

Численные методы математической физики

Конспект по 4 курсу специальности «прикладная
математика»

(лектор А. М. Будник)

Оглавление

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Способы построения и исследования разностных схем. | 4 |
| 1.1 | Сетки и сеточные функции. | 4 |
| 1.2 | Разностная аппроксимация дифференциальных операторов. | 8 |
| 1.2.1 | Локальная аппроксимация. | 8 |
| 1.2.2 | Аппроксимация на сетке. | 14 |
| 1.3 | Разностная аппроксимация дифференциальных задач. | 17 |
| 1.3.1 | Постановка разностной задачи. | 17 |
| 1.3.2 | Сходимость и точность разностных схем. | 19 |
| 1.3.3 | Повышение порядка аппроксимации разностных схем. | 21 |
| 1.4 | Способы построения разностных схем. | 25 |
| 1.4.1 | Требования предъявляемые к разностным схемам. | 25 |
| 1.4.2 | Интегро-интерполяционный метод построения разностных схем (метод баланса). | 26 |
| 1.4.2.1 | Вывод разностных уравнений. | 27 |
| 1.4.2.2 | Исследование погрешности аппроксимации. | 30 |
| 1.4.3 | Вариационно-проекциионный способ построения разностных схем. | 32 |
| 1.4.3.1 | Сущность вариационно-проекциионного подхода. Основные термины. | 32 |
| 1.4.3.2 | Метод Рунге построения разностных схем. | 32 |
| 1.5 | Методы исследования устойчивости разностных схем | 35 |
| 1.5.1 | Принцип максимума | 35 |
| 1.5.2 | Метод разделения переменных. | 41 |
| 2 | Разностные методы решения типичных задач математической физики. | 45 |
| 2.1 | Разностные схемы для уравнения переноса. | 45 |
| 2.1.1 | Явные схемы для задачи Коши. | 45 |
| 2.1.2 | Разностные схемы для краевой задачи. | 49 |
| 2.2 | Разностные схемы для уравнения теплопроводности. | 52 |
| 2.2.1 | Исходная задача. | 52 |
| 2.2.2 | Семейство шеститочечных разностных схем. | 53 |
| 2.2.3 | Погрешность аппроксимации схем с весами. | 55 |
| 2.2.4 | Исследование устойчивости схемы с весами. | 56 |
| 2.2.4.1 | Устойчивость по начальным данным. | 57 |
| 2.2.4.2 | Устойчивость по правой части. | 59 |
| 2.2.5 | Случай краевых условий третьего рода. | 60 |
| 2.3 | Разностные схемы для уравнения колебаний. | 62 |
| 2.3.1 | Семейство девятиточечных схем с весами. | 62 |
| 2.3.2 | Погрешность аппроксимации схемы с весами. | 64 |
| 2.3.3 | Устойчивость схемы с весами по начальным данным. | 66 |
| 2.3.4 | Случай краевых условий третьего рода. | 68 |

| | | |
|---------|--|----|
| 2.4 | Разностные схемы для уравнения Пуассона. | 69 |
| 2.4.1 | Постановка задачи. | 69 |
| 2.4.2 | Разностная задача Дирихле в случае прямоугольной области. | 70 |
| 2.4.3 | Методы решения разностной задачи Дирихле. | 71 |
| 2.4.3.1 | Метод Якоби. | 71 |
| 2.4.3.2 | Метод Гаусса-Зейделя. | 72 |
| 2.4.3.3 | Метод релаксации. | 72 |
| 2.4.4 | Устойчивость и сходимость разностной задачи Дирихле. | 72 |
| 2.4.5 | Разностная схема повышенного порядка точности. | 75 |
| 2.4.6 | Разностная задача Дирихле в случае области сложной формы. | 76 |
| 2.5 | Методы решения сеточных уравнений. | 77 |
| 2.5.1 | Модельная задача и ее свойства. | 77 |
| 2.5.2 | Элементы теории итерационных методов решения сеточных уравнений. | 80 |
| 2.5.3 | Попеременно треугольный итерационный метод. | 82 |
| 2.5.4 | Итерационный метод переменных направлений. | 85 |

Введение.

В данном курсе мы будем рассматривать задачи математической физики в частных производных. Основной принцип построения численного решения состоит в том, что исходное дифференциальное уравнение мы заменяем разностным и ищем приближенное решение на сетке узлов. Такой способ называется *методом конечных разностей* (*методом сеток*). А раздел численных методов, посвященный теории метода конечных разностей, носит название *теория разностных схем*.

Выделим два основных момента при решении:

1. построение дискретных разностных аппроксимаций для уравнений математической физики и исследование основных характеристик этих аппроксимаций: погрешности, устойчивости и точности разностных схем;
2. решение разностных уравнений прямыми или итерационными методами, которые выбираются из соображений экономичности вычислительного алгоритма.

Глава 1

Способы построения и исследования разностных схем.

1.1 Сетки и сеточные функции.

При численном решении той или иной математической задачи мы не можем воспроизвести приближенное решение для всех значений аргумента. Поэтому в области задания функции выбирается конечное множество точек, и приближенное решение задачи ищется в этих точках.

- Это конечное множество точек называется **сеткой**, а отдельные точки этого множества – **узлами сетки**.
- Функция, определенная в узлах сетки, называется **сеточной функцией**.

Заменяя области непрерывного изменения аргумента сеткой, то есть областью дискретного изменения аргумента, мы осуществляем аппроксимацию пространства решения дифференциального уравнения пространством сеточной функции.

Пример сетки на отрезке (одномерный случай).

В качестве области определения искомой функции мы рассматриваем отрезок на оси x .

1. **Равномерная сетка.** Не ограничивая общности, возьмем отрезок $[0, 1]$ и разобьем его на N равных частей точками

$$x_0 = 0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = 1.$$

Расстояние между соседними точками назовем *шагом сетки* и обозначим его через h , а точки x_i примем в качестве *узлов сетки*, $i = \overline{0, N}$. Тогда множество всех x_i составляют *равномерную сетку* на отрезке $[0, 1]$, которую будем обозначать следующим образом

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Множество граничных узлов обозначим через

$$\gamma_h = \{x_0, x_N\}.$$

А все остальные точки образуют *множество внутренних узлов*

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{1, N-1}, h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Таким образом, можно представить равномерную сетку в виде

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h.$$

2. **Неравномерная сетка.** Возьмем отрезок $[0, 1]$ и разобьем его на N частей точками

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1.$$

Тогда мы можем записать *неравномерную сетку с граничными узлами* в виде

$$\hat{\omega}_h = \{x_i, i = \overline{0, N}, x_0 = 0, x_N = 1\}.$$

Шаг неравномерной сетки зависит от номера узла и удовлетворяет условию нормировки

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1, \text{ где } h_i = x_i - x_{i-1}.$$

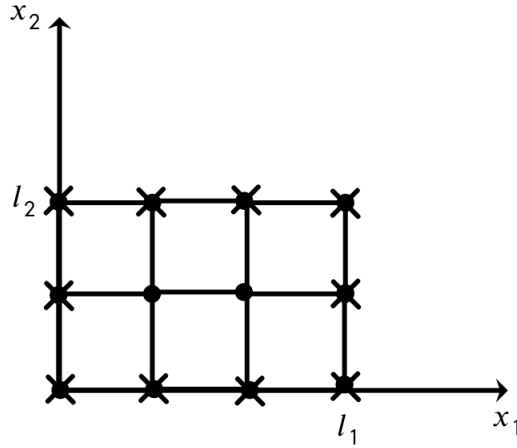
Аналогично случаю равномерной сетки можно представить неравномерную сетку в виде

$$\hat{\omega}_h = \hat{\omega}_h \cup \hat{\gamma}_h.$$

Пример сетки на плоскости (двумерный случай).

1. **Прямоугольник.** Исходная область прямоугольника может быть записана как

$$\overline{G} = \{(x_1, x_2), 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$$



(кружочками обозначены внутренние узлы, а крестиками – внешние).

Сначала построим на этом прямоугольнике неравномерную сетку. Разобьем отрезки $[0, l_\alpha]$ на N_α частей точками

$$0 = x_{\alpha,0} < x_{\alpha,1} < \dots < x_{\alpha,N_\alpha-1} < x_{\alpha,N_\alpha} = l_\alpha.$$

Через точки деления проводим прямые, параллельные координатной оси. В качестве узлов двумерной сетки возьмем точки пересечения этих прямых. Общее количество узлов сетки равно $(N_1 + 1) \times (N_2 + 1)$, а их распределение характеризуется векторным параметром

$$h = \{h_{\alpha,1}, \dots, h_{\alpha,N_\alpha}, h_{\alpha,i_\alpha} = x_{\alpha,i_\alpha} - x_{\alpha,i_\alpha-1}, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha}, \alpha = 1, 2\}.$$

Тогда *неравномерную двумерную сетку* можно обозначить

$$\hat{\omega}_h = \hat{\omega}_{h_1, h_2} = \hat{\omega}_{h_1} \times \hat{\omega}_{h_2} = \{(x_{1, i_1}, x_{2, i_2}), i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, x_{\alpha, 0} = 0, x_{\alpha, N_\alpha} = l_\alpha, \alpha = 1, 2\}.$$

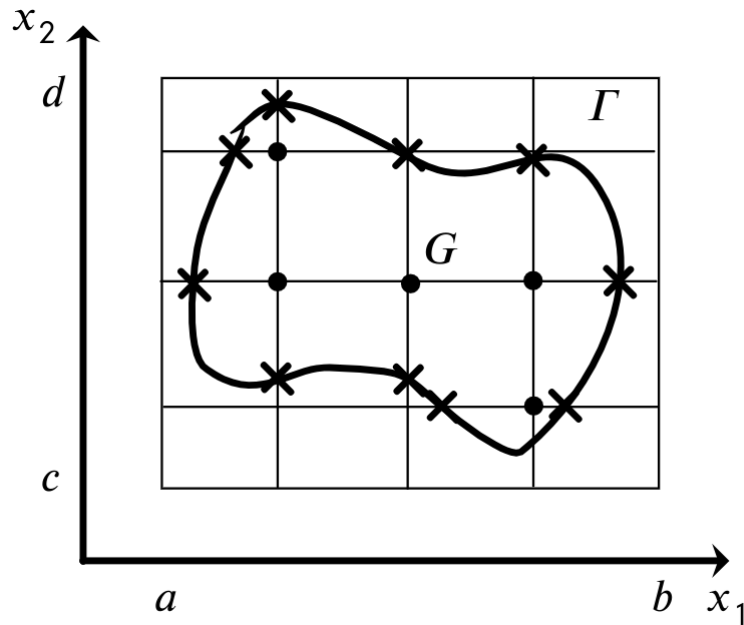
Если по каждому направлению шаги сетки равны между собой, то мы получим *двумерную равномерную сетку*

$$\overline{\omega}_h = \overline{\omega}_{h_1, h_2} = \overline{\omega}_{h_1} \times \overline{\omega}_{h_2} = \left\{ (x_{1, i_1}, x_{2, i_2}), x_{\alpha, i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha}, \alpha = 1, 2 \right\}.$$

2. **Область сложной формы.** Пусть нам дана область нерегулярной (сложной) формы

$$\overline{G} = G \cup \Gamma.$$

Для построения сетки мы заключим эту область в прямоугольник $[a, b] \times [c, d]$. В этом прямоугольнике мы строим прямоугольную сетку. Для простоты зададим прямоугольную равномерную сетку.



Те узлы, которые попали внутрь этой сетки, будем считать *внутренними*, обозначим их совокупность ω_h . Точки пересечения прямых $x_\alpha = i_\alpha l_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ с границей Γ назовем *граничными узлами*, обозначим их совокупность γ_h . Тогда сеткой будет множество узлов

$$\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$$

Даже если исходная сетка в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ является равномерной, то сетка $\overline{\omega}_h$ в нерегулярной области \overline{G} все равно является неравномерной.

Замечания.

1. Аналогичным образом строятся сетки и большей размерности.
2. В зависимости от геометрии исходной области можно использовать и другие ортогональные системы координат.
3. Кроме прямоугольных сеток можно строить, так называемые, треугольные сетки, элементарными ячейками которой являются треугольники.

Пусть $u(x)$ — это функция непрерывного аргумента $x = (x_1, \dots, x_p) \in \bar{G}$ и $u(x) \in H_0$ (H_0 — функциональное пространство). Если в области \bar{G} введена сетка $\bar{\omega}_h$, то вместо функции $u(x)$ можно рассматривать функцию дискретного аргумента $y(x) = y_h$, где $x \in \bar{\omega}_h$, и эту функцию будем называть *сеточной функцией*, значения которой вычисляются в узлах $x \in \bar{\omega}_h$, а сама функция зависит от шага сетки h .

Множество сеточных функций образует пространство H_h — *пространство сеточных функций*. Следуя методу конечных разностей, мы заменяем исходное пространство H_0 пространством H_h . Если h — параметр, то мы можем рассматривать множество сеточных пространств $\{H_h\}$ для каждого фиксированного h .

Для того, чтобы оперировать функциями, нам нужен аппарат для исследования функций и их сравнения. Мы рассматриваем линейные пространства, а для линейных пространств вводится понятие нормы. Соответственно мы определяем *сеточный аналог нормы*

$$\|\cdot\|_0 \sim \|\cdot\|_h.$$

Например, если $H_0 = C[0, 1]$, то в нем вводится норма $\|\cdot\|_0 = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$. Тогда сеточным аналогом может быть норма

$$\|\cdot\|_h = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)|.$$

Если взять $H_0 = L_2[0, 1]$, то в нем вводится норма $\|\cdot\|_0 = (u, u)^{\frac{1}{2}}$. Тогда сеточным аналогом может быть норма

$$\|\cdot\|_h = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Предположим, что функция $u(x)$ — это решение некоторой дифференциальной задачи. Тогда сеточная функция $y_h(x)$ — это решение приближенной, или разностной, задачи. Для сравнения точного и приближенного решений сеточная функция доопределяется во всех точках области \bar{G} . В результате получается функция непрерывного аргумента \tilde{y}_h , тогда точность решения может быть оценена как

$$\|\tilde{y}_h - u\|_0.$$

Другой подход заключается в том, что мы исходное пространство H_0 отображаем в пространство H_h . Каждой функции $u(x) \in H_0$ ставится в соответствие сеточная функция $u_h(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, при этом $u_h = P_h u \in H_h$, где P_h — это линейный оператор проектирования из H_0 в H_h . Тогда точность решения оценивается как

$$\|y - u_h\|_h.$$

Для того, чтобы эта операция была корректна, естественно требовать, чтобы норма пространства H_h аппроксимировала норму пространства H_0 , то есть

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0.$$

- Это требование называется *условием согласованности норм*.

1.2 Разностная аппроксимация дифференциальных операторов.

1.2.1 Локальная аппроксимация.

Пусть задан линейный дифференциальный оператор L действующий на функцию $u = u(x)$. Для того, чтобы аппроксимировать (приблизительно вычислить) его в любой точке $x \in \omega_h$ разностным оператором L_h , необходимо в начале указать или выбрать шаблон $\Pi(x)$.

- Под **шаблоном** $\Pi(x)$ мы понимаем множество узлов сетки, которое будет использоваться при аппроксимации оператора L оператором L_h в точке x .

- **Погрешностью аппроксимации дифференциального оператора L разностным оператором L_h в точке x** называется величина

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x), \quad x \in \omega_h. \quad (1)$$

- Будем говорить, что **разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L с порядком $m > 0$ в точке x** , если можно представить

$$\psi(x) = O(h^m).$$

Рассмотрим способ построения разностных операторов, получивший название *метод неопределенных коэффициентов*. На выбранном шаблоне $\Pi(x)$ разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции в точках шаблона

$$L_h u(x) = \sum_{\xi \in \Pi(x)} A_h(x, \xi) u(\xi). \quad (2)$$

В формуле (2) $A_h(x, \xi)$ – это неизвестные коэффициенты, выбранные таким образом, чтобы погрешность аппроксимации имела в точке x заданный (чаще всего максимально возможный) порядок. Практический выбор значений коэффициентов осуществляется путем разложения погрешности аппроксимации в ряд Тейлора, то есть мы представляем

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \Pi(x)} A_h(x, \xi) u(\xi) - Lu(x),$$

а затем раскладываем получившееся выражение в ряд Тейлора в окрестности точки x . После приведения мы получаем в итоге линейную комбинацию

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \Pi(x)} A_h(x, \xi) u(\xi) - Lu(x) = \sum_{|j| \geq 0} B_h^{(j)}(x) u^{(j)}(x).$$

После этого мы приравниваем к нулю максимально возможное количество первых членов этого разложения. Как правило, количество этих членов совпадает с количеством неизвестных коэффициентов. После этого, решив систему линейных уравнений, находим коэффициенты A_h и по формуле (2) записываем искомый разностный оператор L_h .

Замечания.

1. Выбор шаблона зависит от порядка производных, входящих в исходный оператор L , а также от требуемой точности аппроксимации.

2. Легко видеть, что для аппроксимации дифференциального оператора, содержащего производную k -ого порядка по некоторой переменной, необходимо использовать шаблон, содержащий не менее $(k + 1)$ -ой точки вдоль координатного направления соответствующей переменной.
3. Метод неопределенных коэффициентов является не единственным способом построения разностных операторов. Известен в литературе также метод *численного дифференцирования*.

Пример 1. Пусть задан дифференциальный оператор

$$Lu(x) = \frac{du(x)}{dx} = u'(x).$$

1. Пусть нам дан шаблон $\Pi(x) = \{x, x+h\}$. Тогда по формуле (2) составляем линейную комбинацию

$$L_h u(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h).$$

Записываем выражение для погрешности аппроксимации

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) - u'(x).$$

Затем производим разложение выражения в ряд Тейлора в окрестности точки x и приводим подобные при значениях функции и ее производных

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) - u'(x) = \underbrace{(a_0 + a_1)}_{B^{(0)}} u(x) + \underbrace{(ha_1 - 1)}_{B^{(1)}} u'(x) + \frac{h^2}{2} a_1 u''(x) + \dots$$

Приравнивая коэффициенты $B^{(j)}$ к нулю, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0, \\ ha_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Тогда, решая эту систему, получим

$$a_0 = -\frac{1}{h}, \quad a_1 = \frac{1}{h}.$$

Таким образом, мы построили разностный оператор вида

$$L_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u_x \tag{3}$$

- Обозначение u_x называется **правой разностной производной**.

При этом погрешность аппроксимации

$$\psi(x) = \frac{h}{2} u''(x) + \dots = O(h),$$

то есть разностный оператор (3) аппроксимирует исходный оператор L с первым порядком.

- Величина $\frac{h}{2} u''(x)$ называется **главным членом погрешности аппроксимации**.

2. Пусть нам дан шаблон $\Pi(x) = \{x-h, x\}$. Поступая аналогичным образом, мы можем построить оператор вида

$$L_h u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u_{\bar{x}} \quad (4)$$

- Обозначение $u_{\bar{x}}$ называется **левой разностной производной**.

Легко видеть, что погрешность аппроксимации равна

$$\psi(x) = -\frac{h}{2}u''(x) + \dots = O(h).$$

3. Пусть нам дан шаблон $\Pi(x) = \{x-h, x, x+h\}$. Прделав аналогичные предыдущим примерам же вычисления, мы получим выражение

$$L_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u_{\overset{\circ}{x}} \quad (5)$$

- Обозначение $u_{\overset{\circ}{x}}$ называется **центральной разностной производной**.

Легко видеть, что погрешность аппроксимации равна

$$\psi(x) = -\frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^4) = O(h^2).$$

Можно заметить, что с увеличением точек шаблона будет также увеличиваться погрешность аппроксимации.

Можно построить однопараметрическое семейство операторов для аппроксимации первой производной следующего вида

$$L_h^{(\sigma)} u(x) = \sigma u_x + (1 - \sigma) u_{\bar{x}},$$

где σ – это любое вещественное число. Выражение для погрешности имеет следующий вид

$$\psi(x) = (2\sigma - 1)\frac{h}{2}u''(x) + O(h^2).$$

Очевидно, что при любом $\sigma \neq \frac{1}{2}$ разностный оператор будет иметь первый порядок аппроксимации $\psi(x) = O(h)$. Иначе мы получаем второй порядок аппроксимации $\psi(x) = O(h^2)$, при этом легко видеть, что

$$L_h^{(0,5)} = \frac{1}{2}(u_x + u_{\bar{x}}) = u_{\overset{\circ}{x}}.$$

Пример 2. Пусть нам дан дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u''(x).$$

Данный дифференциальный оператор второго порядка, поэтому для аппроксимации нужно как минимум 3 точки. Возьмем шаблон $\Pi(x) = \{x-h, x, x+h\}$. Применяя метод неопределенных коэффициентов, мы получим следующий разностный оператор

$$L_h u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u_{\bar{x}x} \quad (6)$$

- Обозначение $u_{\bar{x}x}$ называется **второй разностной производной**.

Погрешность будет иметь вид

$$\psi(x) = \frac{h^2}{12} u^{IV}(x) + O(h^4) = O(h^2),$$

то есть она имеет второй порядок, а не первый, как мы могли ожидать. Оказывается, что именно симметрия шаблона обеспечивает повышение порядка аппроксимации. Но на произвольной сетке мы получили бы первый порядок аппроксимации.

Замечания.

1. Символы, используемые для обозначения разностных производных неслучайны, а являются формальными операторами разностного дифференцирования и предписывают, как осуществлять аппроксимации. Например, если мы имеем разностный оператор $u_{\bar{x}x}$, то можно записать

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}x} = (u_{\bar{x}}(x))_x &= \frac{u_{\bar{x}}(x+h) - u_{\bar{x}}(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \right) = \\ &= \frac{u(x+h) - 2u(x) - u(x-h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Можно также записывать

$$u_{\bar{x}}(x+h) = u_x(x), \quad \frac{1}{2}(u_x + u_{\bar{x}}) = u_{\circ}.$$

Соответственно, мы можем конструировать разные операторы. Существуют также и разностные аналоги формул Грина.

2. Разложение погрешности $\psi(x)$ по степеням h можно использовать для повышения порядка аппроксимации. Например, мы можем заменить четвертую производную четвертой разностной производной в выражении

$$u_{\bar{x}x}(x) - u''(x) = \frac{h^2}{12} u^{IV}(x) + O(h^4) = \frac{h^2}{12} (u_{\bar{x}x\bar{x}x}(x) + O(h^2)) + O(h^4).$$

Тогда можно построить разностный оператор

$$L_h u(x) = u_{\bar{x}x}(x) - \frac{h^2}{12} u_{\bar{x}x\bar{x}x}(x).$$

Шаблон уже будет

$$\mathcal{H}(x) = \{x-2h, x-h, x, x+h, x+2h\},$$

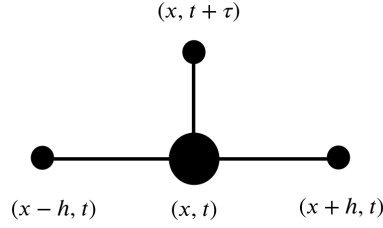
а погрешность аппроксимации

$$\psi(x) = O(h^4).$$

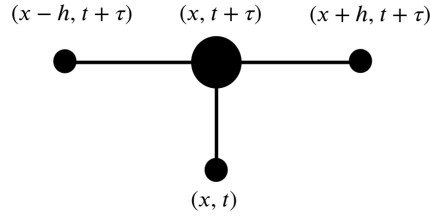
Пример 3. Пусть дан дифференциальный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t), \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}.$$

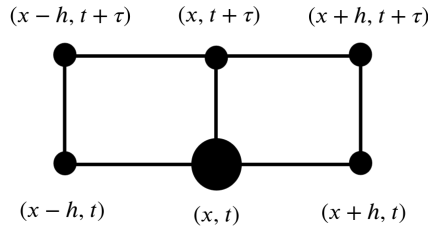
(a) Шаблон может иметь вид



(b) Шаблон может иметь вид



(c) Шаблон может иметь вид



Для шаблона (a) мы можем записать оператор

$$L_{h\tau}u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

Такая форма записи называется *индексной*. Учитывая введенные обозначения, мы можем записать этот оператор также в *безиндексной форме*

$$L_{h\tau}u = u_t - u_{\bar{x}x}. \quad (7)$$

Используем следующие обозначения:

$$u(x, t) = u, \quad u(x, t + \tau) = \hat{u}, \quad u(x, t - \tau) = \check{u}.$$

Тогда для случая (b) можно записать

$$L_{h\tau}u = u_t - \hat{u}_{\bar{x}x}. \quad (8)$$

Для случая (c) мы можем построить однопараметрическое семейство аппроксимаций вида

$$L_{h\tau}^{(\sigma)}u = u_t - (\sigma \hat{u}_{\bar{x}x} - (1 - \sigma)u_{\bar{x}x}), \quad \sigma \neq 0, \quad \sigma \neq 1. \quad (9)$$

Разностный оператор (9) аппроксимирует исходный дифференциальный оператор со вторым порядком по x при любых σ и первым порядком по τ при $\sigma = 0, \sigma = 1$. Или вторым порядком по τ при $\sigma = \frac{1}{2}$. То есть можно записать

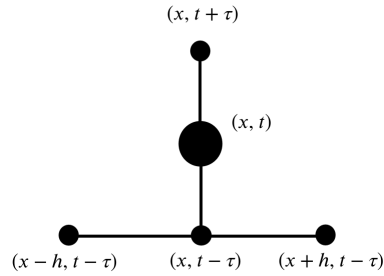
$$\begin{cases} \psi(x, t) = O(\tau + h^2), & \sigma \neq \frac{1}{2}, \\ \psi(x, t) = O(\tau^2 + h^2), & \sigma = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

Пример 4. Пусть дан дифференциальный оператор

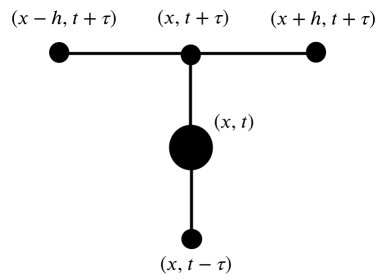
$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Сейчас по каждому из направлений у нас будет по 3 точки.

