

# **Численные методы математической физики**

Конспект по 4 курсу специальности «прикладная  
математика»

(лектор А. М. Будник)

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Способы построения и исследования разностных схем.</b>	<b>3</b>
1.1	Сетки и сеточные функции. . . . .	3
1.2	Разностная аппроксимация дифференциальных операторов. . . . .	7
1.2.1	Локальная аппроксимация. . . . .	7

## Введение.

В данном курсе мы будем рассматривать задачи математической физики в частных производных. Основной принцип решения состоит в том, что дифференциальное уравнение мы заменяем разностным и ищем приближенное решение на сетке узлов. Такой способ называется *методом конечных разностей* (*методом сеток*). А раздел численных методов, посвященный теории метода конечных разностей, носит название *теория разностных схем*.

Выделим два основных момента при решении:

1. построение дискретных разностных аппроксимаций для уравнений математической физики и исследование основных характеристик этих аппроксимаций: погрешности, устойчивости и точности разностных схем;
2. решение разностных уравнений прямыми или итерационными методами, которые выбираются из соображений экономичности вычислительного алгоритма.

# Глава 1

## Способы построения и исследования разностных схем.

### 1.1 Сетки и сеточные функции.

При численном решении той или иной математической задачи мы не можем воспроизвести приближенное решение для всех значений аргумента. Поэтому в области задания функции выбирается конечное множество точек, и приближенное решение задачи ищется в этих точках.

- Это множество называется **сеткой**, а отдельные точки этого множества – **узлами сетки**.
- Функция, определенная в узлах сетки, называется **сеточной функцией**.

Заменяя области непрерывного изменения аргумента сеткой, то есть областью дискретного изменения аргумента, мы осуществляем аппроксимацию пространства решения дифференциального уравнения пространством сеточной функции.

#### Пример сетки на отрезке (одномерный случай).

В качестве области определения искомой функции мы рассматриваем отрезок на оси  $x$ .

1. **Равномерная сетка.** Не ограничивая общности, возьмем отрезок  $[0, 1]$  и разобьем его на  $N$  равных частей точками

$$x_0 = 0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = 1.$$

Расстояние между соседними точками назовем *шагом сетки* и обозначим его через  $h$ , а точки  $x_i$  примем в качестве *узлов сетки*,  $i = \overline{0, N}$ . Тогда множество всех  $x_i$  составляют *равномерную сетку* на отрезке  $[0, 1]$ , которую будем обозначать следующим образом

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Множество граничных узлов обозначим как

$$\gamma_h = \{x_0, x_N\}.$$

А все остальные точки образуют *множество внутренних узлов*

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{1, N-1}, h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Таким образом, можно записать

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h.$$

2. **Неравномерная сетка.** Возьмем отрезок  $[0, 1]$  и разобьем его на  $N$  частей точками

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1.$$

Тогда мы можем записать неравномерную сетку с граничными узлами

$$\hat{\omega}_h = \{x_i, i = \overline{0, N}, x_0 = 0, x_N = 1\}.$$

Шаг неравномерной сетки зависит от номера узла и удовлетворяет условию нормировки

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1, \text{ где } h_i = x_i - x_{i-1}.$$

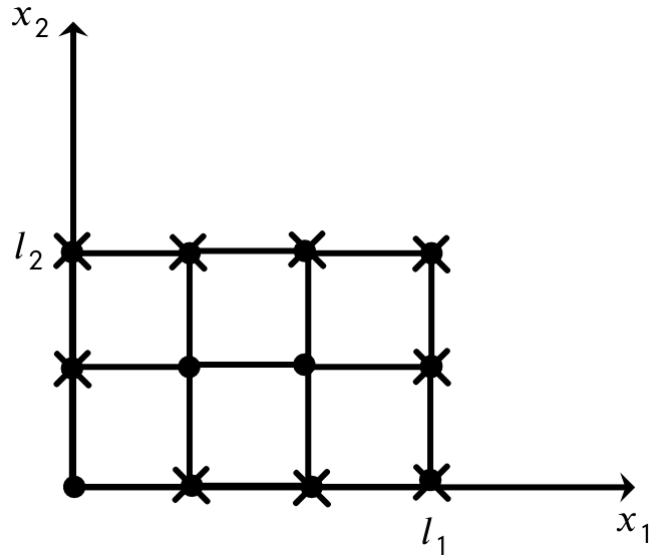
Аналогично случаю равномерной сетки можно записать

