МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра вычислительной математики

Лабораторная работа №3

«Исследование устойчивости разностных схем»

Вариант 2

Выполнил:

Бовт Тимофей Анатольевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:

Репников Василий Иванович

Минск, 2024 г.

Постановка задачи

Поставлена задача Коши для уравнения переноса

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

где

- $a = 1$ – скорость бегущей волны;
- $u_0(x) = x^2$.

1 Построение разностной схемы

Поставленная задача (1) имеет точное решение. Решением задачи (1) является «бегущая волна»

$$u(x, t) = u_0(x - at).$$

Таким образом, в рамках поставленных условий, задача (1) имеет аналитическое решение

$$u(x, t) = (x - t)^2.$$

Пусть задана равномерная сетка узлов

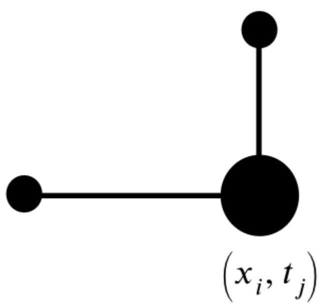
$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau,$$

где

$$\omega_h = \{x_k = kh,\ k = 0, \pm 1, \ldots, h > 0\},\ \omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots,\ \tau > 0\}.$$

По условию также задан следующий шаблон

$$Ш(x, t) = \{(x, t),\ (x - h, t),\ (x, t + \tau)\}.$$



Используя предложенный шаблон на заданной сетке узлов построим разностную схему в безиндексной форме, заменяя дифференциальные производные разностными аналогами

$$\begin{cases} y_t + a y_{\overline{x}} = 0,\ (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x),\ x \in \omega_h. \end{cases} \tag{2}$$

Разностная схема (2) также может быть записана в индексной форме в виде

$$\begin{cases} \dfrac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a\dfrac{y_k^j - y_{k-1}^j}{h} = 0,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots, j = 0, 1, 2, \ldots, \\ y_k^0 = u_0(x),\ k = 0, \pm 1, \ldots. \end{cases} \tag{3}$$

Нужно вычислить погрешность аппроксимации разностной схемы. Поскольку мы имеем одно начальное условие, то погрешность аппроксимации всей схемы будет определяться только погрешностью аппроксимации уравнения. Поэтому для любой точки $(x,t) \in \omega_{h\tau}$ погрешность аппроксимации будет равна

$$\Psi(x,t) = u_t + au_{\overline{x}} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) + a\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2)\right) = O(h+\tau),$$

то есть данная разностная схема обладает первым порядком аппроксимации по x и первым порядком аппроксимации по t.

2 Исследование устойчивости разностной схемы спектральным методом

Исследование устойчивости по спектральному методу предусматривает подстановку следующего выражения в разностное уравнение

$$y_k^j = q^j e^{ik\varphi},\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Итак, подставляя это выражение в разностное уравнение схемы (3), получим

$$\frac{q^{j+1}e^{ik\varphi} - q^j e^{ik\varphi}}{\tau} + a\frac{q^j e^{ik\varphi} - q^j e^{i(k-1)\varphi}}{h} = 0.$$

Сокращая общие множители, получим

$$\frac{q-1}{\tau} + a\frac{1-e^{-i\varphi}}{h} = 0.$$

Таким образом, можно выразить

$$q = 1 - \gamma(1 - e^{-i\varphi}),\ \gamma = \frac{a\tau}{h}.$$

Далее по спектральному методу для устойчивости необходимо выполнение условия $|q|^2 \leqslant 1$. Рассмотрим это условие

$$\begin{aligned} |q|^2 &= |1-\gamma(1-\cos\varphi + i\sin\varphi)|^2 = (1-\gamma(1-\cos\varphi))^2 + (\gamma\sin\varphi)^2 = \\ &= 1 - 2\gamma(1-\cos\varphi) + \gamma^2(1-\cos\varphi)^2 + \gamma^2\sin^2\varphi = 1 - 2\gamma(1-\cos\varphi) + \gamma^2 - 2\gamma^2\cos\varphi + \gamma^2 = \\ &= 1 - 2\gamma(1-\cos\varphi) + 2\gamma^2(1-\cos\varphi) = 1 + 2\gamma(\gamma-1)(1-\cos\varphi) \leqslant 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$2\gamma(\gamma-1)(1-\cos\varphi) \leqslant 0.$$

Поскольку $1 - \cos\varphi > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi)$, то получаем систему условий для устойчивости

$$\begin{cases} \gamma \geqslant 0, \\ \gamma \leqslant 1. \end{cases} \tag{4}$$

То есть при выполнении условий (4) разностная схема будет устойчива по спектральному методу.

Подставляя известное нам значение $a = 1$, получим, что

$$0 \leqslant \frac{\tau}{h} \leqslant 1,$$

или

$$0 \leqslant \tau \leqslant h.$$

3 Исследование устойчивости разностной схемы с помощью принципа максимума

Следуя принципу максимума, в качестве точки для исследования устойчивости возьмем точку (x_i, t_{j+1}). Таким образом, мы можем переписать аппроксимацию основного уравнения переноса

$$\frac{1}{\tau}y_k^{j+1} = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{a}{h}\right) y_k^j + \frac{a}{h}y_{k-1}^j.$$

Можем записать коэффициенты, которые требуются для проверки условий устойчивости

$$A(x) = \frac{1}{\tau},\ B_1 = \frac{1}{\tau} - \frac{a}{h},\ B_2 = \frac{a}{h},$$

$$D(x) = A(x) - (B_1 + B_2) \equiv 0,\ F(x) \equiv 0.$$

Проверим, выполняются ли соответствующие условия устойчивости:

$$A(x) = \frac{1}{\tau} > 0, B_1 = \frac{1}{\tau} - \frac{a}{h} \geqslant 0,\ B_2 = \frac{a}{h} > 0,$$

причем второе условие выполняется, когда из условия $B_1 \geqslant 0$ следует, что $\dfrac{a\tau}{h} \leqslant 1$, или, что то же самое,

$$\tau \leqslant \frac{h}{a}, \tag{5}$$

называемое условием Куранта.

Подставляя известное нам значение $a = 1$, получим, что

$$\tau \leqslant h.$$

Таким образом, мы можем считать, что условия устойчивости полученные по спектральному методу и по принципу максимума, совпадают.

4 Машинная реализация разностной схемы

Схему (3) можно реализовать по рекуррентной формуле вида

$$\begin{cases} y_k^{j+1} = (1+\gamma)y_k^j - \gamma y_{k+1}^j,\ k = \pm 1, \pm 2 \ldots,\ j = 0, 1, \ldots, \\ y_k^0 = u_0(x_k),\ k = 0, \pm 1, \ldots. \end{cases} \tag{6}$$