Вар 1.

1. $$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{10 r^8 \cos^3\theta \sin^3\theta (\cos 3\varphi + \sin\varphi)}{3} \\ u|_{r=4} = 6\sin^2\theta (\cos^3\theta - 2\cos\theta)\cos^2\varphi \end{cases} \quad (1)$$

Ищем решение задачи в виде

$u(r,\theta,\varphi) = v(r,\theta,\varphi) + w(r,\theta,\varphi)$, где

$$\begin{cases} \Delta v = \dfrac{10 r^8 \cos^3\theta \sin^3\theta (\cos 3\varphi + \sin\varphi)}{3}, \quad 0<r<4 \\ v|_{r=4} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad 0<r<4 \\ w|_{r=4} = 6\sin^2\theta(\cos^3\theta - 2\cos\theta)\cos^2\varphi \end{cases} \quad (3)$$

Ищем решение задачи (3).

Легко показать, что решение задачи (3) представимо в виде

$$w(r,\theta,\varphi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\, r^n \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

(слагаемое с $r^{-(n+1)}$ уходит, т.к. неогр.)

Подставим гран. условие:

$$w|_{r=4} = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\cdot 4^n \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) =$$

$$= 6\sin^2\theta(\cos^3\theta - 2\cos\theta)\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) =$$

$$= 3\sin^2\theta(\cos^3\theta - 2\cos\theta)\cdot\cos 0\varphi + 3\sin^2\theta(\cos^3\theta - 2\cos\theta)\cos 2\varphi$$

Тогда

$$A_{nm} = \begin{cases} A_{n0}, m=0 \\ A_{n2}, m=2 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}, \quad B_{nm}=0, \text{ отсюда}$$

$$u|_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{n0} P_n^{(0)}(\cos\theta) + A_{n2} P_n^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi\right)\cdot 1^n =$$

$$= 3\sin^2\theta(\cos^3\theta - 2\cos\theta) + 3\sin^2\theta(\cos^3\theta - 2\cos\theta)\cos 2\varphi$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n A_{n0} P_n^{(0)}(\cos\theta) = 3\sin^2\theta(\cos^3\theta - 2\cos\theta) \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n A_{n2} P_n^{(2)}(\cos\theta) = 3\sin^2\theta(\cos^3\theta - 2\cos\theta) \quad (5)$$

Найдем коэф-ты A_{n0}:

$$P_n^{(0)}(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Правая часть при замене $x=\cos\theta$ примет вид

$3(1-x^2)(x^3-2x) \Rightarrow$ старшая степень 5

$$\deg P_n^{(0)}(x) = 2n - n \le 5 \Rightarrow n \le 5$$

С помощью Wolfram вычислим:

$P_0^{(0)}(x) = 1$

$P_1^{(0)}(x) = x$

$P_2^{(0)}(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3^{(0)}(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4^{(0)}(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

$P_5^{(0)}(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

Подставим в (4):

$$A_{00} + 4A_{01}x + 4^2 A_{02}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1) + 4^3 A_{03}\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x) +$$
$$+ 4^4\cdot A_{04}\cdot\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) + 4^5\cdot A_{05}\cdot\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) =$$
$$= 3(1-x^2)(x^3-2x)$$

Приравняем коэф-ты при соотв. степенях:

$$x^5:\ 4^5\cdot A_{05}\cdot\frac{1}{8}\cdot 63 = -3 \Rightarrow A_{05} = \cancel{\frac{-1}{8064}} = -\frac{1}{2688}$$

$$x^4:\ 4^4 A_{04}\cdot\frac{1}{8}\cdot 35 = 0 \Rightarrow A_{04} = 0$$

$$x^3:\ 4^3 A_{03}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5 + 4^5\cdot\frac{1}{2688}\cdot\frac{1}{8}\cdot 70 = 3+6 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{03} = \cancel{\frac{82}{720}} = \cancel{\frac{41}{360}} = \frac{7}{240}$$

$$x^2:\ 4^2\cdot A_{02}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 - 4^4\cdot 0\cdot\frac{1}{8}\cdot 30 = 0 \Rightarrow A_{02} = 0$$

