Приближение функций

Условия

1. Построить наилучшее среднеквадратичное приближение к аналитически заданной функции с помощью алгебраического многочлена первой степени:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [1, 2].$$

Оценить величину наилучшего приближения. (Решение)

2. Построить наилучшее равномерное приближение функции $f(x) = 2^x$, $x \in [-1, 1]$ с помощью многочлена первой степени. Найти наилучшее приближение. (Решение)

3. Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = 2^x$ по ее значениям в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Вычислить с его помощью приближенное значение $f(0.5)$ и оценить погрешность найденного значения. (Решение)

4. Определить погрешность квадратичной интерполяции функции $f(x) = \ln(x + 2)$ на равномерной сетке узлов $x_i \in [-1; 1]$ с шагом $h = 0.1$. (Решение)

5. Построить интерполяционный многочлен в форме Лагранжа для сетки равноотстоящих узлов. (Решение)

6. Определить минимальную степень интерполяционного многочлена, гарантирующего при оптимальном распределении узлов на отрезке $[2; 5]$ для интерполяционной функции $f(x) = \cos 2x$ величину погрешности $\varepsilon \leqslant 10^{-5}$. Указать соответствующее распределение узлов. (Решение)

7. Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = x^6$ по следующей таблице входных данных: $f(0), f'(0), f''(0), f(1), f'(1)$. Вычислить с его помощью приближенное значение $f(0.5)$ и оценить погрешность найденного значения. (Решение)

8. Доказать, что многочлены Чебышева удовлетворяют уравнению

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

(Решение)

9. Среди многочленов вида

$$P_3(x) = ax^3 + 3x^2 + bx + c$$

найти наименее отклоняющийся от нуля на отрезке $[1, 5]$. (Решение)

10. Доказать, что многочлены Чебышева первого рода образуют ортогональную по весу

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

на отрезке $[-1, 1]$ систему. (Решение)

11. Построить естественный кубический сплайн для функции $y = f(x)$ заданной таблицей значений

x	0	1	2	4
$f(x)$	2	3	5	10

Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 3$. (Решение)

12. Построить кубический сплайн для функции $y = f(x)$ заданной таблицей значений

x	1	2	5
$f(x)$	0	1	9
$f''(x)$	3	-	5

Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 3$. (Решение)

13. Построить кубический сплайн для функции $y = f(x)$ заданной таблицей значений

x	0	2	3
$f(x)$	1	5	7
$f'(x)$	1	-	0

Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 1$. (Решение)

Решения

1. Наилучшее среднеквадратичное приближение алгебраическим многочленом строится в виде

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n, \tag{1}$$

где коэффициенты являются решениями СЛАУ

$$\begin{cases} c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n = m_0, \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \ldots + c_n s_{n+1} = m_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 s_n + c_1 s_{n+1} + \ldots + c_n s_{2n} = m_n. \end{cases} \tag{2}$$

$$s_i = \int\limits_a^b p(x) x^i dx, \quad m_j = \int\limits_a^b p(x) f(x) x^j dx, \quad i = \overline{0, 2n}, j = \overline{0, n}. \tag{3}$$

В нашем случае формулы принимают вид

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x, \tag{4}$$

$$\begin{cases} c_0 \int\limits_a^b p(x) dx + c_1 \int\limits_a^b p(x) x dx = \int\limits_a^b p(x) f(x) dx, \\ c_0 \int\limits_a^b p(x) x dx + c_1 \int\limits_a^b p(x) x^2 dx = \int\limits_a^b p(x) f(x) x dx. \end{cases} \tag{5}$$

По условию ничего не сказано про весовую функцию $p(x)$, поэтому принимаем $p(x) = 1$. Тогда, подставляя известные значения в (5), получаем систему вида

$$\begin{cases} c_0 \int\limits_1^2 dx + c_1 \int\limits_1^2 x dx = \int\limits_1^2 x^2 dx, \\ c_0 \int\limits_1^2 x dx + c_1 \int\limits_1^2 x^2 dx = \int\limits_1^2 x^3 dx. \end{cases}$$

Вычислим все необходимые интегралы

$$\int\limits_1^2 dx = 1, \quad \int\limits_1^2 x dx = \frac{3}{2}, \quad \int\limits_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}, \quad \int\limits_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}.$$

Подставим найденные значения в систему:

$$\begin{cases} c_0 + \dfrac{3}{2} c_1 = \dfrac{7}{3}, \\ \dfrac{3}{2} c_0 + c_1 \dfrac{7}{3} = \dfrac{15}{4}. \end{cases}$$

Запишем СЛАУ в виде матрицы и применим метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & \frac{15}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Таким образом, $c_0 = 3$, $c_1 = -\dfrac{13}{6}$. Тогда приближающий многочлен первой степени имеет вид

$$\varphi(x) = 3x - \frac{13}{6}.$$

Величину наилучшего приближения оценим по формуле

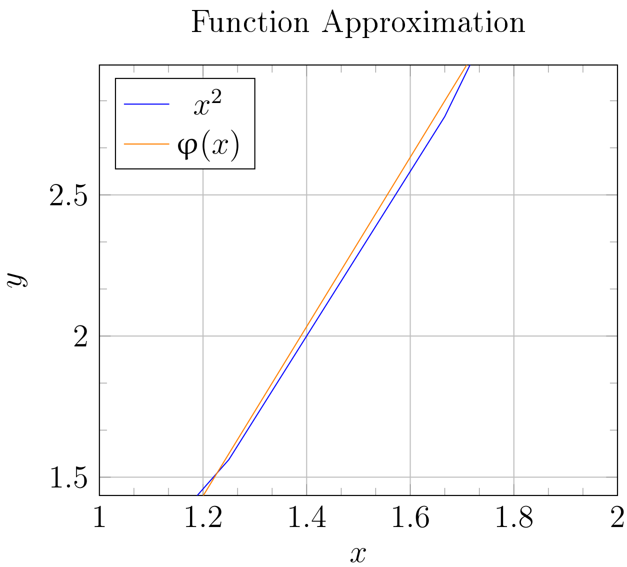
$$\|f(x) - \varphi(x)\| = \left(\int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставим наши функции и получим

