Устойчивость СтЛВУ.

Введем аналогичные СтЛУ свойства и определения.

Рассмотрим уравнение
$$DX = AX + f(t),\ t \in \mathbb{I} = [t_0; +\infty) \tag{1}$$
с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$.

• *Решение $X_0(t)$ уравнения* (1) *называется* ***устойчивым по Ляпунову****, если*

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \forall X(t)\ \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X_0(t)\| < \varepsilon\ \forall t > t_0.$$

Таким образом, решение $X_0(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если оно непрерывно зависит от начальных данных на промежутке $\mathbb{I}$ вида $[t_0; +\infty)$.

• *Если кроме того $\lim\limits_{t\to+\infty} \|X(t) - X_0(t)\| = 0$, то решение $X_0(t)$ называется* ***асимптотически устойчивым****.*

Все решения уравнения либо одновременно устойчивы, либо нет.

• *Уравнение, все решения которого устойчивы, называется* ***устойчивым*** *(аналогично* ***неустойчивым****,* ***асимптотически устойчивым****).*

Устойчивость уравнения не зависит от неоднородности $f(t)$. Следовательно, в дальнейшем вместо (1) можно рассматривать соответствующее ему СтЛВУ $DX = AX$.

Устойчивость по Ляпунову.

Теперь введем теорему, с помощью которой и будем исследовать устойчивость уравнений.

Теорема (Критерий устойчивости)**.** *Уравнение $DX = AX + f(t)$ устойчиво $\Longleftrightarrow$ действительные части собственных значений матрицы A неположительны, причем собственным значениям с нулевой действительной частью в Жордановой матрице соответствует клетка размерности 1, то есть геометрическая и алгебраическая кратности совпадают.*

Пример 1. Исследовать на учтойчивость СтЛВУ вида $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 2$; $\lambda_2 = -4$. Геометрическая кратность значения $\lambda_1 = 0$ равна $r_1 = 2$. Следовательно, этому значению соответствуют две клетки Жордановой матрицы. Значит по критерию устойчивости СтЛВУ является устойчивым.

Ответ: Устойчиво.

Пример 2. Исследовать на учтойчивость СтЛВУ вида $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 5 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 3$; $\lambda_2 = -8$. Так как геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 0$ равна $r_1 = 2$, то данному собственному значению соответствуют 2 клетки Жордановой матрицы. Причем одна из этих клеток имеет размерность 2. Значит по критерию устойчивости СтЛВУ не является устойчивым.

Ответ: Неустойчиво.

Остальные уравнения рассматриваются аналогично. То есть

- находим собственные значения матрицы A;
- если среди собственных значений есть хотя бы одно с положительной действительной частью, то уравнение неустойчиво;
- если есть собственное значение равно нулю алгебраической кратности большей, чем 1, то находим его геометрическую кратность; если получается так, что клетка жордановой матрицы, соответствующая этому собственному значению имеет размерность больше 1, то СтЛВУ неустойчиво;
- иначе СтЛВУ устойчиво.

Асимптотическая устойчивость.

Основываясь на определении устойчивости, мы можем составить аналогичный критерий для исследования на асимптотическую устойчивость.

Теорема (Критерий асимптотической устойчивости)**.** *Уравнение $DX = AX + f(t)$ асимптотически устойчиво $\Longleftrightarrow$ действительные части собственных значений матрицы A отрицательны.*

Замечание. *Из критерия следует, что условие асимптотической устойчивости более строгое, чем устойчивости. Следовательно, если уравнение асимптотически устойчиво, то оно устойчиво. Обратное, вообще говоря, утверждать нельзя.*

- *Определитель порядка n вида*

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-(2n+1)} & a_{n-2n} & a_{n-(2n-1)} & a_{n-(2n-2)} & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

называется ***определителем Гурвица****, или* ***гурвицианом*** *($a_j = 0$, если $j < 0$).*

Теорема (Критерий Гурвица)**.** *Действительные части всех корней характеристического многочлена* $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ *матрицы* A *отрицательны* $\Longleftrightarrow$ *все главные миноры гурвициана положительны.*

