МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра компьютерных технологий и систем

Лабораторная работа №2

Вариант 4

Выполнил:

Бовт Тимофей Анатольевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:

Каркоцкий Александр Геннадьевич

Минск, 2024 г.

Постановка задачи.

Дан прямоугольный параллелепипед с рёбрами $a = 1, b = 2, c = 5$. Найти электрический и магнитный потенциал, электрическую и магнитную напряжённость внутри этого параллелепипеда при заданных диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 1$, условиях на электрический и магнитный потенциал (u и v соответственно) на его гранях, и постоянной магнитной проницаемости, если распределение зарядов изменяется по закону $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Сумма, при необходимости, должна состоять не менее чем из 50 слагаемых.

1. $$\begin{cases} u|_{x=0} = y + z, \\ u|_{x=a} = y + z + ye^z, \\ u|_{y=0} = z, \\ u|_{y=b} = z + 2 + 2xe^z, \\ u|_{z=0} = y + xy + \sin(2\pi x)\sin(3\pi y), \\ u|_{z=c} = y + 5 + xye^5 + xy(x-1)(y-2). \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} v_x|_{x=0} = v_x|_{x=a} = v|_{y=0} = v_y|_{y=b} = 0, \\ v|_{z=0} = x^4(x-a)^4 \sin\left(\dfrac{4\pi y}{16}\right), \\ v|_{z=c} = y(y-b)^4\cos(5\pi x). \end{cases}$$

Решение задачи.

Начнем задачи для электрического потенциала. Считая

$$\Delta u = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon},$$

можем сформулировать задачу

$$\begin{cases} \Delta u = -x^2 - y^2 - z^2, \\ u|_{x=0} = y + z, \\ u|_{x=a} = y + z + ye^z, \\ u|_{y=0} = z, \\ u|_{y=b} = z + 2 + 2xe^z, \\ u|_{z=0} = y + xy + \sin(2\pi x)\sin(3\pi y), \\ u|_{z=c} = y + 5 + xye^5 + xy(x-1)(y-2). \end{cases}$$

Сперва нам нужно проверить условия согласования для того, чтобы убедиться в том, что задача является корректно поставленной. Итак, возьмем первое условие

$$u(0, y, z) = y + z$$

и будем подставлять в него точки пересечения граней параллелепипеда $y = 0$, $y = b$, $z = 0$, $z = c$, а затем сравнивать с условием в соответствующей точке, подставляя в нее $x = 0$, то есть

1. $u(0, 0, z) = z$ из первого условия и $u(0, 0, z) = z$ из третьего условия;
2. $u(0, b, z) = b + z = 2 + z$ из первого условия и $u(0, b, z) = 2 + z$ из четвертого условия;
3. $u(0, y, 0) = y$ из первого условия и $u(0, y, 0) = y$ из пятого условия;

4. $u(0,y,c) = y + c = y + 5$ из первого условия и $u(0,y,c) = y + 5$ из шестого условия.

Далее по аналогии берем второе условие

$$u(a,y,z) = y + z + ye^z$$

и подставим в него точки пересечения граней:

1. $u(a,0,z) = z$ из второго условия и $u(a,0,z) = z$ из третьего условия;

2. $u(a,b,z) = b + z + be^z = 2 + z + 2e^z$ из второго условия и $u(a,b,z) = z + 2 + 2ae^z$ из четвертого условия;

3. $u(a,y,0) = y + y = 2y$ из второго условия и $u(a,y,0) = y + ay = 2y$ из пятого условия;

4. $u(a,y,c) = y + c + ye^c = y + 5 + ye^5$ из второго условия и $u(a,y,c) = y + 5 + aye^5 + ay(a-1)(y-2) = y + 5 + ye^5$ из шестого условия.

По аналогии берем третье условие

$$u(x,0,z) = z$$

и проверим совпадение для него:

1. $u(x,0,0) = 0$ из третьего условия и $u(x,0,0) = 0$ из пятого условия;

2. $u(x,0,c) = c = 5$ из третьего условия и $u(x,0,c) = 5$ из шестого условия.

