Численные методы математической физики

Конспект по 4 курсу специальности «прикладная математика»

(лектор А. М. Будник)

Оглавление

1 Способы построения и исследования разностных схем. 3

1.1 Сетки и сеточные функции. 3

1.2 Разностная аппроксимация дифференциальных операторов. 7

1.2.1 Локальная аппроксимация. 7

1.2.2 13

1.3 Разностная аппроксимация дифференциальных задач. 15

1.3.1 Постановка разностной задачи. 15

1.3.2 Сходимость и точность разностных схем. 16

1.3.3 Повышения порядка аппроксимации разностных схем. 18

Введение.

В данном курсе мы будем рассматривать задачи математической физики в частных производных. Основной принцип решения состоит в том, что дифференциальное уравнение мы заменяем разностным и ищем приближенное решение на сетке узлов. Такой способ называется *методом конечных разностей* (*методом сеток*). А раздел численных методов, посвященный теории метода конечных разностей, носит название *теория разностных схем*.

Выделим два основных момента при решении:

1. построение дискретных разностных аппроксимаций для уравнений математической физики и исследование основных характеристик этих аппроксимаций: погрешности, устойчивости и точности разностных схем;

2. решение разностных уравнений прямыми или итерационными методами, которые выбираются из соображений экономичности вычислительного алгоритма.

Глава 1

Способы построения и исследования разностных схем.

1.1 Сетки и сеточные функции.

При численном решении той или иной математической задачи мы не можем воспроизвести приближенное решение для всех значений аргумента. Поэтому в области задания функции выбирается конечное множество точек, и приближенное решение задачи ищется в этих точках.

• *Это множество называется* ***сеткой****, а отдельные точки этого множества –* ***узлами сетки****.*

• *Функция, определенная в узлах сетки, называется* ***сеточной функцией****.*

Заменяя области непрерывного изменения аргумента сеткой, то есть областью дискретного изменения аргумента, мы осуществляем аппроксимацию пространства решения дифференциального уравнения пространством сеточной функции.

Пример сетки на отрезке (одномерный случай).

В качестве области определения искомой функции мы рассматриваем отрезок на оси x.

1. **Равномерная сетка.** Не ограничивая общности, возьмем отрезок $[0, 1]$ и разобьем его на N равных частей точками

   $$x_0 = 0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{N-1},\ x_N = 1.$$

   Расстояние между соседними точками назовем *шагом сетки* и обозначим его через h, а точки x_i примем в качестве *узлов сетки*, $i = \overline{0, N}$. Тогда множество всех x_i составляют *равномерную сетку* на отрезке $[0, 1]$, которую будем обозначать следующим образом

   $$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ h = \frac{1}{N} \right\}.$$

   Множество граничных узлов обозначим как

   $$\gamma_h = \{x_0, x_N\}.$$

   А все остальные точки образуют *множество внутренних узлов*

   $$\omega_h = \left\{ x_i = ih,\ i = \overline{1, N-1},\ h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Таким образом, можно записать

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h.$$

2. **Неравномерная сетка.** Возьмем отрезок $[0,1]$ и разобьем его на N частей точками

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1.$$

Тогда мы можем записать неравномерную сетку с граничными узлами

$$\hat{\overline{\omega}}_h = \left\{x_i,\ i = \overline{0,N},\ x_0 = 0,\ x_N = 1\right\}.$$

Шаг неравномерной сетки зависит от номера узла и удовлетворяет условию нормировки

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = 1, \text{ где } h_i = x_i - x_{i-1}.$$

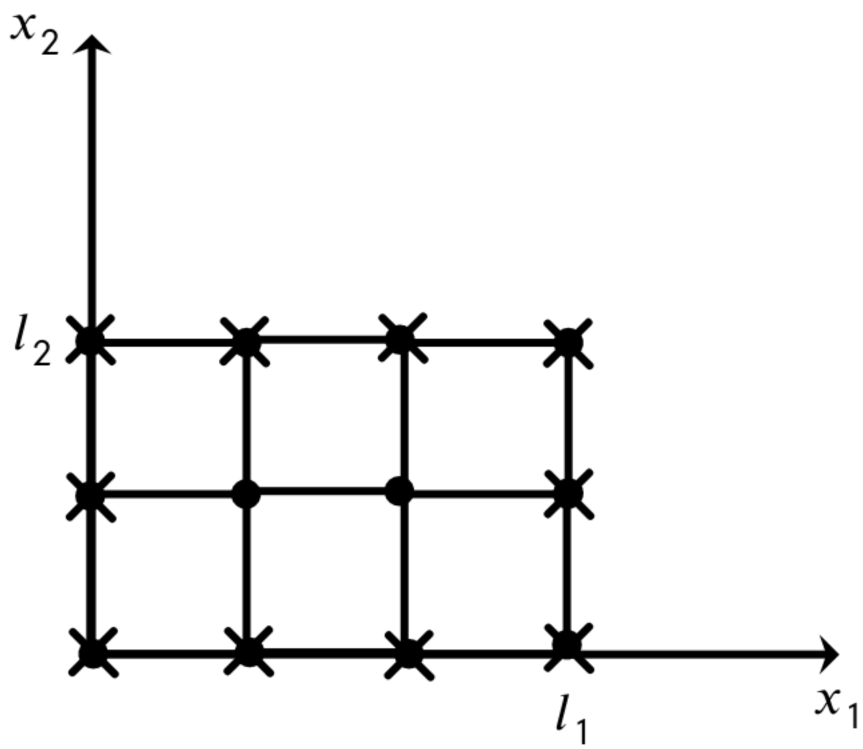
Аналогично случаю равномерной сетки можно записать

$$\hat{\overline{\omega}}_h = \hat{\omega}_h \cup \hat{\gamma}_h.$$

Пример сетки на плоскости (двумерный случай).

1. **Прямоугольник.** Исходная область прямоугольника

$$\overline{G} = \{(x_1, x_2),\ 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}$$



(кружочками обозначены внутренние узлы, а крестиками – внешние).

