Сходящийся метод простой итерации

Условие

Отделив корень и приведя к виду, удобному для итераций, выбрать начальное приближение, обеспечивающее выполнение условий теоремы о сходимости метода простой итерации уравнения

$$2\sin 3x = x^2 - 4x + 3.$$

Алгоритм решения

Для решения задачи нам понадобятся следующие утверждения:

1. **Теорема 2.** (о сходимости метода простой итерации) Пусть выполняются следующие условия:

   (a) функция $\varphi(x)$ определена на отрезке

   $$|x - x_0| \leqslant \delta, \tag{1}$$

   непрерывна на нем и удовлетворяет условию Липшица с постоянным коэффициентом меньше единицы, то есть $\forall x, \widetilde{x}$

   $$|\varphi(x) - \varphi(\widetilde{x})| \leqslant q|x - \widetilde{x}|, \quad 0 \leqslant q < 1;$$

   (b) для начального приближения x_0 верно неравенство

   $$|x_0 - \varphi(x_0)| \leqslant m; \tag{2}$$

   (c) числа δ, q, m удовлетворяют условию

   $$\frac{m}{1-q} \leqslant \delta. \tag{3}$$

   Тогда

   (a) уравнение $x = \varphi(x)$ в области (1) имеет решение;

   (b) последовательность x_k построенная по правилу $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ принадлежит отрезку $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, является сходящейся и ее предел удовлетворяет уравнению $x = \varphi(x)$.

2. Выполнение условия Липшица можно заменить более строгим условием

   $$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1, \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]. \tag{4}$$

Алгоритм решения следующий: отделяется корень, выбирается канонический вид и начальное приближение, при котором выполняется теорема 2.

Здесь идет этап отделения корней. В данном файле он пропускается, так как этот этап уже разобран в другом файле.

Из задачи отделения корней уравнения мы имеем, что на отрезке $d = \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ существует единственный корень уравнения. Приведем исходное уравнение к виду $f(x) = 0$:

$$\underbrace{2\sin 3x - (x^2 - 4x + 3)}_{f(x)} = 0.$$

Область определения функции $f(x)$ совпадает с $\mathbb{R}$.

Нам необходимо задать формулу канонического вида для итерационного процесса $x = \varphi(x)$. Будем строить ее следующим образом. Возьмем наше уравнение

$$f(x) = 0,$$

домножим с двух сторон на постоянную λ и прибавим с двух сторон x, то есть

$$x = \underbrace{x + \lambda f(x)}_{\varphi(x)}.$$

Тогда проверим выполнение условия

$$|\varphi'(x)| = |1 + \lambda f'(x)| < 1.$$

Отсюда

$$-2 < \lambda f'(x) < 0.$$

Нам известно, что на отрезке d производная имеет положительный знак. Тогда

$$-\frac{2}{M} < \lambda < 0, \quad M = \max_{[0;\frac{\pi}{6}]} |f'(x)|.$$

Оценим значение M аналитически. Вычислим первую производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = 6\cos 3x - 2x + 4.$$

Разобъем производную на две элементарные функции

$$f'(x) = \underbrace{6\cos 3x}_{z_1(x)} \underbrace{-2x + 4}_{z_2(x)}.$$

Берем отрезок $d = \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Функция $z_1(x) = 6\cos 3x$ является на этом отрезке убывающей функцией по свойствам косинуса. Наибольшее значение

$$y_1(0) = 6\cos 0 = 6,$$

а наименьшее

$$y_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Таким образом, $z_1(x)$ является строго положительной функцией на отрезке d.

Рассмотрим функцию $z_2(x) = -2x + 4$. Она также является убывающей на отрезке d функцией по свойствам линейной функции. Ее наибольшее значение

$$z_2(0) = 4,$$

а наименьшее

$$z_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} + 4 \approx 3.$$

То есть эта функция также является строго положительной на отрезке d.

В итоге функция $f'(x)$ состоит из суммы двух строго положительных на отрезке d функций, а следовательно

$$3 \leqslant f'(x) \leqslant 10 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in d = \left[0; \frac{\pi}{6}\right].$$

А тогда

$$M = 10.$$

Тогда мы можем выбрать

$$\lambda \in (-0.2; 0).$$

Тогда возьмем, к примеру, $\lambda = -0.05$ (можно выбрать и другое, но лучше выбирать середину полученного интервала).

Таким образом, мы можем задать функцию для канонического вида:

$$\varphi(x) = x - 0.05 \cdot (2 \sin 3x - x^2 + 4x - 3).$$

Исследуем сходимость построенного итерационного процесса по теореме 2 по соответствующим пунктам:

1. Возьмем

   $$\Delta = [0; 0.5] \subset d$$

   (для удобства вычислений Δ короче отрезка d, но в ином случае лучше брать Δ не шире d).

   Сперва зададим начальное приближение как середину рассматриваемого отрезка $x_0 = 0.25$. Очевидно на этом отрезке функция определена, непрерывна и дифференцируема (мы показали это ранее). А тогда $\delta = 0.25$.

   Проверим выполнение условия (4). Для этого продифференцируем функцию $\varphi(x)$:

   $$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x) = 1 - 0.05 \cdot (6 \cos 3x - 2x + 4).$$

   Ранее мы показали, что $f'(x) > 3$, тогда

   $$\varphi'(x) < 1 - 0.05 \cdot 3 \leqslant 0.85 = q.$$

2. покажем, что выполняется (2): Попробуем вычислить значение m аналитически:

   $$|0.25 - (0.25 - 0.05(2 \sin 0.75 - 0.0625 + 1 - 3)| = |0.05(2 \sin 0.75 - 1.9375)| \leqslant$$
   $$\leqslant |0.05(2 \sin \frac{\pi}{4} - 1.9375)| = |0.05(\sqrt{2} - 1.9375)| \approx 0.026$$

   То есть

   $$m = 0.026.$$

3. покажем выполнение (3):

   $$\frac{0.026}{(1 - 0.85)} = 0.17(3) \leqslant 0.25$$

В итоге мы построили канонический вид для итераций

$$x = x - 0.05 \cdot (2 \sin 3x - x^2 + 4x - 3)$$

и выбрали начальное приближение $x_0 = 0.25$, при котором метод простой итерации будет сходиться.