Построение разностной схемы, повышение порядка и обоснование использование метода прогонки для ОДУ

Условия

1. Построить разностную схему в индексной и безиндексной форме для дифференциальной задачи, определить порядок аппроксимации, повысить порядок аппроксимации на минимальном шаблоне, обосновать применимость метода прогонки для реализации разностной схемы

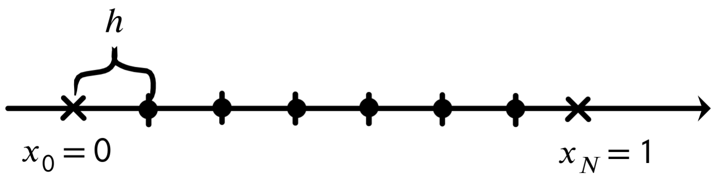
$$\begin{cases} u''(x) + r(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x),\ 0 < x < 1, \\ u'(0) = \sigma_0 u(0) + \mu_0, \\ -u'(1) = \sigma_1 u(1) + \mu_1, \end{cases}$$

если $q(x) = -4$, $r(x) = x$, $\sigma_0 = 4$, $\sigma_1 = -4$, $\mu_0 = -1$, $\mu_1 = 1$. (Решение)

Решения

1. Решение задачи будем проводить в четыре этапа.

   Первый этап. Сначала задаем сетку узлов, на которой будем строить аппроксимацию исходной задачи. Зададим равномерную одномерную сетку. Графически это можно изобразить как



   где внутренние точки обозначены через точки, а граничные точки – через крестики. На этой сетке мы определяем сеточную функцию $y = y(x),\ x \in \overline{\omega}_h$.

   Второй этап. Заменяя в исходном дифференциальном уравнении производные от функции на разностные аналоги, формулируем разностную схему дифференциальной задачи в безиндексной форме

$$\begin{cases} y_{\overline{x}x}(x) + r(x)y_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x)y(x) = f(x),\ x \in \omega_h, \\ y_x(0) = \sigma_0 y(0) + \mu_0, \\ -y_{\overline{x}}(1) = \sigma_1 y(1) + \mu_1. \end{cases}$$

   Как и ранее, заменяя $y(x_i) = y_i$, записываем разностную схему в индексной форме

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p(x_i)\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = -f(x_i),\ i = \overline{1, N-1}, \\ \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \sigma_1 y_0 + \mu_1, \\ \dfrac{y_{N-1} - y_N}{h} = \sigma_2 y_N + \mu_2. \end{cases}$$

   Далее нам нужно исследовать порядок аппроксимации задачи разностной схемой. Для этого рассмотрим поведение погрешности аппроксимации для уравнения, а затем для граничных условий:

$$\psi_h(x) = u_{\overline{x}x}(x) + p(x)u_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x)u(x) + f(x).$$

   Поскольку мы можем записать

$$u_{\overline{x}x}(x) = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + O(h^3),$$

$$u_{\overset{\circ}{x}}(x) = u'(x) + \frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^3),$$

   то

$$\psi_h(x) = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + p(x)\left[u'(x) + \frac{h^2}{6}u'''(x)\right] + q(x)u(x) + f(x) + O(h^3).$$

   Из исходной задачи мы имеем $u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = -f(x)$, поэтому

$$\psi_h(x) = \frac{h^2}{12}u^{IV}(x) + \frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^3) = O(h^2).$$

То есть разностное уравнение аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение со вторым порядком. Учитывая, что

$$u_x(x) = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2),$$

$$u_{\overline{x}}(x) = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2),$$

рассмотрим погрешность аппроксимации граничных условий,

$$\nu_h(0) = u_x(0) - \sigma_0 u(0) - \mu_0 = u'(0) + \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) - \sigma_0 u(0) - \mu_0.$$

Из поставленной задачи нам известно, что $u'(0) = \sigma_0 u(0) + \mu_0$. Тогда, используя этот факт, получим

$$\nu_h(0) = \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) = O(h).$$

Аналогично для второго граничного условия

$$\nu_h(1) = -u_{\overline{x}}(1) - \sigma_1 u(1) - \mu_1 = -u'(1) - \frac{h}{2}u''(1) + O(h^2) - \sigma_1 u(1) - \mu_1 = \\ = -\frac{h}{2}u''(1) + O(h^2) = O(h).$$

то есть граничные условия аппроксимируются с первым порядком

$$\nu_h = \nu_h(0) + \nu_h(1) = O(h).$$

Таким образом, общий порядок аппроксимации

$$\Psi_h(x) = \psi_h(x) + \nu_h(x) = O(h),$$

то есть разностная схема аппроксимирует поставленную дифференциальную задачу с первым порядком точности.

