Понятие комплексного числа. Арифметические операции.

Среди множеств чисел существует следующая иерархия:

Среди уравнений, которые мы решали на множестве действительных чисел, мы сталкиваемся с уравнением

$$x^2 + 1 = 0.$$

Насколько нам известно, на множестве действительных чисел такое уравнение решений не имеет. Однако если всё-таки стоит вопрос о том, чтобы найти какое угодно решение этого уравнения, то как поступить? Было введено обозначение

$$i = \sqrt{-1}.$$

• ***Комплексным числом*** *называется выражение вида $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ (действительные числа), а i — символ, называемый* ***мнимой единицей****. При этом число a называется* ***действительной частью*** *z (Обозначение: $a = Re(z)$), а число b —* ***мнимой частью*** *z (Обозначение: $b = Im(z)$).*

Множество комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Если $b = 0, a \neq 0$, то число $a + 0 \cdot i$ считается **совпадающим с действительными числом** a, то есть $a + 0 \cdot i = a$.

Если $b \neq 0, a \neq 0$, то число называется **мнимым**. Если при $a = 0$, то число $0 + bi$ называется **чисто мнимым** и обозначается через bi, то есть $(0 + bi = bi)$.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ — два комплексных числа. Комплексные числа z_1 и z_2 **равны**, если равны их действительные и мнимые части, то есть $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$.

• ***Суммой комлексных чисел*** *z_1 и z_2 называется число:*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Свойства сложения комплексных чисел:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

   Доказательство.
   $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i = z_2 + z_1$. ⊠

2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Операция сложения порождает операцию вычитания:

• ***Разностью комплексных чисел*** *z_1 и z_2 называется число:*

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

• ***Произведением комплексных чисел*** *z_1 и z_2 называется число:*

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)i.$$

Свойства произведения комплексных чисел:

1. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
2. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
3. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Операция умножения комплексных чисел порождает операцию деления:

• ***Частным от деления комплексных чисел*** *z_1 и z_2 называется число z_3 такое, что $z_2 \cdot z_3 = z_1$.*

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = [\text{домножим на сопряженное}] = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \\ = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Иначе говоря, определение комплексных чисел можно сформулировать следующим образом.

• *Под* ***множеством комплесных чисел*** *$\mathbb{C}$ понимают множество упорядоченных пар (a, b) вещественных чисел таких, что на этом множестве введены 3 операции*

1. $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff a_1 = a_2, b_1 = b_2$;
2. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$;
3. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

Если числа z_1 и z_2 действительные, то операции сложения и умножения этих чисел совпадают с операциями сложения и умножения действительных чисел.

Пусть $z = a + bi$ — комплексное число.

• *Комплексное число $\overline{z} = a - bi$ называется* ***сопряжённым для комплексного числа*** *z.*

Свойства сопряжённых комплексных чисел:

1. $z + \overline{z} = 2 \cdot a$.
   $z - \overline{z} = 2 \cdot b \cdot i$.

   Доказательство.
   Если $z = a + bi$, то $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a$. ⊠

2. $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$; $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{z_1 - z_2}$.

   Доказательство.
   Пусть $z_1 = (a_1 + b_1 i)$, $z_2 = a_2 + b_2 i \Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$. Тогда $\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = \overline{z_1 + z_2}$. ⊠

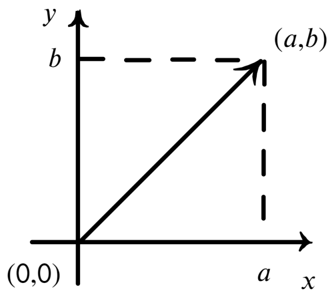
3. $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$.

   $$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

• *Форма вида $z = a + bi$ называется **алгебраической формой записи комплексного числа.***

Комплексная плоскость. Тригонометрическая и экспоненциальная форма записи комплексного числа.

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Каждому комплексному числу вида $z = a + bi$ поставим в соответствие координаты (a, b). С другой стороны, каждой точке с координатами (a, b) мы можем поставить в соответствие комплексное число $z = a + bi$.

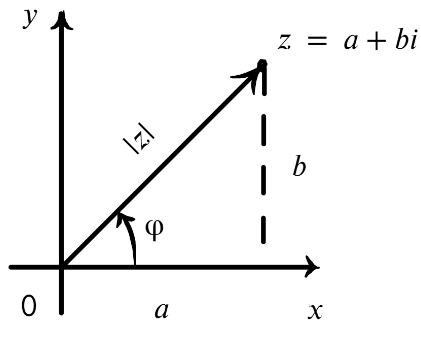


• *Число $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ называется **модулем** комплексного числа.*

Геометрически это расстояние от начала координат до точки, соответствующей комплексному числу.

