ЛА. Ф-ии от матриц.

Пусть $f(\lambda)$

Хотим определить $f(A)$

В курсе ДУ из $f(\lambda) = e^\lambda \Rightarrow f(A) = e^A$.

Пусть $f(\lambda) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0$

$f(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 E$ Найдем $A^n$.

$J = S^{-1}AS$

$A = SJS^{-1}$

$A^k = SJ\underbrace{S^{-1}S}_{E}JS^{-1}\dots SJS^{-1} = SJ^kS^{-1}$

$J = \operatorname{diag}[J_1, \dots, J_s] \Rightarrow$

$J_k = \operatorname{diag}[J_1^k, \dots, J_s^k]$

$J_s(\alpha) = \alpha E + H = H + \alpha E$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_s(\alpha))^k = (H + \alpha E)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i H^i \alpha^{k-i} =$$

$$= C_k^0 H^0 \alpha^k + C_k^1 H \alpha^{k-1} + \dots = \begin{pmatrix} \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k-2} \dots \\ 0 & \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} \dots \\ & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

При больших степенях $H = O_n$

$$C_k^0 H^0 \alpha^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & & \\ & \alpha^k & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad C_k^1 H \alpha^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{k-1}C_k^1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \end{pmatrix}$$

Другой подход поиска зн-я матр. многочлена

$m(\lambda)$ — аннул. мн-ен.

$m(A) = 0$

$f(\lambda) = q(\lambda) m(\lambda) + r(\lambda)$, $r(\lambda) = 0 \parallel \deg r(\lambda) < \ldots$

$f(A) = \underbrace{q(A) m(A)}_{=0} + r(A) = r(A) \Rightarrow$

Упрощаем вычисл-е зн-я $f(A)$

[Пусть $f(\lambda) = q(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda)$]

[$f'(\lambda) = q'(\lambda) \cdot g + q g' + r'(\lambda)$]

Предположим $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_s}$ - корни мин. мн-ена, $k_1, \ldots, k_s$

причем это с.зн.

Тогда корни опред-ся:

$f(\lambda_1), \ldots, f^{(k_1 - 1)}(\lambda_1)$

$f(\lambda_2) \ldots$

$\vdots$

Спектр матрицы A.

~~Эти~~ коэфф-ты $r(\lambda)$ завис. от зн-й

Пусть $f(\lambda) = \sin \lambda$

$\sin A \Rightarrow$ строят мин. мн-ен,

находят корни

нах. зн-я на спектре,

по зн-ям строят интерп. мн-ен

Ex.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$.

Найти $f(A)$: $\sqrt{A} = B : B^2 = A$.

Ищем мин. мн-ен:

$\det |A - \lambda E| = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-4)^2$

Последний ИМ: $(\lambda-4)^2$. Найдем зн-я на спектре:

$f(\lambda)\big|_{\lambda=4} = 2 \quad f'(\lambda)\big|_{\lambda=4} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

Запишем интерп. мн-ен по этим зн-ям $(r(\lambda))$

Причем его $\deg < \deg(\det(A-\lambda E)) \Rightarrow$

$\deg = 1 \Rightarrow$ он имеет вид $a\lambda + b$:

$\begin{cases} 4a + b = 2 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow r(\lambda) = \frac{\lambda}{4} + 1$

Зн-е $f(A)$ = зн-е $r(\lambda)\big|_{\lambda=A}$

$\sqrt{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + E = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix} = B$

$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 48 & 16 \\ -16 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Подход в виде ряда:

Пусть $f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$.

Если спектр = сх. посл-ть $\Rightarrow$ $f_1(A), \dots, f_n(A)$

матр. A

сх. посл-ть

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i$$

$\frac{1}{1-x} = \sum x^i$ сх. при $x < 1$ $\Rightarrow$

$(E-A)^{-1} = \sum A^i$ при $\lambda < 1$ (если спектр. сх.)

Общий прием:

Пусть $G(u_1, \dots, u_n)$

$f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$

И пусть на спектре

$G(f_1, \dots, f_n) = 0$

Вообще говоря, ф-ии от матрицы обладает принципиально новыми св-вами.

---

Решение матричных ур-й

- $AX = XB$, $A, B \in P_{n,n}$

Нулевое реш-е всегда $\exists$.