$$\left(\int\limits_1^2 \left(x^2 - 3x + \frac{13}{6} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_1^2 x^4 + 9x^2 + \frac{169}{36} - 6x^3 + \frac{13}{3}x^2 - 13x dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 - 6 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 + \frac{40}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - 13 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{169}{36}x\Big|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{180} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.0745.$$

Графически это будет выглядеть следующим образом:



2. Все последующие действия справедливы лишь при предположении, что исходная функция выпуклая (по свойствам степенной функции).

   Для построения наилучшего равномерного приближения многочленом первой степени понадобятся следующие формулы:

   (a) многочлен наилучшего равномерного приближения в общем виде

   $$P_1(x) = c_0 + c_1 x \tag{6}$$

   (b) необходимое и достаточное условие существования и единственности многочлена

   $$f(x_i) - P_n(x_i) = (-1)^i \alpha\Delta, \quad \Delta = \|f(x) - P_n(x)\|, \quad i = 0, \ldots, n+1, \tag{7}$$

   где $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$, а x_i — точки чебышевского альтернанса.

   Также необходимо определить точки чебышевского альтернанса x_0, x_1, x_2 (точки, в которых задана исходная функция, но которые находятся дальше всего от приближающего многочлена). Две из них (первую и последнюю) мы можем задать на концах:

   $$\begin{cases} x_0 = -1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

   Для оставшейся точки мы сформулируем условие следующим образом. Вследствие выпуклости функция $f(x) - P_n(x)$ может иметь только одну внутреннюю точку экстремума. Эту точку и возьмем в качестве оставшейся точки альтернанса. То есть, если функция $f(x)$ дифференцируема, то

   $$f'(x_1) - P_1'(x_1) = 0. \tag{8}$$

   Таким образом, имея 3 условия из (2) и условие (3), составляем систему:

   $$\begin{cases} f(x_0) - P_1(x_0) = \alpha\Delta, \\ f(x_1) - P_1(x_1) = -\alpha\Delta, \\ f(x_2) - P_1(x_2) = \alpha\Delta, \\ f'(x_1) - P_1'(x_1) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

   Подставим известные нам значения:

   $$\begin{cases} f(-1) - (c_0 + c_1 \cdot (-1)) = \alpha\Delta, \\ f(x_1) - (c_0 + c_1 \cdot x_1) = -\alpha\Delta, \\ f(1) - (c_0 + c_1 \cdot 1) = \alpha\Delta, \\ f'(x_1) - c_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - (c_0 - c_1) = \alpha\Delta, \\ 2^{x_1} - (c_0 + c_1 \cdot x_1) = -\alpha\Delta, \\ 2 - (c_0 + c_1) = \alpha\Delta, \\ 2^{x_1} \ln 2 - c_1 = 0. \end{cases}$$

   Вычислим c_1, отняв от третьего уравнения первое:

   $$\frac{3}{2} - 2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{3}{4}.$$

   Вычислим x_1, подставив в последнее уравнение значение c_1:

   $$x_1 = \log_2 \frac{3}{4 \ln 2} \approx 0.11373.$$

Сложим второе и третье уравнение, чтобы найти c_0:

$$\frac{3}{4\ln 2} + 2 - 2c_0 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4\ln 2} = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{3}{8\ln 2} + \frac{5}{8} - \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{4\ln 2} \approx 1.12336.$$

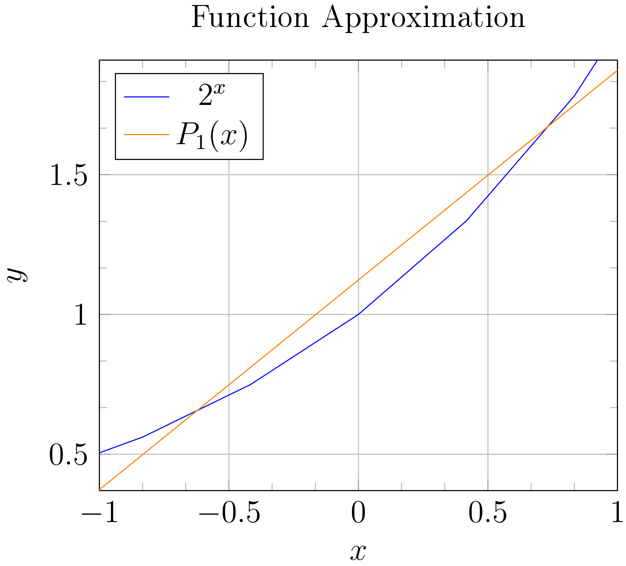
Остается найти $\alpha\Delta$. Мы можем найти это значение как из 1, так и из 3 уравнения. К примеру, возьмем третье уравнение:

$$\alpha\Delta = 2 - \frac{3}{8\ln 2} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{4\ln 2} \approx 0.87664.$$

