СтЛНВУ. Метод Лагранжа решения СтЛНВУ. Метод Коши решения СтЛНВУ.

Рассмотрим уравнение

$$DX = AX + f(t), \quad t \in \mathbb{I} \tag{1}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ векторной функцией $f(t)$ и соответствующее ему однородное уравнение

$$DX = AX. \tag{2}$$

Все решения неоднородного уравнения можно получить, прибавив к некоторому частному решению все решения соответствующего однородного уравнения, то есть

$$X_{\text{ОН}} = X_{\text{ОО}} + X_{\text{ЧН}}.$$

Замечание. *Нахождение решения СтЛНВУ методом Лагранжа предусматривает умение находить решение СтЛВУ методом Эйлера. Нахождение решения СтЛНВУ методом Коши предусматривает умение находить решение СтЛВУ матричным методом. Если Вы пропустили, то лучше вернуться и повторить прошлые уроки, иначе могут возникнуть трудности с пониманием материала в данном уроке.*

Метод Лагранжа решения СтЛНВУ.

Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено **методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа)**.

Пусть $\Phi(t) = [X_1(t), \ldots, X_n(t)]$ — ФМ. Частное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$X(t) = \Phi(t) \cdot U(t), \quad U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Подставим функцию $X(t)$ в уравнение (1) и получим

$$DXU + XDU = AX + f(t) \Rightarrow \Phi(t) \cdot DU(t) = f(t).$$

$\det \Phi(t) \neq 0 \ \forall t \Rightarrow \exists \Phi^{-1}(t) : DU(t) = \Phi^{-1}(t) f(t)$. Тогда в качестве $U(t)$ можно выбрать

$$U(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad t, t_0 \in \mathbb{I}.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\boxed{X_{\text{он}} = \Phi(t) \cdot C + \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.} \tag{3}$$

Пример 1. Методом Лагранжа найти общее решение уравнения $DX = AX + f(t)$, $t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (3). Для нахождения общего решения СтЛНВУ нам необходимо найти ФМ $\Phi(t)$. Вычислим ее методом Эйлера.
Матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$. Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям и сразу же найдем решения уравнения:

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = e^{-2t}(1, -2).$$

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = e^{-t}(1, -1).$$

Тогда составим фундаментальную матрицу

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Также матрицу $\Phi(t)$ можно составить с помощью матричного метода:

$$\Phi(t) = Se^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем найти общее решение соответствующего однородного СтЛВУ:

$$X_{\text{оо}}(t) = \Phi(t) \cdot C = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{-2t} + C_2e^{-t} \\ -2C_1e^{-2t} - C_2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем частное решение СтЛНВУ по формуле

$$X_{\text{чн}}(t) = \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau.$$

Для этого вычислим $\Phi^{-1}(\tau) f(\tau)$:

$$\Phi^{-1}(\tau) f(\tau) = \begin{pmatrix} -e^{2\tau} & -e^{2\tau} \\ 2e^{\tau} & e^{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ -\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau e^{\tau} \end{pmatrix}.$$

Подставим в формулу частного решения. Тогда нам необходимо найти интеграл от этой матрицы по τ. Вычислим его, проинтегрировав каждую строку полученного столбца по отдельности при $t_0 = 0$:

$$\int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ \tau e^{\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ te^t - e^t + 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь умножим фундаментальную матрицу на полученный столбец. Это и будет частное решение нашего СтЛНВУ:

$$X_{\text{чн}}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ te^t - e^t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 1 + e^{-t} \\ -t + 1 - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Осталось сложить общее и частное решения и получить общее решение исходного СтЛН-ВУ:

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{-2t} + C_2e^{-t} \\ -2C_1e^{-2t} - C_2e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - 1 + e^{-t} \\ -t + 1 - e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{-2t} + C_2e^{-t} + t - 1 + e^{-t} \\ -2C_1e^{-2t} - C_2e^{-t} - t + 1 - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{-2t} + C_2e^{-t} + t - 1 + e^{-t} \\ -2C_1e^{-2t} - C_2e^{-t} - t + 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$.

