Сходящийся метод Ньютона

Условие

Отделив корень, выбрать начальное приближение, обеспечивающее выполнение условий теоремы о сходимости метода Ньютона для уравнения

$$2\sin 3x = x^2 - 4x + 3.$$

Алгоритм решения

Для решения задачи нам понадобятся следующие утверждения:

1. **Теорема 2.** (о сходимости метода Ньютона) Выберем начальное приближение так x^0, чтобы выполнялись условия сходимости итерационного процесса:

   (a) Функция $f(x)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на отрезке

   $$s_0 = [x^0; x^0 + 2h_0], \quad h_0 = -\frac{f(x^0)}{f'(x^0)}.$$

   При этом на концах отрезка $f(x)f'(x) \neq 0$.

   (b) Для начального приближения x^0 выполняется неравенство

   $$2|h_0|M \leqslant |f'(x_0)|, \quad M = \max_{x \in s_0} |f''(x)|.$$

   Тогда справедливы следующие утверждения:

   (a) Внутри отрезка s_0 уравнение $f(x) = 0$ имеет корень x^* и при этом этот корень единственный.

   (b) Последовательность приближений x^k, $k = 1, 2, \ldots$ может быть построена по указанной выше формуле с заданным приближением x^0.

   (c) Последовательность x^k сходится к корню x^*, то есть $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x^*$.

Алгоритм решения следующий: отделяется корень, выбирается начальное приближение, при котором выполняется теорема 2.

Здесь идет этап отделения корней. В данном файле он пропускается, так как этот этап уже разобран в другом файле.

Из задачи отделения корней уравнения мы имеем, что на отрезке $d = \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ существует единственный корень уравнения. Приведем исходное уравнение к виду $f(x) = 0$:

$$\underbrace{2\sin 3x - (x^2 - 4x + 3)}_{f(x)} = 0.$$

Область определения функции $f(x)$ совпадает с $\mathbb{R}$.

Вычислим значение производной

$$f'(x) = 6\cos 3x - 2x + 4.$$

Проверим выполнение условий теоремы 2.

1. Выберем отрезок $s_0 = [x_0, x_0 + 2h_0] = \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$. Тогда
$$x_0 = 0, \quad h_0 = \frac{\pi}{12}.$$
   На этом отрезке функция $f(x)$ непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема (это проверяется еще на этапе отделения корней).

   Проверим, не обращаются ли в ноль значения функции и ее производной на концах отрезка:
$$f(0) = -3, \quad f'(0) = 10 \Rightarrow f(0)f'(0) = -30 \neq 0;$$
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 - \frac{\pi^2}{36} + \frac{4\pi}{6} - 3 \approx \frac{3}{4}, \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2\pi}{6} + 4 \approx 3 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx \frac{9}{4} \neq 0;$$
   То есть первое условие выполнено.

2. Для проверки условия $2|h_0|M \leqslant |f'(x_0)|$, $M = \max\limits_{x\in s_0}|f''(x)|$ необходимо вычислить вторую производную исходной функции:
$$f''(x) = -18\sin 3x - 2.$$
   Попытаемся оценить максимум модуля второй производной на отрезке аналитически. На отрезке $s_0 = \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ функция $\sin 3x$ является строго возрастающей. Соответственно наибольшее значение она примет на правом конце отрезка $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. Тогда наименьшее значение (но по модулю наибольшее) второй производной
$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -20.$$
   Тогда
$$M = 20.$$
   Проверим, выполнено ли неравенство $2|h_0|M \leqslant |f'(x_0)|$:
$$2 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot 20 \not\leqslant 10.$$

То есть **метод не сходится**, соответственно нужно выбрать другой отрезок s_0.

Для выбора нового отрезка s_0 воспользуемся методом дихотомии, то есть поделим отрезок пополам и выясним, на какой из половинок остался корень, проверив значения на концах отрезка (они должны быть различны):
$$f(0) = -3 < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} - \frac{\pi^2}{144} + \frac{4\pi}{12} - 3 \approx -0.6 < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0.75 > 0.$$

Таким образом, корень лежит на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{6}\right]$ (на монотонность функции мы не проверяем, т.к. от уменьшения отрезка количество корней увеличиться не могло).

Снова проверяем условия теоремы о сходимости.

1. Выберем отрезок $s_0 = [x_0, x_0 + 2h_0] = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$. Тогда

$$x_0 = \frac{\pi}{12}, \quad h_0 = \frac{\pi}{24}.$$

   На этом отрезке функция $f(x)$ непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема (это проверяется еще на этапе отделения корней).

   Проверим, не обращаются ли в ноль значения функции и ее производной на концах отрезка (проверяем только для левого конца)

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx -0.6, \quad f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3\sqrt{2} - \frac{\pi}{6} + 4 \approx 7.73 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) f'\left(\frac{\pi}{12}\right) \neq 0;$$

   То есть первое условие выполнено.

2. проверим условие $2|h_0|M \leqslant |f'(x_0)|$, $M = \max\limits_{x \in s_0} |f''(x)|$.

   На отрезке $s_0 = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$ функция $\sin 3x$ является строго возрастающей. Соответственно наибольшее значение она примет на правом конце отрезка $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Тогда наименьшее значение (но по модулю наибольшее) второй производной

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -20.$$

   Тогда

$$M = 20.$$

   Проверим, выполнено ли неравенство $2|h_0|M \leqslant |f'(x_0)|$:

$$2 \cdot \frac{\pi}{24} \cdot 20 \leqslant 7.73.$$

   Неравенство выполняется.

Таким образом, начальное приближение для сходящегося метода Ньютона равно $x_0 = \frac{\pi}{12}$.