$$\cancel{x:\ 4A_{01} - 4^3\cdot\frac{82}{720}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 + 4^5\cdot\frac{1}{8064}\cdot\frac{1}{8}\cdot 15 = -6 \Rightarrow}$$

$$\cancel{\Rightarrow A_{01} = \frac{493}{420} = -169}$$

$$x^0:\ A_{00} - 4^2\cdot 0\cdot\frac{1}{2} + 4^4\cdot 0\cdot\frac{1}{8}\cdot 3 = 0 \Rightarrow A_{00} = 0$$

$$x:\ 4A_{01} - 4^3 A_{03}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 + 4^5 A_{05}\cdot\frac{1}{8}\cdot 15 = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{01} = -\frac{27}{16}$$

Найдем из (5) коэф-ты A_{n2}:

Правая часть: $\deg\left(3(1-x^2)(x^3-2x)\right) = 5$

$$\deg P_n^{(2)}(x) = \deg\left(\frac{1-x^2}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^n\right) = 2+2n-(n+2) = n \le 5$$

С помощью Wolfram вычислим

$P_2^{(2)}(x) = 3 - 3x^2$

$P_3^{(2)}(x) = 15x(1-x^2)$

$P_4^{(2)}(x) = \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2)$

$P_5^{(2)}(x) = \frac{105}{2}(3x^3-x)(1-x^2)$

Подставим в (5):

$4^2 A_{22} \cdot 3(\cancel{1-x^2}) + 4^3 A_{32} \cdot 15x(\cancel{1-x^2}) + 4^4 \cdot A_{42} \cdot \frac{15}{2}(7x^2-1)(\cancel{1-x^2}) +$

$+ 4^5 \cdot A_{52} \cdot \frac{105}{2}(3x^3-x)(\cancel{1-x^2}) = 3(\cancel{1-x^2})(x^3-2x)$

$x^3: \; 4^5 A_{52} \cdot \frac{105}{2} \cdot 3 = 3 \Rightarrow A_{52} = \frac{1}{53760}$

$x^2: \; 4^4 A_{42} \cdot \frac{15}{2} \cdot 7 = 0 \Rightarrow A_{42} = 0$

$x^1: \; 4^3 A_{32} \cdot 15 - 4^5 A_{52} \cdot \frac{105}{2} = -6 \Rightarrow A_{32} = -\frac{7}{960}$

$x^0: \; 4^2 A_{22} \cdot 3 - 4^4 \cdot 0 \cdot \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow A_{22} = 0$

Также $A_{02} = A_{12} = 0$.

Таким образом, можем построить решение:

$$w(r,\Theta,\varphi) = \left[-\frac{1}{2688} \cdot r^5 \cdot P_5^{(0)}(\cos\Theta) + \frac{7}{240} \cdot r^3 \cdot P_3^{(0)}(\cos\Theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{27}{16} \cdot r \cdot P_1^{(0)}(\cos\Theta)\right] + \left[\frac{1}{53760} \cdot r^5 \cdot P_5^{(2)}(\cos\Theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{7}{960} r^3 \cdot P_3^{(2)}(\cos\Theta)\right] \cos 2\varphi$$

Далее ищем решение задачи (2)

По виду правой части мы можем записать представление

$$\frac{10}{3} r^8 \cos^3\Theta \sin^3\Theta \cos 3\varphi + \frac{10}{3} r^8 \cos^3\Theta \sin^3\Theta \sin\varphi =$$

$$= r^8 \cos 3\varphi \sum_{n=0}^{\infty} A_{n3} P_n^{(3)}(\cos\Theta) +$$

$$+ r^8 \sin\varphi \sum_{n=0}^{\infty} B_{n1} P_n^{(1)}(\cos\Theta)$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n3} P_n^{(3)}(\cos\Theta) = \frac{10}{3} \cos^3\Theta \sin^3\Theta \qquad (6)$$

