МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра вычислительной математики

Лабораторная работа №3

«Исследование устойчивости разностных схем»

Вариант 8

Выполнила:

Миронова Анна Викторовна
студентка 4 курса 7 группы

Преподаватель:

Репников Василий Иванович

Минск, 2024 г.

Исследование устойчивости разностных схем

Дана дифференциальная задача для уравнения переноса

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ 0 < x < \infty,\ t > 0,\ a > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x),\ x \geq 0 \\ u(0, t) = \mu_0(t),\ t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

где

- $a = 15$;
- $u_0(x) = 3x^2$;
- $\mu_0(t) = 10t^2$.

Сразу же проверим условия согласования для корректной постановки задачи:

$$u_0(0) = 0 = \mu_0(0).$$

Определим входные данные компьютерно

[1]:
```
a = 15

def u_0(x):
    return 3*x**2

def mu_0(t):
    return 10*t**2
```

Построение разностной схемы, погрешность аппроксимации

Для поставленной дифференциальной задачи известно точное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at),\ t \leq \dfrac{x}{a}, \\ \mu_0\left(t - \dfrac{x}{a}\right),\ t \geq \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

Подставляя известные функции, получим точное решение задачи вида

$$u(x, t) = \begin{cases} 3(x - 15t)^2,\ t \leq \dfrac{x}{15}, \\ 10\left(t - \dfrac{x}{15}\right)^2,\ t \geq \dfrac{x}{15}. \end{cases}$$

Определим компьютерно функцию, соответствующую точному решению.

[2]:
```
def u(x, t):
    result = np.zeros_like(x)
    condition = a * t < x
    result[condition] = u_0(x[condition] - a * t)
    result[~condition] = mu_0(t - x[~condition] / a)
```

```
    return result
```

Пусть задана равномерная сетка узлов

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau,$$

где

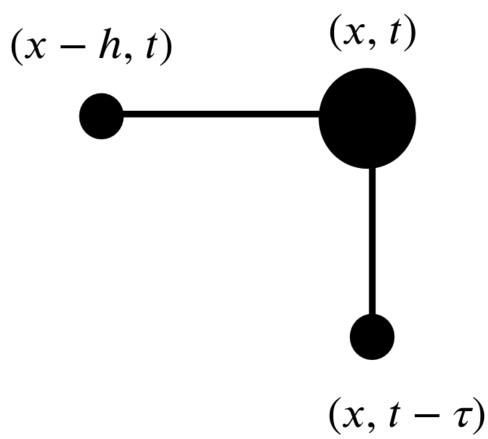
$$\omega_h = \{x_k = kh,\ k = 0, 1, \ldots, h > 0\}\,,\ \omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots,\ \tau > 0\}\,.$$

Зададим компьютерно сетки узлов. На вход эта функция принимает правую границу для сетки узлов и число разбиений отрезка, а возвращает шаг и узлы сетки.

[3]:
```
import numpy as np

def generate_grid(right_border, num_splits):
    step = right_border / num_splits
    grid = np.linspace(0, right_border, num_splits+1)
    return step, grid
```

По условию также задан следующий шаблон

$$\text{Ш}(x,t) = \{(x-h,t),\ (x,t),\ (x,t-\tau)\}.$$



Используя предложенный шаблон на заданной сетке узлов построим разностную схему в безиндексной форме, заменяя дифференциальные производные разностными аналогами

$$\begin{cases} y_{\bar t} + a y_{\bar x} = 0,\ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x),\ x \in \omega_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t),\ t \in \omega_\tau. \end{cases} \tag{2}$$

Разностная схема также может быть записана в индексной форме в виде

$$\begin{cases} \dfrac{y_k^j - y_k^{j-1}}{\tau} + a\dfrac{y_k^j - y_{k-1}^j}{h} = 0,\ k = 1, 2, \ldots, j = 1, 2\ldots, \\ y_k^0 = u_0(x_k),\ k = 0, 1, \ldots, \\ y_0^j = \mu_0(t_j),\ j = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{3}$$

Нужно вычислить погрешность аппроксимации разностной схемы. Начальное и граничное условия аппроксимируются точно, так что погрешность аппроксимации разностной схемы определяется только погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения. Поэтому для любой точки $(x,t) \in \omega_{h\tau}$ погрешность аппроксимации будет равна

$$\Psi(x,t) = u_{\bar{t}} + a u_{\bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + O(\tau^2) + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + O(h^2) = O(h+\tau),$$

то есть данная разностная схема обладает первым порядком аппроксимации по x и первым порядком аппроксимации по t.

Исследование устойчивости разностной схемы спектральным методом

Исследование устойчивости по спектральному методу предусматривает подстановку следующего выражения в разностное уравнение

$$y_k^j = q^j e^{ik\varphi},\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Итак, подставляя это выражение в разностное уравнение схемы (3), получим

$$\frac{q^j e^{ik\varphi} - q^{j-1} e^{ik\varphi}}{\tau} + a\frac{q^j e^{ik\varphi} - q^j e^{i(k-1)\varphi}}{h} = 0.$$

Сокращая общие множители, получим

$$\frac{1-q^{-1}}{\tau} + a\frac{1-e^{-i\varphi}}{h} = 0.$$

Домножим на τ, тогда

$$1 - q^{-1} + \gamma(1 - e^{-i\varphi}) = 0,\ \gamma = \frac{a\tau}{h}.$$

Выразим отсюда q

$$q = \frac{1}{1+\gamma(1-e^{-i\varphi})} = \frac{1}{1+\gamma(1-\cos\varphi + i\sin\varphi)}.$$