Сначала построим равномерную сетку. Разобьем отрезки $[0, l_\alpha]$ на N_α частей точками

$$0 = x_{\alpha,0} < x_{\alpha,1} < \ldots < x_{\alpha,N_\alpha-1} < x_{\alpha,N_\alpha} = l_\alpha.$$

Через точки деления проводим прямые, параллельные координатной оси. В качестве узлов двумерной сетки возьмем точки пересечения этих прямых. Общее количество узлов сетки равно $(N_1+1)\times(N_2+1)$, а их распределение характеризуется векторным параметром

$$h = \{h_{\alpha,1}, \ldots, h_{\alpha,N_\alpha},\ h_{\alpha,i_\alpha} = x_{\alpha,i_\alpha} - x_{\alpha,i_\alpha-1},\ i_\alpha = \overline{1, N_\alpha}, \alpha = 1,2\}.$$

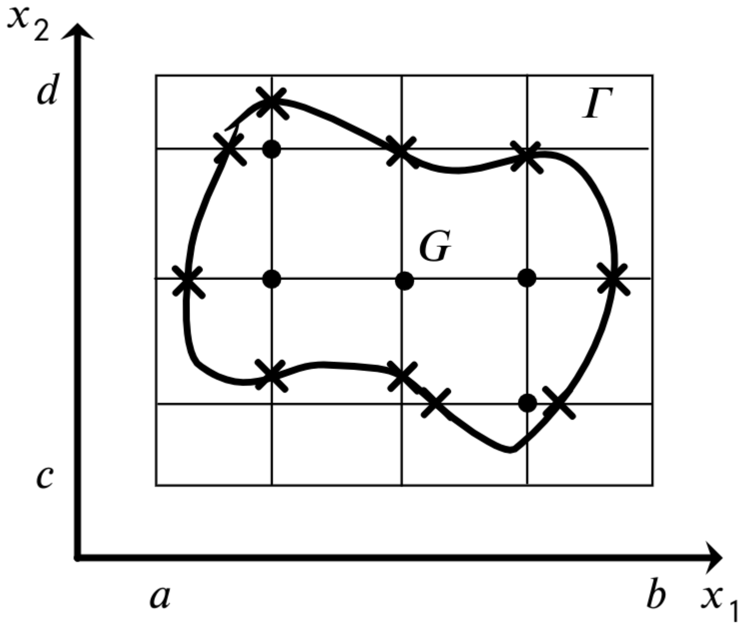
Тогда *неравномерную двумерную сетку* можно обозначить

$$\hat{\overline{\omega}}_h = \hat{\overline{\omega}}_{h_1,h_2} = \hat{\overline{\omega}}_{h_1} \times \hat{\overline{\omega}}_{h_2} = \{(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}),\ i_\alpha = \overline{0, N_\alpha},\ x_{\alpha,0} = 0, x_{\alpha,N_\alpha} = l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}.$$

Если по каждому направлению шаги сетки равны между собой, то мы получим *двумерную равномерную сетку*

$$\overline{\omega}_h = \overline{\omega}_{h_1,h_2} = \hat{\overline{\omega}}_{h_1} \times \hat{\overline{\omega}}_{h_2} = \left\{(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}),\ x_{\alpha,i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha,\ i = \overline{0, N_\alpha},\ h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha},\ \alpha = 1,2\right\}.$$

2. **Область сложной формы.** Пусть нам дана область нерегулярной (сложной) формы $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Для построения сетки мы заключим эту область в прямоугольник $[a,b]\times[c,d]$. В этом прямоугольнике мы строим прямоугольную сетку. Для простоты зададим прямоугольную равномерную сетку.



Те узлы, которые попали внутрь этой сетки, будем считать *внутренними*, обозначим их совокупность ω_h. Точки пересечения прямых $x_\alpha = i_\alpha l_\alpha$, $\alpha = 1,2$ с границей Γ назовем *граничными узлами*, обозначим их совокупность γ_h. Тогда сеткой будет множество узлов

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$$

Если исходная сетка в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$ является равномерной, то сетка $\overline{\omega}_h$ в области $\overline{G}$ является неравномерной.

Замечания.

1. Аналогичным образом строятся сетки и большей размерности.

2. В зависимости от геометрии исходной области можно использовать и другие ортогональные системы координат.

3. Кроме прямоугольных сеток можно строить, так называемые, треугольные сетки, элементарными ячейками которой являются треугольники.

Пусть $u(x)$ — это функция непрерывного аргумента $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \overline{G}$ и $u(x) \in H_0$ (H_0 — функциональное пространство). Если в области $\overline{G}$ введена сетка $\overline{\omega}_h$, то вместо функции $u(x)$ можно рассматривать функцию дискретного аргумента $y(x) = y_h$, где $x \in \overline{\omega}_h$, и эту функцию будем называть *сеточной функцией*, значения которой вычисляются в узлах, а сама функция зависит от шага сетки h.

Множество сеточных функций образует пространство H_h – *пространство сеточных функций*. Следуя методу конечных разностей, мы заменяем пространство H_0 пространством H_h. Если h – параметр, то мы можем рассматривать множество сеточных пространств $\{H_h\}$ для каждого фиксированного h.

