

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СИСТЕМ

Лабораторная работа №3

Вариант 4

Выполнил:

Бовт Тимофей Анатольевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:

Каркоцкий Александр Геннадьевич

Минск, 2024 г.

Постановка задачи.

Найти электрический и магнитный потенциал, электрическую и магнитную напряжённость внутри шара (внутри сферического слоя) при заданных диэлектрической проницаемости $\varepsilon = -1$, условиях на электрический и магнитный потенциал (u и v соответственно) на его поверхности (на границах сферического слоя), и постоянной магнитной проницаемости, если распределение зарядов изменяется по закону

$$\rho(r, \varphi, \theta) = 11r^6 \cos^4 \theta \sin^4 \theta (\cos 4\varphi - \sin^2 \varphi).$$

1. $u|_{r=3} = 4 \cos^2 \theta \sin^4 \theta \sin^4 \varphi$.
2. $\begin{cases} v|_{r=1} = 7 \sin \theta \cos^3 \theta \cos \varphi, \\ v|_{r=4} = 6 \sin^3 \theta (\cos \varphi - \sin 3\varphi). \end{cases}$

Решение задачи.

Начнем с задачи для электрического потенциала. Считая

$$\Delta u = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon},$$

можем сформулировать задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 11r^6 \cos^4 \theta \sin^4 \theta (\cos 4\varphi - \sin^2 \varphi), \\ u|_{r=3} = 4 \cos^2 \theta \sin^4 \theta \sin^4 \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

Представим решение задачи в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = w(r, \theta, \varphi) + v(r, \theta, \varphi),$$

где

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \\ w|_{r=3} = 4 \cos^2 \theta \sin^4 \theta \sin^4 \varphi. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Delta v = 11r^6 \cos^4 \theta \sin^4 \theta (\cos 4\varphi - \sin^2 \varphi), \\ v|_{r=3} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

Начнем с отыскания решения задачи (2). Можно показать, что решение задачи (2) представимо в виде

$$w(r, \theta, \varphi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) \cdot r^n \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad (4)$$

здесь мы учитываем неограниченность $r^{-(n+1)}$ при $r \rightarrow 0$. Подставим в выражение (4) граничное условие задачи (2):

$$w(r, \theta, \varphi)|_{r=3} = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) \cdot 3^n \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta) = 4 \cos^2 \theta \sin^4 \theta \sin^4 \varphi.$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} \sin^4 \varphi &= \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4} = \frac{1 - 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2}}{4} = \\ &= \frac{3}{8} \cos 0\varphi - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} w(r, \theta, \varphi)|_{r=3} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) \cdot 3^n \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta) = \\ &= \frac{3}{2} \cos^2 \theta \sin^4 \theta \cos 0\varphi - 2 \cos^2 \theta \sin^4 \theta \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^4 \theta \cos 4\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, приравнивая соответствующие коэффициенты $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$, мы имеем

$$A_{nm} = \begin{cases} A_{n0}, & m = 0, \\ A_{n2}, & m = 2, \\ A_{n4}, & m = 4, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad B_{nm} = 0, \quad \forall m.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} w(r, \theta, \varphi)|_{r=3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{n0} \cdot P_n^{(0)}(\cos \theta) + A_{n2} \cdot P_n^{(2)}(\cos \theta) \cos 2\varphi + A_{n4} \cdot P_n^{(4)}(\cos \theta) \cos 4\varphi \right) \cdot 3^n = \\ &= \frac{3}{2} \cos^2 \theta \sin^4 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin^4 \theta \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^4 \theta \cos 4\varphi. \end{aligned}$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при $\cos m\varphi$ и получим 3 разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_{n0} \cdot P_n^{(0)}(\cos \theta)) \cdot 3^n = \frac{3}{2} \cos^2 \theta \sin^4 \theta, \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_{n2} \cdot P_n^{(2)}(\cos \theta)) \cdot 3^n = -2 \cos^2 \theta \sin^4 \theta, \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_{n4} \cdot P_n^{(4)}(\cos \theta)) \cdot 3^n = \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^4 \theta. \quad (7)$$

Теперь будем вычислять коэффициенты разложений A_{n0} , A_{n2} , A_{n4} . Начнем с разложения (5). Определим степень правой части при замене $x = \cos \theta$:

$$\deg \left(\frac{3}{2} x^2 (1 - x^2)^2 \right) = 6.$$

Теперь оценим степень многочленов Лежандра $P_n^{(0)}(x)$, она должна не превосходить степень правой части:

$$\deg P_n^{(0)}(x) = \deg \left(\frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right) = 2n - n = n \leq 6.$$

Таким образом, нам нужно вычислить все многочлены Лежандра вида $P_n^{(0)}(x)$, $n = \overline{0, 6}$. С помощью Wolfram Mathematica мы можем получить следующий результат

$$\begin{aligned} P_0^{(0)}(x) &= 1, \\ P_1^{(0)}(x) &= x, \\ P_2^{(0)}(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3^{(0)}(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_4^{(0)}(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\
P_5^{(0)}(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\
P_6^{(0)}(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).
\end{aligned}$$

Подставим это в разложение (5) и получим

$$\begin{aligned}
&A_{00} + 3A_{10}x + 3^2A_{20} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + 3^3A_{30} \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) + 3^4A_{40} \cdot \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) + \\
&+ 3^5A_{50} \cdot \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) + 3^6A_{60} \cdot \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) = \frac{3}{2}x^2(1 - x^2)^2.
\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x :

$$\begin{aligned}
x^6 : 3^6A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 231 &= \frac{3}{2} \Rightarrow A_{60} = \frac{8}{56133}, \\
x^5 : 3^5A_{50} \cdot \frac{1}{8} \cdot 63 &= 0 \Rightarrow A_{50} = 0, \\
x^4 : 3^4A_{40} \cdot \frac{1}{8} \cdot 35 - 3^6A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 315 &= -3 \Rightarrow A_{40} = -\frac{4}{1485}, \\
x^3 : 3^3A_{30} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 - 3^5A_{50} \cdot \frac{1}{8} \cdot 70 &= 0 \Rightarrow A_{30} = 0, \\
x^2 : 3^2A_{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - 3^4A_{40} \cdot \frac{1}{8} \cdot 30 + 3^6A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 105 &= \frac{3}{2} \Rightarrow A_{20} = 0, \\
x : 3A_{10} - 3^3A_{30} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 3^5A_{50} \cdot 18 \cdot 15 &= 0 \Rightarrow A_{10} = 0, \\
x^0 : A_{00} - 3^2A_{20} \cdot \frac{1}{2} + 3^4A_{40} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 - 3^6A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 5 &= 0 \Rightarrow A_{00} = \frac{4}{35}.
\end{aligned}$$

Мы вычислили вручную все коэффициенты разложения (5).

