Лабораторная работа 1: Булевы функции

Вариант 3

Подготовил Бовт Тимофей, 9 группа.

1. Построить д.н.ф. и к.н.ф функции:
   $f(\tilde{x}^3) = \overline{(x_1\bar{x}_2 \vee x_3)} \sim (x_1 \to x_2\bar{x}_3)$

   Решение:

   $f(\tilde{x}^3) = \overline{(x_1\bar{x}_2 \vee x_3)} \sim (x_1 \to x_2\bar{x}_3) =$

   $((x_1 \vee \bar{x}_2x_3)\overline{(\bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_3)}) \vee (\overline{(x_1 \vee \bar{x}_2x_3)}(\bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_3)) =$

   $((x_1 \vee \bar{x}_2x_3)(x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3)) \vee ((\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_3)) =$

   $x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 =$

   $x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 =$

   $x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 = x_1x_3 \vee \bar{x}_3 = x_1 \vee \bar{x}_3$

   Полученная конъюнкция является как д.н.ф, так и к.н.ф.

   Ответ: $x_1 \vee \bar{x}_3$

2. Представить в совершенной д.н.ф. функцию

   (a) $f(\tilde{x}^3) = (01111000)$

   Решение:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

   Ответ: $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$

   (b) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\overline{x_1x_2} \vee x_3)$

   Решение:

$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\overline{x_1 x_2} \vee x_3) =$
$(x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 =$
$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$

Ответ: $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$

3. Представить в виде совершенной к.н.ф. функцию
   $f(\tilde{x}^2) = x_1 \downarrow x_2$

Решение:

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Ответ: $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2)$

4. Найти полином Жегалкина для функции
   (a) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \vee x_2$

Решение:

$$f(\tilde{x}^2) = x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2} = \overline{(1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2)} = \overline{1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2} = x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2$$

Ответ: $x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2$

   (b) $f(\tilde{x}^4) = (1000000000000001)$

Решение: (по методу разложению вектора при помощи формулы $(\alpha,\, \alpha \oplus \beta)$)

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1	(1,1) (0,0) (0,0) (0,0) (0,0) (0,0) (0,0) (0,1)	(1,1,1,1) (0,0,0,0) (0,0,0,0) (0,0,0,1)	(1,1,1,1,1,1,1,1) (0,0,0,0,0,0,0,1)	(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0)

Где итоговое множество - коэффициенты перед членами Полинома Жегалкина, начиная с a_0 и так далее. Соотвественно...

Ответ: $1 \oplus x_4 \oplus x_3 \oplus x_3x_4 \oplus x_2 \oplus x_2x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_3x_4 \oplus x_1 \oplus x_1x_4 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3$

5. Найдите длину совершенной д.н.ф. функции

$$f(\tilde{x}^n) = \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i \to x_j), n \geqslant 2$$

Решение:

Способ не совсем комбинаторный, скорее прослеживание аналогии...

Если подставить вместо n значение 2, то получим следующее

$f(\tilde{x}^2) = (x_1 \to x_2)$

Затем построим для этой функции таблицу истинности и найдем длину совершенной д.н.ф.

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Отсюда следует, что длина совершенной д.н.ф. равна 3 (так как на трёх наборах функция принимает значение равное 1)

Далее берём $n = 3$, строим таблицу истинности для этого случая

$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_1 \to x_3)(x_2 \to x_3)$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Отсюда следует, что длина совершенной д.н.ф. равна 4.

Далее берём $n = 4$:

$f(\tilde{x}^4) = (x_1 \to x_2)(x_1 \to x_3)(x_2 \to x_3)(x_1 \to x_4)(x_2 \to x_4)(x_3 \to x_4)$

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Отсюда следует, что длина совершенной д.н.ф. равна 5. Как можно заметить, длина совершенной д.н.ф. с возрастанием n на 1 также увеличивается на 1. По сути, при добавлении новой переменной x_n, набор, на котором переменные возрастают относительно друг друга (от x_1 до x_n) увеличивается на 1. При $n = 2$ длина с.д.н.ф. $l = 3$, $n = 3 - l = 4$, $n = 4 - l = 5$ и т.д. Отсюда можно сделать вывод, что длина совершенной д.н.ф. больше, чем n на 1.