Далее по спектральному методу для устойчивости необходимо выполнение условия $|q|^2 \leqslant 1$. Рассмотрим это условие

$$|q|^2 = \frac{1}{(1+\gamma(1-\cos\varphi))^2 + (\gamma\sin\varphi)^2} \leqslant 1.$$

Тогда отсюда необходимо выполнение условия

$$1 \leqslant (1+\gamma(1-\cos\varphi))^2 + (\gamma\sin\varphi)^2 = 1+\gamma^2+\gamma^2\cos^2\varphi + 2\gamma - 2\gamma^2\cos\varphi - 2\gamma\cos\varphi + \gamma^2\sin^2\varphi.$$

Тогда

$$2\gamma(\gamma+1)(1-\cos\varphi) \geqslant 0.$$

Отсюда получаем

$$\left[\begin{aligned} &\gamma \leqslant -1, \\ &\gamma \geqslant 0. \end{aligned}\right.$$

Но в условиях того, что по постановке задачи $a > 0$, нам подходит условие

$$\gamma = \frac{a\tau}{h} \geqslant 0,$$

которое верно при любых h, τ, а значит схема будет устойчива прил любых шагах h и τ.

Исследование устойчивости разностной схемы с помощью принципа максимума

Следуя принципу максимума, в качестве точки для исследования устойчивости возьмем точку (x_k, t_j). Таким образом, мы можем переписать аппроксимацию основного уравнения переноса

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{a}{h}\right) y_k^j = \frac{1}{\tau} y_k^{j-1} + \frac{a}{h} y_{k-1}^j.$$

Можем записать коэффициенты, которые требуются для проверки условий устойчивости

$$A(x) = \frac{1}{\tau} + \frac{a}{h} > 0,\ B_1 = \frac{1}{\tau} > 0,\ B_2 = \frac{a}{h} > 0,$$
$$D(x) = A(x) - (B_1 + B_2) \equiv 0,\ F(x) \equiv 0.$$

Из положительности коэффициентов мы получаем два условия

$$\frac{1}{\tau} + \frac{a}{h} > 0,\ \frac{a}{h} > 0,$$

а тогда

$$\frac{a\tau}{h} > -1,\ a > 0.$$

Таким образом, единственное условие, которое должно выполняться – это $a > 0$, а оно выполняется по постановке задачи. Следовательно, разностная схема будет устойчива при любых шагах h и τ.

Реализация разностной схемы

[4]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

Для реализации разностной схемы представим ее в виде

$$\begin{cases} y_k^j = \dfrac{y_k^{j-1} + \gamma y_{k-1}^j}{1+\gamma},\ k = 1, 2, \dots, j = 1, 2 \dots, \\ y_k^0 = u_0(x_k),\ k = 0, 1, \dots, \\ y_0^j = \mu_0(t_j),\ j = 0, 1, \dots, \end{cases} \qquad \gamma = \frac{a\tau}{h}.$$

При реализации сначала строятся значения из начального и граничного условий. То есть мы задаем y_k^j при $j = 0$, $\forall k$, а затем при $k = 0$, $\forall j$. Остальные значения функций можно вычислять по формуле выше.

[5]:
```
def diff_scheme_solve(x, t, h, tau, u_0, mu_0, a):
    gamma = a * tau / h

    y = np.zeros((len(x), len(t)))

    for k in range(len(x)):
        y[k, 0] = u_0(x[k])
```

```
    for j in range(len(t)):
        y[0, j] = mu_0(t[j])

    for j in range(1, len(t)):
        for k in range(1, len(x)):
            y[k, j] = (y[k, j-1] + gamma * y[k-1, j]) / (1+gamma)

    return y
```

Теперь сгенерируем сетку с $\tau < h$.

[6]:
```
h, x_grid = generate_grid(1, 5)
tau, t_grid = generate_grid(0.1, 3)
```

[7]:
```
h
```

[7]: 0.2

[8]:
```
tau
```

[8]: 0.03333333333333333

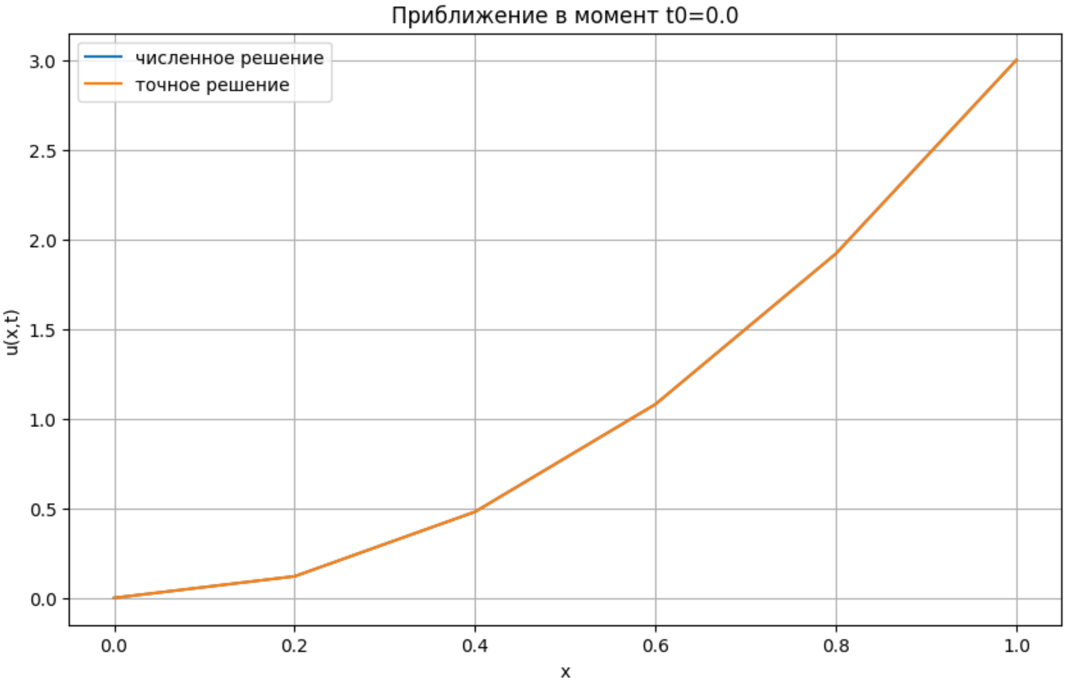
Получим приближенное решение из разностной схемы