Рассмотрим разложение (6). Степень правой части все так же равна 6. Оценим степень левой части

$$\deg P_n^{(2)}(x) = \deg \left(\frac{(1-x^2)}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^n \right) = 2 + 2n - (n+2) = n \leq 6.$$

С помощью Wolfram Mathematica вычислим все многочлены вида $P_n^{(2)}(x)$:

$$\begin{aligned}
P_2^{(2)}(x) &= 3(1 - x^2), \\
P_3^{(2)}(x) &= 15x(1 - x^2), \\
P_4^{(2)}(x) &= \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2), \\
P_5^{(2)}(x) &= \frac{105}{2}(3x^3 - x)(1 - x^2), \\
P_6^{(2)}(x) &= \frac{105}{8}(33x^4 - 18x^2 + 1)(1 - x^2).
\end{aligned}$$

Подставим эти многочлены в разложение (6) и получим

$$\begin{aligned}
&3^2A_{22} \cdot 3(1 - x^2) + 3^3A_{32} \cdot 15x(1 - x^2) + 3^4A_{42} \cdot \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2) + \\
&+ 3^5A_{52} \cdot \frac{105}{2}(3x^3 - x)(1 - x^2) + 3^6A_{62} \cdot \frac{105}{8}(33x^4 - 18x^2 + 1)(1 - x^2) = -2x^2(1 - x^2)^2
\end{aligned}$$

Можно сократить на $(1 - x^2)$. Тогда получим

$$3^2 A_{22} \cdot 3 + 3^3 A_{32} \cdot 15x + 3^4 A_{42} \cdot \frac{15}{2}(7x^2 - 1) + \\ + 3^5 A_{52} \cdot \frac{105}{2}(3x^3 - x) + 3^6 A_{62} \cdot \frac{105}{8}(33x^4 - 18x^2 + 1) = -2x^2(1 - x^2).$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x и получим

$$\begin{aligned} x^4 : 3^6 A_{62} \cdot \frac{105}{8} \cdot 33 &= 2 \Rightarrow A_{62} = \frac{16}{2525985}, \\ x^3 : 3^5 A_{52} \cdot \frac{105}{2} \cdot 3 &= 0 \Rightarrow A_{52} = 0, \\ x^2 : 3^4 A_{42} \cdot \frac{15}{2} \cdot 7 - 3^6 A_{62} \cdot \frac{105}{8} \cdot 18 &= -2 \Rightarrow A_{42} = -\frac{4}{18711}, \\ x : 3^3 A_{32} \cdot 15 - 3^5 A_{52} \cdot \frac{105}{2} &= 0 \Rightarrow A_{32} = 0, \\ x^0 : 3^2 A_{22} \cdot 3 - 3^4 A_{42} \cdot \frac{15}{2} + 3^6 A_{62} \cdot \frac{105}{8} &= 0 \Rightarrow A_{22} = -\frac{4}{567}, \\ A_{02} = A_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение (7). Степень правой части все так же равна 6. Оценим степень левой части

$$\deg P_n^{(4)}(x) = \deg \left(\frac{(1 - x^2)^2}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n+4}}{dx^{n+4}}(x^2 - 1)^n \right) = 4 + 2n - (n + 4) = n \leq 6.$$

С помощью Wolfram Mathematica вычислим все многочлены вида $P_n^{(4)}(x)$:

$$\begin{aligned} P_4^{(4)}(x) &= 105(1 - x^2)^2, \\ P_5^{(4)}(x) &= 945x(1 - x^2)^2, \\ P_6^{(4)}(x) &= \frac{945}{2}(11x^2 - 1)(1 - x^2)^2. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в разложение (7) и получим

$$3^4 A_{44} \cdot 105(1 - x^2)^2 + 3^5 A_{54} \cdot 945x(1 - x^2)^2 + 3^6 A_{64} \cdot \frac{945}{2}(11x^2 - 1)(1 - x^2)^2 = \frac{1}{2}x^2(1 - x^2)^2.$$

Можем сократить все на $(1 - x^2)^2$, тогда

$$3^4 A_{44} \cdot 105 + 3^5 A_{54} \cdot 945x + 3^6 A_{64} \cdot \frac{945}{2}(11x^2 - 1) = \frac{1}{2}x^2.$$

$$\begin{aligned} x^2 : 3^6 A_{64} \cdot \frac{945}{2} \cdot 11 &= \frac{1}{2} \Rightarrow A_{64} = \frac{1}{7577955}, \\ x : 3^5 A_{54} \cdot 945 &= 0 \Rightarrow A_{54} = 0, \\ x^0 : 3^4 A_{44} \cdot 105 - 3^6 A_{64} \cdot \frac{945}{2} &= 0 \Rightarrow A_{44} = \frac{1}{187110}, \\ A_{04} = A_{14} = A_{24} = A_{34} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя все найденные коэффициенты в выражение (4), получим решение задачи (2)

$$\begin{aligned}
w(r, \theta, \varphi) = & \left[\frac{8}{56133} r^6 P_6^{(0)}(\cos \theta) - \frac{4}{1485} r^4 P_4^{(0)}(\cos \theta) + \frac{4}{35} P_0^{(0)}(\cos \theta) \right] + \\
& + \left[\frac{16}{2525985} r^6 P_6^{(2)}(\cos \theta) - \frac{4}{18711} r^4 P_4^{(2)}(\cos \theta) - \frac{4}{567} r^2 P_2^{(2)}(\cos \theta) \right] \cos 2\varphi + \\
& + \left[\frac{1}{7577955} r^6 P_6^{(4)}(\cos \theta) + \frac{1}{187110} r^4 P_4^{(4)}(\cos \theta) \right] \cos 4\varphi. \quad (8)
\end{aligned}$$

Теперь будем искать решение задачи (3). Сперва нам нужно преобразовать правую часть дифференциального уравнения к более удобному виду. Мы можем записать правую часть как

$$\begin{aligned}
11r^6 \cos^4 \theta \sin^4 \theta (\cos 4\varphi - \sin^2 \varphi) &= 11r^6 \cos^4 \theta \sin^4 \theta (\cos 4\varphi - \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}) = \\
&= r^6 \cos 4\varphi \sum_{n=0}^{\infty} A_{n4} P_n^{(4)}(\cos \theta) + r^6 \cos 2\varphi \sum_{n=0}^{\infty} A_{n2} P_n^{(2)}(\cos \theta) + r^6 \sum_{n=0}^{\infty} A_{n0} P_n^{(0)}(\cos \theta).
\end{aligned}$$