По аналогии берем четвертое условие

$$u(x,b,z) = z + 2 + 2xe^z$$

и проверим совпадение для него:

1. $u(x,b,0) = 2 + 2x$ из четвертого условия и $u(x,b,0) = b + bx + \sin(2\pi x)\sin(3\pi b) = 2 + 2x$ из пятого условия;

2. $u(x,b,c) = c + 2 + 2xe^c = 7 + 2xe^5$ из четвертого условия и $u(x,b,c) = b + 5 + xbe^5 + xb(x-1)(b-2) = 7 + 2xe^5$ из шестого условия.

Таким образом, условия согласования выполнены, и задача является корректно поставленной.

Представим решение задачи в виде

$$u(x,y,z) = W(x,y,z) + V(x,y,z),$$

где функция

$$W(x,y,z) = A_1(x)A_2(y)A_3(z) + B_1(x)B_2(y)B_3(z) + C_1(x)C_2(y)C_3(z)$$

подбирается таким образом, чтобы обнулить две пары граничных условий, причем будем обнулять граничные условия по x и по y. С учетом граничных условий, можем искать

$$W(x,y,z) = A_1(x)A_3(z)y + B_1(x)B_2(y)z + C_1(x)C_2(y)e^z.$$

Подберем оставшиеся неизвестные коэффициенты так, чтобы

$$V|_{x=0} = V|_{x=a} = V|_{y=0} = V|_{y=b} = 0.$$

Подставляя $x = 0$, получим

$$V(0, y, z) = u(0, y, z) - (A_1(0)A_3(z)y + B_1(0)B_2(y)z + C_1(0)C_2(y)e^z) =$$

$$= (1 - A_1(0)A_3(z))y + (1 - B_1(0)B_2(y))z - C_1(0)C_2(y)e^z = 0.$$

Отсюда

$$A_1(0)A_3(z) = 1,\ B_1(0)B_2(y) = 1,\ C_1(0) = 0,$$

более того

$$A_3(z) = \frac{1}{A_1(0)} = A_3,\ B_2(y) = \frac{1}{B_1(0)} = B_2.$$

Подставляя $x = a$, получим

$$V(a, y, z) = u(a, y, z) - (A_1(a)A_3(z)y + B_1(a)B_2(y)z + C_1(a)C_2(y)e^z) =$$

$$= (1 - A_1(a)A_3)y + (1 - B_1(a)B_2)z + (y - C_1(a)C_2(y))e^z = 0.$$

Отсюда

$$A_1(a)A_3 = 1,\ B_1(a)B_2 = 1,\ C_1(a)C_2(y) = y.$$

Тогда мы можем принять $C_1(a) = 1$, $C_2(y) = y$. Подставляя $y = 0$, получим

$$V(x, 0, z) = (1 - B_1(x)B_2)z.$$

Таким образом,

$$B_1(x)B_2 = 1,$$

следовательно

$$B_1(x) = \frac{1}{B_2} = B_1.$$

Поскольку B_1, B_2 – числа, то мы можем взять $B_1 = B_2 = 1$. Подставляя $y = b$, получим

$$V(x, b, z) = 2 - A_1(x)A_3b + (2x - bC_1(x))e^z = 2(1 - A_1(x)A_3) + 2(x - C_1(x))e^z.$$

Отсюда

$$C_1(x) = 1,\ A_1(x)A_3 = 1,$$

причем

$$A_1(x) = \frac{1}{A_3} = A_1,$$

следовательно, можем взять $A_1 = A_3 = 1$. Таким образом, мы построили функцию

$$W(x, y, z) = y + z + xye^z.$$

Теперь будем решать задачу относительно $V(x, y, z)$.

$$\Delta V = -\Delta W - x^2 - y^2 - z^2 = -x^2 - y^2 - z^2 - xye^z,$$

$$V|_{x=0} = V|_{x=a} = V|_{y=0} = V|_{y=b} = 0,$$

$$V|_{z=0} = -W|_{z=0} + y + xy\sin(2\pi x)\sin(3\pi y) = \sin(2\pi x)\sin(3\pi y),$$

$$V|_{z=c} = -W|_{z=c} + y + 5 + xye^5 + xy(x-1)(y-2) = xy(x-1)(y-2).$$

В итоге имеем задачу для $V(x, y, z)$

$$\begin{cases} \Delta V = -x^2 - y^2 - z^2 - xye^z, \\ V|_{x=0} = V|_{x=a} = V|_{y=0} = V|_{y=b} = 0, \\ V|_{z=0} = \sin(2\pi x)\sin(3\pi y), \\ V|_{z=c} = xy(x-1)(y-2). \end{cases}$$

