Однородные уравнения.

• *Уравнение*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется ***однородным (ОУ)****, если* $P(tx,ty) = t^k \cdot P(x,y)$ *и* $Q(tx,ty) = t^k \cdot Q(x,y)$*,* $(tx,ty) \in D$*.*

Алгоритм решения таких уравнений следующий:

- приводим уравнение к виду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (к виду разрешенному относительно производной);
- делаем подстановку $y = ux$;
- отсюда $xu' = f(u) - u$;
- получившееся уравнение будет являться УРП и останется лишь проинтегрировать уравнение
$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$(x + 2y)dx - xdy = 0.$$

Решение. Проверим, является ли данное уравнение ОУ:

$$P(x,y) = x + 2y \quad \Rightarrow \quad P(tx,ty) = t(x + 2y), \qquad Q(x,y) = -x \quad \Rightarrow \quad Q(tx,ty) = -tx.$$

Следовательно, данное уравнение является ОУ. Приведем уравнение к виду разрешенному относительно производной от y:

$$y' = \frac{x + 2y}{x} = 1 + \frac{2y}{x}.$$

Применяем подстановку $y = ux$. Тогда $y'_x = u'_x x + u$ (или просто $y' = u'x + u$). Отсюда $u'x = y' - u$, а y' мы только что выразили. Соответственно подставим y' и получим

$$xu' = 1 + 2u - u = 1 + u.$$

Перенесём всё в левую часть и домножим на dx:

$$xdu - (1 + u)dx = 0.$$

А данное уравнение является УРП. Домножим его на интегрирующий множитель $\mu(x,u) = \dfrac{1}{x(1 + u)}$ и получим

$$\frac{du}{(1 + u)} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Найдем решение этого уравнения, как решение уравнения с разделенными переменными и получим

$$\int\limits_0^u \frac{du}{(1 + u)} - \int\limits_1^x \frac{dx}{x} = \ln|1 + u|\Big|_0^u - \ln|x|\Big|_1^x = \ln(1 + u) - \ln x = \ln\frac{1 + u}{x} = C.$$

Отсюда

$$\frac{1+u}{x} = C \quad \Rightarrow \quad 1+u = Cx \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{y}{x} = Cx \quad \Rightarrow \quad x+y = Cx^2.$$

Ответ: $x+y = Cx^2$.

Все такие уравнения решаются только по одному алгоритму, поэтому для закрепления рассмотрим ещё одно такое уравнение и будем двигаться дальше.

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$xdy - \Big(y + x\operatorname{tg}\frac{y}{x}\Big)dx = 0.$$

Решение. Проверим, является ли уравнение однородным:

$$P(tx,ty) = tx, \qquad Q(tx,ty) = -t\Big(y + x\operatorname{tg} t\frac{y}{x}\Big).$$

То есть уравнение является однородным. Приведем его к виду разрешенному относительно производной y':

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$

Применим подстановку $y = ux$. Тогда

$$xu' = u + \operatorname{tg} u - u = \operatorname{tg} u.$$

Приведем это уравнение к УРП и найдем его полный интеграл:

$$xdu - \operatorname{tg} u dx = 0 \quad \Rightarrow \quad = \frac{du}{\operatorname{tg} u} - \frac{dx}{x} = 0.$$

$$\int\limits_{\pi/4}^{u} \frac{du}{\operatorname{tg} u} - \int\limits_{1}^{x} \frac{dx}{x} = \int\limits_{\pi/4}^{u} \frac{(\cos u)du}{\sin u} - \ln|x|\Big|_1^x = \int\limits_{\pi/4}^{u} \frac{d(\sin u)}{\sin u} - \ln x =$$

$$= \ln|\sin u|\Big|_{\pi/4}^{u} - \ln x = \ln(\sin u) - \ln x = \ln\frac{\sin u}{x} = C.$$

Тогда

$$\frac{\sin u}{x} = C \quad \Rightarrow \quad \sin u = Cx \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{y}{x} = Cx.$$

Ответ: $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$.

Далеко не все элементарные уравнения являются однородными. Но некоторые из них можно привести к однородным уравнениям.