Третий этап. Повысим порядок аппроксимации разностной схемой. Уравнение мы смогли аппроксимировать со вторым порядком, а вот граничные условия у нас аппроксимируются с первым порядком. Поэтому нам необходимо повысить порядок аппроксимации граничных условий.

Рассмотрим первое граничное условие. Для него составим аппроксимацию

$$y_x(0) = \overline{\sigma}_0 y(0) + \overline{\mu}_0,$$

где $\overline{\sigma}_0$, $\overline{\mu}_0$ – сеточные параметры. Рассмотрим невязку над точным решением, чтобы определить вид введенных параметров

$$\nu_h(0) = u_x(0) - \overline{\sigma}_0 u(0) - \overline{\mu}_0 = u'(0) + \frac{h}{2}u''(0) + O(h^2) - \overline{\sigma}_0 u(0) - \overline{\mu}_0 = \\ = \Big[u''(0) = -r(0)u'(0) - q(0)u(0) + f(0),\ u'(0) = \sigma_0 u(0) + \mu_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u''(0) = -r(0)(\sigma_0 u(0) + \mu_0) - q(0)u(0) + f(0)\Big] = \\ = \left(\sigma_0 - \overline{\sigma}_0 - \frac{h}{2}r(0)\sigma_0 - \frac{h}{2}q(0)\right)u(0) + \left(\mu_0 - \overline{\mu}_0 + \frac{h}{2}f(0) - \frac{h}{2}r(0)\mu_0\right) + O(h^2).$$

Таким образом, можно выбрать

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_0 = \sigma_0 - \dfrac{h}{2} r(0)\sigma_0 - \dfrac{h}{2} q(0) = \sigma_0 \left(1 - \dfrac{h}{2} r(0)\right) - \dfrac{h}{2} q(0), \\ \overline{\mu}_0 = \mu_0 + \dfrac{h}{2} f(0) - \dfrac{h}{2} f(0)\mu_0 = \mu_0 \left(1 - \dfrac{h}{2} r(0)\right) + \dfrac{h}{2} f(0). \end{cases}$$

Аналогично можно показать

$$-y_{\overline{x}}(1) = \overline{\sigma}_1 y(1) + \overline{\mu}_1,$$

$$\begin{cases} \overline{\sigma}_1 = \sigma_1 \left(\dfrac{h}{2} r(1) - 1\right) + \dfrac{h}{2} q(1), \\ \overline{\mu}_1 = \mu_1 \left(\dfrac{h}{2} r(1) - 1\right) - \dfrac{h}{2} f(1). \end{cases}$$

Таким образом, получаем разностную схему

$$\begin{cases} y_{\overline{x}x}(x) + r(x) y_{\overset{\circ}{x}}(x) + q(x) y(x) = f(x),\ x \in \omega_h, \\ y_x(0) = \overline{\sigma}_0 y(0) + \overline{\mu}_0, \\ -y_{\overline{x}}(1) = \overline{\sigma}_1 y(1) + \overline{\mu}_1, \end{cases}$$

общий порядок аппроксимации которой

$$\Psi_h(x) = \psi_h(x) + \nu_h(0) + \nu_h(1) = O(h^2) + O(h^2) + O(h^2) = O(h^2).$$

Четвертый этап. Обоснуем применимость метода прогонки к реализации разностной схемы на ЭВМ. Для этого обратимся к индексной форме записи разностной схемы

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + r(x_i) \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i) y_i = -f(x_i),\ i = \overline{1, N-1}, \\ \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \overline{\sigma}_0 y_0 + \overline{\mu}_0, \\ \dfrac{y_{N-1} - y_N}{h} = \overline{\sigma}_1 y_N + \overline{\mu}_1. \end{cases}$$

Метод прогонки используется для отыскания решения системы с трехдиагональной матрицей. В общем случае он задается тремя формулами

$$\begin{cases} c_0 y_0 - b_0 y_1 = f_0, \\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i,\ i = \overline{1, n-1}, \\ -a_n y_{n-1} + c_n y_n = f_n. \end{cases}$$

Обоснование применимости метода прогонки равносильно обоснованию сходимости этого метода. Вспомним, какие условия сходимости метода прогонки

$$\begin{cases} |c_i| \geqslant |a_i| + |b_i|, \\ |c_0| \geqslant |b_0|, \\ |c_n| \geqslant |a_n|, \end{cases}$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое (еще есть условия $|c_0|, |c_n|, |a_i|, |b_i| > 0$, но здесь они очевидно выполняются).

