Разностная аппроксимация дифференциальных задач для ОДУ

Условия

1. Построить разностную схему в индексной и безиндексной форме для дифференциальной задачи с граничными условиями первого рода

   $$\begin{cases} u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = -f(x), \ 0 < x < 1, \\ u(0) = \mu_0, \\ u(1) = \mu_1. \end{cases}$$

   Определить порядок аппроксимации разностной схемой. (Решение)

2. Построить разностную схему в индексной и безиндексной форме для дифференциальной задачи с граничными условиями второго рода

   $$\begin{cases} u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = -f(x), \ 0 < x < 1, \\ u'(0) = \mu_0, \\ u'(1) = \mu_1. \end{cases}$$

   Определить порядок аппроксимации разностной схемой. (Решение)

3. Построить разностную схему в индексной и безиндексной форме для дифференциальной задачи с граничными условиями третьего рода

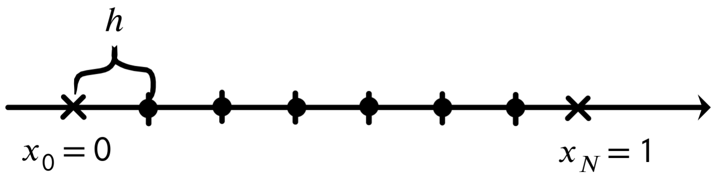
   $$\begin{cases} u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = -f(x), \ 0 < x < 1, \\ u'(0) = \sigma_0 u(0) - \mu_0, \\ u'(1) = \sigma_1 u(1) - \mu_1. \end{cases}$$

   Определить порядок аппроксимации разностной схемой. (Решение)

Решения

1. Разностную схему для дифференциальной задачи будем строить в два этапа.

   Первый этап – это задание сетки узлов. Для простоты зададим равномерную сетку узлов
$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{0, N}, h = \frac{1}{N} \right\},$$
которую можно также представить в виде
$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h,$$
где
$$\omega_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{1, N-1}, h = \frac{1}{N} \right\},\ \gamma_h = \{x_0 = 0, x_N = 1\}.$$
Графически это можно изобразить как



где точки из ω_h обозначены через точки, а точки из γ_h – через крестики. На этой сетке мы определяем сеточную функцию $y = y(x), x \in \overline{\omega}_h$, которая будет являться дискретным аналогом (аппроксимацией) решения $u(x)$.

   Второй этап. Заменяя в исходном дифференциальном уравнении производные от функции на разностные аналоги, можем построить разностное уравнение
$$y_{\overline{x}x}(x) + p(x)y_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x)y(x) = -f(x),\ x \in \omega_h,$$
то есть такая аппроксимация будет на всех узлах сетки кроме 0 и 1. В краевых точках мы также заменяем исходную функцию на сеточную и получаем
$$\begin{cases} y(0) = \mu_0, \\ y(1) = \mu_1. \end{cases}$$
Тогда, собрав вместе аппроксимацию уравнения и граничных условий, получим *разностную аппроксимацию дифференциальной задачи в безиндексной форме*
$$\begin{cases} y_{\overline{x}x}(x) + p(x)y_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x)y(x) = -f(x),\ x \in \omega_h, \\ y(0) = \mu_0, \\ y(1) = \mu_1. \end{cases}$$
Чтобы записать эту задачу в индексной форме, распишем разностные производные, считая $y(x_i) = y_i$. Тогда получим *разностную аппроксимацию дифференциальной задачи в индексной форме*
$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p(x_i)\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = -f(x_i),\ i = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = \mu_0, \\ y_N = \mu_1. \end{cases}$$

Далее нам нужно исследовать порядок аппроксимации задачи разностной схемой. Для этого рассмотрим поведение погрешности аппроксимации для уравнения, а затем для граничных условий:

$$\psi_h(x) = u_{\overline{x}x}(x) + p(x)u_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x)u(x) + f(x).$$