Для того, чтобы оперировать функций, нам нужен аппарат для исследования функций и их сравнения. Мы рассматриваем линейные пространства, а для линейных пространств вводится понятие нормы. Соответственно мы определяем *сеточный аналог нормы*

$$\|\cdot\|_0 \sim \|\cdot\|_h .$$

Например, если $H_0 = C[0,1]$, то в нем вводится норма $\|\cdot\|_0 = \max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)|$. Тогда сеточным аналогом может быть норма

$$\|\cdot\|_h = \max_{x\in\overline{\omega}_h} |y(x)|.$$

Если взять $H_0 = L_2[0,1]$, то в нем вводится норма $\|\cdot\|_0 = (u,u)^{\frac{1}{2}}$. Тогда сеточным аналогом может быть норма

$$\|\cdot\|_h = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Предположим, что функция $u(x)$ – это решение некоторой дифференциальной задачи. Тогда $y_h(x)$ – это решение приближенной, или разностной задачи. Для сравнения точного и приближенного решений сеточная функция доопределяется во всех точках области $\overline{G}$. В результате получается функция непрерывного аргумента $\widetilde{y}_h$, тогда точность решения может быть оценена как

$$\|\widetilde{y}_h - u\|_0 .$$

Другой подход заключается в том, что мы исходное пространство H_0 отображаем в пространство H_h. Каждой функции $u(x) \in H_0$ ставится в соответствие сеточная функция $u_h(x), x \in \overline{\omega}_h$, при этом $u_h = P_h u \in H_h$, где P_h – это линейный оператор проектирования из H_0 в H_h. Тогда точность решения оценивается как

$$\|y - u_h\|_h .$$

Для того, чтобы эта операция была корректна, естественно требовать, чтобы норма пространства H_h аппроксимировала норму пространства H_0, то есть

$$\lim_{h\to 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0 .$$

• *Это требование называется* ***условием согласованности норм.***

1.2 Разностная аппроксимация дифференциальных операторов.

1.2.1 Локальная аппроксимация.

Пусть задан линейный дифференциальный оператор L действующий на функцию $u = u(x)$. Для того, чтобы аппроксимировать (приближенное вычислить) его в любой точке $x \in \omega_h$ разностным оператором L_h, необходимо в начале указать или выбрать шаблон $\text{Ш}(x)$.

• *Под* ***шаблоном*** *$\text{Ш}(x)$ мы понимаем множество узлов сетки, которое будет использоваться при аппроксимации оператора L оператором L_h в точке x.*

• ***Погрешность аппроксимации дифференциального оператора*** *L* ***разностным оператором*** *L_h* ***в точке*** *x называется величина*

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x), \ x \in \omega_h. \tag{1}$$

• *Будем говорить, что* ***разностный оператор*** *L_h* ***аппроксимирует дифференциальный оператор*** *L* ***с порядком*** *$m > 0$* ***в точке*** *x, если можно представить*

$$\psi(x) = O(h^m).$$

Рассмотрим способ построения разностных операторов, получивший название *метод неопределенных коэффициентов*. На выбранном шаблоне $\text{Ш}(x)$ разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции в точках шаблона

$$L_h u(x) = \sum_{\xi \in \text{Ш}(x)} A_h(x, \xi) u(\xi). \tag{2}$$

В формуле (2) $A_h(x, \xi)$ – это неизвестные коэффициенты, выбранные таким образом, чтобы погрешность аппроксимации имела в точке x заданный (чаще всего максимально возможный) порядок. Практический выбор значений коэффициентов осуществляется путем разложения погрешности аппроксимации в ряд Тейлора, то есть мы представляем

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \text{Ш}(x)} A_h(x, \xi) u(\xi) - Lu(x),$$

а затем раскладываем получившееся выражение в ряд Тейлора в окрестности точки x. После приведения мы получаем в итоге линейную комбинацию

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \text{Ш}(x)} A_h(x, \xi) u(\xi) - Lu(x) = \sum_{|j| \geqslant 0} B_h^{(j)}(x) u^{(j)}(x).$$

После этого мы приравниваем к нулю максимально возможное количество первых членов этого разложения. Как правило, количество этих членов совпадает с количеством неизвестных коэффициентов. После этого, решив систему линейных уравнений, находим коэффициенты A_h и по формуле (2) записываем искомый разностный оператор L_h.

Замечания.

1. Выбор шаблона зависит от порядка производных, входящих в исходный операторов L, а также от требуемой точности аппроксимации.

2. Легко видеть, что для аппроксимации дифференциального оператора, содержащего производную k-ого порядка по некоторой переменной, необходимо использовать шаблон, содержащий не менее $(k+1)$ точку вдоль координатного направления соответствующей переменной.

3. Метод неопределенных коэффициентов является не единственным способом построения разностных операторов. Известен в литературе также метод *численного дифференцирования.*

Примеры.

1. Пусть задан дифференциальный оператор

$$Lu(x) = \frac{du(x)}{dx} = u'(x).$$

   (a) Пусть нам дан шаблон $Ш(x) = \{x, x+h\}$. Тогда по формуле (2) составляем линейную комбинацию

$$u(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h).$$

   Записываем выражение для погрешности аппроксимации

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) - u'(x).$$

   Затем производим разложение выражения в ряд Тейлора в окрестности точки x и приводим подобные при значениях функции и ее производных

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) - u'(x) = \underbrace{(a_0 + a_1)}_{B^{(0)}} u(x) + \underbrace{(ha_1 - 1)}_{B^{(1)}} u'(x) + \frac{h^2}{2} a_1 u''(x) + \ldots.$$

   Приравнивая коэффициенты $B^{(j)}$ к нулю, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0, \\ ha_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

   Тогда

$$a_0 = -\frac{1}{h}, \; a_1 = \frac{1}{h}.$$

   Таким образом, мы построили разностный оператор вида

$$L_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u_x \tag{3}$$

   • *Обозначение называется* ***правой разностной производной.***

   При этом

$$\psi(x) = \frac{h}{2} u''(x) + \ldots = O(h),$$

   то есть разностный оператор (3) аппроксимирует исходный оператор L с первым порядком.

   • *Величина* $\frac{h}{2}u''(x)$ *называется* ***главным членом погрешности аппроксимации.***

(b) Пусть нам дан шаблон $\text{Ш}(x) = \{x - h, x\}$. Поступая аналогичным образом, мы можем построить оператор вида

$$L_h u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u_{\overline{x}} \tag{4}$$

- *Обозначение* $u_{\overline{x}}$ *называется* ***левой разностной производной***.

