МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе №2
«Решение смешанных задач для уравнения теплопроводности»
Вариант 4

Гут Валерии Александровны
студентки 3 курса
специальности «прикладная математика»

Преподаватель:

И. С. Козловская

Минск, 2024 г.

Постановка задачи

Решить следующую смешанную задачу

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \dfrac{1}{1+x}, \\ u_x|_{x=0} = 0, \\ u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Решение задачи в пакете Wolfram Mathematica

Перепишем данную задачу в Wolfram Mathematica

```
In[30]:= $Assumptions = {a > 0, l > 0, t > 0, t In Real, 0 < x < l, n In Integers, n > 0, lambda ≠ 0};
         eq = u^(0,1)[x, t] - a^2 u^(2,0)[x, t] == 1 / (x + 1);
         cc = {u^(1,0)[0, t] == 0, u[l, t] == 0};
         bc = u[x, 0] == 0
Out[33]= u[x, 0] == 0
```

Так как уравнение в задаче (1) является неоднородным, то решение мы будем искать в виде суммы

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x). \tag{2}$$

Составим задачу Штурма-Ливувилля для соответствующего однородного уравнения

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Найдем решение этой задачи в Wolfram Mathematica

```
In[34]:= eq1 = D[X[x], {x, 2}] + lambda^2 * X[x] == 0;

In[35]:= DSolve[eq1, X[x], x]
Out[35]= {{X[x] → c1 Cos[lambda x] + c2 Sin[lambda x]}}

In[36]:= sol = c1 Cos[lambda x] + c2 Sin[lambda x]
Out[36]= c1 Cos[lambda x] + c2 Sin[lambda x]

In[37]:= dsol1[x_] = D[sol, x]
Out[37]= lambda c2 Cos[lambda x] - lambda c1 Sin[lambda x]

In[38]:= Solve[dsol1[0] == 0]
Out[38]= {{c2 → 0}}

In[39]:= Solve[{(sol /. {x → l, c2 → 0}) == 0, C[1] ≠ 0}, lambda]
```

$$\text{Out[39]= } \left\{\left\{\text{lambda} \to \boxed{\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi c_2}{l} \text{ if } c_2 \in \mathbb{Z} \,\&\&\, -\frac{1}{l} + \frac{4 c_2}{l} \neq 0}\right\}, \left\{\text{lambda} \to \boxed{\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi c_2}{l} \text{ if } c_2 \in \mathbb{Z} \,\&\&\, \frac{1}{l} + \frac{4 c_2}{l} \neq 0}\right\}\right\}$$

То есть

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

И поскольку $\lambda > 0$, то $C_2 = 0$. А так как $C_1 \neq 0$, то а значит

$$\lambda_n = \frac{\pi + 2\pi n}{2l}, \quad X_n(x) = \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} x, \quad n = 0, 1, \dots .$$

Подставим $X_n(x)$ в (2) и получим

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} x. \tag{4}$$

Чтобы определить вид функций $T_n(t)$, подставим решение в виде (4) в уравнение задачи (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t) \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} x + a^2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \left(\cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} x = \frac{1}{1+x}.$$

Разложим правую часть равенства в ряд Фурье по собственным функциям:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} x,$$

$$f_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \frac{1}{1+x} \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} x dx.$$

Этот интеграл неберущийся, в явном виде первообразную мы не сможем найти. Поэтому будем далее под обозначением f_n иметь значение этого интеграла. В Wolfram Mathematica можно получить следующий результат

$$\text{In[40]:= } \mathtt{fn[x] = Inactive}\left[\frac{2\int_0^1 \frac{\mathrm{Cos}\left[\frac{(\pi+2\pi n)x}{2l}\right]}{x+1}\,dx}{1}\right]$$

$$\text{Out[40]= } \mathtt{Inactive}\left[\frac{2\int_0^1 \frac{\mathrm{Cos}\left[\frac{(\pi+2\pi n)x}{2l}\right]}{x+1}\,dx}{1}\right]$$

