Лабораторная N 1. Вариант 2.

1. Постановка задачи

Решить методом разделения переменных (МРП) смешанную задачу для колебания тонкой струны.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, \quad 0 < x < 2, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = x \\ u|_{x=0} = 2 + t \\ u_x - 2u|_{x=2} = t \end{cases}$$

Решение:

Приведем смеш. задачу с неоднор. граничн. усл-ми к задаче с однор. граничн. усл-ми.

Для этого решение задачи ищем в виде:

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где

$w(x,t) = ax^2 + bx + c$, a, b, c подлежат определению и

$$\begin{cases} w|_{x=0} = 2 + t \\ w_x - 2u|_{x=2} = t \end{cases}$$

Для определения a, b, c подставим $w(x,t)$ в граничные условия:

$w(0,t) = c = 2+t \Rightarrow c = 2+t$

$w_x - 2w|_{x=2} = 2a \cdot 2 + b - 2a \cdot 4 -$

$- b \cdot 2 - c = [c = 2+t] =$

$= -4a - b - 2 - t = t$

Пусть $a = 0 \Rightarrow$

$-b = 2t + 2 \Rightarrow b = -2(t+1)$

Тогда

$w(x,t) = -2(t+1)x + t + 2$

Теперь мы можем построить смешанную задачу с однор. гранич. усл-ми:

$v_{tt} - v_{xx} = x - w_{tt} + w_{xx} = x$

$v|_{t=0} = -w|_{t=0} = -(-2x+2) = -2(1-x) = 2(x-1)$

$v_t|_{t=0} = -w_t|_{t=0} = -(-2x+1) = 2x-1$

В итоге

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = x \\ v|_{t=0} = 2(x-1) \\ v_t|_{t=0} = 2x-1 \\ v|_{x=0} = 0 \\ v_x - 2v|_{x=2} = 0 \end{cases}$$

– смеш. задача с однор. гран. усл. и неоднор. ур-м

По МРП реш-е ищем в виде

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \text{ где}$$

$X_k(x)$ — собств. ф-ии, кот. явл. решениями задачи Штурма - Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(2) - 2X(2) = 0 \end{cases}$$

$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$ — общ. реш-е

$X(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

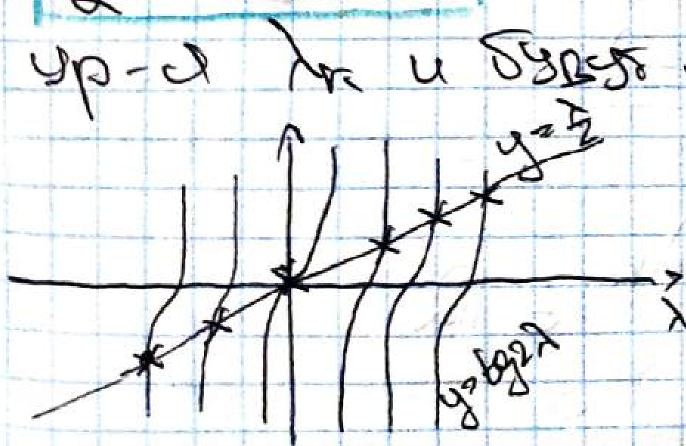
$X'(x) = [C_1 = 0] = \lambda C_2 \cos \lambda x$

$X'(2) - 2X(2) = \lambda C_2 \cos 2\lambda - 2C_2 \sin 2\lambda = 0 \Rightarrow$

$C_2(\lambda \cos 2\lambda - 2\sin 2\lambda) = 0$

т.к. $C_2 \neq 0$ (иначе будет тривиальное решение), то

$\boxed{\frac{\lambda}{2} = \operatorname{tg} 2\lambda}$. Решения этого нелинейного ур-я λ_k и будут являться собств. зн-ями:



„х" – корни λ_k

Решение ур-я можно произвести численными методами.

Далее предположим, что $\lambda_k \in \mathbb{R}$ — некоторые числа, $k = 1, 2, \ldots \Rightarrow$

$X_k(x) = \sin \lambda_k x$ — собств. ф-ии $\Rightarrow$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \lambda_k x$$

Подставим эту ф-ию в ур-е семи-задачи:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 T_k(t) \sin \lambda_k x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \lambda_k x, \qquad (1)$$

где
$$f_k = \frac{\int_0^2 x \sin \lambda_k x \, dx}{\int_0^2 \sin^2 \lambda_k x \, dx}$$