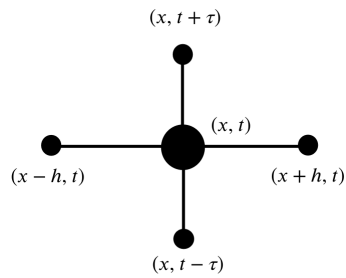
(а) Шаблон может иметь вид



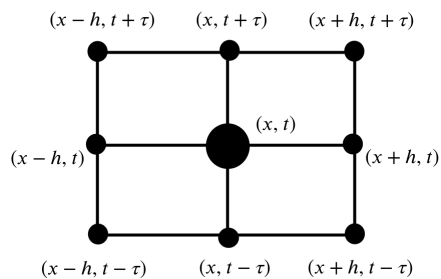
(b) Шаблон может иметь вид



(c) Шаблон может иметь вид



(d) Шаблон может иметь вид



Запишем двухпараметрическое семейство для варианта (d)

$$L_{h\tau}^{(\sigma_1, \sigma_2)} u = u_{\bar{t}t} - (\sigma_1 \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) u_{\bar{x}x} + \sigma_2 \check{u}_{\bar{x}x}). \quad (11)$$

Для шаблона (a)

$$L_{h\tau}^{(0,1)} u = u_{\bar{t}t} - \check{u}_{\bar{x}x}. \quad (12)$$

Для шаблона (b)

$$L_{h\tau}^{(1,0)} u = u_{\bar{t}t} - \hat{u}_{\bar{x}x}. \quad (13)$$

Для шаблона (c)

$$L_{h\tau}^{(0,0)} = u_{\bar{t}t} - u_{\bar{x}x}. \quad (14)$$

Погрешность аппроксимации оператора (14) будет равна

$$\psi(x, t) = O(h^2 + \tau^2), \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0.$$

Если же $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, то погрешность будет также иметь второй порядок

$$\psi(x, t) = O(h^2 + \tau^2).$$

Для других значений погрешность аппроксимации по h понижается.

1.2.2 Аппроксимация на сетке.

Ранее мы рассматривали локальную аппроксимацию, то есть аппроксимацию в точке. Сейчас мы рассмотрим основные положения теории разностных схем, касающихся аппроксимации на сетке.

Пусть ω_h – это сетка узлов в некоторой области G p -мерного пространства, H_h – линейное пространство сеточных функций, заданных на ω_h , H_0 – пространство гладких функций непрерывного аргумента. В этих пространствах зададим нормы $\|\cdot\|_h$ в H_h и $\|\cdot\|_0$ в H_0 соответственно, согласованные друг с другом, то есть выполняется условие согласованности норм

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0.$$

Для этого должны иметь оператор проектирования P_h такой, чтобы

$$P_h u = u_h \in H_h.$$

Этот оператор строится достаточно легко: если $u(x)$ известная в любой точке x из пространства H_0 , то очевидно мы знаем значения в конкретных точках пространства H_h .

Рассмотрим некоторый оператор $L : H_0 \rightarrow H_0$ и наряду с ним оператор $L_h : H_h \rightarrow H_h$.

• Назовем **погрешностью аппроксимации дифференциального оператора L разностным оператором L_h сеточную функцию**

$$\psi_h = L_h u_h - (Lu)_h, \quad (15)$$

где u_h – это сеточная функция, которая получается за счет проектирования непрерывной функции, то есть $u_h = P_h u$, $(Lu)_h$ – это действие выбранного оператора проектирования на оператор Lu , то есть $(Lu)_h = P_h(Lu)$, $\forall u \in H_0$.

Заметим, что выражение для погрешности (15) полностью совпадает с определением погрешности аппроксимации в точке (локальной погрешности), однако здесь мы должны предусмотреть возможность построения такой аппроксимации в любой точке сетки.

• Если

$$\|\psi_h\| \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

то будем говорить, что **разностный оператор** L_h **аппроксимирует дифференциальный оператор** L **на сетке** ω_h . Если при этом

$$\|\psi_h\|_h = \|L_h u_h - (Lu)_h\| \leq M \cdot |h|^m, \quad (16)$$

где M – константа, не зависящая от h , $m > 0$, то будем говорить, что **разностный оператор** L_h **аппроксимирует дифференциальный оператор** L **на сетке** ω_h **с порядком** m .

Под модулем $|h|$ мы понимаем следующее:

1. Если $h = (h_1, \dots, h_p)$ – векторный параметр из p -мерного пространства, то

$$|h| = (h_1^2 + \dots + h_p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

При этом возможно, что по каждому из направлений h_α , $\alpha = \overline{1, p}$ аппроксимация имеет различный порядок. В таком случае имеет место следующее неравенство

$$\|\psi_h\|_h \leq M \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^{m_\alpha},$$

где $m_\alpha > 0$ – порядок аппроксимации по направлению h_α . Взяв в качестве $m = \min(m_1, \dots, m_p)$, мы можем говорить об общем порядке.

2. Если ω_h одномерна и неравномерна, то h будет определяться набором шагов между каждой точкой

$$h = (h_1, \dots, h_N),$$

где N – это число разбиений. В данном случае

$$|h| = \max_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

Пример 5. Рассмотрим аппроксимацию оператора

$$Lu = u''(x), \quad u \in H_0 = C^4[0, 1].$$

Случай, когда сетка равномерная, нас не интересует. Построим на отрезке $[0, 1]$ неравномерную сетку

$$\hat{\omega}_h = \{x_0 < x_1 < \dots < x_N, \quad x_i = x_{i-1} + h_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad x_0 = 0, x_N = 1\}.$$

Итак $h = (h_1, \dots, h_N)$, где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, N}$. Для каждого x_i , $i = \overline{1, N-1}$ рассмотрим трехточечный шаблон $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ и методом неопределенных коэффициентов построим разностный оператор

$$(L_h u)_i = \frac{1}{h_i} \left(\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_i} \right) = u_{\bar{x}\hat{x}}. \quad (17)$$

В формуле (17)

$$\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}), \quad u_{\hat{x}} = \frac{1}{\hbar_i}(u(x_{i+1}) - u(x_i)).$$

Если будем рассматривать погрешность аппроксимации в каждой точке сетки x_i , то получим

$$\psi_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} u''(x_i) + O(\hbar_i^2), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Из этого выражения следует, что в сеточной норме

$$\|\cdot\|_{h,C} = \max_{x \in \omega_h} |\cdot|$$

норма погрешности равна

$$\|\psi_h\|_{h,C} = \max_{1 \leq i \leq N} |\psi_i| = O(h),$$

где $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$. Но можно подобрать другую норму, в которой порядок аппроксимации будет другим. Рассмотрим другую норму в пространстве сеточных функций – *негативную норму*

$$\|\psi_h\|_{h,-1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=1}^i \hbar_k \psi_k \right)^2}.$$

Тогда можно доказать, что величина погрешности в этой норме равна

$$\|\psi_h\|_{-1} = O(h^2).$$

Таким образом, исследование локальной погрешности может быть недостаточным для суждения о качестве разностного оператора. Выбор подходящей нормы всякий раз должен быть предметом изучения.

Рассмотрим основные нормы, которые мы дальше будем использовать в случае функций двух измерений. Рассмотрим функцию двух аргументов $u(x, t)$, $(x, t) \in G$, и наряду с ней рассмотрим сеточную функцию $y(x, t)$, $x \in \omega_h$, $t \in \omega_\tau$, которая определена на сетке $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$. В сеточном пространстве мы будем рассматривать в основном норму

$$\|y\|_{h\tau} = \max_{t \in \omega_\tau} \|y(t)\|$$

или

$$\|y\|_{h\tau} = \sqrt{\sum_{t \in \omega_\tau} \tau \|y(t)\|_h^2}.$$

Пример 6. Рассмотрим оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u \in H_0 = C^{4,2}[0, 1].$$

Возьмем простейшую аппроксимацию

$$L_{h\tau}u = u_t - u_{\bar{x}x}.$$

Если по x сетка равномерна, то h фиксировано. Распишем оператор в любой точке сетки

$$L_{h\tau}u = u_t - u_{\bar{x}x} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}.$$

В данном случае в качестве сеточной функции u мы рассматриваем проекцию u на сетку, то есть $u = u(x_i, t_j) = u_i^j$. Локальная погрешность аппроксимации имеет вид

$$L_{h\tau}u - (Lu)_{h\tau} = \psi_{h\tau}(x_i, t_j) = O(\tau + h^2).$$

Легко показать, что данный разностный оператор аппроксимирует исходный оператор на сетке с первым порядком по t и вторым порядком по x в любой из норм, рассматриваемых выше, то есть

$$\|\psi\|_{h\tau} = O(\tau + h^2).$$

Как правило, если мы вычислим погрешность аппроксимации в точке, то она обобщается и на всю сетку.

1.3 Разностная аппроксимация дифференциальных задач.

1.3.1 Постановка разностной задачи.

Как известно, дифференциальная задача включает в себя дифференциальное уравнение и дополнительные условия, которые выделяют из совокупности возможных решений единственное. Поэтому при формулировке разностных задач помимо аппроксимации дифференциальных уравнений, необходимо описывать в разностных уравнениях и дополнительные условия.

- Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальное уравнение и дополнительные условия, называется **разностной схемой**.
- Существуют две формы записи разностных схем: **безиндексная** и **индексная**.

Пример 1. Рассмотрим задачу вида

$$\begin{cases} u'(t) = f(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0 = \text{const}. \end{cases} \quad (1)$$

Для того, чтобы построить разностную схему, необходимо выписать разностное уравнение, которое будет аппроксимировать исходное дифференциальное уравнение. Для начала построим равномерную сетку

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \tau > 0, j = 0, 1, \dots\}.$$

Тогда дифференциальной задаче можно поставить в соответствие разностную схему в *безындексной* форме

$$\begin{cases} y_t = \varphi(t), & t \in \omega_\tau, \\ y(0) = u_0, \end{cases} \quad (2)$$

или в *индексной* форме

$$\begin{cases} \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \varphi^j, & j = 0, 1, \dots, \\ y(0) = u_0, \end{cases} \quad (3)$$

при этом

$$y^j = y(t_j) \approx u(t_j), \quad \varphi^j = \varphi(t_j).$$

При этом правая часть в разностном уравнении может быть задана различными способами, но при условии выполнения следующего соотношения – *необходимого условия для обеспечения первого порядка аппроксимации*

$$\varphi - f = O(\tau).$$

Например, в качестве $\varphi(t)$ можно выбирать и

$$\varphi(t) = f(t), \quad t \in \omega_\tau.$$

Также можно выбирать

$$\varphi(t) = \frac{f(t) + f(t + \tau)}{2}.$$

После записи разностной схемы необходимо указать способ реализации этой схемы.

• **Под способом реализации** будем понимать построение вычислительного алгоритма, позволяющего найти приближенное решение во всех узлах сетки.

В нашем примере способ реализации тривиален. Для реализации используется, как правило, индексная форма записи. Запишем алгоритм реализации разностной схемы (2)-(3)

$$y^{j+1} = y^j + \tau \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad y^0 = u_0. \quad (4)$$

Таким образом, для дифференциальной задачи (1) разностная схема (2)-(3) позволяет найти приближенное решение по алгоритму ее реализации (4).

Пример 2. Рассмотрим задачу для функции двух переменных для уравнения гиперболического типа

$$\begin{cases} Lu = f(x, t), \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ u = u(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (5)$$

Для аппроксимации задачи сперва мы должны выписать разностные уравнения, которые определяются приближением соответствующих разностных операторов и заменой непрерывной функции на сеточный аналог. Для простоты построим равномерную по h и τ сетку узлов

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau.$$

Выберем шаблон

$$\Pi(x, t) = \{(x - h, t), (x, t), (x + h, t), (x, t + \tau)\}, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau.$$

Вместо исходной задачи (5) построим разностную задачу, которая и будет являться разностной схемой в *безындexсной форме записи*

$$\begin{cases} y_t = y_{\overline{x}x} + \varphi, \quad \varphi = f + O(\tau + h^2), \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0, t) = \mu_0(t), \quad y(1, t) = \mu_1(t), \quad t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (6)$$

Запишем сразу алгоритм реализации этой разностной схемы:

$$\begin{cases} y_i^{j+1} = y_i^j + \tau \left(\frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j \right), \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{1, N_t - 1}, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N_x}, \\ y_0^j = \mu_0(t_j), \quad y_{N_x}^j = \mu_1(t), \quad j = \overline{1, N_t} \end{cases} \quad (7)$$

1.3.2 Сходимость и точность разностных схем.

Пусть дана дифференциальная задача

$$Lu = f(x), \quad x \in G, \quad (8)$$

$$lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma. \quad (9)$$

Искомая функция $u(x) \in H_0$, $x \in \overline{G} = G \cup \Gamma$, а L, l – дифференциальные операторы, действующие в пространстве H_0 с нормой $\|\cdot\|_0$. Задаче (8)-(9) на сетке $\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ поставим в соответствие разностную задачу, или разностную схему,

$$L_h y_h = \varphi_h, \quad x \in \omega_h, \quad (10)$$

$$l_h y_h = \chi_h, \quad x \in \gamma_h, \quad (11)$$

где приближенное решение $y_h(x) \in H_h$, $x \in \overline{\omega}_h$, а L_h, l_h – это разностные операторы, действующие в пространстве H_h с нормой, которая согласована с нормой пространства H_0 , то есть

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\cdot\|_h = \|\cdot\|_0.$$

• Разностная задача должна быть **корректно поставленной**, то есть

1. решение $y_h(x)$ задачи (10) – (11) существует и единственно для всех φ_h, χ_h из допустимого семейства сеточных функций;
2. решение $y_h(x)$ непрерывно зависит от φ_h, χ_h , то есть для любого шага сетки h_0 существует константа M такая, что при всех $h \leq h_0$ выполняется неравенство

$$\|y_h - \tilde{y}_h\|_h \leq M (\|\varphi_h - \tilde{\varphi}_h\|_h + \|\chi_h - \tilde{\chi}_h\|_h),$$

где \tilde{y}_h – решение задачи (11) с правыми частями $\tilde{\varphi}_h, \tilde{\chi}_h$. Непрерывная зависимость решений разностной задачи называется **устойчивостью по входным данным**.

Факт наличия устойчивости является одним из основных вопросов теории разностных схем.

Основной целью всякого приближенного метода является получение решения исходной непрерывной задачи с заданной точностью $\varepsilon > 0$ за конечное число действий k . Поэтому после построения разностной схемы, аппроксимирующей исходную задачу, мы должны убедиться в том, что решение разностной задачи y_h будет являться приближенным значением точного решения задачи $u(x)$.

Пусть u_h – это значения исходной функции $u(x)$ на сетке ω_h . Рассмотрим погрешность разностной схемы (10)-(11). Для этого введем функцию

$$z_h = u_h - y_h.$$

Выразим $y_h = u_h - z_h$ и подставим в задачу (10)-(11). Тогда получим задачу для погрешности

$$L_h z_h = \psi_h, \quad x \in \omega_h, \quad (12)$$

$$l_h z_h = \nu_h, \quad x \in \gamma_h, \quad (13)$$

где

$$\psi_h = L_h u_h - \varphi_h$$

$$\nu_h = l_h u_h - \chi_h.$$

• Функция ψ_h называется **погрешностью аппроксимации уравнения** (8) **разностным уравнением** (10). А функция ν_h – **погрешностью аппроксимации граничных условий** (9) **разностными граничными условиями** (11).

Для оценки погрешности z_h и погрешности аппроксимации ψ_h , ν_h введем на сеточном множестве функций нормы $\|\cdot\|_{1,h}$, $\|\cdot\|_{2,h}$, $\|\cdot\|_{3,h}$.

• Будем говорить, что решение разностной задачи (10) – (11) **сходится к решению непрерывной задачи** (8) – (9) (что то же самое **разностная схема** (10) – (11) **сходится**), если

$$\|z_h\|_{1,h} = \|u_h - y_h\|_{1,h} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0. \quad (14)$$

Разностная схема имеет **n -ый порядок точности**, если при достаточно малом $|h| \leq |h_0|$ выполняется неравенство

$$\|z_h\|_{1,h} \leq M|h|^n, \quad (15)$$

где M – константа, не зависящая от $h > 0$. Разностная схема имеет **m -ый порядок аппроксимации**, если

$$\|\psi_h\|_{2,h} = O(|h|^m), \quad \|\nu_h\|_{3,h} = O(|h|^m). \quad (16)$$

Обозначим через f_h и $(Lu)_h$ значение правой части уравнения (8) на сетке и значение Lu на сетке соответственно. С учетом того, что

$$(Lu - f)_h = 0,$$

то можно общую погрешность аппроксимации уравнения записать в виде

$$\psi_h = \psi_h^{(1)} + \psi_h^{(2)}, \quad (17)$$

где

$$\psi_h^{(1)} = f_h - \varphi_h,$$

– погрешность аппроксимации правой части

$$\psi_h^{(2)} = L_h u_h - (Lu)_h,$$

– погрешность аппроксимации дифференциального оператора. Аналогично можно записать общую погрешность ν_h и для граничных условий.

Оказывается, что понятия сходимости и точности связаны между собой для линейных разностных схем. Зависимость порядка точности от порядка аппроксимации дает теорема Лакса.

Теорема (Лакса). Если линейная разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную дифференциальную задачу, то она сходится. Причем порядок точности схемы определяется порядком ее аппроксимации.

1.3.3 Повышение порядка аппроксимации разностных схем.

Поскольку порядок сходимости разностной схемы, а значит и скорость сходимости приближенного решения к точному, зависит от порядка аппроксимации, то вопрос об увеличении порядка аппроксимации без увеличения геометрического шаблона является весьма важным для исследования разностных схем.

Пример 3. Возьмем задачу и разностную схему из примера 1. Рассмотрим погрешность аппроксимации

$$\begin{aligned}\psi_\tau(t) = u_t(t) - \varphi(t) &= \frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} - \varphi(t) = \left[u(t+\tau) = u(t) + \tau u'(t) + \frac{\tau^2}{2} u''(t) + O(\tau^3) \right] = \\ &= [u'(t) = f(t), u''(t) = f'(t)] = f(t) + \frac{\tau}{2} f'(t) - \varphi(t) + O(\tau^2)\end{aligned}$$

Можно в самом простом случае выбрать

$$\varphi(t) = f(t) + O(\tau).$$

Тогда мы получим разностную схему первого порядка $\psi_\tau = O(\tau)$. Причем при таком выборе $\varphi = f$ мы получили *явный метод Эйлера*.

Мы также можем взять

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{\tau}{2} f'(t) + O(\tau^2).$$

Тогда, если мы свернем

$$\varphi(t) = f\left(t + \frac{\tau}{2}\right),$$

то выражение выше аппроксимируется с порядком $O(\tau^2)$. Подставив это в нашу разностную схему, мы получим схему второго порядка аппроксимации. А это есть ничто иное, как *формула средних прямоугольников*.

В качестве φ можно выбирать и другие выражения. Например, если выбирать

$$\varphi = f(t) + \frac{\tau}{2} f_t(t),$$

то мы получим *формулу трапеций*.

Мы повышали порядок аппроксимации исходя из выбора правой части основного уравнения. Но чаще всего получается так, что задача задается с такими граничными условиями, в которых при минимальном шаблоне понижается порядок аппроксимации. Рассмотрим такой случай

Пример 4. Рассмотрим третью краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения следующего вида

$$u''(x) - qu(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (18)$$

$$u'(0) = \sigma_0 u(0) - \mu_0, \quad (19)$$

$$u(1) = \mu_1. \quad (20)$$

В уравнениях (18)-(20) числа $q, \sigma_0, \mu_0, \mu_1$ — это заданные константы. Построим равномерную сетку $\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ на отрезке $[0, 1]$, где

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, \quad i = \overline{1, N-1}, h = \frac{1}{N} \right\},$$

$$\gamma_h = \{x_0 = 0, x_N = 1\}$$

Для аппроксимации уравнения (18) выберем шаблон

$$\Pi_1(x) = \{x - h, x, x + h\}, \quad x \in \omega_h.$$

Для аппроксимации условия (19) выберем шаблон, состоящий из двух точек

$$\Pi_2(0) = \{x_0, x_1\} = \{0, h\},$$

Для аппроксимации условия (20) формально выбираем шаблон

$$\Pi_3(1) = \{x_N\} = \{1\}.$$

Заменяем дифференциальные производные разностными и строим разностную схему

$$y_{\bar{x}x}(x) - dy(x) = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad (21)$$

$$y_x(0) = \sigma_0 y(0) - \mu_0, \quad (22)$$

$$y(1) = \mu_1. \quad (23)$$

Исследуем погрешность аппроксимации. Для любого узла $x \in \omega_h$ запишем величину погрешности как невязку над точным решением

$$\psi_h = u_{\bar{x}x} - du + \varphi.$$

Воспользуемся соотношениями

$$u_{\bar{x}x} = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(IV)} + O(h^4).$$

Учитывая, что $u'' = qu - f$, получим

$$\psi_h = qu - f + \frac{h^2}{12}u^{(IV)} - du + \varphi + O(h^4) = (q - d)u + (\varphi - f) + O(h^2).$$

Отсюда видно, что $\psi_h = O(h^2)$, если мы выберем

$$d = q + O(h^2), \quad \varphi = f + O(h^2),$$

то разностное уравнение (21) будет аппроксимировать исходное разностное уравнение со вторым порядком.

Рассмотрим погрешность аппроксимации граничных условий

$$\begin{aligned} \nu_h(0) &= u_x(0) - \sigma_0 u(0) + \mu_0 = u'(0) + \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) - \sigma_0 u(0) + \mu_0 = \\ &= [u'(0) - \sigma_0 u(0) + \mu_0] + \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) = O(h). \end{aligned}$$

Исследуем аппроксимацию второго граничного условия

$$\nu_h(1) = u(1) - \mu_1 = 0,$$

то есть условие аппроксимируется точно.

В итоге мы получили погрешность аппроксимации граничных условий

$$\nu_h = \nu_h(0) + \nu_h(1) = O(h),$$

поэтому общий порядок аппроксимации равен сумме порядков аппроксимации

$$\Psi = \psi_h + \nu_h = O(h).$$

Следовательно, мы построили схему первого порядка аппроксимации.

