Метод Лобачевского для наибольшего по модулю корня многочлена

Условие

Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$ наибольшую по модулю корень алгебраического уравнения

$$2x^3 - 12x^2 + 6x + 20 = 0.$$

Алгоритм решения

Для решения задачи методом Лобачевского нам понадобятся следующие формулы:

1. соотношения для коэффициентов:

$$\begin{cases} a_0^{(1)} = a_0^2, \\ a_1^{(1)} = 2a_0a_2 - a_1^2, \\ a_2^{(1)} = 2a_0a_4 - 2a_1a_3 + a_2^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^{(1)} = (-1)^n a_n^2 \end{cases} \tag{1}$$

   (конкретно эта формула позволяет перейти от итерации 0 к итерации 1, но для перехода от k к $k+1$ соотношения такие же).

   Для нашего случая соотношения будут иметь вид

$$\begin{cases} a_0^{(1)} = a_0^2, \\ a_1^{(1)} = 2a_0a_2 - a_1^2, \\ a_2^{(1)} = -2a_1a_3 + a_2^2, \\ a_3^{(1)} = -a_3^2 \end{cases} \tag{2}$$

2. формула для вычисления корней

$$x_i \approx \sqrt[2^k]{-\frac{a_i^{(k)}}{a_{i-1}^{(k)}}}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

   Конкретно в нашем случае мы можем сразу взять формулу

$$x_1 \approx \sqrt[2^k]{-\frac{a_1^{(k)}}{a_0^{(k)}}}, \tag{4}$$

   т.к. метод Лобачевского возвращает корни в порядке убывания абсолютного значения.

Замечание. Метод Лобачевского после прохождения всего цикла возвращает значения корней *по модулю*. Поэтому необходимо подстановкой в исходное уравнение проверить, с каким знаком нужно раскрывать модуль.

Будем обозначать абсолютное значение наибольшего по модулю корня x как $x_1 = |x|$.

Для упрощения вычислений преобразуем данный в условии многочлен к приведенному виду (разделим на 2):

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0.$$

Для решения методом Лобачевского удобно составить следующую таблицу (каждый столбец – это коэффициенты, а в конце значение корня на каждой итерации):

	0	1	2	3
a_0	1			
a_1	-6			
a_2	3			
a_3	10			
x_1	6			

Мы переписали коэффициенты исходного многочлена и в последней строке посчитали корень x_1 по формуле (3)

$$x_1 = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Далее воспользуемся соотношением для коэффициентов (2) и получим новые коэффициенты:

$$\begin{cases} a_0^{(1)} = a_0^2 = 1, \\ a_1^{(1)} = 2a_0a_2 - a_1^2 = -30, \\ a_2^{(1)} = -2a_1a_3 + a_2^2 = 129, \\ a_3^{(1)} = -a_3^2 = -100 \end{cases}$$

Посчитаем корень по формуле (3)

$$x_1^{(1)} = \sqrt{-\frac{a_1^{(1)}}{a_0^{(1)}}} \approx 5.4772$$

Заносим в таблицу:

	0	1	2	3
a_0	1.0000	1.0000		
a_1	-6.0000	-30.0000		
a_2	3.0000	129.0000		
a_3	10.0000	-100.0000		
x_1	6.0000	5.4772		

Вычислим погрешность:

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.228 > 10^{-1} = \varepsilon.$$

Так выглядит одна итерация. И пока модуль разности корней не будет меньше ε, мы продолжаем итерации.

Далее все действия повторяем. Коэффициенты снова считаем по соотношению (2), а корень теперь вычисляем по формуле (3) как

$$x_1^{(2)} = \sqrt{\sqrt{-\frac{a_1^{(2)}}{a_0^{(2)}}}} \approx 5.0337$$

	0	1	2	3
a_0	1.0000	1.0000	1.0000	
a_1	-6.0000	-30.0000	-642.0000	
a_2	3.0000	129.0000	10,641.0000	
a_3	10.0000	-100.0000	-10,000.0000	
x_1	6.0000	5.4772	5.0337	

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.4435 > 10^{-1} = \varepsilon.$$

Сделаем еще одну итерацию. Снова коэффициенты вычисляем по соотношению (2), а корень теперь уже по формуле (3) равен

$$x_1^{(3)} = \sqrt[8]{-\frac{a_1^{(3)}}{a_0^{(3)}}} \approx 5.0004$$

	0	1	2	3
a_0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
a_1	-6.0000	-30.0000	-642.0000	-390,882.0000
a_2	3.0000	129.0000	10,641.0000	100,390,881.0000
a_3	10.0000	-100.0000	-10,000.0000	-100,000,000.0000
x_1	6.0000	5.4772	5.0337	5.0004

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0.0333 < 10^{-1} = \varepsilon.$$

В итоге мы нашли абсолютное значение наибольшего по модулю:

$$|x| = x_1 \approx 5.0$$

Необходимо проверить, какое из значений $x = 5$ и $x = -5$ является корнем исходного уравнения. Подставим $x = 5$:

$$125 - 6 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 10 = 0.$$

Можно также проверить и убедиться, что значение $x = -5$ не подходит. Следовательно, $x = 5$ — наибольший по модулю корень исходного уравнения.