Для правой части $\deg\left(\frac{10}{3} x^3 \cdot (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right) = 6$

$$\deg\left(P_n^{(3)}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n+3}}{dx^{n+3}}(x^2-1)^n\right) = 3+2n-(n+3) =$$

$$= n \leq 6$$

С помощью Wolfram вычислим

$$P_3^{(3)}(x) = 15(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_4^{(3)}(x) = 105x(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_5^{(3)}(x) = \frac{105}{2}(9x^2-1)(1-x^2)^{3/2}$$

$$P_6^{(3)}(x) = \frac{315}{2}(11x^3-3x)(1-x^2)^{3/2}$$

Подставим в (6) и получим

$$15A_{33} + 105x A_{43} + \frac{105}{2}(9x^2-1)A_{53} + \frac{315}{2}(11x^3-3x)A_{63} =$$

$$= \frac{10}{3}x^3$$

Тогда

$x^3: \frac{315}{2}\cdot 11 \cdot A_{63} = \frac{10}{3} \Rightarrow A_{63} = \frac{4}{2079}$

$x^2: \frac{105}{2}\cdot 9 \cdot A_{53} = 0 \Rightarrow A_{53} = 0$

$x: 105 A_{43} - 3\cdot\frac{315}{2}\cdot A_{63} = 0 \Rightarrow A_{43} = \frac{2}{231}$

$x^0: 15 A_{33} - \frac{105}{2} A_{53} = 0 \Rightarrow A_{33} = 0 = A_{23} = A_{13} = A_{03}$

Аналогично для второго слагаемого

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n1} P_n^{(1)}(\cos\Theta) = \frac{10}{3}\cos^3\Theta\sin^3\Theta \quad (7) \Rightarrow$$

$$\deg\left(P_n^{(1)}(x)\right) = \deg\left(\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n\right) =$$

$$= 1 + 2n - (n+1) = n \leq 6$$

Тогда

$P_1^{(1)}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\quad P_4^{(1)}(x) = \frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$P_2^{(1)}(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\quad P_5^{(1)}(x) = \frac{15}{8}(21x^4-14x^2+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$P_3^{(1)}(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\quad P_6^{(1)}(x) = \frac{21}{8}(33x^5-30x^3+5x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

Подставим в (7)

$$A_{11} + \cancel{\tfrac{5}{2}(7x^3} + 3x A_{21} + \frac{3}{2}(5x^2-1)A_{31} + \frac{5}{2}(7x^3-3x)A_{41} +$$

$$+ \frac{15}{8}(21x^4-14x^2+1)A_{51} + \frac{21}{8}(33x^5-30x^3+5x)A_{61} = \frac{10}{3}x^3(1-x^2)$$

$x^5: \frac{21}{8}\cdot 33 A_{61} = -\frac{10}{3} \Rightarrow A_{61} = -\frac{80}{2079}$

$x^4: A_{51} = 0$

$x^3: \frac{5}{2}\cdot 7 A_{41} + \frac{21}{8}\cdot(-30)A_{61} = \frac{10}{3} \Rightarrow A_{41} = \frac{4}{231}$

x^2: $A_{31} = 0$

x: $3A_{21} - \frac{5}{2} \cdot 3A_{41} + \frac{21}{8} \cdot 5A_{61} = 0 \Rightarrow A_{21} = \frac{40}{189}$

$A_{11} = 0 = A_{01}$

Таким образом, мы можем записать неоднородность в виде

$$r^8 \cos 3\varphi \left(\frac{4}{2079} P_6^{(3)}(\cos\theta) + \frac{2}{231} P_4^{(3)}(\cos\theta) \right) +$$

$$+ r^8 \sin\varphi \left(-\frac{80}{2079} P_6^{(1)}(\cos\theta) + \frac{4}{231} P_4^{(1)}(\cos\theta) \right) =$$

$$= \left[\text{замена } \begin{array}{l} \sin m\varphi\, P_n^{(m)}(\cos\theta) = Y_n^{(m)}(\varphi,\theta) \\ \cos m\varphi\, P_n^{(m)}(\cos\theta) = Y_n^{(m)}(\varphi,\theta) \end{array} \right] =$$

$$= r^8 \left[\left(\frac{4}{2079} Y_6^{(3)}(\varphi,\theta) + \frac{2}{231} Y_4^{(3)}(\varphi,\theta) \right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{80}{2079} Y_6^{(1)}(\varphi,\theta) + \frac{4}{231} Y_4^{(1)}(\varphi,\theta) \right) \right] \quad (8)$$