В данном случае возникает потребность повысить порядок точности схемы, не изменяя размер шаблона. Для этого нам необходимо повысить порядок $\nu_h(0)$. Чтобы добиться этого, введем вместо коэффициентов σ_0 и μ_0 сеточные коэффициенты $\bar{\sigma}_0, \bar{\mu}_0$. Тогда вместо уравнения (22) будем рассматривать уравнение с этими коэффициентами

$$y_x(0) = \bar{\sigma}_0 y(0) - \bar{\mu}_0 \quad (24)$$

и подберем эти коэффициенты так, чтобы погрешность аппроксимации была равна $O(h^2)$. Выписываем погрешность аппроксимации с новыми коэффициентами, предполагая, что исходное дифференциальное уравнение (18) выполняется в точке $x = 0$.

$$\begin{aligned} \nu_h(0) &= u_x(0) - \bar{\sigma}_0 u(0) + \bar{\mu}_0 = u'(0) - (\bar{\sigma}_0 u(0) - \bar{\mu}_0) + \frac{h}{2} u''(0) + O(h^2) = \\ &= [u''(0) = qu(0) - f(0), \quad u'(0) = \sigma_0 u(0) - \mu_0] = \\ &= \left[\left(\sigma_0 + \frac{h}{2} q \right) - \bar{\sigma}_0 \right] u(0) + \left[\bar{\mu}_0 - \left(\mu_0 + \frac{h}{2} f(0) \right) \right] + O(h^2) \end{aligned}$$

Если мы выберем

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 + \frac{h}{2} q, \quad \bar{\mu}_0 = \mu_0 + \frac{h}{2} f(0),$$

то в уравнении (24) мы получим второй порядок аппроксимации, а значит схема (21), (24), (23) будет являться схемой второго порядка аппроксимации.

• Такой способ повышения порядка аппроксимации называется **методом повышения порядка с использованием вида дифференциального оператора**.

Пример 5. Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \sigma_0 u(0, t) - \mu_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(1, t) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (25)$$

В примере 4 у нас рассматривалась одномерная задача. Здесь же мы рассматриваем двумерную задачу. Ее же мы рассматривали в примере 2 при построении разностных схем.

Наряду с задачей (25) мы рассмотрим разностную схему (аналогично примеру 2)

$$\begin{cases} y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi(x, t), \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \\ y_x(0, t) = \bar{\sigma}_0 y(0, t) - \bar{\mu}_0(t), \quad t \in \emptyset\omega_\tau, \\ y(1, t) = \mu_1(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (26)$$

Здесь мы опускаем моменты задания сетки и построения разностных уравнений. Перед нами стоит задача построить на минимальном шаблоне схему второго порядка аппроксимации по пространственной переменной и первого порядка по временной переменной

$$\Psi = O(h^2 + \tau).$$

Для аппроксимации исходного уравнения с заданным порядком нам достаточно выбрать

$$\varphi(x, t) = f(x, t) + O(h^2 + \tau).$$

Если мы в разностной схеме (26) возьмем

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0, \quad \bar{\mu}_0 = \mu_0(t),$$

то получим погрешность аппроксимации первого граничного условия

$$\nu(0, t) = O(h).$$

Следовательно, общий порядок аппроксимации по пространственной переменной – первый. А значит мы должны подобрать $\bar{\sigma}_0, \bar{\mu}_0(t)$ так, чтобы погрешность аппроксимации была $O(h^2)$.

Исследуем погрешность аппроксимации, для этого рассмотрим невязку над точным решением

$$\begin{aligned} \nu(0, t) &= u_x(0, t) - \bar{\sigma}_0 u(0, t) + \bar{\mu}_0(t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \bar{\sigma}_0 u(0, t) + \bar{\mu}_0(t) = \\ &= \left[\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \sigma_0 u(0, t) - \mu_0(t), \quad \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} - f(0, t), \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = u_t(0, t) + O(\tau) \right] = \\ &= (\sigma_0 - \bar{\sigma}_0) u(0, t) + \left(\bar{\mu}_0(t) - \mu_0(t) + \frac{h}{2} u_t(0, t) - \frac{h}{2} f(0, t) \right) + O(h^2 + h\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, если выбрать

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0, \quad \bar{\mu}_0(t) = \mu_0(t) - \frac{h}{2} u_t(0, t) + \frac{h}{2} f(0, t), \quad (27)$$

то порядок схемы (26) будет повышен и погрешность аппроксимации будет $O(h^2 + \tau)$. Для аппроксимации производной по t мы можем использовать одну из трех известных нам аппроксимаций. Но если бы мы взяли центральную производную, то у нас бы уже увеличился исходный шаблон, то есть нарушено условие минимальности шаблона. Мы взяли левостороннюю аппроксимацию, потому что иначе мы бы не смогли реализовать разностную схему. Чтобы это показать, запишем алгоритм реализации разностной схемы (26)-(27) в индексном виде

$$\begin{cases} y_i^{j+1} = y_i^j + \frac{\tau}{h^2} (y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) + \tau \varphi_i^j, & i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{0, N_t - 1}, \\ y_i^0 = u_0(x), & i = \overline{0, N_x}, \\ y_0^{j+1} = \frac{1}{\frac{1}{h} + \frac{h}{2\tau} + \sigma_0} \left(\frac{1}{h} y_1^{j+1} + \frac{h}{2\tau} y_0^j + \mu_0(t_{j+1}) + \frac{h}{2} f(0, t_{j+1}) \right), & j = \overline{0, N_t - 1}, \\ y_{N_t}^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), & j = \overline{0, N_t - 1}. \end{cases} \quad (28)$$

Расчеты следует вести следующим образом. В нулевой момент времени используется вторая формула для заполнения нулевого слоя. Затем заполняется первый слой, начиная с

левого граничного узла по третьей формуле, но нам нужно знать y_1^{j+1} . Поэтому сначала считаются внутренние узлы по первой формуле. После этого уже считаем по третьей формуле левое граничное условие. А затем вычисляется правое граничное условие по четвертой формуле.

Для повышения порядка аппроксимации использован прием изменения направления дифференцирования, который позволил вторую производную по x заменить первой производной по t .

1.4 Способы построения разностных схем.

В первых трех параграфах мы рассмотрели основные понятия теории разностных схем: что такое аппроксимация, что такое сходимость, как строить схемы самым простейшим способом, как повышать порядок аппроксимации за счет замены дифференциальных производных разностными аналогами. Но этот простейший способ аппроксимации не всегда является самым лучшим. Вообще говоря, сам процесс построения разностных схем не может ограничиваться только простейшими аналогами дифференциальных производных.

Рассмотрим два подхода, которые применяются для получения разностных схем с разными свойствами, обеспечивающих получение приближенного решения на сетке. Для того, чтобы строить разностные схемы нам нужны некоторые требования, предъявляемые к получаемым разностным схемам.

1.4.1 Требования предъявляемые к разностным схемам.

Пусть у нас есть уравнение

$$Lu(x) = u''(x) - q(x)u(x) = -f(x).$$

На трехточечном шаблоне мы можем построить двухпараметрическое семейство разностных аппроксимаций

$$L_h y(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - d_i y_i = -\varphi_i,$$

где в качестве коэффициентов разностного уравнения мы выбрали не $q(x)$ и $f(x)$, а d_i и φ_i . Для обеспечения соответствующего порядка аппроксимации мы можем выбрать в качестве d_i , φ_i значения функций q и f в трех точках шаблона

$$d_i = \alpha q_{i-1} + (1 - 2\alpha)q_i + \alpha q_{i+1},$$

$$\varphi_i = \beta f_{i-1} + (1 - 2\beta)f_i + \beta f_{i+1},$$

где α и β – некоторые параметры. Можно показать, что при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ разностный оператор $L_h y$ будет аппроксимировать исходный оператор Lu со вторым порядком. При этом к коэффициентам d_i и φ_i можно без нарушения порядка аппроксимации добавлять слагаемые вида Ch^2 , $C = \text{const}$. Таким образом, возникает задача выбора разностных схем из множества допустимых заданных на выбранном шаблоне, имеющих один и тот же порядок аппроксимации.

Поэтому к любому способу построения той или иной разностной схемы предъявляются определенные требования: *количественные* и *качественные*. Если говорить о количественных требованиях, то можно выделить три основных требования:

1. разностные схемы должны иметь определенный порядок аппроксимации на заданном подмножестве $K' \subset K$ из класса K решаемых задач;
2. максимальный порядок точности на всем классе K решаемых задач;
3. минимум операций при машинной реализации решений разностных уравнений, – *требование экономичности разностных схем.*

Выделим также три качественных характеристики:

1. система разностных уравнений должна быть *разрешимой* на любой допустимой сетке и для любой задачи из рассматриваемого класса K ;
2. схема должна быть *сходящейся* для любой задачи из рассматриваемого класса K ;
3. схема должна быть *однородной*, то есть разностные уравнения для любой задачи из рассматриваемого класса K должны записываться единообразно по одному и тому же закону.

Для того, чтобы обеспечить выполнение этих требований, мы рассмотрим два способа построения разностных схем.

1.4.2 Интегро-интерполяционный метод построения разностных схем (метод баланса).

Данный метод позволяет построить разностные схемы, которые получили название *консервативных разностных схем*, то есть таких разностных схем, которые выражают физические законы сохранения на сетке. Проиллюстрируем данный метод на примере задачи для одномерного уравнения теплопроводности вида

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1. \quad (1)$$

Уравнение (1) описывает процесс стационарного распределения тепла в стержне единичной длины. При этом $u(x)$ – это температура стержня, $k(x) \geq k_0 > 0$ – коэффициент теплопроводности материала стержня, $q(x)u(x)$ – это слагаемое, которое отвечает за мощность стоков или источников тепла ($q > 0$ – сток, $q < 0$ – источник), а правая часть $f(x)$ – это плотность распределения внешних источников или стоков тепла ($f > 0$ – источник, $f < 0$ – сток).

Для того, чтобы задача была математически замкнута, нам нужно на концах стержня задать граничные условия. Зададим на концах стержня условия третьего рода

$$k(0)u'(0) = \kappa_0 u(0) - g_0, \quad (2)$$

$$-k(1)u'(1) = \kappa_1 u(1) - g_1. \quad (3)$$

В условиях (2) и (3) значения $\kappa_0, \kappa_1, g_0, g_1$ – заданные константы, которые задают величину и структуру теплового потока на концах стержня. Теперь мы желаем построить разностную схему.

1.4.2.1 Вывод разностных уравнений.

Чтобы получить разностную схему, нам нужно получить систему разностных уравнений, которая будет давать возможность найти приближенное решение на заданной сетке.

Проинтегрируем исходное уравнение (1) по переменной x , $0 < x^{(1)} \leq x \leq x^{(2)} < 1$:

$$\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} (ku')' dx - \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} q(x)u(x)dx = - \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f(x)dx.$$

Обозначим функцию

$$W(x) = -k(x)u'(x),$$

которая имеет конкретный физический смысл: $W(x)$ – это тепловой поток. Таким образом, можно записать

$$W(x^{(1)}) - W(x^{(2)}) = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} (q(x)u(x) - f(x))dx \quad (4)$$

• Уравнение (4) называется **уравнением баланса**, и оно определяет закон сохранения тепла на отрезке $[x^{(1)}, x^{(2)}]$.

Исходя из уравнения (4) мы будем строить нашу разностную схему, которая будет удовлетворять данному уравнению. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана равномерная сетка

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, \ i = \overline{0, N}, \ h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Обозначим полуцелые узлы через

$$x_{i \pm \frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{h}{2}.$$

На отрезке $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ запишем уравнение (4) в следующем виде:

$$W_{i-\frac{1}{2}} - W_{i+\frac{1}{2}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx = - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx. \quad (5)$$

Заменим функцию $u(x)$ на отрезке интегрирования $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ многочленом нулевой степени, то есть $u(x) \approx P_0(x) = u(x_i) = u_i$. Тогда

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx \approx h d_i u_i,$$

где через d_i мы обозначили

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx. \quad (6)$$

Рассмотрим уравнение (5). Нам нужно вычислить W . Для этого, учитывая, что

$$-u'(x) = \frac{W(x)}{k(x)},$$

получим

$$-\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)}dx.$$

Следовательно,

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)}dx.$$

Теперь попробуем вычислить интеграл справа. Для этого заменим $W(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ полиномом нулевой степени

$$W(x) \approx \tilde{P}_0(x) = W(x_{i-\frac{1}{2}}) = W_{i-\frac{1}{2}}.$$

Тогда из последнего равенства можем получить

$$W_{i-\frac{1}{2}} \approx -a_i u_{\bar{x},i}, \quad (7)$$

где

$$a_i = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx \right]^{-1}. \quad (8)$$

Интеграл от $f(x)$ в уравнении (5) тоже переобозначим и пронормируем

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx \quad (9)$$

С учетом сделанных обозначений вместо уравнения (5) получим уравнение баланса в новом виде

$$a_{i+1} u_{\bar{x},i+1} - a_i u_{\bar{x},i} - h d_i u_i \approx -h \varphi_i$$

Разделив последнее равенство на h и переходя к точному равенству для приближенных значений решения в узлах сетки, получим уравнение баланса в индексной форме

$$\frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (10)$$

Это же уравнение мы можем записать в безиндексной форме

$$(ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, \quad x \in \omega_h \quad (11)$$

В уравнении (11) коэффициенты a_i , d_i , φ_i вычисляются по формулам (8), (6) и (9). Таким образом, мы получили разностное уравнение (10), которое аппроксимирует исходное уравнение (1) во всех внутренних узлах сетки. Для того, чтобы аппроксимировать всю задачу, необходимо аппроксимировать граничные условия (2) и (3).

Для начала рассмотрим граничное условие на левой границе. Чтобы его аппроксимировать, запишем уравнение баланса (4) на отрезке $\left[0, \frac{h}{2}\right]$. В итоге уравнение баланса (4) превратится в уравнение вида

$$W_0 - W_{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{h}{2}} q(x)u(x)dx = - \int_0^{\frac{h}{2}} f(x)dx. \quad (12)$$

Воспользуемся тем фактом, что

$$W_0 = -k(0)u'(0),$$

а по условию (2) мы получим, что

$$W_0 = -k(0)u'(0) = -\kappa_0 u(0) + g_0.$$

Из формулы (7) следует, что при $i = 1$, получим

$$W_{\frac{1}{2}} = -a_1 u_{\bar{x},1} = -a_1 u_{x,0}.$$

Для преобразования интеграла будем действовать таким же образом, как и раньше: функцию $u(x)$ заменим полиномом нулевой степени и в качестве константы возьмем левую границу отрезка, то есть $u(x) \approx u(x_0)$. С учетом сделанных вычислений, переходя от функции u к сеточной функции y , вместо уравнения (2) получим

$$a_1 y_{x,0} = \left(\kappa_0 + \frac{h}{2}d_0\right) y_0 - \left(g_0 + \frac{h}{2}\varphi_0\right), \quad (13)$$

где

$$d_0 = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} q(x)dx, \quad \varphi_0 = \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} f(x)dx. \quad (14)$$

Аналогично можно получить аппроксимацию правого краевого условия. Запишем ее без вывода

$$-a_N y_{\bar{x},N} = \left(\kappa_1 + \frac{h}{2}d_N\right) y_N - \left(g_1 + \frac{h}{2}\varphi_N\right), \quad (15)$$

где

$$d_N = \frac{2}{h} \int_{1-\frac{h}{2}}^1 q(x)dx, \quad \varphi_N = \frac{2}{h} \int_{1-\frac{h}{2}}^1 f(x)dx. \quad (16)$$

Таким образом, методом баланса мы построили разностную схему (11), (13), (15)

$$\begin{cases} (ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, & x \in \omega_h, \\ a_1 y_{x,0} = \left(\kappa_0 + \frac{h}{2}d_0\right) y_0 - \left(g_0 + \frac{h}{2}\varphi_0\right), \\ -a_N y_{\bar{x},N} = \left(\kappa_1 + \frac{h}{2}d_N\right) y_N - \left(g_1 + \frac{h}{2}\varphi_N\right). \end{cases}$$

Разностная задача может быть решена методом прогонки, который будет устойчив.

Теперь мы должны ответить на вопрос, каков порядок аппроксимации этой разностной схемы.

1.4.2.2 Исследование погрешности аппроксимации.

Чтобы установить порядок погрешности аппроксимации разностной схемы (11), (13), (15), необходимо исследовать величину невязки разностных уравнений над точным решением в соответствии с определением погрешности аппроксимации.

Рассмотрим первое уравнение (11) и исследуем величину погрешности в любой точке x_i , где x_i – внутренний узел

$$\psi(x_i) = \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) - d_i u_i + \varphi_i, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Разложив все функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_i и пользуясь тем фактом, что в каждой точке x_i

$$(k_i u'_i)' - q_i u_i + f_i = 0,$$

получим *достаточные условия второго порядка аппроксимации* разностного уравнения (11)

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = k'(x_i) + O(h^2), \quad \frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k(x_i) + O(h^2), \quad (17)$$

$$d_i = q(x_i) + O(h^2), \quad (18)$$

$$\varphi_i = f(x_i) + O(h^2). \quad (19)$$

Эти условия получены без предположения о том, что разностные уравнения выводились из условия баланса. Когда мы строили разностную схему, коэффициенты удовлетворяли равенствам (8), (6) и (9). Значит, если мы строим консервативную схему, то коэффициенты должны определяться по этим формулам. С другой стороны, чтобы схема была второго порядка, нам нужно, чтобы коэффициенты удовлетворяли равенствам выше. Поэтому мы докажем, что если коэффициенты вычисляются через интегралы (8), (6) и (9), то условия (17), (18) и (19) будут выполняться. Для доказательства выполнения условия (17) обозначим

$$v(x) = \frac{1}{k(x)}.$$

Тогда из формулы (8) получим, применяя формулу средних прямоугольников,

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v(x) dx = v(x_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{24} v''(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(h^4),$$

а тогда

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{v(x_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{24} v''(x_{i-\frac{1}{2}})} + O(h^4) = \frac{1}{v(x_{i-\frac{1}{2}})} \cdot \frac{1}{1 + \frac{h^2}{24} \frac{v''(x_{i-\frac{1}{2}})}{v(x_{i-\frac{1}{2}})}} + O(h^4) = \\ &= k_{i-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24} \cdot \frac{v''(x_{i-\frac{1}{2}})}{v^2(x_{i-\frac{1}{2}})} + O(h^4) = k_{i-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24} \frac{v''_i}{v_i^2} + O(h^3). \end{aligned}$$

Тогда, чтобы доказать выполнение условий (17), составим отношения

$$\begin{aligned} \frac{a_{i+1} - a_i}{h} &= \frac{k_{i+\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}}}{h} + O(h^2) = k'_i + O(h^2). \\ \frac{a_{i+1} + a_i}{2} &= \frac{k_{i+\frac{1}{2}} + k_{i-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{12} \frac{v''_i}{v_i^2} + O(h^3)}{2} = k_i + O(h^2). \end{aligned}$$

Таким образом, оба условия из (17) выполнены, если выбирать коэффициенты a_i по формулам (8).

Гораздо проще проверяются условия (18) и (19). Они будут выполнены в силу того, что замена интегралов значениями q_i и f_i соответствует их приближенному вычислению по формуле средних прямоугольников.

Итак мы установили, что во всех внутренних узлах погрешность аппроксимации равна $O(h^2)$. И если мы будем вычислять коэффициенты по формулам (8), (6) и (9), то схема будет обладать вторым порядком аппроксимации.

Но нам также надо исследовать погрешность аппроксимации граничных условий. Рассмотрим погрешность аппроксимации на левой границе

$$\nu_1(0) = a_1 u_{x,0} - \left(\kappa_0 + \frac{h}{2} d_0 \right) u_0 + \left(g_0 + \frac{h}{2} \varphi_0 \right).$$

Действует аналогично предыдущему случаю, используя следующее соотношение

$$a_1 u_{x,0} = a_1 u_{\bar{x},1} = -W_{\frac{1}{2}} + O(h^2) = -W_0 - \frac{h}{2} W'_0 + O(h^2) = k(0)u'(0) + \frac{h}{2}(k(0)u'(0))' + O(h^2).$$

Теперь воспользуемся тем, что по условию (2)

$$k(0)u'(0) - \kappa_0 u(0) + g_0 = 0,$$

тогда

$$\nu_1(0) = \frac{h}{2} ((k(0)u'(0))' - d_0 u(0) + \varphi_0) + O(h^2) = \frac{h}{2} ((q(0) - d_0)u(0) + (\varphi_0 - f(0))) + O(h^2).$$

Отсюда мы получаем условия, достаточные для аппроксимации со вторым порядком в точке $x = 0$:

$$d_0 = q(0) + O(h), \quad \varphi_0 = f(0) + O(h) \quad (20)$$

Видно, что условие выполняется, если мы вычисляем значения коэффициентов по формулам (14). Аналогично можно показать, что

$$\nu_2(1) = O(h^2),$$

если

$$d_N = q(1) + O(h), \quad \varphi_N = f(1) + O(h). \quad (21)$$

Таким образом, при достаточной гладкости коэффициентов k , q , f и решения u разностная схема (11), (13), (15) аппроксимирует исходную задачу (1), (2), (3) со вторым порядком.

Замечание. При практическом использовании разностной схемы для нахождения ее коэффициентов необязательно вычислять интегралы точно, их можно определять приближенно так, чтобы не нарушались условия (17)-(21).

Представление коэффициентов разностной схемы в виде интегралов оказывается полезным в случае разрывных функций k , q , f .

1.4.3 Вариационно-проекционный способ построения разностных схем.

1.4.3.1 Сущность вариационно-проекционного подхода. Основные термины.

Суть вариационного подхода заключается в том, что вместо решения исходной дифференциальной задачи мы рассматриваем эквивалентную ей задачу минимизации функционала, решив которую, то есть найдя минимум функционала, мы получаем искомое решение исходной дифференциальной задачи. С этим подходом мы сталкивались в курсе вычислительных методов алгебры при рассмотрении методов решения линейных систем (итерационные методы вариационного типа), например, методы спуска, невязок, релаксации. В курсе методов численного анализа мы также сталкивались с этим подходом, когда рассматривали краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка, например, методы Рунге и Галеркина.

Будем рассматривать подход, когда дифференциальная задача сводится к построению приближения $u_n(x)$ к искомой функции $u(x)$ как линейную комбинацию

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x)$ – базисные функции, а a_i – это коэффициенты подлежащие определению. Если коэффициенты a_i определяются из условия минимума функционала соответствующего рассматриваемой вариационной задаче, то мы получим, так называемые, *вариационные методы*, среди которых метод Рунге, метод наименьших квадратов. Если определять a_i из условия ортогональности невязки к каждой из базисных функций, то мы придем к, так называемому, *проекционному методу*, среди которых метод Галеркина, метод моментов.

Оба эти варианта приводят к системам линейных алгебраических уравнений с *плотной матрицей* (то есть не разреженной, все ее элементы будут ненулевыми в общем случае). Чтобы получить систему с *разреженной матрицей*, а значит построить экономичные методы определения приближенного решения, в качестве базисных функций φ_i необходимо брать функции с *конечным носителем* (*финитные функции*). *Финитные функции* – это такие функции, которые отличны от нуля лишь на небольшой части той области, где определено искомое решение задачи. При этом такие методы стали называться *вариационно-разностными* либо *проекционно-разностными* в зависимости от способа выбора функционала.

В заключение отметим, что применение вариационного принципа к решению задач математической физики автоматически приводит к разностным схемам, обладающим свойством консервативности. Это происходит из-за того, что соответствующий функционал, отражающий законы сохранения, достигает своего минимума на решении интересующей нас задачи.

1.4.3.2 Метод Рунге построения разностных схем.