Легко видеть, что

$$\psi(x) = -\frac{h}{2}u''(x) + \ldots = O(h).$$

(c) Пусть нам дан шаблон $\text{Ш}(x) = \{x - h, x, x + h\}$. Проделав те же вычисления, мы получим выражение

$$L_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u_{\circ x} \tag{5}$$

- *Обозначение* $u_{\overline{x}}$ *называется* ***центральной разностной производной***.

Легко видеть, что

$$\psi(x) = -\frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^4) = O(h^2).$$

Можно заметить, что с увеличением точек шаблона будет также увеличиваться погрешность аппроксимации.

Можно построить однопараметрическое семейство операторов для аппроксимаиции первой производной следующего вида

$$L_h^{(\sigma)} u(x) = \sigma u_x + (1 - \sigma) u_{\overline{x}},$$

где σ – это любое вещественное число. Выражение для погрешности имеет следующий вид

$$\psi(x) = (2\sigma - 1)\frac{h}{2}u''(x) + O(h^2).$$

Очевидно, что при любом $\sigma \neq \frac{1}{2}$ разностный оператор будет иметь первый порядок аппроксимации $\psi(x) = O(h)$. Иначе мы получаем второй порядок аппроксимации $\psi(x) = O(h^2)$, при этом легко видеть, что

$$L_h^{(0,5)} = \frac{1}{2}(u_x + u_{\overline{x}}) = u_{\hat{x}}.$$

2. Пусть нам дан дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u''(x).$$

Оператор второго порядка, поэтому для аппроксимации нужно как минимум 3 точки. Возьмем шаблон $\text{Ш}(x) = \{x - h, x, x + h\}$. Применяя метод неопределенных коэффициентов, мы получим следующий разностный оператор

$$L_h u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u_{\overline{x}x} \tag{6}$$

- *Обозначение $u_{\overline{x}x}$ называется* ***второй разностной производной***.

Погрешность будет иметь вид

$$\psi(x) = \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + O(h^4) = O(h^2),$$

то есть имеет второй порядок, а не первый, как мы могли ожидать. Оказывается, что именно симметрия шаблона обеспечивает повышение порядка аппроксимации. Но на произвольной сетке мы получили бы первый порядок аппроксимации.

Замечания.

(a) Символы, используемые для обозначения разностных производных неслучайны, а является формальными операторами разностного дифференцирования и предписывают, как осуществлять аппроксимации. Например, если мы имеем разностный оператор $u_{\overline{x}x}$, то можно записать

$$u_{\overline{x}x} = (u_{\overline{x}}(x))_x = \frac{u_{\overline{x}}(x+h) - u_{\overline{x}}(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{u(x)-u(x-)}{h}\right) = \\ = \frac{u(x+h)-2u(x)-u(x-h)}{h^2}.$$

Можно также записывать

$$u_{\overline{x}}(x+h) = u_x(x),\ \frac{1}{2}(u_x + u_{\overline{x}}) = u_{\overset{\circ}{x}}.$$

Соответственно, мы можем конструировать разные операторы. Существуют также и разностные аналоги формул Грина.

(b) Разложение погрешности $\psi(x)$ по степеням h можно использовать для повышения порядка аппроксимации. Например, мы можем заменить четвертую производную четвертой разностной производной в выражении

$$u_{\overline{x}x}(x) - u''(x) = \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + O(h^4) = \frac{h^2}{12}\left(u_{\overline{x}x\overline{x}x}(x) + O(h^2)\right) + O(h^4).$$

Тогда можно построить разностный оператор

$$L_h u(x) = u_{\overline{x}x}(x) - \frac{h^2}{12}u_{\overline{x}x\overline{x}x}(x).$$

Шаблон уже будет

$$\text{Ш}(x) = \{x-2h, x-h, x, x+h, x+2h\},$$

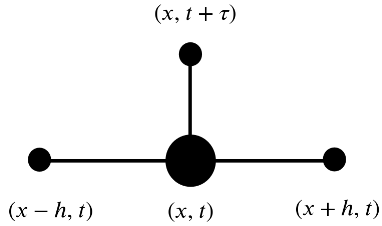
а погрешность аппроксимации

$$\psi(x) = O(h^4).$$

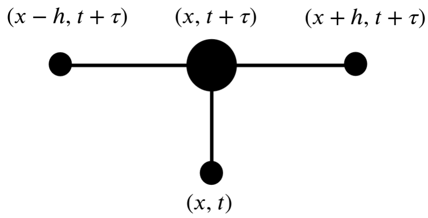
3. Пусть дан дифференциальный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u = u(x,t),\ (x,t) \in \omega_{h\tau}.$$

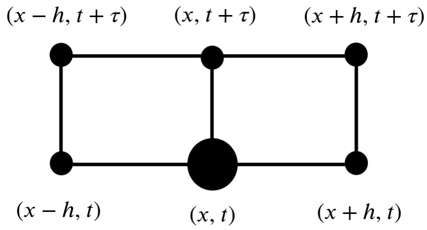
(a) Шаблон может иметь вид



(b) Шаблон может иметь вид



(c) Шаблон может иметь вид



Для шаблона (a) мы можем записать оператор

$$L_{h\tau}u = \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} - \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}.$$

Такая форма записи называется *индексной*. Учитывая введенные обозначения, мы можем записать этот оператор также в форме

$$L_{h\tau}u = \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} - \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} = u_t - u_{\bar{x}x}. \quad (7)$$

Используем следующие обозначения:

$$u(x,t) = u,\ u(x,t+\tau) = \hat{u},\ u(x,t-\tau) = \check{u}.$$

Тогда для случая (b) можно записать

$$L_{h\tau}u = u_t - \hat{u}_{\bar{x}x}. \quad (8)$$

Для случая (c) мы можем построить однопараметрическое семейство аппроксимаций вида

$$L_{h\tau}^{(\sigma)}u = u_{\hat{t}} - (\sigma\hat{u}_{\bar{x}x} - (1-\sigma)u_{\bar{x}x}),\ \sigma \neq 0,\ \sigma \neq 1. \quad (9)$$

