0.1 Сходимость и расходимость числовых рядов

Пусть задача числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}$. Сумма членов этой последовательности записывается в виде

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и называется **числовым рядом**. Сумма членов последовательности до k называется **частной суммой ряда**

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n. \tag{2}$$

Рассмотрим последовательность частных сумм ряда

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ \ldots.$$

Если существует конечный предел последовательности частных сумм ряда

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S,$$

то ряд называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**.

Теорема (Необходимое условие сходимости)**.** *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то*

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следствие. Если $a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (Критерий сходимости положительных числовых рядов ($a_n > 0$))**.** *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность частных сумм* $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ *ограничена, то есть* $|S_n| \leqslant M$, $\forall n$, $M = \mathrm{const}$.

Теорема (Признаки сравнения)**.** *Пусть* $a_n \geqslant 0$, $a_n \leqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1. *Из сходимости* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*;*
2. *Из расходимости* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Теорема (Предельный признак сравнения)**.** *Пусть* $b_n > 0$. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,\ 0 < l < +\infty, \tag{3}$$

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Практика

2546.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\dots$$

Перед нами бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, используя формулу для такой прогрессии, сразу найдем сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\left[\frac{b_1}{1-q}\right]=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

2547.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\dots$$

В данном случае имеем сумму двух бесконечно убывающих геометрических прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\left[\frac{b_1}{1-q}\right]=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

2549.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Разложим n-ый член последовательности a_n на простейшие дроби:

$$\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\left[A(n+1)+B\cdot n=1\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}\right]=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\dots.$$

Тогда рассмотрим частную сумму ряда

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}\xrightarrow[k\to\infty]{}1.$$

То есть мы доказали, что существует конечный предел последовательности частных сумм. А значит по определению ряд сходится и его сумма равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

2550. Обозначим исследуемый ряд

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Разложим a_n на сумму простейших дробей

$$\frac{A}{3n-2}+\frac{B}{3n+1}=\left[\begin{matrix}A(3n+1)+B(3n-2)=1\\ \begin{cases}3A+3B=0\\A-2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\3B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=-\frac{1}{3}\end{cases}\end{matrix}\right]=\frac{1}{3(3n-2)}-\frac{1}{3(3n+1)}$$

Тогда рассмотрим частную сумму ряда

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)} \right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{21} \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{3(3k-2)} - \frac{1}{3(3k+1)} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3k+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Последовательность частных сумм имеет конечный предел, следовательно ряд сходится его сумма равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}.$$

2552.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

Распишем сумму по членам

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - 2\sqrt{5} + \sqrt{4}) + \dots$$

$$\dots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) + \dots$$

Таким образом, частную сумму ряда можно записать в виде

$$S_k = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 - \sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}.$$

2556.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \not\to 0, \text{предела не существ.}$$

Тогда по необходимому условию сходимости числовой ряд расходится.

2557.

$$0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (0.001)^{\frac{1}{n}}.$$

Рассмотрим n-ый член последовательности

$$a_n = (0.001)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0 \Rightarrow \text{расходится по необходимому условию сходимости.}$$

2558.

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Рассмотрим частную сумму ряда

$$S_k = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!}.$$

Так как
$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)!} \geq S_k,$$
то последовательность монотонно возрастает. Нужно найти верхнюю грань. Из неравенства
$$n! \geq 2^{n-1}$$
следует, что
$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \left(n-1, \text{чтобы } \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}\right).$$
Следовательно,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = [\text{геом. прогр. }] =$$
$$= \left[\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}\right] = \frac{1\cdot(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2 \quad \forall n \Rightarrow |S_n| \leq 2 \quad \forall n.$$
Тогда по критерию сходимости исходный ряд сходится, так как последовательность частных сумм является ограниченной.

2559.
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$
Используем признак сравнения:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
Необходимо доказать расходимость гармонического ряда. Доказательство Орема:
$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right] + \dots$$
$$> 1 + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{16}+\dots\right] + \dots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \text{ - не ограничена сверху } \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \text{ - расх. .}$$
Значит по признаку сравнения исходный ряд расходится.

Альтернатива: Из книги Кастрицы:
$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = S_n + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > S_n + n\cdot\frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2},$$
тогда при n $\to \infty$
$$S \geq S + \frac{1}{2} \quad - \text{противоречие.}$$

2560.
$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}.$$

Поскольку
$$1000n+1 \le 2000n \Rightarrow \frac{1}{1000n+1} \ge \frac{1}{2000n},$$
то можем рассмотреть ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2000n} = \frac{1}{2000}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$
Этот ряд расходится как гармонический. Следовательно по признаку сравнения исходный ряд расходится.

2561.
$$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\dots+\frac{n}{2n-1}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}.$$
Рассмотрим a_n член
$$\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \ne 0.$$
А тогда по необходимому условию данный ряд расходится.

2562.
$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$
Возьмем ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
Рассмотрим отношение:
$$\frac{n^2}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}=\mathrm{const}$$
А тогда по предельному признаку сравнения ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходятся или расходятся одновременно. Докажем сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Для этого рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$
По аналогии с номером 2549
$$\frac{1}{n(n-1)}=\left[\begin{array}{c} A(n-1)+Bn=1 \\ \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases} \end{array}\right]=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \Rightarrow$$
$$S_k=\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$
При этом
$$\frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}, \text{ т.к. } n(n-1) < n^2 \quad \forall n \ge 2$$
а тогда ряд
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ сходится.}$$

Причем, если добавить к нему единицу, то на сходимость это не повлияет:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом, исходный ряд сходится по предельному признаку сравнения.

2563.

$$\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

По аналогии с 2549

$$S_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \Rightarrow \text{сходится.}$$

Теперь сравним его с исходным рядом. Сперва преобразуем:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

Разделим исходный ряд на получившийся:

$$\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{n\sqrt{n+1}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 = \text{const}$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения исходный ряд сходится.