Соответственно $\alpha = 1$, $\Delta \approx 0.87664$ и многочлен наилучшего равномерного приближения имеет вид

$$P_1(x) = 0.75x + 1.12336.$$

Графически это будет выглядеть следующим образом:



3. Для построения интерполяционного многочлена нам понадобятся следующие формулы:

   (a) формула Ньютона для интерполяционного многочлена

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) + \dots$$
$$\dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \cdot f(x_0, \dots, x_n). \quad (10)$$

   (b) аппарат разделенных разностей:

   - **разделенная разность нулевого порядка для функции** $f(x)$ совпадают со значениями функции $f(x_i)$ в узлах интерполирования;
   - **разделенная разность первого порядка** есть

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}. \quad (11)$$

   - **разделенная разность второго порядка**

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}. \quad (12)$$

   - **разделенная разность** $(k+1)$**-ого порядка**

$$f(x_0, \dots, x_{k+1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{k+1}) - f(x_0, \dots, x_k)}{x_{k+1} - x_0}. \quad (13)$$

   (c) таблица разделенных разностей

0	0	0	$f(x_0, x_0, x_0)$	$f(x_0, x_0, x_0, x_1)$	$f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1)$
0	0	0	$f(x_0, x_0, x_1)$	$f(x_0, x_0, x_1, x_1)$	
0	0	1	$f(x_0, x_1, x_1)$		
1	1	6			
1	6				

   (d) представление остатка интерполирования в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \omega_{n+1}(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in [a, b]. \quad (14)$$

Алгоритм решения задачи следующий: мы строим таблицу разделенных разностей, а затем, используя построенные разделенные разности, строим интерполяционный многочлен. После чего мы оцениваем остаток интерполирования, который и будет являться погрешностью в данном случае.

Составляем таблицу разделенных разностей. Число столбцов таблицы = число узлов + 1. В нашем случае это 4:

x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	
x_2	$f(x_2)$		

Первый столбец заполняем значениями узлов, которые даны по условию. Для второго столбца вычислим значения функции в узлах:

$$f(x_0) = 2^0 = 1, \quad f(x_1) = 2^2 = 4, \quad f(x_2) = 2^3 = 8.$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
0 & 1 & & \\
 & & f(x_0, x_1) & \\
2 & 4 & & f(x_0, x_1, x_2) \\
 & & f(x_1, x_2) & \\
3 & 8 & &
\end{array}$$

По формуле (2) вычисляем значения для третьего столбца:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{4-1}{2-0} = \frac{3}{2}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{3-2} = 4.$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
0 & 1 & & \\
 & & 1.5 & \\
2 & 4 & & f(x_0, x_1, x_2) \\
 & & 4 & \\
3 & 8 & &
\end{array}$$

По формуле (3) вычисляем последнее неизвестное значение:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{4 - 1.5}{3 - 0} = \frac{5}{6}.$$

Окончательно таблица имеет следующий вид, из которого нам понадобятся только выделенные значения:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
0 & 1 & & \\
 & & 1.5 & \\
2 & 4 & & \frac{5}{6} \\
 & & 4 & \\
3 & 8 & &
\end{array}$$

По формуле (1) строим интерполяционный многочлен, который в нашем случае имеет вид

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2).$$

Подставляем все известные значения:

$$P_2(x) = 1 + x \cdot \frac{3}{2} + x(x-2) \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 1.$$

Найдем значение в точке $x = 0.5$:

$$P_2(0.5) = \frac{5}{24} - \frac{1}{12} + 1 = \frac{27}{24}.$$

Оценим остаток интерполирования, используя формулу (5):

$$|r_n(x)| \leqslant \left| \omega_{n+1}(x) \frac{\max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \right|.$$

В нашем случае

$$|r_2(x)| \leqslant \left|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|\frac{\max\limits_{x\in[0,3]}|(2^x)^{(3)}(x)|}{3!}\right|.$$

Так как $(28)^{(n)} = \ln^n 22^x$, то

$$\max_{x\in[0,3]}|2^x \cdot \ln^3 2| \leqslant (2\ln 2)^3.$$

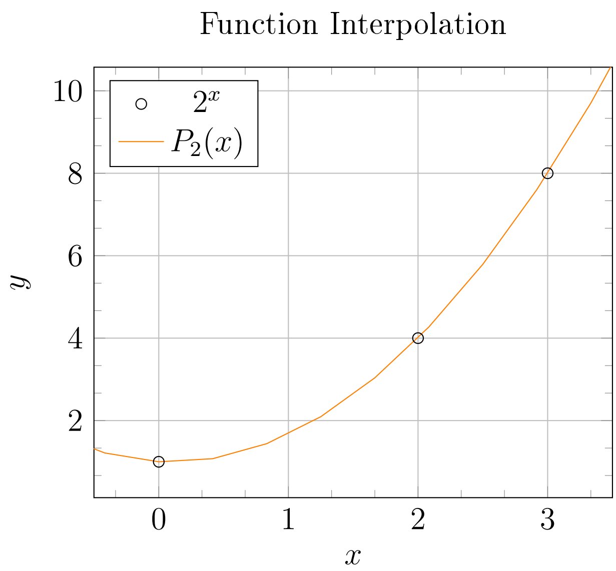
Тогда

$$|r_2(x)| \leqslant \left|x(x-2)(x-3)\frac{(2\ln 2)^3}{6}\right|.$$

Подставим точку, в которой мы проводили интерполирование, $x = 0.5$:

$$|r_2(0.5)| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{(2\ln 2)^3}{6} = \frac{5}{2}\ln^3 2 \approx 0.83256.$$