Таким образом, мы будем искать решение в виде

$$\mathcal{U}(r,\theta,\varphi) = Z_1(r) Y_6^{(3)}(\varphi,\theta) + Z_2(r) Y_4^{(3)}(\varphi,\theta) +$$

$$+ Z_3(r) Y_6^{(1)}(\varphi,\theta) + Z_4(r) Y_4^{(1)}(\varphi,\theta)$$

Поскольку

$$\Delta \mathcal{U} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \mathcal{U}_r\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathcal{U}_\theta \sin\theta\right) + \frac{\mathcal{U}_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2\theta},$$ то,

подставляя, получаем

$$\Delta\sigma = \frac{Y_6^3}{r^2}\left(2rZ_1' + r^2 Z_1''\right) + \frac{Z_1}{r^2}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left(Y_6^3 \sin\theta\right) + \frac{Y^3_{6\varphi\varphi}}{\sin^2\theta} + 42\,Y_6^3}_{} - 42\,Y_6^3\Big) + \frac{Y_4^3}{r^2}\left(2rZ_2' + r^2 Z_2''\right) +$$

$= 0$, т.к. сферич ф-ии

$$+ \frac{Z_2}{r^2}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_4^3 \sin\theta\right) + \frac{Y^3_{4\varphi\varphi}}{\sin^2\theta} + 20\,Y_4^3}_{=0} - 20\,Y_4^3\Big) +$$

$$+ \frac{Y_6^1}{r^2}\left(2rZ_3' + r^2 Z_3''\right) + \frac{Z_3}{r^2}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left(Y_6^1 \sin\theta\right) + \frac{Y^1_{6\varphi\varphi}}{\sin^2\theta} + 42\,Y_6^1}_{=0} - 42\,Y_6^1\Big) + \frac{Y_4^1}{r^2}\left(2rZ_4' + r^2 Z_4''\right) +$$

$$+ \frac{Z_4}{r^2}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left(Y_4^1 \sin\theta\right) + \frac{Y^1_{4\varphi\varphi}}{\sin^2\theta} + 20\,Y_4^1}_{=0} - 20\,Y_4^1\Big) = (8)$$

Таким образом, мы можем составить граничные задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\left(2rZ_1' + r^2 Z_1''\right) - 42\,\frac{Z_1}{r^2} = \frac{4}{2079} r^8 \implies \\ Z_1(4) = 0 \end{cases}$$

$$r^2 Z_1'' + 2rZ_1' - 42 Z_1 = \frac{4}{2079} r^{10}$$ – ур-е Эйлера

Общее реш-е

$$Z_1^{oo}(r) = C_1 r^6$$

Частное реш-е ищем в виде

$$Z_1^{чн}(r) = C r^{10} \implies$$

$$10\cdot 9\cdot Cr^{10} + 2\cdot 10\, Cr^{10} - 42\, Cr^{10} = \frac{4}{2079} r^{10}$$

Тогда $C = \frac{4}{2079 \cdot 68} = \frac{1}{35343} \Rightarrow$

$Z_1(r) = C_1 r^6 + \frac{r^{10}}{35343}$. Подставим гр. усл-е

$Z_1(4) = C_1 4^6 + \frac{4^{10}}{35343} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{256}{35343} \Rightarrow$

$Z_1(r) = \frac{-256 r^6 + r^{10}}{35343}$

По аналогии решаем остальные граничн. задачи:

$$\begin{cases} r^2 Z_2'' + 2r Z_2' - 20 Z_2 = \frac{2}{231} r^{10} \\ Z_2(4) = 0 \end{cases}$$

$Z_2^{oo}(r) = C_1 r^4$

$Z_2^{чн}(r) = C r^{10}$

$10 \cdot 9 \cdot C r^{10} + 2 \cdot 10 C r^{10} - 20 C r^{10} = \frac{2}{231} r^{10} \Rightarrow C = \frac{1}{10395}$