Имеем задачу с неоднородными граничными условиями и неоднородным уравнением. Ищем решение этой задачи в виде

$$V(x, y, z) = v(x, y, z) + w(x, y, z),$$

где каждой из функций соответствует своя задача

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0, \\ v|_{z=0} = \sin(2\pi x)\sin(3\pi y), \\ v|_{z=c} = xy(x-1)(y-2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w = -x^2 - y^2 - z^2 - xye^z, \\ w|_{x=0} = w|_{x=a} = w|_{y=0} = w|_{y=b} = 0, \\ w|_{z=0} = 0, \\ w|_{z=c} = 0. \end{cases}$$

Найдем решение задачи для $v(x, y, z)$. Для этого представим эту функцию в виде

$$v(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \;\; X, Y, Z \not\equiv 0.$$

Подставляем этот вид решения в дифференциальное уравнение задачи

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0.$$

Разделяем переменные путем деления уравнения на XYZ и получаем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Оставим слева только первое слагаемое, а остальное перенесем в правую часть. Получим слева функцию, зависящую от x, а справа – функцию, зависящую от (y, z), поэтому обе части уравнения могут быть равны только константе. Пусть эта константа $-\lambda^2$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda^2,$$

Используя равенство

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

мы можем построить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Подставляя выражение для $v(x, y, z)$ в первые граничные условия задачи для $v(x, y, z)$, получим

$$X(0)Y(y)Z(z) = X(a)Y(y)Z(z) = 0,$$

но $Y, Z \not\equiv 0$ по определению. Поэтому

$$X(0) = X(a) = 0.$$

Взяв построенное обыкновенное дифференциальное уравнение и полученные условия, можем построить задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(a) = 0. \end{cases}$$

Найдем собственные значения и собственные функции из задачи (4). Общее решение задачи (4) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Подставим первое краевое условие

$$X(0) = C_1 = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0$. Подставим второе краевое условие

$$X(a) = C_2 \sin \lambda a = 0.$$

Тогда

$$\lambda_n a = \pi n,$$

а отсюда собственные значения и собственные функции равны соответственно

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a},\ X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right),\ n = 1, 2 \ldots.$$

Рассмотрим уравнение

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda^2.$$

Можем оставить слева только первое слагаемое, а все остальное перенести в правую часть, тогда

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2 - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\mu^2,$$

то есть слева функция зависит от y, а справа – от z, соответственно это равно константе $-\mu^2$. Используя равенство

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu^2,$$

и вторые граничные условия задачи для $v(x, y, z)$

$$X(x)Y(0)Z(z) = X(x)Y(b)Z(z) = 0,$$

аналогично задаче для $X(x)$ можем построить задачу Штурма-Лиувилля для $Y(y)$:

$$\begin{cases} Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0, \\ Y(0) = 0, \\ Y(b) = 0. \end{cases}$$

Найдем собственные значения и собственные функции из этой задачи. Общее решение задачи (7) имеет вид

$$Y(y) = C_1 \cos \mu y + C_2 \sin \mu y,$$

подставим первое краевое условие и получим

$$Y(0) = C_1 = 0.$$

Подставим второе краевое условие и получим

$$Y(b) = C_2 \cos \mu b = 0,$$

отсюда собственные значения и собственные функции равны

$$\mu_m = \frac{\pi n}{b},\ Y_m(y) = \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right),\ m = 1, 2, \ldots.$$

Возьмем полученные результаты (5), (8) и подставим их в общий вид (2). Тогда произведение преобразуется в сумму следующего вида

$$v(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(z) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right).$$

Подставим этот вид решения в уравнение задачи $\Delta v = 0$ и получим

$$-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(z) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(z) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z''_{nm}(z) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) = 0.$$