Поскольку мы можем записать

$$u_{\overline{x}x}(x) = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + O(h^3),$$

$$u_{\overset{\circ}{x}}(x) = u'(x) + \frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^3),$$

то

$$\psi_h(x) = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + p(x)\left[u'(x) + \frac{h^2}{6}u'''(x)\right] + q(x)u(x) + f(x) + O(h^3).$$

Из исходной задачи мы имеем $u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = -f(x)$, поэтому

$$\psi_h(x) = \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + \frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^3) = O(h^2).$$

То есть разностное уравнение аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение со вторым порядком. Рассмотрим погрешность аппроксимации граничных условий

$$\nu_h(0) = u(0) - \mu_0 = 0,$$

$$\nu_h(1) = u(1) - \mu_1 = 0,$$

то есть граничные условия аппроксимируются точно

$$\nu_h(x) = \nu_h(0) + \nu_h(1) = 0.$$

Таким образом, общий порядок аппроксимации

$$\Psi_h(x) = \psi_h(x) + \nu_h(x) = O(h^2),$$

то есть разностная схема аппроксимирует поставленную дифференциальную задачу со вторым порядком точности.

Замечание. Все эти результаты были получены за счет замены первой производной центральной разностной производной $u'(x) = u_{\overset{\circ}{x}}(x)$. Такая аппроксимация имеет погрешность $\psi_h(x) = O(h^2)$. Если бы мы заменили первую производную на левую (правую) разностную производную, то погрешность такой аппроксимации была бы $\psi_h(x) = O(h)$. А тогда можно показать, что и дифференциальное уравнение и, как следствие, вся дифференциальная задача будут аппроксимироваться с первым порядком точности.

2. Разностную схему для дифференциальной задачи будем строить в два этапа.

Первый этап – это задание сетки узлов. Для простоты зададим равномерную сетку узлов

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{0, N}, h = \frac{1}{N} \right\},$$

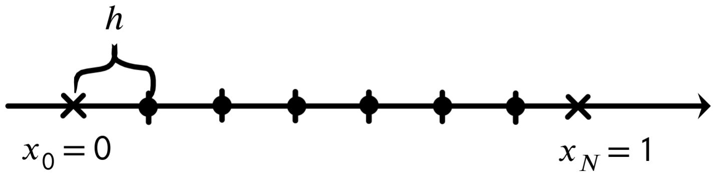
которую можно также представить в виде

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h,$$

где

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{1, N-1}, h = \frac{1}{N} \right\},\ \gamma_h = \{x_0 = 0, x_N = 1\}.$$

Графически это можно изобразить как



где точки из ω_h обозначены через точки, а точки из γ_h – через крестики. На этой сетке мы определяем сеточную функцию $y = y(x), x \in \overline{\omega}_h$, которая будет являться дискретным аналогом (аппроксимацией) решения $u(x)$.

Второй этап. Заменяя в исходном дифференциальном уравнении производные от функции на разностные аналоги, можем построить разностное уравнение

$$y_{\overline{x}x}(x) + p(x)y_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x)y(x) = -f(x),\ x \in \omega_h,$$

то есть такая аппроксимация будет на всех узлах сетки кроме 0 и 1. В краевых точках мы также заменяем исходную функцию на сеточный аналог и получаем

$$\begin{cases} y_x(0) = \mu_0, \\ y_{\overline{x}}(1) = \mu_1. \end{cases}$$

Заметим, что в данном случае мы можем заменить левое (правое) граничное условие только правой (левой) разностной производной, поскольку от левой (правой) границы мы можем двигаться только вправо (влево).

