# Колебание тонкой струны.

**Постановка задачи.** Методом разделения переменных найти решение смешанной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 + \dfrac{2x}{1-hl},\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = x,\ 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u|_{x=0} = 0,\ t \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} - hu\Big|_{x=l} = t^2,\ t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $h > 0$, $l > 0$.

**Решение задачи.** Поставленная дифференциальная задача для является *смешанной задачей для уравнения гиперболического типа с неоднородными граничными условиями третьего рода.* Для решения этой задачи приведем ее к смешанной задаче с *однородными* граничными условиями. Будем искать решение задачи (1) в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t). \tag{2}$$

Функцию $w(x,t)$ мы будем задавать таким образом, чтобы граничные условия стали однородными. Пусть

$$w(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \tag{3}$$

где функции $a(t), b(t), c(t)$ подлежат определению. Чтобы добиться однородности в граничных условиях, функция $w(x,t)$ должна удовлетворять граничным условиям задачи (1), то есть

$$\begin{cases} w|_{x=0} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} - hw\Big|_{x=l} = t^2. \end{cases}$$

Подставим первое условие в общий вид (3):

$$w|_{x=0} = c(t) = 0.$$

Таким образом, $c(t) = 0$. Подставим второе условие в общий вид (3):

$$\frac{\partial w}{\partial x} - hw\Big|_{x=l} = 2a(t)x + b(t) - ha(t)x^2 - hb(t)x - hc(t)\Big|_{x=l} =$$
$$= [x = l,\ c(t) = 0] = (2l - hl^2)a(t) + (1 - hl)b(t) = t^2.$$

Пусть для простоты $a(t) = 0$, тогда

$$(1 - hl)b(t) = t^2.$$

Отсюда

$$b(t) = \frac{t^2}{1 - hl}.$$

В итоге получим

$$w(x,t) = \frac{xt^2}{1 - hl}.$$

Подставляя это выражение в вид (2), получим новый вид

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{xt^2}{1-hl}. \tag{4}$$

Для получения новой дифференциальной задачи с однородными граничными условиями, подставим общий вид решения (4) в задачу (1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 1 + \dfrac{2x}{1-hl} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ v|_{t=0} = x - w|_{t=0},\ 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 - \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0},\ 0 \leqslant x \leqslant l, \\ v|_{x=0} = 0,\ t \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - hu\Big|_{x=l} = 0,\ t \geqslant 0, \end{cases}$$

Подставляя известное значение $w(x,t)$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 1,\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ v|_{t=0} = x,\ 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l, \\ v|_{x=0} = 0,\ t \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - hu\Big|_{x=l} = 0,\ t \geqslant 0, \end{cases} \tag{5}$$

Полученная задача (5) является *смешанной задачей для уравнения гиперболического типа с однородными граничными условиями третьего рода и неоднородным уравнением.* По методу разделения переменных необходимо искать решение задачи (5) в виде функции

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \tag{6}$$

где функции $X_k(x)$ – это собственные функции дифференциального оператора, которые можно найти как решения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля (которую мы получили бы в случае однородного уравнения)

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(l) - hX(l) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Найдем решение обыкновенного дифференциального уравнения задачи (7). Для этого запишем соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\nu^2 + \lambda^2 = 0.$$

Найдем корни этого характеристического уравнения

$$\nu_{1,2} = \pm i\lambda.$$

Тогда общее решение данного обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Подставим в нее краевые условия. Сперва подставим первое условие:

$$X(0) = C_1 = 0.$$

Таким образом, $C_1 = 0$. Подставим второе условие:

$$X'(l) - hX(l) = [C_1 = 0] = \lambda C_2 \cos \lambda l - hC_2 \sin \lambda l = 0.$$

Отсюда

$$C_2(\lambda \cos \lambda l - h \sin \lambda l) = 0.$$

Так как тривиальное решение нас не интересует, то $C_2 \neq 0$. Тогда

$$\lambda \cos \lambda l - h \sin \lambda l = 0.$$

Отсюда получаем нелинейное уравнение

$$\frac{\lambda}{h} = \operatorname{tg} \lambda l, \tag{8}$$

решения $\lambda_k$ которого можно найти численными методами. Эти решения и будут являться собственными значениями дифференциального оператора. Тогда собственные функции оператора имеют вид

$$X_k(x) = C_2 \sin \lambda_k x,$$

но так как собственные функции определены с точностью до постоянного множителя, то мы можем отбросить $C_2$ и получить собственные функции

$$X_k(x) = \sin \lambda_k x.$$

Подставим эти функции в общий вид решения (6), тогда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \lambda_k x. \tag{9}$$

