Численные методы математической физики

Конспект по 4 курсу специальности «прикладная математика»

(лектор А. М. Будник)

Оглавление

Введение.

В данном курсе мы будем рассматривать задачи математической физики в частных производных. Основной принцип решения состоит в том, что дифференциальное уравнение мы заменяем разностным и ищем приближенное решение на сетке узлов. Такой способ называется *методом конечных разностей* (*методом сеток*). А раздел численных методов, посвященный теории метода конечных разностей, носит название *теория разностных схем*.

Выделим два основных момента при решении:

1. построение дискретных разностных аппроксимаций для задачи математической физики и исследование основных характеристик этих аппроксимаций: погрешности, устойчивости и точности разностных схем;

2. решение разностных уравнений прямыми или итерационными методами.

Глава 1

Способы построения и исследования разностных схем.

1.1 Сетки и сеточные функции.

При решении той или иной математической задачи мы не можем воспроизвести приближенное решение для всех значений аргумента. Поэтому в области задания функций выбирается конечное множество точек, и приближенное решение задачи ищется в этих точках.

- *Это множество называется* ***сеткой****, а отдельные точки –* ***узлами сетки****.*

- *Функция, определенная в узлах сетки, называется* ***сеточной функцией****.*

Заменяя области непрерывного изменения аргумента сеткой, осуществляем аппроксимацию пространства решения дифференциального уравнения пространством сеточной функции.

Пример сетки на отрезке.

В качестве области определения мы рассматриваем отрезок на оси x.

1. **Равномерная сетка.** Возьмем отрезок $[0, 1]$ и разобьем его на N равных частей

$$x_0 = 0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{N-1},\ x_N.$$

Обозначим через h шаг сетки, а через x_i – узлы, $i = \overline{0, N}$. Тогда множество x_i составляют сетку

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Множество граничных узлов обозначим как

$$\gamma_h = \{x_0, x_N\}.$$

А остальные точки образуют множество внутренних узлов

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{1, N-1},\ h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Таким образом, можно записать

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h.$$

2. **Неравномерная сетка.** Возьмем отрезок $[0, 1]$ и разобьем его на N равных частей

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1.$$

Тогда мы можем записать неравномерную сетку с граничными узлами

$$\hat{\bar{\omega}}_h = \left\{x_i,\ i = \overline{0, N},\ x_0 = 0,\ x_N = 1\right\}.$$

Шаг неравномерной сетки зависит от номера узла и подлежит нормировке

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = 1,\ h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Аналогично первому примеру можно записать

$$\hat{\bar{\omega}}_h = \hat{\omega}_h \cup \hat{\gamma}_h.$$