1. Постановка задачи

Решить задачу методом разделения переменных

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & 0 < x < 2,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, & 0 \le x \le 2 \\ u_t|_{t=0} = 0, & 0 \le x \le 2 \\ u|_{x=0} = 2+t, & t \ge 0 \\ u_x - 2u|_{x=2} = t, & t \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

Приведем граничные условия к однородным. Для этого ищем решение в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$ где

$$w(x,t) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

где a, b, c подлежат определению, при этом

$$\begin{cases} w|_{x=0} = 2+t \\ w_x - 2w|_{x=2} = t \end{cases}$$

Подставим общий вид $w(x,t)$ в усл-я и получим

$$w|_{x=0} = c(t) = 2+t$$

$$w_x - 2w|_{x=2} = 2x\,a(t) + b(t) - 2a(t)x^2 - 2b(t)x - 2c(t)|_{x=2} = 4\cdot a(t) + b(t) - 8a(t) - 4b(t) - 4 - 2t = t.$$

Пусть $a(t) = 0$, тогда

$$-3b(t) = 3t+4 \Rightarrow b(t) = -\frac{3t+4}{3}$$

В итоге

$$w(x,t) = -\left(\frac{3t+4}{3}\right)x + 2 + t$$

Проверим:

$$w|_{x=0} = 2+t$$

$$w_x - 2w|_{x=2} = -\left(\frac{3t+4}{3}\right) + 2\left(\frac{3t+4}{3}\right)\cdot 2 - 4 - 2t = t$$

Тогда можем составить задачу с однор. гр. усл.

Если $w_{xx} = 0$, $w_{tt} = 0$

$$w|_{t=0} = -\frac{4}{3}x + 2, \quad \text{то}$$

$$w_t|_{t=0} = -x + 1$$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & 0 < x < 2,\ t > 0 \\ u\big|_{t=0} = -\frac{4}{3}x + 2, & 0 \le x \le 2 \\ u_t\big|_{t=0} = 1 - x, & 0 \le x \le 2 \\ u\big|_{x=0} = 0, & t \ge 0 \\ u_x - 2u\big|_{x=2} = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

Имеем смеш. задачу с неоднор. ур-ем. Тогда по МРП ищем реш-е как

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(t), \quad T, X \not\equiv 0$$

Получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(2) - 2X(2) = 0 \end{cases}$$

$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$ – общ. реш-е

$X(0) = C_1 = 0$

$X'(2) - 2X(2) = C_2(\lambda\cos 2\lambda - 2\sin 2\lambda) = 0 \Rightarrow$

$\frac{\lambda}{2} = \operatorname{tg} 2\lambda$. Реш-я этого ур-я — $\lambda_k \ge 0$ собств. зн-я

Тогда собств. ф-ции $X_k(x) = \sin \lambda_k x$, $k = 1, 2, \ldots$

Таким образом,

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \lambda_k x$$

Подставим эту ф-цию в ур-е и получим:

$$T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = f_k, \text{ где}$$

$$f_k = \frac{\int_0^2 x \sin \lambda_k x \, dx}{\int_0^2 \sin^2 \lambda_k x \, dx} = \frac{\sin 2\lambda_k - 2\lambda_k \cos 2\lambda_k}{\lambda_k^2 \left(1 - \frac{\sin 4\lambda_k}{4\lambda_k}\right)} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\cos 2\lambda_k}{\lambda_k \left(1 - \frac{1}{\lambda_k^2 + 4}\right)}$$

Подст. $v(x,t)$ в нач. усл-я:

$$T_k(0) = \varphi_k, \text{ где}$$

$$\varphi_k = \frac{\int_0^2 \left(-\frac{4}{3}x + 2\right) \sin \lambda_k x \, dx}{\int_0^2 \sin^2 \lambda_k x \, dx} = \frac{2(3\lambda_k + \lambda_k \cos 2\lambda_k - 2\sin 2\lambda_k)}{3\lambda_k^2 \left(1 - \frac{\sin 4\lambda_k}{4\lambda_k}\right)} =$$

$$= \frac{6 \cos 2\lambda_k}{\lambda_k \left(1 - \frac{1}{\lambda_k^2 + 4}\right)}$$

Аналогично

$T_k'(0) = \psi_k$, где $\psi_k = \dfrac{\int_0^2 (1-x)\sin\lambda_k x\,dx}{\int_0^2 \sin^2\lambda_k x\,dx} =$

$= \dfrac{2\cos\lambda_k(\lambda_k\cos\lambda_k - \sin\lambda_k)}{\lambda_k^2\left(1 - \dfrac{1}{\lambda_k^2+4}\right)}$

Тогда имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = f_k \\ T_k(0) = \varphi_k \\ T_k'(0) = \psi_k \end{cases} \Rightarrow$$

