Вариант № 10

1. Определить, с каким порядком аппроксимирует разностный оператор $L_h u(x) = \left(a(x) u_{\bar{x}}(x)\right)_x$ аппроксимирует дифференциальный оператор $Lu(x) = \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right)$, если $a(x) = \sqrt{k(x-h)k(x)}$.

2. Путем повышения порядка аппроксимации на минимальном шаблоне разностной схемы

$$\begin{cases} \left(k(x-0.5h)y_{\bar{x}}\right)_x - q(x)y = -f(x), \ x \in \omega_h, \\ y(0) = \mu_0, \\ y_{\bar{x}}(1) = \mu_1, \end{cases}$$

аппроксимирующей задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right) - q(x)u(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = \mu_0, \\ \dfrac{du(1)}{dx} = \mu_1, \end{cases}$$

построить разностную схему второго порядка аппроксимации.

3. Методом Ритца построить разностную схему, аппроксимирующую задачу

$$\begin{cases} \left((9 - x^2)u'(x)\right)' - \dfrac{1}{\sin^2 x}u(x) = -\cos 2x, \quad 1 < x < 2, \\ u'(1) = 1, \\ u(2) = 0.5 \end{cases}$$

4. Исследовать с помощью метода разделения переменных устойчивость по начальным данным разностной схемы

$$\begin{cases} y_t + \dfrac{\alpha\tau}{h} y_{tx} = y_{\bar{x}x}, \ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \\ y(1,t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \end{cases}$$

аппроксимирующей задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(1,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

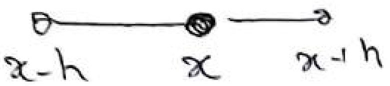
Вар. 10. Бовт 7 группа

(2). Краев. диф. задача

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}(x)\right) - q(x)u(x) = -f(x), \quad 0<x<1 \\ u(0) = \mu_0 \\ \frac{du(1)}{dx} = \mu_1 \end{cases}$$

Зададим сетку узлов $\omega_h = \{x_i = ih,\ i=\overline{0,N},\ h=\frac{1}{N}\}$

и шаблон $Ш(x) = \{x-h, x, x+h\}$



На этой сетке строим РС

$$\begin{cases} \left(k(x-\frac{h}{2})y_{\bar{x}}\right)_x - q(x)y = -f(x), \quad x \in \omega_h \\ y(0) = \mu_0 \\ y_{\bar{x}}(1) = \mu_1 \end{cases}$$

Исследуем порядок аппроксимации РС:

$$\psi(x) = \left(k(x-\frac{h}{2})u_{\bar{x}}\right)_x - q(x)u + f(x) =$$

$$= (k(x)u'(x))' - \frac{h^2}{8}k''(x)u''(x) + O(h^3) -$$

$$- q(x)u + f(x) = -\frac{h^2}{8}k''(x)u''(x) + O(h^3) = O(h^2)$$

$\nu(0) = u(0) - \mu_0 = 0$ - аппрокс. точная

Для аппрокс. 2-го прав. усл. запишем в виде

$y_{\bar{x}}(1) = \bar{\mu}_1 + y(1)\bar{\sigma}_1$, где $\begin{cases} \bar{\mu}_1 \\ \bar{\sigma}_1 \end{cases}$ - это параметры

Тогда $\nu(1) = u_{\bar{x}}(1) - \overline{\mu}_1 = \frac{du(1)}{dx} + \frac{h}{2}\cdot\frac{d^2u(1)}{dx^2} - \overline{\mu}_1 + O(h^2) - \overline{\sigma}_1 u(1) =$

$= \mu_1 + \frac{h}{2}\cdot u''(1) - \overline{\mu}_1 + O(h^2) - \overline{\sigma}_1 u(1) =$

$= \left[\begin{array}{l} k'u' + ku'' - qu = -f. \text{ нужно его выполн. в } x=1, \text{ т.е.} \\ \text{тогда } u''(1) = q(1)u(1) - k'(1)u'(1) - f(1) \Rightarrow \\ \Rightarrow u''(1) = \frac{q(1)u(1)}{k(1)} - \frac{k'(1)\cdot\mu_1}{k(1)} - \frac{f(1)}{k(1)} \end{array}\right] \Rightarrow$

$\overline{\sigma}_1 = \frac{q(1)}{k(1)}$

$\Rightarrow \overline{\mu}_1 = \mu_1 + \frac{h}{2}\left[\cancel{\frac{q(1)u(1)}{k(1)}} - \frac{f(1)}{k(1)} - \frac{k'(1)\mu_1}{k(1)}\right].$