Графически это можно представить как



4. Для оценки погрешности интерполирования функции нам понадобятся следующие формулы:

   (a) остаток интерполирования при равноотстоящих узлах в начале таблицы

   $$r_k(x) = h^{k+1}\frac{t(t-1)\dots(t-k)}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi),\ \ \xi \in [x_0, x_0+kh],\ \ t\in[0,1]. \tag{15}$$

   (b) остаток интерполирования при равноотстоящих узлах в конце таблицы

   $$r_k(x) = h^{k+1}\frac{t(t+1)\dots(t+k)}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi),\ \ \xi \in [x_n, x_n-kh],\ \ t\in[-1,0]. \tag{16}$$

   Мы построим оценки для остатка интерполирования в начале таблицы и в конце таблицы и сравним полученные результаты.

   Сперва выпишем все данные, которые нам известны:

   - интерполируемая функция $f(x) = \ln(x+2)$;
   - сетка узлов на отрезке $[a, b] = [-1, 1]$;
   - шаг $h = 0.1$;
   - степень интерполяционного полинома $k = 2$ (по условию квадратичная интерполяция).

   Оценим остаток из формулы (1) при $k = 2$:

   $$|r_2(x)| = \left|h^3\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}f^{(3)}(\xi)\right| \leqslant h^3\left|\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\right|\cdot\max_{x\in[a,b]}|f^{(3)}(x)|,\ \ t\in[0,1].$$

   Оценим максимальное значение третьей производной на отрезке. Для этого вычислим третью производную от исходной функции

   $$f'(x) = \frac{1}{x+2},\quad f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2},\quad f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}.$$

   Функция $\dfrac{2}{(x+2)^3}$ убывающая, следовательно, ее наибольшее значение в точке $x = -1$:

   $$\max_{x\in[-1,1]}|f^{(3)}(x)| = |f'''(-1)| = 2.$$

   Тогда, подставляя полученное значение и известное значение h в формулу для оценки остатка, имеем

   $$|r_2(x)| \leqslant \frac{1}{3}\cdot 10^{-3}\left|t(t-1)(t-2)\right|,\ \ t\in[0,1].$$

   Оценим значение выражения $|t(t-1)(t-2)|$. Для этого с помощью производной найдем точку максимума. Но сразу учтем, что $t \in [0, 1]$ и при подстановке в это выражение точек 0 и 1 значение будет равно нулю, поэтому эти значения нас не интересуют. Рассмотрим функцию

   $$f(t) = t(t-1)(t-2) = t^3 - 3t^2 + 2t.$$

   Тогда

   $$f'(t) = 3t^2 - 6t + 2 = 0.$$

Отсюда точки подозрительные на экстремумы

$$t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Но, так как $0 < t < 1$, то точка $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ не подходит. Найдем значения в оставшейся точке

$$f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$|t(t-1)(t-2)| \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Тогда мы можем вычислить оценку остатка интерполирования:

$$|r_2(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot 10^{-3} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \cdot 10^{-3}.$$

Проделаем все то же самое для остатка интерполирования в конце таблицы из формулы (2):

$$|r_2(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \left| t(t+1)(t+2) \right|, \ t \in [-1, 0].$$

То есть, нужно лишь оценить значение множителя с t. Снова точки -1, 0 не рассматриваем. Рассмотрим функцию

$$f(t) = t(t+1)(t+2) = t^3 + 3t^2 + 2t.$$

Тогда

$$f'(t) = 3t^2 + 6t + 2.$$

Отсюда

$$t = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Точка $-1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ не подходит. Вычислим значение в оставшейся точке:

$$f\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{9\sqrt{3}} \cdot 10^{-3}.$$

То есть значение оценки остатка интерполирования будет таким же, что и в предыдущем случае.

5. Пусть функция $f(x)$ задана таблично в n узлах x_i, которые являются равноотстоящими, то есть

$$x_i = x_0 + ih,\ h > 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда интерполяционный многочлен будет иметь степень n.

Интерполяционный многочлен Лагранжа записывается в общем виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k), \quad l_k(x) = \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}. \tag{17}$$

Тогда, поскольку узлы равноотстоящие, имеем

- $x - x_j = x - x_0 - jh$;
- $x_k - x_j = x_0 - kh - x_0 + jh = h(k - j)$.

Отсюда

$$l_k(x) = \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_0 - jh)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} h(k - j)} = \frac{1}{h^n} \cdot \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_0 - jh)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (k - j)}.$$

Введем замену $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Отсюда

$$l_k(x) = l_k(x_0 + th) = \frac{1}{h^n} \cdot \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (th - jh)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (k - j)} = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(t - j)}{(k - j)} =$$

$$= \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-k} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} = (-1)^{n-k} C_n^k \frac{1}{t-k} \cdot \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!}.$$

Подставим это в выражение (1), тогда

$$P_n(x) = (-1)^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{-k} C_n^k \frac{1}{t-k} f(x_k).$$

Недостатком данной формулы является факториальная сложность числителя и знаменателя, что делает вычисления достаточно трудоемкими. Поэтому при равноотстоящих узлах принято использовать интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

6. Для решения данной задачи потребуются следующие формулы:

   (a) пусть функция $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$ и для нее выполняется неравенство
   $$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M, \quad x \in [a,b],$$
   тогда погрешность интерполирования может быть оценена сверху следующим образом
   $$|r_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \tag{18}$$

   (b) значения узлов при оптимальном распределении на отрезке $[a,b]$
   $$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \ k = \overline{0,n}. \tag{19}$$

   Для отыскания степени n многочлена интерполирования, будем решать неравенство
   $$|r_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \leqslant \varepsilon.$$
   Из-за того, что n фигурирует и в качестве факториального значения, и в качестве степени, то решать уравнение придется подбором.

