Матричный метод решения СтЛВУ.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX, \tag{1}$$

где A — матрица $n \times n$, X — вектор-функция.

Рассмотрим ряд

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots. \tag{2}$$

• *Ряд* (2) *является сходящимся матричным рядом и называется* ***матричной экспонентой****.*

Свойства матричной экспоненты:

1. $e^0 = E$ (0 — *нулевая матрица*).
2. *Если матрицы* A, B *перестановочны, то есть* $AB = BA$, *то* $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.
3. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Рассмотрим матричную экспоненту

$$e^{At} = E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{A^k}{k!}t^k + \ldots, \tag{3}$$

где t — некоторая действительная переменная. При любом фиксированном t ряд (3) является сходящимся и непрерывно дифференцируемым. Тогда

$$D(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Перейдем к рассмотрению примеров. Поскольку данный метод предусматривает построение ряда, для которого нам нужно вычислять степени матрицы A, матричным методом находятся решения только для достаточно простых матриц A. Иначе вычисления могут получиться очень громоздкими, следовательно, рациональнее будет использовать иной метод.

Пример 1. Используя представление матричной экспоненты в виде ряда, найти решение уравнения $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для представления в виде матричной экспоненты необходимо построить разложение в ряд (3). Для этого нужно вычислить степени матрицы A. Найдем их:

$$A^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}, \ldots, A^k = \begin{pmatrix} 4^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix}.$$

Для построения матрицы k-ой степени необходимо построить матрицы некоторых малых степеней (1, 2, 3, 4 и так далее) и проследить закономерность.

Построим ряд (2), подставив полученные матрицы:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} 4^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} + \ldots + \frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix} 4^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} + \ldots.$$

Перепишем ряд в виде одной матрицы 2×2:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{4t}{1!} + + \dfrac{4^2t^2}{2!} + \ldots + \dfrac{4^kt^k}{k!} + \ldots & 0 \\ 0 & 1 + \dfrac{5t}{1!} + + \dfrac{5^2t^2}{2!} + \ldots + \dfrac{5^kt^k}{k!} + \ldots \end{pmatrix}$$

Теперь освежим в памяти разложение в ряд Тейлора:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Соответственно на главной диагонали полученной матрицы имеем разложения $e^{\lambda_i t}$. Свернём их и получим

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение векторного уравнения имеет вид:

$$X(t) = e^{At} \cdot C = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = (C_1 e^{4t}, C_2 e^{5t})^T.$$

Для того, чтобы убедиться, что мы правильно нашли правильное решение уравнения, Вы можете попробовать решить данное СтЛВУ уже известными Вам методами.

Ответ: $X(t) = (C_1 e^{4t}, C_2 e^{5t})^T$.

Замечание. *Полученная матрица e^{At} является* ***фундаментальной матрицей*** *ФСР нормированной в точке $t_0 = 0$ исходной СтЛВУ. Поэтому как методом Эйлера, так и матричным методом мы можем построить ФСР и ФМ СтЛВУ. Однако ФСР полученные методом Эйлера и полученные матричным методом будут отличаться. Так как матричным методом мы находим ФСР нормированную в точке $t_0 = 0$. В свою очередь, в методе Эйлера мы не ищем нормированную в точке ФСР.*

Основываясь на решении примера, можно подметить отличительные черты данного метода. Для решения СтЛВУ матричным методом необходимо уметь правильно умножать матрицы и раскладывать элементарные функции в ряд Тейлора.

Пример 2. Используя представление матричной экспоненты в виде ряда, найти решение уравнения $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем степени матрицы A:

$$A^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно получили закономерность $A^{4k} = A^0, A^{4k+1} = A^1, A^{4k+2} = A^2, A^{4k+3} = A^3$. Построим ряд (2):

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \ldots.$$

Запишем в виде матрицы:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \ldots + \dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + \ldots & -t + \dfrac{t^3}{3!} + \ldots + \dfrac{(-1)^k t^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots \\ t - \dfrac{t^3}{3!} + \ldots + \dfrac{(-1)^{k+1} t^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots & 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \ldots + \dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + \ldots \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Вспомним разложения

$$cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + \ldots.$$

$$sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots.$$

Тогда матричную экспоненту можно записать в виде

$$e^{At} = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение СтЛВУ имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(C_1 cos(t) - C_2 sin(t),\ C_1 sin(t) + C_2 cos(t))^T$.