Уравнение

$$\varphi_1(a_1x + b_1y + c_1)dx + \varphi_2(a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

или

$$y' = \varphi\Big(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_1x + b_1y + c_1}\Big),$$

где

1. $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, можно привести к ОУ с помощью подстановки $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$, где x_1, y_1 — функции, а α, β — постоянные, удовлетворяющие СЛАУ

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + c_1 = 0, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + c_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

2. $a_1 b_2 = a_2 b_1$, можно привести к УРП с помощью подстановки $a_2 x + b_2 y = u$ (т.к. в таком случае система (1) несовместна).

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$x - y - 1 + (-x + y + 2) \cdot y' = 0.$$

Решение. Домножим уравнение на dx, тогда

$$(x - y - 1)dx + (-x + y + 2)dy = 0.$$

В нашем случае коэффициенты $a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $a_2 = -1$, $b_2 = 1$. Тогда $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Значит применим подстановку

$$a_2 x + b_2 y = -x + y = u.$$

Отсюда же $du = dy - dx$, и пусть переменную u возьмем вместо y. Тогда, подставляя в исходное уравнение, получим

$$(-u - 1)dx + (u + 2)(du + dx) = 0.$$

Раскроем скобочки, тогда

$$dx + (u + 2)du = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделенными переменными. А его интегрировать мы уже умеем. Тогда его общий интегарл будет иметь вид

$$x + \frac{u^2}{2} + 2u = C.$$

Сделаем обратную замену и домножим на 2:

$$2x + (y - x)^2 - 4y - 4x = -2x - 4y + (y - x)^2 = C.$$

При желании можно раксрыть скобочки и попытаться собрать всё в полный квадрат.

Ответ: $-2x - 4y + (y - x)^2 = C$.

Пример 4. Проинтегрировать уравнение

$$(2x - y - 1)dx + (-x + 2y + 1)dy = 0.$$

Решение. Введем подстановку $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$, причем коэффициенты α и β найдем из системы (1):

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta - 1 = 0, \\ -\alpha + 2\beta + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right).$$

Отсюда $\alpha = 1/3$, $\beta = -1/3$. Тогда $x = x_1 + 1/3$, $y = y_1 - 1/3$. Подставим в исходное уравнение (причем $dx = dx_1$, $dy = dy_1$)

$$(2x_1 - y_1)dx_1 + (-x_1 + 2y_1)dy_1 = 0.$$

Проверить, правильно ли были найдены α и β можно так: исходные коэффициенты c_1 и c_2 в уравнении с подставленной заменой должны сократиться.

Получившееся уравнение является ОУ, а его интегрировать мы уже умеем. Для начала приведем уравнение к виду разрешенному относительно производной:

$$y_1' = \frac{y_1 - 2x_1}{2y_1 - x_1}.$$

Тогда сделаем замену $y_1 = ux_1$:

$$u'x_1 = \frac{ux_1 - 2x_1}{2ux_1 - x_1} - u = \frac{u-2}{2u-1} - u = \frac{-2u^2 + 2u - 2}{2u-1}.$$

Получили УРП:

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{(2u-1)du}{u^2 - u + 1} - \frac{dx_1}{x_1} = 0.$$

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{u_0}^{u} \frac{(2u-1)du}{u^2 - u + 1} - \int\limits_{x_{1_0}}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = C.$$

$$-\frac{1}{2} \ln(u^2 - u + 1) - \ln x_1 = C.$$

Домноижм уравнение на -2 и воспользуемся свойствами логарифма

$$\ln(x_1^2 \cdot (u^2 - u + 1)) = C.$$

Так как $u = y_1/x_1$, то

$$\ln(y_1^2 - y_1 x_1 + x_1^2) = C \Rightarrow y_1^2 - y_1 x_1 + x_1^2 = C.$$

Тогда, учитывая, что $x_1 = x - 1/3$, $y_1 = y + 1/3$, сделаем обратную замену и получим общее решение исходного уравнения

$$y^2 + y - xy - x + x^2 = C.$$

Ответ: $y^2 + y - xy - x + x^2 = C$.