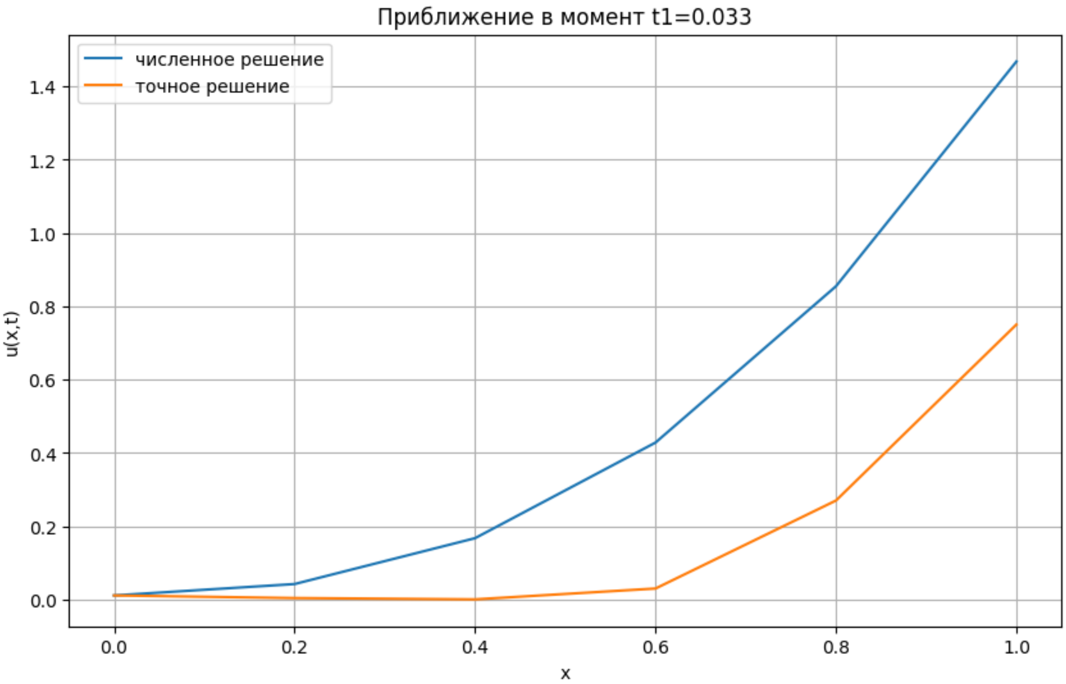
[9]:
```
y = diff_scheme_solve(x_grid, t_grid, h, tau, u_0, mu_0, a)
```