$T_k(t) = C_1\cos\lambda_k t + C_2\sin\lambda_k t + \dfrac{f_k}{\lambda_k^2}$

$T_k(0) = C_1 + \dfrac{f_k}{\lambda_k^2} = \varphi_k \Rightarrow C_1 = \varphi_k - \dfrac{f_k}{\lambda_k^2} \Rightarrow$

$T_k'(0) = \lambda_k C_2 = \psi_k \Rightarrow C_2 = \dfrac{\psi_k}{\lambda_k}$

$$u(x,t) = -\left(\frac{3t+4}{3}\right)x + 2 + t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\varphi_k - \frac{f_k}{\lambda_k^2}\right)\cos\lambda_k t + \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t + \frac{f_k}{\lambda_k^2}\right]\sin\lambda_k x$$

2. Постановка задачи.

Решить МРП смешанную задачу для колебания прямоугольного контура.

$$
\begin{cases}
u_{tt} = \Delta u, & 0 < x < 2,\ 0 < y < 5,\ t > 0 \\
u_x\big|_{x=0} = u\big|_{x=2} = 0 \\
u\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=5} = 0 \\
u\big|_{t=0} = x + y \\
u_t\big|_{t=0} = x - y
\end{cases}
\qquad (2)
$$

Имеем смешанную задачу с однородн. гранич. усл. По МРП ищем решение в виде:

$u(x, y, t) = T(t)\,V(x, y)$, $T \neq 0$, $V \neq 0$

Подставим это выражение в ур-е задачи (2)

$T''V = \Delta V \cdot T$ $\Rightarrow$ разделяем переменные

$$\frac{\Delta V(x,y)}{V(x,y)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$ $\Rightarrow$ получим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda^2 V = 0 \\ V_x\big|_{x=0} = V\big|_{x=2} = 0 \quad (3) \\ V\big|_{y=0} = V_y\big|_{y=5} = 0 \end{cases}$$

Для решения задачи (3) введем выражение для V:

Пусть $V(x, y) = X(x)\,Y(y)$, $X \neq 0$, $Y \neq 0$ $\Rightarrow$

подставим: $X''Y + XY'' + \lambda^2 XY = 0$ $\Rightarrow$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2 = -\mu^2$$ $\Rightarrow$ получим 2 задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 \qquad (4) \\ X(2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0 \qquad (5) \\ Y'(5) = 0 \end{cases}$$

где $\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2$ (6)

Начнем с решения задачи (4).

Общее решение имеет вид

$X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x$

Подставим условия:

$X'(x) = -\mu C_1 \sin \mu x + \mu C_2 \cos \mu x$

$X'(0) = \mu C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$X(2) = C_1 \cos 2\mu = 0 \Rightarrow [C_1 \neq 0] \Rightarrow$

$2\mu_n = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow$

$\mu_n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x$

$n = 0, 1, \ldots$

Решаем задачу (5):

$Y(y) = C_1 \cos \nu y + C_2 \sin \nu y$

$Y(0) = C_1 = 0$

$Y'(y) = \nu C_2 \cos \nu y$

$Y'(5) = \nu C_2 \cos 5\nu \Rightarrow [C_2 \neq 0] \Rightarrow$

$5\nu = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow$

$\nu_m = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, \quad Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y$

$m = 0, 1, \ldots$

Таким образом, можем построить

$$\lambda_{nm}^2 = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)^2$$

$$V_{nm}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y$$

Из МРП у нас также построено уравнение

$$T''_{nm}(t) + \lambda_{nm}^2 T_{nm}(t) = 0$$

Его общее решение

$$T_{nm}(t) = C_{nm}^{(1)} \cos \lambda_{nm} t + C_{nm}^{(2)} \sin \lambda_{nm} t$$

Таким образом, мы можем построить решение исходного уравнения

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[C_{nm}^{(1)} \cos \lambda_{nm} t + C_{nm}^{(2)} \sin \lambda_{nm} t\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y$$, где коэф-ы

мы можем получить из подстановки начальных условий:

$$C_{nm}^{(1)} = \frac{\int_0^2 \int_0^5 (x+y) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y \, dx \, dy}{\int_0^2 \int_0^5 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x \sin^2\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y \, dx \, dy} =$$

Посчитано в Wolfram

$$= \frac{7}{2} \cancel{\cos\left(\frac{\pi m}{5} - \frac{\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \csc^2\left(\frac{\pi m}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \sec^2\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$C_{nm}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_{nm}} \cdot \frac{\int_0^2 \int_0^5 (x+y) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x \sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y \, dx\, dy}{\int_0^2 \int_0^5 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x \sin^2\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right)y \, dx\, dy} =$$

$$= \frac{3}{2} \cancel{\cos\left(-\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi n}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{4}\right)} \csc^2\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}\right) \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$$

посчитано в Wolfram.