Наименее отклоняющийся от нуля многочлен

Условие

Среди многочленов вида

$$P_3(x) = ax^3 + 3x^2 + bx + c$$

найти наименее отклоняющийся от нуля на отрезке $[1, 5]$.

Алгоритм решения

Для решения данной задачи потребуются следующие формулы:

1. многочлены Чебышева $T_n(x)$, $n \geqslant 0$ определенные на отрезке $[-1, 1]$, задающиеся соотношениями

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots. \tag{1}$$

2. вид многочленов Чебышева на отрезке $[a, b]$

$$\hat{T}_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} T_{n+1}\Big(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\Big),\ x \in [a, b]. \tag{2}$$

Известно также, что многочлены Чебышева являются наименее отклоняющимися от нуля многочленами степени n на отрезке $[-1, 1]$ среди всех многочленов степени n заданных на этом отрезке.

Таким образом, нам необходимо, используя формулы (1) и (2), задать многочлен Чебышева на отрезке $[1, 5]$, после чего привести его к нужному виду (чтобы коэффициент при x^2 был равен 3).

Из соотношений (1) выясним, какой вид имеет многочлен Чебышева 3-ей степени:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^2 - 2x - x = 4x^3 - 3x.$$

Теперь в формулу (2) подставим отрезок $[a, b] = [1, 5]$:

$$T_{n+1}(x) = \frac{4^{n+1}}{2^{2n+1}} \cdot T_{n+1}\left(\frac{2x-6}{4}\right).$$

Подставим в формулу (2) $n = 2$:

$$\hat{T}_3(x) = \frac{4^3}{2^5} \cdot T_3\left(\frac{2x-6}{4}\right) = 2T_3\left(\frac{2x-6}{4}\right).$$

Найдем $T_3\left(\dfrac{2x-6}{4}\right)$:

$$T_3\left(\frac{2x-6}{4}\right) = 4\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) = 4\left(\frac{x^3}{8} - \frac{9x^2}{8} + \frac{27x}{8} - \frac{27}{8}\right) - \frac{3x}{2} + \frac{9}{2} =$$
$$= \frac{x^3}{2} - \frac{9x^2}{2} + \frac{24x}{2} - \frac{18}{2}.$$

Тогда

$$\hat{T}_3(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18, \quad x \in [1, 5].$$

Мы получили многочлен наименее отклоняющийся от нуля на отрезке $[1, 5]$. Чтобы он удовлетворял указанному виду, домножим его на $-\dfrac{1}{3}$:

$$P_3(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 6.$$