Задачи с экзамена.

1. Исследовать устойчивость по начальным данным разностной схемы $y_{\bar{t}} + a\check{y}_{\overset{\circ}{x}} = \varphi$, аппроксимирующей задачу Коши для уравнения переноса $\dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t)$.

2. Для дифференциальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1,x_2),\ u \in \Pi,\ \Pi = \{0 < x_\alpha < 1\},\ \alpha = 1,2, \\ u|_\Gamma = \mu(x_1,x_2), \end{cases}$$

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2,\ \mu(x_1,x_2) = \frac{1}{12}(x_1^4 + x_2^4),$$

где Γ – граница Π, построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^4 + h_2^2)$ и записать алгоритм метода Зейделя ее реализации.

3. Для дифференциальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1,x_2),\ u \in \Pi,\ \Pi = \{0 < x_\alpha < 1\},\ \alpha = 1,2, \\ u|_\Gamma = \mu(x_1,x_2), \end{cases}$$

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2,\ \mu(x_1,x_2) = \frac{1}{12}(x_1^4 + x_2^4),$$

где Γ – граница Π, построить разностную схему порядка аппроксимации $O(h_1^2 + h_2^4)$ и записать алгоритм метода Зейделя ее реализации.

4. Исследовать с помощью принципа максимума устойчивость разностной схемы

$$\begin{cases} y_t = \dfrac{\hat{y}_{\bar{x}x} + y_{\bar{x}x}}{2} + \varphi,\ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ y_x(0,t) = \mu_0(t), \\ y(1,t) = \mu_1(t), \end{cases}$$

аппроксимирующей задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t),\ t \geqslant 0, \\ u(1,t) = \mu_1(t),\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

5. Исследовать с помощью принципа максимума устойчивость разностной схемы

$$\begin{cases} y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} + \dfrac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2} = -\varphi,\ (x_1,x_2) \in \omega_{h_1,h_2}, \\ y(x_1,x_2) = \mu(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) \in \gamma_{h_1 h_2}, \end{cases}$$

аппроксимирующей задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1,x_2),\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1, \\ u(x_1,x_2) = \mu(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) \in \Gamma. \end{cases}$$

6. Аппроксимировать методом неопределенных коэффициентов
$$Lu(x) = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x\frac{\partial u}{\partial x}$$
на минимальном шаблоне из равноотстоящих узлов. Найти порядок аппроксимации и главный член погрешности.

7. Будет ли устойчив метод прогонки реализации нижеприведенной разностной схемы?
$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = \hat{y}_{\bar{x}x} + \varphi,\ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y_{i,0} = 1 + x_i,\ (y_t)_{i,0} = 2,\ i = \overline{0, N_1}, \\ (y_x)_{0,j} = x_0^2 - y_{0,j},\ (y_{\bar{x}})_{N_1,j} = 3 + y_{N_1,j},\ j = \overline{1, N_2}. \end{cases}$$
Записать расчетные формулы для 0, 1 и 2 временных слоев.

8. С какой точностью оператор $u_{\bar{x}x\bar{x}}$ аппроксимирует третью производную $u(x)$ в точке $x-h$.

9. Построить неявную разностную схему с порядком $O(\tau + h^2)$ для решения следующей краевой задачи и записать алгоритм ее реализации
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (e^t + e^x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{xt},\ x \in [0,1],\ t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ u(x,0) = e^x, \\ u(0,t) = e^t, \\ u(1,t) = e^t + 1 \end{cases}$$

10. С каким порядком разностное уравнение $y_t + ay_{\overset{\circ}{x}} = 0$ аппроксимирует однородное уравнение переноса в точке $\left(x, t + \dfrac{\tau}{2}\right)$?

11. При каком выборе сеточной функции φ разностное уравнение $y_t + ay_{\overset{\circ}{x}} = \varphi$ будет аппроксимировать неоднородное уравнение переноса в точке $\left(x, t + \dfrac{\tau}{2}\right)$ со вторым порядком?

12. С каким порядком разностное уравнение $y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi$ аппроксимирует уравнение теплопроводности в точке $\left(x, t + \dfrac{\tau}{2}\right)$, если $\varphi = f\left(x, t + \dfrac{\tau}{2}\right)$?

13. При каком выборе сеточной функции φ разностное уравнение $y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi$ будет аппроксимировать уравнение теплопроводности в точке $\left(x, t + \dfrac{\tau}{2}\right)$ со вторым порядком?

14. Используя метод разделения переменных, исследовать устойчивость по начальным данным разностной схемы
$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = y_{\bar{x}x} + \varphi,\ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ y_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t),\ t \in \overline{\omega}_\tau, \\ y(1,t) = \mu_1(t), t \in \overline{\omega}_\tau, \end{cases}$$

аппроксимирующей задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(0,t) = \mu_0(t),\ t \geqslant 0 \\ u(1,t) = \mu_1(t),\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

15. Построить разностную схему порядка аппроксимации $O(\tau + h^2)$ для решения следующей краевой задачи и записать алгоритм ее реализации

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (x^2+1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{xt},\ x \in [0,1],\ t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ u(x,0) = x^2 - 1, \\ u(0,t) = 2t + 1, \\ \dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} = t^2 + 1. \end{cases}$$

16. Разностная схема

$$\begin{cases} (ay_{\overline{x}})_x - dy = -\varphi,\ x \in \omega_h, \\ y_0 = 1, y_N = 2 \end{cases}$$

с коэффициентами

$$a_i = \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}},\ d_i = \frac{q_{i-0.5} + q_{i+0.5}}{2},\ \varphi_i = \frac{f_{i-0.5} + f_{i+0.5}}{2}$$

аппроксимирует следующую дифференциальную задачу

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x),\ 0 < x < 2, \\ u(0) = 1,\ u(1) = 2. \end{cases}$$

Показать, является ли эта схема консервативной и указать ее порядок аппроксимации.

17. Найти погрешность аппроксимации дифференциального оператора

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

разностным оператором

$$L_h u = (ay_{\overline{x}})_x,\ a(x) = \frac{k(x+h) - k(x)}{2}.$$

18. Путем повышения порядка аппроксимации на минимальном шаблоне разностной схемы

$$\begin{cases} y_t = (k(x,t)y_{\overline{x}})_X + \varphi,\ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t), \\ y_x(1,t) = \mu_1(t), \end{cases}$$

аппроксимирующей задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0,t) = \mu_0(t),\ t \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \mu_1(t),\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

построить разностную схему с порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$.