   Пусть $n = 2$, тогда
   $$|r_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!} \cdot \frac{(5-2)^3}{2^5} \leqslant 10^{-5}, \quad |f^{(3)}(x)| \leqslant M, \quad x \in [2,5]$$
   Оценим значение третьей производной от исходной функции:
   $$f'(x) = -2\sin 2x, \quad f''(x) = -4\cos 2x, \quad f'''(x) = 8\cos 2x.$$
   Сделаем грубую оценку производной:
   $$|f'''(x)| = |8\cos 2x| \leqslant 8 = M, \quad x \in [2;5].$$
   Тогда проверим, верное ли равенство:
   $$\frac{8}{6} \cdot \frac{27}{32} \leqslant 10^{-5}.$$
   Очевидно равенство не выполняется.

   Пусть $n = 3$:
   $$|r_3(x)| \leqslant \frac{M}{4!} \cdot \frac{(5-2)^4}{2^7} \leqslant 10^{-5}, \quad |f^{(4)}(x)| \leqslant M, \quad x \in [2,5]$$
   $$|f^{(4)}(x)| = |-16\sin 2x| \leqslant 16 = M, \quad x \in [2;5].$$
   $$\frac{16}{24} \cdot \frac{81}{128} \leqslant 10^{-5}.$$
   Равенство не выполняется.

   Далее избежим оценки производной, считая, что
   $$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 2^{n+1}.$$

Тогда
$$|r_n(x)| \leqslant \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} \leqslant \varepsilon.$$
И так далее подставляем $n = 4, 5, ..., 9$. При $n = 11$ имеем
$$|r_{10}(x)| \leqslant \frac{1}{11!} \cdot \frac{3^{11}}{2^{10}} \approx 4.33 \cdot 10^{-6}.$$

Таким образом, минимальная степень интерполяционного многочлена равна 10.

Укажем при этом распределение узлов по формуле (2):
$$x_k = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \cos\frac{(2k+1)\pi}{22}, \; k = \overline{0, 11}.$$

7. Для решения данной задачи потребуются следующие формулы:

   (a) остаток интерполирования при интерполировании с кратными узлами

$$r_n(x) = \Omega(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \Omega(x) = (x-x_0)^{\alpha_0}\dots(x-x_m)^{\alpha_m},\ \xi \in [a,b]. \tag{20}$$

   (b) представление многочлена Эрмита через разделенные разности

$$\begin{gathered} P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0,x_0) + \dots + (x-x_0)^{\alpha_0-1}f(x_0,\dots,x_0) + \\ + (x-x_0)^{\alpha_0}f(x_0,\dots,x_0;x_1) + (x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)f(x_0,\dots,x_0;x_1,x_1) + \dots + \\ + \dots + (x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)^{\alpha_1-1}f(x_0,\dots,x_0;x_1,\dots,x_1) + \dots + \\ + \dots + (x-x_0)^{\alpha_0}(x-x_1)^{\alpha_1}\dots(x-x_m)^{\alpha-1}f(x_0,\dots x_0;x_1,\dots,x_1;\dots;x_m,\dots,x_m). \end{gathered} \tag{21}$$

   (c) для построения таблицы разделенных разностей, необходимо учитывать соотношение

$$f(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{j+1}) = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \tag{22}$$

   (d) аппарат разделенных разностей:

   - **разделенная разность нулевого порядка для функции** $f(x)$ совпадают со значениями функции $f(x_i)$ в узлах интерполирования;
   - **разделенная разность первого порядка** есть

$$f(x_i,x_j) = \frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}. \tag{23}$$

   - **разделенная разность второго порядка**

$$f(x_i,x_j,x_k) = \frac{f(x_j,x_k)-f(x_i,x_j)}{x_k-x_i}. \tag{24}$$

   - **разделенная разность $(k+1)$-ого порядка**

$$f(x_0,\dots,x_{k+1}) = \frac{f(x_1,\dots,x_{k+1})-f(x_0,\dots,x_k)}{x_{k+1}-x_0}. \tag{25}$$

   (e) таблица разделенных разностей

0	0	0	$f(x_0, x_0, x_0)$	$f(x_0, x_0, x_0, x_1)$	$f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1)$
0	0	0	$f(x_0, x_0, x_1)$	$f(x_0, x_0, x_1, x_1)$	
0	0	1	$f(x_0, x_1, x_1)$		
1	1	6			
1	6				

Алгоритм решения задачи следующий: составляем таблицу разделенных разностей, записываем интерполяционный многочлен, вычисляем значение в нужной точке, оцениваем остаток интерполирования в этой точке.

