Сплайн-интерполирование естественным кубическим сплайном

Условие

Построить естественный кубический сплайн для функции $y = f(x)$ заданной таблицей значений

x	0	1	2	4
$f(x)$	2	3	5	10

Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 3$.

Алгоритм решения

Для решения данной задачи нам понадобятся следующие формулы (N – количество узлов):

1. расстояние между i-ым и $(i-1)$-ым узлами
$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = \overline{1, N} \tag{1}$$

2. формула кубического сплайна
$$\begin{aligned} S_3(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \\ + \left(f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{(x_i - x)}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, N} \end{aligned} \tag{2}$$

3. формулы для коэффициентов кубического сплайна
$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, N-1} \tag{3}$$

4. естественные граничные условия для коэффициентов (так как не заданы значения производных)
$$M_0 = 0, \quad M_N = 0. \tag{4}$$

Сначала по формуле (1) найдем расстояния между узлами:

$$\begin{aligned} h_1 &= x_1 - x_0 = 1, \\ h_2 &= x_2 - x_1 = 1, \\ h_3 &= x_3 - x_2 = 2. \end{aligned}$$

Теперь составим по формулам (3) и (4) СЛАУ для коэффициентов кубического сплайна:

$$\begin{cases} M_0 = 0, \\ \dfrac{h_1}{6}M_0 + \dfrac{h_1 + h_2}{3}M_1 + \dfrac{h_2}{6}M_2 = \dfrac{f_2 - f_1}{h_2} - \dfrac{f_1 - f_0}{h_1}, \\ \dfrac{h_2}{6}M_1 + \dfrac{h_2 + h_3}{3}M_2 + \dfrac{h_3}{6}M_3 = \dfrac{f_3 - f_2}{h_3} - \dfrac{f_2 - f_1}{h_2}, \\ M_3 = 0. \end{cases}$$

Подставим в эту систему значения (h_i нам известны, $M_1 = M_3 = 0$):

$$\begin{cases} M_0 = 0, \\ \dfrac{1+1}{3}M_1 + \dfrac{2}{6}M_2 = \dfrac{5-3}{1} - \dfrac{3-2}{1}, \\ \\ \dfrac{1}{6}M_1 + \dfrac{1+2}{3}M_2 = \dfrac{10-5}{2} - \dfrac{5-3}{1}, \\ M_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_0 = 0, \\ \dfrac{2}{3}M_1 + \dfrac{1}{3}M_2 = 1, \\ \\ \dfrac{1}{6}M_1 + M_2 = \dfrac{1}{2}, \\ M_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем методом Гаусса коэффициенты M_1, M_2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{23}{4} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{6}{23} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{33}{23} \\ 0 & 1 & \frac{6}{23} \end{array}\right)$$

То есть

$$M_0 = 0, \quad M_1 = \frac{33}{23}, \quad M_2 = \frac{6}{23}, \quad M_3 = 0.$$

У нас есть все необходимые значения для того, чтобы построить кубический сплайн, кроме x_i, x_{i-1}. По условию необходимо вычислить значение в точке $x = 3$, она находится между узлами $x_2 = 2$ и $x_3 = 4$. Тогда кубический сплайн по формуле (2) мы будем строить на узлах x_1, x_2.

В нашем случае формула (2) примет вид

$$S_3(x) = M_2\frac{(x_3-x)^3}{6h_3} + M_3\frac{(x-x_2)^3}{6h_3} + \left(f_3 - M_3\frac{h_3^2}{6}\right)\frac{x-x_2}{h_3} + \\ + \left(f_2 - M_2\frac{h_3^2}{6}\right)\frac{(x_3-x)}{h_3}, \quad x \in [x_2, x_3].$$

Подставляем все известные нам значения:

$$S_3(x) = \frac{6}{23}\cdot\frac{(4-x)^3}{12} + 10\cdot\frac{x-2}{2} + \left(5 - \frac{6}{23}\cdot\frac{4}{6}\right)\frac{(4-x)}{2}, \quad x \in [2, 4].$$

Сделаем некоторые преобразования для упрощения формулы

$$S_3(x) = \frac{(4-x)^3}{46} + \frac{119x}{46} - \frac{8}{23}, \quad x \in [2, 4].$$

Найдем значение в точке $x = 3$:

$$S_3(3) = \frac{1}{46} + \frac{357}{46} - \frac{8}{23} = \frac{171}{23}.$$