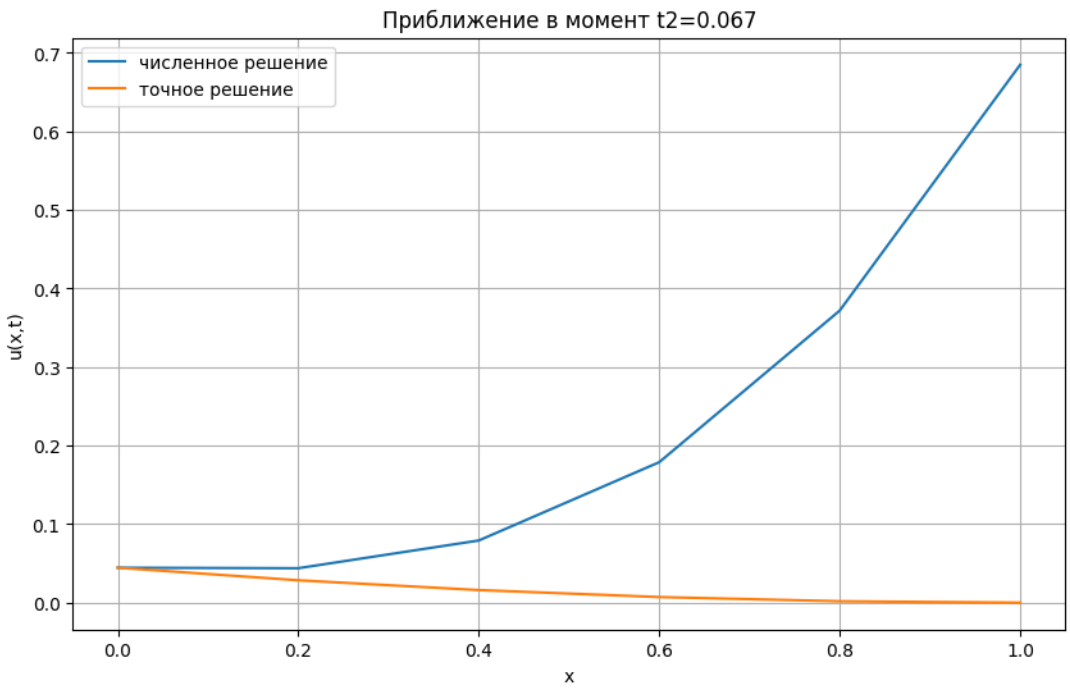
Выведем двумерный график

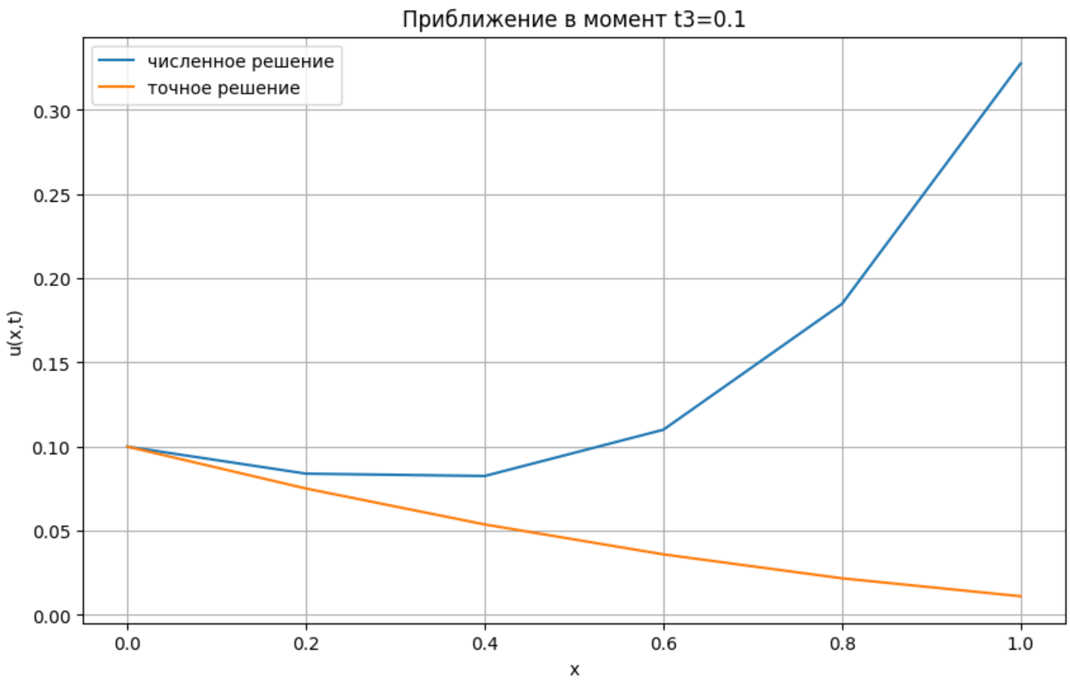
[10]:
```
def plot_2D():
    for j, t in enumerate(t_grid):
        plt.figure(figsize=(10, 6))
        plt.plot(x_grid[:], y[:, j], label='численное решение')
        plt.plot(x_grid, u(x_grid, t), label='точное решение')
        plt.grid(True)
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('u(x,t)')
        plt.title('Приближение в момент t' + str(j) + '=' +␣
 ↪str(round(t, 3)))
        plt.legend()
        plt.show()
```

[11]:
```
plot_2D()
```


Приближение в момент t0=0.0
численное решение
точное решение
u(x,t)
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0.2
0.4
0.6
0.8


Приближение в момент t1=0.033
численное решение
точное решение
u(x,t)
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4