Для начала рассчитаем входные данные:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = 6.$$

Далее составляем таблицу конечных разностей, которая в нашем случае примет вид

x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_0)$	$f(x_0, x_0, x_0)$	$f(x_0, x_0, x_0, x_1)$	$f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1)$
x_0	$f'(x_0)$	$f(x_0, x_0)$	$f(x_0, x_0, x_1)$	$f(x_0, x_0, x_1, x_1)$	
x_0	$f''(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_1)$		
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_1)$			
x_1	$f'(x_1)$				

Заполним первые два столбца известными нам значениями:

0	0	$f(x_0, x_0)$	$f(x_0, x_0, x_0)$	$f(x_0, x_0, x_0, x_1)$	$f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1)$
0	0	$f(x_0, x_0)$	$f(x_0, x_0, x_1)$	$f(x_0, x_0, x_1, x_1)$	
0	0	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_1)$		
1	1	$f(x_1, x_1)$			
1	6				

По формуле (3)

$$f(x_0, x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!} = 0, \quad f(x_1, x_1) = \frac{f'(x_1)}{1!} = 6.$$

По формуле (4)

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1.$$

0	0	0	$f(x_0, x_0, x_0)$	$f(x_0, x_0, x_0, x_1)$	$f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1)$
0	0	0	$f(x_0, x_0, x_1)$	$f(x_0, x_0, x_1, x_1)$	
0	0	1	$f(x_0, x_1, x_1)$		
1	1	6			
1	6				

По формуле (3)

$$f(x_0, x_0, x_0) = \frac{f'(x_0)}{2!} = 0.$$

По формуле (5)

$$f(x_0, x_0, x_1) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_0, x_0)}{x_1 - x_0} = 1, \quad f(x_0, x_1, x_1) = \frac{f(x_1, x_1) - f(x_0, x_1)}{x_1 - x_0} = 5.$$

Далее аналогично по формуле (6)

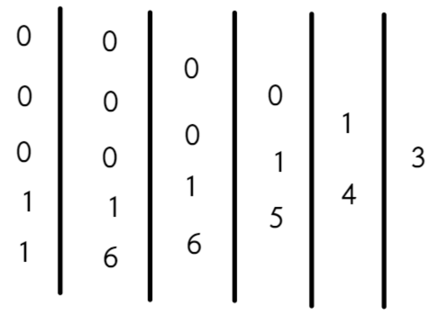
$$f(x_0, x_0, x_0, x_1) = \frac{f(x_0, x_0, x_1) - f(x_0, x_0, x_0)}{x_1 - x_0} = 1,$$

$$f(x_0, x_0, x_1, x_1) = \frac{f(x_0, x_1, x_1) - f(x_0, x_0, x_1)}{x_1 - x_0} = 4.$$

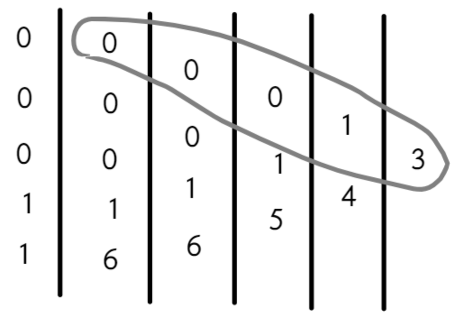
И в итоге

$$f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1) = \frac{f(x_0, x_0, x_1, x_1) - f(x_0, x_0, x_0, x_1)}{x_1 - x_0} = 3.$$

Тогда таблица принимает окончательный вид



Из этой таблицы нам нужны лишь значения



Далее по формуле (2) запишем сначала интерполяционный многочлен в общем виде для нашего случая (5 узлов $\Rightarrow$ 4 степень многочлена)

$$P_4(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_0) + (x - x_0)^2 f(x_0, x_0, x_0) + \\ + (x - x_0)^3 f(x_0, x_0, x_0, x_1) + (x - x_0)^3 (x - x_1) f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1).$$

Подставляем все известные нам значения и получаем

$$P_4(x) = 0 + x \cdot 0 + x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 + x^3(x_1) \cdot 3 = 3x^4 - 2x^3.$$

Можно, подставив известные точки и их значения, убедиться в том, что многочлен был построен правильно.

Вычислим значение в точке $x = 0.5$:

$$P_4(0.5) = \frac{3}{16} - \frac{2}{8} = -\frac{1}{16}.$$

Оценим остаток по формуле (1). Для начала запишем его в общем виде для нашего случая:

$$r_4(x) = (x - x_0)^3 (x - x_1)^2 \cdot \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}, \quad \xi \in [0, 1].$$

Нам неизвестно значение $f^{(5)}(\xi)$. Оценим его сверху:

$$f^{(5)}(x) = (x^6)^{(5)} = 720x \Rightarrow |f^{(5)}(x)| \leqslant 720 \quad x \in [0, 1].$$

Тогда оценка для остатка примет вид

$$|r_4(x)| \leqslant \left| x^3 (x-1)^2 \cdot \frac{720}{120} \right| = 6 \left| x^3 (x-1)^2 \right|.$$

Отсюда погрешность вычисленного значения в точке $x = 0.5$ составляет

$$|r_4(0.5)| \leqslant 6 \left| \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^2} \right| = \frac{3}{16}.$$

8. Многочлены Чебышева задаются формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Чтобы функции являлись решениями дифференциального уравнения, они должны при подстановке в уравнение давать верное равенство.

Вычислим первую и вторую производные от многочленов Чебышева:

$$T_n'(x) = \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$T_n''(x) = \frac{n^2 \cos(n \arccos x) \cdot (-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot n \sin(n \arccos x)}{1-x^2}.$$

Подставим найденные производные в данное по условию дифференциальное уравнение:

$$(1-x^2) \cdot \frac{-n^2 \cos(n \arccos x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot n \sin(n \arccos x)}{1-x^2} - x \cdot \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} + n^2 \cos(n \arccos x) = 0.$$

Равенство выполняется, следовательно, многочлены Чебышева являются решениями данного дифференциального уравнения.

