

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Лабораторная работа №1

«Аппроксимация дифференциальных задач разностными операторами»

Вариант 2

Выполнил:

Бовт Тимофей Анатольевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:

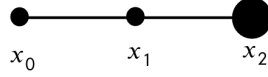
Репников Василий Иванович

Минск, 2024 г.

Задача 1

Постановка задачи. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов

$$Lu = u''(x_2).$$



Решение. Пусть у нас имеется равномерная сетка узлов с шагом h . Введем следующие обозначения

$$x = x_2, \quad x - h = x_1, \quad x - 2h = x_0,$$

где h – шаг равномерной сетки. Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u''(x),$$

и шаблон

$$\Pi(x) = \{x, x - h, x - 2h\}.$$

Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x - h) + a_2 u(x - 2h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x - h) + a_2 u(x - 2h) - u''(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки x :

$$\begin{aligned} \psi(x) = a_0 u(x) + a_1 \left(u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - \frac{h^3}{6} u'''(x) \right) + \\ + a_2 \left(u(x) - 2hu'(x) + \frac{4h^2}{2} u''(x) - \frac{8h^3}{6} u'''(x) \right) + O(h^4) - u''(x). \end{aligned}$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\begin{aligned} \psi(x) = (a_0 + a_1 + a_2) \cdot u(x) - h(a_1 + 2a_2) \cdot u'(x) + \\ + \frac{h^2}{2} \left(a_1 + 4a_2 - \frac{2}{h^2} \right) \cdot u''(x) + \frac{h^3}{6} (a_1 + 8a_2) \cdot u'''(x) + O(h^4). \end{aligned}$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ мы приравняем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 = 0, \\ a_1 + 4a_2 = \frac{2}{h^2}. \end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнения второе и получим

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 = 0, \\ 2a_2 = \frac{2}{h^2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_2 = \frac{1}{h^2}.$$

Тогда из второго уравнения

$$a_1 = -\frac{2}{h^2},$$

а из первого уравнения

$$a_0 = \frac{1}{h^2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x) - 2u(x-h) + u(x-2h)}{h^2}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые три слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

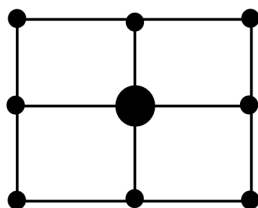
$$\psi(x) = \left(-\frac{h^3}{6} \cdot \frac{2}{h^2} + \frac{8h^3}{6} \cdot \frac{1}{h^2} \right) \cdot u'''(x) + O(h^4) = hu'''(x) + O(h^4) = O(h).$$

То есть мы получаем аппроксимацию первого порядка, а главный член погрешности это $hu'''(x)$.

Задача 2

Постановка задачи. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов

$$Lu = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}.$$



Решение. Пусть у нас имеется равномерная сетка узлов. Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1-h, x_2-h) + a_2 u(x_1-h, x_2) + a_3 u(x_1-h, x_2+h) + a_4 u(x_1, x_2-h) + a_5 u(x_1, x_2+h) + a_6 u(x_1+h, x_2-h) + a_7 u(x_1+h, x_2) + a_8 u(x_1+h, x_2+h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\begin{aligned} \psi(x) = & a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 - h, x_2 - h) + a_2 u(x_1 - h, x_2) + a_3 u(x_1 - h, x_2 + h) + a_4 u(x_1, x_2 - h) + \\ & + a_5 u(x_1, x_2 + h) + a_6 u(x_1 + h, x_2 - h) + a_7 u(x_1 + h, x_2) + a_8 u(x_1 + h, x_2 + h) - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}. \end{aligned}$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора, используя формулу разложения функции двух переменных

$$\begin{aligned} u(x, y) = & u(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right) u(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^2 u(x_0, y_0) + \dots, \end{aligned}$$

в окрестности точек x_1, x_2 по степеням h . Для упрощения записи, сразу же будем выносить общие множители за скобки, тогда

$$\begin{aligned} \psi(x) = & u \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) + \\ & + h \frac{\partial u}{\partial x_1} (-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + h \frac{\partial u}{\partial x_2} (-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) + \\ & + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8 - \frac{2}{h^2} \right) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} (a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) + \\ & + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \\ & + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} (-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} (-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) + \\ & + \frac{h^3}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} (-a_1 + a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^3}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} (-a_1 - a_3 + a_6 + a_8) + \\ & + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} (a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} (a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) + \\ & + \frac{h^4}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} (a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^4}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} (a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \\ & + \frac{h^4}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} (a_1 + a_3 + a_6 + a_8) + O(h^5). \end{aligned}$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого нам нужно построить систему из 9 уравнений. Очевидно, что приравнявая сейчас все коэффициенты при производных от функции u , мы получим сильно больше уравнений. Заметим, что некоторые из этих коэффициентов повторяются.