Построим вариационно-разностную схему для задачи (1), (2), (3), причем для применения вариационного подхода необходимо потребовать выполнение следующих условий для коэффициентов

$$k(x) \geq k_0 > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \kappa_0 \geq 0, \quad \kappa_1 \geq 0, \quad (22)$$

чтобы обеспечить возможность применения вариационного подхода. Дифференциальная задача (1), (2), (3) при выполнении условий (22) эквивалентна задаче отыскания функции

$u(x)$, доставляющей минимум функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}[u, u] - \int_0^1 f(x)u(x)dx - g_0u(0) - g_1u(1), \quad (23)$$

где

$$[u, v] = \int_0^1 (k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))dx + \kappa_0u(0)v(0) + \kappa_1u(1)v(1). \quad (24)$$

Построим последовательность конечномерных подпространств $V_n \in W_2^1[0, 1]$ размерности n и будем на этих подпространствах искать минимум функционала (23). Базис в каждом подпространстве V_n будем обозначать через функции $\eta_i^{(n)}$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда любой элемент пространства $u_n \in V_n$ представим в виде линейной комбинации

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \eta_i^{(n)}. \quad (25)$$

Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , будем находить из условия минимума функционала. Условие минимума функционала приводит к системе уравнений относительно a_i

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} a_j = \beta_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (26)$$

где

$$\alpha_{ij} = [\eta_i^{(n)}, \eta_j^{(n)}], \quad \beta_i = \int_0^1 f(x)\eta_i^{(n)}(x)dx + g_0\eta_i^{(n)}(0) + g_1\eta_i^{(n)}(1). \quad (27)$$

Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана сетка

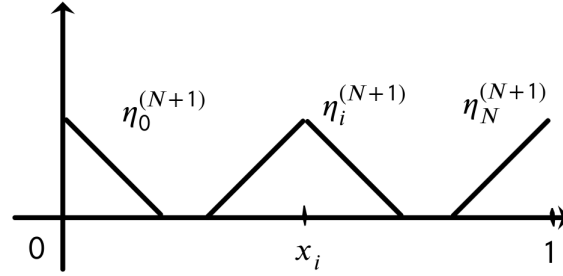
$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad h = \frac{1}{N} \right\},$$

тогда зададим $N = n - 1$. Система (26) будет иметь вид трехточечной разностной схемы, если матрица этой системы будет трехдиагональной, то есть если коэффициенты $\alpha_{ij} = 0$, если $|i - j| > 1$. Более того мы сразу будем добиваться того, чтобы в качестве параметров разложения (25) были значения функции u_n в узлах сетки ω_h . Матрица системы (26) будет трехдиагональной, если базисные функции подпространства V_n будут ортогональны в смысле скалярного произведения (24) при $|i - j| \geq 2$. Это условие будет выполнено, если в качестве базисных функций $\eta_i^{(N+1)}(x)$ взять функции, которые отличны от нуля, если $|x - x_i| \leq h$, $x \in [0, 1]$. Так мы обеспечили первое условие. Второе же условие (совпадения в узлах сетки) обеспечивается равенством $\eta_i^{(N+1)}(x_i) = 1$, то есть построенные базисные функции в узлах сетки равны единице.

Опишем самый простейший вариант определения функций $\eta_i^{(N+1)}$:

$$\begin{aligned}\eta_0^{(N+1)}(x) &= \begin{cases} \frac{h-x}{h}, & x \in [0, h], \\ 0, & x \notin [0, h]; \end{cases} \\ \eta_i^{(N+1)}(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \eta_N^{(N+1)}(x) &= \begin{cases} \frac{x-1+h}{h}, & x \in [1-h, 1], \\ 0, & x \notin [1-h, 1]. \end{cases}\end{aligned}\tag{28}$$

Фактически мы задали базис, чтобы аппроксимировать нашу функцию линейной комбинацией базисных функций.



В итоге при подстановке вместо системы (26) мы получим трехдиагональную систему вида

$$\begin{cases} \alpha_{ii-1}y_{i-1} + \alpha_{ii}y_i + \alpha_{ii+1}y_{i+1} = \beta_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ \alpha_{00}y_0 + \alpha_{01}y_1 = \beta_0, \\ \alpha_{NN-1}y_{N-1} + \alpha_{NN}y_N = \beta_N, \end{cases}\tag{29}$$

где $y_i \approx u_n(x_i)$,

$$\begin{aligned}\alpha_{ii} &= \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x-x_{i-1})^2dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x_{i+1}-x)^2dx \right], \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \alpha_{ii+1} &= \frac{1}{h^2} \left[- \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x-x_i)(x_{i+1}-x)dx \right], \quad i = \overline{0, N-1},\end{aligned}$$

причем $\alpha_{ii+1} = \alpha_{i+1i}$. Тогда можно вычислить

$$\begin{aligned}\beta_i &= \frac{1}{h} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x-x_{i-1})dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1}-x)dx \right], \quad i = \overline{1, N-1}, \\ \alpha_{00} &= \frac{1}{h^2} \left[\int_0^h k(x)dx + \int_0^h q(x)(x-h)^2dx \right] + \kappa_0,\end{aligned}$$

$$\alpha_{NN} = \frac{1}{h^2} \left[\int_{1-h}^h k(x) dx + \int_{1-h}^h q(x)(x-1+h)^2 dx \right] + \kappa_1,$$

$$\beta_0 = \frac{1}{h} \left[\int_0^h f(x)(h-x) dx + g_0 \right], \quad \beta_N = \frac{1}{h} \left[\int_{1-h}^1 f(x)(x-1+h) dx + g_1 \right].$$

Систему (29) можно привести к виду (11), (13), (15). При этом у нас получится следующее соотношение между коэффициентами

$$a_i = -h\alpha_{ii-1}, \quad d_i = \frac{1}{h}(\alpha_{ii-1} + \alpha_{ii} + \alpha_{ii+1}), \quad \varphi_i = \frac{1}{h}\beta_i, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Аналогично можно преобразовать коэффициенты для граничных условий $d_0, d_N, \varphi_0, \varphi_N$.

Можно показать, что вариационно разностная схема, построенная по методу Ритца, является консервативной и обладает вторым порядком аппроксимации. По методу Бубнова-Галеркина аналогичным образом можно построить проекционно-разностные схемы, которые применимы для задач с несамосопряженным оператором, поскольку основным ограничением метода Ритца является достаточно жесткое требование, предъявляемое к исходной задаче: оператор должен быть положительный и самосопряженный.

1.5 Методы исследования устойчивости разностных схем

1.5.1 Принцип максимума

Этот метод исследования устойчивости позволяет получать равномерные оценки решения через правую часть уравнения, граничные и начальные условия.

Пусть Ω – это некоторое конечное множество точек $x = (x_1, \dots, x_p)$ p -мерного евклидова пространства. Пусть также в каждой точке $x \in \Omega$ задан шаблон $\Pi(x) \subset \Omega$. Обозначим

$$\Pi'(x) = \Pi(x) \setminus \{x\},$$

окрестность точки x . Рассмотрим уравнение

$$Sy(x) = F(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

где $y(x)$ – это искомая сеточная функция, $F(x)$ – это заданная сеточная функция, а S – это линейный оператор, определяемый следующей формулой

$$Sv(x) = A(x)v(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi)v(\xi), \quad (2)$$

где $v(x)$ – это любая сеточная функция, коэффициенты $A(x)$, $B(x, \xi)$ – это заданные сеточные функции. Для определенности будем предполагать, что коэффициенты A и B удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} 1. \quad & A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \Pi'(x); \\ 2. \quad & D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi) \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В этих обозначениях уравнение (1) представляет собой разностную схему. Пусть x – это произвольный узел сетки. Тогда возможны два случая

1. $\Pi'(x) = \emptyset$;
2. $\Pi'(x)$ содержит хотя бы один $\xi \in \Omega$.

В первом случае уравнение (1) примет простой вид

$$A(\bar{x})y(\bar{x}) = F(\bar{x}),$$

тогда

$$y(\bar{x}) = \frac{A}{F} = g(x)$$

и точку $\bar{x} \in \gamma$ мы будем называть *граничным узлом*. Остальные же узлы, окрестность которых состоит по крайней мере из одной точки (второй случай), будем называть *внутренними узлами*. В итоге из сделанных определений получим, что

$$\Omega = \omega \cup \gamma$$

(следует иметь ввиду, что, если мы имеем дифференциальную задачу с краевыми условиями второго или третьего рода, данного определения граничных узлов не существует).

Предположим, что сетка Ω связная.

• Сетка узлов называется **связной**, если для любых двух узлов $\tilde{x}, \tilde{\tilde{x}}$, не являющихся одновременно граничными, можно указать такую последовательность узлов x_1, \dots, x_m , что каждый последующий узел принадлежит окрестности предыдущего, то есть

$$x_1 \in \Pi'(\tilde{x}), x_2 \in \Pi'(x_1), \dots, x_m \in \Pi'(x_{m-1}), \tilde{\tilde{x}} \in \Pi'(x_m). \quad (4)$$

При сделанных предположениях сформулируем основную теорему

Теорема (принцип максимума). Пусть $y(x)$ – это отличная от тождественной постоянной сеточная функция определенная на связной сетке Ω и пусть на ω выполнены условия (3). Тогда из условия $Sy(x) \leq 0$ ($Sy(x) \geq 0$) на ω следует, что $y(x)$ не может принимать наибольшего (наименьшего отрицательного) значения во внутренних узлах сетки Ω .

♦ Для доказательства теоремы рассмотрим случай $Sy(x) \leq 0$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует такой узел $\tilde{x} \in \omega$, в котором

$$y(\tilde{x}) = \max_{x \in \omega} y(x) > 0.$$

Рассмотрим оператор

$$Sy(\tilde{x}) = D(\tilde{x})y(\tilde{x}) + \sum_{\xi \in \Pi'(\tilde{x})} B(\tilde{x}, \xi)(y(\tilde{x}) - y(\xi)) \geq 0,$$

учитывая то, что выполняются условия (3), имеем тот факт, что это выражение положительное. Но с другой стороны по условию теоремы $Sy(\tilde{x}) \leq 0$. А отсюда следует, что $Sy(\tilde{x}) = 0$. Но, учитывая тот факт, что $D(\tilde{x}) \geq 0$, $B(\tilde{x}, \xi) > 0$, получаем, что

$$D(\tilde{x}) = 0.$$

А значит

$$y(\tilde{x}) = y(\xi), \quad \xi \in \Pi'(\tilde{x}).$$

Так как сеточная функция $y(x)$ отлична от тождественной константы, то существует такой узел $\tilde{x} \in \omega$, что

$$y(\tilde{x}) < y(\tilde{x}).$$

В силу связности сетки ω можно указать последовательность узлов, удовлетворяющую условию (4). Предположим, что $y(x_1) = y(\tilde{x})$, тогда

$$y(x_1) = y(x_2) = \dots = y(x_m) = y(\tilde{x}).$$

Тогда для точки x_m мы получим равенство

$$Sy(x_m) = D(x_m)y(x_m) + \sum_{\xi \in \Pi'(x_m)} B(x_m, \xi)(y(x_m) - y(\xi)) \geq B(x_m, \tilde{x})(y(x_m) - y(\tilde{x})) > 0,$$

то есть существует такая точка, в которой $Sy(x) > 0$, что является противоречием с предположением о том, что $Sy(x) \geq 0$. Следовательно, предположение, которое мы сделали о существовании узла \tilde{x} , оказалось неверным, а значит теорема доказана. \square

Сформулируем два следствия к этой теореме.

Следствие. Пусть $Sy(x) \leq 0$ ($Sy(x) \geq 0$), $x \in \Omega$, где Ω – связная сетка. При этом для оператора S выполняются условия (3). Кроме того существует по крайней мере один узел $x_0 \in \Omega$, для которого

$$D(x_0) > 0. \quad (5)$$

Тогда $y(x) \leq 0$ ($y(x) \geq 0$) на Ω .

◆ Без доказательства. \square

Следствие. Пусть оператор S удовлетворяет условиям (3) и (5). Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение.

◆ Без доказательства. \square

Теорема (сравнения). Пусть $y(x)$ – это решение задачи (1), (3), (5), а $\tilde{y}(x)$ – это решение той же задачи, но с другой правой частью $\tilde{F}(x)$. Тогда из условия, что

$$|F(x)| \leq \tilde{F}(x)$$

следует, что

$$|y(x)| \leq \tilde{y}(x), \quad x \in \Omega.$$

◆ Имеем две задачи $Sy(x) = F(x)$, $S\tilde{y}(x) = \tilde{F}(x)$. Если сложим обе задачи, то получим, учитывая линейность оператора S ,

$$S(y + \tilde{y}) = F + \tilde{F} \geq 0.$$

Если вычтем из первой задачи вторую, то получим

$$S(y - \tilde{y}) = F - \tilde{F} \geq 0.$$

Из этих неравенств по следствию 1 следует, что

$$\begin{cases} \tilde{y} + y \geq 0, \\ \tilde{y} - y \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$|y| \leq \tilde{y}.$$

□

В качестве мажорантной функции \tilde{F} обычно можно использовать

$$\tilde{F} = \|F(x)\|_C$$

или

$$\tilde{F} = |F(x)|.$$

Тогда теорема сравнения позволяет сразу получить оценку решения первой краевой задачи в случае однородного уравнения (1). А значит можно сформулировать следующий результат.

Следствие. Для решения однородной задачи с краевыми условиями первого рода

$$\begin{cases} Sy(x) = 0, & x \in \Omega, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma; \end{cases}$$

справедлива оценка

$$\max_{x \in \Omega} |y(x)| \leq |\mu(x)|$$

или же

$$\|y\|_C \leq \|\mu\|. \quad (6)$$

Эта оценка является априорной.

◆ Без доказательства. □

Теорема. Если $D(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$, то для решения задачи (1)–(3) верна априорная оценка

$$\max_{x \in \Omega} |y(x)| \leq \max_{x \in \Omega} \frac{|F(x)|}{D(x)}$$

или что то же самое

$$\|y\| \leq \left\| \frac{F}{D} \right\| \quad (7)$$

◆ Доказательство аналогично принципу максимума. □

Сформулируем алгоритм исследования устойчивости с помощью принципа максимума.

1. Необходимо привести разностную схему к виду (1)-(2).
2. Проверить условия (3) и (5).
3. Если условия (3) и (5) выполнены, то разностная схема является устойчивой. В противном случае разностная схема не удовлетворяет условиям принципа максимума.

Замечания.

1. Разностные схемы, коэффициенты которых удовлетворяют условиям принципа максимума при всех значениях параметра h называются *монотонными разностными схемами*.
2. При выполнении условий (3) и (5) следует устойчивость разностной схемы в норме C . При этом тип устойчивости определяется тем подмножеством, на котором выполняются условия (5).

3. Приведение исследуемой разностной схемы к виду (1) следует производить, как правило, так, чтобы коэффициент $A(x)$ был диагональным элементом матрицы при записи задачи в матрично-векторной форме.

Пример 1. Рассмотрим граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1, \end{cases}$$

где $k(x) \geq k_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $\mu_0, \mu_1 = \text{const}$. Запишем для нее консервативную разностную схему второго порядка аппроксимации

$$\begin{cases} (ay_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, & x \in \omega_h, \\ y(0) = \mu_0, \quad y(1) = \mu_1, \end{cases}$$

где

$$a_i = k(x_{i-\frac{1}{2}}) > 0, \quad d_i = q(x_i) \geq 0, \quad \varphi = f(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Для того, чтобы исследовать разностную схему на устойчивость с помощью принципа максимума, запишем ее в индексном виде

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right) - d_i y_i = -\varphi_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1, \end{cases}$$

Учитывая шаблон $\Pi(x) = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$, диагональному элементу будет соответствовать точка $x = x_i$. Тогда перепишем разностное уравнение в виде

$$\left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h^2} + d_i \right) y_i - \left(\frac{a_i}{h^2} y_{i-1} + \frac{a_{i+1}}{h^2} y_{i+1} \right) = \varphi_i,$$

откуда

$$A(x) = \frac{a_{i+1} - a_i}{h^2} + d_i, \quad B_1 = B(x, \xi_1) = \frac{a_i}{h^2}, \quad B_2 = B(x, \xi_2) = \frac{a_{i+1}}{h^2},$$

$$D(x) = d_i, \quad F(x) = \varphi_i.$$

Условия (3) и (5) выполняются очевидным образом, так как a_i, d_i, φ_i сохраняют положительный знак. Построенная схема является *монотонной* и удовлетворяет принципу максимума при всех значениях h .

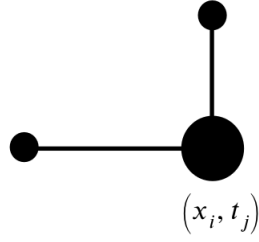
Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса следующего вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & t > 0, -\infty < x < \infty, \quad a \equiv \text{const} > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Искомая функция $u = u(x, t)$. Прежде, чем исследовать схему на устойчивость, мы должны ее построить. Пройдем все этапы, касающиеся построения и исследования разностной схемы. Чтобы построить схему, нам нужно определить сетку. Определим ее как

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau.$$

Далее мы должны выбрать минимальный шаблон. Зададим его следующим образом



Тогда для любой точки сетки мы можем построить разностную схему в бензиндексной форме вида

$$\begin{cases} y_t + ay_{\bar{x}} = 0, & x \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \omega_h, \quad t = 0. \end{cases}$$

с порядком аппроксимации

$$\Psi = O(h + \tau).$$

Для реализации нужно расписать ее в индексной форме

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} = 0, & i = 0, \pm 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, \\ y_i^0 = u_0(x_i), & i = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

В этой схеме единственным неизвестным решением для каждого значения i, j является y_i^{j+1} . Следуя алгоритму исследования устойчивости, мы должны привести разностную схему к виду (1)-(2) или, другими словами, определить коэффициенты A, B, D . Поэтому мы в качестве точки для исследования устойчивости возьмем точку (x_i, t_{j+1}) . Таким образом, мы можем переписать аппроксимацию основного уравнения переноса

$$\frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{a}{h} \right) y_i^j + \frac{a}{h} y_{i-1}^j.$$

Учитывая вид (1)-(2), можем записать, что (считая формально $x = (x_i, t_{j+1})$)

$$A(x) = \frac{1}{\tau}, \quad B_1 = \frac{1}{\tau} - \frac{a}{h}, \quad B_2 = \frac{a}{h},$$

$$D(x) = A(x) - (B_1 + B_2) \equiv 0, \quad F(x) \equiv 0.$$

Мы привели к виду (1)-(2). Теперь мы должны проверить условия (3), (5), получаем

$$A(x) = \frac{1}{\tau} > 0, \quad B_1 = \frac{1}{\tau} - \frac{a}{h} > 0, \quad B_2 = \frac{a}{h} > 0,$$

причем второе условие выполняется, когда из условия $B_1 > 0$ следует, что $\frac{a\tau}{h} < 1$, или, что то же самое,

$$\tau < \frac{h}{a} \tag{8}$$

• Условие (8) называется **условием устойчивости Куранта**.

Замечание. В неравенстве (3) условие для коэффициентов B можно ослабить, то есть рассматривать нестрогое неравенство. Тогда

$$B_1 = \frac{1}{\tau} - \frac{a}{h} \geq 0 \Rightarrow \tau \leq \frac{h}{a}.$$

Если $B = 0$, то это означает, что в операторе (2) нет коэффициента в сумме, а значит для данной точки x шаблон не включает эту точку.

В заключение отметим, что при выполнении условия Куранта на основании следствия 3 можно получить оценку разностного решения

$$\|y\| \leq \|u_0\|,$$

из которой следует устойчивость по начальным данным.

1.5.2 Метод разделения переменных.

Следуя идее метода разделения переменных будем искать частное решение в виде произведения функций, каждая из которых зависит от одной независимой переменной. В итоге мы приходим к задаче на собственные значения для разностного уравнения. И на основании решения задачи на собственные значения, мы можем сделать заключение об устойчивости решения разностной задачи, а следовательно, сделать вывод об устойчивости разностной схемы.

Рассмотрим сеточную функцию y_h , определенную на сетке

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_k = kh, \ k = \overline{0, N}, \ h = \frac{1}{N} \right\}.$$

Доопределим эту функцию на всей числовой прямой с координатами $x_k = kh$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) так, чтобы получилась l -периодическая сеточная функция. Множество таких функций обозначим через M_h . В пространстве M_h введем скалярное произведение

$$(v_h, y_h) = \sum_{s=0}^{N-1} h v_h(x_s) y_h(x_s).$$

Базисом в этом пространстве будет являться система линейно независимых l -периодических функций следующего вида

$$\mu_k(x) = \exp\left(ik \frac{2\pi}{l} x\right), \quad i = \sqrt{-1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N-1}{2} \quad (k = 0, \dots, N-1).$$

Очевидно, что

$$(\mu_k(x), \mu_m(x)) = l \cdot \delta_k^m.$$

Следовательно, любую функцию из M_h можно представить как

$$y_h(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \mu_k(x).$$

Заметим, что $\mu_k(x)$ являются собственными функциями операторов правой и левой разностных производных:

$$(\mu_k(x))_x = \frac{\mu_k(x+h) - \mu_k(x)}{h} = \lambda_k \mu_k(x),$$

тогда собственные значения оператора правой разностной производной, соответствующие собственной функции $\mu_k(x)$, определяются как

$$\lambda_k = \frac{\exp\left(ik \frac{2\pi}{l} h\right) - 1}{h}.$$

Аналогичный результат у левосторонней разностной производной. Таким образом, функции $\mu_k(x)$ образуют полную систему собственных функций для оператора L_h вида

$$L_h y_h = \sum_{s,q} a_{sq} D^s \bar{D}^q y_h,$$

где

$$D^s y_h = y \underbrace{x \dots x}_s, \quad \bar{D}^q y_h = y \underbrace{\bar{x} \dots \bar{x}}_q.$$

Рассмотрим применение метода разделения переменных к линейным двухслойным разностным схемам, которые записаны в каноническом виде

$$B y_t + A y = \varphi, \quad (9)$$

где B, A – это разностные операторы, действующие по пространственной переменной x .

Рассмотрим задачу для погрешности при фиксированной правой части. В этом случае погрешность z приближенного решения будет удовлетворять однородному уравнению

$$B \hat{z} = (B - \tau A) z, \quad (10)$$

где \hat{z} – это погрешность на $(j+1)$ -ом временном слое. Будем искать частное решение уравнения (10) в виде

$$z_k(x_s, t_j) = q_k^j \exp \left(i k \frac{2\pi}{l} x_s \right). \quad (11)$$

Из последней формулы следует, что

$$\hat{z}_k = q_k z_k,$$

где q_k – это множитель роста k -ой гармоники при переходе с одного временного слоя на другой. Подставляя (11) в (10) и предполагая, что у каждой разностной схемы постоянные коэффициенты, получим формулы для определения q_k :

$$q_k^{j+1} \lambda_k(B) \exp \left(i k \frac{2\pi}{l} x_s \right) = q_k^j (\lambda_k(B) - \tau \lambda_k(A)) \exp \left(i k \frac{2\pi}{l} x_s \right),$$

откуда

$$q_k = 1 - \tau \frac{\lambda_k(A)}{\lambda_k(B)}.$$

Теорема (признак устойчивости). *Разностная схема (9) устойчива по начальным данным, если для всех x выполняется неравенство*

$$|q_k| \leq 1 + c\tau, \quad (12)$$

где $c = \text{const}$, не зависящая от шагов сетки h и τ (под модулем понимается модуль комплексного числа).

♦ Разложим произвольную ошибку начальных данных по системе базисных функций $\mu_k(x)$

$$z(x_s, t_0) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp \left(i k \frac{2\pi}{l} x_s \right).$$

В силу линейности можем записать

$$z(x_s, t_j) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k q_k^j \exp\left(ik \frac{2\pi}{l} x_s\right).$$

Следовательно, учитывая ортогональность системы базисных функций $\mu_k(x)$, имеем

$$\begin{aligned} \|z^j\|^2 = (z^j, z^j) &= l \sum_{k=0}^{N-1} |q_k^j|^2 |a_k|^2 \leq l \max_{0 \leq k \leq N-1} |q_k|^{2j} \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 = \max_{0 \leq k \leq N-1} |q_k|^{2j} \cdot \|z^0\|^2 \leq \\ &[\text{по условию теоремы у нас выполняется условие (12)}] \\ &\leq (1 + c\tau)^{2j} \|z^0\|^2 \leq \exp(2jc\tau) \|z^0\|^2 \leq \exp(2cT) \|z^0\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана. \square

Из этой теоремы сформулируем следствие.

Следствие. Если хотя бы для одного k величину $|q_k|$ нельзя мажорировать величиной $1 + c\tau$ (то есть не выполняется условие (12)), то разностная схема является неустойчивой.