Для вычислений инт-ов можно исп. подход интегрир-я по частям. Но мы же ограничимся вычислением с помощью Wolfram Mathematica. Тогда

$$\int_0^2 x \sin \lambda_k x \, dx = \frac{\sin 2\lambda_k - 2\lambda_k \cos 2\lambda_k}{\lambda_k^2} \Rightarrow$$

$$\int_0^2 \sin^2 \lambda_k x \, dx = \frac{4\lambda_k - \sin 4\lambda_k}{4\lambda_k}$$

$$f_k = \frac{\sin 2\lambda_k - 2\lambda_k \cos 2\lambda_k}{\lambda_k^2 \left(1 - \frac{\sin 4\lambda_k}{4\lambda_k}\right)} \in \mathbb{R}$$

Теперь мы можем приравнять коэф-ы в рядах в (1) и получим

$T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = f_k$ – ОДУ-2

Реш-ем этого ОДУ будет ф-ия:

$$T_k(t) = C_1 \cos \lambda_k t + C_2 \sin \lambda_k t + \frac{f_k}{\lambda_k^2}$$

Подставим также начальные условия в ф-ию $U(x,t)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \lambda_k x = 2(x-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \lambda_k x, \text{ где}$$

$$\varphi_k = \frac{\int_0^2 2(x-1) \sin \lambda_k x \, dx}{\int_0^2 \sin^2 \lambda_k x \, dx} \Rightarrow [\text{Wolfram}] \Rightarrow$$

$$\varphi_k = \frac{-4 \cos \lambda_k (\lambda_k \cos \lambda_k - \sin \lambda_k)}{\lambda_k^2 \left(1 - \frac{\sin 4\lambda_k}{4\lambda_k}\right)} \in \mathbb{R} \rightarrow$$

$T_k(0) = \varphi_k$

Аналогично, $T_k'(0) = \psi_k$,

$$\psi_k = \frac{\int_0^2 (2x-1) \sin \lambda_k x \, dx}{\int_0^2 \sin^2 \lambda_k x \, dx} = \frac{2 \sin 2\lambda_k - \lambda_k - 3\lambda_k \cos 2\lambda_k}{\lambda_k^2 \left(1 - \frac{\sin 4\lambda_k}{4\lambda_k}\right)} \in \mathbb{R}$$

Таким образом, подставим в общее решение нач. усл-я и получим

$T_k(0) = C_1 + \frac{f_k}{\lambda_k^2} = \varphi_k \Rightarrow C_1 = \varphi_k - \frac{f_k}{\lambda_k^2}$

$T_k'(0) = \lambda_k C_2 = \psi_k \Rightarrow C_2 = \frac{\psi_k}{\lambda_k}$

В итоге решение исх. задачи равно

$$u(x,t) = -2(t+1)x + t + 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\varphi_k - \frac{f_k}{\lambda_k^2}\right)\cos\lambda_k t + \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t + \frac{f_k}{\lambda_k^2}\right]\sin\lambda_k x,$$

где числа $\lambda_k, f_k, \varphi_k, \psi_k$ вычисляются по определенным выше формулам.

2. Постановка задачи.

Решить МРП смешанную задачу для колебания прямоугольного контура.

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & 0<x<2,\ 0<y<5,\ t>0 \\ u_x|_{x=0} = u|_{x=2} = 0 \\ u|_{y=0} = u_y|_{y=5} = 0 \\ u|_{t=0} = x+y \\ u_t|_{t=0} = x-y \end{cases} \qquad (2)$$

Имеем смешанную задачу с однородн. граничн. усл. По МРП ищем решение в виде:

$u(x,y,t) = T(t)\,V(x,y)$, $T \not\equiv 0$, $V \not\equiv 0$

Подставим это выражение в ур-е задачи (2)

$T''V = \Delta V \cdot T$ => разделяем переменные

$\dfrac{\Delta V(x,y)}{V(x,y)} = \dfrac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2$ => получим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda^2 V = 0 \\ V_x\big|_{x=0} = V\big|_{x=2} = 0 \quad (3) \\ V\big|_{y=0} = V_y\big|_{y=5} = 0 \end{cases}$$

Для решения задачи (3) введем выражение для V:

Пусть $V(x,y) = X(x)\,Y(y)$, $X \not\equiv 0$, $Y \not\equiv 0$ =>

подставим: $X''Y + XY'' + \lambda^2 XY = 0$ =>

$\dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y} - \lambda^2 = -\mu^2$ => получим 2 задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \quad (4) \\ X(2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0 \quad (5) \\ Y'(5) = 0 \end{cases}$$

где $\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2$ (6)

Начнем с решения задачи (4).