Тогда, приравнивая соответствующие коэффициенты, получим 3 разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n0} P_n^{(0)}(\cos \theta) = -\frac{11}{2} \cos^4 \theta \sin^4 \theta. \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n2} P_n^{(2)}(\cos \theta) = \frac{11}{2} \cos^4 \theta \sin^4 \theta, \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n4} P_n^{(4)}(\cos \theta) = 11 \cos^4 \theta \sin^4 \theta, \quad (11)$$

Далее отыщем все коэффициенты разложений. Рассмотрим разложение (9). Степень правой части при замене $x = \cos \theta$ будет равна

$$\deg(11x^4(1-x^2)^2) = 8.$$

Ранее мы уже проводили оценку подобной левой части:

$$\deg P_n^{(0)}(x) = n \leq 8.$$

Таким образом, нам нужно вычислить все многочлены Лежандра вида $P_n^{(0)}(x)$, $n = \overline{0, 6}$. С помощью Wolfram Mathematica мы можем получить следующий результат

$$\begin{aligned}
P_0^{(0)}(x) &= 1, \\
P_1^{(0)}(x) &= x, \\
P_2^{(0)}(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\
P_3^{(0)}(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\
P_4^{(0)}(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_5^{(0)}(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\
P_6^{(0)}(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5), \\
P_7^{(0)}(x) &= \frac{1}{16}x(429x^6 - 693x^4 + 315x^2 - 35), \\
P_8^{(0)}(x) &= \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35).
\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в разложение (9) и получим

$$\begin{aligned}
&A_{00} + A_{10}x + A_{20} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + A_{30} \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) + A_{40} \cdot \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) + \\
&+ A_{50} \cdot \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) + A_{60} \cdot \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) + \\
&+ A_{70} \cdot \frac{1}{16}x(429x^6 - 693x^4 + 315x^2 - 35) + \\
&+ A_{80} \cdot \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35) = -\frac{11}{2}x^4(1 - x^2)^2.
\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x и получим

$$\begin{aligned}
x^8 : A_{80} \cdot \frac{1}{128} \cdot 6435 &= -\frac{11}{2} \Rightarrow A_{80} = -\frac{64}{585}, \\
x^7 : A_{70} &= 0, \\
x^6 : A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 231 - A_{80} \cdot \frac{1}{128} \cdot 12012 &= 11 \Rightarrow A_{60} = \frac{16}{315}, \\
x^5 : A_{50} &= 0, \\
x^4 : A_{40} \cdot \frac{1}{8} \cdot 35 - A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 315 + A_{80} \cdot \frac{1}{128} \cdot 6930 &= -\frac{11}{2} \Rightarrow A_{40} = \frac{148}{455}, \\
x^3 : A_{30} &= 0, \\
x^2 : A_{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - A_{40} \cdot \frac{1}{8} \cdot 30 + A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 105 - A_{80} \cdot \frac{1}{128} \cdot 1260 &= 0 \Rightarrow A_{20} = -\frac{8}{63}, \\
x : A_{10} &= 0, \\
x^0 : A_{00} - A_{20} \cdot \frac{1}{2} + A_{40} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 - A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 5 + A_{80} \cdot \frac{1}{128} \cdot 35 &= 0 \Rightarrow A_{00} = -\frac{44}{315}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим разложение (10). По аналогии с предыдущими разложениями

$$\deg P_n^{(2)}(x) = n \leq 8.$$

С помощью Wolfram Mathematica вычислим все многочлены вида $P_n^{(2)}(x)$:

$$\begin{aligned}
P_2^{(2)}(x) &= 3(1 - x^2), \\
P_3^{(2)}(x) &= 15x(1 - x^2), \\
P_4^{(2)}(x) &= \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2), \\
P_5^{(2)}(x) &= \frac{105}{2}(3x^3 - x)(1 - x^2), \\
P_6^{(2)}(x) &= \frac{105}{8}(33x^4 - 18x^2 + 1)(1 - x^2), \\
P_7^{(2)}(x) &= \frac{63}{8}x(143x^4 - 110x^2 + 15)(1 - x^2), \\
P_8^{(2)}(x) &= \frac{315}{16}(143x^6 - 143x^4 + 33x^2 - 1)(1 - x^2).
\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в разложение (10) и, сокращая на $(1 - x^2)$, получим

$$A_{22} \cdot 3 + A_{32} \cdot 15x + A_{42} \cdot \frac{15}{2}(7x^2 - 1) + A_{52} \cdot \frac{105}{2}(3x^3 - x) + A_{62} \cdot \frac{105}{8}(33x^4 - 18x^2 + 1) + \\ + A_{72} \cdot \frac{63}{8}x(143x^4 - 110x^2 + 15) + A_{82} \cdot \frac{315}{16}(143x^6 - 143x^4 + 33x^2 - 1) = \frac{11}{2}x^4(1 - x^2).$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x

$$\begin{aligned} x^6 : A_{82} \cdot \frac{315}{16} \cdot 143 &= -\frac{11}{2} \Rightarrow A_{82} = -\frac{8}{4095}, \\ x^5 : A_{72} &= 0, \\ x^4 : A_{62} \cdot \frac{105}{8} \cdot 33 - A_{82} \cdot \frac{315}{16} \cdot 143 &= \frac{11}{2} \Rightarrow A_{62} = 0, \\ x^3 : A_{52} &= 0, \\ x^2 : A_{42} \cdot \frac{15}{2} \cdot 7 - A_{62} \cdot \frac{105}{8} \cdot 18 + A_{82} \cdot \frac{315}{16} \cdot 33 &= 0 \Rightarrow A_{42} = \frac{11}{455}, \\ x : A_{32} &= 0, \\ x^0 : A_{22} \cdot 3 - A_{42} \cdot \frac{15}{2} + A_{62} \cdot \frac{105}{8} - A_{82} \cdot \frac{315}{16} &= 0 \Rightarrow A_{22} = \frac{1}{21}, \\ A_{12} = A_{02} &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим разложение (11). По аналогии с предыдущими разложениями

$$\deg P_n^{(4)}(x) = n \leq 8.$$

С помощью Wolfram Mathematica вычислим все многочлены вида $P_n^{(4)}(x)$:

$$\begin{aligned} P_4^{(4)}(x) &= 105(1 - x^2)^2, \\ P_5^{(4)}(x) &= 945x(1 - x^2)^2, \\ P_6^{(4)}(x) &= \frac{945}{2}(11x^2 - 1)(1 - x^2)^2, \\ P_7^{(4)}(x) &= \frac{3465}{2}x(13x^2 - 3)(1 - x^2)^2, \\ P_8^{(4)}(x) &= \frac{10395}{8}(65x^4 - 26x^2 + 1)(1 - x^2)^2. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в разложение (11) и, сокращая на $(1 - x^2)^2$, получим

$$A_{44} \cdot 105 + A_{54} \cdot 945x + A_{64} \cdot \frac{945}{2}(11x^2 - 1) + A_{74} \cdot \frac{3465}{2}x(13x^2 - 3) + A_{84} \cdot \frac{10395}{8}(65x^4 - 26x^2 + 1) = 11x^4.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x

$$\begin{aligned} x^4 : A_{84} \cdot \frac{10395}{8} \cdot 65 &= 11 \Rightarrow A_{84} = \frac{8}{61425}, \\ x^3 : A_{74} &= 0, \\ x^2 : A_{64} \cdot \frac{945}{2} \cdot 11 - A_{84} \cdot \frac{10395}{8} \cdot 26 &= 0 \Rightarrow A_{64} = \frac{4}{4725}, \\ x : A_{54} &= 0, \\ x^0 : A_{44} \cdot 105 - A_{64} \cdot \frac{945}{2} + A_{84} \cdot \frac{10395}{8} &= 0 \Rightarrow A_{44} = \frac{1}{455}, \\ A_{34} = A_{24} = A_{14} = A_{04} &= 0. \end{aligned}$$

Все найденные коэффициенты позволяют нам записать неоднородность в следующем виде

$$\begin{aligned}
& 11r^6 \cos^4 \theta \sin^4 \theta (\cos 4\varphi - \sin^2 \varphi) = \\
& = r^6 \left(-\frac{64}{585} P_8^{(0)}(\cos \theta) + \frac{16}{315} P_6^{(0)}(\cos \theta) + \frac{148}{455} P_4^{(0)}(\cos \theta) - \frac{8}{63} P_2^{(0)}(\cos \theta) - \frac{44}{315} P_0^{(0)}(\cos \theta) \right) + \\
& + r^6 \cos 2\varphi \left(-\frac{8}{4095} P_8^{(2)}(\cos \theta) + \frac{11}{455} P_4^{(2)}(\cos \theta) + \frac{1}{21} P_2^{(2)}(\cos \theta) \right) + \\
& + r^6 \cos 4\varphi \left(\frac{8}{61425} P_8^{(4)}(\cos \theta) + \frac{4}{4725} P_6^{(4)}(\cos \theta) + \frac{1}{455} P_4^{(4)}(\cos \theta) \right).
\end{aligned}$$

Введем замену $\cos m\varphi \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta) = Y_n^{(m)}(\varphi, \theta)$. Причем учтем, что получившиеся функции $Y_n^{(m)}(\varphi, \theta)$ являются сферическими функциями. Для сферических функций справедливо соотношение

$$\Lambda Y_n^{(m)}(\varphi, \theta) + n(n+1)Y_n^{(m)}(\varphi, \theta) = 0, \quad \Lambda = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (12)$$

Тогда после замены неоднородность можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
11r^6 \cos^4 \theta \sin^4 \theta (\cos 4\varphi - \sin^2 \varphi) = r^6 \left(-\frac{64}{585} Y_8^{(0)} + \frac{16}{315} Y_6^{(0)} + \frac{148}{455} Y_4^{(0)} - \frac{8}{63} Y_2^{(0)} - \frac{44}{315} Y_0^{(0)} \right) + \\
+ r^6 \left(-\frac{8}{4095} Y_8^{(2)} + \frac{11}{455} Y_4^{(2)} + \frac{1}{21} Y_2^{(2)} \right) + r^6 \left(\frac{8}{61425} Y_8^{(4)} + \frac{4}{4725} Y_6^{(4)} + \frac{1}{455} Y_4^{(4)} \right). \quad (13)
\end{aligned}$$

Решение задачи (3) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
v(r, \theta, \varphi) = Z_1(r)Y_8^{(0)} + Z_2(r)Y_6^{(0)} + Z_3(r)Y_4^{(0)} + Z_4(r)Y_2^{(0)} + Z_5(r)Y_0^{(0)} + \\
+ Z_6(r)Y_8^{(2)} + Z_7(r)Y_4^{(2)} + Z_8(r)Y_2^{(2)} + Z_9(r)Y_8^{(4)} + Z_{10}(r)Y_6^{(4)} + Z_{11}(r)Y_4^{(4)}. \quad (14)
\end{aligned}$$

В силу того, что оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta v = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{v_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \varphi},$$