$Z_2(r) = C_1 r^4 + \frac{r^{10}}{10395}$

$Z_2(4) = C_1 4^4 + \frac{4^{10}}{10395} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{4096}{10395}$

$Z_2(r) = \frac{-4096 r^4 + r^{10}}{10395}$

$$\begin{cases} r^2 Z_3'' + 2r Z_3' - 42 Z_3 = \frac{-80}{2079} r^{10} \\ Z_3(4) = 0 \end{cases}$$

$Z_3(r) = C_1 r^6 - \frac{r^{10} \cdot 20}{35343}$

$Z_3(4) = C_1 4^6 - \frac{4^{10} \cdot 20}{35343} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{5120}{35343}$

$$Z_3(r) = \frac{5120\, r^6 - 20 r^{10}}{35343}$$

$$\begin{cases} r^2 Z_4'' + 2r Z_4' - 20 Z_4 = \frac{4}{231} r^{10} \\ Z_4(4) = 0 \end{cases}$$

$$Z_4(r) = C_1 r^4 + \frac{2r^{10}}{10395}$$

$$Z_4(4) = C_1 4^4 + \frac{2 \cdot 4^{10}}{10395} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{-8192}{10395}$$

$$Z_4(r) = \frac{-8192\, r^4 + 2r^{10}}{10395}$$

Таким образом, мы можем записать решение задачи (1):

$$u(r,\theta,\varphi) = \left[\frac{r^6(r^4-256)}{35343} \cdot P_6^{(3)}(\cos\theta) + \frac{r^4(r^6-4096)}{10395} \cdot P_4^{(3)}(\cos\theta)\right] \cdot \cos 3\varphi + \left[\frac{r^6(5120-20r^4)}{35343} \cdot P_6^{(1)}(\cos\theta) + \frac{r^4(2r^6-8192)}{10395} \cdot P_4^{(1)}(\cos\theta)\right] \sin\varphi + \left[-\frac{r^5 \cdot P_5^{(0)}(\cos\theta)}{2688} + \frac{7r^3 \cdot P_3^{(0)}(\cos\theta)}{240} - \frac{27}{16} r \cdot P_1^{(0)}(\cos\theta)\right] + \left[\frac{r^5 \cdot P_5^{(2)}(\cos\theta)}{53760} - \frac{7r^3 P_3^{(2)}(\cos\theta)}{960}\right] \cos 2\varphi.$$

②
$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ U\big|_{r=2} = 8\cos^4\theta \sin^2\theta \sin 2\varphi \\ U\big|_{r=6} = 7\cos\theta \sin^3\theta \cos^3\varphi \end{cases} \qquad (9)$$

Можно показать, что решение можно искать в виде

$$U(r,\varphi,\theta) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \Big[\big(A_{nm} r^n + B_{nm} r^{-(n+1)}\big)\cos m\varphi +$$

$$+ \big(C_{nm} r^n + D_{nm} r^{-(n+1)}\big)\sin m\varphi \Big] P_n^{(m)}(\cos\theta) \qquad (10)$$

Подставим первое гранич. условие в (10)

$$U\big|_{r=2} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \Big[\big(A_{nm} 2^n + B_{nm} 2^{-(n+1)}\big)\cos m\varphi +$$

$$+ \big(C_{nm} 2^n + D_{nm} 2^{-(n+1)}\big)\sin m\varphi \Big] P_n^{(m)}(\cos\theta) = 8\cos^4\theta \sin^2\theta \sin 2\varphi$$