$$\hat{\overline{\omega}}_h = \hat{\omega}_h \cup \hat{\gamma}_h.$$

**Пример сетки на плоскости (двумерный случай).**

1. **Прямоугольник.** Исходная область прямоугольника

$$\overline{G} = \{(x_1, x_2), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$



(кружочками обозначены внутренние узлы, а крестиками – внешние).

Сначала построим равномерную сетку. Разобьем отрезки  $[0, l_\alpha]$  на  $N_\alpha$  частей точками

$$0 = x_{\alpha,0} < x_{\alpha,1} < \dots < x_{\alpha,N_\alpha-1} < x_{\alpha,N_\alpha} = l_\alpha.$$

Через точки деления проводим прямые, параллельные координатной оси. В качестве узлов двумерной сетки возьмем точки пересечения этих прямых. Общее количество узлов сетки равно  $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1)$ , а их распределение характеризуется векторным параметром

$$h = \{h_{\alpha,1}, \dots, h_{\alpha,N_\alpha}, h_{\alpha,i_\alpha} = x_{\alpha,i_\alpha} - x_{\alpha,i_\alpha-1}, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha}, \alpha = 1, 2\}.$$

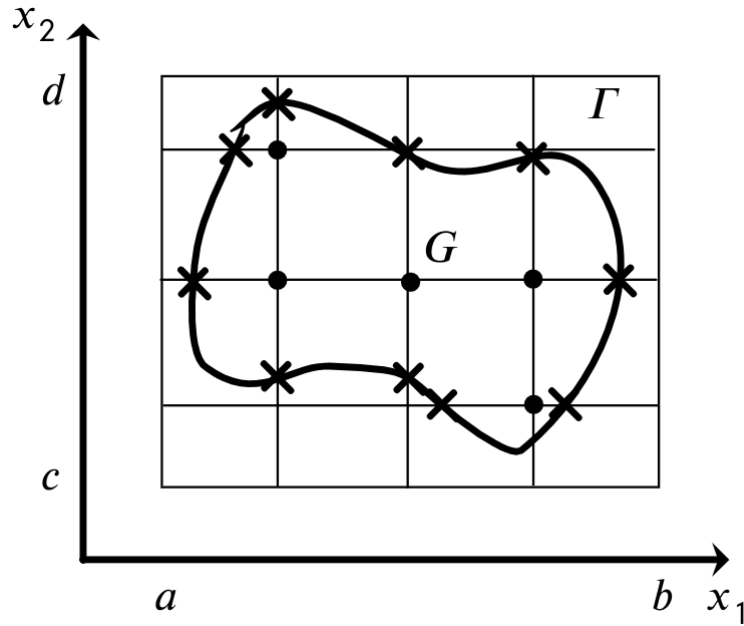
Тогда *неравномерную двумерную сетку* можно обозначить

$$\hat{\omega}_h = \hat{\omega}_{h_1, h_2} = \hat{\omega}_{h_1} \times \hat{\omega}_{h_2} = \{(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}), i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, x_{\alpha,0} = 0, x_{\alpha, N_\alpha} = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

Если по каждому направлению шаги сетки равны между собой, то мы получим *двумерную равномерную сетку*

$$\overline{\omega}_h = \overline{\omega}_{h_1, h_2} = \hat{\omega}_{h_1} \times \hat{\omega}_{h_2} = \left\{ (x_{1,i_1}, x_{2,i_2}), x_{\alpha, i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, i = \overline{0, N_\alpha}, h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha}, \alpha = 1, 2 \right\}.$$

2. **Область сложной формы.** Пусть нам дана область нерегулярной (сложной) формы  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ . Для построения сетки мы заключим эту область в прямоугольник  $[a, b] \times [c, d]$ . В этом прямоугольнике мы строим прямоугольную сетку. Для простоты зададим прямоугольную равномерную сетку.