то, подставляя выражение (13) в уравнение задачи (3), получим

$$\begin{aligned}
\Delta v = & \frac{Y_8^{(0)}}{r^2} (2rZ_1' + r^2 Z_1'') + \frac{Z_1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{8\theta}^{(0)} \sin \theta) + \frac{Y_{8\varphi\varphi}^{(0)}}{\sin^2 \varphi} \right) + \\
& + \frac{Y_6^{(0)}}{r^2} (2rZ_2' + r^2 Z_2'') + \frac{Z_2}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{6\theta}^{(0)} \sin \theta) + \frac{Y_{6\varphi\varphi}^{(0)}}{\sin^2 \varphi} \right) + \\
& + \frac{Y_4^{(0)}}{r^2} (2rZ_3' + r^2 Z_3'') + \frac{Z_3}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{4\theta}^{(0)} \sin \theta) + \frac{Y_{4\varphi\varphi}^{(0)}}{\sin^2 \varphi} \right) + \\
& + \frac{Y_2^{(0)}}{r^2} (2rZ_4' + r^2 Z_4'') + \frac{Z_4}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{2\theta}^{(0)} \sin \theta) + \frac{Y_{2\varphi\varphi}^{(0)}}{\sin^2 \varphi} \right) + \\
& + \frac{Y_0^{(0)}}{r^2} (2rZ_5' + r^2 Z_5'') + \frac{Z_5}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{0\theta}^{(0)} \sin \theta) + \frac{Y_{0\varphi\varphi}^{(0)}}{\sin^2 \varphi} \right) + \\
& + \frac{Y_8^{(2)}}{r^2} (2rZ_6' + r^2 Z_6'') + \frac{Z_6}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{8\theta}^{(2)} \sin \theta) + \frac{Y_{8\varphi\varphi}^{(2)}}{\sin^2 \varphi} \right) + \\
& + \frac{Y_4^{(2)}}{r^2} (2rZ_7' + r^2 Z_7'') + \frac{Z_7}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{4\theta}^{(2)} \sin \theta) + \frac{Y_{4\varphi\varphi}^{(2)}}{\sin^2 \varphi} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Y_2^{(2)}}{r^2} (2rZ_8' + r^2Z_8'') + \frac{Z_8}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{2_\theta}^{(2)} \sin \theta) + \frac{Y_{2_{\varphi\varphi}}^{(2)}}{\sin^2 \varphi} \right) + \\
& + \frac{Y_8^{(4)}}{r^2} (2rZ_9' + r^2Z_9'') + \frac{Z_9}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{8_\theta}^{(4)} \sin \theta) + \frac{Y_{8_{\varphi\varphi}}^{(4)}}{\sin^2 \varphi} \right) + \\
& + \frac{Y_6^{(4)}}{r^2} (2rZ_{10}' + r^2Z_{10}'') + \frac{Z_{10}}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{6_\theta}^{(4)} \sin \theta) + \frac{Y_{6_{\varphi\varphi}}^{(4)}}{\sin^2 \varphi} \right) + \\
& + \frac{Y_4^{(4)}}{r^2} (2rZ_{11}' + r^2Z_{11}'') + \frac{Z_{11}}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_{4_\theta}^{(4)} \sin \theta) + \frac{Y_{4_{\varphi\varphi}}^{(4)}}{\sin^2 \varphi} \right) = \\
& = r^6 \left(-\frac{64}{585} Y_8^{(0)} + \frac{16}{315} Y_6^{(0)} + \frac{148}{455} Y_4^{(0)} - \frac{8}{63} Y_2^{(0)} - \frac{44}{315} Y_0^{(0)} \right) + \\
& + r^6 \left(-\frac{8}{4095} Y_8^{(2)} + \frac{11}{455} Y_4^{(2)} + \frac{1}{21} Y_2^{(2)} \right) + \\
& + r^6 \left(\frac{8}{61425} Y_8^{(4)} + \frac{4}{4725} Y_6^{(4)} + \frac{1}{455} Y_4^{(4)} \right).
\end{aligned}$$

Тогда мы добавим и отнимем соответствующие значения, чтобы выполнялась формула (12).

$$\begin{aligned}
\Delta v & = \frac{Y_8^{(0)}}{r^2} (2rZ_1' + r^2Z_1'') + \frac{Z_1}{r^2} (-72Y_8^{(0)}) + \frac{Y_6^{(0)}}{r^2} (2rZ_2' + r^2Z_2'') + \frac{Z_2}{r^2} (-42Y_6^{(0)}) + \\
& + \frac{Y_4^{(0)}}{r^2} (2rZ_3' + r^2Z_3'') + \frac{Z_3}{r^2} (-20Y_4^{(0)}) + \frac{Y_2^{(0)}}{r^2} (2rZ_4' + r^2Z_4'') + \frac{Z_4}{r^2} (-6Y_2^{(0)}) + \\
& + \frac{Y_0^{(0)}}{r^2} (2rZ_5' + r^2Z_5'') + \frac{Y_8^{(2)}}{r^2} (2rZ_6' + r^2Z_6'') + \frac{Z_6}{r^2} (-72Y_8^{(2)}) + \\
& + \frac{Y_4^{(2)}}{r^2} (2rZ_7' + r^2Z_7'') + \frac{Z_7}{r^2} (-20Y_4^{(2)}) + \frac{Y_2^{(2)}}{r^2} (2rZ_8' + r^2Z_8'') + \frac{Z_8}{r^2} (-6Y_2^{(2)}) + \\
& + \frac{Y_8^{(4)}}{r^2} (2rZ_9' + r^2Z_9'') + \frac{Z_9}{r^2} (-72Y_8^{(4)}) + \frac{Y_6^{(4)}}{r^2} (2rZ_{10}' + r^2Z_{10}'') + \frac{Z_{10}}{r^2} (-42Y_6^{(4)}) + \\
& + \frac{Y_4^{(4)}}{r^2} (2rZ_{11}' + r^2Z_{11}'') + \frac{Z_{11}}{r^2} (-20Y_4^{(4)}) = \\
& = r^6 \left(-\frac{64}{585} Y_8^{(0)} + \frac{16}{315} Y_6^{(0)} + \frac{148}{455} Y_4^{(0)} - \frac{8}{63} Y_2^{(0)} - \frac{44}{315} Y_0^{(0)} \right) + \\
& + r^6 \left(-\frac{8}{4095} Y_8^{(2)} + \frac{11}{455} Y_4^{(2)} + \frac{1}{21} Y_2^{(2)} \right) + \\
& + r^6 \left(\frac{8}{61425} Y_8^{(4)} + \frac{4}{4725} Y_6^{(4)} + \frac{1}{455} Y_4^{(4)} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем составить 11 граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера. Будем последовательно составлять и сразу же решать граничные задачи.

$$\begin{cases} r^2 Z_1'' + 2rZ_1' - 72Z_1 = -\frac{64}{585} r^8, \\ Z_1(3) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_1^{oo}(r) = C_1 r^8,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_1^{\text{ч}}(r) = Cr^8 \ln r,$$

подставляя, получим

$$2Cr^8 + 8Cr^8 + 7Cr^8 = -\frac{64}{585}r^8,$$

откуда

$$C = -\frac{64}{9945}.$$

Таким образом,

$$Z_1(r) = C_1 r^8 - \frac{64}{9945} r^8 \ln r.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_1(3) = C_1 3^8 - \frac{64}{9945} 3^8 \ln 3 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{64}{9945} \ln 3.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_1(r) = \frac{64}{9945} r^8 (\ln 3 - \ln r). \quad (16)$$

$$\begin{cases} r^2 Z_2'' + 2r Z_2' - 42 Z_2 = \frac{16}{315} r^8, \\ Z_2(3) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_2^{\text{оо}}(r) = C_1 r^6,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_2^{\text{ч}}(r) = Cr^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 42Cr^8 = 30Cr^8 = \frac{16}{315} r^8,$$