Тогда, собрав вместе аппроксимацию уравнения и граничных условий, получим *разностную аппроксимацию дифференциальной задачи в безиндексной форме*

$$\begin{cases} y_{\overline{x}x}(x) + p(x)y_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x)y(x) = -f(x),\ x \in \omega_h, \\ y_x(0) = \mu_0, \\ y_{\overline{x}}(1) = \mu_1. \end{cases}$$

Чтобы записать эту задачу в индексной форме, распишем разностные производные, считая $y(x_i) = y_i$. Тогда получим *разностную аппроксимацию дифференциальной* *задачи в индексной форме*

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p(x_i)\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = -f(x_i), \ i = \overline{1, N-1}, \\ \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \mu_0, \\ \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} = \mu_1. \end{cases}$$

Далее нам нужно исследовать порядок аппроксимации задачи разностной схемой. Для этого рассмотрим поведение погрешности аппроксимации для уравнения, а затем для граничных условий:

$$\psi_h(x) = u_{\overline{x}x}(x) + p(x)u_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x)u(x) + f(x).$$

Поскольку мы можем записать

$$u_{\overline{x}x}(x) = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + O(h^3),$$

$$u_{\overset{\circ}{x}}(x) = u'(x) + \frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^3),$$

то

$$\psi_h(x) = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + p(x)\left[u'(x) + \frac{h^2}{6}u'''(x)\right] + q(x)u(x) + f(x) + O(h^3).$$

Из исходной задачи мы имеем $u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = -f(x)$, поэтому

$$\psi_h(x) = \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + \frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^3) = O(h^2).$$

То есть разностное уравнение аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение со вторым порядком. Учитывая, что

$$u_x(x) = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2),$$

$$u_{\overline{x}}(x) = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2),$$

рассмотрим погрешность аппроксимации граничных условий,

$$\nu_h(0) = u_x(0) - \mu_0 = u'(0) + \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) - \mu_0 = \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) = O(h),$$

$$\nu_h(1) = u_{\overline{x}}(1) - \mu_1 = u'(1) + \frac{h}{2}u''(1) + O(h^2) - \mu_1 = \frac{h}{2}u''(1) + O(h^2) = O(h).$$

то есть граничные условия аппроксимируются с первым порядком

$$\nu_h = \nu_h(0) + \nu_h(1) = O(h).$$

Таким образом, общий порядок аппроксимации

$$\Psi_h(x) = \psi_h(x) + \nu_h(x) = O(h),$$

то есть разностная схема аппроксимирует поставленную дифференциальную задачу с первым порядком точности.

3. Разностную схему для дифференциальной задачи будем строить в два этапа.

Первый этап – это задание сетки узлов. Для простоты зададим равномерную сетку узлов

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{0, N}, h = \frac{1}{N} \right\},$$

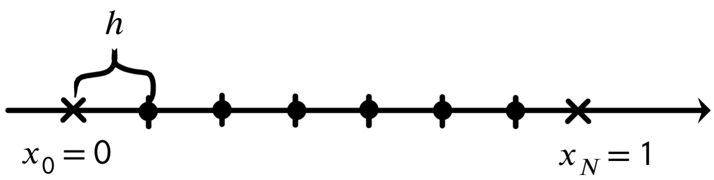
которую можно также представить в виде

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h,$$

где

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{1, N-1}, h = \frac{1}{N} \right\},\ \gamma_h = \{x_0 = 0, x_N = 1\}.$$

Графически это можно изобразить как



где точки из ω_h обозначены через точки, а точки из γ_h – через крестики. На этой сетке мы определяем сеточную функцию $y = y(x), x \in \overline{\omega}_h$, которая будет являться дискретным аналогом (аппроксимацией) решения $u(x)$.

Второй этап. Заменяя в исходном дифференциальном уравнении производные от функции на разностные аналоги, можем построить разностное уравнение

$$y_{\overline{x}x}(x) + p(x) y_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x) y(x) = -f(x),\ x \in \omega_h,$$

то есть такая аппроксимация будет на всех узлах сетки кроме 0 и 1. В краевых точках мы также заменяем исходную функцию на сеточный аналог и получаем

$$\begin{cases} y_x(0) = \sigma_0 y(0) - \mu_0, \\ y_{\overline{x}}(1) = \sigma_1 y(1) - \mu_1. \end{cases}$$

Заметим, что в данном случае мы можем заменить левое (правое) граничное условие только правой (левой) разностной производной, поскольку от левой (правой) границы мы можем двигаться только вправо (влево).