Замечание. *Невыполнение критерия Гурвица (хотя бы один из главных миноров неположительный) не гарантирует неустойчивость.*

Пример 3. Исследовать на асимптотическую устойчивость уравнение вида $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для исследования данного уравнения составим характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 & 9 \\ 3 & 2-\lambda & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 6 = 0.$$

Не будем вычислять собственные значения, а составим Гурвициан этого многочлена:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = 4 > 0,\ \Delta_2 = 10 > 0,\ \Delta_3 = 68 > 0,\ \Delta_4 = -6 \cdot 68 < 0.$$

Следовательно, уравнение не является асимптотически устойчивым. Можно попытатться исследовать на устойчивость данное уравнение, но для этого уже нужно найти корни характеристического уравнения, а для этого необходимо разложить характеристический многочлен на простейшие множители. Возьмем $\lambda = 1$ и проверим, является ли он оно корнем. Подставим в характеристическое уравнение и получим $1 + 4 + 3 - 2 - 6 = 0$. Следовательно, $\lambda = 1$ является корнем, и уравнение не является устойчивым.

Ответ: Не является асимптотически устойчивым; неустойчиво.

Пример 4. Исследовать на асимптотическую устойчивость уравнение вида $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Построим характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 5 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 13\lambda^2 - 73\lambda - 53 = 0.$$

Домножим характеристическое уравнение на -1, чтобы старший коэффициент был равен 1. Построим Гурвициан характеристического многочлена:

$$\begin{vmatrix} 13 & 1 & 0 \\ 53 & 73 & 13 \\ 0 & 0 & 53 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = 13 > 0,\ \Delta_2 = 13 \cdot 73 - 53 > 0,\ \Delta_3 = 53 \cdot \Delta_2 > 0.$$

Следовательно, уравнение является асимптотически устойчивым по критерию асимптотической устойчивости.

Ответ: Асимптотически устойчиво. В общем и целом исследование СтЛВУ на асимптотическую устойчивость аналогично исследованию СтЛУ:

- строим характеристический многочлен матрицы A;
- если нет возможности сразу определить корни характеристического уравнения, то строим Гурвициан и исследуем его главные миноры; если хотя бы один минор неположителен, то уравнение не является асимптотически устойчивым и мы переходим к исследованию на устойчивость;
- если мы смогли определить собственные значения матрицы A, то их действительные части должны быть отрицательны; иначе уравнение не является асимптотически устойчивым и мы переходим к исследованию на устойчивость.

Рассмотрим также один пример с параметром. Сразу хочется подметить то, что для таких заданий нет одного четкого алгоритма, кроме как построить характеристический многочлен. Просматривать же зависимость от параметров можно совершенно различными способами: вычисление дискриминанта, теорема Виета, построение Гурвициана и так далее.

Пример 5. Определить область плоскости параметров асимптотической устойчивости линейных уравнений вида $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -b & -a \end{pmatrix}.$$

Решение. Построим характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & -b & -a-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 2) = 0.$$

Домножим характеристическое уравнение на -1 и построим его Гурвициан:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & b & a \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = a > 0,\ \Delta_2 = ab - 2 > 0,\ \Delta_3 = 2(ab-2) > 0.$$

Таким образом, для асимптотической устойчивости исходного СтЛВУ необходимо, чтобы

$$\begin{cases} a > 0, \\ ab > 2. \end{cases}$$

Ответ: $a > 0$, $ab > 2$.

Пример 6. Исследовать на устойчивость и асимптотическую устойчивость уравнение вида $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Построим характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -4 & -3 & 0-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda) = 0.$$

Для него построим Гурвициан:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = 3 > 0,\ \Delta_2 = 6 > 0,\ \Delta_3 = 0.$$

Значит уравнение не является асимптотически устойчивым. Тогда исследуем его на устойчивость. Для этого найдем корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Таким образом, так как кратность нулевого собственного значения равна 1, то уравнение является устойчивым по критерию устойчивости.

Ответ: Устойчиво.