Прямое произв-е (произв. Кронекера)

$\forall\ A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{11}B & a_{12}B & \cdots \\ \hline a_{21}B & a_{22}B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$$

Обл. Ассоциативностью.

$$\left[ \left(A \otimes E + E \otimes B^T\right) \tilde{X} = \tilde{C} \quad - \text{матр. } AX = XB + C \right]$$

$$\left(A \otimes E_k + E_n \otimes B^T\right) \tilde{X} = 0 \qquad (\dim A = n,\ \dim B = k)$$

Если $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = X$, то $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \tilde{X}$

II)

Пусть $A$ имеет ЖНФ $J_1 = S_1 A S_1^{-1}$

$B$ имеет ЖНФ $J_2 = S_2 B S_2^{-1}$

Подставим в ур-е $AX = XB$

$A = S_1^{-1} J_1 S_1,\quad B = S_2^{-1} J_2 S_2$

$$S_1 \cdot)\ S_1^{-1} J_1 S_1 X = X S_2^{-1} J_2 S_2 \quad (\cdot S_2^{-1}$$

$$J_1 \underbrace{S_1 X S_2^{-1}}_{\tilde{X}} = \underbrace{S_1 X S_2^{-1}}_{\tilde{X}} J_2 \Rightarrow J_1 \tilde{X} = \tilde{X} J_2$$

Пусть $J_1 = \left(\begin{array}{c|c} 2\times 2 & \\ \hline & 3\times 3 \end{array}\right),\ J_2 = \left(\begin{array}{c|c} 3\times 3 & \\ \hline & 2\times 2 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{2\times 2}^{} & \\ J_{11} & \\ \hline & 3\times 3 \\ & J_{12} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 2\{\overbrace{X_{11}}^{3} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{X_{11}}^{2\times 3} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \{3\times 3 & \\ J_{21} & \\ \hline & 2\times 2 \\ & J_{22} \end{array}\right)$$

$J_{11}X_{11} = X_{11}J_{21}$

$J_{11}X_{12} = X_{12}J_{22}$

$\vdots$

получаем сис-мы

$J_1 X = X J_2$

пусть

$J_1$ соотв. $\lambda_1 \Rightarrow J_1 = \lambda_1 E + H_k = \alpha E + H_k$

$J_2 = \lambda_2 E + H_p = \beta E + H_p$

$\Rightarrow (\lambda_1 E + H_k)X = X(\lambda_2 E + H_p)$

$\alpha X + H_k X = \beta X + X H_p$

$(\alpha - \beta) X = X H_p - H_k X \Rightarrow$ 2 случая

1) $\alpha = \beta \Rightarrow X H_p = H_k X$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

$x_{21} = 0$

$x_{11} = x_{22}$

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_k \\ & \ddots & & & C_3 \\ & & \ddots & & C_2 \\ 0 & \cdots & & & C_1 \end{pmatrix}$$ - реш-е ур-я

2) $\alpha \neq \beta$

$$(\alpha-\beta)^2 \cancel{X} = (\alpha-\beta)(XH_p - H_k X) =$$

$$= (\alpha-\beta) X H_p - (\alpha-\beta) H_k X \Rightarrow$$

$$\cancel{(\alpha-\beta)}$$

$$(XH_p - H_k X) H_p - H_k (XH_p - H_k X) =$$

$$= XH_p^2 - 2H_k X H_p + H_k^2 X$$

$$(\alpha-\beta)^3 X \ \ldots$$

$(\alpha-\beta)^S X = 0$ из-за сдвигов $H$ $\Rightarrow$

$X = 0$ $\Rightarrow$ если нет одинак. с. зн. $\Rightarrow$ нет реш-й

- Частный случай — задача Фробениуса:

$$AX = XA$$

- Ур-е

$$AX - XB = C$$

Если нет одинаковых с. зн $\Rightarrow$ ~~нет реш-й~~

одно ч. р.

Если есть одинак. $\Rightarrow$ беск. много реш-й

Если $\exists \int_0^\infty e^{At} C e^{Bt} dt \Rightarrow -\int_0^\infty e^{At} C e^{Bt} dt$ — реш-е,

причем этот НИ сх., если

с. зн. отриц.