Методом наименьших квадратов в пространстве $L_2(p)[a,b]$, где $p(x) = 2$, $[a,b] = \left[-1, \frac{7}{2}\right]$, построить многочлен наилучшего приближения второй степени для функции $f(x)$, заданной таблично:,

x	0	1	3
$f(x)$	7	3	1

$p(x)=2$, $[a,b]=\left[-1,\frac{7}{2}\right]$ Билет 1

x	0	1	3
$f(x)$	7	3	1

$$\varphi(x)=C_2x^2+C_1x+C_0$$

$$\begin{cases} C_0S_0+C_1S_1+C_2S_2=m_0 \\ C_0S_1+C_1S_2+C_2S_3=m_1 \\ C_0S_2+C_1S_3+C_2S_4=m_2 \end{cases}$$

$$S_0=\sum_{k=0}^{3}p=2+2+2=6$$

$$S_1=\sum_{k=0}^{3}px_k=2\cdot0+2\cdot1+2\cdot3=8$$

$$S_2=\sum_{k=0}^{3}px_k^2=2\cdot0^2+2\cdot1^2+2\cdot3^2=20$$

$$S_3=\sum_{k=0}^{3}px_k^3=2\cdot0^3+2\cdot1^3+2\cdot3^3=56$$

$$S_4=\sum_{k=0}^{3}px_k^4=2\cdot0^4+2\cdot1^4+2\cdot3^4=164$$

$$m_0=\sum_{k=0}^{3}pf(x_k)=2\cdot7+2\cdot3+2\cdot1=22$$

$$m_1=\sum_{k=0}^{3}pf(x_k)x_k=2\cdot7\cdot0+2\cdot3\cdot1+2\cdot1\cdot3=12$$

$$m_2=\sum_{k=0}^{3}pf(x_k)x_k^2=2\cdot7\cdot0^2+2\cdot3\cdot1^2+2\cdot1\cdot3^2=24$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & 20 & 22 \\ 8 & 20 & 56 & 12 \\ 20 & 56 & 164 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 10 & 11 \\ 4 & 10 & 28 & 6 \\ 10 & 28 & 82 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 10 & 11 \\ 2 & 5 & 14 & 3 \\ 5 & 14 & 41 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 8 \\ 0 & 7 & 22 & -13 \\ 0 & 5 & 17 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 17 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \varphi(x)=x^2-5x+7$$

5. Построить интерполяционное приближение таблично заданной функции $f(x)$ системой функций $\varphi_i(x) = e^{ix}$, $i = 0, 1, \ldots$ по таблице

x	0	1
$f(x)$	2	3

$\varphi_i(x) = e^{ix}$, $i = 0, 1 \ldots$

x	0	1
$f(x)$	2	3

Строим мн-ен

$\varphi(x) = a_0 + a_1 e^x$

Чтобы он был интерполяц., необх. совпадение в узлах:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 e^0 = 2 \\ a_0 + a_1 e^1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = 2 \\ a_0 + a_1 e = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{1}{e-1} \Rightarrow a_0 = 2 - \frac{1}{e-1} = \frac{2e-3}{e-1} \Rightarrow$$

$\varphi(x) = \dfrac{2e-3}{e-1} + \dfrac{e^x}{e-1}$ - интерполяц. мн-ен.

1. Применить к решению системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 + 2y^3 - z^3 = -11, \\ xyz = 6 \end{cases}$$

метод Гаусса-Зейделя, для внутренних итераций используя метод Ньютона.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + 2y^3 - z^3 = -11 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1}^2 + y_k^2 + z_k^2 - 14 = 0 \\ x_{k+1}^3 + 2y_{k+1}^3 + z_k^2 + 11 = 0 \\ x_{k+1} y_{k+1} z_{k+1} - 6 = 0 \end{cases}$$

$$x_{k+1,s+1} = x_{k+1,s} - \frac{x_{k+1,s}^2 + y_k^2 + z_k^2 - 14}{2x_{k+1,s}}$$

$$y_{k+1,s+1} = y_{k+1,s} - \frac{x_{k+1}^3 + 2y_{k+1,s}^3 - z_k^3 + 11}{6y_{k+1,s}}$$

$$z_{k+1,s+1} = z_{k+1,s} - \frac{x_{k+1} y_{k+1} z_{k+1,s} - 6}{x_{k+1} y_{k+1}}$$