Таким образом, взяв $y_{\bar{x}}(1) = \overline{\mu}_1 + \overline{\sigma}_1 u(1)$, получим аппрокс. $\nu(1) = O(h^2) \Rightarrow$ общий порядок аппрокс. $\psi(x) = O(h^2)$

3) $\begin{cases} \left[(9-x^2)u'(x)\right]' - \frac{u(x)}{\sin^2 x} = -\cos 2x, \quad 1 < x < 2 \\ u'(1) = 1 \\ u(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$

По методу Ритца РС на сетке ω_h имеет вид

$\begin{cases} \alpha_{ii-1}y_{i-1} + \alpha_{ii}y_i + \alpha_{ii+1}y_{i+1} = \beta_i, \ i = 1, N-1 \\ \alpha_{00}y_0 + \alpha_{01}y_1 = \beta_0 \\ \alpha_{NN-1}y_{N-1} + \alpha_{NN}y_N = \beta_N \end{cases}$, где

$\alpha_{ii} = \frac{1}{h^2}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} 9 - x^2\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x-x_{i-1})^2}{\sin^2 x}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1}-x)^2}{\sin^2 x}dx\right] =$

$= \frac{1}{h^2}\left[\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} + (x_i - x_{i-1})\cdot\left(\frac{(x_i - x_{i-1} - \frac{h}{2})^2}{\sin^2(x_i - \frac{h}{2})} + \frac{(x_{i+1} - x_i - \frac{h}{2})^2}{\sin^2(x_i + \frac{h}{2})}\right)\right]$

по ф-ле средних прямоуг.

$$B_i = \frac{1}{h}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos 2x\,(x - x_{i-1})\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \cos 2x\,(x_{i+1}-x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\left(\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}x_{i-1}\sin 2x\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} +\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{2}x_{i+1}\sin 2x\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}\right]$$

$$d_{00} = \frac{1}{h^2}\left[\int_0^h 9 - x^2\,dx + \int_0^h \frac{(2x-h)^2}{\sin^2 x}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h + h\,\frac{\left(\frac{h}{2}-h\right)^2}{\sin^2\frac{h}{2}}\right]$$

$$d_{NN} = \frac{1}{h^2}\left[\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1-h}^{h} + (2h-1)\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-1+h\right)^2}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)}\right] + 1$$

$$B_0 = \frac{1}{h}\left[\int_0^h \cos 2x\,(h-x)\,dx + 1\right] =$$

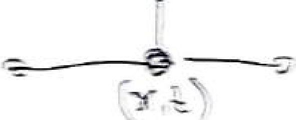
$$= \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{2}h\sin^2 x\Big|_0^h + 1\right]$$

$$B_N = \frac{1}{h}\left[\int_{1-h}^{h} + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{2}(1-h)\sin^2 x\Big|_{1-h}^{h} + 1\right]$$

4) Дана РС дифф. задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0,\ t > 0 \\ u(1,t) = 0,\ t > 0 \end{cases}$$

Для неё РС на сетке $\omega_{h\tau}$ с шаблоном



$$\begin{cases} y_t + \frac{a\tau}{h} y_{t\bar{x}} = y_{\bar{x}x}, \ (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ y(x,0) = u_0(x), \ x \in \overline{\omega}_h \\ y(0,t) = 0, \ t \in \omega_\tau \\ y(1,t) = 0, \ t \in \omega_\tau \end{cases},$$

где a – некоторый параметр.

Запишем разн. ур-е в индексн. форме

$$\frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + \frac{a\tau}{h} \cdot \frac{y_k^{j+1} - y_{k-1}^{j+1} - y_k^j - y_{k-1}^j}{h\tau} = \frac{y_{k+1}^j - 2y_k^j + y_{k-1}^j}{h^2}$$

По методу гармоник заменяем $y_k^j = q^j e^{ik\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi) \Rightarrow$

$$\frac{q-1}{\tau} + \frac{a}{h^2}\left(q - qe^{-i\varphi} - 1 - e^{-i\varphi}\right) = \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{h^2}$$

$$q - 1 + aq - aqe^{-i\varphi} - a - ae^{-i\varphi} = \tau\left(e^{-i\varphi} - 2 + e^{i\varphi}\right)$$

$$q = \frac{\tau\left(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}\right) + a\left(1 + e^{-i\varphi}\right) + 1}{1 + a + ae^{-i\varphi}} =$$

$$= \frac{2\tau(\cos\varphi - 1) + a(1 + \cos\varphi - i\sin\varphi) + 1}{1 + a + a\cos\varphi - ai\sin\varphi}$$