Общее решение имеет вид

$X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$

Подставим условия:

$X'(x) = -\mu C_1 \sin \mu x + \mu C_2 \cos \mu x$

$X'(0) = \mu C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$X(2) = C_1 \cos 2\mu = 0 \Rightarrow [C_1 \neq 0] \Rightarrow$

$2\mu = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow$

$\mu_n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x$

Решим задачу (5):

$Y(y) = C_1 \cos \nu y + C_2 \sin \nu y$

$Y(0) = C_1 = 0$

$Y'(y) = \nu C_2 \cos \nu y$

$Y'(5) = \nu C_2 \cos 5\nu \Rightarrow [C_2 \neq 0] \Rightarrow$

$5\nu = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow$

$\nu_m = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, \ Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y$

Таким образом, можем построить

$$\lambda^2_{nm} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)^2$$

$$V_{nm}(x,y) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y$$

Из МРП у нас также построено уравнение

$$T''_{nm}(t) + \lambda^2_{nm} T_{nm}(t) = 0$$

Его общее решение

$$T_{nm}(t) = C^{(1)}_{nm} \cos \lambda_{nm} t + C^{(2)}_{nm} \sin \lambda_{nm} t$$

Таким образом, мы можем построить решение исходного уравнения

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[C^{(1)}_{nm} \cos \lambda_{nm} t + C^{(2)}_{nm} \sin \lambda_{nm} t\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y$$, где коэф-ы

мы можем получить из подстановки начальных условий:

$$C^{(1)}_{nm} = \frac{\int_0^2 \int_0^5 (x+y) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y \, dx\, dy}{\int_0^2 \int_0^5 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x \sin^2\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y \, dx\, dy} =$$

Посчитано в Wolfram

$$= \frac{7}{2} \cancel{\cos\left(\frac{\pi m}{5} - \frac{\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \csc^2\left(\frac{\pi m}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \sec^2\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$C_{nm}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_{nm}} \cdot \frac{\int_0^2\int_0^5 (x+y)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)x \sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}\right)y\,dx\,dy}{\int_0^2\int_0^5 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)x \sin^2\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}\right)y\,dx\,dy} =$$

$$= \cancel{\frac{3}{2}\cos\left(-\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi m}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{4}\right)}\csc^2\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}\right)\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$$

посчитано в Wolfram.

Дополнение к задаче 1.

Используя формулы тангенса половинного угла в коэфф-ах Фурье мы можем повысить вычислительную точность, избавившись от тригонометрических выражений.

$$f_k = \frac{\sin 2\lambda_k - 2\lambda_k\cos 2\lambda_k}{\lambda_k^2\left(1-\frac{\sin 4\lambda_k}{4\lambda_k}\right)} = \left[\sin\lambda = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\lambda}{2}+1}\right] =$$

$$= \frac{\cos 2\lambda_k\left(\operatorname{tg} 2\lambda_k - 2\lambda_k\right)}{\lambda_k^2\left(1-\frac{1}{4\lambda_k}\cdot\frac{2\operatorname{tg}2\lambda_k}{\operatorname{tg}^2 2\lambda_k+1}\right)} = \left[\begin{array}{l}\frac{\lambda_k}{2} = \operatorname{tg} 2\lambda_k \\ \text{из задачи Штурма}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{\cos 2\lambda_k\left(\frac{\lambda_k}{2} - 2\lambda_k\right)}{\lambda_k^2\left(1 - \frac{1}{4\lambda_k}\cdot\frac{2\cdot\frac{\lambda_k}{2}}{\frac{\lambda_k^2}{4}+1}\right)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\cos 2\lambda_k}{\lambda_k\left(1-\frac{1}{\lambda_k^2+4}\right)}$$

Как можно заметить, у нас осталось лишь одно тригоном. выражение вместо 3-ех.

Аналогично преобразуем φ_k, ϕ_k:

$$\varphi_k = \frac{-4\cos\lambda_k(\lambda_k\cos\lambda_k - \sin\lambda_k)}{\lambda_k^2\left(1-\frac{\sin 4\lambda_k}{4\lambda_k}\right)} =$$

$$= \frac{-4\cos\lambda_k(\lambda_k\cos\lambda_k - \sin\lambda_k)}{\lambda_k^2\left(1-\frac{\ell}{\lambda_k^2+4}\right)}$$

$$\phi_k = \frac{2\sin 2\lambda_k - \lambda_k - 3\lambda_k\cos 2\lambda_k}{\lambda_k^2\left(1-\frac{\sin 4\lambda_k}{4\lambda_k}\right)} =$$

$$= \frac{\cos 2\lambda_k\left(\lambda_k - \frac{\lambda_k}{\cos 2\lambda_k} - 3\lambda_k\right)}{\lambda_k^2\left(1-\frac{1}{\lambda_k^2+4}\right)} = \frac{-(2\cos 2\lambda_k+1)}{\lambda_k\left(1-\frac{1}{\lambda_k^2+4}\right)}$$