Приравнивая коэффициенты степенных рядов, получим

$$Z''_{nm}(z) - \left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\right] Z_{nm}(z) = 0.$$

Введем новую величину

$$\nu_{nm}^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2,$$

тогда

$$Z''_{nm}(z) - \nu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = 0.$$

Подставим в выражение для $v(x, y, z)$ третье граничное условие задачи для $v(x, y, z)$ и получим

$$u|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(0) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) = \sin(2\pi x) \sin(3\pi y).$$

Отсюда, подставляя $a = 1$, $b = 2$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(0) \sin(\pi n x) \sin\left(\frac{\pi m}{2} y\right) = \sin(2\pi x) \sin(3\pi y),$$

тогда

$$Z_{nm}(0) = \begin{cases} 1,\ (n, m) = (2, 6), \\ 0,\ (n, m) \neq (2, 6). \end{cases}$$

Подставим в то же выражение для $v(x, y, z)$ четвертое граничное условие задачи и получим

$$u|_{z=c} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(c) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) = xy(x-1)(y-2).$$

Отсюда, раскладывая функцию справа в ряд Фурье по собственным функциям, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(c)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right) = xy(x-1)(y-2) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \psi_{nm}\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right),$$

где

$$\psi_{nm} = \frac{\int\limits_0^a\int\limits_0^b xy(x-1)(y-2)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right)dxdy}{\int\limits_0^a\int\limits_0^b \sin^2\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi m}{b}y\right)dxdy}.$$

Таким образом,

$$Z_{nm}(c) = \psi_{nm}.$$

Тогда мы можем сформулировать задачу Коши для отыскания $Z_{nm}(z)$:

$$\begin{cases} Z''_{nm}(z) - \nu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = 0, \\ Z_{nm}(0) = \begin{cases} 1, & (n,m) = (2,6), \\ 0, & (n,m) \neq (2,6). \end{cases} \\ Z_{nm}(c) = \psi_{nm}. \end{cases}$$

Общее решение дифференциального уравнения этой задачи имеет вид

$$Z_{nm}(z) = A_{nm}\operatorname{ch}(\nu_{nm}z) + B_{nm}\operatorname{sh}(\nu_{nm}z).$$

Подставим в него первое граничное условие

$$Z_{nm}(0) = A_{nm} = \begin{cases} 1, & (n,m) = (2,6), \\ 0, & (n,m) \neq (2,6). \end{cases}$$

Подставим в него второе граничное условие

$$Z_{nm}(c) = A_{nm}\operatorname{ch}(\nu_{nm}c) + B_{nm}\operatorname{sh}(\nu_{nm}c) = \psi_{nm}.$$

Следовательно, учитывая условия на A_{nm}, можем выразить

$$B_{nm} = \begin{cases} \dfrac{\psi_{26}}{\operatorname{sh}(\nu_{26}c)} - \operatorname{cth}(\nu_{26}c), & (n,m) = (2,6) \\ \dfrac{\psi_{nm}}{\operatorname{sh}(\nu_{nm}c)}, & (n,m) \neq (2,6). \end{cases}$$

Таким образом,

$$Z_{nm}(z) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\nu_{26}z) + \left(\dfrac{\psi_{26}}{\operatorname{sh}(\nu_{26}c)} - \operatorname{cth}(\nu_{26}c)\right)\operatorname{sh}(\nu_{26}z), & (n,m) = (2,6), \\ \dfrac{\psi_{nm}}{\operatorname{sh}(\nu_{nm}c)}\cdot\operatorname{sh}(\nu_{nm}z), & (n,m) \neq (2,6). \end{cases}$$

А тогда

$$v(x,y,z) = \left[\operatorname{ch}(\nu_{26}z) + \left(\frac{\psi_{26}}{\operatorname{sh}(\nu_{26}c)} - \operatorname{cth}(\nu_{26}c)\right)\operatorname{sh}(\nu_{26}z)\right]\sin(2\pi x)\sin(3\pi y) +$$
$$+ \sum_{n,m=1,\ (n,m)\neq(2,6)}^{\infty} \frac{\psi_{nm}}{\operatorname{sh}(\nu_{nm}c)}\cdot\operatorname{sh}(\nu_{nm}z)\cdot\sin(\pi nx)\sin\left(\frac{\pi m}{2}y\right).$$