$$|q|^2 = \frac{\left(2\tau(\cos\varphi - 1) + a(1+\cos\varphi) + 1\right)^2 + (a\sin\varphi)^2}{(1 + a + a\cos\varphi)^2 + (a\sin\varphi)^2} \leq 1$$

$$(2\tau(\cos\varphi - 1))^2 + \cancel{(a(1+\cos\varphi))^2} + 1 + 4\tau a(\cos\varphi + 1)(\cos\varphi - 1) +$$

$$+ 4\tau(\cos\varphi - 1) + \cancel{2a(1+\cos\varphi)} \leq 1 + \cancel{(a(1+\cos\varphi))^2} + \cancel{2a(1+\cos\varphi)}$$

$$a \leq \frac{1 - (2\tau(\cos\varphi - 1))^2 - 4\tau(\cos\varphi - 1)}{4\tau(\cos\varphi + 1)(\cos\varphi - 1)} \Rightarrow$$

(1)

$$\Rightarrow \quad a \le \frac{(2\tau(\overset{\le 1}{\cos\varphi} - 1))^2 - 1 - 4\tau(1-\overset{\le 1}{\cos\varphi})}{4\tau(\underset{\le 2}{1+\cos\varphi})(\underset{\le 1}{1-\cos\varphi})} \le$$

$$\le \frac{4\tau^2 - 1 - 4\tau}{8\tau} \, *$$

Т.е. исх. РС будет устойчива, если выбирать

$$a \le \frac{4\tau^2 - 4\tau - 1}{8\tau}$$

(1). $L_h u = (a(x) u_{\bar{x}}(x))_x$

$$L u(x) = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right)$$

$$a(x) = \sqrt{k(x-h)k(x)}$$

$L_h u$

$$\psi(x) = L_h u - Lu = \left(\sqrt{k(x)k(x-h)}\, u_{\bar{x}}(x)\right)_x - (ku')' =$$

$$= \left(\sqrt{k(x)k(x-h)}\, \frac{u(x) - u(x-h)}{h}\right)_x - (ku')' =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{\sqrt{k(x+h)k(x)}\, u(x+h) - \sqrt{k(x)k(x-h)}\, u(x)}{h} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{k(x)k(x+h)}\, u(x) - \sqrt{k(x-h)k(x)}\, u(x-h)}{h}\right) - (ku')' =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\sqrt{k(x)}\left[\left(\sqrt{k(x)} + h(\sqrt{k(x)})' + \frac{h^2}{2}(\sqrt{k(x)})'' + \dots\right)\left(u + hu' + \frac{h^2}{2}u'' + \dots\right) - \right.\right.$$

$$- \left(\sqrt{k} + h(\sqrt{k})' + \frac{h^2}{2}(\sqrt{k})'' + \dots\right)u - \left(\sqrt{k} + h(\sqrt{k})' + \frac{h^2}{2}(\sqrt{k})'' + \dots\right)u +$$

$$\left.\left. + \left(\sqrt{k} - h(\sqrt{k})' + \frac{h^2}{2}(\sqrt{k})'' + \dots\right)\left(u - hu' + \frac{h^2}{2}u'' + \dots\right)\right]\right) - k'u' - ku'' = 5$$

$$= \frac{\sqrt{k}}{h^2}\Big(u\sqrt{k} + hu'\sqrt{k} + \frac{h^2}{2}u''\sqrt{k} + hu(\sqrt{k})' + h^2u'(\sqrt{k})' + \frac{h^3}{2}u''(\sqrt{k})' +$$

$$+ \frac{h^2}{2}(\sqrt{k})''u + \frac{h^3}{2}(\sqrt{k})''u' + \frac{h^4}{4}(\sqrt{k})''u'' - u\sqrt{k} - hu(\sqrt{k})' -$$

$$- \frac{h^2}{2}(\sqrt{k})''u - u\sqrt{k} - hu(\sqrt{k})' - \frac{h^2}{2}u(\sqrt{k})'' +$$

$$+ u\sqrt{k} - hu'\sqrt{k} + \frac{h^2}{2}u''\sqrt{k} - hu(\sqrt{k})' + h^2u'(\sqrt{k})' -$$

$$- \frac{h^3}{2}u''(\sqrt{k})' + \frac{h^2}{2}(\sqrt{k})''u - \frac{h^3}{2}(\sqrt{k})''u' + \frac{h^4}{4}(\sqrt{k})''u''\Big) -$$

$$- k'u' - ku'' = \frac{\sqrt{k}}{h^2}\cdot\frac{2h^4}{4}u''(\sqrt{k})'' + O(h^3) =$$

$$= O(h^2) \Rightarrow$$

порядок аппроксимации второй