Ответ: $n + 1$.

6. Выяснить, является ли самодвойственной функция f, заданная векторно

   $\tilde{\alpha}_f = (1001110010111000)$

Решение:

Самодвойственная функция на противоположных наборах принимает противоположные значения. Рассмотрим функцию на наборах (0000) и (1111): $f(0000) = 1$, $f(1111) = 0$. Однако на наборах (0001) и (1110) получаем следующее: $f(0001) = 0$, $f(1110) = 0 \Rightarrow f \notin S$

Ответ: Функция не является самодвойственной.

7. Определить, какие из переменных функций $f(\tilde{x}^n)$ следует заменить на x, а какие на $\bar{x}$ с тем, чтобы получить константу:

   $\tilde{\alpha}_f = (01100001)$

Решение:

Построим таблицу истинности:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Из таблицы видно, что два одинаковых значения равных 0 функция имеет на противоположных наборах (001) и (100). Следовательно, заменив x_1 на x, $x_2 = x_3 = \bar{x}$, получаем константу 0.

x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	f
0	1	1	0
1	0	0	0

Ответ: Заменив x_1 на x, x_2 и x_3 на $\bar{x}$, получаем константу 0.

8. Выяснить, является ли линейной функция f:

   $f = (xy \vee yz \vee zx) \oplus \overline{xyz} \oplus xyz$

   Решение:

   $f = (xy \vee yz \vee zx) \oplus \overline{xyz} \oplus xyz = (xy \vee yz \vee xz) \oplus 1 = \overline{xy} \cdot \overline{yz} \cdot \overline{zx} = (xy \oplus 1)(yz \oplus 1)(zx \oplus 1) = (xyz \oplus xy \oplus yz \oplus 1)(zx \oplus 1) = xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz \oplus yz \oplus zx \oplus 1 = 1 \oplus yz \oplus zx \oplus xy$

   Следовательно функция не линейная, так как ее многочлен Жегалкина содержит конъюнкции ранга выше 1.

   Ответ: Функция не является линейной.

9. Подставляя на места переменных нелинейной функции f функции из множества $\{0, 1, x, y\}$, получить хотя бы одну из функций xy, $x\bar{y}$, $\overline{xy}$:

   $\tilde{\alpha}_f = (1101111111001111)$

   Решение:

   Для начала необходимо найти многочлен Жегалкина этой функции. Поскольку его нахождение уже присуствовало в прошлых заданиях, то смысла ещё раз считать его я не вижу. Имеет он следующий вид:

   $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus x_3 \oplus x_3x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_3x_4 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4$

   Для небольшого упрощения я вынес общие множители за скобки:

   $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \oplus x_3(1 \oplus x_2 \oplus x_4(1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1x_2))$

   Далее для упрощения я сразу подставил на места общих множителей 1 ($x_3 = x_4 = 1$). Получил следующее:

   $f(x_1, x_2, 1, 1) = x_1 \oplus x_1x_2 = x_1(1 \oplus x_2)$

   Подставив $x_1 = x$, $x_2 = y$, получаю

   $f(x, y, 1, 1) = x(1 \oplus y) = x\bar{y}$

   Ответ: $f(x, y, 1, 1) = x\bar{y}$.