откуда

$$C = \frac{8}{4725}.$$

Таким образом,

$$Z_2(r) = C_1 r^6 + \frac{8}{4725} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_2(3) = C_1 3^6 + \frac{8}{4725} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{8}{4725} 3^2.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_2(r) = \frac{8}{4725} r^6 (r^2 - 3^2). \quad (18)$$

$$\begin{cases} r^2 Z_3'' + 2r Z_3' - 20Z_3 = \frac{148}{455} r^8, \\ Z_3(3) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_3^{\text{оо}}(r) = C_1 r^4,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_3^{\text{чн}}(r) = C r^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 20Cr^8 = 52Cr^8 = \frac{148}{455} r^8,$$

откуда

$$C = \frac{37}{5915}.$$

Таким образом,

$$Z_3(r) = C_1 r^4 + \frac{37}{5915} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_3(3) = C_1 3^4 + \frac{37}{5915} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{37}{5915} 3^4.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_3(r) = \frac{37}{5915} r^4 (r^4 - 3^4). \quad (20)$$

$$\begin{cases} r^2 Z_4'' + 2r Z_4' - 6Z_4 = -\frac{8}{63} r^8, \\ Z_4(3) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_4^{\text{оо}}(r) = C_1 r^2,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_4^{\text{чн}}(r) = C r^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 6Cr^8 = 66Cr^8 = -\frac{8}{63} r^8,$$

откуда

$$C = -\frac{4}{2079}.$$

Таким образом,

$$Z_4(r) = C_1 r^2 - \frac{4}{2079} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_4(3) = C_1 3^2 - \frac{4}{2079} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{4}{2079} 3^6.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_4(r) = \frac{4}{2079} r^2 (3^6 - r^6). \quad (22)$$

$$\begin{cases} r^2 Z_5'' + 2r Z_5' = -\frac{44}{315} r^8, \\ Z_5(3) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_5^{oo}(r) = C_1,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_5^{ch}(r) = Cr^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 = 72Cr^8 = -\frac{44}{315} r^8,$$

откуда

$$C = -\frac{11}{5670}.$$

Таким образом,

$$Z_5(r) = C_1 - \frac{11}{5670} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_5(3) = C_1 - \frac{11}{5670} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{11}{5670} 3^8.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_5(r) = \frac{11}{5670} (3^8 - r^8). \quad (24)$$

$$\begin{cases} r^2 Z_6'' + 2r Z_6' - 72Z_6 = -\frac{8}{4095} r^8, \\ Z_6(3) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_6^{oo}(r) = C_1 r^8,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_6^{ch}(r) = Cr^8 \ln r,$$

подставляя, получим

$$2Cr^8 + 8Cr^8 + 7Cr^8 = 17Cr^8 = -\frac{8}{4095}r^8,$$

откуда

$$C = -\frac{8}{69615}.$$

Таким образом,

$$Z_6(r) = C_1r^8 - \frac{8}{69615}r^8 \ln r.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_6(3) = C_13^8 - \frac{8}{69615}3^8 \ln 3 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{8}{69615} \ln 3.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_6(r) = \frac{8}{69615}r^8(\ln 3 - \ln r). \quad (26)$$

$$\begin{cases} r^2 Z_7'' + 2r Z_7' - 20Z_7 = \frac{11}{455}r^8, \\ Z_7(3) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_7^{\text{oo}}(r) = C_1r^4,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_7^{\text{чн}}(r) = Cr^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 20Cr^8 = 52Cr^8 = \frac{11}{455}r^8,$$

откуда

$$C = \frac{11}{23660}.$$

Таким образом,

$$Z_7(r) = C_1r^4 + \frac{11}{23660}r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_7(3) = C_13^4 + \frac{11}{23660}3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{11}{23660}3^4.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_7(r) = \frac{11}{23660}r^4(r^4 - 3^4). \quad (28)$$

$$\begin{cases} r^2 Z_8'' + 2r Z_8' - 6Z_8 = \frac{1}{21} r^8, \\ Z_8(3) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_8^{\text{oo}}(r) = C_1 r^2,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_8^{\text{чн}}(r) = C r^8,$$

подставляя, получим

$$56C r^8 + 16C r^8 - 6C r^8 = 66C r^8 = \frac{1}{21} r^8,$$

откуда

$$C = \frac{1}{1386}.$$

Таким образом,

$$Z_8(r) = C_1 r^2 + \frac{1}{1386} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_8(3) = C_1 3^2 + \frac{1}{1386} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{1}{1386} 3^6.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_8(r) = \frac{1}{1386} r^2 (r^6 - 3^6). \quad (30)$$

$$\begin{cases} r^2 Z_9'' + 2r Z_9' - 72Z_9 = \frac{8}{61425} r^8, \\ Z_9(3) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_9^{\text{oo}}(r) = C_1 r^8,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_9^{\text{чн}}(r) = C r^8 \ln r,$$

подставляя, получим

$$2C r^8 + 8C r^8 + 7C r^8 = \frac{8}{61425} r^8,$$

откуда

$$C = \frac{8}{1044225}.$$

Таким образом,

$$Z_9(r) = C_1 r^8 + \frac{8}{1044225} r^8 \ln r.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_9(3) = C_1 3^8 + \frac{8}{1044225} 3^8 \ln 3 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{8}{1044225} \ln 3.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_9(r) = \frac{8}{1044225} r^8 (\ln r - \ln 3). \quad (32)$$

$$\begin{cases} r^2 Z''_{10} + 2r Z'_{10} - 42 Z_{10} = \frac{4}{4725} r^8, \\ Z_{10}(3) = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_{10}^{\text{оо}}(r) = C_1 r^6,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_{10}^{\text{чн}}(r) = C r^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 42Cr^8 = 30Cr^8 = \frac{4}{4725} r^8,$$

откуда

$$C = \frac{2}{70875}.$$

Таким образом,

$$Z_{10}(r) = C_1 r^6 + \frac{2}{70875} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_{10}(3) = C_1 3^6 + \frac{2}{70875} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{2}{70875} 3^2.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_{10}(r) = \frac{2}{70875} r^6 (r^2 - 3^2). \quad (34)$$

$$\begin{cases} r^2 Z''_{11} + 2r Z'_{11} - 20 Z_{11} = \frac{1}{455} r^8, \\ Z_{11}(3) = 0. \end{cases} \quad (35)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_{11}^{\text{оо}}(r) = C_1 r^4,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_{11}^{\text{чн}}(r) = C r^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 20Cr^8 = 52Cr^8 = \frac{1}{455} r^8,$$