◆ Без доказательства. \square

Запишем алгоритм исследования устойчивости по методу разделения переменных:

1. Задаем частное решение y_k^j в виде гармоники

$$y_k^j = q^j e^{ik\varphi}, \quad q \in \mathbb{C}, i = \sqrt{-1}, \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

2. Подставляем гармонику в разностную схему и находим q .

3. Если $|q| \leq 1$ (или что то же самое $|q|^2 \leq 1$), то разностная схема устойчива по начальным данным. В противном случае разностная схема неустойчива.

Следует отметить, что в этом алгоритме мы использовали условие (12) при $c = 0$. Вообще говоря, мы можем использовать и условие (12) при c не очень большом, однако мы для удобства выбираем $c = 0$.

Пример 3. Воспользуемся условиями примера из предыдущего пункта. Там мы построили разностную схему вида

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + a \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} = 0, & i = 0, \pm 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, \\ y_i^0 = u_0(x_i), & i = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

Для исследования устойчивости этой схемы применим метод разделения переменных. Следуя алгоритму, разрешим уравнение относительно y_k^{j+1}

$$y_k^{j+1} = y_k^j - \frac{a\tau}{h} (y_k^j - y_{k-1}^j)$$

и поставим $y_k^j = q^j e^{ik\varphi}$, тогда

$$q = 1 - \gamma(1 - e^{i\varphi}), \quad \gamma = \frac{a\tau}{h}.$$

Оценим величину $|q|$:

$$|q|^2 = (1 - \gamma + \gamma \cos \varphi)^2 + (\gamma \sin \varphi)^2.$$

Можно показать, что выполнение условия устойчивости $|q|^2 \leq 1$ выполняется, когда

$$\gamma(1 - \gamma)(1 - \cos \varphi) \geq 0,$$

то есть

$$1 - \gamma \geq 0,$$

откуда

$$\frac{a\tau}{h} \leq 1.$$

Легко видеть, что в данном случае условие устойчивости совпадает с условием куранта (8) для разностной схемы для уравнения переноса, то есть в обоих случаях

$$\tau \leq \frac{h}{a}.$$

Для данной разностной схемы оценки совпали, хотя как правильно оценки не совпадают: принцип максимума дает более жесткие требования по сравнению с методом разделения переменных.

В заключение этого пункта отметим, что в литературе описанный выше способ иногда называют *методом гармоник* или *спектральным методом*.

Глава 2

Разностные методы решения типичных задач математической физики.

Основные типы дифференциальных уравнений – это уравнения параболического, гиперболического и эллиптического типов. Все эти три типа мы будем рассматривать вместе с граничными и начальными условиями, а также методы построения приближенного решения этих задач на основе разностных схем.

2.1 Разностные схемы для уравнения переноса.

Уравнение переноса относится к простейшим уравнениям параболического типа. Рассмотрим задачи на основе однородного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Уравнением такого типа можно описывать изменение плотности жидкости, движущейся вдоль оси x с постоянной скоростью, перенос нейтронов, акустические, газодинамические и другие процессы. В зависимости от задачи уравнение может быть неоднородным, а коэффициент a – непостоянным.

Начнем с рассмотрения простейшего случая.

2.1.1 Явные схемы для задачи Коши.

Рассмотрим следующую задачу Коши для однородного уравнения переноса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad a = \text{const} \neq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

Эта задача имеет точное решение. Решением задачи (1) является, так называемая, бегущая волна

$$u(x, t) = u_0(x - at),$$

где a – это скорость волны, а u_0 – дифференцируемая функция.

Построим для приближенного решения задачи (1) разностную схему. На плоскости (x, t) введем сетку

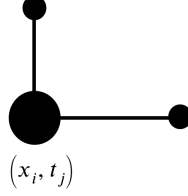
$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau,$$

причем для простоты рассмотрим случай равномерной по каждому направлению сетки:

$$\omega_h = \{x_k = kh, \ k = 0, \pm 1, \dots, h > 0\}, \quad \omega_\tau = \{t_j = j\tau, \ j = 0, 1, \dots, \tau > 0\}.$$

Для определенности выберем шаблон

$$\Pi(x, t) = \{(x, t), (x + h, t), (x, t + \tau)\}.$$



Учитывая выбранный шаблон, мы можем заменить дифференциальные производные разностными и записать разностную схему в безиндексной форме

$$\begin{cases} y_t + ay_x = 0, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \omega_h, \end{cases} \quad (2)$$

или что то же самое в индексной форме

$$\begin{cases} \frac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} + a \frac{y_{k+1}^j - y_k^j}{h} = 0, & k = 0, \pm 1, \dots, \ j = 0, 1, \dots, \\ y_k^0 = u_0(x_k), & k = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

Нужно вычислить погрешность аппроксимации разностной схемы. Учитывая тот факт, что разностная схема рассматривается для начального условия, то погрешность аппроксимации всей схемы будет определяться погрешностью аппроксимации разностного уравнения. Поэтому для любой точки $(x, t) \in \omega_{h\tau}$ погрешность аппроксимации будет равна

$$\Psi(x, t) = u_t + au_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) \right) = O(h + \tau).$$

Итак, учитывая вид погрешности, разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по обоим переменным, то есть разностная схема имеет первый порядок.

После аппроксимации нам нужно исследовать эту схему на устойчивость. Для определенности используем метод разделения переменных для исследования на устойчивость. Подставим в разностную схему выражение

$$y_k^j = q^j e^{ik\varphi}$$

тогда получим

$$q = 1 - \gamma(e^{i\varphi} - 1), \quad \gamma = \frac{a\tau}{h}.$$

Тогда

$$|q|^2 = (1 - \gamma + \gamma \cos \varphi)^2 + \gamma^2 \sin^2 \varphi = 1 + 4\gamma(1 + \gamma) \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Из этого выражения следует, что для любого φ выполняется

$$|q^2| > 1,$$

а следовательно схема будет неустойчивой для любых постоянных значений γ , если $a > 0$. Если положить $\gamma = O(h)$, то схема (2) будет устойчива на любом конечном промежутке (то есть наступит промежуток, на котором схему будет неустойчива). Если же $a < 0$, то разностная схема будет устойчива при выполнении условия

$$-1 \leq \gamma \leq 0,$$

откуда следует, что

$$|\gamma| = |a| \frac{\tau}{h} \leq 1.$$

После того, как мы определились с аппроксимацией и устойчивостью, нам нужно решить вопрос реализации, то есть нахождения решения в любой точке сетки. Очевидно, что схему (2) можно реализовать по рекуррентной формуле вида

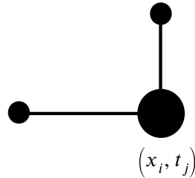
$$\begin{cases} y_k^{j+1} = (1 + \gamma)y_k^j - \gamma y_{k+1}^j, & k = 0, \pm 1, \dots, j = 0, 1, \dots, \\ y_k^0 = u_0(x_k), & k = 0, \pm 1 \end{cases} \quad (3)$$

Формула (3) – это еще одна запись схемы (2), однако по ней можно осуществить реализацию разностной схемы. Приближенное решение по формуле (3) может быть найдено послойно: начиная с нулевого временного слоя при $t = 0$ ($j = 0$) мы находим все y_k^0 , а затем последовательно определяем y_k^{j+1} по имеющимся y_k^j, y_{k+1}^j .

• *Разностные схемы, позволяющие получить приближенное решение по рекуррентным формулам называются **явными разностными схемами**.*

Явную разностную схему первого порядка можно построить и на другом шаблоне. Рассмотрим явную разностную схему, построенную на шаблоне

$$\Pi(x, t) = \{(x, t), (x - h, t), (x, t + \tau)\}.$$



$$\begin{cases} y_t + ay_{\bar{x}} = 0, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \omega_h. \end{cases} \quad (4)$$

Она будет также схемой первого порядка, а устойчивость мы исследовали ранее в примерах, то есть если $a > 0$, то условием устойчивости является

$$\gamma = \frac{a\tau}{h} \leq 1.$$

Если $a < 0$, то схема (4) будет неустойчивой при

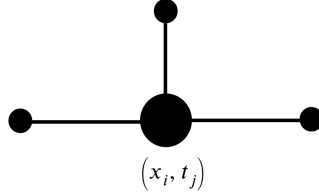
$$\frac{\tau}{h} = \text{const}.$$

Эта схема также является явной и может быть реализована аналогично схеме (2). Далее возникает вопрос, можно ли построить схемы более высокого порядка аппроксимации. Самый простой способ повышения порядка аппроксимации – это расширение шаблона, при этом его можно расширять и по x и по t . Но если мы будем расширять шаблон по t , то

мы не сможем получить явные схемы, поэтому расширять шаблон мы будем только по x .

Рассмотрим шаблон, состоящий из четырех точек

$$\Pi(x, t) = \{(x - h, t), (x, t), (x + h, t), (x, t + \tau)\}.$$



Тогда разностная схема будет иметь вид

$$\begin{cases} y_t + ay_x = 0, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \omega_h. \end{cases} \quad (5)$$

Погрешность аппроксимации такой схемой есть величина

$$\Psi(x, t) = O(\tau + h^2).$$

Данная разностная схема является явной, так как y_k^{j+1} мы можем найти по рекуррентной формуле

$$y_k^{j+1} = y_k^j - \gamma \frac{y_{k+1}^j - y_{k-1}^j}{2}.$$

Если исследовать эту схему методом разделения переменных, то можно показать, что

$$|q|^2 = 1 + \gamma^2 \sin^2 \varphi > 1, \quad \forall \varphi, \quad a \neq 0,$$

то есть при любых φ и a схема является неустойчивой. Таким образом, центральная разностная производная приводит нас к неустойчивым вычислениям.

Чтобы получить устойчивую разностную схему, подкорректируем ее. Значение y_k^j заменим полусуммой значений в соседних точках шаблона

$$\frac{1}{2}(y_{k+1}^j + y_{k-1}^j).$$

Теперь получим следующее разностное уравнение

$$\frac{y_k^{j+1} - \frac{1}{2}(y_{k+1}^j + y_{k-1}^j)}{\tau} + a \frac{y_{k+1}^j - y_{k-1}^j}{2h} = 0 \quad (6)$$

Для уравнения (6) условия устойчивости по принципу максимума будут иметь следующий вид

$$\begin{cases} 1 + \gamma \geq 0, \\ 1 - \gamma \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что разностная схема (6) будет устойчивой при условии $|\gamma| \leq 1$ независимо от знака коэффициента a .

Но возникает вопрос, не была ли нарушена погрешность аппроксимации. Для ответа на

этот вопрос определим погрешность аппроксимации для уравнения (6), для чего преобразуем его к виду

$$\begin{aligned}\psi(x_k, t_j) &= u_t - \frac{h^2}{2\tau} u_{\bar{x}x} + au_{\bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) - \frac{h^2}{2\tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) \right) + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} + O(h^2) \right) = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = \left(\frac{a^2 \tau}{2} - \frac{h^2}{2\tau} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^2 + h^2 + \frac{h^4}{\tau}).\end{aligned}$$

Таким образом, разностная схема (6) обладает условной аппроксимацией при условии $\frac{h^2}{\tau} \rightarrow 0$ при $h, \tau \rightarrow 0$. Если выбрать $\tau = O(h)$, то получим схему первого порядка, то есть $\psi = O(\tau + h)$. Если же выбрать $\tau = \frac{h}{a}$, то получим схему второго порядка, то есть $\psi = O(\tau^2 + h^2)$.

В заключение этого пункта приведем вариант явной разностной схемы, которая по свойству устойчивости совпадает со схемой (6), но обладает гарантированным вторым порядком аппроксимации

$$\begin{cases} y_t + ay_{\bar{x}} - \frac{\tau}{2} a^2 y_{\bar{x}x} = 0, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \omega_h \end{cases} \quad (7)$$

• Разностная схема (7) называется **разностной схемой Лакса-Вендроффа**.

2.1.2 Разностные схемы для краевой задачи.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения переноса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & t > 0, 0 < x < \infty, a = \text{const} \neq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = \mu_0(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для корректной постановки задачи необходимо выполнение условия согласования начального и граничного условий

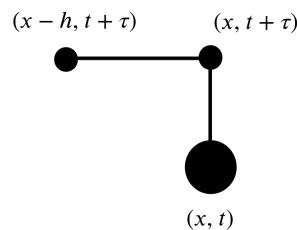
$$u_0(0) = \mu_0(0).$$

Для задачи (8) известно точное решение

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at), & t \leq \frac{x}{a}, \\ \mu_0\left(t - \frac{x}{a}\right), & t \geq \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (9)$$

Для задачи (8) можно применять те же разностные схемы, что и для задачи (1). Но в случае краевой задачи также можно построить и неявные разностные схемы – схемы, использующие на новом временном слое более одного значения приближенного решения.

Построим простейшую неявную разностную схему для задачи (8). Возьмем шаблон из трех точек



Тогда для дифференциальной задачи (8) мы можем построить разностную задачу

$$\begin{cases} y_t + a\hat{y}_{\bar{x}} = 0, & (x, t) \in \omega_{h\tau} \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \omega_h \\ y(0, t) = \mu_0(t), & t \in \omega_\tau. \end{cases} \quad (10)$$

Символ $\hat{\cdot}$ означает значение функции в узле $t = t_j + \tau = t_{j+1}$. Для того чтобы применять разностную схему, нужно определить ее порядок аппроксимации и исследовать ее на устойчивость. Поэтому запишем первое уравнение в индексном виде

$$y_k^{j+1} = \frac{\gamma}{1+\gamma} y_{k-1}^{j+1} + \frac{1}{1+\gamma} y_k^j, \quad \gamma = \frac{a\tau}{h}.$$

При реализации сначала строятся значения из начального и граничного условий. То есть мы задаем y_k^j при $j = 0, \forall k$, а затем при $k = 0, \forall j$. Остальные значения функций можно вычислять по формуле выше.

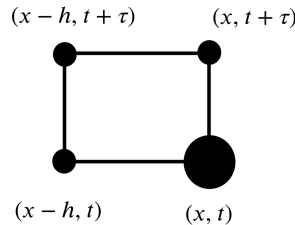
Реализация этой схемы возможна двумя способами:

1. по столбцам: начиная с точки (x_1, t_0) , последовательно вычисляем $y_1^j, j = \overline{0, j_0}$; затем берем (x_k, t_0) и вычисляем $y_k^j, j = \overline{1, j_0}$;
2. по строкам: сначала вычисляем y_k^{j+1} при $j = 0$, для всех $k = \overline{1, k_0}$, затем увеличиваем $j = 1, 2, \dots, j_0$ и повторяем вычисления.

Второй случай чаще используется в практических вычислениях и носит название *послойная реализация*. Далее для определенности мы будем рассматривать только послойную реализацию. Также второй способ на прямую связан с физическим смыслом задачи: мы имеем начальное распределение u_0 , затем переходим на следующий слой $t + \tau$ и находим решение для всех x и так далее.

Можно показать, что схема (10) обладает первым порядком аппроксимации, то есть $O(\tau + h)$. Кроме того данная схема при $a > 0$ является абсолютно устойчивой, то есть при любых шагах τ и h принцип максимума обеспечивает устойчивость по начальным данным. Таким образом, применение данной разностной схемы не накладывает никаких ограничений на узлы сетки.

Рассмотрим разностную схему, зависящую от параметра. Для этого рассмотрим шаблон из четырех точек



На этом шаблоне запишем однопараметрическое семейство разностных схем вида

$$\begin{cases} y_t + a(\sigma\hat{y}_{\bar{x}} + (1-\sigma)y_{\bar{x}}) = 0, & (x, t) \in \omega_{h\tau} \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \omega_h \\ y(0, t) = \mu_0(t), & t \in \omega_\tau, \end{cases} \quad (11)$$

где σ – это параметр, который иногда называют весом. Тогда разностную схему (11) можно назвать разностной схемой с весами. Легко видеть, что если $\sigma = 1$, то мы получим схему (10). Если $\sigma = 0$, то мы получим схему (4). Таким образом, мы рассматривали ранее частные случаи схемы с весами.

Нас интересует точность и устойчивость этой разностной схемы. Получим выражение для погрешности аппроксимации этой разностной схемы, для этого введем обозначения

$$\dot{u} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad \hat{u} = u(x, t + \tau).$$

Тогда невязка на точном решении

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = u_t - a(\sigma \hat{u}_{\bar{x}} + (1 - \sigma)u_{\bar{x}}) &= \dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + a \left(\sigma \left(\hat{u}' - \frac{h}{2}\hat{u}'' \right) + (1 - \sigma) \cdot \left(u' - \frac{h}{2}u'' \right) \right) + \\ &+ O(\tau^2 + h^2) = \dot{u} + a u' + \frac{\tau}{2}\ddot{u} - \frac{ah}{2}u'' + a\sigma\tau\dot{u}' + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Исходное уравнение задает соотношение

$$\dot{u} + a u' = 0,$$

тогда отсюда можем получить соотношения

$$\ddot{u} = -a\dot{u}', \quad u'' = -\frac{1}{a}\dot{u}'.$$

Таким образом, погрешность аппроксимации разностной схемы (1) окончательно может быть записана в следующем виде

$$\psi(x, t) = a\tau \left(\sigma - \frac{1}{2} + \frac{h}{2a\tau} \right) \dot{u}' + O(\tau^2 + h^2).$$

Легко видеть, что при

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h}{2a\tau},$$

схема будет обладать вторым порядком аппроксимации

$$\Psi = O(\tau^2 + h^2),$$

а для всех остальных $\sigma \neq \sigma_0$ схема будет обладать первым порядком

$$\Psi = O(\tau + h).$$

Таким образом, за счет выбора параметра σ мы можем регулировать погрешность аппроксимации разностной схемы. Более того σ_0 будет также влиять и на устойчивость схемы.

Используя метод разделения переменных, можно показать, что схема (11) устойчива при условии

$$\sigma \geq \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h}{2a\tau}, \quad a > 0.$$

Запишем формулу, по которой можно реализовать схему (11). Учитывая шаблон, очевидно, что реализация схемы (11) будет совпадать с реализацией схемы (10). При этом формула для вычисления y_k^{j+1} будет иметь следующий вид

$$y_k^{j+1} = \frac{1 - (1 - \sigma)\gamma}{1 + \sigma\gamma} y_k^j + \frac{\sigma\gamma}{1 + \sigma\gamma} y_{k-1}^{j+1} + \frac{(1 - \sigma)\gamma}{1 + \sigma\gamma} y_{k-1}^j, \quad \gamma = \frac{a\tau}{h}. \quad (12)$$

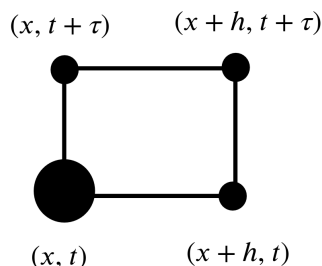
Расчеты по формуле (12) можно вести так же, как и по формуле для (10).

Замечания.

1. Несмотря на то, что разностная схема (11) является неявной по построению, ее реализация возможна по явным формулам из-за наличия граничного условия.
2. Условие устойчивости, определенное по принципу максимума, будет иметь вид

$$0 \leq \sigma \leq 1, \quad \gamma \leq \frac{1}{1 - \sigma}, \quad a > 0.$$

3. Аналогичное семейство устойчивых разностных схем с весами можно записать на основе правой разностной производной для случая $a < 0$ на шаблоне



2.2 Разностные схемы для уравнения теплопроводности.

Это уравнение также является уравнением гиперболического типа, но имеет другой дифференциальный оператор. В частности, мы имеем уравнение первого порядка по t и второго порядка по x .

2.2.1 Исходная задача.

Будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. В области

$$\overline{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq T\}$$

ищем функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующей задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < 1, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

для которой выполняются условия согласования

$$u_0(0) = \mu_0(0), \quad u_0(1) = \mu_1(0).$$

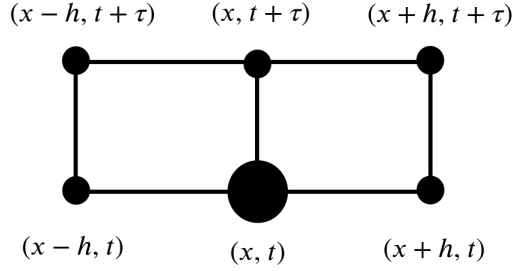
Известно, что решение задачи существует, единственно и удовлетворяет принципу максимума в области \overline{D} , то есть это решение непрерывно зависит от начальных и граничных данных. Значит задача (1) является корректно поставленной.

2.2.2 Семейство шеститочечных разностных схем.

Обозначим через \overline{D} область определения, и зададим равномерную по каждому направлению сетку

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau, \quad \overline{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}, Nh = 1\}, \quad \overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0, N_1}, N_1\tau = T\}.$$

Таким образом, каждым узлом сетку является точка на плоскости с координатами (x_i, t_j) . Для аппроксимации исходного уравнения будем использовать шеститочечный шаблон



Для аппроксимации этой задачи на данном шаблоне будем рассматривать разностный оператор $L_{h\tau}^\sigma$, который был рассмотрен ранее в качестве примера. Таким образом, мы можем записать разностную задачу

$$\begin{cases} y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0, t) = \mu_0(t), \quad y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь

$$\Lambda y = y_{\bar{x}x}, \quad \hat{y} = y(x, t + \tau),$$

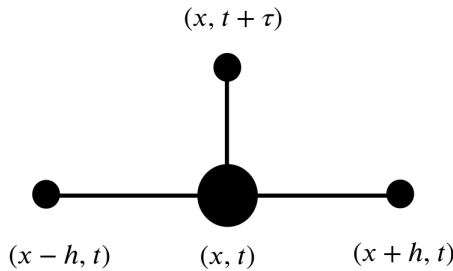
σ – это параметр, а φ – это сеточная функция, аппроксимирующая функцию f , определенную в задаче (1).

- Разностная схема вида (2) называется **семейством схем с весами**, или просто **схемой с весами**.

Как и ранее будем пользоваться понятиями временного слоя и двухслойности схем.

- **Временным слоем** (j -ым временным слоем) будем называть множество узлов сетки, лежащие на прямой $t = t_j$.

Рассмотрим вопрос реализации схемы с весами. Возьмем простейший случай $\sigma = 0$. Тогда шаблоном, аппроксимирующим задачу, будет являться четырехточечный шаблон вида



В этом случае получим разностное уравнение

$$y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi. \quad (3)$$

Тогда разностная схема

$$\begin{cases} y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) = \mu_0(t), \quad y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \bar{\omega}_\tau. \end{cases}$$

будет называться *явной разностной схемой*. Приближенное решение в каждой точке сетки может быть определено по следующему алгоритму:

1. решение на нулевом слое мы задаем в соответствии с начальным слоем

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N}; \quad (4)$$

2. строим решение на каждом слое последовательно, то есть для $j = \overline{0, N_1 - 1}$ определяем

$$y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad y_i^{j+1} = y_i^j + \tau \left(\frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j \right), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}). \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) и определяют алгоритм реализации схемы с весами при $\sigma = 0$.

Если $\sigma \neq 0$, то мы получим *неявную разностную схему*. Расчеты по неявной схеме будут производиться уже на шеститочечном шаблоне, а вместо (3) у нас будет

$$y_t = \sigma \hat{y}_{\bar{x}x} + (1 - \sigma) y_{\bar{x}x} + \varphi \quad (6)$$

Тогда алгоритм реализации будет следующий:

1. нулевой слой заполняем по формуле (4);
2. для всех $j = \overline{0, N_1 - 1}$ будем вычислять y_i^j , решая систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, а именно

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(\frac{2\sigma}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right) y_i^{j+1} + \frac{\sigma}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, & i = \overline{1, N-1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \end{cases} \quad (7)$$

где

$$F_i^j = \frac{1}{\tau} y_i^j + (1 - \sigma) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j.$$

Очевидно, что наиболее эффективным методом решения системы (6) будет метод прогонки, а сам он будет устойчивый, что следует из вида коэффициентов.

Замечание. Если взять $\sigma = 1$, то такая схема называется *чисто неявной* (схема с опережением). Такая схема немного упрощает правую часть. Если взять $\sigma = \frac{1}{2}$, то такая схема называется *симметричной схемой* (Кранка-Николсона).

