Разностная аппроксимация дифференциального оператора

Условия

1. Используя метод неопределенных коэффициентов, построить разностный оператор, аппроксимирующий $u''(x)$ на шаблоне $Ш(x) = \{x, x+h, x+2h\}$. Определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. (Решение)

2. Используя метод неопределенных коэффициентов, построить разностный оператор, аппроксимирующий $u''(x)$ на шаблоне $Ш(x) = \{x-h, x, x+h\}$. Определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. (Решение)

3. Используя метод неопределенных коэффициентов, построить разностный оператор, аппроксимирующий $u'(x)$ на нерегулярном шаблоне $Ш(x) = \{x-h_1, x, x+h_2\}$, $h_1 \neq h_2$. Определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. (Решение)

Решения

1. Итак, мы имеем дифференциальный оператор
$$Lu(x) = u''(x),$$
и шаблон
$$\text{Ш}(x) = \{x, x+h, x+2h\}.$$
Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть
$$L_h u(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) + a_2 u(x+2h).$$
Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:
$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) + a_2 u(x+2h) - u''(x).$$
Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки x:
$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 \left(u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \frac{h^3}{6} u'''(x) \right) + \\ + a_2 \left(u(x) + 2hu'(x) + \frac{4h^2}{2} u''(x) + \frac{8h^3}{6} u'''(x) \right) + O(h^4) - u''(x).$$
При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом
$$\psi(x) = (a_0 + a_1 + a_2) \cdot u(x) + (ha_1 + 2ha_2) \cdot u'(x) + \\ + \left(\frac{h^2}{2} a_1 + \frac{4h^2}{2} a_2 - 1 \right) \cdot u''(x) + \left(\frac{h^3}{6} a_1 + \frac{8h^3}{6} a_2 \right) \cdot u'''(x) + O(h^4).$$
Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов
$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ ha_1 + 2ha_2 = 0, \\ \dfrac{h^2}{2} a_1 + \dfrac{4h^2}{2} a_2 - 1 = 0. \end{cases}$$
Домножим второе уравнение на h, а третье на 2 и получим
$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ h^2 a_1 + 2h^2 a_2 = 0, \\ h^2 a_1 + 4h^2 a_2 = 2. \end{cases}$$
Вычтем из третьего уравнения второе и получим
$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ h^2 a_1 + 2h^2 a_2 = 0, \\ 2h^2 a_2 = 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_2 = \frac{1}{h^2}.$$

Тогда из второго уравнения

$$a_1 = -\frac{2}{h^2},$$

а из первого уравнения

$$a_0 = \frac{1}{h^2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x) - 2u(x+h) + u(x+2h)}{h^2}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые три слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

$$\psi(x) = \left(-\frac{h^3}{6} \cdot \frac{2}{h^2} + \frac{8h^3}{6} \cdot \frac{1}{h^2}\right) \cdot u'''(x) + O(h^4) = hu'''(x) + O(h^4) = O(h).$$

То есть мы получаем аппроксимацию первого порядка, а главный член погрешности это $hu'''(x)$.

2. Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u''(x),$$

и шаблон

$$Ш(x) = \{x - h, x, x + h\}.$$

Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_{-1}u(x - h) + a_0 u(x) + a_1 u(x + h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_{-1}u(x - h) + a_0 u(x) + a_1 u(x + h) - u''(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки x:

$$\psi(x) = a_{-1}\left(u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u''''(x)\right) + a_0 u(x)$$
$$+ a_1\left(u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u''''(x)\right) + O(h^5) - u''(x).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\psi(x) = (a_{-1} + a_0 + a_1)\cdot u(x) + (-ha_{-1} + ha_1)\cdot u'(x) + \left(\frac{h^2}{2}a_{-1} + \frac{h^2}{2}a_1 - 1\right)\cdot u''(x) +$$
$$+ \left(-\frac{h^3}{6}a_{-1} + \frac{h^3}{6}a_1\right)\cdot u'''(x) + \left(\frac{h^4}{24}a_{-1} + \frac{h^4}{24}a_1\right)\cdot u''''(x) + O(h^5).$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 0, \\ -ha_{-1} + ha_1 = 0, \\ \dfrac{h^2}{2}a_{-1} + \dfrac{h^2}{2}a_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Домножим второе уравнение на h, а третье на 2 и получим

