Вариант 8

Дан прямоугольный параллелепипед с рёбрами $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Найти электрический потенциал при заданных диэлектрической проницаемости $\varepsilon = -1$, распределении зарядов $\rho(x, y, z) = x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4$ и условиях на гранях: $u_x|_{x=0} = u|_{x=a} = u_z|_{z=0} = u|_{z=c} = 0$; $u|_{y=0} = cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) cos\left(\frac{7\pi z}{6}\right)$, $u|_{y=b} = x^2(x-1)cos\left(\frac{5\pi z}{6}\right)$.

Бозт Т.А.
7 группа
Вариант 8

Пусть $a=1,\ b=2,\ c=3$
$\varepsilon=-1$
$\rho(x,y,z)=x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4$
Тогда

$$\begin{cases}\Delta u=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}(x,y,z)=x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4\\ u_x|_{x=0}=u|_{x=1}=u_z|_{z=0}=u|_{z=3}=0\\ u|_{y=0}=\cos\dfrac{3\pi x}{2}\cos\dfrac{7\pi z}{6}\\ u|_{y=2}=x^2(x-1)\cos\dfrac{5\pi z}{6}\end{cases}\quad(1)$$

Ищем в виде суммы
$u(x,y,z)=v(x,y,z)+w(x,y,z)$, где

$$\begin{cases}\Delta v=0\\ v_x|_{x=0}=v|_{x=1}=v_z|_{z=0}=v|_{z=3}=0\\ v|_{y=0}=\cancel{\cos\dfrac{3\pi x}{2}\cos\dfrac{7\pi z}{6}}\\ u|_{y=2}=x^2(x-1)\cos\dfrac{5\pi z}{6}\end{cases}\quad(2)$$

$$\begin{cases}\Delta w=x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4\\ w_x|_{x=0}=w|_{x=1}=w_z|_{z=0}=w|_{z=3}=0\\ w|_{y=0}=0\\ w|_{y=2}=0\end{cases}\quad(3)$$

Решаем з. (1).
Ищем реш-е в виде нетривиальных функций $X,Y,Z\neq0$
$v(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)\Rightarrow$ получим 2 задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda^2X(x)=0\\ X'(0)=0\\ X(1)=0\end{cases}\quad(4)\qquad\begin{cases}Z''(z)+\nu^2Z(z)=0\\ Z'(0)=0\\ Z(3)=0\end{cases}\quad(5)$$

Найдем реш-е (4)

... решение

$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$, подставим гранич. усл.-я:

$X'(0) = \lambda C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$X(1) = C_1 \cos \lambda = 0 \rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{\pi + 2\pi n}{2}}, \ n = 0, 1, \ldots$

$\boxed{X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2}\right)x}$

Ищем реш-е (5) по аналогии

$Z(z) = C_1 \cos \nu z + C_2 \sin \nu z$

$Z'(0) = \nu C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$Z(3) = C_1 \cos 3\nu = 0 \Rightarrow \boxed{\nu_m = \frac{\pi + 2\pi m}{6}}, \ m = 0, 1, \ldots$

$\boxed{Z_m(z) = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi m}{6} z\right)}$

Тогда, подставив X_n, Z_m, можем представить в виде суммы

$$U(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Y_{nm}(y) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} x\right) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi m}{6} z\right) \quad (6)$$

Подставим (6) в исх. ур-е задачи (2) и получим

$$Y_{nm}''(y) - \mu_{nm}^2 Y_{nm}(y) = 0, \quad \mu_{nm}^2 = \lambda_n^2 + \nu_m^2$$

Подставим (6) в первое гран. усл. зад. (2):

$$U\big|_{y=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Y_{nm}(0) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} x\right) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi m}{6} z\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{7\pi z}{6}\right)$$

Тогда

$$Y_{nm}(0) = \begin{cases} 1, & (n, m) = (1, 3) \\ 0, & (n, m) \neq (1, 3) \end{cases}$$

Подст. (6) в правое гран. усл. зад. (2):

$$U\big|_{y=2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} Y_{nm}(2) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} x\right) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi m}{6} z\right) =$$

$$= x^2(x - 1) \cos\left(\frac{5\pi z}{6}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n2} \cos \frac{5\pi z}{6}$$