$x^3-6x^2+11x-6=0$, м. Лобачевского

	0	1
a_0	1	1
a_1	-6	-14
a_2	11	49
a_3	-6	-36
x_1	6	$\sqrt{14}$
x_2	$\frac{11}{6}$	$\frac{7}{\sqrt{14}}$
x_3	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{7}$

$x_1=-\frac{a_1}{a_0}=6$, $x_2=-\frac{a_2}{a_1}=\frac{11}{6}$, $x_3=-\frac{a_3}{a_2}=\frac{6}{11}$

$a_0^{(1)}=a_0^2=1$

$a_1^{(1)}=2a_0a_2-a_1^2=22-36=-14$

$a_2^{(1)}=-2a_1a_3+a_2^2=-72+121=49$

$a_3^{(1)}=-a_3^2=-36$

$x_1^{(1)}=\sqrt{-\frac{a_1^{(1)}}{a_0^{(1)}}}=\sqrt{14}$

$x_2^{(1)}=\sqrt{-\frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}}}=\sqrt{\frac{49}{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$x_3^{(1)}=\sqrt{-\frac{a_3^{(1)}}{a_2^{(1)}}}=\sqrt{\frac{36}{49}}=\frac{6}{7}$

Иссл-ть на уст. неявн. м. трапеций

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(f_j + f_{j+1}\right)$$

Модельное ур-е $u'(x) = \lambda u(x)$, $\operatorname{Re}\lambda < 0 \Rightarrow$

$f_j = \lambda y_j \Rightarrow$ подставляем

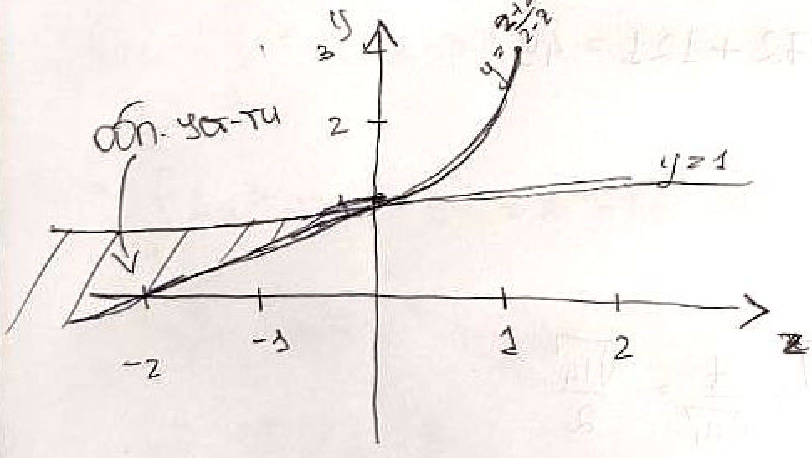
$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(\lambda y_j + \lambda y_{j+1}\right) = [h\lambda = z] = y_j\left(1 + \frac{z}{2}\right) + \frac{z}{2} y_{j+1} \Rightarrow$$

$$y_{j+1}\left(1 - \frac{z}{2}\right) - y_j\left(1 + \frac{z}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{строим характ. ур-е}$$

Условие уст-ти:

$$q\left(1 - \frac{z}{2}\right) - \left(1 + \frac{z}{2}\right) = 0 \Rightarrow |q| = \left|\frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}\right| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{2 + z}{2 - z}\right| \leq 1$$



Интервал устойчивости: $(-\infty, 0) \Rightarrow$

$\operatorname{Re} z < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda h < 0 \Rightarrow$ если $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то

h любое $\Rightarrow$ метод A-устойчивый

Методом Ритца и базиса алгебраических функций построить $u1(x)$:

$(xu'(x))'-u(x)=2x$
$u(1)=0$
$u(2)=0$
$1 \le x \le 2$

$$\begin{cases} (x u'(x))' - u(x) = 2x \\ u(1) = u(2) = 0 \\ x \in [1,2] \end{cases}$$

Ищем $u_1(x) = a_1 \varphi_1(x)$. Причем определим

$\varphi_1(x) = (x-a)(x-b) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

Для нахождения a_1 сост. ур-е:

$C_{11} a_1 = d_1$, где

$$C_{11} = \int_1^2 k(x)\varphi_1' \cdot \varphi_1' + q(x)\varphi_1 \cdot \varphi_1 \, dx$$

$$d_1 = -\int_1^2 f(x)\varphi_1(x)dx$$

Из исх. ур-я $k(x) = x$, $q(x) = 1$, $f(x) = 2x \Rightarrow$

$$C_{11} = \int_1^2 x \cdot \overbrace{(2x-3)(2x-3)}^{4x^2-12x+9} + 1 \cdot (x^2-3x+2)^2 dx =$$

$$= \int_1^2 4x^3 - 12x^2 + 9x + x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 12x + 4x^2 + 4 \, dx =$$

$$= \int_1^2 x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 4 \, dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \Big|_1^2 = \frac{8}{15}$$

$$= \cancel{\frac{31}{5} - \frac{30}{4} - \frac{7}{3} + \frac{9}{2}} \Rightarrow$$

$$d_1 = -\int_1^2 2x(x^2-3x+2)\,dx = -\frac{2x^4}{4} + 2x^3 - 2x^2 \Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{d_1}{C_{11}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8} = \frac{15}{16} \Rightarrow u_1(x) = \frac{15}{16}(x-1)(x-2)$$

Задача № 3

Выбрать параметр τ из условия сходимости итерационного процесса

$$x^{k+1} = x^k + \tau f(x^k), \qquad k = 0,1 \ldots,$$

решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$, если $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

$x^{k+1} = x^k + \tau f(x^k)$, $k = 0, 1, \dots$

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

$\varphi(x) = x + \tau(x^2 - 5x + 6)$

Необх. отделить корень

Пусть $[a, b] = [1, \frac{12}{5}]$

$f(1) = 1 - 5 + 6 = 2 > 0$

$f(\frac{12}{5}) = \frac{144}{25} - 12 + 6 = \frac{144}{25} - \frac{150}{25} = \frac{-6}{25} < 0$ $\Rightarrow$ на $[1, \frac{12}{5}]$ $\exists$ корни

$f'(x) = 2x - 5 < 0 \ \forall x \in [1, \frac{12}{5}] \Rightarrow \exists!$ корень

Дост. усл-е сх-ти:

$|\varphi'(x)| < 1 \ \forall x \in [1, \frac{12}{5}]$

$|1 + \tau(2x - 5)| < 1 \Rightarrow -2 < \tau(2x-5) < 0 \Rightarrow$

$0 < \tau < \frac{-2}{2x-5} \leq \frac{-2}{2 \cdot \frac{12}{5} - 5} = 10 \Rightarrow$

$\tau \in (0, 10)$.

Пусть $\tau = 5 \Rightarrow$

$x^{k+1} = x^k + 5((x^k)^2 - 5x^k + 6)$

Задача

Найти приближенную погрешность при f(x)=0. Методом хорд найти корень f(x) = e^(-x)-lnx, выбрать x0,x1, отрезок, проделать одну итерацию метода хорд

Метод хорд:

$f(x) = e^{-x} - \ln x = 0$

Отделим корни:

Пусть $[a, b] = [1, 2]$

$f(1) = e^{-1} > 0$ $\Rightarrow$ на $[1,2]$ $\exists$ корень

$f(2) = e^{-2} - \ln 2 \approx -0.5 < 0$

$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x} < 0 \ \forall x \in [1,2] \Rightarrow$ на $[1,2]$ $\exists!$ корень

Метод хорд: $x^{k+1} = x^k - f(x^k)\dfrac{x^k - x^0}{f(x^k) - f(x^0)}$

Необх. знать x^0, x^1

Пусть $x^0 = 1$.