$$\text{In[41]:= } \mathtt{Activate[fn[x]]}$$

$$\text{Out[41]= } \frac{1}{1} 2 \left(\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi+2n\pi}{2l}\right] \mathrm{CosIntegral}\left[\frac{(1+l)(1+2n)\pi}{2l}\right] - \mathrm{Cos}\left[\frac{\pi+2n\pi}{2l}\right] \mathrm{CosIntegral}\left[\frac{\pi+2n\pi}{2l}\right] + \mathrm{Sin}\left[\frac{\pi+2n\pi}{2l}\right] \left(\mathrm{SinIntegral}\left[\frac{(1+l)(1+2n)\pi}{2l}\right] - \mathrm{SinIntegral}\left[\frac{\pi+2n\pi}{2l}\right]\right)\right)$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t) \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} x \; + \; \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \left(a \frac{\pi + 2\pi n}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} x \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} x.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при рядах, получаем

$$T_n'(t) + \left(a \frac{\pi + 2\pi n}{2l} \right)^2 T_n(t) = f_n. \tag{5}$$

Подставляя в (4) начальное условие задачи (1), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \cos \frac{\pi + 2\pi n}{2l} x = 0 \Rightarrow T_n(0) = 0. \tag{6}$$

Решение задачи Коши (5), (6) найдем с помощью Wolfram Mathematica. Сперва построим общее решение уравнения (5)

```
In[43]:= Simplify[DSolve[Derivative[1][T][t] + ((a (π + 2 π n)) / (2 l))^2 T[t] == fn, T[t], t]]
```

$$\text{Out[43]= } \left\{\left\{T[t] \to \frac{e^{-\frac{a^2 (1+2n)^2 \pi^2 t}{4 l^2}} \left(4 e^{\frac{a^2 (1+2n)^2 \pi^2 t}{4 l^2}} fn\, l^2 + a^2 (1+2n)^2 \pi^2 c_1\right)}{a^2 (1+2n)^2 \pi^2}\right\}\right\}$$

$$\text{In[44]:= } sol = \frac{e^{-\frac{a^2 (1+2n)^2 \pi^2 t}{4 l^2}} \left(4 e^{\frac{a^2 (1+2n)^2 \pi^2 t}{4 l^2}} fn\, l^2 + a^2 (1+2n)^2 \pi^2 c_1\right)}{a^2 (1+2n)^2 \pi^2}$$

$$\text{Out[44]= } \frac{e^{-\frac{a^2 (1+2n)^2 \pi^2 t}{4 l^2}} \left(4 e^{\frac{a^2 (1+2n)^2 \pi^2 t}{4 l^2}} fn\, l^2 + a^2 (1+2n)^2 \pi^2 c_1\right)}{a^2 (1+2n)^2 \pi^2}$$

то есть

$$T_n(t) = \frac{1}{a^2(\pi+2\pi n)^2} e^{-\frac{a^2(\pi+2\pi n)^2 t}{4l^2}} \left(4e^{\frac{a^2(\pi+2\pi n)^2 t}{4l^2}} f_n l^2 + a^2(\pi+2\pi n)^2 C_1\right). \tag{7}$$

Используя начальное условие (6), находим значение C_1

```
In[45]:= C1 = Solve[(sol /. t → 0) == 0, c1]
```

$$\text{Out[45]= } \left\{\left\{c_1 \to -\frac{4\, fn\, l^2}{a^2 (1+2n)^2 \pi^2} \text{ if } a (1+2n) \neq 0\right\}\right\}$$

то есть

$$C_1 = -\frac{4 f_n l^2}{a^2(\pi+2\pi n)^2}. \tag{8}$$

Подставим это значение в (7) и получим вид функций $T_n(t)$

```
In[47]:= Tn = Simplify[sol /. C1]
```

$$\text{Out[47]= } \left\{\frac{4 \left(1 - e^{-\frac{a^2 (1+2n)^2 \pi^2 t}{4 l^2}}\right) fn\, l^2}{a^2 (1+2n)^2 \pi^2}\right\}$$

то есть

$$T_n(t) = \frac{4 f_n l^2}{a^2(\pi+2\pi n)^2} \left(1 - e^{-\frac{a^2(\pi+2\pi n)^2 t}{4l^2}}\right). \tag{9}$$