2

Тогда

$$Y_{nm}(2) = \phi_{n2} = \frac{\int_0^1 x^2(x-1)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}x\right)dx}{\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}x\right)dx}$$

В итоге строим граничную задачу для ОДУ

$$\begin{cases} Y''_{nm}(y) - \mu_{nm}^2 Y_{nm}(y) = 0 \\ Y_{nm}(0) = \begin{cases} 1, (n,m) = (1,3) \\ 0, (n,m) \neq (1,3) \end{cases} \\ Y_{nm}(2) = \phi_{n2} \end{cases}$$

$$Y_{nm}(y) = C_1 \operatorname{ch} \mu_{nm} y + C_2 \operatorname{sh} \mu_{nm} y$$

$$Y_{nm}(0) = C_1 = \begin{cases} 1, (n,m) = (1,3) \\ 0, (n,m) \neq (1,3) \end{cases}$$

$$Y_{nm}(2) = C_1 \operatorname{ch} 2\mu_{nm} + C_2 \operatorname{sh} 2\mu_{nm} = \phi_{n2}$$

Тогда

$$C_2 = \begin{cases} \frac{\phi_{n2}}{\operatorname{sh} 2\mu_{n2}}, m = 2 \\ -\operatorname{cth} 2\mu_{13}, (n,m) = (1,3) \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда

$$V(x,y,z) = \left[\operatorname{ch} \mu_{13} y - \operatorname{cth} 2\mu_{13} \operatorname{sh} \mu_{13} y\right] \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{7\pi z}{6}\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_{n2}}{\operatorname{sh} 2\mu_{n2}} \operatorname{sh} \mu_{n2} y \cdot \cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}x\right)\cos\left(\frac{5\pi z}{6}\right)$$

Ищем решение задачи (3)

Ввиду задач (4), (5), можем построить решение задачи (3) в виде

$$w(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} Y_{nm}(y)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi+2\pi m}{6}z\right) \quad (7)$$

Подставим (7) в ур-е задачи (3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[Y''_{nm}(y)-\mu_{nm}^2 Y_{nm}(y)\right]\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi+2\pi m}{6}z\right)=$$

$$=x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4$$

Отсюда

$$Y''_{nm}(y)-\mu_{nm}^2 Y_{nm}(y)=\frac{\int_0^1\int_0^3 (x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi+2\pi m}{6}z\right)dxdz}{\int_0^1\int_0^3 \cos^2\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi+2\pi m}{6}z\right)dxdy}$$

$$=Ay^4+B, \quad A,B\in\mathbb{R}$$

Подставим в (7) левое гран. усл-е задачи (3)

$$w|_{y=0}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} Y_{nm}(0)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi+2\pi m}{6}z\right)=0 \Rightarrow$$

$$Y_{nm}(0)=0$$

Подст. в (7) правое гр. усл-е задачи (3)

$$w|_{y=2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} Y_{nm}(2)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi+2\pi m}{6}z\right)=0$$

$$Y_{nm}(2)=0$$

Таким образом, можем постр. граничн. задачу для ОДУ

$$\begin{cases} Y''_{nm}(y)-\mu_{nm}^2 Y_{nm}(y)=Ay^4+B \\ Y_{nm}(0)=0 \\ Y_{nm}(2)=0 \end{cases} \quad (8)$$

Решаем задачу по ф-лу Эйлера

$Y_{nm}(y) = C_1 ch\, \mu_{nm} y + C_2 sh\, \mu_{nm} y + Y_{nm}^{чн}(y)$, где

$Y_{nm}^{чн}(y) = a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y^1 + a_0$

подст. в ур-е задачи (8)

$Y_{nm}^{чн\,\prime}(y) = 4a_4 y^3 + 3a_3 y^2 + 2a_2 y + a_1$

$Y_{nm}^{чн\,\prime\prime}(y) = 12a_4 y^2 + 6a_3 y + 2a_2 \Rightarrow$

$12a_4 y^2 + 6a_3 y + 2a_2 - \mu_{nm}^2 (a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0) =$
$= Ay^4 + B \Rightarrow$