Те узлы, которые попали внутрь этой сетки, будем считать *внутренними*, обозначим их совокупность  $\omega_h$ . Точки пересечения прямых  $x_\alpha = i_\alpha l_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  с границей  $\Gamma$  назовем *граничными узлами*, обозначим их совокупность  $\gamma_h$ . Тогда сеткой будет множество узлов

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$$

Если исходная сетка в прямоугольнике  $[a, b] \times [c, d]$  является равномерной, то сетка  $\overline{\omega}_h$  в области  $\overline{G}$  является неравномерной.

### Замечания.

1. Аналогичным образом строятся сетки и большей размерности.
2. В зависимости от геометрии исходной области можно использовать и другие ортогональные системы координат.
3. Кроме прямоугольных сеток можно строить, так называемые, треугольные сетки, элементарными ячейками которой являются треугольники.

Пусть  $u(x)$  — это функция непрерывного аргумента  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \bar{G}$  и  $u(x) \in H_0$  ( $H_0$  — функциональное пространство). Если в области  $\bar{G}$  введена сетка  $\bar{\omega}_h$ , то вместо функции  $u(x)$  можно рассматривать функцию дискретного аргумента  $y(x) = y_h$ , где  $x \in \bar{\omega}_h$ , и эту функцию будем называть *сеточной функцией*, значения которой вычисляются в узлах, а сама функция зависит от шага сетки  $h$ .

Множество сеточных функций образует пространство  $H_h$  — *пространство сеточных функций*. Следуя методу конечных разностей, мы заменяем пространство  $H_0$  пространством  $H_h$ . Если  $h$  — параметр, то мы можем рассматривать множество сеточных пространств  $\{H_h\}$  для каждого фиксированного  $h$ .

Для того, чтобы оперировать функциями, нам нужен аппарат для исследования функций и их сравнения. Мы рассматриваем линейные пространства, а для линейных пространств вводится понятие нормы. Соответственно мы определяем *сеточный аналог нормы*

$$\|\cdot\|_0 \sim \|\cdot\|_h.$$

Например, если  $H_0 = C[0, 1]$ , то в нем вводится норма  $\|\cdot\|_0 = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$ . Тогда сеточным аналогом может быть норма

$$\|\cdot\|_h = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)|.$$

Если взять  $H_0 = L_2[0, 1]$ , то в нем вводится норма  $\|\cdot\|_0 = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ . Тогда сеточным аналогом может быть норма

$$\|\cdot\|_h = \left( \sum_{i=1}^{N-1} h y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Предположим, что функция  $u(x)$  — это решение некоторой дифференциальной задачи. Тогда  $y_h(x)$  — это решение приближенной, или разностной задачи. Для сравнения точного и приближенного решений сеточная функция доопределяется во всех точках области  $\bar{G}$ . В результате получается функция непрерывного аргумента  $\tilde{y}_h$ , тогда точность решения может быть оценена как

$$\|\tilde{y}_h - u\|_0.$$

Другой подход заключается в том, что мы исходное пространство  $H_0$  отображаем в пространство  $H_h$ . Каждой функции  $u(x) \in H_0$  ставится в соответствие сеточная функция  $u_h(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ , при этом  $u_h = P_h u \in H_h$ , где  $P_h$  — это линейный оператор проектирования из  $H_0$  в  $H_h$ . Тогда точность решения оценивается как

$$\|y - u_h\|_h.$$

Для того, чтобы эта операция была корректна, естественно требовать, чтобы норма пространства  $H_h$  аппроксимировала норму пространства  $H_0$ , то есть

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0.$$

- Это требование называется *условием согласованности норм*.

## 1.2 Разностная аппроксимация дифференциальных операторов.

### 1.2.1 Локальная аппроксимация.

Пусть задан линейный дифференциальный оператор  $L$  действующий на функцию  $u = u(x)$ . Для того, чтобы аппроксимировать (приближенно вычислить) его в любой точке  $x \in \omega_h$  разностным оператором  $L_h$ , необходимо в начале указать или выбрать шаблон  $\Pi(x)$ .