9. Для решения данной задачи потребуются следующие формулы:

   (a) многочлены Чебышева $T_n(x)$, $n \geqslant 0$ определенные на отрезке $[-1, 1]$, задающиеся соотношениями

   $$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots. \tag{26}$$

   (b) вид многочленов Чебышева на отрезке $[a, b]$

   $$\hat{T}_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} T_{n+1}\Big(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\Big),\ x \in [a, b]. \tag{27}$$

Известно также, что многочлены Чебышева являются наименее отклоняющимися от нуля многочленами степени n на отрезке $[-1, 1]$ среди всех многочленов степени n заданных на этом отрезке.

Таким образом, нам необходимо, используя формулы (1) и (2), задать многочлен Чебышева на отрезке $[1, 5]$, после чего привести его к нужному виду (чтобы коэффициент при x^2 был равен 3).

Из соотношений (1) выясним, какой вид имеет многочлен Чебышева 3-ей степени:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^2 - 2x - x = 4x^3 - 3x.$$

Теперь в формулу (2) подставим отрезок $[a, b] = [1, 5]$:

$$T_{n+1}(x) = \frac{4^{n+1}}{2^{2n+1}} \cdot T_{n+1}\left(\frac{2x-6}{4}\right).$$

Подставим в формулу (2) $n = 2$:

$$\hat{T}_3(x) = \frac{4^3}{2^5} \cdot T_3\left(\frac{2x-6}{4}\right) = 2T_3\left(\frac{2x-6}{4}\right).$$

Найдем $T_3\left(\frac{2x-6}{4}\right)$:

$$T_3\left(\frac{2x-6}{4}\right) = 4\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) = 4\left(\frac{x^3}{8} - \frac{9x^2}{8} + \frac{27x}{8} - \frac{27}{8}\right) - \frac{3x}{2} + \frac{9}{2} =$$
$$= \frac{x^3}{2} - \frac{9x^2}{2} + \frac{24x}{2} - \frac{18}{2}.$$

Тогда

$$\hat{T}_3(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18, \quad x \in [1, 5].$$

Мы получили многочлен наименее отклоняющийся от нуля на отрезке $[1, 5]$. Чтобы он удовлетворял указанному виду, домножим его на $-\frac{1}{3}$:

$$P_3(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 6.$$

10. В гильбертовом пространстве система функций $\{\varphi_i\}$ ортогональна, если $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ $\forall i \neq j$.

Возьмем гильбертово пространство $L_2[-1,1]$ с весом $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. В данном случае

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int\limits_{-1}^{1} p(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx.$$

Также, поскольку система функций является системой многочленов Чебышева, то

$$\varphi_k(x) = T_k(x) = \cos(k \arccos x).$$

Найдем скалярное произведение двух производных функций из системы многочленов Чебышева:

$$(T_i(x), T_j(x)) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos(i \arccos x)\cos(j \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{bmatrix} \arccos x = t, & x = \cos t \\ x = -1 \to t = \pi, & x = 1 \to t = 0 \\ dx = -\sin t dt & \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos(it)\cos(jt)}{\sqrt{1-\cos t^2}} \sin t \; dt = \int\limits_{0}^{\pi} \cos(it)\cos(jt)dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} \cos((i+j)t) + \cos((i-j)t)dt =$$

$$= \frac{1}{2(i+j)} \sin((i+j)t)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2(i-j)} \sin((i-j)t)\Big|_0^{\pi} = 0, \quad i \neq j.$$

Таким образом, система многочленов Чебышева при заданных условиях является ортогональной.

11. Для решения данной задачи нам понадобятся следующие формулы (N – количество узлов):

    (a) расстояние между i-ым и $(i-1)$-ым узлами

    $$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = \overline{1, N} \tag{28}$$

    (b) формула кубического сплайна

    $$S_3(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \\ + \left(f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{(x_i - x)}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, N} \tag{29}$$

    (c) формулы для коэффициентов кубического сплайна

    $$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, N-1} \tag{30}$$

    (d) естественные граничные условия для коэффициентов (так как не заданы значения производных)

    $$M_0 = 0, \quad M_N = 0. \tag{31}$$

Сначала по формуле (1) найдем расстояния между узлами:

$$\begin{aligned} h_1 &= x_1 - x_0 = 1,\\ h_2 &= x_2 - x_1 = 1,\\ h_3 &= x_3 - x_2 = 2. \end{aligned}$$

Теперь составим по формулам (3) и (4) СЛАУ для коэффициентов кубического сплайна:

$$\begin{cases} M_0 = 0,\\ \dfrac{h_1}{6}M_0 + \dfrac{h_1 + h_2}{3}M_1 + \dfrac{h_2}{6}M_2 = \dfrac{f_2 - f_1}{h_2} - \dfrac{f_1 - f_0}{h_1},\\ \dfrac{h_2}{6}M_1 + \dfrac{h_2 + h_3}{3}M_2 + \dfrac{h_3}{6}M_3 = \dfrac{f_3 - f_2}{h_3} - \dfrac{f_2 - f_1}{h_2},\\ M_3 = 0. \end{cases}$$

Подставим в эту систему значения (h_i нам известны, $M_1 = M_3 = 0$):

$$\begin{cases} M_0 = 0,\\ \dfrac{1+1}{3}M_1 + \dfrac{2}{6}M_2 = \dfrac{5-3}{1} - \dfrac{3-2}{1},\\ \\ \dfrac{1}{6}M_1 + \dfrac{1+2}{3}M_2 = \dfrac{10-5}{2} - \dfrac{5-3}{1},\\ M_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_0 = 0,\\ \dfrac{2}{3}M_1 + \dfrac{1}{3}M_2 = 1,\\ \\ \dfrac{1}{6}M_1 + M_2 = \dfrac{1}{2},\\ M_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем методом Гаусса коэффициенты M_1, M_2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 1\\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2}\\ 0 & \frac{23}{4} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & \frac{6}{23} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{33}{23}\\ 0 & 1 & \frac{6}{23} \end{array}\right)$$