2.2.3 Погрешность аппроксимации схем с весами.

Погрешность схемы с весами определим как разность между приближенным решением в точке сетки и точным решением в этой же точке

$$z_i^j = y_i^j - u(x_i, t_j).$$

Очевидно можно получить задачу для погрешности. Для этого подставим в (2)

$$y_i^j = z_i^j + u(x_i, t_j)$$

и получим разностную задачу для погрешности

$$\begin{cases} z_t = \Lambda(\sigma \hat{z} + (1 - \sigma)z) + \Psi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ z(x, 0) = 0, & x \in \overline{\omega}_h, \\ z(0, t) = z(1, t) = 0, & t \in \overline{\omega}_\tau, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\Psi = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - \sigma)u) - u_t + \varphi.$$

Фактически в разностной задаче для погрешности (7) в качестве функции Ψ выступает погрешность аппроксимации разностной схемы (2) на решении задачи (1).

Оценив решение задачи (7) через функцию Ψ , можно доказать сходимость разностной схемы. При этом порядок сходимости будет связан с порядком малости величины Ψ .

Исследуем погрешность аппроксимации разностной схемы, а значит оценим величину Ψ в задаче (7). Для упрощения записи будем обозначать

$$\dot{u} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad u' = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Берем любую точку сетки (x, t) и рассматриваем величину погрешности в этой точке

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \varphi + \sigma \left(\hat{u}'' + \frac{h^2}{12} \hat{u}'''' + O(h^4) \right) + (1 - \sigma) \left(u'' + \frac{h^2}{12} u'''' + O(h^4) \right) - \left(\dot{u} + \frac{\tau}{2} \ddot{u} + O(\tau^2) \right) = \\ &= \varphi + \sigma \left(u'' + \tau \dot{u}'' + \frac{h^2}{12} u'''' + O(\tau^2 + h^4) \right) + (1 - \sigma) \left(u'' + \frac{h^2}{12} u'''' + O(h^4) \right) - \left(\dot{u} + \frac{\tau}{2} \ddot{u} + O(\tau^2) \right) = \\ &= \varphi + (u'' - \dot{u}) + \sigma \tau \dot{u}'' + \frac{h^2}{12} u'''' - \frac{\tau}{2} \ddot{u} + O(\tau^2 + h^4). \end{aligned}$$

Учтем вид дифференциального оператора. По условию

$$\dot{u} = u'' + f, \quad \ddot{u} = \dot{u}'' + \dot{f}, \quad \dot{u}'' = u'''' + f'',$$

тогда получим выражение для аппроксимации разностной схемы

$$\Psi(x, t) = \varphi - f + \tau \dot{u}'' \left(\sigma - \frac{1}{2} + \frac{h^2}{12\tau} \right) - \frac{\tau}{2} \dot{f} - \frac{h^2}{12} f'' + O(\tau^2 + h^4).$$

1. Пусть σ – это любое число. Если мы в качестве φ выберем

$$\varphi = f + O(\tau + h^2),$$

то тогда погрешность аппроксимации будет равна

$$\Psi = O(\tau + h^2), \quad u(x, t) \in C_2^4(\overline{D}).$$

2. Пусть $\sigma = \sigma_\alpha = \frac{1}{2} + \alpha \frac{h^2}{\tau}$, где α – любое число. Если в этом случае мы возьмем

$$\varphi = f + \frac{\tau}{2} \dot{f} + O(\tau^2 + h^2) = f\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right) + O(\tau^2 + h^2).$$

Тогда мы получим значение погрешности равное

$$\Psi = O(\tau^2 + h^2).$$

Таким образом, мы получим семейство схем второго порядка. В частности при $\alpha = 0$ мы получим схему Кранка-Николсона.

3. Пусть $\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$, то есть мы выбрали $\alpha = -\frac{1}{12}$. Если мы возьмем

$$\varphi = f + \frac{\tau}{2} \dot{f} + \frac{h^2}{12} f'' + O(\tau^2 + h^4),$$

то получим порядок аппроксимации

$$\Psi(x, t) = O(\tau^2 + h^4).$$

В качестве φ можно выбирать также и разностные аппроксимации вместо производных, например,

$$\varphi = f + \frac{\tau}{2} f_t + \frac{h^2}{12} f_{\bar{x}x}.$$

Видно, что за счет выбора σ мы можем получать разные схемы, обладающие разными свойствами точности.

2.2.4 Исследование устойчивости схемы с весами.

Не ограничивая общности исследование устойчивости схемы с весами будем проводить на задаче с однородными граничными условиями, а именно

$$\begin{cases} y_t = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) = 0, \quad y(1, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (9)$$

Мы хотим исследовать на устойчивость решение y задачи (9).

• Разностная схема называется **устойчивой**, если для ее решения справедлива оценка

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \quad t \in \omega_\tau \quad (10)$$

В неравенстве (10) M_1 и M_2 – положительные константы, независимые от τ и h , а $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ – это некоторые нормы на временном слое.

Оказывается, если условие (10) выполняется, то по определенным ранее методам обеспечивается устойчивость решения. При $\varphi = 0$ оценка (10) принимает вид

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)}, \quad t \in \omega_\tau \quad (11)$$

Неравенство (11) выражает *устойчивость по начальным данным*. Если $y(x, 0) = 0$, то

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \quad t \in \omega_\tau. \quad (12)$$

Неравенство (12) выражает *устойчивость по правой части*.

Для получения оценки (10) решение разностной задачи (9) представим в виде суммы

$$y = \bar{y} + \bar{\bar{y}},$$

где \bar{y} – это решение однородного уравнения с ненулевым начальным условием, то есть в схеме (9) будет $\varphi = 0$, $u_0 \neq 0$, а $\bar{\bar{y}}$ – это решение неоднородного уравнения с нулевым начальным условием, то есть $\varphi \neq 0$, $u_0 = 0$.

Тогда, чтобы исследовать устойчивость решения разностной схемы нам нужно доказать по отдельности устойчивость для решения \bar{y} (по начальным данным) и для $\bar{\bar{y}}$ (по правой части).

2.2.4.1 Устойчивость по начальным данным.

Для функции \bar{y} у нас имеется следующая задача

$$\begin{cases} \bar{y}_t = \Lambda(\sigma \hat{\bar{y}} + (1 - \sigma)\bar{y}), & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ \bar{y}(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ \bar{y}(0, t) = 0, \bar{y}(1, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (13)$$

Мы должны определить условие устойчивости данной задачи. Исследовать данную разностную схему на устойчивость будем методом разделения переменных. При этом, учитывая, что граничные условия задачи нулевые, мы разложим это решение по собственным функциям оператора разностной производной

$$\begin{aligned} \Lambda y &= y_{\bar{x}x}, \\ y(x, t) &= \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t) \mu_k(x), \end{aligned} \quad (14)$$

где базисные функции

$$\mu_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x).$$

• *Функции вида*

$$y_k = T_k \mu_k$$

называются k -ой гармоникой решения $y(x, t)$.

Любая гармоника является решением задачи (13) при начальном условии

$$u_0(x) = T_k(0) \mu_k(x).$$

При этом как следует из принципа спектральной устойчивости, если схема устойчива по каждой гармонике, то она устойчива по начальным данным. Поэтому нам нужно лишь показать устойчивость по гармоникам. Подставим выражение (14) в (13), тогда получим соотношение

$$\sum_{k=1}^{N-1} (T_k)_t \mu_k = \sum_{k=1}^{N-1} (\sigma \hat{T}_k + (1 - \sigma) T_k) \Lambda \mu_k,$$

при этом

$$\Lambda \mu_k = -\lambda_k \mu_k,$$

где

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}.$$

Воспользуемся ортонормированностью системы функций μ_k . Тогда из последнего равенства у нас останутся лишь слагаемые, относящиеся к скалярному произведению при совпадающих индексах, то есть

$$\frac{\hat{T}_k - T_k}{\tau} = -\lambda_k(\sigma \hat{T}_k + (1 - \sigma)T_k), \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Отсюда выразим \hat{T}_k на верхнем слое через T_k на нижнем слое:

$$\hat{T}_k = q_k T_k, \quad q_k = \frac{1 - (1 - \sigma)\lambda_k \tau}{1 + \sigma\lambda_k \tau}, \quad k = \overline{1, N-1}. \quad (15)$$

Как следует из формулы (15) устойчивость k -ой гармоники будет иметь место при выполнении неравенства

$$|q_k| \leq 1,$$

отсюда следует, что

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda_k \tau}.$$

Нам нужно также оценить то, как себя ведут λ_k . Для собственных значений λ_k справедлива оценка

$$\lambda_k \leq \lambda_{N-1} < \frac{4}{h^2}.$$

Отсюда следует, что

$$-\frac{1}{\lambda_k \tau} < -\frac{h^2}{4\tau}.$$

Тогда условие устойчивости по начальным данным в сеточной норме L_2 будет выполняться, если

$$\sigma \geq \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}. \quad (16)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если $\sigma = 0$, то схема будет явная и условие устойчивости имеет вид

$$\tau \leq \frac{h^2}{2}. \quad (17)$$

• Условие (17) это называется **условием Куранта задачи для уравнения теплопроводности**.

2. Если $\sigma \geq \frac{1}{2}$, то схема устойчива при любых шагах τ и h . В частности при $\sigma = 1$ мы получим чисто неявную схему, которая является абсолютно устойчивой для любых шагов τ, h .

3. Если $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, то получим оценку

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(1 - \tau\sigma)}. \quad (18)$$

4. Если $\sigma = \sigma_\alpha = \frac{1}{2} + \alpha \frac{h^2}{\tau}$, то для выполнения условия устойчивости нужно взять $\alpha \geq -\frac{1}{4}$. Причем в данном случае схема будет устойчива при любых шагах τ, h , а также она будет обладать порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$.
5. Если $\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$, то схема будет устойчива при любых шагах τ, h , а также будет обладать порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^4)$.

2.2.4.2 Устойчивость по правой части.

Для функции \bar{y} у нас имеется следующая задача

$$\begin{cases} \bar{y}_t = \Lambda(\sigma \hat{\bar{y}} + (1 - \sigma)\bar{y}) + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ \bar{y}(x, 0) = 0, & x \in \bar{\omega}_h, \\ \bar{y}(0, t) = 0, \bar{y}(1, t) = 0, & t \in \bar{\omega}_\tau. \end{cases} \quad (19)$$

Нам нужно исследовать устойчивость задачи (19). Вновь решение будем искать в виде формулы (14), но у нас также добавится сеточная функция в правой части основного уравнения. Поэтому мы представим эту сеточную функцию в виде разложения по системе базисных функций μ_k

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k(t) \mu_k(x).$$

Проделявая те же операции, как и в предыдущем пункте, мы можем получить соотношение между функциями T_k на верхнем слое и на нижнем слое:

$$\hat{T}_k = q_k T_k + \frac{\tau \varphi_k}{1 + \sigma \lambda_k \tau}. \quad (20)$$

Таким образом, суммируя по гармоникам, мы можем записать решение задачи (19) на верхнем слое

$$\hat{\bar{y}} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k \mu_k = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k \mu_k + \tau \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k}{1 + \sigma \lambda_k \tau} \mu_k.$$

Оценим это решение по норме

$$\begin{aligned} \|\hat{\bar{y}}\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k \mu_k \right\| + \tau \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k}{1 + \sigma \lambda_k \tau} \mu_k \right\| = [\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}] \leq \max_{1 \leq k \leq N-1} |q_k| \left(\sum_{k=1}^{N-1} T_k^2 \right)^{1/2} + \\ &+ \max_{1 \leq k \leq N-1} \frac{\tau}{|1 + \sigma \lambda_k \tau|} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^2 \right)^{1/2} = \max_{1 \leq k \leq N-1} |q_k| \cdot \|\bar{y}\| + \max_{1 \leq k \leq N-1} \frac{\tau}{|1 + \sigma \lambda_k \tau|} \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Если одновременно будут выполняться условия $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \geq 0$, то будет выполняться $1 + \sigma \lambda_k \tau \geq 1$, $\forall k$ и $|q_k| \leq 1$. А тогда

$$\|\hat{\bar{y}}\| \leq \|\bar{y}\| + \tau \|\varphi\|.$$

Если мы будем суммировать это неравенство по всем временным слоям, то мы получим оценку всего решения на любом слое

$$\|\bar{y}^{j+1}\| \leq \|y^0\| + \tau \sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|.$$

Отсюда следует окончательная оценка

$$\left\| \bar{y}^{j+1} \right\| \leq \left\| \varphi \right\|_{\omega_{h\tau}}. \quad (21)$$

Условие (21) доказывает устойчивость разностной схемы по правой части при одновременном выполнении условий $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \geq 0$.

Объединяя полученные результаты, и учитывая, что решение схемы (2) можно получить в виде суммы решений задач (13) и (19), можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Если выполнено условие $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma \geq 0$, то разностная схема с весами (2) устойчива по начальным данным и правой части, и для ее решения справедлива оценка*

$$\left\| y^{j+1} \right\| \leq \left\| u_0 \right\| + \tau \sum_{j'=0}^j \left\| \varphi^{j'} \right\|. \quad (22)$$

Замечания.

1. Если не требовать неотрицательности параметра σ , то можно показать, что условие устойчивости примет вид

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau}, \quad \varepsilon \in (0, 1). \quad (23)$$

Тогда вместо (22) у нас получится оценка вида

$$\left\| y^{j+1} \right\| \leq \left\| u_0 \right\| + \frac{\tau}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \left\| \varphi^{j'} \right\|. \quad (24)$$

2. Если исследовать схему (2) на устойчивость по принципу максимума в норме $\|\cdot\|_C$, то условие устойчивости примет вид

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{2\tau}. \quad (25)$$

При этом при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ оценки устойчивости по двум методам совпадают, а в остальных случаях эти оценки разные. Например, если $\sigma = \frac{1}{2}$, то в норме $\|\cdot\|_{L_2}$ схема является абсолютно устойчивой, а в норме $\|\cdot\|_C$ условно устойчивая при $\tau \leq h^2$.

2.2.5 Случай краевых условий третьего рода.

Пусть

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \beta_0 u(0, t) - \mu_0(t), \quad \beta_0 = \text{const} > 0. \quad (26)$$

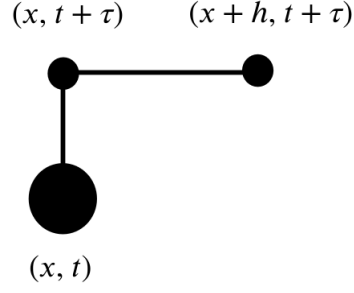
В примере из п. 1.3 была получена аппроксимация краевого условия третьего рода с порядком $O(\tau + h^2)$. Применительно к (26) мы можем записать аппроксимацию

$$\hat{y}_x(0, t) = \beta_0 y(0, t) + \frac{h}{2} y_t(0, t) - \tilde{\mu}_0(t),$$

где

$$\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0, t), \quad t \in \omega_\tau$$

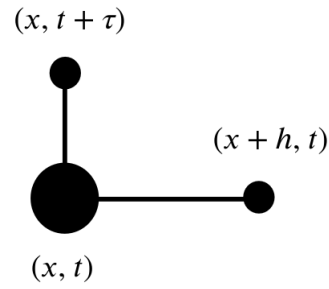
на шаблоне



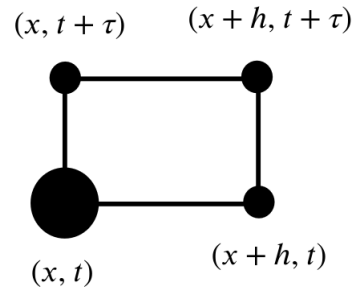
Легко видеть, что аналогичным порядком будет обладать аппроксимация

$$y_x(0, t) = \beta_0 y(0, t) + \frac{h}{2} y_t(0, t) - \tilde{\mu}_0(t), t \in \omega_\tau$$

на шаблоне



Тогда можно составить аппроксимацию на четырехточечном шаблоне вида



как линейную комбинацию двух аппроксимаций

$$y_x^{(\sigma)}(0, t) = \beta_0 y^{(\sigma)}(0, t) + \frac{h}{2} y_t(0, t) - \tilde{\mu}_0(t), t \in \omega_\tau, \quad (27)$$

где σ – это числовой параметр,

$$\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0, t), t \in \omega_\tau,$$

а

$$v^{(\sigma)} = \sigma \hat{v} + (1 - \sigma)v.$$

Исследуем погрешность аппроксимации данного уравнения. Погрешность аппроксимации $\nu(0, t)$ будет обладать следующими порядками:

1. При любых σ и

$$\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0, t),$$

получим

$$\nu(0, t) = O(\tau + h^2).$$

2. При любых σ и

$$\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0, t) + \sigma\tau\dot{\mu}_0(t),$$

получим

$$\nu(0, t) = O(\tau^2 + h^2).$$

3. При $\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ и

$$\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}f(0, t) + \left(\frac{\tau}{2} + \frac{h^2}{12}\right)\dot{\mu}_0(t) - \frac{h^2}{6}\beta_0 y_t(0, t) + \frac{h^2}{2}f'(0, t) + \frac{h^3}{24}f''(0, t) + \frac{\tau h}{4}\dot{f}(0, t)$$

получим

$$\nu(0, t) = O(\tau^2 + h^4).$$

По аналогии с формулой (26) можно записать соответствующую аппроксимацию для краевого условия третьего рода на правой границе

$$-\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \beta_1 u(1, t) - \mu_1(t), \quad \beta_1 = \text{const} > 0.$$

В заключение отметим, что если $\beta_0 = \beta_1 = 0$, то мы получим условия второго рода, что упростит аппроксимацию. Следует иметь ввиду, что устойчивость разностной схемы с весами с краевыми условиями второго и третьего рода может быть исследована аналогично тому, как было изложено выше.

2.3 Разностные схемы для уравнения колебаний.

2.3.1 Семейство девятиточечных схем с весами.

Запишем соответствующую дифференциальную задачу для оператора гиперболического типа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < t \leq T, \quad 0 < x < 1, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t), & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1)$$

В задаче $f(x, t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ – это заданные функции. Для входных данных должны выполняться условия согласования для корректной постановки задачи

$$u_0(0) = \mu_0(0), \quad u_0(1) = \mu_1(0).$$

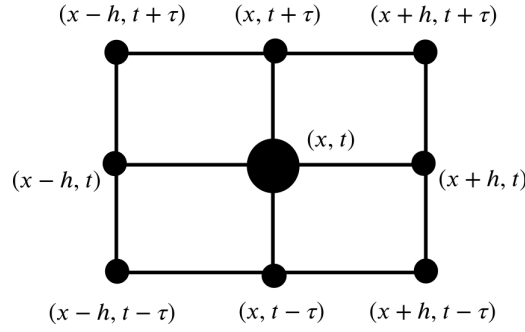
Задача (1) описывает колебание однородной струны, концы которой движутся по заданным законам: при $t = 0$ задается профиль струны u_0 и ее начальная скорость u_1 . В области определения

$$\overline{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T\}$$

введем сетку

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_t.$$

Для аппроксимации исходного уравнения используем девятиточечный шаблон



и на нем можно построить следующее однопараметрическое семейство разностных схем

$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}) + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t = \tilde{u}_1(x), & x \in \omega_h, \\ y(0, t) = \mu_0(t), \quad y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \omega_t, \end{cases} \quad (2)$$

где σ – это числовой параметр, а

$$\Lambda y = y_{\bar{x}x}, \quad \hat{y} = y(x, t + \tau), \quad \check{y} = y(x, t - \tau),$$

функции φ и \tilde{u}_1 – это сеточные функции, которые аппроксимируют соответствующие функции f , u_1 из задачи (1).

• Разностная схема (2) называется *схемой с весами для уравнения колебаний*.

Очевидно, что при любых σ эта схема является трехслойной.

Рассмотрим вопрос реализации данной схемы. Рассмотрим простой случай $\sigma = 0$. В этом случае схема будет явной и иметь вид

$$y_{\bar{t}t} = y_{\bar{x}x} + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_h. \quad (3)$$

Далее проделываем следующие действия.

1. Заполняем нулевой временной слой и вычисляем

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (4)$$

2. Заполняем первый временной слой и вычисляем

$$y_0^1 = \mu_0(\tau), \quad y_i^1 = y_i^0 + \tau \tilde{u}_1(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_N^1 = \mu_1(\tau). \quad (5)$$

3. Теперь можем записать расчетные формулы для любого слоя. Для всех $j = 1, N_1 - 1$ будем заполнять $(j + 1)$ -ый слой

$$\begin{cases} y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \\ y_i^{j+1} = 2y_i^j - y_i^{j-1} + \tau^2 \left(\frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_{ij} \right), \quad i = \overline{1, N-1}, \\ y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}). \end{cases} \quad (6)$$

Если $\sigma \neq 0$, то получим общее уравнение с параметром, и алгоритм реализации такой схемы будет следующим.

1. Заполняем нулевой временной слой и вычисляем

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N}.$$

2. Заполняем первый временной слой и вычисляем

$$y_0^1 = \mu_0(\tau), \quad y_i^1 = y_i^0 + \tau \tilde{u}_1(x_i), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_N^1 = \mu_1(\tau).$$

3. Теперь можем записать расчетные формулы для любого слоя. Для всех $j = 1, N_1 - 1$ будем заполнять $(j+1)$ -ый слой, решая систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей следующего вида

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(\frac{2\sigma}{h^2} + \frac{1}{\tau^2} \right) y_i^{j+1} + \frac{\sigma}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), \end{cases} \quad (7)$$

где

$$F_i^j = \frac{2}{\tau^2} y_i^j - \frac{1}{\tau^2} y_i^{j-1} + (1 - 2\sigma) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \sigma \frac{y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2} + \varphi_{ij}.$$

Если проанализировать коэффициенты данной системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, то метод прогонки для решения системы (7) будет устойчив при $\sigma > 0$.

2.3.2 Погрешность аппроксимации схемы с весами.