Тогда n-ый член суммы (2), которая является решением, можно записать как

$$\text{In[48]:= } TnXn = Simplify\left[Tn * Cos\left[\frac{(\pi + 2\pi n)\, x}{2\, l}\right]\right]$$

$$\text{Out[48]= } \left\{\frac{4 \left(1 - e^{-\frac{a^2 (1+2n)^2 \pi^2 t}{4 l^2}}\right) fn\, l^2 \operatorname{Cos}\left[\frac{(\pi + 2 n \pi)\, x}{2 l}\right]}{a^2 (1+2n)^2 \pi^2}\right\}$$

то есть
$$T_n(t)X_n(x) = \frac{4f_n l^2}{a^2(\pi+2\pi n)^2}\left(1 - e^{-\frac{a^2(\pi+2\pi n)^2 t}{4l^2}}\right)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right). \tag{10}$$
Для проверки подставим данный коэффициент в задачу (1)

```
In[50]:= Simplify[{eq, cc, bc} /.
   u → Activate[Function[{x, t}, (4 (1 - ⅇ^(-(a^2 (1+2 n)^2 π^2 t)/(4 l^2))) fn l^2 Cos[((π+2 n π) x)/(2 l)])/(a^2 (1 + 2 n)^2 π^2)]]]

Out[50]= {fn (1 + x) Cos[((π + 2 n π) x)/(2 l)] == 1, {True, (-1 + ⅇ^((a^2 (1+2 n)^2 π^2 t)/(4 l^2))) fn Sin[n π] == 0}, True}
```

то есть $T_n(t)X_n(x)$ удовлетворяют всем дополнительным условиям (второе условие также выполнено, так как $\sin \pi n = 0$). Эти функции также удовлетворяют и самому уравнению, так как мы получили равенство
$$f_n \cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right) = \frac{1}{1+x},$$
а значение слева и является n-ым членом разложения в ряд Фурье правой функции по степеням собственных функций.

Таким образом, решение задачи (1) задано функцией
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4f_n l^2}{a^2(\pi+2\pi n)^2}\left(1 - e^{-\frac{a^2(\pi+2\pi n)^2 t}{4l^2}}\right)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2l}x\right). \tag{11}$$
Теперь найдем решение задачи (1) альтернативным образом через команду DSolve

```
In[55]:= sol = DSolve[{eq, bc, cc}, u, {x, t}]

Out[55]= {{u → Function[{x, t},
   Sum[1/(a^2 π^2 (1 - 2 K[1])^2) 8 (1 - ⅇ^(-(a^2 π^2 t (1-2 K[1])^2)/(4 l^2))) l Cos[(π x (-1 + 2 K[1]))/(2 l)]
     (-Cos[(π - 2 π K[1])/(2 l)] CosIntegral[(π (-1 + 2 K[1]))/(2 l)] + Cos[(π - 2 π K[1])/(2 l)] CosIntegral[((1 + l) π (-1 + 2 K[1]))/(2 l)] +
      Sin[(π - 2 π K[1])/(2 l)] (SinIntegral[(π (-1 + 2 K[1]))/(2 l)] - SinIntegral[((1 + l) π (-1 + 2 K[1]))/(2 l)])) if K[1] ≥ 1/2, {K[1], 1, ∞}]]}}
```

что совпадает с построенным нами решением, если в нем расписать f_n.

Визуализация решения с помощью Wolfram Mathematica

Рассмотрим дополнительные условия задачи (1). Из физического смысла начальное условие задает температуру стержня в каждом сечении x в начальный момент времени $t = 0$, следовательно в момент $t = 0$ температура u в каждом сечении стрежня нулевая. Граничное условие первого рода задает температуру $u = 0$ на конце стрежня $x = l$. Граничное условие второго рода заключается в том, что на конец стрежня $x = 0$ подается заданный тепловой поток $u = 0$. Таким образом, на одном конце стержня поддерживается температура в 0 градусов, а на второй конец стержня подается тепловой поток в 0 градусов. Построенное решение задачи колеблется около 0 и сходится в 0. Из-за этого, если пытаться строить график теплообмена, то он бы не мог учитывать такие малые изменения по температуре.

Вывод

Таким образом, мы нашли решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом разделения переменных, а затем проверили, правильно ли оно было вычислено, с помощью Wolfram Mathematica.