Теорема. *Задача Коши* $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = \xi$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}_{n,1}$ *имеет единственное решение*

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi.$$

Следствие. *Матрица* $e^{A(t-t_0)}$ *является фундаментальной матрицей уравнения* (1)*, нормированной в точке* $t = t_0$.

Пример 3. Используя представление матричной экспоненты в виде ряда, решить задачу Коши $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = \xi$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 1, \quad \xi = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решение задачи Коши мы можем найти по формуле $X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi$. Тогда из примера 1

$$e^{A(t-t_0)} = \begin{pmatrix} e^{4(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{5(t-t_0)} \end{pmatrix}.$$

И при $t_0 = 1$ получаем

$$e^{A(t-1)} = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} & 0 \\ 0 & e^{5(t-1)} \end{pmatrix}.$$

Теперь сможем найти решение задачи Коши:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{4(t-1)} & 0 \\ 0 & e^{5(t-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (3e^{4(t-1)}, 4e^{5(t-1)})^T.$$

Ответ: $X(t) = (3e^{4(t-1)}, 4e^{5(t-1)})^T$.

Замечание. *Иногда проследить закономерность в степенях матрицы* A *не удается. В таком случае в качестве фундаментальной матрицы можно взять матрицу, состоящую из рядов (например* (4)*).*

Вычисление матричной экспоненты.

$\forall A \in \mathbb{C}_{n,n}\ \exists J$ — жорданова нормальная форма, то есть $\forall A \in \mathbb{C}_{n,n}\ \exists S : A = SJS^{-1}$. Следовательно,

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}.$$

Вычислим матричную экспоненту для клетки Жордана:

$$e^{Jt} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{5}$$

Таким образом, для вычисления матричной экспоненты более сложных матриц A можно воспользоваться жордановой нормальной формой матрицы. Для освежения в памяти повторите главу "Полиномиальные матрицы" в Линейной Алгебре.

Пример 4. Используя экспонентное представление решения, найти общее решение уравнения $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Построим характеристический многочлен матрицы и найдем собственные значения:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 8 & 6 \\ -4 & 10-\lambda & 6 \\ 4 & -8 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2.$$

Следовательно, матрица имеет собственные значения $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2$, $k_2 = 2$. Рассмотрим каждое собственное значение по отдельности:

1. Так как собственное значение $\lambda_1 = 0$ имеет алгебраическую кратность 1, а значит и геометрическую кратность 1, то ему соответствует одна жорданова клетка. Найдем собственный вектор, соответствующий данному собственному значению. Для этого решим СЛАУ $(A - \lambda_1 E)\gamma = 0$, $\gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$:

$$A - 0E = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Возьмем третий столбец за произвольную переменную. Тогда ФСР СЛАУ $A - 0E = 0$ имеет вид $\gamma(-\alpha, -\alpha, \alpha)$. Следовательно, собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 0$ равен

$$a_1(-1, -1, 1).$$

2. Собственное значение $\lambda_2 = 2$ имеет алгебраическую кратность $k_2 = 2$. Найдем его геометрическую кратность r_2:

$$r_2 = n - rank(A - 2E) = 3 - rank\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ -4 & 8 & 6 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix} = 2.$$

Следовательно, собственному значению соответствуют 2 жордановы клетки и оно имеет 2 линейно независимых собственных вектора. Для нахождения собственных векторов решим СЛАУ $(A - \lambda_2 E)\gamma = 0$, $\gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ -4 & 8 & 6 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \left(1 \;\middle|\; -2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right).$$