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 0, \\ -h^2 a_{-1} + h^2 a_1 = 0, \\ h^2 a_{-1} + h^2 a_1 = 2. \end{cases}$$

Прибавим к третьему уравнению второе и получим

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 0, \\ -h^2 a_{-1} + h^2 a_1 = 0, \\ 2h^2 a_1 = 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{1}{h^2}.$$

Тогда из второго уравнения

$$a_{-1} = \frac{1}{h^2},$$

а из первого уравнения

$$a_0 = -\frac{2}{h^2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые три слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

$$\psi(x) = \left(-\frac{h^3}{6}\cdot\frac{1}{h^2} + \frac{h^3}{6}\cdot\frac{1}{h^2}\right)\cdot u'''(x) + \left(\frac{h^4}{24}\cdot\frac{1}{h^2} + \frac{h^4}{24}\cdot\frac{1}{h^2}\right)\cdot u''''(x) + \\ + O(h^5) = \frac{h^2}{12}u''''(x) + O(h^5) = O(h^2).$$

То есть мы получаем аппроксимацию второго порядка, а главный член погрешности это $\frac{h^2}{12}u''''(x)$.

3. Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u'(x),$$

и нерегулярный шаблон (то есть с разным шагом)

$$\text{Ш}(x) = \{x - h_1, x, x + h_2\}, \;\; h_1 \neq h_2.$$

Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_{-1}u(x - h_1) + a_0 u(x) + a_1 u(x + h_2).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_{-1}u(x - h_1) + a_0 u(x) + a_1 u(x + h_2) - u'(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки x:

$$\psi(x) = a_0\left(u(x) - h_1 u'(x) + \frac{h_1^2}{2}u''(x) - \frac{h_1^3}{6}u'''(x)\right) + a_1 u(x)$$
$$+ a_2\left(u(x) + h_2 u'(x) + \frac{h_2^2}{2}u''(x) + \frac{h_2^3}{6}u'''(x)\right) + O(h_1^4 + h_2^4) - u'(x).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\psi(x) = (a_0 + a_1 + a_2)\cdot u(x) + (-h_1 a_0 + h_2 a_2 - 1)\cdot u'(x) +$$
$$+\left(\frac{h_1^2}{2}a_0 + \frac{h_2^2}{2}a_2\right)\cdot u''(x) + \left(-\frac{h_1^3}{6}a_0 + \frac{h_2^3}{6}a_2\right)u'''(x) + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ -h_1 a_0 + h_2 a_2 - 1 = 0, \\ \dfrac{h_1^2}{2}a_0 + \dfrac{h_2^2}{2}a_2 = 0. \end{cases}$$

Домножим второе уравнение на h_1, а третье на 2 и получим

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ -h_1^2 a_0 + h_1 h_2 a_2 = h_1, \\ h_1^2 a_0 + h_2^2 a_2 = 0. \end{cases}$$

Прибавим к третьему уравнению второе и получим

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ -h_1^2 a_0 + h_1 h_2 a_2 = h_1, \\ (h_1 h_2 + h_2^2) a_2 = h_1. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_2 = \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)}.$$

Тогда из второго уравнения

$$a_0 = \frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)},$$

а из первого уравнения

$$a_1 = -\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{h_1 h_2}\right)\cdot\frac{1}{h_1+h_2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{1}{h_1+h_2}\cdot\left(\frac{h_2^2 u(x-h_1) - (h_1^2+h_2^2)u(x) + h_1^2 u(x+h_2)}{h_1 h_2}\right).$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые три слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

$$\psi(x) = \left(-\frac{h_1^3}{6}\cdot\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)} + \frac{h_2^3}{6}\cdot\frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)}\right)\cdot u'''(x)+$$
$$+\, O(h_1^4+h_2^4) = \frac{h_1 h_2}{6(h_1+h_2)}(h_1-h_2)\cdot u''''(x) + O(h_1^4+h_2^4) = O(h_1^2+h_2^2).$$

То есть мы получаем аппроксимацию второго порядка, а главный член погрешности это $\dfrac{h_1 h_2}{6(h_1+h_2)}(h_1-h_2)\cdot u''''(x)$.