Частные случаи интегрируемости уравнения Риккати.

• *Уравнение вида*

$$y' = P(x) \cdot y^2 + Q(x) \cdot y + R(x)$$

называется ***уравнением Риккати (УР)***.

Причем и $P(x) \neq 0$, и $R(x) \neq 0$, иначе мы получим ЛУ-1 или уравнение Бернулли соответственно.

В общем случае принято считать, что УР не интегрируется в квадратурах, то есть решение уравнения нельзя представить в виде какого интеграла (или комбинации интегралов). Поэтому мы будем рассматривать некоторые частные случаи, в которых мы можем найти решение, приводя УР к уже известным нам уравнениям. (P.S. хотя в интернете можно найти массивную формулу, которая захватывает если и не все случаи, то большинство из них)

Частные случаи: (далее $a_i \in \mathbb{R}$)

1. Если уравнение можно записать в виде

   $$y' = P(x) \cdot (a_2 y^2 + a_1 y + a_0),$$

   то мы можем найти его решение как решение **уравнения с разделяющимися переменными (УРП)**;

2. Если уравнение можно записать в виде

   $$y' = a_2 \cdot \frac{y^2}{x^2} + a_1 \cdot \frac{y}{x} + a_0,$$

   то это **однородное уравнение (ОУ)**;

   (a) причем если уравнение можно записать в виде

   $$y' = a_2 \cdot \frac{y^2}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} + a_0 \quad \text{или} \quad y' = a_2 \cdot \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x} + \frac{a_0}{x}.$$

   то заменой $y = z\sqrt{x}$ уравнение сводится к **уравнению с разделяющимися переменными (УРП)**.

3. Если уравнение можно записать виде

   $$y' = a_1 y^2 + \frac{a_2}{x^2},$$

   то заменой $y = \frac{1}{z}$ уравнение сводится к **однородному уравнению (ОУ)**;

4. Если *известно частное решение* $y = y_1(x)$ уравнения

   $$y' = P(x) \cdot y^2 + Q(x) \cdot y + R(x),$$

   то заменой $y = y_1 + \frac{1}{z(x)}$ уравнение сводится к **линейному уравнению относительно z (ЛУ-1)**;

5. Если уравнение можно записать в виде

$$y' = a_2 \cdot y^2 + a_1 \cdot \frac{y}{x} + \frac{a_0}{x^2},$$

то оно имеет частное решение $y_1 = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (если уравнение $a_2 \cdot \alpha^2 + (a_1 + 1) \cdot \alpha + a_0 = 0$ имеет решение). Следовательно, найдя α, заменой $y = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{1}{z(x)}$ уравнение сводится к **ЛУ-1**.

Частных случаев гораздо больше, но для того, чтобы не загружать себя же, ограничимся только рассмотренными случаями.

Мы не будем рассматривать примеров для случаев 1 и 2, так решением точно таких же уравнений мы занимались ранее.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$y' = -y^2 + x^2 + 1,$$

если его частное решение представимо в виде $y_1 = ax + b$.

Решение. Это 4-ый из рассмотренных случаев. Но для начала нам нужно найти сами коэффициенты a и b. Для этого подставим y_1 в исходное уравнение, причем $y_1' = a$:

$$a = -(ax + b)^2 + x^2 + 1 = -a^2x^2 - 2abx - b^2 + x^2 + 1.$$

Перенесем всё в одну сторону и вынесем x-ы за скобки:

$$(1 - a^2) \cdot x^2 - (2ab) \cdot x + (1 - b^2 - a) = 0.$$

Так как y_1 должно быть решением, то равенство должно выполнятся. А для его выполнения достаточно, чтобы все коэффициенты (всё, что в скобочках) обращались в 0. Тогда

$$1 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1, \text{ и пусть для определености } a = 1.$$

$$2ab = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Тогда исходное уравнение имеет частное решение

$$y_1 = x.$$

Из случая 4 введем замену

$$y = y_1 + \frac{1}{z(x)} = x + \frac{1}{z}.$$

Тогда $z = \dfrac{1}{y - x}$. Подставим это в уравнение $y' = -y^2 + x^2 + 1$, причем $y' = y'_x = 1 - \dfrac{z'}{z^2}$, и получим

$$1 - \frac{z'}{z^2} = -x^2 - \frac{2x}{z} - \frac{1}{z^2} + x^2 + 1.$$

Приведем это уравнение к виду разрешенному относительно производной

$$z' = 1 + 2zx.$$

А данное уравнение является линейным относительно z. Его решение имеет вид

$$z = Ce^{x^2} + e^{x^2} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-t^2} dt.$$

Сделаем обратную замену

$$\frac{1}{y-x} = e^{x^2}(C + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-t^2} dt).$$

Тогда решение исходного уравнения имеет вид

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-t^2} dt}.$$

Но, поскольку в ходе всех вычислений мы получили 2 решения (не забываем про частное $y_1 = x$), то правильнее будет записать, что полным решением исходного уравнения является система