Пример 2. Методом Лагранжа найти общее решение уравнения $DX = AX + f(t)$, $t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 6te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет собственное значение $\lambda = 2$, $k = 3$.

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, геометрическая кратность $r = 2$. Собственные векторы соответствующие собственному значению равны $(1, 0, 1)^T$, $(1, -1, 0)^T$. Тогда линейно независимые решения равны, соответствующего однородного уравнения равны

$$x_1 = e^{2t}(1, 0, 1), \quad x_2 = e^{2t}(1, -1, 0).$$

Дополним совокупность линейно независимым решением $x_3 = e^{2t}(\alpha_0 + \alpha_1 t)$, где $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_0 = (1, 0, 0)^T$. Тогда

$$x_3 = e^{2t}(t + 1, 0, t)^T.$$

Построим фундаментальную матрицу

$$\Phi(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 1 & t+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -t & -t & t+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$X_{\text{оо}}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3 t + C_3 \\ -C_2 \\ C_1 + C_3 t \end{pmatrix}.$$

Перейдем к поиску частного решения. Вычислим $\Phi^{-1}(\tau) f(\tau)$:

$$\Phi^{-1}(\tau) f(\tau) = e^{-2\tau} \begin{pmatrix} -\tau & -\tau & \tau+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\tau} \\ 6\tau e^{2\tau} \\ e^{2\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\tau^2 + 1 \\ -6\tau \\ 6\tau \end{pmatrix}.$$

Проинтегрируем полученный столбец, взяв $t_0 = 0$:

$$\int\limits_0^t \begin{pmatrix} -2\tau^2 + 1 \\ -2\tau \\ 2\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} -2t^3 + t \\ -3t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Домножим слева на фундаментальную матрицу и получим

$$X_{\text{чн}}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 1 & t+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2t^3 + t \\ -3t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} t^3 + t \\ 3t^2 \\ t^3 + t \end{pmatrix}.$$

Сложим общее и частное решения и получим общее решение СтЛНВУ

$$X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3 t + C_3 \\ -C_2 \\ C_1 + C_3 t \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} t^3 + t \\ 3t^2 \\ t^3 + t \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3 t + C_3 + t^3 + t \\ -C_2 + 3t^2 \\ C_1 + C_3 t + t^3 + t \end{pmatrix}.$$

Ответ:$X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3 t + C_3 + t^3 + t \\ -C_2 + 3t^2 \\ C_1 + C_3 t + t^3 + t \end{pmatrix}$.

Метод Коши решения СтЛНВУ.

Используя формулу (3), найдем решение задачи Коши $DX = AX + f(t)$, $X|_{t=t_0} = \xi$. Для этого подставим в (3) начальные условия: $X|_{t=t_0} = \Phi(t_0) \cdot C = \xi \Rightarrow C = \Phi^{-1}(t_0)\xi$. Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)\xi + \Phi(t) \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau. \tag{4}$$

Возьмем $\Phi(t) = e^{At}$. Тогда решение задачи Коши примет вид

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\xi + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Задача Коши для уравнения (1) с нулевыми начальными условиями ($\xi = 0$) имеет вид

$$X(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Эта является частным решением уравнения (1).

• *Полученная функция называется* ***методом Коши*** *отыскания частного решения неоднородного уравнения.*

Следовательно, общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$\boxed{X_{\text{он}}(t) = e^{A(t-t_0)}C + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau.} \tag{6}$$

Пример 3. Методом Коши найти общее решение уравнения $DX = AX + f(t)$, $t \in \mathbb{I}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для нахождения решения воспользуемся формулой (6). И для нахождения общего решения, и для частного нам необходимо найти матричную экспоненту $e^{A(t-t_0)}$. Матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$, $k_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$, $k_2 = 2$.
Рассмотрим $\lambda_1 = -1$:

$$A + E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Тогда данному собственному значению соответствует собственный вектор

$$a_1(0, 0, 1).$$

Рассмотрим $\lambda_2 = 2$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, геометрическая кратность $r = n - rank(A - 2E) = 1$. Найдем собственный вектор, соответствующий данному собственному значению

$$a_2(0, 1, 0).$$

Найдем присоединенный к нему вектор

$$(A - 2E \mid a_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow a_3(1, 0, 0).$$

