Минимальная степень интерполяционного многочлена

Условие

Определить минимальную степень интерполяционного многочлена, гарантирующего при оптимальном распределении узлов на отрезке $[2;5]$ для интерполяционной функции $f(x) = \cos 2x$ величину погрешности $\varepsilon \leqslant 10^{-5}$. Указать соответствующее распределение узлов.

Алгоритм решения

Для решения данной задачи потребуются следующие формулы:

1. пусть функция $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ и для нее выполняется неравенство
$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M, \quad x \in [a,b],$$
тогда погрешность интерполирования может быть оценена сверху следующим образом
$$|r_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \tag{1}$$

2. значения узлов при оптимальном распределении на отрезке $[a,b]$
$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)},\ k = \overline{0,n}. \tag{2}$$

Для отыскания степени n многочлена интерполирования, будем решать неравенство
$$|r_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \leqslant \varepsilon.$$

Из-за того, что n фигурирует и в качестве факториального значения, и в качестве степени, то решать уравнение придется подбором.

Пусть $n = 2$, тогда
$$|r_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!} \cdot \frac{(5-2)^3}{2^5} \leqslant 10^{-5}, \quad |f^{(3)}(x)| \leqslant M, \quad x \in [2,5]$$
Оценим значение третьей производной от исходной функции:
$$f'(x) = -2\sin 2x, \quad f''(x) = -4\cos 2x, \quad f'''(x) = 8\cos 2x.$$
Сделаем грубую оценку производной:
$$|f'''(x)| = |8\cos 2x| \leqslant 8 = M, \quad x \in [2;5].$$
Тогда проверим, верное ли равенство:
$$\frac{8}{6} \cdot \frac{27}{32} \leqslant 10^{-5}.$$
Очевидно равенство не выполняется.

Пусть $n = 3$:
$$|r_3(x)| \leqslant \frac{M}{4!} \cdot \frac{(5-2)^4}{2^7} \leqslant 10^{-5}, \quad |f^{(4)}(x)| \leqslant M, \quad x \in [2,5]$$

$$|f^{(4)}(x)| = |-16\sin 2x| \leqslant 16 = M, \quad x \in [2;5].$$
$$\frac{16}{24} \cdot \frac{81}{128} \leqslant 10^{-5}.$$

Равенство не выполняется.

Далее избежим оценки производной, считая, что

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 2^{n+1}.$$

Тогда

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} \leqslant \varepsilon.$$

И так далее подставляем $n = 4, 5, ..., 9$. При $n = 11$ имеем

$$|r_{10}(x)| \leqslant \frac{1}{11!} \cdot \frac{3^{11}}{2^{10}} \approx 4.33 \cdot 10^{-6}.$$

Таким образом, минимальная степень интерполяционного многочлена равна 10.

Укажем при этом распределение узлов по формуле (2):

$$x_k = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{22}, \ k = \overline{0, 11}.$$