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-t^2} dt}, \quad y_1 = x.$$

Ответ: $y = x + \dfrac{e^{-x^2}}{C + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-t^2} dt}, \quad y_1 = x.$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y' + 2y^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Решение. Перенесем $2y^2$ в правую сторону. Тогда

$$y' = -2y^2 + \frac{1}{x^2},$$

а это случай 3. Применим замену $y = \dfrac{1}{z}$. Тогда $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$ и $z = \dfrac{1}{y}$. Подставим замену в получившееся уравнение:

$$-\frac{z'}{z^2} = -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{x^2}.$$

$$z' = 2 - \frac{z^2}{x^2},$$

получили однородное уравнение. Применим замену $z = tx$ $\left(t = \dfrac{z}{x} = \dfrac{1}{xy}\right)$, тогда

$$t'x = 2 - t^2 - t.$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{-t^2 - t + 2} - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = C.$$

$$\frac{1}{3} \ln \left(\frac{t+2}{t-1}\right) = \ln x + C.$$

$$\frac{t+2}{t-1} = Cx^3.$$

$$\frac{\frac{1}{xy}+2}{\frac{1}{xy}-1} = Cx^3.$$

$$\frac{2xy+1}{1-xy} = Cx^3.$$

Преобразуем уравнение. Тогда решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \frac{Cx^3-1}{2x+Cx^4}.$$

Ответ: $y = \dfrac{Cx^3-1}{2x+Cx^4}.$

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$y' - y^2 + \frac{5y}{x} = \frac{4}{x^2}.$$

Решение. Для начала приведем уравнение к виду разрешенному относительно производной

$$y' = y^2 - 5\cdot\frac{y}{x} + 4\cdot\frac{1}{x^2}.$$

А это уравнение соответствует случаю 5. Значит для этого уравнения существует частное решение, которое имеет вид $y_1 = \dfrac{\alpha}{x}$. Но предварительно необходимо проверить, имеет ли действительные корни уравнение

$$a_2\cdot\alpha^2 + (a_1+1)\cdot\alpha + a_0 = \alpha^2 - 5\alpha + 4 = 0 \text{ (очевидно корни действительны)}$$

Найдем α, подставив частное решение в уравнение, причем $y_1' = -\dfrac{\alpha}{x^2}$,

$$-\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\alpha^2}{x^2} - \frac{5\alpha}{x^2} + \frac{4}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 2.$$

Тогда уравнение имеет частное решение $y_1 = \dfrac{2}{x}$. Следовательно, можем сделать замену

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z} \quad\Rightarrow\quad z = \frac{1}{y-\frac{2}{x}}, \quad y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2}.$$

Подставим замену в исходное уравнение и получим

$$-\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{5}{x}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{z}\right) + \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{4}{xz} - \frac{10}{x^2} - \frac{5}{xz} + \frac{4}{x^2}.$$

Приведем уравнение к виду разрешенному относительно производной

$$z' = -1 + \frac{z}{x}.$$

Данное уравнение является линейным относительно z, следовательно

$$z' - \frac{z}{x} = -1 \quad\Rightarrow\quad z = Cx - x\ln x.$$

Сделаем обратную замену

$$\frac{1}{y-\frac{2}{x}} = Cx - x\ln x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(C-\ln x)}.$$

Тогда полным решением исходного уравнения будет система функций

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(C-\ln x)}, \quad y_1 = \frac{2}{x}.$$

Ответ: $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x(C-\ln x)}, \quad y_1 = \dfrac{2}{x}.$

Пример 4. Проинтегировать уравнение

$$y' = 2\cdot\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x} + \frac{2}{x}.$$

Решение. Данное уравнение соответствует случаю 2(a). Следовательно, сделаем замену $y = z\sqrt{x}$ и подставим (причем $y' = z'\sqrt{x} + \dfrac{z}{2\sqrt{x}}$, $z = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$)

$$z'\sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{x}} = \frac{2z^2}{x} + \frac{z}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x}.$$

$$z'\sqrt{x} = \frac{2z^2+2}{x}.$$

Получили УРП. Приведем его к более привычному виду

$$\frac{dz}{2z^2+2} - \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Проинтегрируем и получим

$$2\operatorname{arctg} z + \frac{2}{\sqrt{x}} = C.$$

Сделаем обратную замену и получим

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = C.$$

Отсюда

$$y = \sqrt{x}\operatorname{tg}\left(C - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Ответ: $y = \sqrt{x}\operatorname{tg}\left(C - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right).$

Пример 5. Проинтегрировать уравнение

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2,$$

если оно имеет частное решение $y_1 = x + 2$.

Решение. Условие соответствует случаю 4. Тогда можем применить замену

$$y = x + 2 + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad y' = 1 - \frac{z'}{z^2}, \quad z = \frac{1}{y-x-2}.$$

Подставим это в уравнение:

$$1-\frac{z'}{z^2}-2x^2-4x-\frac{2x}{z}+x^2+4+\frac{1}{z^2}+4x+\frac{2x}{z}+\frac{4}{z}=5-x^2.$$

Сократим подобные слагаемые и получим ЛУ

$$z'+4z=-1.$$

Тогда его общее решение имеет вид

$$z=Ce^{-4x}-\frac{1}{4}.$$

Сделаем обратную замену

$$\frac{1}{y-x-2}=Ce^{-4x}-\frac{1}{4}.$$

Тогда

$$y=x+2+\frac{4}{4Ce^{-4x}-1}.$$

Значит полное решение исходного уравнения составляет система функций

$$y=x+2+\frac{4}{4Ce^{-4x}-1},\quad y_1=x+2.$$

Ответ: $y=x+2+\dfrac{4}{4Ce^{-4x}-1},\quad y_1=x+2.$