Разностный оператор (9) аппроксимирует исходный дифференциальный оператор со вторым порядком по x при любых σ и первым порядком по τ при $\sigma = 0, \sigma = 1$. Или вторым порядком по τ при $\sigma = \frac{1}{2}$. То есть можно записать записать

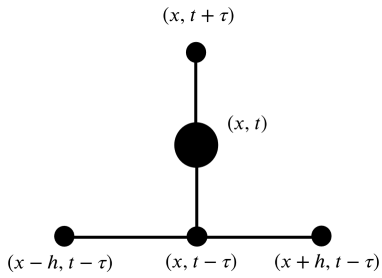
$$\begin{cases} \psi(x,t) = O(\tau + h^2),\ \sigma \neq \frac{1}{2}, \\ \psi(x,t) = O(\tau^2 + h^2),\ \sigma = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

4. Пусть дан дифференциальный оператор

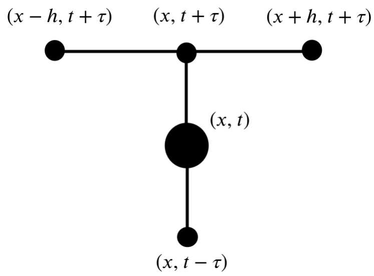
$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Сейчас по каждому из направлений у нас будет по 3 точки.

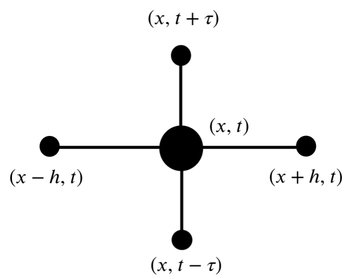
(a) Шаблон может иметь вид



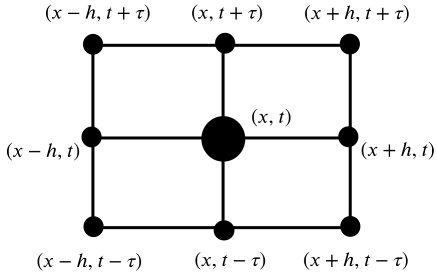
(b) Шаблон может иметь вид



(c) Шаблон может иметь вид



(d) Шаблон может иметь вид



Запишем двухпараметрическое семейство для варианта (d)

$$L_{h\tau}^{(\sigma_1,\sigma_2)}u = u_{\bar{t}t} - (\sigma_1\hat{u}_{\bar{x}x} + (1-\sigma_1-\sigma_2)u_{\bar{x}x} + \sigma_2\check{u}_{\bar{x}x}). \tag{11}$$

Для шаблона (a)

$$L_{h\tau}^{(0,1)}u = u_{\bar{t}t} - \check{u}_{\bar{x}x}. \tag{12}$$

Для шаблона (b)

$$L_{h\tau}^{(1,0)}u = u_{\bar{t}t} - \hat{u}_{\bar{x}x}. \tag{13}$$

Для шаблона (c)

$$L_{h\tau}^{(0,0)} = u_{\bar{t}t} - u_{\bar{x}x}. \tag{14}$$

Погрешность аппроксимации оператора (14) будет равна

$$\psi(x,t) = O(h^2+\tau^2),\ \sigma_1=\sigma_2=0.$$

Если же $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, то погрешность будет также иметь второй порядок

$$\psi(x,t) = O(h^2+\tau^2).$$

Для других значений погрешность аппроксимации по h понижается.

1.2.2

1. .
2. Пусть ω_h одномерно и неравномерно. Тогда h будет определяться набором шагов между каждой точкой
$$h = (h_1,\ldots,h_N),$$
где N – это число разбиений. В данном случае
$$|h| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} h_i.$$

Пример 5. Рассмотрим аппроксимацию оператора

$$Lu = u''(x),\ u \in H_0 = C^4[0,1].$$

Случай, когда сетка равномерная, нас не интересует. Построим на отрезке $[0,1]$ неравномерную сетку

$$\overline{\hat{\omega}}_h = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_N,\ x_i = x_{i-1}+h_i,\ i=\overline{1,N},\ x_0=0, x_N=1\}.$$

Итак $h=(h_1,\ldots,h_N)$, где $h_i = x_i - x_{i-1},\ i=\overline{1,N}$. Для каждого x_i, $i=\overline{1,N-1}$ рассмотрим трехточечный шаблон $\{x_{i-1},x_i,x_{i+1}\}$ и методом неопределенных коэффициентов построим разностный оператор

$$(L_hu)_i = \frac{1}{\hbar_i}\left(\frac{u(x_{i+1}-u(x_i))}{h_{i+1}} - \frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h_i}\right)u_{\bar{x}\hat{x}}. \tag{15}$$

В формуле (17)

$$\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i+h_{i+1}),\ u_{\hat{x}} = \frac{1}{\hbar_i}(u(x_{i+1}-u(x_i))).$$

Если будем рассматривать погрешность в каждой точке сетки x_i, то получим

$$\psi_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} u''(x_i) + O(\hbar_i^2),\ i = \overline{1, N-1}.$$

Из этого выражения следует, что в сеточной норме

$$\|\cdot\|_{h,C} = \max_{x \in \hat{\omega}_h} |\cdot|$$

норма погрешности равна

$$\|\psi_h\|_{h,C} = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\psi_i| = O(h),$$

где $h = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} h_i$. Но можно подобрать другую норму, в которой порядок аппроксимации будет другим. Рассмотрим другую норму в пространстве сеточных функций – *негативную норму*

$$\|\psi_h\|_{h,-1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k \right)^2}.$$

Тогда можно доказать, что величина погрешности в этой норме равна

$$\|\psi_h\|_{-1} = O(h^2).$$

Таким образом, локальное условие погрешности может быть недостаточным. Выбор подходящей нормы всякий раз должен быть предметом изучения.