- Под **шаблоном**  $\Pi(x)$  мы понимаем множество узлов сетки, которое будет использоваться при аппроксимации оператора  $L$  оператором  $L_h$  в точке  $x$ .

- **Погрешность аппроксимации дифференциального оператора  $L$  разностным оператором  $L_h$  в точке  $x$  называется величина**

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x), \quad x \in \omega_h. \quad (1)$$

- Будем говорить, что **разностный оператор  $L_h$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $L$  с порядком  $m > 0$  в точке  $x$ , если можно представить**

$$\psi(x) = O(h^m).$$

Рассмотрим способ построения разностных операторов, получивший название *метод неопределенных коэффициентов*. На выбранном шаблоне  $\Pi(x)$  разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции в точках шаблона

$$L_h u(x) = \sum_{\xi \in \Pi(x)} A_h(x, \xi) u(\xi). \quad (2)$$

В формуле (2)  $A_h(x, \xi)$  – это неизвестные коэффициенты, выбранные таким образом, чтобы погрешность аппроксимации имела в точке  $x$  заданный (чаще всего максимально возможный) порядок. Практический выбор значений коэффициентов осуществляется путем разложения погрешности аппроксимации в ряд Тейлора, то есть мы представляем

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \Pi(x)} A_h(x, \xi) u(\xi) - Lu(x),$$

а затем раскладываем получившееся выражение в ряд Тейлора в окрестности точки  $x$ . После приведения мы получаем в итоге линейную комбинацию

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \Pi(x)} A_h(x, \xi) u(\xi) - Lu(x) = \sum_{|j| \geq 0} B_h^{(j)}(x) u^{(j)}(x).$$

После этого мы приравниваем к нулю максимально возможное количество первых членов этого разложения. Как правило, количество этих членов совпадает с количеством неизвестных коэффициентов. После этого, решив систему линейных уравнений, находим коэффициенты  $A_h$  и по формуле (2) записываем искомый разностный оператор  $L_h$ .

#### Замечания.

1. Выбор шаблона зависит от порядка производных, входящих в исходный оператор  $L$ , а также от требуемой точности аппроксимации.



2. Легко видеть, что для аппроксимации дифференциального оператора, содержащего производную  $k$ -ого порядка по некоторой переменной, необходимо использовать шаблон, содержащий не менее  $(k + 1)$  точку вдоль координатного направления соответствующей переменной.
3. Метод неопределенных коэффициентов является не единственным способом построения разностных операторов. Известен в литературе также метод *численного дифференцирования*.

### Примеры.

1. Пусть задан дифференциальный оператор

$$Lu(x) = \frac{du(x)}{dx} = u'(x).$$

- (а) Пусть нам дан шаблон  $\Pi(x) = \{x, x + h\}$ . Тогда по формуле (2) составляем линейную комбинацию

$$u(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x + h).$$

Записываем выражение для погрешности аппроксимации

$$\psi(x) a_0 u(x) + a_1 u(x + h) - u'(x).$$

Затем производим разложение выражения в ряд Тейлора в окрестности точки  $x$  и приводим подобные при значениях функции и ее производных

$$\psi(x) a_0 u(x) + a_1 u(x + h) - u'(x) = \underbrace{(a_0 + a_1)}_{B^{(0)}} u(x) + \underbrace{(ha_1 - 1)}_{B^{(1)}} u'(x) + \frac{h^2}{2} a_1 u''(x) + \dots$$

Приравнявая коэффициенты  $B^{(j)}$  к нулю, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0, \\ ha_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$a_0 = -\frac{1}{h}, \quad a_1 = \frac{1}{h}.$$

Таким образом, мы построили разностный оператор вида

$$L_h u(x) = \frac{u(x + h) - u(x)}{h} = u_x \tag{3}$$

- Обозначение называется **правой разностной производной**.