Теперь можем построить трансформирующую матрицу и матричную экспоненту ЖНФ:

$$S = S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$e^{A(t-t_0)} = Se^{J(t-t_0)}S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2(t-t_0)} & 0 & 0 \\ (t - t_0)e^{2(t-t_0)} & e^{2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-t_0)} \end{pmatrix}.$$

Теперь можем найти общее решение соответствующего СтЛОВУ, приняв $t_0 = 0$:

$$X_{\text{оо}}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_1te^{2t} + C_2e^{2t} \\ C_3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Но общее решение можно искать и другим способом. Например, необязательно умножать Se^{Jt} на S^{-1}:

$$X(t) = Se^{Jt}C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3e^{2t} \\ C_3te^{2t} + C_2e^{2t} \\ C_1e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Такое решение отличается от полученного ранее, однако также является общим. На мой взгляд, разница между двумя этими вариантами в данном случае невелика, так как мы все равно должны вычислять матрицу S^{-1} для нахождения частного решения.

Осталось найти частное решение $\int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau$. Так как $t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$, можем взять $t_0 = 0$. Найдем $e^{A(t-\tau)}f(\tau)$:

$$e^{A(t-\tau)}f(\tau) = \begin{pmatrix} e^{2(t-\tau)} & 0 & 0 \\ (t-\tau)e^{2(t-\tau)} & e^{2(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2\tau} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix}.$$

Полученный столбец необходимо проинтегрировать. Для этого проинтегрируем каждую строку по отдельности:

$$\int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ e^{-(t-\tau)} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ te^{2t} \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Полученный столбец является столбцом частных решений. Остается лишь сложить полученные общие решения и частные решения (причем в качестве общего решения возьмем столбец $Se^{Jt}S^{-1}C$) и получить матрицу, которая является общим решением СтЛВНУ:

$$X_{\text{он}}(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_1te^{2t} + C_2e^{2t} + te^{2t} \\ C_3e^{-t} + 1 - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X_{\text{он}}(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_1te^{2t} + C_2e^{2t} + te^{2t} \\ C_3e^{-t} + 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$.

Пример 4. Методом Коши найти общее решение уравнения $DX = AX + f(t)$, $t \in \mathbb{I}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет собственное значение $\lambda = 1$, $k = 3$.

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно, геометрическая кратность $r = 1$, и собственному значению соответствует собственный вектор

$$a_1(1, 1, 0).$$

Найдем присоединенные векторы:

$$(A - E \mid a_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow a_2(0, 0, 1).$$

$$(A - E \mid a_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow a_3(1, 0, 0).$$

Построим трансформирующую матрицу и матричную экспоненту ЖНФ:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{Jt} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^{A(t-t_0)} = e^t \begin{pmatrix} \frac{(t-t_0)^2}{2} + 1 & \frac{(t-t_0)^2}{2} & (t - t_0) \\ \frac{(t-t_0)^2}{2} & 1 - \frac{(t-t_0)^2}{2} & (t - t_0) \\ (t - t_0) & -(t - t_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Примем $t_0 = 0$ и найдем общее решение СтЛВУ

$$X_{\text{оо}}(t) = e^t \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + 1 & \frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}C_1t^2 + C_1 + \frac{1}{2}C_2t^2 + C_3t \\ \frac{1}{2}C_1t^2 + C_2 - \frac{1}{2}C_2t^2 + C_3t \\ C_1t - C_2t + C_3 \end{pmatrix}.$$