Сначала мы сопоставим нашу разностную схему с формулами метода прогонки:

$$\begin{cases} \left(\overline{\sigma}_0 + \dfrac{1}{h}\right) y_0 - \dfrac{1}{h} y_1 = -\overline{\mu}_0, \\ \left(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{r(x_i)}{2h}\right) y_{i-1} + \left(q(x_i) - \dfrac{2}{h^2}\right) y_i + \left(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{r(x_i)}{2h}\right) y_{i+1} = -f(x_i), \\ -\dfrac{1}{h} y_{N-1} + \left(\overline{\sigma}_1 + \dfrac{1}{h}\right) y_N = -\overline{\mu}_1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое условие сходимости метода прогонки. В нем у нас

$$c_i = q(x_i) - \frac{2}{h^2},\ a_i = -\left(\frac{1}{h^2} - \frac{r(x_i)}{2h}\right),\ b_i = -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{r(x_i)}{2h}\right).$$

Следовательно, подставляя в неравенство для сходимости, получим

$$\left|q(x_i) - \frac{2}{h^2}\right| \geqslant \left|\frac{1}{h^2} - \frac{r(x_i)}{2h}\right| + \left|\frac{1}{h^2} + \frac{r(x_i)}{2h}\right|.$$

Данное условие проверяется при известных значениях $r(x), q(x)$. По условию нам даны $q(x) = -4$, $r(x) = x$. Подставим их и получим

$$\left|-4 - \frac{2}{h^2}\right| \geqslant \left|\frac{1}{h^2} - \frac{x_i}{2h}\right| + \left|\frac{1}{h^2} + \frac{x_i}{2h}\right|.$$

Далее начинается анализ. Мы должны показать возможность раскрытия модуля. Первый модуль мы раскрываем, меняя знак, поскольку под модулем отрицательное число. Рассмотрим второй модуль

$$\frac{1}{h^2} - \frac{x_i}{2h} \geqslant \frac{1}{h^2} - \frac{h}{2h} > 0\ \forall h.$$

Значит раскрываем модуль без изменения знака. Третий модуль также раскрываем без изменения знака, поскольку под модулем находится положительное значение. В итоге

$$\frac{2}{h^2} + 4 \geqslant \frac{1}{h^2} - \frac{x_i}{2h} + \frac{1}{h^2} + \frac{x_i}{2h}.$$

Отсюда

$$4 \geqslant 0,$$

что верно. Проверим второе условие сходимости

$$c_0 = \overline{\sigma_0} + \frac{1}{h},\ b_0 = \frac{1}{h}.$$

Тогда

$$\left|\overline{\sigma_0} + \frac{1}{h}\right| \geqslant \left|\frac{1}{h}\right|.$$

Оба модуля раскрываем без изменений знака, поскольку под модулями положительные числа

$$\overline{\sigma}_0 = \sigma_0\left(1 - \frac{h}{2} r(0)\right) - \frac{h}{2} q(0) \geqslant 0.$$

Подставим известные значения и получим

$$4 + 4\frac{h}{2} \geqslant 0,$$

что верно. Проверим третье условие сходимости

$$c_n = \overline{\sigma}_1 + \frac{1}{h},\ a_n = \frac{1}{h},$$

$$\left|\overline{\sigma_1} + \frac{1}{h}\right| \geqslant \left|\frac{1}{h}\right|.$$

Опять же раскрываем модуль без изменения знака и получаем

$$\overline{\sigma_1} = \sigma_1\left(\frac{h}{2}r(1) - 1\right) + \frac{h}{2}q(1) = -4\left(\frac{h}{2} - 1\right) - 4\frac{h}{2} = -8\frac{h}{2} + 4 \geqslant -\frac{8}{4} + 4 \geqslant 0,$$

что также верно.

Таким образом, все неравенства выполняются и любое из них можно принять за строгое неравенство. Следовательно, мы доказали применимость метода прогонки к реализации разностной схемы на ЭВМ. Далее остается только запрограммировать и получить на выходе приближенное решение поставленной дифференциальной задачи.