладающее тем свойством, что образ каждого открытого множества есть открытое множество, - монотонная функция.

38. Привести пример последовательности непустых замкнутых множеств E_n в банаховом пространстве E таких, что

    (a) $E_{n+1} \subset E_n, n = 1, 2, \ldots;$

    (b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ пусто.

♦ Возьмем пространство $E = m$. В нем зададим

$$E_n = \{x \in m | x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)\}$$

Тогда

$$E_{n+1} = \{x \in m | x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, 0, \ldots)\}$$

Тогда $E_{n+1} \subset E_n$. $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$, т.к. присутствует последовательность вида $x = (1, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{k}, \ldots)$, у которой бесконечное число ненулевых элементов. Она не принадлежит ни одному E_n. ⊠

39. Между реками (непрерывными кривыми на плоскости, содержащими концы) Γ_1 и Γ_2, нужно построить канал (отрезок). Предположим, что расстояние между реками - длина самого короткого из возможных каналов, т. е.

$$\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min_{x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2} \|x - y\|.$$

Задает ли данная функция метрику на множестве всех рек?

40. Рассмотрим множество $C_\alpha[a, b], \alpha \in (0, 1]$, всех непрерывных на $[a, b]$ функций, для которых выполняется условие Гельдера

$$K_\alpha(x) = \sup_{t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} < +\infty$$

Покажите, что $C_\alpha[a, b]$ будет нормированным пространством, если в нем норму задать как

$$\|x\|_\alpha = \|x\|_{C[a,b]} + K_\alpha(x).$$

♦ Проверим выполнение аксиом нормы:

(a) $\|x\|_\alpha \geqslant 0$ (т.к. оба слагаемых неотрицательны) и $\|x\|_\alpha = 0 \iff x(t) = 0$ на $[a, b]$.

(b) $\|ax\|_\alpha = \max|ax(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2} \frac{|ax(t_1) - ax(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} =$
$= |a| \max|x(t)| + |a| \sup_{t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} = |a| \, \|x\|_\alpha$

(c) $\|x + y\|_\alpha = \max|x(t) + y(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2) + y(t_1) - y(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} \leqslant \max|x(t)| + \max|y(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} + \sup_{t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \neq t_2} \frac{|y(t_1) - y(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} = \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$

Все свойства выполнены, значит это пространство будет нормированным. ⊠