откуда

$$C = \frac{1}{23660}.$$

Таким образом,

$$Z_{11}(r) = C_1 r^4 + \frac{1}{23660} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1 :

$$Z_{11}(3) = C_1 3^4 + \frac{1}{23660} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{1}{23660} 3^4.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_{11}(r) = \frac{1}{23660} r^4 (r^4 - 3^4). \quad (36)$$

Все найденные функции $Z_i(r)$ позволяют нам записать итоговую формулу решения задачи (3)

$$\begin{aligned} v(r, \theta, \varphi) = & \frac{64}{9945} r^8 (\ln 3 - \ln r) P_8^{(0)}(\cos \theta) + \frac{8}{4725} r^6 (r^2 - 3^2) P_6^{(0)}(\cos \theta) + \\ & + \frac{37}{5915} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(0)}(\cos \theta) + \frac{4}{2079} r^2 (3^6 - r^6) P_2^{(0)}(\cos \theta) + \frac{11}{5670} (3^8 - r^8) P_0^{(0)}(\cos \theta) + \\ & + \left[\frac{8}{69615} r^8 (\ln 3 - \ln r) P_8^{(2)}(\cos \theta) + \frac{11}{23660} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(2)}(\cos \theta) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{1386} r^2 (r^6 - 3^6) P_2^{(2)}(\cos \theta) \right] \cos 2\varphi + \left[\frac{8}{1044225} r^8 (\ln r - \ln 3) P_8^{(4)}(\cos \theta) + \right. \\ & + \left. \frac{2}{70875} r^6 (r^2 - 3^2) P_6^{(4)}(\cos \theta) + \frac{1}{23660} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(4)}(\cos \theta) \right] \cos 4\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) = & \left[\frac{8}{56133} r^6 P_6^{(0)}(\cos \theta) - \frac{4}{1485} r^4 P_4^{(0)}(\cos \theta) + \frac{4}{35} P_0^{(0)}(\cos \theta) \right] + \\ & + \left[\frac{16}{2525985} r^6 P_6^{(2)}(\cos \theta) - \frac{4}{18711} r^4 P_4^{(2)}(\cos \theta) - \frac{4}{567} r^2 P_2^{(2)}(\cos \theta) \right] \cos 2\varphi + \\ & + \left[\frac{1}{7577955} r^6 P_6^{(4)}(\cos \theta) + \frac{1}{187110} r^4 P_4^{(4)}(\cos \theta) \right] \cos 4\varphi + \\ & + \frac{64}{9945} r^8 (\ln 3 - \ln r) P_8^{(0)}(\cos \theta) + \frac{8}{4725} r^6 (r^2 - 3^2) P_6^{(0)}(\cos \theta) + \\ & + \frac{37}{5915} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(0)}(\cos \theta) + \frac{4}{2079} r^2 (3^6 - r^6) P_2^{(0)}(\cos \theta) + \frac{11}{5670} (3^8 - r^8) P_0^{(0)}(\cos \theta) + \\ & + \left[\frac{8}{69615} r^8 (\ln 3 - \ln r) P_8^{(2)}(\cos \theta) + \frac{11}{23660} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(2)}(\cos \theta) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{1386} r^2 (r^6 - 3^6) P_2^{(2)}(\cos \theta) \right] \cos 2\varphi + \left[\frac{8}{1044225} r^8 (\ln r - \ln 3) P_8^{(4)}(\cos \theta) + \right. \\ & + \left. \frac{2}{70875} r^6 (r^2 - 3^2) P_6^{(4)}(\cos \theta) + \frac{1}{23660} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(4)}(\cos \theta) \right] \cos 4\varphi. \end{aligned}$$

Для магнитного потенциала сформулируем задачу следующим образом

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v|_{r=1} = 7 \sin \theta \cos^3 \theta \cos \varphi, \\ v|_{r=4} = 6 \sin^3 \theta (\cos \varphi - \sin 3\varphi). \end{cases} \quad (37)$$

Решение задачи (14) будем искать в виде

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[(A_{nm}r^n + B_{nm}r^{-(n+1)}) \cos m\varphi + (C_{nm}r^n + D_{nm}r^{-(n+1)}) \sin m\varphi \right] \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta). \quad (38)$$

Подставим в выражение (15) внутреннее граничное условие

$$v|_{r=1} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[(A_{nm} + B_{nm}) \cos m\varphi + (C_{nm} + D_{nm}) \sin m\varphi \right] \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta) = 7 \sin \theta \cos^3 \theta \cos \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$A_{nm} + B_{nm} = \begin{cases} A_{n1} + B_{n1}, & m = 1, \\ 0, & m \neq 1, \end{cases} \quad C_{nm} + D_{nm} = 0 \quad \forall m.$$

Таким образом, можно записать

$$v|_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1} + B_{n1}) \cos \varphi \cdot P_n^{(1)}(\cos \theta) = 7 \sin \theta \cos^3 \theta \cos \varphi.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1} + B_{n1}) \cdot P_n^{(1)}(\cos \theta) = 7 \sin \theta \cos^3 \theta.$$

Оценим степени:

$$\begin{aligned} \deg(7(1-x^2)^{1/2}x^3) &= 4, \\ \deg P_n^{(1)}(x) &= \deg \left(\frac{(1-x^2)^{1/2}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2-1)^n \right) = 1 + 2n - (n+1) = n \leq 4. \end{aligned}$$

Таким образом, нужно вычислить все многочлены вида $P_n^{(1)}(x)$, $n \leq 4$:

$$\begin{aligned} P_1^{(1)}(x) &= \sqrt{(1-x^2)}, \\ P_2^{(1)}(x) &= 3x\sqrt{(1-x^2)}, \\ P_3^{(1)}(x) &= \frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{(1-x^2)}, \\ P_4^{(1)}(x) &= \frac{5}{2}x(7x^2-3)\sqrt{(1-x^2)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (A_{41} + B_{41})P_4^{(1)}(\cos \theta) + (A_{31} + B_{31})P_3^{(1)}(\cos \theta) + (A_{21} + B_{21})P_2^{(1)}(\cos \theta) + \\ + (A_{11} + B_{11})P_1^{(1)}(\cos \theta) = 7 \cos^3 \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Тогда для получения выражений на коэффициенты нам нужно представить правую часть в виде линейной комбинации многочленов Лежандра вида $P_n^{(1)}(x)$. Путем подбора можно получить

$$7 \cos^3 \theta \sin \theta = \frac{2}{5} P_4^{(1)} + P_2^{(1)}.$$

Отсюда получаем условия на коэффициенты

$$\begin{cases} A_{41} + B_{41} = \frac{2}{5}, \\ A_{21} + B_{21} = 1. \end{cases}$$