Рассмотрим основные нормы, которые мы дальше будем использовать в случае функций двух измерений. Рассмотрим функцию двух аргументов $u(x,t)$, $(x,t) \in G$ и наряду с ней сеточную функцию $y(x,t)$, $x \in \omega_h$, $t \in \omega_\tau$, которая определена на сетке $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$. В сеточном пространстве мы будем рассматривать в основном такую норму

$$\|y\|_{h\tau} = \max_{t \in \omega_h} \|y(t)\|$$

или

$$\|y\|_{h\tau} = \sqrt{\sum_{t \in \omega_\tau} \tau \, \|y(t)\|_h^2}.$$

Пример 6. Рассмотрим оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u \in H_0 = C^{4,2}[0,1].$$

Возьмем простейшую аппроксимацию

$$L_{h\tau} u = u_t - u_{\overline{x}x}.$$

Если по x сетка равномерна, то h фиксировано. Распишем оператор в любой точке сетки

$$L_{h\tau} u = u_t - u_{\overline{x}x} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}.$$

В данном случае в качестве сеточной функции y мы рассматриваем проекцию u на сетку, то есть $u = u(x_i, t_j) = u_i^j$. Локальная погрешность аппроксимации имеет вид

$$L_{h\tau} u - (Lu)_{h\tau} = \psi_{h\tau}(x_i, t_j) = O(\tau + h^2).$$

Легко показать, что данный разностный оператор аппроксимирует исходный оператор на сетке с первым порядком по t и вторым порядком по x в любой из норм, рассматриваемых выше, то есть

$$\|\psi\|_{h\tau} = O(\tau + h^2).$$

Как правило, вычислив погрешность аппроксимации в точке, то она обобщается и на всю сетку.

1.3 Разностная аппроксимация дифференциальных задач.

1.3.1 Постановка разностной задачи.

Как известно, дифференциальная задача включает в себя дифференциальное уравнение и дополнительные условия, которые выделяют из совокупности возможных решений единственное. Поэтому при формулировке разностных задач помимо аппроксимации дифференциальных уравнений, необходимо описывать в разностных уравнениях и дополнительные условия.

• *Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальное уравнение и дополнительные условия, называется* ***разностной схемой***.

• *Существуют две формы записи разностных схем:* ***безындексная*** *и* ***индексная***.

Пример 1. Рассмотрим задачу вида

$$\begin{cases} u'(t) = f(t), \ t > 0, \\ u(0) = u_0 = \mathrm{const}\,. \end{cases} \tag{1}$$

Для того, чтобы построить разностную схему, необходимо выписать разностное уравнение, которое будет аппроксимировать исходное дифференциальное уравнение. Для начала построим равномерную сетку

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \ \tau > 0, \ j = 0, 1, \ldots\}.$$

Тогда дифференциальной задаче можно поставить в соответствие разностную схему в *безындексной форме*

$$\begin{cases} y_t = \varphi, \ t \in \omega_t, \\ y(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

или в *индексной форме*

$$\begin{cases} \dfrac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \varphi^i, \ j = 0, 1, \ldots, \\ y(0) = u_0, \end{cases} \tag{3}$$

при этом

$$y^j = y(t_j) \approx u(t_j), \ \varphi^j = \varphi(t_j).$$

При этом права часть в разностном уравнении может быть задана различными способами, но при условии выполнения следующего соотношения – *необходимого условия для обеспечения первого порядка аппроксимации*

$$\varphi - f = O(\tau).$$

Например, в качестве φ можно выбирать и $\varphi(t) = f(t)$, $t \in \omega_\tau$. Также можно выбирать

$$\varphi(t) = \frac{f(t) + f(t+\tau)}{2}.$$

После записи разностной схемы необходимо указать способ реализации этой схемы.

• ***Под способом реализации*** *будем понимать построение вычислительного алгоритма, позволяющий найти приближенное решение во всех узлах сетки.*

В нашем примере способ реализации тривиален. Для способа реализации используется, как правило, индексная форма записи. Запишем алгоритм реализации разностной схемы (2)-(3)

$$y^{j+1} = y^j + \tau\varphi^j,\ j = 0, 1, \dots,\ y^0 = u_0. \tag{4}$$

Таким образом, для дифференциальной задачи (1) разностная схема (2)-(3) позволяет найти приближенное решение по алгоритму ее реализации (4).

Пример 2. Рассмотрим задачу для функции двух переменных для уравнения гиперболического типа

$$\begin{cases} Lu = f(x,t),\ L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ u = u(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, u(0,t) = \mu_0(t),\ u(1,t) = \mu_1(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{5}$$

Для аппроксимации задачи сперва мы должны выписать разностные уравнения, которые определяются приближением соответствующих разностных операторов и заменой непрерывной функции на сеточный аналог. Для простоты построим равномерную по h и τ сетку узлов

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau.$$

Выберем шаблон

$$Ш(x,t) = \{(x-h,t),\ (x,t),\ (x+h,t),\ (x,t+\tau)\},\ x \in \omega_h,\ t \in \omega_\tau.$$

Вместо исходной задачи (5) получим разностную задачу, которая и будет являться разностной схемой в *безындексной форме записи*

$$\begin{cases} y_t = y_{\overline{x}x} + \varphi,\ \varphi = f + O(\tau + h^2),\ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t),\ y(1,t) = \mu_1(t),\ t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases} \tag{6}$$

Запишем сразу алгоритм реализации этой разностной схемы:

$$\begin{cases} y_i^{j+1} = y_i^j + \tau\left(\dfrac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j\right),\ i = \overline{1, N_x - 1},\ j = \overline{1, N_t - 1}, \\ y_i^0 = u_0(x_i),\ i = \overline{0, N_x}, \\ y_0^j = \mu_0(t_j),\ y_{N_x}^j = \mu_1(t),\ j = \overline{1, N_t} \end{cases} \tag{7}$$

1.3.2 Сходимость и точность разностных схем.