Переходим к нахождению частного решения. Аналогично берем $t_0 = 0$ и ищем $e^{A(t-\tau)}f(\tau)$:

$$e^{A(t-\tau)}f(\tau) = e^{t-\tau} \begin{pmatrix} \frac{(t-\tau)^2}{2} + 1 & \frac{(t-\tau)^2}{2} & (t - \tau) \\ \frac{(t-\tau)^2}{2} & 1 - \frac{(t-\tau)^2}{2} & (t - \tau) \\ (t - \tau) & -(t - \tau) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ e^\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-\tau} + (t - \tau)e^t \\ e^{t-\tau} + (t - \tau)e^t \\ 2e^{t-\tau}(t - \tau) + e^t \end{pmatrix}.$$

Проинтегрируем полученный столбец, взяв $t_0 = 0$:

$$X_{\text{чн}}(t) = \int\limits_0^t \begin{pmatrix} e^{t-\tau} + (t - \tau)e^t \\ e^{t-\tau} + (t - \tau)e^t \\ 2e^{t-\tau}(t - \tau) + e^t \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1/2t^2e^t + e^t - 1 \\ 1/2t^2e^t + e^t - 1 \\ 3te^t - 2e^t + 2 \end{pmatrix}.$$

Сложим общее и частное решения и получим общее решение СтЛНВУ

$$X_{\text{он}}(t)=\begin{pmatrix}1/2C_1t^2+C_1+1/2C_2t^2+C_3t+1/2t^2e^t+e^t-1\\1/2C_1t^2+C_2-1/2C_2t^2+C_3t+1/2t^2e^t+e^t-1\\C_1t-C_2t+C_3+3te^t-2e^t+2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X_{\text{он}}(t)=\begin{pmatrix}1/2C_1t^2+C_1+1/2C_2t^2+C_3t+1/2t^2e^t+e^t-1\\1/2C_1t^2+C_2-1/2C_2t^2+C_3t+1/2t^2e^t+e^t-1\\C_1t-C_2t+C_3+3te^t-2e^t+2\end{pmatrix}.$

Пример 5. Методом Коши решить задачу Коши $DX=AX+f(t)$, $t\in\mathbb{I}$, $X_{t=t_0}=\xi$, где

$$A=\begin{pmatrix}5&4&6\\4&5&6\\-4&-4&-5\end{pmatrix},\quad f(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad t_0=1,\quad \xi=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

Решение. Вспользуемся формулой (5). Метод решения аналогичен предудыщим примерам, но после вычисления $e^{A(t-t_0)}$ мы не находим общее решение, а сразу подставляем начальные условия.

Матрица A имеет собственные значения $\lambda_1=1$, $k_1=2$; $\lambda_2=3$, $k_2=1$. Рассмотрим λ_1:

$$A-E=\begin{pmatrix}4&4&6\\4&4&6\\-4&-4&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, геометрическая кратность $r_1=2$, а собственные вектора соответствующие собственному значению равны

$$a_1(1,-1,0),\quad a_2(3,0,-2).$$

Рассмотрим λ_2:

$$A-3E=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&2&6\\-4&-4&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow a_3(1,1,-1).$$

Вычислим матричную экспоненту:

$$e^{A(t-t_0)}=\begin{pmatrix}1&3&1\\-1&0&1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t-t_0}&0&0\\0&e^{t-t_0}&0\\0&0&e^{3(t-t_0)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\-1&-1&-2\\2&2&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2e^{3(t-t_0)}-e^{(t-t_0)}&2e^{3(t-t_0)}-2e^{(t-t_0)}&3e^{3(t-t_0)}-3e^{(t-t_0)}\\2e^{3(t-t_0)}-2e^{(t-t_0)}&2e^{3(t-t_0)}-e^{(t-t_0)}&3e^{3(t-t_0)}-3e^{(t-t_0)}\\2e^{(t-t_0)}-2e^{3(t-t_0)}&2e^{(t-t_0)}-2e^{3(t-t_0)}&4e^{(t-t_0)}-3e^{3(t-t_0)}\end{pmatrix}.$$