Найдем x^1 по м. Ньютона: $x^1 = x^0 - \dfrac{f(x^0)}{f'(x^0)} =$

$= 1 - \dfrac{e^{-1}}{-e^{-1} - 1} \approx 1.27 \Rightarrow$

По методу хорд

$$x^2 = x^1 - f(x^1)\frac{x^1 - x^0}{f(x^1) - f(x^0)}, \quad f(x^0) = e^{-1} \approx 0.37$$

$f(x^1) = e^{-1.27} - \ln 1.27 \approx 0.04 \Rightarrow$

$$x^2 = 1.27 - 0.04\,\frac{0.27}{-0.33} \approx 1.3$$

Построить аналог простейшей формулы трапеций для вычисления интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

[illegible]

Построить анал. ф-лы трапеций

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Используем КФ НАСТ, в частности, КФ Эрмита

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

Метод трапеций строится по 2-ум узлам $\Rightarrow$

Выберем их из $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi$, $n = 1$ - число разбиений

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_k = \frac{\pi}{n+1} \Rightarrow A_0 = A_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{2} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Решить методом Галеркина ОДУ:
u'' + xu' - u = -2
u(0) = 0,
u(1) = 0;
Решить в данном случае - найти приближение u_1 по алгебраическому базису

12:15 AM

$u''(x) + x u'(x) - u = -2$

$u(0) = u(1) = 0$

Возьмем базисную ф-ию

$\varphi_1(x) = (x-a)(x-b) = x(x-1) = x^2 - x$

Решение ищем в виде

$u_1(x) = a_1 \varphi_1(x) = a_1(x^2 - x)$

Для отыскания a_1 строим ур-е:

$C_{11} a_1 = d_1$, где

$C_{11} = \int_a^b \varphi_1'' + p\varphi_1' + q\varphi_1 \, dx, \quad d_1 = \int_a^b f(x)\varphi_1(x)\, dx$

Из постановки задачи

$p(x) = x, \quad q(x) = -1, \quad f(x) = 2 \Rightarrow$

$C_{11} = \int_0^1 2 + x\cdot(2x-1) - 1\cdot(x^2 - x)\, dx =$

$= \int_0^1 2 + 2x^2 - x - x^2 + x \, dx = \int_0^1 x^2 + 2 \, dx = \frac{x^3}{3} + 2x \Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$

$d_1 = \int_0^1 2\cdot(x^2 - x)\, dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow$

$\frac{7}{3} a_1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{7} \Rightarrow$

$u_1(x) = -\frac{1}{7} x(x-1)$

x^3 - приблизить полиномом первой степени на [0,4] по наилучшим узлам, оценить погрешность

$f(x) = x^3$, $[a, b] = [0, 4]$

Наилучшие узлы — корни многочл. Чебышева.
Для полинома 1-ой степени треб-ся 2 узла $\Longrightarrow$

$$\tilde{x}_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad n = 1$$

$$\tilde{x}_0 = 2 + 2\cos\frac{\pi}{4} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\tilde{x}_1 = 2 + 2\cos\frac{3\pi}{4} = 2 - \sqrt{2}$$ $\Longrightarrow$ перенумеруем.

$x_0 = 2 - \sqrt{2}$, $x_1 = 2 + \sqrt{2}$

Строим интерп. мн-ен Ньютона:

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1)$$

$$f(x_0) = (2 - \sqrt{2})^3 = 8 - 12\sqrt{2} + 6\cdot\cancel{\sqrt{2}}\,2 - 2\sqrt{2} = 20 - 14\sqrt{2}$$

$$f(x_1) = (2 + \sqrt{2})^3 = 8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} = 20 + 14\sqrt{2}$$