Теперь нужно определить вид функций $T_k(t)$. Для этого подставим общий вид решения (9) в уравнение и начальные условия задачи (5). Сперва подставим в уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin \lambda_k x + \lambda_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \lambda_k x = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \lambda_k x.$$

Мы разложим неоднородность $f(x,t) = 1$ в ряд Фурье по собственным функциям, чтобы можно было приравнять коэффициенты степенных рядов

$$T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = f_k,$$

где

$$f_k = \frac{\int\limits_0^l 1 \cdot \sin \lambda_k x \, dx}{\int\limits_0^l \sin^2 \lambda_k x \, dx} = \frac{1 - \cos \lambda_k l}{\lambda_k \left( \dfrac{l}{2} - \dfrac{\sin 2\lambda_k l}{4\lambda_k} \right)} \tag{10}$$

Аналогично подставляя вид решения (9) в первое начальное условие, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin\lambda_k x = x = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\lambda_k x.$$

Тогда

$$T_k(0) = \varphi_k,$$

где

$$\varphi_k = \frac{\int\limits_0^l x\cdot\sin\lambda_k x\ dx}{\int\limits_0^l \sin^2\lambda_k x\ dx} = \frac{\sin\lambda_k l - \lambda_k l\cos\lambda_k l}{\lambda_k^2\left(\dfrac{l}{2} - \dfrac{\sin 2\lambda_k l}{4\lambda_k}\right)} \tag{11}$$

Подставим вид решения (9) во второе начальное условие и получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)\sin\lambda_k x = 0.$$

Таким образом,

$$T_k'(0) = 0.$$

В итоге, собрав воедино получившиеся результаты, получим задачу Коши

$$\begin{cases} T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = f_k, \\ T_k(0) = \varphi_k, \\ T_k'(0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Найдем решение обыкновенного дифференциального уравнения. Поскольку это линейное неоднородное уравнение, то его полное решение можно записать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$T_k(t) = T_k^{\text{оо}}(t) + T_k^{\text{чн}}(t).$$

Найдем общее решение однородного уравнения. Для этого запишем соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\nu^2 + \lambda_k^2 = 0.$$

Найдем корни этого характеристического уравнения

$$\nu_{1,2} = \pm i\lambda_k.$$

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$T_k^{\text{оо}}(t) = C_1\cos\lambda_k t + C_2\sin\lambda_k t$$

Частное решение уравнения можно найти методами Коши, Лагранжа или Эйлера (см. курс ОДУ). Но мы же найдем его подбором. Наше частное решение должно удовлетворять условию

$$T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = f_k,$$

Если предположим, что $T_k^{\text{чн}}(t) = A \in \mathbb{R}$, то есть частное решение – это какое-то число, то, подставляя его в наше условие, получим

$$0 + \lambda_k^2 A = f_k.$$

Отсюда легко увидеть, что

$$A = \frac{f_k}{\lambda_k^2} = T_k^{\text{чн}}(t).$$

Таким образом, полное решение дифференциального уравнения задачи (12) имеет вид

$$T_k(t) = C_1 \cos \lambda_k t + C_2 \sin \lambda_k t + \frac{f_k}{\lambda_k^2}. \tag{13}$$

Подставим в него первое начальное условие

$$T_k(0) = C_1 + \frac{f_k}{\lambda_k^2} = \varphi_k.$$

Тогда

$$C_1 = \varphi_k - \frac{f_k}{\lambda_k^2}.$$

Подставим в общее решение второе начальное условие и получим

$$T_k'(0) = \lambda_k C_2 = 0.$$

Тогда

$$C_2 = 0.$$

Подставим найденные коэффициенты $C_1$, $C_2$ в решение (13) и получившееся выражение подставим в вид функции (9). Следовательно, подставляя получившееся в вид (4), можем сразу записать решение исходной дифференциальной задачи

$$u(x,t) = \frac{xt^2}{1-hl} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \varphi_k - \frac{f_k}{\lambda_k^2} \right) \cos \lambda_k t + \frac{f_k}{\lambda_k^2} \right] \sin \lambda_k x, \tag{14}$$

где функции $f_k$ и $\varphi_k$ определяются из выражений (10) и (11) соответственно.