Вычислим $e^{A(t-t_0)}\xi$:

$$e^{A(t-t_0)}\xi=\begin{pmatrix}2e^{3(t-1)}-e^{(t-1)}&2e^{3(t-1)}-2e^{(t-1)}&3e^{3(t-1)}-3e^{(t-1)}\\2e^{3(t-1)}-2e^{(t-1)}&2e^{3(t-1)}-e^{(t-1)}&3e^{3(t-1)}-3e^{(t-1)}\\2e^{(t-1)}-2e^{3(t-1)}&2e^{(t-1)}-2e^{3(t-1)}&4e^{(t-1)}-3e^{3(t-1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3(t-1)}-e^{t-1}\\e^{3(t-1)}-1/2e^{t-1}\\e^{t-1}-e^{3(t-1)}\end{pmatrix}.$$

Теперь найдем частное решение. Вычисляется оно абсолютно аналогично прошлым примерам. Только в интеграле принимаем $t_0=1$ в соответствии с нашими начальными условиями.

$$e^{A(t-\tau)}f(\tau)=\begin{pmatrix}2e^{3(t-\tau)}-e^{(t-\tau)}&2e^{3(t-\tau)}-2e^{(t-\tau)}&3e^{3(t-\tau)}-3e^{(t-\tau)}\\2e^{3(t-\tau)}-2e^{(t-\tau)}&2e^{3(t-\tau)}-e^{(t-\tau)}&3e^{3(t-\tau)}-3e^{(t-\tau)}\\2e^{(t-\tau)}-2e^{3(t-\tau)}&2e^{(t-\tau)}-2e^{3(t-\tau)}&4e^{(t-\tau)}-3e^{3(t-\tau)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t-\tau}\\-e^{t-\tau}\\0\end{pmatrix}.$$

Тогда
$$X_{\text{чн}}(t) = \int\limits_1^t \begin{pmatrix} e^{t-\tau} \\ -e^{t-\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} e^{t-1}-1 \\ 1-e^{t-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Полученные решения как всегда складываем и получим решение исходной задачи Коши:
$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{3(t-1)} - e^{t-1} \\ e^{3(t-1)} - 1/2e^{t-1} \\ e^{t-1} - e^{3(t-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t-1}-1 \\ 1-e^{t-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3(t-1)} - 1 \\ e^{3(t-1)} - 3/2e^{t-1} + 1 \\ e^{t-1} - e^{3(t-1)} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} e^{3(t-1)} - 1 \\ e^{3(t-1)} - 3/2e^{t-1} + 1 \\ e^{t-1} - e^{3(t-1)} \end{pmatrix}.$

Замечание. *Искать решение задачи Коши мы также можем методом Лагранжа по формуле (4), но, в отличие от метода Лагранжа, вычисляя в методе Коши $e^{A(t-t_0)}$, мы сразу находим ФСР нормированную в точке $t = t_0$. Поэтому после нахождения $e^{A(t-t_0)}$ мы сразу же можем подставить начальные условия.*

Задачи для самостоятельного решения.

Методом Лагранжа найти общее решение уравнения $DX = AX + f(t)$, $t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}$, где

1. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = (-\pi/2; \pi/2);$$

2. $$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 6e^{6t} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{R};$$

3. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/(e^t+1) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{R};$$

4. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}\sin t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{R};$$

5. $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{5t} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Методом Коши найти общее решение уравнения $DX = AX + f(t)$, $t \in \mathbb{I}$, где
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1. $f(t) = (0, e^t, 0)^T$;
2. $f(t) = (\cos t, \sin t, 1)^T$.

Методом Коши решить задачу Коши $DX = AX + f(t)$, $t \in \mathbb{I}$, $X_{t=t_0} = \xi$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 12 & -3 & -12 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

1. $f(t) = (t, 0, 1)^T, t_0 = 2, \xi = (1, 0, 0)^T;$
2. $f(t) = (e^{-t}, e^{2t}, 0)^T, t_0 = 0, \xi = (1, 0, 0)^T;$