$y^4: a_4 = -\dfrac{A}{\mu_{nm}^2}$ $\quad y^3: -\mu_{nm}^2 a_3 = 0$ $\quad y^2: 12a_4 - \mu_{nm}^2 a_2 = 0,$ $\Rightarrow$

$y: 6a_3 - \mu_{nm}^2 a_1 = 0,$ $\quad y^0: 2a_2 - \mu_{nm}^2 a_0 = B$

$$\begin{cases} a_4 = -\dfrac{A}{\mu_{nm}^2} \\ a_3 = 0 \\ a_2 = -\dfrac{12A}{\mu_{nm}^4} \\ a_1 = 0 \\ a_0 = \left(-B - \dfrac{24A}{\mu_{nm}^4}\right) \cdot \dfrac{1}{\mu_{nm}^2} \end{cases} \Rightarrow \quad Y_{nm}^{чн}(y) = -\frac{A}{\mu_{nm}^2} y^4 - \frac{12A}{\mu_{nm}^4} y^2 - \frac{B}{\mu_{nm}^2} - \frac{24A}{\mu_{nm}^6}$$

Отсюда

$Y_{nm}(y) = C_1 ch\, \mu_{nm} y + C_2 sh\, \mu_{nm} y - \dfrac{(Ay^4 + B)}{\mu_{nm}^2} - \dfrac{12A}{\mu_{nm}^4} y^2 - \dfrac{24A}{\mu_{nm}^6}$

$Y_{nm}(0) = C_1 - \dfrac{B}{\mu_{nm}^2} - \dfrac{24A}{\mu_{nm}^6} = 0 \Rightarrow$

$C_1 = \dfrac{24A}{\mu_{nm}^6} + \dfrac{B}{\mu_{nm}^2}$

$$Y_{nm}(2) = C_1 ch 2\mu_{nm} + C_2 sh 2\mu_{nm} - \left(\frac{(16A+B)}{\mu_{nm}^2} - \frac{48A}{\mu_{nm}^4} - \frac{24A}{\mu_{nm}^6}\right) = 0$$

Тогда

$$C_2 = \frac{1}{sh 2\mu_{nm}}\left(\frac{(16A+B)}{\mu_{nm}^2} + \frac{48A}{\mu_{nm}^4} + \frac{24A}{\mu_{nm}^6}\right) - \left(\frac{24A}{\mu_{nm}^6} + \frac{B}{\mu_{nm}^2}\right) \cdot cth 2\mu_{nm}$$

В итоге можем записать решение задачи (1) в виде

$$u(x,y,z) = \left[ch \mu_{13} y - cth 2\mu_{13} sh \mu_{13} y\right] \cos\frac{3\pi x}{2} \cos\frac{7\pi z}{6} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{n2}}{sh 2\mu_{n2}} sh \mu_{n2} y \cdot \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} x\right) \cos\frac{5\pi z}{6} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\left[\frac{24A}{\mu_{nm}^6} + \frac{B}{\mu_{nm}^2}\right] ch \mu_{nm} y + \left[\frac{1}{sh 2\mu_{nm}}\left(\frac{16A+B}{\mu_{nm}^2} +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{48A}{\mu_{nm}^4} + \frac{24A}{\mu_{nm}^6}\right) - \left(\frac{24A}{\mu_{nm}^6} + \frac{B}{\mu_{nm}^2}\right) \cdot cth 2\mu_{nm}\right] sh \mu_{nm} y\right\} \cdot$$

$$\cdot \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} x\right) \cos\left(\frac{\pi + 2\pi m}{6} z\right), \text{ где}$$

$$\varphi_{n2} = \frac{\int_0^1 x^2(x-1)\cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} x\right)dx}{\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2} x\right)dx} = \left(-8\left(-24 + 3(1+2n)\pi \cos \pi n +\right.\right.$$

$$\left.+ \left(-24 + (\pi + 2\pi n)^2\right) \sin \pi n\right) \cdot \frac{1}{(\pi + 2\pi n)^3 (\pi + 2\pi n - \sin 2\pi n)} =$$

$$= \frac{\left(-8\left(-24 + 3(1+2n) \cdot \pi \cdot (-1)^n\right)\right)}{(\pi + 2\pi n)^3 (\pi + 2\pi n)}$$