В качестве произвольных переменных α и β возьмем второй и третий столбцы соответственно. Тогда ФСР имеет вид $\gamma(2\alpha + \frac{3}{2}\beta, \alpha, \beta)$. Следовательно, собственными векторами, соответствующими этому собственному значению, являются

$$a_2(2, 1, 0), \quad a_3(3, 0, 2).$$

Теперь можно построить жорданову нормальную форму матрицы и трансформирующую матрицу. Так как мы выяснили, что жорданова нормальная имеет 3 клетки, то

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Замечание. *Жордановы блоки в жордановой нормальной форме будем записывать по возрастанию собственного значения и по убыванию размерностей жордановых клеток.*

Тогда матричная экспонента для жордановой нормальной формы имеет вид

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если бы собственному значению $\lambda_2 = 2$ соответствовала одна жорданова клетка, то матричная экспонента имела бы вид $e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.

Трансформирующая матрица строится из собственных векторов. Причем собственные векторы ставятся в те столбцы, в которых находятся соответствующие собственные значения в жордановой нормальной форме. Тогда трансформирующая матрица имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу. Вы можете воспользоваться известными Вам методами. Я же расширю матрицу, добавив к ней единичную. Затем элементарными преобразованиями приведу матрицу слева к единичному виду:

$$(S \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) = (E \mid S^{-1}).$$

Тогда матричная экспонента имеет вид

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-e^{2t} & 4e^{2t}-4 & 3e^{2t}-3 \\ 2-2e^{2t} & 5e^{2t}-4 & 3e^{2t}-3 \\ 2e^{2t}-2 & 4-4e^{2t} & 3-2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение СтЛВУ имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2-e^{2t} & 4e^{2t}-4 & 3e^{2t}-3 \\ 2-2e^{2t} & 5e^{2t}-4 & 3e^{2t}-3 \\ 2e^{2t}-2 & 4-4e^{2t} & 3-2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Умножать получившиеся матрицы мы не будем, так как это будет объемно.

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} 2-e^{2t} & 4e^{2t}-4 & 3e^{2t}-3 \\ 2-2e^{2t} & 5e^{2t}-4 & 3e^{2t}-3 \\ 2e^{2t}-2 & 4-4e^{2t} & 3-2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$

Замечание. *Трансформирующая матрица неоднозначна, поэтому решения одного уравнения могут отличаться в зависимости от выбора матрицы S.*

Замечание. *Фундаментальная матрица $\Phi(t) = e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$ может отличаться от матрицы, полученной с помощью решения методом Эйлера. Всё дело опять же в том, что матричным методом мы получаем представление в виде матричной экспоненты, которая, в свою очередь, является фундаментальной матрицей ФСР нормированной в точке $t = t_0$. ФСР уравнения является матрица Se^{Jt}, но, умножая ее на S^{-1}, мы нормируем ее в точке $t_0 = 0$. Аналогичные действия мы проводили, когда нормировали ФСР в СтЛУ например при поиске частного решения методом Коши.*

Пример 5. Используя экспонентное представление решения, найти общее решение уравнения $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен имеет единственный корень $\lambda = 1$ с кретностью $k = 3$. Выясним количество жордановых клеток, то есть геометрическую кратность, этого собственного значения:

$$r = n - rank(A - E) = 3 - rank \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = 2.$$

Следовательно, собственному значению соответствуют две жордановых клетки, причем одна размера 2×2, а другая 1×1 и два собственных вектора. Таким образом, построим ЖНФ

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричная экспонента ЖНФ имеет вид

$$e^{Jt} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Теперь остается составить трансформирующую матрицу. Для этого найдем два линейно независимых собственных вектора и присоединенный к ним. Для поиска собственных векторов решим СЛАУ $(A-E)\boldsymbol{\gamma}=0$:

$$A-E=\begin{pmatrix}3 & 6 & -15\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\end{pmatrix}.$$

