Разбор задач к контрольной работе №1

Задача 1. Найти математическое ожидание и дисперсию суммарных выплат для портфеля из 100 договоров страхования при вероятности страхового случая $q = 0.05$. Размер иска B имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 20]$.

Используя нормальную аппроксимацию, оценить вероятность того, что выплаты превысят среднее более, чем на 1%.

Решение. Случайную величину, соответствующую суммарным выплатам для портфеля из 100 договоров обозначим

$$S = X_1 + \ldots + X_{100},$$

где случайная величина X_i – выплата по одному договору, причем X_i и X_j – независимые случайные величины $\forall i, j$. Итак, мы можем представить исследуемую случайную величину X_i в виде

$$X_i = I \cdot B,$$

где I – это дискретная случайная величина, обозначающая наступление события «страховой случай», то есть

$$\left[\begin{array}{l} P\{I = 0\} = 1 - q, \\ P\{I = 1\} = q, \end{array}\right.$$

а B – это случайная величина соответствующая размеру иска, имеющая равномерное распределение

$$p_B(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, \; x \in [0, 20], \\ 0, \; x \notin [0, 20]. \end{cases}$$

Нам необходимо найти $\mathbf{E}\{S\}$, $\mathbf{D}\{S\}$. По свойствам матожидания мы можем матожидание следующим образом:

$$E\{\S\} = \mathbf{E}\{X_1 + \ldots + X_{100}\} = \mathbf{E}\{X_1\} + \ldots + \mathbf{E}\{X_{100}\},$$

где

$$\mathbf{E}\{X_1\} = \ldots = \mathbf{E}\{X_{100}\} = \mathbf{E}\{X\},$$

следовательно,

$$\mathbf{E}\{S\} = 100 \cdot \mathbf{E}\{X\}.$$

Аналогично мы можем расписать дисперсию

$$\mathbf{D}\{\S\} = \mathbf{D}\{X_1 + \ldots + X_{100}\} = \mathbf{D}\{X_1\} + \ldots + \mathbf{D}\{X_{100}\},$$

где

$$\mathbf{D}\{X_1\} = \ldots = \mathbf{D}\{X_{100}\} = \mathbf{D}\{X\},$$

следовательно,

$$\mathbf{D}\{S\} = 100 \cdot \mathbf{D}\{X\}.$$

Исследовать матожидание и дисперсию X мы будем, используя формулы условных матожидания и дисперсии

$$\mathbf{E}\{X\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{X|I\}\}, \; \mathbf{D}\{X\} = \mathbf{D}\{\mathbf{E}\{X|I\}\} + \mathbf{E}\{\mathbf{D}\{X|I\}\}.$$

Начнем с вычисления $\mathbf{E}X$. Для этого рассмотрим $\mathbf{E}\{X|I\}$, здесь может быть два случая (поскольку I принимает всего два значения):

$$\left[\begin{array}{l}\mathbf{E}\{X|I=0\}=\mathbf{E}\{I\cdot B|I=0\}=0,\\ \mathbf{E}\{X|I=1\}=\mathbf{E}\{I\cdot B|I=1\}=\mathbf{E}\{B|I=1\}\end{array}\right.$$

А поскольку B имеет равномерное распределение, то

$$\mathbf{E}\{B\}=\frac{a+b}{2}=\frac{20}{2}=10.$$

А следовательно отсюда

$$\mathbf{E}\{X|I=1\}=10.$$

Итак, в итоге мы можем записать условное матожидание как функцию от I вида

$$\mathbf{E}\{X|I\}=I\cdot\mathbf{E}\{B\}=10I.$$

Отсюда можем вычислить искомое матожидание

$$\mathbf{E}\{X\}=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{B\}\cdot I\}=\mathbf{E}\{B\}\cdot\mathbf{E}\{I\}=\mathbf{E}\{B\}\cdot(0\cdot(1-q)+1\cdot q)=\mathbf{E}\{B\}\cdot q.$$

Подставляя известные нам значения, получим

$$\mathbf{E}\{X\}=\mathbf{E}\{B\}\cdot q=10\cdot 0.05=0.5.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\{S\}=100\cdot\mathbf{E}\{X\}=100\cdot 0.5=50.$$

Теперь вычислим дисперсию X. Рассмотрим отдельное каждое из слагаемых. В первом слагаемом нам уже известна величина $\mathbf{E}\{X|I\}$, нужно лишь найти от нее дисперсию:

$$\mathbf{D}\{\mathbf{E}\{X|I\}\}=\mathbf{D}\{I\cdot\mathbf{E}\{B\}\}=(\mathbf{E}\{B\})^2\cdot\mathbf{D}\{I\}=(\mathbf{E}\{B\})^2\cdot q(1-q)=100\cdot 0.05\cdot 0.95=4.75$$