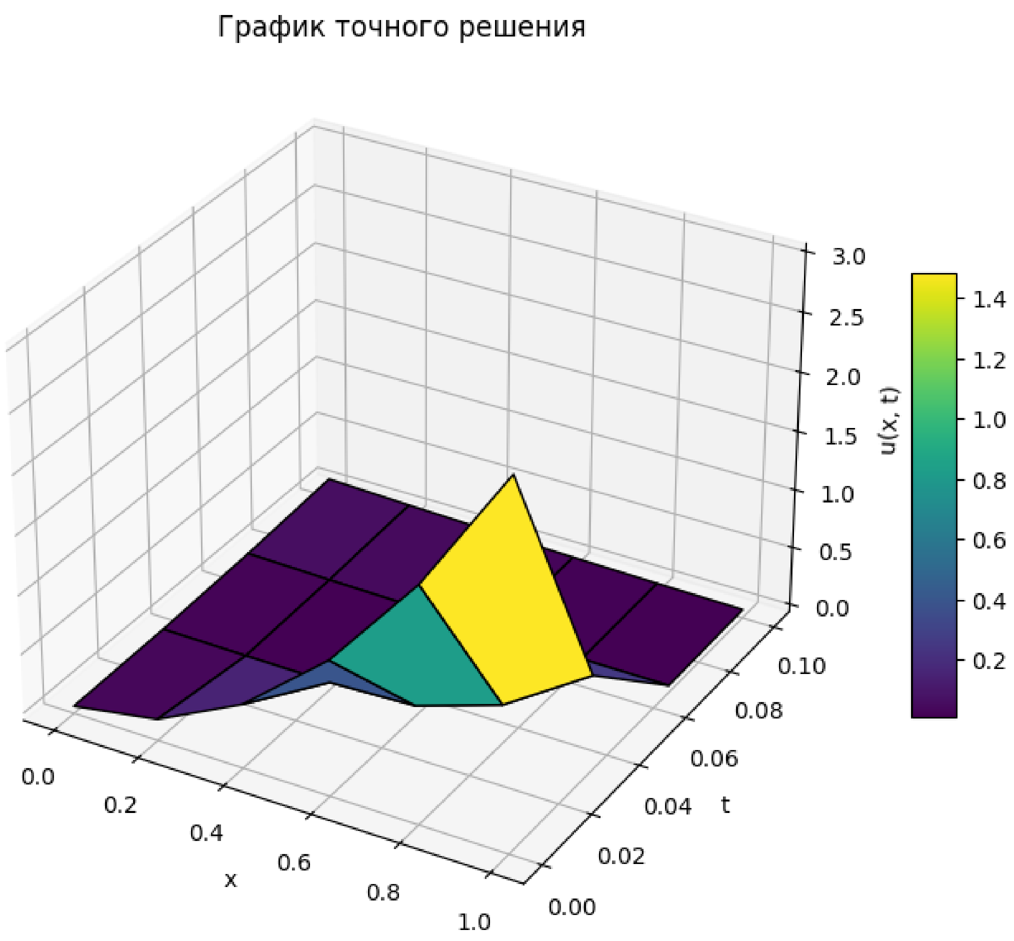


Выведем трехмерные графики точного и приближенного решений

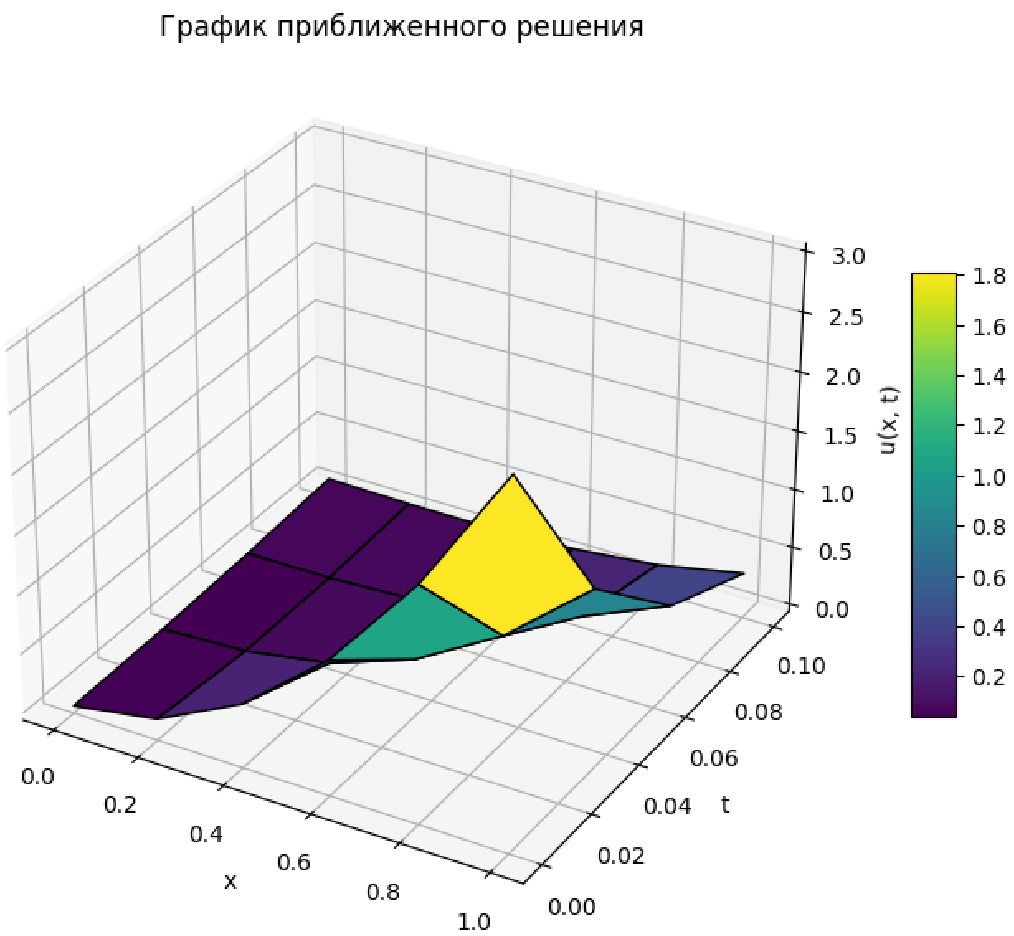
[12]:
```
def plot_exact3D():
    X, T = np.meshgrid(x_grid, t_grid)
    U = np.zeros_like(X)
```

```
    for i in range(T.shape[0]):
        U[i, :] = u(X[i, :], T[i, 0])

    fig = plt.figure(figsize=(10, 7))
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

    surf = ax.plot_surface(X, T, U, cmap='viridis', edgecolor='k')

    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('t')
    ax.set_zlabel('u(x, t)')

    fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.5, aspect=10)

    plt.title('График точного решения')
    plt.show()

def plot_approx3D():
    fig = plt.figure(figsize=(10, 7))
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

    X, T = np.meshgrid(x_grid, t_grid)

    Y = y.T

    surf = ax.plot_surface(X, T, Y, cmap='viridis', edgecolor='k')

    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('t')
    ax.set_zlabel('u(x, t)')

    fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.5, aspect=10)

    plt.title('График приближенного решения')
    plt.show()
```

[13]:
```
plot_exact3D()
```




```
[14]: plot_approx3D()
```



Как можно видеть, по поведению приближенного решения мы можем утверждать, что полученная разностная схема действительно устойчива.

Рассмотрим теперь случай $h < \tau$.