10. Подсчитать число функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и принадлежащих множеству A:

    (a) $A = (S \cap T_0) \cup T_1$

    (b) $A = L \setminus (T_0 \cup T_1)$

    (c) $A = (S \cap T_0) \setminus T_1$

Решение:

(a) $A = (S \cap T_0) \cup T_1$

По определению самодвойственной функции $|S| = 2^{2^{n-1}}$. В нашем случае она должна сохранять константу 0 (так как она из множества $S \cap T_0$), следовательно среди 2^{n-1} мест одно занято. $\Rightarrow |S \cap T_0| = 2^{2^{n-1}-1}$. Далее нам нужно объединение полученного множества с T_0. Для этого воспользуемся формулой Грассмана:

$|(S \cap T_0) \cup T_1| = |S \cap T_0| + |T_1| - |S \cap T_0 \cap T_1|$ Из определения мощность множества $|T_1| = |T_0| = 2^{2^n-1}$. Мощность множества $|S \cap T_0 \cap T_1|$ легко находим: это самодвойственная функция, которая сохраняет константы 0 и 1. Следовательно среди 2^{n-1} мест два места заняты. В итоге получаем:

$A = |S \cap T_0| + |T_1| - |S \cap T_0 \cap T_1| = 2^{2^{n-1}-1} + 2^{2^n-1} - 2^{2^{n-1}-2} = 2^{2^{n-1}-2} + 2^{2^n-1}$

Ответ: $2^{2^{n-1}-2} + 2^{2^n-1}$.

(b) $A = L \setminus (T_0 \cup T_1)$

Множество $|L \setminus (T_0 \cup T_1)|$ расписываем как $|L| - |L \cap (T_0 \cup T_1)|$ исходя из теории множеств. Из определения линейной функции следует, что $|L| = 2^{n+1}$. Далее нам необходимо найти

$|L \cap T_0 \cup L \cap T_1|$ (раскрыл скобки). Также применим формулу Грассмана: $|L \cap T_0 \cup L \cap T_1| = |L \cap T_1| + |L \cap T_0| - |L \cap T_1 \cap L \cap T_0|$. Исходя из того, что один класс, сохраняющий константу, занимает одно место, следует, что это множество мы можем записать как

$|L \cap (T_0 \cup T_1)| = 2^n + 2^n - 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow A = |L| - |L \cap (T_0 \cup T_1)| = 2^{n+1} - 3 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

Ответ: 2^{n-1}.

(c) $A = (S \cap T_0) \setminus T_1$

Здесь используется всё то же, что было описано выше.

$|(S \cap T_0) \setminus T_1| = |S \cap T_0| - |S \cap T_0 \cap T_1| = 2^{2^{n-1}-1} - 2^{2^{n-1}-2} = 2^{2^{n-1}-2}$
Ответ: $2^{2^{n-1}-2}$

11. По вектору значений $\tilde{\alpha}_f$ выяснить, является ли функция f монотонной.

    $\tilde{\alpha}_f = (01100110)$

    Решение:

    Метод решения следующий: мы разбиваем функцию пополам, затем сравниваем обе половины. Если левая половина не превосходит правую на всех шагах, то функция является монотонной. (01100110) $\Rightarrow$

    $(0110) \leq (0110) \Rightarrow (01) \leq (10) \Rightarrow$ для правой части $(1) \not\leq (0)$.

    Ответ: Функция не является монотонной.

12. Построить сокращенную д.н.ф. для функции f, заданной вектором своих значений:

    $\tilde{\alpha}_f = (00101111)$

    Решение:

    Построим таблицу истинности:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

    Выпишем множество наборов, на которых данная функция обращается в 1: $N_f = \{010, 100, 101, 110, 111\}$.

    Запишем СДНФ данной булевой функции: $\bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$

    Построим карту Карно для СДНФ:

x/yz	00	01	11	10
0				+
1	+	+	+	+

Отсюда следует: $\bar{x}y\bar{z} \wedge xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \wedge x\bar{y}\bar{z} \wedge xyz \wedge xy\bar{z}$

Далее сокращаем и получаем минимизированную ДНФ: $x \vee y\bar{z}$

Ответ: $x \vee y\bar{z}$