Или в более компактной записи

$$v(x,y,z) = [\operatorname{ch}(\nu_{26}z) - \operatorname{cth}(\nu_{26}c)\operatorname{sh}(\nu_{26}z)]\sin(2\pi x)\sin(3\pi y) + \\ + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\psi_{nm}}{\operatorname{sh}(\nu_{nm}c)} \cdot \operatorname{sh}(\nu_{nm}z) \cdot \sin(\pi n x)\sin\left(\frac{\pi m}{2}y\right).$$

Теперь будем искать решение задачи для $w(x,y,z)$. По аналогии с задачей для $v(x,y,z)$, опуская решение задач Штурма-Лиувилля, мы можем построить решение в виде

$$w(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(z)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right).$$

Теперь подставим этот вид решения в уравнение $\Delta w = -x^2 - y^2 - z^2 - xye^z$ и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[Z''_{nm}(z) - \nu_{nm}^2 Z_{nm}(z)\right]\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right) = -x^2 - y^2 - z^2 - xye^z.$$

Тогда, если мы разложим функцию справа в ряд Фурье по собственным функциям

$$-x^2 - y^2 - z^2 - xye^z = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(z)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right),$$

где

$$f_{nm}(z) = \frac{\int\limits_0^a\int\limits_0^b (-x^2 - y^2 - z^2 - xye^z)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right)dxdy}{\int\limits_0^a\int\limits_0^b \sin^2\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi m}{b}y\right)dxdy},$$

то получим

$$Z''_{nm}(z) - \nu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = f_{nm}(z).$$

Подставляя в вид решения нулевые граничные условия, получим

$$w|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(0)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right)0,$$

отсюда

$$Z_{nm}(0) = 0,$$

и

$$w|_{z=c} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(c)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right)0,$$

тогда

$$Z_{nm}(c) = 0.$$

В итоге можем сформулировать задачу Коши для отыскания $Z_{nm}(z)$:

$$\begin{cases} Z''_{nm}(z) - \nu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = f_{nm}(z), \\ Z_{nm}(0) = 0, \\ Z_{nm}(c) = 0. \end{cases}$$

Итак, нам необходимо построить решение этой задачи, для этого сперва нужно найти полное решение дифференциального уравнения. Это линейное стационарное неоднородное уравнение, а потому его полное решение будет состоять из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Общее решение однородного уравнения мы можем легко построить в виде

$$Z_{nm}^{\text{oo}}(z) = C_1 \operatorname{ch}(\nu_{nm} z) + C_2 \operatorname{sh}(\nu_{nm} z).$$

Будем определять вид частного решения. После вычисления интегралов функция $f_{nm}(z)$ будет иметь вид

$$f_{nm}(z) = a_1 z^2 + a_2 + a_3 e^z,$$

где $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Соответственно для построения частного решения можно применить метод Эйлера, из которого следует, что частное решение будет иметь вид

$$Z_{nm}^{\text{чн}}(z) = Az^2 + Bz + C + De^z.$$

Подставим это выражение в неоднородное дифференциальные уравнение и получим

$$2A + De^z - \nu_{nm}^2 (Az^2 + Bz + C + De^z) = a_1 z^2 + a_2 + a_3 e^z.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих функциях от z, получим

$$\begin{cases} z^2 : -\nu_{nm}^2 A = a_1, \\ z : B = 0, \\ z^0 : 2A - \nu_{nm}^2 C = a_2, \\ e^z : D - \nu_{nm}^2 D = a_3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$A = -\frac{a_1}{\nu_{nm}^2},\ B = 0,\ C = -\frac{a_2}{\nu_{nm}^2} - \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4},\ D = \frac{a_3}{1 - \nu_{nm}^2}.$$

Таким образом, частное решение уравнения имеет вид

$$Z_{nm}^{\text{чн}}(z) = -\frac{a_1}{\nu_{nm}^2} z^2 - \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} - \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} + \frac{a_3}{1 - \nu_{nm}^2} e^z.$$

