Колебание прямоугольного контура.

Постановка задачи. Методом разделения переменных найти решение задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u,\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ t > 0, \\ u_x|_{x=0} = u|_{x=l_1} = 0, \\ u|_{y=0} = u_y|_{y=l_2} = 0, \\ u|_{t=0} = 1, \\ u_t|_{t=0} = xy. \end{cases} \tag{1}$$

где $l_1, l_2 > 0$, a – параметр.

Решение задачи. Мы имеем *смешанную задачу для гиперболического уравнения на плоскости с однородными граничными условиями с однородным уравнением.* Будем искать решение этой задачи в виде

$$u(x,y,t) = T(t)\cdot V(x,y),\ T \not\equiv 0, V \not\equiv 0. \tag{2}$$

Подставляем этот вид решения в дифференциальное уравнение задачи (1)

$$T''(t)V(x,y) = a^2T(t)V(x,y).$$

Разделяем переменные и получаем

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{\Delta V(x,y)}{V(x,y)} = -\lambda^2, \tag{3}$$

справа константа λ^2, так как обе части равенства являются функциями различных переменных. Используя правое равенство, мы можем построить дифференциальное уравнение

$$\Delta V + \lambda^2 V = 0,$$

и, подставляя выражение (2) в граничные условия и комбинируя получившиеся условия с уравнением выше, получим задачу двумерную Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda^2 V = 0, \\ V_x|_{x=0} = V|_{x=l_1} = 0, \\ V|_{y=0} = V_y|_{y=l_2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Упростим эту задачу. Для этого будем искать ее решение в виде

$$V(x,y) = X(x)\cdot Y(y),\ X \not\equiv 0,\ Y \not\equiv 0. \tag{5}$$

Подставим это выражение в дифференциальное уравнение задачи (4) и получим

$$X''Y + XY'' + \lambda^2 XY = 0.$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda^2 = -\mu^2, \tag{6}$$

то есть мы снова разделяем переменные и получаем справа константу μ^2. Введем еще одну константу ν^2 такую, что

$$\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2.$$

Тогда при добавлении дополнительных условий задачи (4) к выражению (6), мы можем сформулировать две одномерных задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(l_1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0, \\ Y(0) = 0, \\ Y'(l_2) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Найдем собственные значения и собственные функции из задачи (7). Общее решение задачи (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Подставим первое краевое условие

$$X'(0) = \lambda C_2 = 0.$$

Отсюда $C_2 = 0$. Подставим второе краевое условие

$$X(l_1) = C_1 \cos \mu l_1 = 0.$$

Тогда

$$\mu l_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

а отсюда собственные значения и собственные функции равны соответственно

$$\mu_n = \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1},\ X_n(x) = \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x, n = 0, 1, \ldots. \tag{9}$$

Аналогично решим задачу (8). Общее решение имеет вид

$$Y(y) = C_1 \cos \nu y + C_2 \sin \nu y,$$

подставим первое краевое условие и получим

$$Y(0) = C_1 = 0.$$

Подставим второе краевое условие и получим

$$Y'(l_2) = \nu C_2 \cos \nu l_2 = 0,$$

отсюда собственные значения и собственные функции равны

$$\mu_m = \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2},\ Y_m(y) = \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y,\ m = 0, 1, \ldots. \tag{10}$$

Таким образом, мы можем построить искомые функции

$$\lambda_{nm}^2 = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi + 2\pi m}{2l_2}\right)^2,\ V_{nm}(x, y) = \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y. \tag{11}$$

Тогда, подставляя это в (2), мы можем представить решение исходной задачи в виде суммы

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{nm}(t) \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l_1} x \sin \frac{\pi + 2\pi m}{2l_2} y. \tag{12}$$

Вид $T_{nm}(t)$ мы можем определить из второго уравнения, которые мы получили из разделения переменных (3), а именно

$$T''_{nm}(t) + a^2\lambda^2_{nm}T_{nm}(t) = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение, общее решение которого мы можем построить в виде

$$T_{nm}(t) = A_{nm}\cos\lambda_{nm}at + B_{nm}\sin\lambda_{nm}at,$$

где коэффициенты A_{nm}, B_{nm} подлежат определению. Подставим этот вид общего решения в (12) и получим

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big[A_{nm}\cos\lambda_{nm}at + B_{nm}\sin\lambda_{nm}at\Big]\cos\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\sin\frac{\pi+2\pi m}{2l_2}y. \tag{13}$$

Неизвестные коэффициенты мы можем определить, подставляя в (13) начальные условия исходной задачи. В частности, подставив первое условие, мы получим

$$u|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}\cos\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\sin\frac{\pi+2\pi m}{2l_2}y = 1.$$

Представим выражение справа в виде ряда Фурье по собственным функциям

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{nm}\cos\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\sin\frac{\pi+2\pi m}{2l_2}y,$$

а тогда

$$A_{nm} = \varphi_{nm} = \frac{\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2} 1\cdot\cos\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\ \sin\frac{\pi+2\pi m}{2l_2}y\ dxdy}{\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\cos^2\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\ \sin^2\frac{\pi+2\pi m}{2l_2}y\ dxdy} \tag{14}$$

Подставляя второе начальное условие, получим

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a\lambda_{nm}B_{nm}\cos\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\sin\frac{\pi+2\pi m}{2l_2}y = xy.$$

Представим выражение справа в виде ряда Фурье по собственным функциям

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{nm}\cos\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\sin\frac{\pi+2\pi m}{2l_2}y,$$

а тогда

$$B_{nm} = \frac{1}{a\lambda_{nm}}\psi_{nm} = \frac{1}{a\lambda_{nm}}\cdot\frac{\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2} xy\cdot\cos\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\ \sin\frac{\pi+2\pi m}{2l_2}y\ dxdy}{\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\cos^2\frac{\pi+2\pi n}{2l_1}x\ \sin^2\frac{\pi+2\pi m}{2l_2}y\ dxdy}. \tag{15}$$

Таким образом, вычисляя коэффициенты из (14) и (15) мы можем построить решение исходной дифференциальной задачи по формуле (13).