Разделен. разность: $f(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} =$

$$= \frac{20 + 14\sqrt{2} - 20 + 14\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}} = \frac{28\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 14 \Longrightarrow$$

$$P_1(x) = 20 - 14\sqrt{2} + (x - (2 - \sqrt{2}))\cdot 14 =$$

$$= 20 - 14\sqrt{2} + 14x - 28 + 14\sqrt{2} = 14x - 8.$$

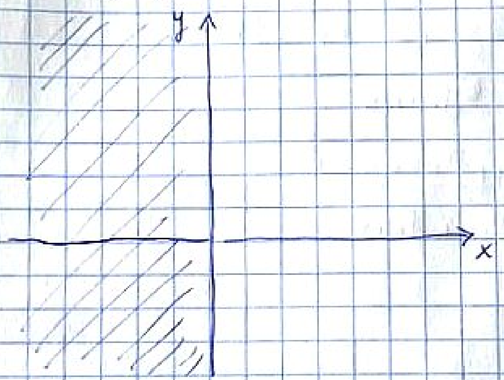
Задача (уст-сть неявного метода трапеций)

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f_j + f_{j+1})$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{z}{2} y_j + \frac{z}{2} y_{j+1}$$

$$q(2-z) = (2+z)$$

$$|q| = \left| \frac{2+z}{2-z} \right| \le 1 \qquad |2+z| \le |2-z|$$



Неявный метод трапеций — A-устойчивый численный метод

Для функции $f(x) = e^x + x^2$, где $x \in [0,2]$, на равномерной сетке из трех узлов методом моментов построить интерполяционный кубический сплайн, на концах которого заданы наклоны. Построить систему для определения моментов и записать формулу для приближенного вычисления функции $f(x)$ при $x \in [x_0, x_1]$.

$f(x) = e^x + x^2$, $f'(x) = e^x + 2x$

$x \in [0, 2]$

3 узла $\Longrightarrow$ $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

x	0	1	2
$f(x)$	1	$e+1$	e^2+4
$f'(x)$	1	—	e^2+4

Коэф-ы сплайна ищем по формуле:

$$\begin{cases} \frac{h_1}{6} M_0 + \frac{h_1+h_2}{3} M_1 + \frac{h_2}{6} M_2 = \frac{f_2 - f_1}{h_2} - \frac{f_1 - f_0}{h_1} \\ 2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - f'(a)\right) \\ M_1 + 2M_2 = \frac{6}{h_2}\left(f'(b) - \frac{f_2 - f_1}{h_2}\right) \end{cases}$$

$h_1 = h_2 = 1$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = 6 \cdot (e - 1) \\ \frac{M_0}{6} + \frac{2}{3} M_1 + \frac{1}{6} M_2 = e^2 + 4 - e - 1 - e \\ M_1 + 2M_2 = 6\left(e^2 + 4 - (e^2 + 4 - e - 1)\right) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 6e-6 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & e^2-2e+3 \\ 0 & 1 & 2 & e+1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$ решаем и находим M_0, M_1, M_2

Методом механических квадратур решить интегральное уравнение (использовать формулу наивысшей алгебраической степени точности с одним узлом)

$$u(x) - 2\int_0^1 \frac{u(s)}{2 + x + s}\,ds = 1.$$

$$u(x) - 2\int_0^1 \frac{u(s)}{2+x+s}\,ds = 1$$

Исп. ф-лы средних прямоуг.

Возьмем узел – середина $[0,1]$, т.е.

$x_0 = \frac{1}{2}$

По ф-ле ср. прямоуг:

$$y_i - \lambda(b-a)K\left(x_i, \frac{a+b}{2}\right)y\left(\frac{a+b}{2}\right) = f_i \Rightarrow$$

Подставляем известные значения

$$y_0 - 2\cdot 1\cdot \frac{1}{2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\cdot y_0 = 1 \Rightarrow$$

$$y_0\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1 \Rightarrow \quad y_0 = 3 \Rightarrow$$

~~$y(x) = 1 +$~~

По ф-ле $\quad y(x) = f(x) + \lambda\sum_{k=0}^{n}{}' A_k K(x, x_k) y_k \Rightarrow$

подставляем

$$y(x) = 1 + \underline{2}\cdot\frac{1}{2+x+x_0}\,y_0 = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}+x}\,3\cdot 2$$