При этом

$$\psi(x) = \frac{h}{2} u''(x) + \dots = O(h),$$

то есть разностный оператор (3) аппроксимирует исходный оператор  $L$  с первым порядком.

- Величина  $\frac{h}{2} u''(x)$  называется **главным членом погрешности аппроксимации**.

- (b) Пусть нам дан шаблон  $\Pi(x) = \{x - h, x\}$ . Поступая аналогичным образом, мы можем построить оператор вида

$$L_h u(x) = \frac{u(x) - u(x - h)}{h} = u_{\bar{x}} \quad (4)$$

- Обозначение  $u_{\bar{x}}$  называется **левой разностной производной**.

Легко видеть, что

$$\psi(x) = -\frac{h}{2}u''(x) + \dots = O(h).$$

- (с) Пусть нам дан шаблон  $\Pi(x) = \{x - h, x, x + h\}$ . Прделав те же вычисления, мы получим выражение

$$L_h u(x) = \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h} = u_{\circ x} \quad (5)$$

- Обозначение  $u_{\circ x}$  называется **центральной разностной производной**.

Легко видеть, что

$$\psi(x) = -\frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^4) = O(h^2).$$

Можно заметить, что с увеличением точек шаблона будет также увеличиваться погрешность аппроксимации.

Можно построить однопараметрическое семейство операторов для аппроксимации первой производной следующего вида

$$L_h^{(\sigma)} u(x) = \sigma u_x + (1 - \sigma)u_{\bar{x}},$$

где  $\sigma$  – это любое вещественное число. Выражение для погрешности имеет следующий вид

$$\psi(x) = (2\sigma - 1)\frac{h}{2}u''(x) + O(h^2).$$

Очевидно, что при любом  $\sigma \neq \frac{1}{2}$  разностный оператор будет иметь первый порядок аппроксимации  $\psi(x) = O(h)$ . Иначе мы получаем второй порядок аппроксимации  $\psi(x) = O(h^2)$ , при этом легко видеть, что

$$L_h^{(0,5)} = \frac{1}{2}(u_x + u_{\bar{x}}) = u_{\hat{x}}.$$

2. Пусть нам дан дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u''(x).$$

Оператор второго порядка, поэтому для аппроксимации нужно как минимум 3 точки. Возьмем шаблон  $\Pi(x) = \{x - h, x, x + h\}$ . Применяя метод неопределенных коэффициентов, мы получим следующий разностный оператор

$$L_h u(x) = \frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h))}{h^2} = u_{\bar{x}x} \quad (6)$$

- Обозначение  $u_{\bar{x}x}$  называется **второй разностной производной**.

Погрешность будет иметь вид

$$\psi(x) = \frac{h^2}{12} u^{IV}(x) + O(h^4) = O(h^2),$$

то есть имеет второй порядок, а не первый, как мы могли ожидать. Оказывается, что именно симметрия шаблона обеспечивает повышение порядка аппроксимации. Но на произвольной сетке мы получили бы первый порядок аппроксимации.

#### Замечания.

- (а) Символы, используемые для обозначения разностных производных неслучайны, а являются формальными операторами разностного дифференцирования и предписывают, как осуществлять аппроксимации. Например, если мы имеем разностный оператор  $u_{\bar{x}x}$ , то можно записать

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}x} = (u_{\bar{x}}(x))_x &= \frac{u_{\bar{x}}(x+h) - u_{\bar{x}}(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \right) = \\ &= \frac{u(x+h) - 2u(x) - u(x-h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Можно также записывать

$$u_{\bar{x}}(x+h) = u_x(x), \quad \frac{1}{2}(u_x + u_{\bar{x}}) = u_{ox}.$$

Соответственно, мы можем конструировать разные операторы. Существуют также и разностные аналоги формул Грина.