В качестве свободных переменный возьмем второй столбец за α и третий столбец за β. Тогда ФСР такой СЛАУ имеет равна $\boldsymbol{\gamma}(-2\alpha+5\beta,\alpha,\beta)$. Запишем два собственных вектора образованных этой ФСР:

$$a_1(3,1,1),\quad a_2(5,0,1).$$

Теперь найдем присоединенный вектор. В качестве вектора, для которого мы будем находить присоединенный, можно взять любой. Поэтому возьмем вектор a_1, чтобы наша следующая система $(A-E\mid a_2)\boldsymbol{\gamma}=0$ имела решения и не было проблем с поиском вектора a_3

$$(A-E\mid a_2)=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 6 & -15 & 3\\ 1 & 2 & -5 & 1\\ 1 & 2 & -5 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -5 & 1\end{array}\right).$$

В качестве свободных переменный возьмем второй столбец за α и третий столбец за β. Тогда ФСР такой СЛАУ имеет равна $\boldsymbol{\gamma}(-2\alpha+5\beta+1,\alpha,\beta)$. Тогда в качестве присоединенного вектора возьмем вектор

$$a_3(1,0,0).$$

В итоге мы получаем следующую трансформирующую матрицу:

$$S=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Замечание. *В трансформирующей матрице присоединенный вектор записывается рядом с тем, для которого он является присоединенным. Поэтому вектор* $(3,1,1)$ *составляет первый столбец, а присоединенный к нему — второй. Иначе, если бы он находился во втором столбце, то присоединенный находился бы справа от него, а клетка размерности* 2×2 *в ЖНФ располагалась бы после клетки* 1×1.

Замечание. *Если в задаче стоит вопрос лишь о нахождении общего решения, то необязательно вычислять матрицу* S^{-1}. *Так как общему решению будет удовлетворять любая ФСР, включая нормированную в точке* t. *Вообще говоря, заниматься поиском нормированной ФСР есть смысл только в случае, когда нам нужно решить задачу Коши. И то не всегда, а только лишь при нахождении решения СтЛНВУ методом Коши (который мы рассмотрим в следующем уроке).*

На основании крайнего замечания мы можем утвержать, что общим решением СтЛВУ является столбец

$$X(t)=\Phi(t)C=Se^{Jt}C=e^t\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}3 & 3t+1 & 5\\ 1 & t & 0\\ 1 & t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}=$$

$$=e^t\begin{pmatrix}3C_1+C_2(3t+1)+5C_3\\ C_1+C_2t\\ C_1+C_2t+C_3\end{pmatrix}.$$

Стоит также обратить внимание, что такой подсчет матриц занимает больше времени. Поскольку умножение матриц ассоциативно, то умножение мы можем начать не слева направо, а справа налево. Тогда

$$X(t) = \Phi(t)C = Se^{Jt}C = e^t \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 3C_1 + C_2(3t+1) + 5C_3 \\ C_1 + C_2 t \\ C_1 + C_2 t + C_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом мы нашли общее решение, сократив количество операций умножения.

Если же нам необходимо найти ФСР нормированную в точке $t = 0$ или посчитать матричную экспоненту, то нужно посчитать обратную к матрице S матрицу S^{-1}. Она имеет вид

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матричная экспонента исходной матрицы A равна

$$e^{At} = \Phi(t) = Se^{Jt}S^{-1} = e^t \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 3 & 3t+1 & 5 \\ 1 & t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 3t+1 & 6t & -15t \\ t & 2t+1 & -5t \\ t & 2t & 1-5t \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение СтЛВУ будет иметь вид

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} 3t+1 & 6t & -15t \\ t & 2t+1 & -5t \\ t & 2t & 1-5t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Также для сокращения количества операций умножения про поиске общего решения уравнения мы могли дописать справа столбец C и умножение начать справа налево.

Ответ: $X(t) = e^t \begin{pmatrix} 3C_1 + C_2(3t+1) + 5C_3 \\ C_1 + C_2 t \\ C_1 + C_2 t + C_3 \end{pmatrix}$ или (и) $X(t) = e^t \begin{pmatrix} 3t+1 & 6t & -15t \\ t & 2t+1 & -5t \\ t & 2t & 1-5t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$.