Подчеркнем все уникальные коэффициенты:

$$\begin{aligned}
\psi(x) = & u \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) + \\
& + h \frac{\partial u}{\partial x_1} (-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + h \frac{\partial u}{\partial x_2} (-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8 - \frac{2}{h^2} \right) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} (a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) + \\
& + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} (a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} (-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} (-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^3}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} (-a_1 + a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^3}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} (-a_1 - a_3 + a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} (a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} (a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^4}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} (a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^4}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} (a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^4}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} (a_1 + a_3 + a_6 + a_8) + O(h^5).
\end{aligned}$$

Итого мы имеем 9 уникальных коэффициентов, которые позволяют нам построить СЛАУ для отыскания неизвестных a_k , если мы приравняем их к нулю (заметим, что коэффициент при $\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$ мы не считаем уникальным, потому что в таком случае матрица системы будет иметь линейно независимые строки). Итак, выпишем расширенную матрицу получившейся системы уравнений

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{2}{h^2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array} \right)$$

Методом Гаусса приводим матрицу слева к единичной и, опуская все преобразования, получаем

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{h^2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array} \right)$$

Отсюда

$$a_0 = -\frac{2}{h^2}, \quad a_2 = a_7 = \frac{1}{h^2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x_1 - h, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 + h, x_2)}{h^2}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации. Все коэффициенты обратятся в ноль кроме коэффициента при $\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$, то есть

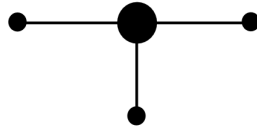
$$\psi(x) = \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + O(h^4) = O(h^2).$$

То есть мы получаем аппроксимацию первого порядка, а главный член погрешности это $\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$.

Задача 3

Постановка задачи. Аппроксимировать дифференциальную задачу разностной схемой на заданном шаблоне. Определить погрешность аппроксимации.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu_0(t), & u(1, t) = \mu_1(t), & t \geq 0. \end{cases}$$



Решение. У нас задана сетка узлов $\bar{\omega}_{ht}$. На данном шаблоне мы заменим дифференциальные операторы разностными. Для этого дифференциальному оператору $Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ поставим в соответствие разностный оператор

$$L_h u = \left(k \left(x + \frac{h}{2}, t \right) u_{\bar{x}} \right)_x.$$

Или же в другой записи

$$L_h u = \frac{k \left(x + \frac{h}{2}, t \right) u(x + h, t) - k \left(x + \frac{h}{2}, t \right) u(x, t) - k \left(x - \frac{h}{2}, t \right) u(x, t) + k \left(x - \frac{h}{2}, t \right) u(x - h, t)}{h^2}.$$

Покажем, что в данном случае мы имеем аппроксимацию второго порядка (доказывать будем для оператора $Lu = (k(x)u'(x))'$). Запишем, чему равна погрешность, предварительно

разложив все функции в ряд Тейлора в окрестности точки x . Затем сократим подобные слагаемые и получим

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{h^2} \left[\left(k + \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k'' \right) \left(u + hu' + \frac{h^2}{2}u'' \right) - \left(k + \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k'' \right) u - \right. \\ &\quad \left. - \left(k - \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k'' \right) u + \left(k - \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k'' \right) \left(u - hu' + \frac{h^2}{2}u'' \right) \right] + O(h^3) - (ku')' = \\ &= \frac{h^2}{8}k''u'' + O(h^3).\end{aligned}$$

Итак, заменив дифференциальные операторы на разностные, получим разностную схему вида

$$\begin{cases} u_{\bar{t}} = \left(k \left(x + \frac{h}{2}, t \right) u_{\bar{x}} \right)_x + f(x, t), & (x, t) \in \overline{\omega}_{h\tau}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \overline{\omega}_h, \\ u_x(0, t) = \mu_0(t), & t \in \overline{\omega}_\tau, \\ u(1, t) = \mu_1(t), & t \in \overline{\omega}_\tau, \end{cases}$$

где

$$u_{\bar{t}} = \frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau}, \quad u_x = \frac{u(x + h) - u(x)}{h}.$$

Оценим погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным

$$\psi(x, t) = u_{\bar{t}} - \left(k \left(x + \frac{h}{2}, t \right) u_{\bar{x}} \right)_x - f(x, t)$$

Зная, что

$$u_{\bar{t}} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau), \quad \left(k \left(x + \frac{h}{2}, t \right) u_{\bar{x}} \right)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{h^2}{8} k'' u'' + O(h^3),$$

подставим в уравнение для погрешности и получим

$$\psi(x, t) = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{8} k'' u'' + O(\tau^2 + h^3) = O(\tau + h^2).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение аппроксимируется на шаблоне с первым порядком по t и вторым порядком по x .

Начальное условие аппроксимируется точно.

Определим значение погрешности для аппроксимации левого граничного условия, аналогично раскладывая разностный оператор в ряд Тейлора, а также используя тот факт, что $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu_0(t)$,

$$\begin{aligned}\nu(0, t) = u_x(0, t) - \mu_0(t) &= \frac{u(h, t) - u(0, t)}{h} - \mu_0(t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \mu_0(t) = \\ &= \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + O(h^2) = O(h).\end{aligned}$$

Таким образом, левое граничное условие аппроксимируется с первым порядком по x .

Правое граничное условие аппроксимируем точно.

В итоге построенная разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу с первым порядком по t и по x .

Задача 4

Постановка задачи. Повысить порядок аппроксимации разностной схем на минимальном шаблоне, используя вид дифференциальной задачи.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu_0(t), \quad u(1, t) = \mu_1(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