Отсюда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(C_{n2} 2^n + D_{n2} 2^{-(n+1)}\big) P_n^{(2)}(\cos\theta) = 8\cos^4\theta \sin^2\theta$$

$$\deg\big(8x^4(1-x^2)\big) = 6$$

$$\deg\big(P_n^{(2)}(x)\big) = \deg\left(\frac{1-x^2}{2^n \cdot n!}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^n\right) =$$

$$= 2+2n-(n+2) = n \le 6$$

Многочлен $P_n^{(2)}$ мы вычислили в предыдущей задаче. Тогда

$$\left(C_{62}2^{6}+D_{62}2^{-(6+1)}\right)P_6^{(2)}(\cos\Theta)+\left(C_{52}2^{5}+D_{52}2^{-(5+1)}\right)\cdot$$

$$\cdot P_5^{(2)}(\cos\Theta)+\left(C_{42}2^{4}+D_{42}2^{-(4+1)}\right)P_4^{(2)}(\cos\Theta)+$$

$$+\left(C_{32}2^{3}+D_{32}2^{-(3+1)}\right)P_3^{(2)}(\cos\Theta)+$$

$$+\left(C_{22}2^{2}+D_{22}2^{-(2+1)}\right)P_2^{(2)}(\cos\Theta)+\cancel{(C_{12}2}=$$

$$=8\cos^4\Theta\sin^2\Theta$$

Представим правую часть как лин. комбинацию мн-ов $P_n^{(2)}(\cos\Theta)$:

$$8\cos^4\Theta\sin^2\Theta=\frac{64}{3465}P_6^{(2)}(\cos\Theta)+\frac{32}{385}P_4^{(2)}(\cos\Theta)+\frac{8}{63}P_2^{(2)}(\cos\Theta)$$

Откуда

$$\begin{cases} C_{62}2^{6}+D_{62}2^{-7}=\frac{64}{3465}\\ C_{42}2^{4}+D_{42}2^{-5}=\frac{32}{385}\\ C_{22}\cdot 2^{2}+D_{22}\cdot 2^{-3}=\frac{8}{63}\end{cases}$$

Подставляем в (10) 2-ое гран. усл-е:

$$\sigma|_{r=6}=\sum_{n,m=0}^{\infty}\left[\left(A_{nm}6^{n}+B_{nm}6^{-(n+1)}\right)\cos m\varphi+\right.$$

$$\left.+\left(C_{nm}6^{n}+D_{nm}6^{-(n+1)}\right)\sin m\varphi\right]P_n^{(m)}(\cos\Theta)=7\cos\Theta\sin^3\Theta\cos^3\varphi=$$

$$=\frac{7}{4}\cos\Theta\sin^3\Theta\cos3\varphi+\frac{21}{4}\cos\Theta\sin^3\Theta\cos\varphi \qquad (11)$$

Откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{n3}6^{n}+B_{n3}6^{-(n+1)}\right)P_n^{(3)}(\cos\Theta)=\frac{7}{4}\cos\Theta\sin^3\Theta$$

Тогда $\deg\left(\frac{7}{4}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right) = 4$

$$\deg\left(P_n^{(3)}(\cos\Theta)\right) = \deg\left(\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{2^n \cdot n!}\cdot\frac{d^{n+3}}{dx^{n+3}}(x^2-1)^n\right) =$$

$$= 3+2n-(n+3) = n \leq 4$$

Тогда из wolfram:

$P_3^{(3)}(x) = 15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow$

$P_4^{(3)}(x) = 105x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$\left(A_{43}\sigma^4 + B_{43}\sigma^{-5}\right)P_4^{(3)}(\cos\Theta) + \left(A_{33}\sigma^3 + B_{33}\sigma^{-4}\right)\cdot$$

$$\cdot P_3^{(3)}(\cos\Theta) = \frac{7}{4}\cos\Theta\sin^3\Theta = \frac{7}{420}P_4^{(3)}(\cos\Theta)$$

Откуда

$$\left\{ A_{43}\sigma^4 + B_{43}\sigma^{-5} = \frac{7}{420} \right.$$

Также из (11) можно получить

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{n1}\sigma^n + B_{n1}\sigma^{-(n+1)}\right)P_n^{(1)}(\cos\Theta) = \frac{21}{4}\cos\Theta\sin^3\Theta$$

$$\deg\left(P_n^{(1)}(\cos\Theta)\right) = \deg\left(\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2^n \cdot n!}\cdot\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n\right) =$$

$$= \left(1+2n-(n+1)\right) = n \leq 4$$

$P_1^{(1)}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$P_2^{(1)}(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$