Пусть дана дифференциальная задача

$$Lu = f(x),\ x \in G, \tag{8}$$

$$lu = \mu(x),\ x \in \Gamma. \tag{9}$$

Искомая функция $u(x) \in H_0$, $x \in \overline{G} = G \cup \Gamma$, а L, l – дифференциальные операторы, действующие в пространстве H_0 с нормой $\|\cdot\|_0$. Задаче (8)-(9) на сетке $\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ поставим в соответствие разностную задачу, или разностную схему

$$L_h y_h = \varphi_h,\ x \in \omega_h \tag{10}$$

$$l_h y_h = \chi_h,\ x \in \gamma_h \tag{11}$$

где приближенное решение $y_h(x) \in H_h$, $x \in \overline{\omega}_h$, а L_h, l_h – это разностные операторы, дествующие в пространстве H_h с нормой, которая согласована с нормой пространства H_0, то есть

$$\lim_{h \to 0} \|\cdot\|_h = \|\cdot\|_0 .$$

• *Разностная задача должна быть* ***корректно поставленной****, то есть*

1. решение $y_h(x)$ задачи $(10)-(11)$ существует и единственно для всех φ_h, χ_h из допустимого семейства сеточных функций;

2. решение $y_h(x)$ непрерывно зависит от φ_h, χ_h, то есть для любого шага сетки h_0 существует константа M такая, что при всех $h \leqslant h_0$ выполняется неравенство

   $$\|y_h - \widetilde{y}_h\|_h \leqslant M\left(\|\varphi_h - \widetilde{\varphi}_h\|_h + \|\chi_h - \widetilde{\chi}_h\|_h\right),$$

   где $\widetilde{y}_h$ – решение задачи (11) с правыми частями $\widehat{\varphi}_h$, $\widehat{\chi}_h$. Непрерывная зависимость решений разностной задачи называется **устойчивостью по входным данным**.

Факт наличия устойчисовсти является одним из основных вопросов теории разностных схем.

Основной целью всякого приближенного метолда является получения решения исходной непрерывной задачи с заданной точностью ε за конечное число ействий k. Поэтому после построения разностной схемы, аппроксимирующей исходную задачу, мы должны убедиться в том, что решение разностной задачи y_h будет являться приближенным значением точного решения задачи $u(x)$.

Пусть u_h – это значения исходной функции $u(x)$ на сетке ω_h. Рассмотрим погрешность разностной схемы (10)-(11). Для этого введем функцию

$$z_h = u_h - y_h.$$

Выразим $y_h = u_h - z_h$ и подставим в задачу (10)-(11). Тогда получим задачу для погрешности

$$L_h z_H = \psi_h,\ x \in \omega_h, \tag{12}$$

$$l_h z_h = \nu_h,\ x \in \gamma_h, \tag{13}$$

где

$$\psi_h = L_h u_h - \varphi_h$$

$$\nu_h = l_h u_h - \chi_h.$$

• *Функция ψ_h называтеся* ***погрешностью аппроксимации уравнения (8) разностным уравнением (10)****. А функция ν_h –* ***погрешностью аппроксимации граничныз условий (9) разностными условиями (11)****.*

Для оценки погрешности z_h и погрешность аппроксимации введем на сеточном множестве функций нормы $\|\cdot\|_{1,h}$, $\|\cdot\|_{2,h}$, $\|\cdot\|_{3,h}$.

• *Будем говорить, что решение разностной задачи (10)-(11) сходится к решению непрерывной задачи (1)-(2) (что то же самое* ***разностная схема (10)-(11) сходится****), если*

$$\|z_h\|_{1,n} = \|u_h - y_h\|_{1,h} \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0. \tag{14}$$

Разностная схема имеет n-ый порядок точности, если при достаточно малом $|h| \leqslant |h_0|$ *выполняется неравенство*

$$\|z_h\|_{1,n} \leqslant M|h|, \tag{15}$$

где M – константа, не зависящая от $h > 0$. Р*азностная схема имеет m-ый порядок аппроксимации, если*

$$\|\psi_h\|_{2,h} = O(|h|^m),\ \|\nu_h\|_{3,h} = O(|h|^m). \tag{16}$$

Обозначим через f_h и $(Lu)_h$ значения правой части уравнения (8) на сетке и значение Lu на сетке. С учетом того, что

$$(Lu - f)_h = 0,$$

то можно погрешность аппроксимации уравнения записать в виде

$$\psi_h = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)},$$

где

$$\psi_h^{(1)} = f_h - \varphi_h,$$

– погрешнрсть аппроксимации правой части

$$\psi_h^{(1)} = L_h u_h - (Lu)_h,$$

– погрешность аппроксмации дифференциального оператора. Аналогично можно записать и для ν_h.

Оказывается, что понятия сходимости и точности связаны между собой для линейных разностных схем. Зависимость порядка точности от порядка аппроксимации дает теорема Лакса.

Теорема (Лакса). *Если линейная разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную дифференциальную задачу, то она сходится. Причем порядок точности схемы определяется порядком ее аппроксимации.*

1.3.3 Повышения порядка аппроксимации разностных схем.

Поскольку порядок сходимости разностной схемы, а значит и скорость сходимости приближенного решения к точному зависит от порядка аппроксимации, то вопрос об увеличении порядка аппроксимации без увеличения геометрического шаблона является весьма важным для исследования разностных схем.