По аналогии с п.2 запишем задачу для погрешности

$$z = y - u.$$

При подстановке с учетом дифференциальной задачи у нас получится следующая разностная задача для погрешности

$$\begin{cases} z_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma \hat{z} + (1 - 2\sigma)z + \sigma \check{z}) + \Psi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ z(x, 0) = 0, \quad z_t(x, 0) = \nu, \quad x \in \overline{\omega}_h, \\ z(0, t) = z(1, t) = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\Psi = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - 2\sigma)u + \sigma \check{u}) - u_{\bar{t}t} + \varphi$$

является погрешностью аппроксимации разностного уравнения на точном решении, а

$$\nu = \tilde{u}_1 - u_t$$

является погрешностью аппроксимации второго начального условия. Если мы определим погрешности аппроксимации Ψ и ν , то установим погрешность аппроксимации разностной схемы. Начнем с функции Ψ . Для этого воспользуемся соотношением

$$\hat{u} + \check{u} = 2u + \tau^2 u_{\bar{t}t}.$$

Для упрощения записи будем обозначать

$$\dot{u} = u^{(1)} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad u' = u^{(I)} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

В итоге

$$\begin{aligned} \Psi &= \Lambda u + \sigma \tau^2 \Lambda u_{\bar{t}\bar{t}} - u_{\bar{t}\bar{t}} + \varphi = u'' + \frac{h^2}{12} u^{(IV)} + O(h^4) + \sigma \tau^2 \Lambda(\ddot{u} + O(\tau^2)) - \ddot{u} - \frac{\tau^2}{12} u^{(4)} + O(\tau^4) + \varphi = \\ &= \left[\ddot{u} = u'' + f, \quad u^{(IV)} = \ddot{u}'' - f'', \quad u^{(4)} = \ddot{u}'' + \ddot{f} \right] = \varphi - f + \frac{h^2}{12} u^{(IV)} + \sigma \tau^2 \ddot{u}'' - \frac{\tau^2}{12} u^{(4)} + O(\tau^4 + h^4) = \\ &= \varphi - f + \frac{h^2}{12} (\ddot{u}'' - f'') + \sigma \tau^2 \ddot{u}'' - \frac{\tau^2}{12} (\ddot{u}'' + \ddot{f}) + O(\tau^4 + h^4). \end{aligned}$$

Окончательно получим выражение для погрешности аппроксимации

$$\Psi = \varphi - f - \frac{h^2}{12} f'' - \frac{\tau^2}{12} \ddot{f} + \tau^2 \left(\sigma - \frac{1}{12} + \frac{h^2}{12\tau^2} \right) \ddot{u}'' + O(\tau^4 + h^4). \quad (9)$$

При анализе выражения (9) возможны следующие ситуации

1. если выбрать любые σ и

$$\varphi = f + O(\tau^2 + h^2),$$

то погрешность аппроксимации уравнения будет

$$\Psi = O(\tau^2 + h^2);$$

2. если выбрать

$$\sigma = \bar{\sigma} - \frac{h^2}{12\tau^2}$$

для любых $\bar{\sigma}$ и

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12} f'' + O(\tau^2 + h^4),$$

то погрешность аппроксимации уравнения будет

$$\Psi = O(\tau^2 + h^4);$$

3. если выбрать

$$\sigma = \frac{1}{12}$$

и

$$\varphi = f + \frac{\tau^2}{12} \ddot{f} + O(\tau^4 + h^2),$$

то погрешность аппроксимации уравнения будет

$$\Psi = O(\tau^4 + h^2);$$

4. если выбрать

$$\sigma = \frac{1}{12} - \frac{h^2}{12\tau^2}$$

и

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12} f'' + \frac{\tau^2}{12} \ddot{f} + O(\tau^4 + h^4),$$

то погрешность аппроксимации уравнения будет

$$\Psi = O(\tau^4 + h^4);$$

Погрешность аппроксимации второго начального условия

$$\nu(x, 0) = \tilde{u}_1(x) - u_t(x, 0)$$

тогда получим выражение для погрешности

$$\nu(x, 0) = \tilde{u}_1(x) - u_1(x) - \frac{\tau}{2}(u''(x, 0) + f(x, 0)) - \frac{\tau^2}{6}(\dot{u}''(x, 0) + \dot{f}(x, 0)) - \frac{\tau^3}{24}(\ddot{u}''(x, 0) + \ddot{f}(x, 0)) + O(\tau^4). \quad (10)$$

Выбор сеточной функции \tilde{u}_1 должен быть таким, чтобы порядок аппроксимации второго начального условия был не ниже порядка аппроксимации исходного уравнения колебания, то есть не ниже порядка функции Ψ .

1. Если мы хотим построить схему второго порядка, то нужно взять

$$\tilde{u}_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}(u''(x, 0) + f(x, 0)) + O(\tau^2 + h^2).$$

Функцию $u''(x, 0)$ можно вычислять различными способами. Самый простейший из них

$$u''(x, 0) = u_0''(x).$$

Если иногда это сделать невозможно, то другой способ – это аппроксимировать ее второй разностной производной по x

$$u''(x, 0) \approx u_{0,\bar{x}x}$$

с порядком $O(h^2)$, что не ухудшает аппроксимационных условий. Но следует отметить, что такая замена недопустима про схеме более высокого порядка аппроксимации.

2. Если мы хотим построить схему четвертого порядка, то нужно взять

$$\tilde{u}_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}(u''(x, 0) + f(x, 0)) + \frac{\tau^2}{6}(\dot{u}''(x, 0) + \dot{f}(x, 0)) + \frac{\tau^3}{24}(\ddot{u}''(x, 0) + \ddot{f}(x, 0)) + O(\tau^4).$$

При замене производных нам следует брать такие аппроксимации, чтоб соблюдались условия аппроксимации, то есть погрешности при вычислении производных не понижали порядок аппроксимации. Один из возможных вариантов задания функции $\tilde{u}_1(x)$, который обеспечивает четвертый порядок аппроксимации имеет вид

$$\tilde{u}_1(x) = u_1(x) + \frac{\tau}{2}(u_0''(x) + f(x, 0)) + \frac{\tau^2}{6}(u_1''(x) + \dot{f}(x, 0)) + \frac{\tau^3}{24}(u_0^{(IV)}(x) + f''(x, 0) + \ddot{f}(x, 0))$$

2.3.3 Устойчивость схемы с весами по начальным данным.

Рассмотрим разностную задачу

$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}), & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t = \tilde{u}_1(x), & x \in \bar{\omega}_h, \\ y(0, t) = 0, \quad y(1, t) = 0, & t \in \omega_\tau. \end{cases} \quad (11)$$

Выполнив разделение переменных так же, как и в случае схемы с весами для уравнения теплопроводности, получим задачу для $T_k(t)$ вида

$$(T_k)_{\bar{t}t} + \lambda_k(\sigma \hat{T}_k + (1 - 2\sigma)T_k + \sigma \check{T}_k) = 0,$$

из которого путем преобразований можно получить

$$(1 + \sigma\tau^2\lambda_k)\hat{T}_k - (2 + 2(\sigma - 1)\tau^2\lambda_k)T_k + (1 + \sigma\tau^2\lambda_k)\check{T}_k = 0.$$

Разделим это равенство на коэффициент $(1 + \sigma\tau^2\lambda_k)$ и получим следующее уравнение

$$\hat{T}_k + 2(1 - \alpha_k)T_k + \check{T}_k = 0, \quad \alpha = \frac{0.5\tau^2\lambda_k}{1 + \sigma\tau^2\lambda_k} \quad (12)$$

Следуя методу разделения переменных, достаточным условием устойчивости уравнения (12), а значит и устойчивости разностной схемы (11) по начальным данным будет условие

$$|q_i| \leq 1, \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

где q_i – это корни характеристического уравнения

$$q^2 - 2(1 - \alpha_k)q + 1 = 0.$$

Учитывая то, что по теореме Виета

$$|q_1 \cdot q_2| = 1,$$

выполнение условия (13) возможно лишь в том случае, когда q_1 и q_2 образуют комплексно сопряженную пару. Отсюда следует, что для устойчивости нам нужно потребовать, чтобы

$$(1 - \alpha_k)^2 - 1 < 0,$$

а из этого условия получаем выражение для σ

$$\sigma > \frac{1}{4} - \frac{1}{\tau^2\lambda_k}, \quad 0 < \lambda_k < 2.$$

Отсюда, подставляя λ_k , получим условие для устойчивости

$$\sigma \geq \sigma_0 = \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2}. \quad (14)$$

Из неравенства (14) и выражения для погрешности аппроксимации (9) следует, что

1. при $\sigma = 0$ мы получим явную разностную схему, а условие устойчивости

$$\tau \leq h;$$

2. для схемы второго порядка $\psi = O(h^2 + \tau^2)$ условие устойчивости будет

$$\bar{\sigma} \geq \frac{1}{4};$$

3. для схемы четвертого порядка $\psi = O(\tau^4 + h^4)$ условие устойчивости будет

$$\tau \leq h.$$

2.3.4 Случай краевых условий третьего рода.

Пусть левое граничное условие имеет следующий вид

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \beta_0 u(0, t) - \mu_0(t), \quad \beta_0 > 0. \quad (15)$$

Тогда можно рассматривать аппроксимацию с весами

$$y_x^\sigma(0, t) = \beta_0 y^{(\sigma)}(0, t) + \frac{h}{2} y_{tt}(0, t) - \tilde{\mu}_0(t), \quad t \in \omega_\tau \quad (16)$$

Обозначим погрешность аппроксимации через $\nu_1(0, t)$.

1. Если σ любые, а

$$\bar{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0, t),$$

то погрешность аппроксимации

$$\nu_1(0, t) = O(\tau^2 + h^2).$$

2. Если $\sigma = \frac{1}{12}$,

$$\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0, t) + \frac{\tau^2}{12} \ddot{f}(0, t),$$

то погрешность аппроксимации

$$\nu_1(0, t) = O(\tau^4 + h^2),$$

3. Если $\sigma = \bar{\sigma} - \frac{h^2}{12\tau^2}$,

$$\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0, t) + \frac{h^2}{6} f'(0, t) + \frac{h^3}{24} f''(0, t) + \frac{h^2}{12} \ddot{\mu}_0(t) - \beta_0 \frac{h^2}{6} y_{tt}(0, t),$$

то погрешность аппроксимации

$$\nu_1(0, t) = O(\tau^2 + h^4).$$

4. Если $\sigma = \frac{1}{12} - \frac{h^2}{12\tau^2}$,

$$\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} f(0, t) + \frac{h^2}{6} f'(0, t) + \frac{h^3}{24} f''(0, t) + \frac{h^2}{12} \ddot{\mu}_0(t) - \beta_0 \frac{h^2}{6} y_{tt}(0, t) + \frac{\tau^2}{12} \ddot{\mu}_0(t) + \frac{\tau^2 h}{24} \ddot{f}(0, t),$$

то погрешность аппроксимации

$$\nu_1(0, t) = O(\tau^4 + h^4).$$

При выводе условий 1-4 используются следующие формулы

$$u'(0, t) = \beta_0 u(0, t) - \mu_0(t),$$

$$u''(0, t) = \ddot{u}(0, t) - f(0, t),$$

$$u'''(0, t) = \ddot{u}'(0, t) - f'(0, t) = \beta_0 \ddot{u}(0, t) - \ddot{\mu}_0(t) - f'(0, t),$$

$$u^{(IV)}(0, t) = \ddot{u}''(0, t) - f''(0, t),$$

$$u^{(4)}(0, t) = \ddot{u}''(0, t) - \ddot{f}(0, t).$$

Замечание. Аналогичным образом можно строить аппроксимации для краевых условий на правой границе. В этом случае условие (17) записывается в виде

$$-\frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \beta_1 u(1, t) - \mu_1(t), \quad \beta_1 > 0, \quad (17)$$

а для аппроксимации используется условие с весами вида

$$-y_x^{(\sigma)}(1, t) = \beta_1 y^{(\sigma)}(1, t) - \tilde{\mu}_1(t), \quad (18)$$

где параметр σ и сеточная функция $\tilde{\mu}_1(t)$ выбираются аналогично случаю краевого условия на левой границе.

2.4 Разностные схемы для уравнения Пуассона.

2.4.1 Постановка задачи.

Постановка задачи Дирихле состоит в следующем. Требуется найти непрерывную в некоторой области G p -мерного евклидова пространства с границей Γ функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению Пуассона

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_p) \in G \quad (1)$$

и условию первого рода на границе

$$u(x) = \mu(x), \quad x = (x_1, \dots, x_p) \in \Gamma. \quad (2)$$

Таким образом, область, в которой формулируется задача

$$\overline{G} = G \cup \Gamma.$$

Известно, что если в уравнении (1) $f(x) \equiv 0$, то отличное от константы решение $u(x)$ может достигать своего максимального по модулю значения только на границе, то есть

$$\max_{x \in G} |u(x)| \leq \max_{x \in \Gamma} |\mu(x)|,$$

то есть для решения однородной задачи Дирихле функция $u(x)$ удовлетворяет принципу максимума, а значит решение устойчиво по граничным данным. В дальнейшем с целью упрощения выкладок будем рассматривать случай $p = 2$, при этом оператор

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \quad (3)$$

Сложность численного решения рассматриваемой задачи зависит от формы области G . Поэтому изучения вопроса о построении и исследовании разностных схем начнем с простого случая.

2.4.2 Разностная задача Дирихле в случае прямоугольной области.

Пусть

$$\overline{G} = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}.$$

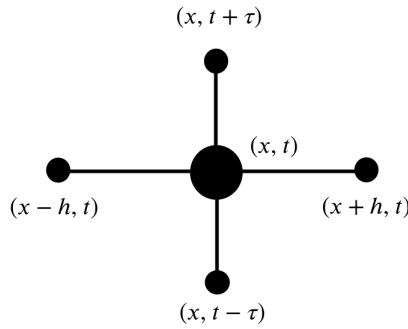
Построим в этой области равномерную по каждой координате сетку

$$\overline{\omega}_h = \omega_{h_1} \times \omega_{h_2}, \quad h_1 = \frac{l_1}{N_1}, \quad h_2 = \frac{l_2}{N_2}.$$

В каждом внутреннем узле

$$x = (x_1, x_2) \in \omega_h$$

для аппроксимации условия (3) может быть использован пятиточечный шаблон



и следующий разностный оператор

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = y_{\overline{x}_1 x_1} + y_{\overline{x}_2 x_2} \quad (4)$$

Тогда исходной задаче (1)-(2) при $p = 2$ поставим в соответствие разностную задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Lambda y = -\varphi, & x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (5)$$

где γ_h – это множество граничных узлов сетки. В задаче (5) сеточная функция $u(x)$ определяется из условия аппроксимации, причем порядок будет зависеть только от функции φ . Легко видеть, что разностная схема (5) будет схемой второго порядка

$$\Psi = O(h^2) = O(h_1^2 + h_2^2),$$

если мы выберем

$$\varphi(x) = f(x) + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Если $f(x)$ – это непрерывная функция, то

$$\varphi(x) = f(x), \quad x \in \omega_h.$$

В дальнейшем будем использовать следующее безиндексное обозначение

$$\Lambda y = \frac{1}{h_1^2} (y^{(+1_1)} - 2y + y^{(-1_1)}) + \frac{1}{h_2^2} (y^{(+1_2)} - 2y + y^{(-1_2)}),$$

где

$$y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x^{(\pm 1_\alpha)}), \quad \alpha = 1, 2, \quad x^{(\pm 1_1)} = (x_1 \pm h_1, x_2), \quad x^{(\pm 1_2)} = (x_1, x_2 \pm h_2).$$

Более привычной будет индексная форма записи

$$\Delta y = \frac{1}{h_1^2}(y_{i+1j} - 2y_{ij} + y_{i-1j}) + \frac{1}{h_2^2}(y_{ij+1} - 2y_{ij} + y_{ij-1}),$$

$$y_{ij} = y(x_{ij}), \quad x_{ij} = (x_{1i}, x_{2j}), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Заметим, что угловые точки не участвуют в аппроксимации. Запишем индексную форму разностной схемы (5):

$$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2}(y_{i+1j} - 2y_{ij} + y_{i-1j}) + \frac{1}{h_2^2}(y_{ij+1} - 2y_{ij} + y_{ij-1}) = -\varphi_{ij}, & i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \\ y_{i0} = \mu(x_{1i}, 0), \quad y_{iN_2} = \mu(x_{1i}, l_2), & i = \overline{1, N_1 - 1}, \\ y_{0j} = \mu(0, x_{2j}), \quad y_{N_1j} = \mu(l_1, x_{2j}), & j = \overline{1, N_2 - 1}. \end{cases} \quad (6)$$

2.4.3 Методы решения разностной задачи Дирихле.

Индексная форма записи разностной схемы (5) позволяет увидеть, что система (6) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно y_{ij} , размерность которой $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$. Размерность системы и ее вид позволяет сделать следующее заключение относительно свойств:

1. большая размерность; даже в случае наиболее типичной сетки, например $l_1 = l_2 = 1$, $N_1 = N_2 = 100$, то мы получим систему размерности порядка 10^5 уравнений;
2. сильная разреженность; каждое уравнение в формуле (6) содержит не более 5 отличных от нуля коэффициентов, а отношение числа ненулевых элементов к общему числу элементов есть величина $O(|h^2|)$, где $|h^2| = h_1^2 + h_2^2$;
3. большой разброс собственных значений; если шаги $h = (h_1, h_2) \rightarrow 0$, то величина

$$\xi = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} = O(|h|^2) \rightarrow 0,$$

где $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ – максимальное и минимальное собственные значения оператора дифференциальной задачи, а значит система уравнений (6) будет плохо обусловленной, что затрудняет применение прямых методов.

Учитывая вышеуказанные особенности разностной задачи Дирихле, для ее решения используются, как правило, итерационные методы. Рассмотрим следующие методы решения разностной задачи Дирихле.

2.4.3.1 Метод Якоби.

Для применения метода Якоби выразим каждое уравнение системы (6) относительно $y_{ij} = y(x_{ij})$, $x_{ij} = (x_{1i}, x_{2j})$, тогда

$$y_{ij} = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}} \left(\frac{y_{i+1j} + y_{i-1j}}{h_1^2} + \frac{y_{ij+1} + y_{ij-1}}{h_2^2} + \varphi_{ij} \right).$$

Пусть известно начальное приближение $y_{ij}^0 = y^0(x_{ij})$ для $i = \overline{1, N_1 - 1}$, $j = \overline{1, N_2 - 1}$. Далее записываем итерационный процесс на базе этой формулы:

$$y_{ij}^{k+1} = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}} \left(\frac{y_{i+1j}^k + y_{i-1j}^k}{h_1^2} + \frac{y_{ij+1}^k + y_{ij-1}^k}{h_2^2} + \varphi_{ij} \right), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Формула (7) и является *алгоритмом метода Якоби* реализации разностной задачи Дирихле. Но нужно оценить, будет ли сходиться данный итерационный процесс. Если мы хотим записать систему в виде

$$Y = BY + F,$$

где $Y = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1N_2-1}, y_{21}, \dots, y_{2N_2-1}, \dots, y_{N_1-1N_2-1})^T$ – это искомый вектор. Нам нужно проанализировать, как себя будет вести норма матрицы B . Если оценивать норму матрицы B в кубическом смысле $\|B\|_C$, то при определенной нумерации она будет равна единице, то есть $\|B\|_C = 1$. Поэтому метод Якоби будет сходиться со скоростью бесконечно убывающей геометрической прогрессии по знаменателю $\|B\|_C$.

2.4.3.2 Метод Гаусса-Зейделя.

Запишем этот метод в предположении, что вычисление новых итерационных приближений координат вектора неизвестных осуществляется в порядке возрастания сначала индекса i , а затем индекса j . Тогда получаем итерационный процесс, задающийся по формуле

$$y_{ij}^{k+1} = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}} \left(\frac{y_{i+1j}^k + y_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{y_{ij+1}^k + y_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} + \varphi_{ij} \right), i = \overline{1, N_1 - 1}, j = \overline{1, N_2 - 1}, k = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

которая называется *формулой метода Гаусса-Зейделя*. Сходимость этого итерационного процесса будет быстрее, чем для метода Якоби.

2.4.3.3 Метод релаксации.

Итерационная *формула метода релаксации* имеет вид

$$y_{ij}^{k+1} = \frac{1}{\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}} \left(\frac{y_{i+1j}^k + y_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{y_{ij+1}^k + y_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2} + \varphi_{ij} \right) + (1 - q)y_{ij}^k, k = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

где q – это параметр релаксации, а его значение $q \in [0, 2]$. Для некоторых задач существует возможность найти оптимальное значение параметра q , которое обеспечит минимальное количество итераций для достижения заданной точности. Выпишем оптимальное значение параметра релаксации для задачи Дирихле, которое обеспечивает максимальную скорость сходимости

$$q_{\text{опт}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\sigma(2 - \sigma)}}, \quad \sigma = \frac{2h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{2h_1^2}{h_1^2 + h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_2}{2l_2}.$$

Легко видеть, что $q > 1$, а значит для данной задачи мы получили оптимальный метод верхней релаксации.

2.4.4 Устойчивость и сходимость разностной задачи Дирихле.

Устойчивость разностной задачи Дирихле мы будем доказывать, получая оценки решения $y(x)$ через правую часть $\varphi(x)$ и граничное условие $\mu(x)$. После того, как будет доказана устойчивость, мы докажем и сходимость, то есть что при $h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow 0$ норма разности между приближенным и точным решением в сеточной норме C стремится к нулю:

$$\|y - u\|_{C(\omega_h)} = \max_{x \in \omega_h} |y(x) - u(x)| \rightarrow 0.$$

Устойчивость разностной схемы (5) будем доказывать, основываясь на принципе максимума. Нам пригодятся результаты, которые мы получили в п.1.5. При этом, не ограничивая общности, возьмем в качестве функции $\varphi(x)$ правую часть, то есть

$$\varphi(x) = f(x).$$

Следуя алгоритму принципа максимума, запишем нашу разностную задачу операторном виде

$$Sy(x) = F(x), \quad x \in \omega_h, \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \quad (10)$$

где

$$Sy(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi)y(\xi), \quad x = x_{ij}, \quad \Pi'(x) = \{x_{i\pm 1j}, x_{ij\pm 1}\}.$$

Учитывая вид оператора, здесь легко выписать, что

$$A(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}, \quad B(x, x_{ij\pm 1}) = \frac{1}{h_2^2}, \quad B(x, x_{i\pm 1j}) = \frac{1}{h_1^2},$$

а тогда

$$D(x) \equiv 0.$$

Принимая во внимание условия первого рода, мы можем заключить, что данная разностная задача удовлетворяет принципу максимума, то есть решение является устойчивым по принципу максимума.

Представим решение задачи (10) в виде суммы

$$y(x) = \bar{y}(x) + \bar{\bar{y}}(x),$$

где \bar{y} – это решение однородного уравнения (10) с неоднородными граничными условиями

$$\begin{cases} S\bar{y}(x) = 0, & x \in \omega_h, \\ \bar{y}(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (11)$$

а $\bar{\bar{y}}(x)$ – это решение неоднородного уравнения (10) с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} S\bar{\bar{y}}(x) = F(x), & x \in \omega_h, \\ \bar{\bar{y}}(x) = 0, & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (12)$$

К задаче (11) можно применить следствие из теоремы сравнения п.1.5, которое приводит к оценке

$$\|\bar{y}\|_{C(\omega_h)} \leq \|\mu\|_{C(\gamma_h)}. \quad (13)$$

Чтобы оценить решение $\bar{\bar{y}}(x)$, построим мажорантную функцию для решения задачи (12), а затем применим теорему сравнения из п.1.5. Сначала рассмотрим некоторую функцию

$$Y(x) = k(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad (14)$$

где $k > 0$, l_1, l_2 – это стороны прямоугольника, а $Y(x) \geq 0$, $x \in \bar{\omega}_h$ по построению. Чтобы применить теорему сравнения, мы должны рассмотреть коэффициенты при Y в разностной задаче:

$$SY(x) = D(x)Y(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi)(Y(x) - Y(\xi)).$$

По построению

$$\begin{aligned} SY(x) &= -Y_{\bar{x}_1 x_1} - Y_{\bar{x}_2 x_2}, \\ Y_{\bar{x}_1 x_1} &= -2k = \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}, \quad Y_{\bar{x}_2 x_2} = -2k = \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$SY(x) = 4k$$

и можно считать, что функция (14) является решением краевой задачи

$$\begin{cases} SY(x) = \bar{F}(x), & x \in \omega_h, \\ Y(x) = \bar{\mu}(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (15)$$

где $\bar{F}(x) = 4k$, $\bar{\mu}(x) \geq 0$. Если теперь выбрать

$$k = \frac{1}{4} \|F\|_{C(\omega_h)},$$

то по отношению к задачам (12) и (15) будут выполнены все условия теоремы сравнения. В итоге мы получим оценку

$$\|\bar{y}\|_{C(\omega_h)} \leq \max_{x \in \bar{\omega}_h} Y(x) \leq k(l_1^2 + l_2^2) = \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F\|_{C(\omega_h)}. \quad (16)$$

Используя (13), (16), а также неравенство треугольника, мы можем записать, что

$$\|y\|_{C(\omega_h)} \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|f\|_{C(\omega_h)} + \|\mu\|_{C(\gamma_h)} \quad (17)$$

– это оценка решения задачи (1). Из (17) можно сделать вывод об устойчивости рассматриваемой разностной схемы по правой части и по граничным условиям. Ссылаясь на результаты п.1.5, мы можем утверждать, что разностная схема устойчива и однозначно разрешима, то есть решение существует единственное и оно устойчиво.

Для доказательства сходимости рассмотрим функцию погрешности

$$z_{ij} = y_{ij} - u(x_{1,i}, x_{2,j}).$$

Подставим вместо y_{ij} в схему (5)

$$y_{ij} = z_{ij} + u(x_{1,i}, x_{2,j}).$$

Тогда получим задачу для погрешности

$$\begin{cases} \Lambda z(z) = -\psi(x), & x \in \omega_h, \\ z(x) = 0, & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\psi_{ij}(x) = u_{\bar{x}_1 x_1, ij} + u_{\bar{x}_2 x_2, ij} + f_{ij},$$

которая и является погрешностью аппроксимации исходной разностной задачи. Можно утверждать, что

$$\psi = O(|h|^2), \quad |h| = \max(h_1, h_2),$$

то есть, другими словами,

$$\|\psi\|_{C(\omega_h)} \leq M_1(h_1^2 + h_2^2), \quad M_1 = \text{const} > 0. \quad (19)$$

Тогда для решения задачи (18) применима оценка (17), то есть

$$\|z\|_{C(\omega_h)} \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|\psi\|_{C(\omega_h)} \leq M_2(h_1^2 + h_2^2), \quad M_2 = \frac{M_1}{4} \quad (20)$$

Из оценки (20) следует, что схема (5) сходится и имеет второй порядок точности при

$$\varphi = f + O(h_1^2 + h_2^2).$$

2.4.5 Разностная схема повышенного порядка точности.