Рассмотрим второе слагаемое. Здесь у нас есть величина $\mathbf{D}\{X|I\}$, которую мы также попытаемся записать в виде функции от I. Эта дисперсия распадается на два случая

$$\left[\begin{array}{l}\mathbf{D}\{X|I=0\}=\mathbf{D}\{I\cdot B|I=0\}=0,\\ \mathbf{D}\{X|I=1\}=\mathbf{D}\{I\cdot B|I=1\}=\mathbf{D}\{B|I=1\}\end{array}\right.$$

Поскольку B имеет равномерное распределение, то

$$\mathbf{D}\{B\}=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{400}{12}=\frac{100}{3}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}\{X|I\}=I\cdot\mathbf{D}\{B\}=\frac{100}{3}I.$$

Теперь вычислим

$$\mathbf{E}\{\mathbf{D}\{X|I\}\}=\mathbf{E}\{I\cdot\mathbf{D}\{B\}\}=\mathbf{D}\{B\}\cdot\mathbf{E}\left\{I\right\}=\mathbf{D}\{B\}q=\frac{100}{3}q=\frac{5}{3}.$$

Итак, складывая найденные слагаемые, получим

$$\mathbf{D}\{X\}=4.75+\frac{5}{3}=\frac{11}{12}.$$

Тогда

$$\mathbf{D}\{S\} = 100 \cdot \mathbf{D}\{X\} = 100 \cdot \frac{11}{12} \approx 91.667$$

Для оценки вероятности того, что выплаты превысят среднее более, чем на 1%, рассмотрим следующую величину

$$P\{S > 1.01\mathbf{E}\{S\}\} = 1 - P\{S \leqslant 1.01\mathbf{E}\{S\}\} = 1 - P\left\{\frac{S - \mathbf{E}\{S\}}{\sqrt{\mathbf{D}\{S\}}} \leqslant \frac{1.01\mathbf{E}\{S\} - \mathbf{E}\{S\}}{\sqrt{\mathbf{D}\{S\}}}\right\} =$$
$$= 1 - P\left\{\frac{S-50}{9.574} \leqslant \frac{0.01 \cdot 50}{9.574}\right\} = 1 - P\left\{\frac{S-50}{9.574} \leqslant 0.0512\right\} = 1 - \Phi(0.0512),$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения. Используя таблицу значений, можно определить

$$\Phi(0.0512) \approx 0.5203.$$

Следовательно,

$$P\{S > 1.01\mathbf{E}\{S\}\} = 1 - 0.5203 = 0.4797.$$

Задача 2. Даны две независимые случайные величины ξ_1, ξ_2. Найти распределение случайной величины

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 - 2$$

1. случайная величина ξ_1 распределена равномерно на отрезке $[0, 3]$, а ξ_2 имеет распределение Бернулли с параметром 0.3;
2. случайные величины распределены экспоненциально с параметрами $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 1$ соответственно.

Решение.

1. Запишем математически законы распределения данных случайных величин ξ_1, ξ_2, то есть

$$F_{\xi_1}(x) = P\{\xi_1 \leqslant x\} = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ \dfrac{x}{3}, \ x \in [0,3], \\ 1, \ x > 3 \end{cases} \qquad P\{\xi_2 = k\} = \begin{cases} 0.3, \ k = 1, \\ 0.7, \ k = 0. \end{cases}$$

Будем искать функцию распределения случайной величины $F_\eta(x)$. Распишем, чему равна эта ФР

$$F_\eta(x) = P\{\eta \leqslant x\} = P\{\xi_1 + \xi_2 - 2 \leqslant x\} =$$
$$P\{\xi_1 + \xi_2 - 2 \leqslant x | \xi_2 = 0\} P\{\xi_2 = 0\} + P\{\xi_1 + \xi_2 - 2 \leqslant x | \xi_2 = 1\} P\{\xi_2 = 1\} =$$
$$= P\{\xi_1 - 2 \leqslant x | \xi_2 = 0\} \cdot 0.7 + P\{\xi_1 + 1 - 2 \leqslant x | \xi_2 = 1\} \cdot 0.3 =$$
$$= P\left\{\xi_1 \leqslant x + 2\right\} \cdot 0.7 + P\left\{\xi_1 \leqslant x + 1\right\} \cdot 0.3.$$