$P_3^{(1)}(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$P_4^{(1)}(x) = \frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\left(A_{41}6^4+B_{41}6^{-5}\right)P_4^{(1)}(\cos\Theta)+\left(A_{31}6^3+B_{31}6^{-4}\right)\cdot P_3^{(1)}(\cos\Theta)+\left(A_{21}6^2+B_{21}6^{-3}\right)P_2^{(1)}(\cos\Theta)+$$

$$+\left(A_{11}6+B_{11}6^{-2}\right)P_1^{(1)}(\cos\Theta)=\frac{21}{4}\cos\Theta\sin^3\Theta=$$

$$=-\frac{6}{20}P_4^{(1)}(\cos\Theta)+P_2^{(1)}(\cos\Theta)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A_{41}6^4+B_{41}6^{-5}=-\frac{3}{10}\\ A_{21}6^2+B_{21}6^{-3}=1\end{cases}$$

Итак, мы получили 3 системы для коэфф-ов. Но они имеют в 2 раза меньше ур-й, чем неизвестных. Дополнительное ур-е можно неявно вытянуть из поставленных граничных условий:

$$\begin{cases}C_{62}2^6+D_{62}2^{-7}=\frac{64}{3465}\\ C_{62}6^6+D_{62}6^{-7}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}A_{43}6^4+B_{43}6^{-5}=\frac{7}{420}\\ A_{43}2^4+B_{43}2^{-5}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_{42}\cdot2^4+D_{42}2^{-5}=\frac{32}{385}\\ C_{42}6^4+D_{42}6^{-5}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}A_{41}6^4+B_{41}6^{-5}=-\frac{3}{10}\\ A_{41}2^4+B_{41}2^{-5}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_{22}\cdot2^2+D_{22}2^{-3}=\frac{8}{63}\\ C_{22}\cdot6^2+D_{22}6^{-3}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}A_{21}6^2+B_{21}6^{-3}=1\\ A_{21}2^2+B_{21}2^{-3}=0\end{cases}$$

Из Wolfram получим

$$C_{62}=-\frac{1}{5\,524\,325\,730},\quad D_{62}=\frac{725\,594\,112}{306\,906\,985}$$

$$C_{42}=-\frac{1}{3\,788\,785},\quad D_{42}=\frac{10\,077\,696}{3\,788\,785}$$

$C_{22} = -\dfrac{1}{7623}$, $D_{22} = \dfrac{864}{847}$

$A_{43} = \dfrac{81}{6298240}$, $B_{43} = -\dfrac{324}{49205}$

$A_{41} = -\dfrac{729}{3149120}$, $B_{41} = \dfrac{5832}{49205}$

$A_{21} = \dfrac{27}{968}$, $B_{21} = -\dfrac{108}{121}$

Таким образом, решение задачи (9) можно записать как

$$U(r,\theta,\varphi) = \Bigg[\Bigg\{\left(-\frac{r^6}{5\,524\,325\,730} + \frac{725\,594\,112\, r^{-7}}{306\,906\,985}\right)P_6^{(2)}(\cos\theta) +$$

$$+\left(-\frac{r^4}{3\,788\,785} + \frac{10\,077\,696}{3\,788\,785}r^{-5}\right)P_4^{(2)}(\cos\theta)\Bigg\} +$$

$$+\left(-\frac{r^2}{7623} + \frac{864\, r^{-3}}{847}\right)P_2^{(2)}(\cos\theta)\Bigg]\sin 2\varphi +$$

$$+\left[\left(\frac{81\, r^4}{6\,298\,240} - \frac{324\, r^{-5}}{49\,205}\right)P_4^{(3)}(\cos\theta)\right]\cos 3\varphi +$$

$$+\left[\left(-\frac{729\, r^4}{3\,149\,120} + \frac{5832\, r^{-5}}{49\,205}\right)P_4^{(1)}(\cos\theta) + \left(\frac{27}{968}r^2 - \frac{108}{121}r^{-3}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, P_2^{(1)}(\cos\theta)\right]\cos\varphi.$$