Пример 3. Возьмем задачу и разностную схему из примера 1. Рассмотрим погрешность аппроксимации

$$\psi_\tau(t) = u_t(t) - \varphi(t) = \frac{u(t_\tau) - u(t)}{\tau} - \varphi(t) = \left[u(t+\tau) = u(t) + \tau u'(t) + \frac{\tau^2}{2}u''(t) + O(\tau^3)\right] =$$
$$= [u'(t) = f(t),\ u''(t) = f'(t)] = f(t) + \frac{\tau}{2}f'(t) - \varphi(t) + O(\tau^2)$$

Можно в самом простом случае выбрать

$$\varphi(t) = f(t) + O(\tau).$$

Тогда мы получим разностную схему первого порядка $\psi_\tau = O(\tau)$. Причем при таком выборе $\varphi = f$ мы получили *явный метод Эйлера.*

Мы также можем взять
$$\varphi(t) = f(t) + \frac{\tau}{2}f'(t) + O(\tau^2).$$
Тогда, если мы возьмем
$$\varphi = f\left(t + \frac{\tau}{2}\right),$$
то из $\varphi(t)$ аппроксимирует выражение выше с порядком $O(\tau^2)$. Подставив это в нашу разностную схему, мы получим схему второго порядка аппроксимации. А это есть ничто иное, как *формула средних прямоугольников.*

В качестве φ можно выбирать и другие выражения. Например, если выбирать
$$\varphi = f(t) + \frac{\tau}{2}f_t(t),$$
то мы получим *формулу трапеций.*

Мы повышали порядок аппроксимации исходя из выбора правой части основного уравнения. Но чаще всего получается так, что задача задается с такими граничными условиями, в которых при минимальном шаблоне понижается порядок аппроксимации. Рассмотрим такой случай

Пример 4. Рассмотрим третью краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения следующего вида
$$u''(x) - qu(x) = f'(x),\ 0 < x < 1, \tag{17}$$
$$u'(0) = \sigma_0 u(0) - \mu_0, \tag{18}$$
$$u(1) = \mu_1 \tag{19}$$
В уравнениях (18)-(20) числа $q, \sigma_0, \mu_0, \mu_1$ – это заданные константы. Построим равномерную сетку $\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ на отрезке $[0, 1]$, где
$$\omega_h = \left\{x_i = ih,\ i = \overline{1, N-1}, h = \frac{1}{N}\right\},$$
$$\gamma_h =$$
Для аппроксимации уравнения (18) выберем шаблон
$$Ш_1(x) = \{x - h, x, x + h\},\ x \in \omega_h.$$
Для аппроксимации условия (19) выберем шаблон, состоящий из двух точек
$$Ш(0) = \{x_0, x_1\} = \{0, h\},$$
Для аппроксимации условия (20) формально выбираем шаблон
$$Ш_3(1) = \{x_N\} = \{1\}.$$
Заменяем дифференциальные производные разностными и строим разностную схему
$$y_{\overline{x}x}(x) - dy(x) = -\varphi(x),\ x \in \omega_h, \tag{20}$$
$$y_x(0) = \sigma_0 y(0) - \mu_0, \tag{21}$$
$$y(1) = \mu_1. \tag{22}$$

Исследуем погрешность аппроксимации. Для любого узла $x \in \omega_h$ запишем величину погрешность как невязку над точным решением

$$\psi_h = u_{\overline{x}x} - du + \varphi.$$

Воспользуемся соотношениями

$$u_{\overline{x}x} = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(IV)} + O(h^4).$$

Учитывая, что $u'' = qu - f$, получим

$$\psi_h = qu - f + \frac{h^2}{12}u^{(IV)} - du + \varphi + O(h^4) = (q-d)u + (\varphi - f) + O(h^2).$$

Отсюда видно, что $\psi_h = O(h^2)$, если мы выберем

$$d = q + O(h^2),\ \ \varphi = f + O(h^2),$$

то разностное уравнение (21) будет аппроксимировать исходное разностное уравнение со вторым порядком.

Рассмотрим погрешность аппроксимации граничных условий

$$\nu_h(0) = u_x(0) - \sigma_0 u(0) + \mu_0 = u'(0) + \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) - \sigma_0 u(0) + \mu_0 =$$
$$= [u'(0) = \sigma_0 u(0) - \mu_0] = \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) = O(h).$$

Исследуем аппроксимацию второго граничного условия

$$\nu_h(1) = u(1) - \mu_1 = 0,$$

то есть условие аппроксимируется точно.

В итоге мы получили погрешность аппроксимации граничных условий

$$\nu_h = \nu_h(0) + \nu_h(1) = O(h),$$

поэтому общий порядок аппроксимации равен сумме порядков аппроксимации

$$\Psi = \psi_h + \nu_h = O(h).$$

Следовательно, мы построили схему первого порядка аппроксимации.

В данном случае возникает потребность повысить порядок точности схемы, не изменяя размер шаблона. Для этого нам необходимо повысить порядок $\nu_h(0)$. Чтобы добиться этого, введем вместо коэффициентов σ_0 и μ_0 сеточные коэффициенты $\overline{\sigma}_0, \overline{\mu}_0$. Тогда вместо уравнения (22) будем рассматривать уравнение с этими коэффициентами

$$y_x(0) = \overline{\sigma}_0 + \overline{\mu}_0 \tag{23}$$

и подберем эти коэффициенты так, чтобы погрешность аппроксимации была равна $O(h^2)$. Выписываем погрешность аппроксимации с новыми коэффициентами, предполагая, что исходное дифференциальное уравнение (18) выполняется в точке $x = 0$.

$$\nu_h(0) = u_x(0) - \overline{\sigma}_0 u(0) + \overline{\mu}_0 = u'(0) - (\overline{\sigma}_0 u(0) - \overline{\mu}_0) + \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) =$$
$$= [u''(0) = qu(0) - f(0),\ u'(0) = \sigma_0 u(0) - \mu_0] =$$
$$= \left[\left(\sigma_0 + \frac{h}{2}q\right) - \overline{\sigma}_0\right] u(0) + \left[\overline{\mu}_0 - \left(\mu_0 + \frac{h}{2}f(0)\right)\right] + O(h^2)$$

Если мы выберем

$$\overline{\sigma} = \sigma_0 + \frac{h}{2}q, \ \overline{\mu}_0 = \mu_0 + \frac{h}{2}f(0),$$

то в уравнении (24) мы получим второй порядок аппроксимации, а значит схема (21), (24), (23) будет являться схемой второго порядка аппроксимации.

• *Такой способ повышения порядка аппроксимации назвыается* ***методом повышения порядка с использованием вида дифференциального оператора***.