В итоге полное решение уравнения имеет вид

$$Z_{nm}(z) = C_1 \operatorname{ch}(\nu_{nm} z) + C_2 \operatorname{sh}(\nu_{nm} z) - \frac{a_1}{\nu_{nm}^2} z^2 - \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} - \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} + \frac{a_3}{1 - \nu_{nm}^2} e^z.$$

Подставим в него первое граничное условие

$$Z_{nm}(0) = C_1 - \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} - \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} + \frac{a_3}{1 - \nu_{nm}^2} = 0.$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1 - \nu_{nm}^2}.$$

Подставим в полное решение второе граничное условие

$$Z_{nm}(c) = C_1 \operatorname{ch}(\nu_{nm} c) + C_2 \operatorname{sh}(\nu_{nm} c) - \frac{a_1}{\nu_{nm}^2} c^2 - \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} - \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} + \frac{a_3}{1 - \nu_{nm}^2} e^c = 0.$$

Отсюда

$$C_2 = \left[\frac{a_1}{\nu_{nm}^2} c^2 + \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1 - \nu_{nm}^2} e^c \right] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}(\nu_{nm} c)} - C_1 \operatorname{cth}(\nu_{nm} c).$$

Подставляя значение C_1, получим

$$C_2 = \left[\frac{a_1}{\nu_{nm}^2}c^2 + \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}e^c\right] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}(\nu_{nm}c)} - \left[\frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}\right] \operatorname{cth}(\nu_{nm}c)$$

В итоге имеем

$$Z_{nm}(z) = \left\{\frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}\right\} \operatorname{ch}(\nu_{nm}z) +$$
$$+ \left\{\left[\frac{a_1}{\nu_{nm}^2}c^2 + \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}e^c\right] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}(\nu_{nm}c)} - \left[\frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}\right] \operatorname{cth}(\nu_{nm}c)\right\} \operatorname{sh}(\nu_{nm}z) -$$
$$- \frac{a_1}{\nu_{nm}^2}z^2 - \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} - \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} + \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}e^z.$$

А тогда

$$w(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \Bigg[\left\{\frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}\right\} \operatorname{ch}(\nu_{nm}z) +$$
$$+ \left\{\left[\frac{a_1}{\nu_{nm}^2}c^2 + \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}e^c\right] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}(\nu_{nm}c)} - \left[\frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}\right] \operatorname{cth}(\nu_{nm}c)\right\} \operatorname{sh}(\nu_{nm}z) -$$
$$- \frac{a_1}{\nu_{nm}^2}z^2 - \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} - \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} + \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}e^z\Bigg] \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right).$$

Таким образом, мы можем построить решение исходной задачи в виде

$$u(x,y,z) = y + z + xye^z + [\operatorname{ch}(\nu_{26}z) - \operatorname{cth}(\nu_{26}c)\operatorname{sh}(\nu_{26}z)]\sin(2\pi x)\sin(3\pi y) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_{nm}}{\operatorname{sh}(\nu_{nm}c)} \cdot \operatorname{sh}(\nu_{nm}z) \cdot \sin(\pi n x) \sin\left(\frac{\pi m}{2}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \Bigg[\left\{\frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}\right\} \operatorname{ch}(\nu_{nm}z) +$$
$$+ \left\{\left[\frac{a_1}{\nu_{nm}^2}c^2 + \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}e^c\right] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}(\nu_{nm}c)} - \left[\frac{a_2}{\nu_{nm}^2} + \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} - \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}\right] \operatorname{cth}(\nu_{nm}c)\right\} \operatorname{sh}(\nu_{nm}z) -$$
$$- \frac{a_1}{\nu_{nm}^2}z^2 - \frac{a_2}{\nu_{nm}^2} - \frac{2a_1}{\nu_{nm}^4} + \frac{a_3}{1-\nu_{nm}^2}e^z\Bigg] \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right),$$