- (б) Разложение погрешности  $\psi(x)$  по степеням  $h$  можно использовать для повышения порядка аппроксимации. Например, мы можем заменить четвертую производную четвертой разностной производной в выражении

$$u_{\bar{x}x}(x) - u''(x) = \frac{h^2}{12} u^{IV}(x) + O(h^4) = \frac{h^2}{12} (u_{\bar{x}x\bar{x}x}(x) + O(h^2)) + O(h^4).$$

Тогда можно построить разностный оператор

$$L_h u(x) = u_{\bar{x}x}(x) - \frac{h^2}{12} u_{\bar{x}x\bar{x}x}(x).$$

Шаблон уже будет

$$\Pi(x) = \{x - 2h, x - h, x, x + h, x + 2h\},$$

а погрешность аппроксимации

$$\psi(x) = O(h^4).$$

3. Пусть дан дифференциальный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t), \quad (x, t) \in \omega_{ht}.$$

- (а) Шаблон может иметь вид [рисунок три точки внизу, одна точка сверху. Центральная нижняя жирная].
- (б) Шаблон может иметь вид [рисунок три точки сверху, одна точка снизу. Центральная нижняя жирная].
- (с) Шаблон может иметь вид [рисунок три точки сверху, три точки снизу, центральная нижняя жирная].

Для шаблона (а) мы можем записать оператор

$$L_{h\tau}u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

Такая форма записи называется *индексной*. Учитывая введенные обозначения, мы можем записать этот оператор также в форме

$$L_{h\tau}u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2} = u_t - u_{\bar{x}x}. \quad (7)$$

Используем следующие обозначения:

$$u(x, t) = u, \quad u(x, t + \tau) = \hat{u}, \quad u(x, t - \tau) = \check{u}.$$

Тогда для случая (б) можно записать

$$L_{h\tau}u = u_t - \hat{u}_{\bar{x}x}. \quad (8)$$

Для случая (с) мы можем построить однопараметрическое семейство аппроксимаций вида

$$L_{h\tau}^{(\sigma)}u = u_{\hat{t}} - (\sigma \hat{u}_{\bar{x}x} - (1 - \sigma)u_{\bar{x}x}), \quad \sigma \neq 0, \quad \sigma \neq 1. \quad (9)$$

Разностный оператор (9) аппроксимирует исходный дифференциальный оператор со вторым порядком по  $x$  при любых  $\sigma$  и первым порядком по  $\tau$  при  $\sigma = 0, \sigma = 1$ . Или вторым порядком по  $\tau$  при  $\sigma = \frac{1}{2}$ . То есть можно записать

$$\begin{cases} \psi(x, t) = O(\tau + h^2), & \sigma \neq \frac{1}{2}, \\ \psi(x, t) = O(\tau^2 + h^2), & \sigma = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

4. Пусть дан дифференциальный оператор

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Сейчас по каждому из направлений у нас будет по 3 точки.

- (а) Шаблон может иметь вид [рисунок три точки внизу, две вверх по центру. Центральная жирная].

(b) Шаблон может иметь вид [рисунок как предыдущий но наоборот].

(c) Шаблон может иметь вид [рисунок одна жирная по центру и по одной в каждом направлении].

(d) Шаблон может иметь вид [4 квадрата, жирная по центру].

Запишем двухпараметрическое семейство для варианта (d)

$$L_{h\tau}^{(\sigma_1, \sigma_2)} u = u_{\bar{t}t} - (\sigma_1 \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) u_{\bar{x}x} + \sigma_2 \check{u}_{\bar{x}x}). \quad (11)$$

Для шаблона (a)

$$L_{h\tau}^{(0,1)} u = u_{\bar{t}t} - \check{u}_{\bar{x}x}. \quad (12)$$

Для шаблона (b)

$$L_{h\tau}^{(1,0)} u = u_{\bar{t}t} - \hat{u}_{\bar{x}x}. \quad (13)$$

Для шаблона (c)

$$L_{h\tau}^{(0,0)} u = u_{\bar{t}t} - u_{\bar{x}x}. \quad (14)$$

Погрешность аппроксимации оператора (14) будет равна

$$\psi(x, t) = O(h^2 + \tau^2), \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0.$$

Если же  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , то погрешность будет также иметь второй порядок

$$\psi(x, t) = O(h^2 + \tau^2).$$

Для других значений погрешность аппроксимации по  $h$  понижается.