Подставим выражение (15) во внешнее граничное условие

$$\begin{aligned} v|_{r=4} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[(A_{nm} 4^n + B_{nm} 4^{-(n+1)}) \cos m\varphi + (C_{nm} 4^n + D_{nm} 4^{-(n+1)}) \sin m\varphi \right] \cdot P_n^{(m)}(\cos \theta) = \\ &= 6 \sin^3 \theta (\cos \varphi - \sin 3\varphi). \end{aligned}$$

Отсюда, оценивая ненулевые коэффициенты при соответствующих значениях $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$, получаем, что

$$\begin{aligned} v|_{r=4} &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1} 4^n + B_{n1} 4^{-(n+1)}) \cdot P_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (C_{n3} 4^n + D_{n3} 4^{-(n+1)}) \cdot P_n^{(3)}(\cos \theta) \sin 3\varphi = 6 \sin^3 \theta (\cos \varphi - \sin 3\varphi). \end{aligned}$$

Отсюда получаем два выражения

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1} 4^n + B_{n1} 4^{-(n+1)}) \cdot P_n^{(1)}(\cos \theta) = 6 \sin^3 \theta, \quad (39)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{n3} 4^n + D_{n3} 4^{-(n+1)}) \cdot P_n^{(3)}(\cos \theta) = -6 \sin^3 \theta. \quad (40)$$

Рассмотрим разложение (16). Оценим степени

$$\deg(6(1-x^2)^{3/2}) = 3,$$

$$\deg P_n^{(1)}(x) = n \leq 3.$$

Таким образом, нам нужно взять многочлены

$$\begin{aligned} P_1^{(1)}(x) &= \sqrt{(1-x^2)}, \\ P_2^{(1)}(x) &= 3x\sqrt{(1-x^2)}, \\ P_3^{(1)}(x) &= \frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{(1-x^2)}. \end{aligned}$$

Тогда разложение (16) может быть записано как

$$\begin{aligned} (A_{31} 4^3 + B_{31} 4^{-4}) P_3^{(1)}(\cos \theta) + (A_{21} 4^2 + B_{21} 4^{-3}) P_2^{(1)}(\cos \theta) + \\ + (A_{11} 4 + B_{11} 4^{-2}) P_1^{(1)}(\cos \theta) = 6 \sin^3 \theta. \end{aligned}$$

Для задания условий на коэффициенты выразим правую часть в виде линейной комбинации многочленов Лежандра вида $P_n^{(1)}(\cos \theta)$. Путем подбора можно определить, что

$$6 \sin^3 \theta = -\frac{4}{5}P_3^{(1)} + \frac{24}{5}P_1^{(1)}.$$

Таким образом, условия на коэффициенты будут следующими

$$\begin{cases} A_{31}4^3 + B_{31}4^{-4} = -\frac{4}{5}, \\ A_{11}4 + B_{11}4^{-2} = \frac{24}{5}. \end{cases}$$

Рассмотрим разложение (17). Оценим степени

$$\deg(-6(1-x^2)^{3/2}) = 3,$$

$$\deg P_n^{(3)}(x) = \deg \left(\frac{(1-x^2)^{3/2}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n+3}}{dx^{n+3}}(x^2-1)^n \right) = 3 + 2n - (n+3) = n \leq 3.$$

Таким образом, нам нужно взять многочлен

$$P_3^{(3)}(x) = 15(1-x^2)^{3/2}.$$

Тогда разложение (17) может быть записано как

$$(C_{33}4^3 + D_{33}4^{-4})P_3^{(3)}(\cos \theta) = -6 \sin^3 \theta.$$

Для задания условия на коэффициент, представим правую часть как

$$-6 \sin^3 \theta = -\frac{2}{5}P_3^{(3)}(\cos \theta).$$

Таким образом,

$$C_{33}4^3 + D_{33}4^{-4} = -\frac{2}{5}.$$

С учетом того, что все остальные суммы коэффициентов равны нулю, мы можем дополнить все наши условия на коэффициенты дополнительными условиями и получить 4 системы уравнений для коэффициентов:

$$\begin{cases} A_{41} + B_{41} = \frac{2}{5}, \\ A_{41}4^4 + B_{41}4^{-5} = 0, \\ \\ A_{21} + B_{21} = 1, \\ A_{21}4^2 + B_{21}4^{-3} = 0, \\ \\ A_{31}4^3 + B_{31}4^{-4} = -\frac{4}{5}, \\ A_{31} + B_{31} = 0, \\ \\ A_{11}4 + B_{11}4^{-2} = \frac{24}{5}, \\ A_{11} + B_{11} = 0, \\ \\ C_{33}4^3 + D_{33}4^{-4} = -\frac{2}{5}, \\ C_{33} + D_{33} = 0. \end{cases}$$

С помощью Wolfram Mathematica найдем решения систем. Таким образом

$$A_{41} = -\frac{2}{1310715}, \quad B_{41} = \frac{524288}{1310715}, \quad A_{21} = -\frac{1}{1023}, \quad B_{21} = \frac{1024}{1023}, \quad A_{31} = -\frac{1024}{81915}, \quad B_{31} = \frac{1024}{81915},$$

$$A_{11} = \frac{128}{105}, \quad B_{11} = -\frac{128}{105}, \quad C_{33} = -\frac{512}{81915}, \quad D_{33} = \frac{512}{81915}.$$

В итоге мы можем записать решение задачи (14)

$$v(r, \theta, \varphi) = \left[\left(-\frac{2}{1310715} \cdot r^4 + \frac{524288}{1310715} \cdot r^{-5} \right) \cdot P_4^{(1)}(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1024}{81915} \cdot r^3 + \frac{1024}{81915} \cdot r^{-4} \right) P_3^{(1)}(\cos \theta) + \left(-\frac{1}{1023} \cdot r^2 + \frac{1024}{1023} r^{-3} \right) P_2^{(1)}(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \left(\frac{128}{105} \cdot r + -\frac{128}{105} \cdot r^{-2} \right) P_1^{(1)}(\cos \theta) \right] \cos \varphi + \left(-\frac{512}{81915} \cdot r^3 + \frac{512}{81915} r^{-4} \right) P_3^{(3)}(\cos \theta) \sin 3\varphi.$$