где

$$\psi_{nm} = \frac{\int\limits_0^a\int\limits_0^b xy(x-1)(y-2)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right)dxdy}{\int\limits_0^a\int\limits_0^b \sin^2\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi m}{b}y\right)dxdy},$$

$$f_{nm}(z) = \frac{\int\limits_0^a\int\limits_0^b (-x^2 - y^2 - z^2 - xye^z)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right)dxdy}{\int\limits_0^a\int\limits_0^b \sin^2\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi m}{b}y\right)dxdy} = a_1z^2 + a_2 + a_3e^z.$$

Теперь отыщем решение задачи для магнитного потенциала. Учитывая входные условия, мы можем сформулировать эту задачу следующим образом

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v_x|_{x=0} = v_x|_{x=a} = v|_{y=0} = v_y|_{y=b} = 0, \\ v|_{z=0} = x^4(x-a)^4 \sin\left(\dfrac{4\pi y}{16}\right), \\ v|_{z=c} = y(y-b)^4\cos(5\pi x). \end{cases}$$

Поскольку в задаче исходное уравнение однородное и граничные условия по x и по y однородны, то мы можем сразу построить решение задачи в виде

$$v(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} Z_{nm}(z)\cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi + 2\pi m}{2b}y\right).$$

Подставляя этот вид решения в уравнение задачи, получим

$$Z''_{nm}(z) - \nu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = 0,$$

где

$$\nu_{nm}^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi + 2\pi m}{2b}\right)^2,\ n = 0,1,2,\ldots,\ m = 0,1,2\ldots.$$

Подставим вид решения в граничное условие при $z = 0$

$$v|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} Z_{nm}(0)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi + 2\pi m}{2b}y\right) = x^4(x-a)^4\sin\left(\frac{4\pi y}{16}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n0}\sin\left(\frac{\pi y}{4}\right),$$

где

$$\varphi_{n0} = \frac{\int\limits_0^a x^4(x-a)^4\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)dx}{\int\limits_0^a \sin^2\left(\frac{\pi n}{a}x\right)dx}.$$

Тогда

$$Z_{nm}(0) = \varphi_{n0}.$$

Подставим вид решения в граничное условие при $z = c$

$$v|_{z=c} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} Z_{nm}(c)\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi + 2\pi m}{2b}y\right) = y(y-b)^4\cos(5\pi x) = \sum_{m=0}^{\infty}\psi_{5m}\sin\left(\frac{\pi + 2\pi m}{2b}y\right),$$

где

$$\psi_{5m} = \frac{\int\limits_0^b y(y-b)^4\sin\left(\frac{\pi + 2\pi m}{2b}y\right)dy}{\int\limits_0^b \sin^2\left(\frac{\pi + 2\pi m}{2b}y\right)dy}.$$

Тогда

$$Z_{nm}(c) = \psi_{5m}.$$

Таким образом, мы можем сформулировать задачу коши для $Z_{nm}(z)$

$$\begin{cases} Z''_{nm}(z) - \nu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = 0, \\ Z_{nm}(0) = \varphi_{n0}, \\ Z_{nm}(c) = \psi_{5m}. \end{cases}$$

Общее решение дифференциального уравнения в данной задаче имеет вид

$$Z_{nm}(z) = C_1\operatorname{ch}(\nu_{nm}z) + C_2\operatorname{sh}(\nu_{nm}z).$$

Подставим в него левое граничное условие

$$Z_{nm}(0) = C_1 = \begin{cases} \varphi_{n0},\ m = 0, \\ 0,\ m \neq 0. \end{cases}$$

Подставим в общее решение правое граничное условие

$$Z_{nm}(c) = C_1 \operatorname{ch}(\nu_{nm} c) + C_2 \operatorname{sh}(\nu_{nm} c) = \begin{cases} \psi_{5m}, \ n = 5, \\ 0, \ n \neq 5. \end{cases}$$

Тогда

$$C_2 = \begin{cases} \dfrac{\psi_{50}}{\sin(\nu_{50} c)} - \varphi_{50} \operatorname{cth}(\nu_{50} c), \ (n, m) = (5, 0), \\ \dfrac{\psi_{5m}}{\sin(\nu_{5m} c)}, \ n = 5, \\ -\varphi_{n0} \operatorname{cth}(\nu_{n0} c), \ m = 0, \\ 0, \ \text{иначе}. \end{cases}$$