[15]:
```
h, x_grid = generate_grid(0.01, 5)
tau, t_grid = generate_grid(0.1, 3)
```

[16]:
```
h
```

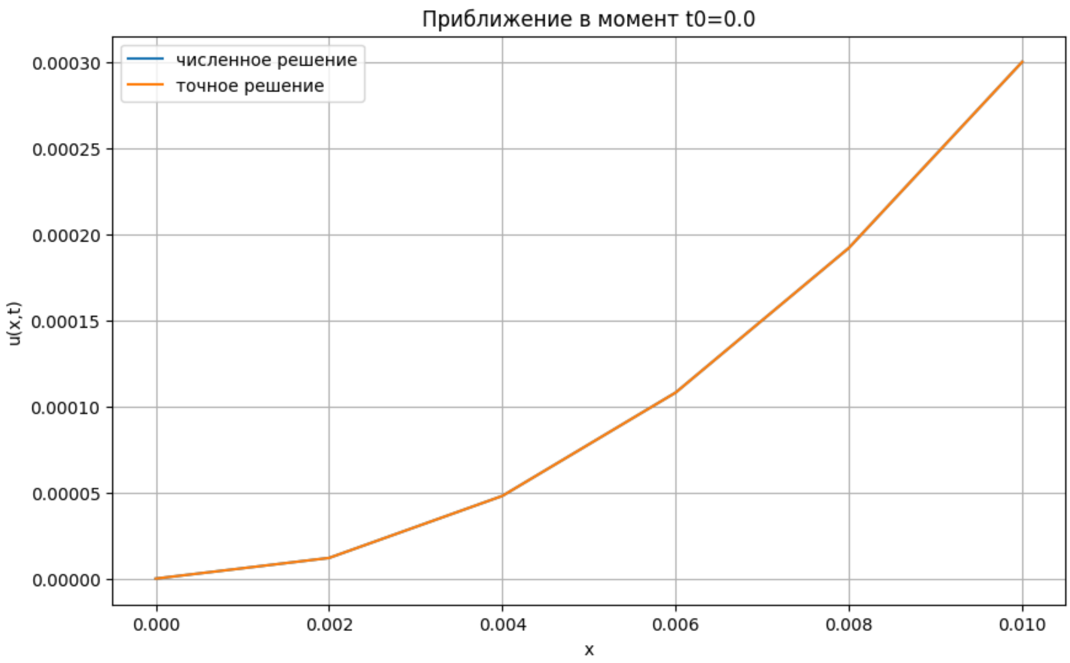
[16]: 0.002

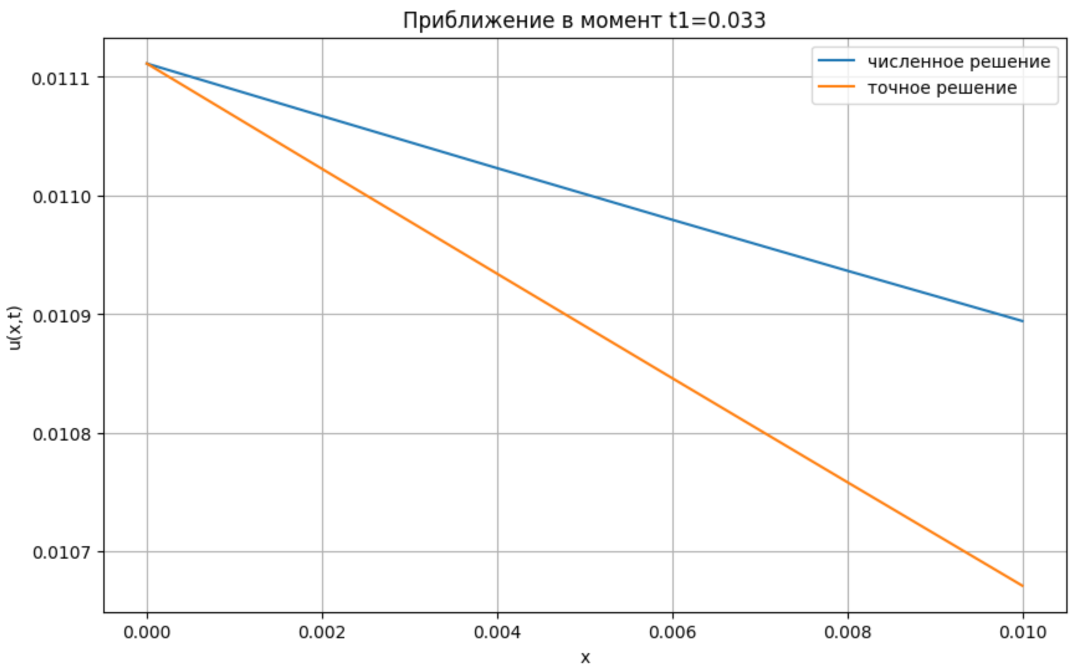