Тогда, собрав вместе аппроксимацию уравнения и граничных условий, получим *разностную аппроксимацию дифференциальной задачи в безиндексной форме*

$$\begin{cases} y_{\overline{x}x}(x) + p(x) y_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x) y(x) = -f(x),\ x \in \omega_h, \\ y_x(0) = \sigma_0 y(0) - \mu_0, \\ y_{\overline{x}}(1) = \sigma_1 y(1) - \mu_1. \end{cases}$$

Чтобы записать эту задачу в индексной форме, распишем разностные производные, считая $y(x_i) = y_i$. Тогда получим *разностную аппроксимацию дифференциальной* *задачи в индексной форме*

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+p(x_i)\dfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q(x_i)y_i=-f(x_i),\ i=\overline{1,N-1}, \\ \dfrac{y_1-y_0}{h}=\sigma_0 y_0-\mu_0, \\ \dfrac{y_N-y_{N-1}}{h}=\sigma_1 y_N-\mu_1. \end{cases}$$

Далее нам нужно исследовать порядок аппроксимации задачи разностной схемой. Для этого рассмотрим поведение погрешности аппроксимации для уравнения, а затем для граничных условий:

$$\psi_h(x)=u_{\overline{x}x}(x)+p(x)u_{\overset{\circ}{x}}(x)+q(x)u(x)+f(x).$$

Поскольку мы можем записать

$$u_{\overline{x}x}(x)=u''(x)+\frac{h^2}{12}u^{IV}(x)+O(h^3),$$

$$u_{\overset{\circ}{x}}(x)=u'(x)+\frac{h^2}{6}u'''(x)+O(h^3),$$

то

$$\psi_h(x)=u''(x)+\frac{h^2}{12}u^{IV}(x)+p(x)\left[u'(x)+\frac{h^2}{6}u'''(x)\right]+q(x)u(x)+f(x)+O(h^3).$$

Из исходной задачи мы имеем $u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=-f(x)$, поэтому

$$\psi_h(x)=\frac{h^2}{12}u^{IV}(x)+\frac{h^2}{6}u'''(x)+O(h^3)=O(h^2).$$

То есть разностное уравнение аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение со вторым порядком. Учитывая, что

$$u_x(x)=u'(x)+\frac{h}{2}u''(x)+O(h^2),$$

$$u_{\overline{x}}(x)=u'(x)+\frac{h}{2}u''(x)+O(h^2),$$

рассмотрим погрешность аппроксимации граничных условий,

$$\nu_h(0)=u_x(0)-\sigma_0 u(0)+\mu_0=u'(0)+\frac{h}{2}u''(0)+O(h^2)-\sigma_0 u(0)+\mu_0.$$

Из поставленной задачи нам известно, что $u'(0)=\sigma_0 u(0)+\mu_0$. Тогда, используя этот факт, получим

$$\nu_h(0)=\frac{h}{2}u''(0)+O(h^2)=O(h).$$

Аналогично для второго граничного условия

$$\nu_h(1)=u_{\overline{x}}(1)-\sigma_1 u(1)+\mu_1=u'(1)+\frac{h}{2}u''(1)+O(h^2)-\sigma_1 u(1)+\mu_1=\frac{h}{2}u''(1)+O(h^2)=O(h).$$

то есть граничные условия аппроксимируются с первым порядком

$$\nu_h=\nu_h(0)+\nu_h(1)=O(h).$$

Таким образом, общий порядок аппроксимации

$$\Psi_h(x)=\psi_h(x)+\nu_h(x)=O(h),$$

то есть разностная схема аппроксимирует поставленную дифференциальную задачу с первым порядком точности.