Пример 6. Используя экспонентное представление решения, найти общее решение уравнения $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица имеет одно собственное значение $\lambda = 1$ кратности $k = 3$. Возможно вы уже догадываетесь, чем данный пример будет отличаться от предыдущего. Сперва найдем геометрическую кратность собственного значения:

$$r = n - rank(A - E) = 3 - rank \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - rank \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Следовательно, собственному значению соответствует один собственный вектор и одна жорданова клетка. Построим матричную экспоненту ЖНФ:

$$e^{Jt} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению

$$A - E = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

В качестве свободной переменной возьмем второй столбец. Тогда ФСР имеет вид $(-\alpha, \alpha, \alpha)$, а собственный вектор

$$a_1(1, -1, -1).$$

Теперь займемся поиском присоединенных векторов. Для поиска присоединенного к a_1 решим СЛАУ $(A - E \mid a_1)\gamma = 0$:

$$(A - E \mid a_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Возьмем в качестве свободной переменной второй столбец. Тогда ФСР имеет вид $(1 - \alpha, \alpha, 1 + \alpha)$ и собственный вектор

$$a_2(1, 0, 1).$$

Осталось найти последний присоединенный вектор. Искать мы его будем для вектора a_2:

$$(A - E \mid a_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Снова возьмем второй столбец в качестве свободной переменной и получим ФСР $(-1 - \alpha, \alpha, -2 + \alpha)$ и собственный вектор

$$a_3(-1, 0, -2).$$

Тогда трансформирующая матрица равна

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

А обратная к ней

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение СтЛВУ имеет вид

$$X(t) = e^{At}C = e^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} =$$

$$
= e^t \begin{pmatrix} 1 & t+1 & \frac{t^2}{2}+t-1 \\ -1 & -t & -\frac{t^2}{2} \\ -1 & 1-t & -\frac{t^2}{2}+t-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.
$$

Также общее решение уравнения можно получить из ненормированной в точке $t = 0$ ФСР, то есть без матрицы S^{-1}, на этапе

$$
X(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t+1 & \frac{t^2}{2}+t-1 \\ -1 & -t & -\frac{t^2}{2} \\ -1 & 1-t & -\frac{t^2}{2}+t-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.
$$

Ответ: $X(t) = e^t \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}+2t+1 & t^2+5t & -\frac{t^2}{2}-2t \\ -\frac{t^2}{2}-t & -\frac{t^2}{2}-3t+1 & \frac{t^2}{2}+t \\ -\frac{t^2}{2}-3t & -t^2-t & \frac{t^2}{2}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$

Напоследок рассмотрим решение задачи Коши для такого способа вычисления матричной экспоненты.

Пример 7. Решить задачу Коши $DX = AX$, $X|_{t=2} = \xi$, где

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Решение. Собственные значения матрицы равны $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, кратности которых равны 1, и каждому соответствует 1 жорданова клетка. Тогда

$$
e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.
$$

Данным собственным значениям соответствуют собственные векторы $a_1(0,0,1)$, $a_2(1,0,0)$, $a_3(0,1,0)$. Тогда

$$
S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Таким образом

$$
e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}.
$$

Мы получили ФСР нормированную в точке $t_0 = 0$. В общем имеем

$$
e^{A(t-t_0)} = \begin{pmatrix} e^{(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3(t-t_0)} \end{pmatrix}.
$$

Подставим наши начальные условия: $t_0 = 2$ и умножим на столбец ξ. Тогда решение задачи Коши имеет вид

$$
X(t) = \begin{pmatrix} e^{(t-2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(t-2)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3(t-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-2} \\ -e^{2t-4} \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Получить данное решение можно было бы и другим образом. Например, если мы вычислим ФСР $\Phi(t) = Se^{Jt}$, то для решения задачи Коши необходимо умножить ее на матрицу $\Phi^{-1}(\tau)\xi$ аналогично методу Эйлера для СтЛВУ.

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} e^{t-2} \\ -e^{2t-4} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Используя экспонентное представление решения, найти общие решения уравнений $DX = AX$, где

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

3. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

4. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

5. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

6. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

и решить задачи Коши

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad X|_{t=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -6 \\ -2 & 7 & 6 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}; \quad X|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

3. $$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}; \quad X|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$