[17]:
```
tau
```

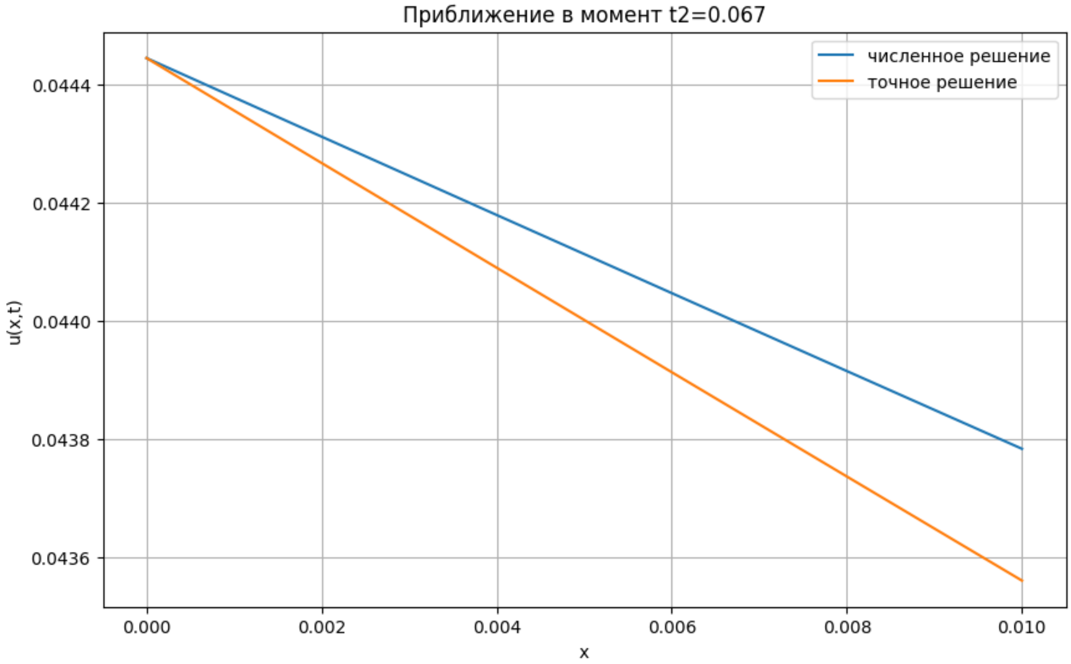
[17]: 0.03333333333333333

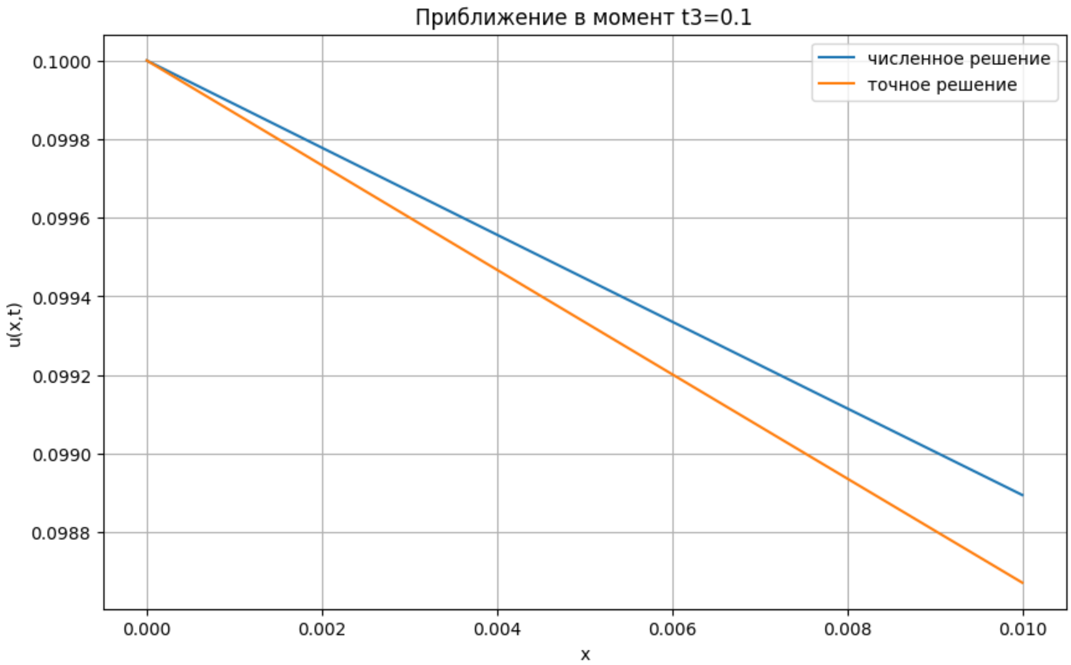
[18]:
```
y = diff_scheme_solve(x_grid, t_grid, h, tau, u_0, mu_0, a)
```