Причем

$$P\left\{\xi_1 \leqslant x + 2\right\} = F_{\xi_1}(x+2) = \begin{cases} 0, \ x + 2 < 0, \\ \dfrac{x+2}{3}, \ x + 2 \in [0,3], \\ 1, \ x + 2 > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0, \ x < -2, \\ \dfrac{x+2}{3}, \ x \in [-2, 1], \\ 1, \ x > 1. \end{cases}$$

Аналогично

$$P\left\{\xi_1 \leqslant x+1\right\} = F_{\xi_1}\left(x+1\right) = \begin{cases} 0,\ x<-1, \\ \dfrac{x+1}{3},\ x\in[-1,2], \\ 1,\ x>2. \end{cases}$$

Таким образом, искомая функция распределения распадается на несколько случаев

$$F_\eta(x) = P\{\eta \leqslant x\} = \begin{cases} 0,\ x<-2, \\ 0.7\cdot\dfrac{x+2}{3},\ -2\leqslant x<-1, \\ 0.7\cdot\dfrac{x+2}{3}+0.3\cdot\dfrac{x+1}{3},\ -1\leqslant x<1, \\ 0.7+0.3\cdot\dfrac{x+1}{3},\ 1\leqslant x<2, \\ 1,\ x\geqslant 2. \end{cases}$$

2. Запишем математически законы распределения данных случайных величин ξ_1, ξ_2, то есть

$$p_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 4e^{-4x},\ x\geqslant 0, \\ 0,\ x<0; \end{cases} \qquad p_{\xi_2}(x) = \begin{cases} e^{-x},\ x\geqslant 0, \\ 0,\ x<0. \end{cases}$$

В данном случае мы введем новую случайную величину $\eta_2 = \xi_2$. Таким образом, имеем

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1+\xi_2-2, \\ \eta_2 = \xi_2. \end{cases}$$

Заменим в данной системе случайные величины переменными

$$\begin{cases} y_1 = x_1+x_2-2, \\ y_2 = x_2. \end{cases}$$

Теперь найдем обратное линейное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = y_1-y_2+2, \\ x_2 = y_2. \end{cases}$$

Вычислим якобиан обратного преобразования

$$|I| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |1| = 1.$$

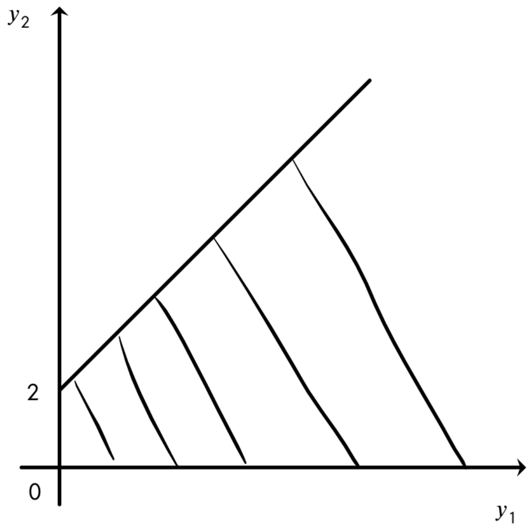
Теперь можем приступать к вычислению искомого распределения

$$p_{\eta_1}(y_1) = \int_{B_x} p_{\eta_1\eta_2}(x_1,x_2)dx_2 = \int_{B_x} p_{\xi_1\xi_2}(y_1-y_2+2,y_2)|I|dy_2 =$$
$$= \int_{B_x} p_{\xi_1}(y_1-y_2+2)p_{\xi_2}(y_2)|I|dy_2 = \int_{B_x} 4e^{-4(y_1-y_2+2)}e^{-y_2}\cdot 1\cdot dy_2 = 4e^{-4y_1-8}\int_{B_x} e^{3y_2}dy_2.$$

Теперь нам нужно определить область интегрирования B_x. Она должна быть такой, что

$$B_x : \begin{cases} y_1 - y_2 + 2 \geqslant 0, \\ y_2 \geqslant 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y_2 \leqslant y_1 + 2, \\ y_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Итак, эту область можно изобразить следующим образом



По этой области мы и проводим интегрирование. Тогда

$$p_{\eta_1}(y_1) = 4e^{-4y_1-8} \int\limits_0^{y_1+2} e^{3y_2} dy_2 = \frac{1}{3} \cdot 4e^{-4y_1-8} e^{3y_1+6} - \frac{1}{3} \cdot 4e^{-4y_1-8} = \frac{4}{3}(e^{-y_1-2} - e^{-4y_1-8}).$$