Построив схему 4-го порядка в случае прямоугольной области: возьмем за основу разностную задачу Дирихле (5), которая является схемой второго порядка и применим к ней процедуру повышения порядка аппроксимации, которую мы использовали ранее, то есть такую процедуру, в результате которой повышается порядок на основании вида дифференциального оператора.

Рассмотрим погрешность аппроксимации разностной схемы (5)

$$\psi(x) = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2} + \varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{h_1^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{h_2^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + O(h_1^4 + h_2^4) + \varphi.$$

Подберем φ так, чтобы схема имела четвертый порядок:

$$\varphi = f - \frac{h_1^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{h_2^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + O(h_1^4 + h_2^4). \quad (21)$$

Поскольку задача ставится так, чтобы построить разностную схему на минимальном шаблоне, воспользуемся видом дифференциального оператора и учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в формулу (21) и получим

$$\varphi = f + \frac{h_1^2}{12} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{h_2^2}{12} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Заменяя производные разностными аналогами, окончательно получим разностную схему 4-го порядка аппроксимации

$$\begin{cases} \tilde{\Lambda} y = -\tilde{\varphi}, & x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} y &= y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \cdot y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, \\ \tilde{\varphi} &= f + \frac{h_1^2}{12} \cdot f_{\bar{x}_1 x_1} + \frac{h_2^2}{12} \cdot f_{\bar{x}_2 x_2}, \end{aligned}$$

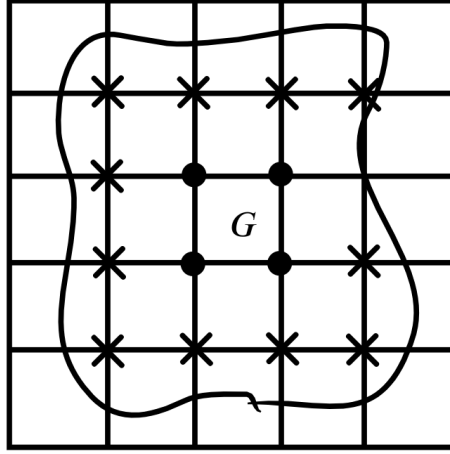
а шаблон будет девятиточечным, но он будет минимальным в том смысле, что для аппроксимации привлекается не более трех точек по каждому направлению.

Можно показать, что для того, чтобы схема (22) удовлетворяла принципу максимума и была сходящейся, необходимо выполнение следующего условия на шаги сетки

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{5}. \quad (23)$$

2.4.6 Разностная задача Дирихле в случае области сложной формы.

Пусть область $\bar{G} = G \cup \Gamma$ задачи Дирихле не является прямоугольником. Построим в этой области прямоугольную сетку $\bar{\omega}_h$, как это было описано в п.1.1



При таком разбиении области \bar{G} все внутренние узлы сетки разобьем на два подмножества:

$$\omega_h = \omega_h^0 + \omega_h^*,$$

где ω_h^0 – это множество внутренних регулярных узлов (кружочки), то есть таких узлов, что расстояние от них до границы Γ не меньше полного шага сетки по каждому направлению, а ω_h^* – это множество нерегулярных внутренних узлов сетки (крестики), то есть такие узлы, что расстояние от них до границы Γ по одному направлению меньше одного шага по данному направлению. Будем также предполагать, что сетка ω_h является связной.

Тогда дифференциальный оператор Δu заменяется разностным оператором

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad x \in \omega_h^0,$$

$$\Pi(x) = \{(x_1 \pm h_1, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 \pm h_2)\}.$$

В нерегулярном случае

$$x \in \omega_h^*, \quad \hat{\Pi}(x) = \{(x_1 \pm h_1^\pm, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 \pm h_2^\pm)\}$$

Тогда мы будем аппроксимировать дифференциальный оператор Δu разностным оператором

$$\Lambda^* y = \Lambda_1^* y + \Lambda_2^* y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2},$$

где

$$y_{\bar{x}_\alpha \hat{x}_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \left(\frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha^+} - \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^-} \right), \quad h_\alpha = \frac{1}{2}(h_\alpha^+ - h_\alpha^-), \quad \alpha = 1, 2$$

В итоге, объединяя, мы можем записать разностную схему для задачи Дирихле в случае области сложной формы

$$\begin{cases} \Lambda y(x) = -\varphi(x), & x \in \omega_h^0, \\ \Lambda^* y(x) = -\varphi(x), & x \in \omega_h^*, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (24)$$

Легко видеть, что разностная схема (24) имеет второй порядок аппроксимации при $x \in \omega_h^0$, первый порядок при $x \in \omega_h^*$. Следует отметить тот факт, что в качестве $\varphi(x)$ мы должны

рассматривать функцию, аппроксимирующую соответствующим образом правую часть исходного уравнения.

Для схемы (24) справедливы утверждения об устойчивости и сходимости, как и в случае прямоугольной области. Для реализации схемы (24) применимы методы, которые мы рассматривали ранее.

2.5 Методы решения сеточных уравнений.

В данном параграфе мы рассмотрим проблему разработки методов для решения сеточных уравнений. Сеточными уравнениями называются уравнения, которые получаются в результате работы с сеточными функциями, которые связаны с процессом приближенного решения задач математической физики. Когда теория разностных схем начала развиваться, то пришли к выводу, что необходимы специальные методы для реализации разностных схем. Мы рассматривали линейные задачи, которые приводят к системам линейных алгебраических уравнений.

На примере разностной задачи Дирихле мы убедились в том, что это может быть система большой размерности, сильно разреженная или плохо обусловленная. Для того, чтобы эффективно решать их, нужно использовать соответствующие методы. Но если мы рассмотрим задачу одномерную, то аппроксимация на трехточечном шаблоне приводит нас к трехдиагональной матрице, которая оптимальным образом решается с помощью метода прогонки. Если мы рассматриваем двумерную задачу Дирихле, то там получается пятидиагональная матрица. В свое время были разработаны методы прогонки для пятидиагональных матриц. Проблема решения разностных схем связана как раз таки с выбором методов решения сеточных уравнений. Как простейший вариант мы выписали три метода (Якоби, Гаусса-Зейделя и релаксации).

Здесь мы остановимся на вопросах требований к методам: как их лучше строить, как их лучше применять.

При решении задач математической физики с помощью теории разностных схем возникает необходимость в развитии методов специально предназначенных для решения многомерных разностных краевых задач. В данном параграфе рассмотрим основные подходы для исследования разностных задач в двумерном случае и на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

2.5.1 Модельная задача и ее свойства.

В качестве модельной будем рассматривать разностную задачу (5) из п.4:

$$\begin{cases} \Lambda y(x) = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\Lambda y(x) = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad \varphi = f + O(h_1^2 + h_2^2).$$

Задачу (1) можно свести к задаче с однородными краевыми условиями путем изменения функции $\varphi(x)$ при граничных узлах. Покажем как это сделать для одномерного случая. В одномерном случае мы имеем краевую задачу для ОДУ второго порядка с неоднородными

граничными условиями первого рода

$$\begin{cases} u''(x) = -f(x), & 0 < x < l_1, \\ u(0) = \mu_1, u(l_1) = \mu_2. \end{cases}$$

Зададим равномерную сетку

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, \ i = \overline{0, N}, h = \frac{l_1}{N} \right\}$$

и на ней у нас получается разностная схема второго порядка

$$\begin{cases} y_{\overline{x}x,i} = -f_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ y_0 = \mu_1, \ y_N = \mu_2. \end{cases}$$

За счет выбора функции f перейдем к эквивалентной системе, у которой будут нулевые граничные условия. Для этого рассмотрим такую разностную схему

$$\begin{cases} \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = -f_i, & i = \overline{2, N-2}, \\ \frac{-2y_1 + y_2}{h^2} = -\left(f_1 + \frac{\mu_1}{h^2}\right), \\ \frac{-2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = -\left(f_{N-1} + \frac{\mu_2}{h^2}\right). \end{cases}$$

В этой системе отсутствуют y_0, y_N , поэтому мы можем определить $y_0 = y_N = 0$.

Рассмотрим множество векторов

$$y = (y_1, \dots, y_{N-1})^T, \ y_i = y(x_i), \ x_i \in \omega_h$$

и определим на этом множестве оператор A следующим образом

$$\begin{aligned} (Ay)_i &= -y_{\overline{x}x,i}, \ i = \overline{2, N-2}, \\ (Ay)_1 &= \frac{2y_1 - y_2}{h^2}, \ (Ay)_{N-1} = \frac{2y_{N-1} - y_{N-2}}{h^2}. \end{aligned}$$

Тогда исходную систему можно записать в виде операторного уравнения

$$Ay = \tilde{f},$$

где

$$\tilde{f} = \left(f_1 + \frac{\mu_1}{h^2}, f_2, \dots, f_{N-2}, f_{N-1} + \frac{\mu_2}{h^2} \right).$$

Можно считать, что оператор A определен на подпространстве функций, заданных на сетке $\overline{\omega}_h$ и обращающихся в ноль на границе, а именно

$$(Ay)_i = -y_{\overline{x}x,i}, \ i = \overline{1, N-1}, \ y_0 = 0, y_N = 0.$$

Таким образом, каждую разностную задачу можно рассматривать как операторное уравнение с оператором, действующим в некотором линейном конечномерном подпространстве сеточных функций.

Разностная задача (1) будет порождать следующий оператор

$$(Ay)_{ij} = -y_{\overline{x}_1x_1,ij} - y_{\overline{x}_2x_2,ij}, \ i = \overline{1, N_1-1}, \ j = \overline{1, N_2-1}, \quad (2)$$

$$h_1 = \frac{l_1}{N_1}, \quad h_2 = \frac{l_2}{N_2}, \quad y_{ij} = y(x_{ij}), \quad x_{ij} = (x_{1i}, x_{2j}),$$

при этом

$$y_{ij} = 0, \quad x_{ij} \in \gamma_h.$$

Тогда вместо задачи (1) мы можем рассматривать операторное уравнение с заданной правой частью

$$Ay = f. \quad (3)$$

Таким образом, мы можем рассматривать методы решения уравнения (3).

Введем линейное пространство H функций, определенных на сетке $\overline{\omega}_h$ и обращающихся в ноль на γ_h размерности $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$. В пространстве H введем норму через скалярное произведение:

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N_1-1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2-1} h_2 y_{ij} v_{ij},$$

в соответствии с этим

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Перечислим свойства оператора A :

1. Самосопряженность $A = A^T$, то есть

$$(Ay, v) = (Av, y), \quad \forall y, v \in H.$$

2. Положительность $A > 0$, то есть

$$(Ay, y) > 0, \quad \forall y \in H, y \neq 0.$$

Будем обозначать $A \geq 0$, если

$$(Ay, y) \geq 0, \quad \forall y \in H.$$

Для двух операторов A, B будет $A \geq 0$, если

$$A - B \geq 0.$$

3. Собственные числа этого оператора равны

$$\lambda_{k_1 k_2} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi k_1 h_1}{l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi k_2 h_2}{l_2},$$

а собственные функции

$$\mu_{k_1 k_2}(x_{ij}) = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{\pi k_1 x_{1,i}}{l_1} \sin \frac{\pi k_2 x_{2,j}}{l_2}, \quad k_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, \quad \alpha = 1, 2.$$

4. Система собственных функций оператора A образует в пространстве H ортонормированный базис, то есть

$$(\mu_k, \mu_m) = \delta_{km}, \quad k = (k_1, k_2), \quad m = (m_1, m_2),$$

k и m — это индексы по x_1 и x_2 соответственно.

5. Оценки спектра и энергия оператора

$$\lambda_{\min} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_2}{2l_2},$$

$$\lambda_{\max} = \frac{4}{h_1^2} \cos^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \cos^2 \frac{\pi h_2}{2l_2}.$$

Таким образом, любое собственное число

$$\frac{9}{l_1^2} + \frac{9}{l_2^2} \leq \lambda_k \leq \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}.$$

Дадим также оценки энергии

$$\lambda_{\min} \|y\|^2 \leq (Ay, y) \leq \lambda_{\max} \|y\|^2.$$

2.5.2 Элементы теории итерационных методов решения сеточных уравнений.

Запишем каноническую форму неявного двухслойного одношагового итерационного метода

$$B_{k+1} \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau_{k+1}} + Ay^k = f, \quad (4)$$

где $k = 0, 1, \dots$, B_{k+1} – это матрица, определяющая итерационный метод, y^0 – заданное начальное приближение, τ_{k+1} – итерационный параметр. Предполагается, что существует также обратная матрица B_{k+1}^{-1} . Тогда из уравнения (4) для нахождения y_{k+1} нам нужно решить систему уравнений

$$B_{k+1}y^{k+1} = F_k, \quad F_k = (B_{k+1} - \tau_{k+1}A)y^k + \tau_{k+1}f. \quad (5)$$

Если $B_{k+1} = E$, то метод (4) называется *явным*, иначе – *неявным*. Если $B_{k+1} = B$, $\tau_{k+1} = \tau$, то метод (4) называется *стационарным*.

В дальнейшем для упрощения выкладок будем рассматривать стационарные итерационные методы.

Сформулируем теорему о сходимости метода (4).

Теорема. Пусть $A = A^T > 0$, то есть симметричный и положительно определенный оператор, $\tau > 0$, $B - \frac{\tau}{2}A > 0$. Тогда стационарный метод (4) сходится, то есть

$$\|y^k - y^*\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

где y^* – это точное решение операторного уравнения (3). При этом скорость сходимости определяется неравенством

$$\|y^k - y^*\| \leq \rho^k \|y^0 - y^*\|, \quad 0 < \rho < 1,$$

то есть итерационный метод (4) сходится по закону геометрической прогрессии со знаменателем ρ .

◆ Без доказательства. □

Рассмотрим выписанные ранее методы с точки зрения формулы (4). Метод Якоби, заданный по формуле (7) из п.4, будет иметь следующий канонический вид

$$D(y^{k+1} - y^k) + Ay^k = f, \quad (6)$$

где $D = \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$, где a_{ii} – элементы матрицы A . Тогда в соответствии с формулой (4)

$$B = D, \quad \tau = 1.$$

Условия теоремы будут выполняться для метода (6), если имеется диагональное преобладание

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Если рассмотрим формулу (9) из п.4, то метод релаксации может быть задан в каноническом виде как

$$(D + qA_1) \frac{y^{k+1} - y^k}{q} + Ay^k = f, \quad (7)$$

где $D = \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$, где a_{ii} – элементы матрицы A , а матрица A_1 – это нижняя треугольная матрица с нулевой диагональю, которая определяется разложением матрицы A :

$$A = A_1 + D + A_2,$$

где A_2 – это верхняя треугольная матрица с нулевой диагональю. Таким образом, метод (7) является частным случаем метода (4), в котором

$$B = (D + qA_1), \quad \tau = q.$$

Также легко доказать, что условия теоремы (1) будут выполняться, если $0 < q < 2$.

Формула Гаусса-Зейделя по формуле (8) из п.4 эквивалентна методу (7) при $q = 1$.

Если мы рассмотрим простейший случай, когда $B = E$, то у нас получится формула метода простой итерации вида (8)

$$\frac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + Ay^k = f, \quad (8)$$

то условием сходимости будет условие

$$\tau < \frac{2}{\lambda_{\max}(A)},$$

которое в данном случае является не только достаточным, но и необходимым.

Мы можем выбрать такое значение τ , которое дает возможность получить требуемую точность ε за минимальное количество итераций. Обозначим минимальное количество итераций как

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\rho}},$$

где ρ – это число из теоремы (знаменатель геометрической прогрессии). Оптимальным параметром τ_0 для метода (4) является величина

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_{\max}(B^{-1}A) + \lambda_{\min}(B^{-1}A)}.$$

При этом в случае метода (8)

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)},$$

при этом скорость сходимости

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}.$$

Замечания.

1. Для рассматриваемой модельной задачи метод Якоби совпадает с методом простой итерации с оптимальным параметром τ . При этом

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{2 \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\pi^2 h^2} = O(h^{-2}),$$

где

$$h = h_1 = h_2.$$

2. Если в методе релаксации (7) выбрать

$$q = \frac{2}{1 + \sqrt{\nu}}, \quad \nu = 4 \sin^4 \frac{\pi h}{2},$$

то

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{2 \ln \frac{1}{\varepsilon}}{\pi h} = O(h^{-1})$$

3. Для ускорения сходимости можно использовать нестационарные итерационные методы. Если мы будем рассматривать явный нестационарный метод, то он будет называться *методом с чебышевскими параметрами*, то есть $B = E$, τ_{k+1} , $k = 1, \dots, n$, параметры τ подбираются таким образом, чтобы при заданном числе итераций минимизировать погрешность $\|y^n - y^*\| \rightarrow \min$, то в этом случае

$$n_0(\varepsilon) = O(h^{-1}).$$

Можно показать, что данный метод требует меньшего числа итераций, чем метод релаксации.

2.5.3 Попеременно треугольный итерационный метод.

Для того, чтобы метод был сходящимся, будем предполагать, что $A = A^T > 0$. Определим матрицу

$$R = \begin{cases} a_{ij}, & i > j, \\ \frac{1}{2}a_{ij}, & i = j, \\ 0, & i < j. \end{cases}$$

тогда матрицу A можно записать как

$$A = R + R^T,$$

где R – это нижнетреугольная матрица, а R^T – это верхнетреугольная матрица, причем у них совпадают диагонали.

$$B \frac{y^{k+1} - y^k}{\tau} + Ay^k = f, \quad (9)$$

Попеременно треугольный метод относится к неявным стационарным методам вида

$$B = (E + \nu R^T)(E + \nu R), \quad (10)$$

где $\nu > 0$ – это числовой параметр. В дальнейшем параметры ν и τ будут выбраны исходя из условий сходимости итерационного процесса по методу (9)-(10). Если ν и τ известны, то y^{k+1} находится из уравнения (9) в 2 этапа:

1. находим промежуточное значение $y^{k+\frac{1}{2}}$ из уравнения

$$(E + \nu R^T)y^{k+\frac{1}{2}} = \varphi^k, \quad (11)$$

где

$$\varphi_k = By^k - \tau Ay^k + \tau f;$$

2. используя $y^{k+\frac{1}{2}}$, находим y^{k+1} как решение уравнения

$$(E + \nu R)y^{k+1} = y^{k+\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Решение уравнений (11) и (12) не представляет труда, так как матрицы этих систем уравнений являются треугольными.

Теорема. Пусть для оператора $A = R + R^T$ существуют $\delta > 0$, $\Delta > 0$, при которых

$$A \geq \delta E, \quad 4R^T R \leq \Delta A.$$

Причем

$$\nu = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \quad \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (13)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{2\sqrt{1+\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{4}.$$

При выполнении данных условий итерационный метод (9), (10) сходится и для погрешности справедлива оценка

$$\|y^k - y^*\| \leq \rho^* \|y^0 - y^*\|, \quad \rho = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + 3\sqrt{\xi}}.$$

◆ Без доказательства. □

Запишем алгоритм попеременно треугольного метода применительно к задаче (1). Для упрощения расчетных формул будем считать $l_1 = l_2 = 1$, $h_1 = h_2 = h$. Тогда оператор записывается следующим образом

$$(Ay)_{ij} = \frac{y_{\bar{x}1,ij} + y_{\bar{x}2,ij}}{h} - \frac{y_{x1,ij} + y_{x2,ij}}{h},$$

тогда оператор A представим в виде

$$A = R + U,$$

где

$$(Ry)_{ij} = \frac{y_{\bar{x}_1, ij} + y_{\bar{x}_2, ij}}{h}, \quad (Uy)_{ij} = -\frac{y_{x_1, ij} + y_{x_2, ij}}{h}.$$

Легко видеть, что R – это нижнетреугольная матрица, а U – это верхнетреугольная матрица. Кроме того оператор U является сопряженным к оператору R , то есть

$$(Ry, v) = (y, Uv),$$

откуда следует, что $U = R^T$. Используя теорему и учитывая свойства оператора A мы можем получить параметры попеременно треугольного метода применительно к задаче (1)

$$\nu = \frac{h}{2\pi}, \quad \tau = \frac{2h}{\pi}. \quad (14)$$

Выпишем два этапа

1. вычисляем $y^{k+\frac{1}{2}}$ по формуле

$$y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{h} \left(\frac{y_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} - y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{h} + \frac{y_{ij+1}^{k+\frac{1}{2}} - y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{h} \right) = \varphi_{ij}^k, \quad i, j = \overline{1, N-1}, \quad (15)$$

где

$$y_{Nj}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad y_{iN}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\varphi_{ij}^k = (By^k)_{ij} - \tau(Ay^k)_{ij} + \tau f_{ij};$$

2. вычисляем y^{k+1} по формуле

$$y_{ij}^{k+1} - \frac{\nu}{h} \left(\frac{y_{ij}^{k+1} - y_{i-1j}^{k+1}}{h} + \frac{y_{ij}^{k+1} - y_{ij-1}^{k+1}}{h} \right) = y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad i, j = \overline{1, N-1}, \quad (16)$$

где

$$y_{0j}^{k+1} = 0, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad y_{i0}^{k+1} = 0, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

При выбранных ν и τ мы можем оценить минимальное число итераций

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{2\pi h} = O(h^{-1}).$$

Если в качестве τ_{k+1} выбирать чебышевские параметры, то тогда минимальное число итераций может быть понижено до величины

$$n_0(\varepsilon) = O(h^{-\frac{1}{2}}).$$

2.5.4 Итерационный метод переменных направлений.

Представим оператор A в виде оператора более простой структуры

$$A = A_1 + A_2, \quad (17)$$

где

$$(A_\alpha y)_{ij} = -y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha, ij}, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad l_\alpha = N_\alpha h_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Реализуем итерационный процесс в два этапа

1. находим $y^{k+\frac{1}{2}}$ из уравнения

$$\frac{y^{k+\frac{1}{2}} - y^k}{\tau} + A_1 y^{k+\frac{1}{2}} + A_2 y^k = f, \quad \tau > 0; \quad (18)$$

2. находим y^{k+1} из уравнения

$$\frac{y^{k+1} - y^{k+\frac{1}{2}}}{\tau} + A_1 y^{k+\frac{1}{2}} + A_2 y^{k+1} = f, \quad \tau > 0. \quad (19)$$

Применительно к модельной задаче можно подставить операторы A_1 и A_2 и записать алгоритм

$$y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \tau y_{\bar{x}_1 x_1, ij}^{k+\frac{1}{2}} = F_{ij}^k, \quad F_{ij}^k = y_{ij}^k + \tau y_{\bar{x}_2 x_2, ij}^k + \tau f_{ij}, \quad (20)$$

$$y_{ij}^{k+1} - \tau y_{\bar{x}_2 x_2, ij}^{k+1} = G_{ij}^k, \quad G_{ij}^k = y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \tau y_{\bar{x}_1 x_1, ij}^{k+\frac{1}{2}} + \tau f_{ij}, \quad (21)$$

Уравнение (20) решается при каждом фиксированном $j = \overline{1, N_2 - 1}$ с помощью метода прогонки по направлению x_1 . После этого мы реализуем формулу (21) для каждого фиксированного $i = \overline{1, N_1 - 1}$, где организуем прогонку по x_2 .

Теорема. Для задачи (3) с оператором (17) итерационный метод (20) – (21) сходится при любых $\tau > 0$.

◆ Без доказательства. □

Для ускорения сходимости можно применять метод (20)-(21), в котором по каждому направлению задается свой параметр. В случае оптимального выбора параметров итерационного метода можно получить, что минимальное количество итераций

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\ln \frac{1}{h}\right).$$