• *Угол, который образует вектор к числу z с осью x называется **аргументом** комплексного числа и обозначается $\varphi = \arg(z)$.*

Причем, если вращение вектора от оси x против часовой стрелки, то аргумент считаем положительным. Иначе отрицательным.



Значение аргумента можно найти из следующих формул:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Если φ — аргумент, то числа $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ также являются аргументами (то есть аргумент определен неоднозначно). Обозначаем

- $\mathrm{Arg}(z) = \varphi + 2\pi k$ — все значения аргумента;
- $\arg(z) = \varphi$ — одно значение аргумента.

Чаще всего $\varphi \in (-\pi; \pi]$. Но иногда удобно считать, что $\varphi \in [0; 2\pi)$.

• *Это фиксированное значение* $\arg(z)$ *аргумента называется* ***главным значением аргумента*** *комплексного числа.*

Таким образом, $a = |z|\cos\varphi$, $b = |z|\sin\varphi$. Тогда можно записать

$$z = a + bi = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

• *Такая форма записи комплексного числа называется* ***тригонометрической формой записи****.*

Свойства значения аргумента:

1. $|z| = |\overline{z}|, Arg(z) = -Arg(\overline{z})$.
2. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

   Доказательство.
   Пусть $z = a + bi$, тогда $\overline{z} = a - bi$.
   $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$. ⊠
3. *Модуль разности комплексных чисел равен расстоянию между точками на комплексной плоскости, соответствующих этим числам, то есть*

   $$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
   $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$.
5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, Arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$.
6. **Формула Маувра**
   Если $z = |z|(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$, *то*

   $$z^n = |z|^n(cos(n\varphi) + i \cdot sin(n\varphi)).$$

• $e^{i\varphi} = cos\varphi + i \cdot sin\varphi$ — ***формула Эйлера****.*
• $z = |z|e^{i\varphi}$ — ***экспоненциальная форма записи комплексного числа****.*

Извлечение корня из комплексного числа.

Пусть z — некоторое комплексное число.

• ***Корнем n-ой степени из комплексного числа*** z *называется число* z_0 *такое, что* z_0 *в степени* n *равно Самому комплексному числу* z*. То есть* $z_0^n = z$*.*

Теорема. *Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа $z = |z|(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$ всегда возможно и, при $z \neq 0$, даёт ровно n различных значений:*

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $\sqrt[n]{|z|}$ — действительное положительное число, n-ая степень которого равна $|z|$.

Разбор задач.

Пример 2. Найти действительные решения уравнения

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i.$$

Решение. Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части: $(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i$. Отсюда согласно определению равенства двух комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$x = 2, \quad y = 1. \qquad \triangleright$$

Пример 3. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$z = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

Решение. Имеем

$$x = -\sin\frac{\pi}{8} < 0, \quad y = -\cos\frac{\pi}{8} < 0.$$

Главным значением аргумента согласно (1) будет

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right) = -\pi + \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right] =$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi\right) = -\pi + \frac{3}{8}\pi = -\frac{5}{8}\pi.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{5}{8}\pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots), \quad |z| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}} = 1. \qquad \triangleright$$

Пример 4. Записать в тригонометрической форме комплексное число

$$z = -1 - i\sqrt{3}.$$

Решение. Имеем

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}, \quad \varphi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Следовательно,

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]. \qquad \triangleright$$

Пример 7. Вычислить $(-1+i\sqrt{3})^{60}$.

Решение. Представим число $z=-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

Применяя приведенную выше формулу возведения в степень, получим

$$(-1+i\sqrt{3})^{60}=2^{60}\left[\cos\left(60\cdot\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(60\cdot\frac{2}{3}\pi\right)\right]=$$

$$=2^{60}(\cos 40\pi+i\sin 40\pi)=2^{60}. \qquad \triangleright$$

Пример 9. Найти все значения $\sqrt[4]{1-i}$.

Решение. Приводим комплексное число $1-i$ к тригонометрическому виду

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right).$$

Полагая $k=0,1,2,3$, найдем

$$(k=0)\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$(k=1)\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi+i\sin\frac{7}{16}\pi\right),$$

$$(k=2)\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi+i\sin\frac{15}{16}\pi\right),$$

$$(k=3)\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23}{16}\pi+i\sin\frac{23}{16}\pi\right). \qquad \triangleright$$