[19]:
```
plot_2D()
```

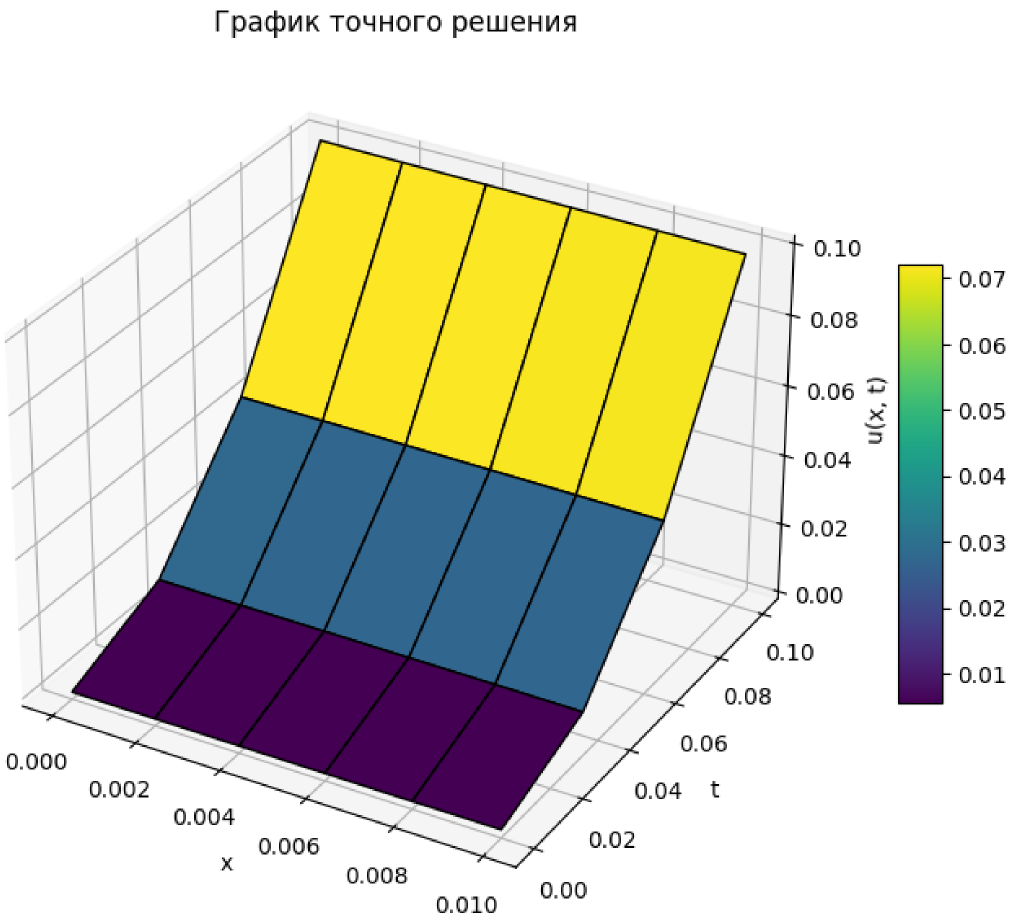

Приближение в момент t0=0.0
численное решение
точное решение
u(x,t)
x
0.00030
0.00025
0.00020
0.00015
0.00010
0.00005
0.00000
0.000
0.002
0.004
0.006
0.008
0.010


Приближение в момент t1=0.033
численное решение
точное решение
u(x,t)
x
0.0111
0.0110
0.0109
0.0108
0.0107
0.000
0.002
0.004
0.006
0.008
0.010

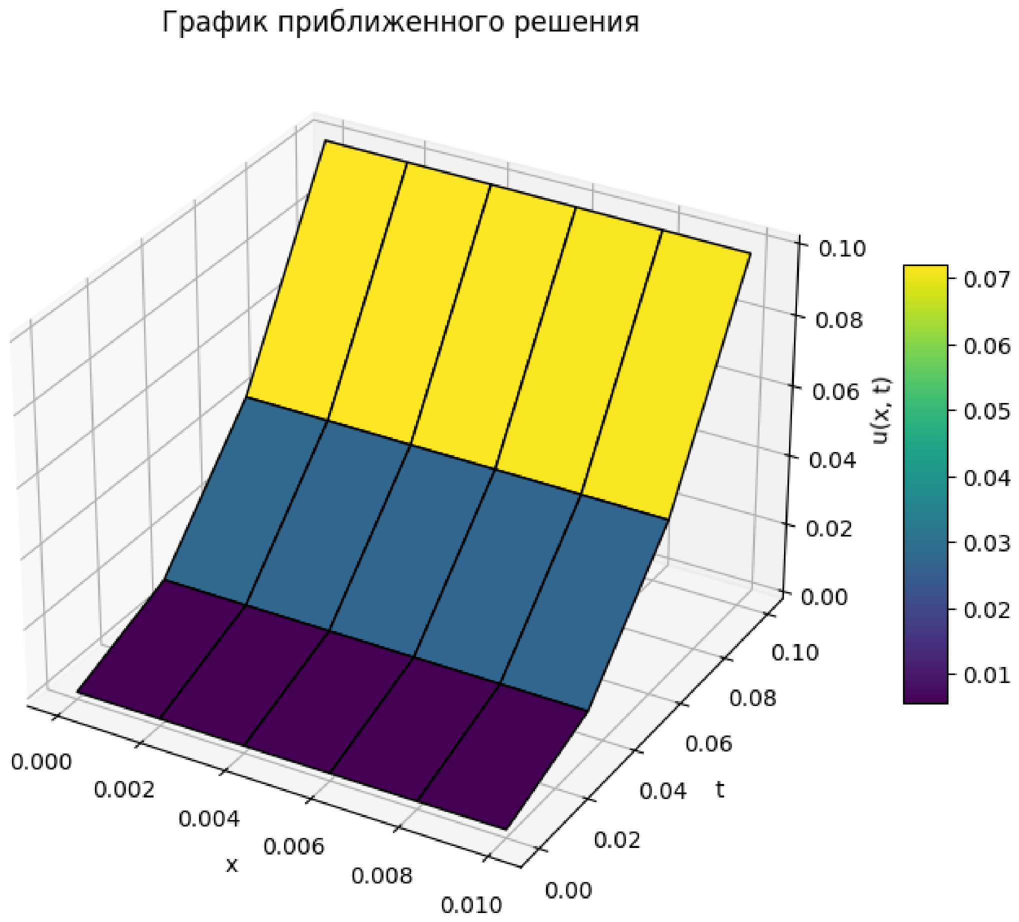




[20]:
```
plot_exact3D()
```



[21]:
```
plot_approx3D()
```



В данном в случае, как можно видеть, разностная схема также получается устойчивой.

Таким образом, действительно при любых h и τ мы получаем устойчивую разностную схему, что соответствует нашим теоретическим ожиданиям.