То есть

$$M_0 = 0, \quad M_1 = \frac{33}{23}, \quad M_2 = \frac{6}{23}, \quad M_3 = 0.$$

У нас есть все необходимые значения для того, чтобы построить кубический сплайн, кроме x_i, x_{i-1}. По условию необходимо вычислить значение в точке $x = 3$, она находится между узлами $x_2 = 2$ и $x_3 = 4$. Тогда кубический сплайн по формуле (2) мы будем строить на узлах x_1, x_2.

В нашем случае формула (2) примет вид

$$S_3(x) = M_2 \frac{(x_3 - x)^3}{6h_3} + M_3 \frac{(x - x_2)^3}{6h_3} + \left(f_3 - M_3 \frac{h_3^2}{6}\right) \frac{x - x_2}{h_3} + \\ + \left(f_2 - M_2 \frac{h_3^2}{6}\right) \frac{(x_3 - x)}{h_3}, \quad x \in [x_2, x_3].$$

Подставляем все известные нам значения:

$$S_3(x) = \frac{6}{23} \cdot \frac{(4 - x)^3}{12} + 10 \cdot \frac{x - 2}{2} + \left(5 - \frac{6}{23} \cdot \frac{4}{6}\right) \frac{(4 - x)}{2}, \quad x \in [2, 4].$$

Сделаем некоторые преобразования для упрощения формулы

$$S_3(x) = \frac{(4 - x)^3}{46} + \frac{119x}{46} - \frac{8}{23}, \quad x \in [2, 4].$$

Найдем значение в точке $x = 3$:

$$S_3(3) = \frac{1}{46} + \frac{357}{46} - \frac{8}{23} = \frac{171}{23}.$$

12. Для решения данной задачи нам понадобятся следующие формулы (N – количество узлов):

   (a) расстояние между i-ым и $(i-1)$-ым узлами

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = \overline{1, N} \tag{32}$$

   (b) формула кубического сплайна

$$S_3(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \\ + \left(f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{(x_i - x)}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, N} \tag{33}$$

   (c) формулы для коэффициентов кубического сплайна

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, N-1} \tag{34}$$

   (d) граничные условия для коэффициентов

$$M_0 = f''(a), \quad M_N = f''(b). \tag{35}$$

Сначала по формуле (1) найдем расстояния между узлами:

$$h_1 = x_1 - x_0 = 1$$
$$h_2 = x_2 - x_1 = 3.$$

Теперь составим по формулам (3) и (4) СЛАУ для коэффициентов кубического сплайна:

$$\begin{cases} M_0 = f''(a), \\ \frac{h_1}{6}M_0 + \frac{h_1 + h_2}{3}M_1 + \frac{h_2}{6}M_2 = \frac{f_2 - f_1}{h_2} - \frac{f_1 - f_0}{h_1}, \\ M_2 = f''(b). \end{cases}$$

Подставим в эту систему значения (h_i нам известны, f_i и $f''(a)$, $f''(b)$ берем из заданной таблицы):

$$\begin{cases} M_0 = 3, \\ \frac{1}{6}M_0 + \frac{1+3}{3}M_1 + \frac{3}{6}M_2 = \frac{9-1}{3} - \frac{1-0}{1}, \\ M_2 = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_0 = 3, \\ \frac{1}{6}M_0 + \frac{4}{3}M_1 + \frac{1}{2}M_2 = \frac{5}{3}, \\ M_2 = 5. \end{cases}$$

Найдем решение методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

То есть

$$M_0 = 3, \quad M_1 = -1, \quad M_2 = 5.$$

У нас есть все необходимые значения для того, чтобы построить кубический сплайн, кроме x_i, x_{i-1}. По условию необходимо вычислить значение в точке $x = 3$, она находится между узлами $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$. Тогда кубический сплайн по формуле (2) мы будем строить на узлах x_1, x_2.

В нашем случае формула (2) примет вид

$$S_3(x) = M_1\frac{(x_2-x)^3}{6h_2} + M_2\frac{(x-x_1)^3}{6h_2} + \left(f_2 - M_2\frac{h_2^2}{6}\right)\frac{x-x_1}{h_2} + \\ + \left(f_1 - M_1\frac{h_2^2}{6}\right)\frac{(x_2-x)}{h_2}, \quad x \in [x_1, x_2].$$

Подставляем все известные нам значения:

$$S_3(x) = -\frac{(5-x)^3}{18} + 5\cdot\frac{(x-2)^3}{18} + \left(9 - 5\cdot\frac{9}{6}\right)\frac{x-2}{3} + \left(1 + \frac{9}{6}\right)\frac{(5-x)}{3}, \quad x \in [2, 5].$$

Сделаем некоторые преобразования для упрощения формулы

$$S_3(x) = \frac{5(x-2)^3 - (5-x)^3}{18} + \frac{x-2}{2} + \frac{5(5-x)}{6}, \quad x \in [2, 5].$$

Найдем значение в точке $x = 3$:

$$S_3(3) = \frac{5-8}{18} + \frac{1}{2} + \frac{5\cdot 2}{6} = 2.$$

13. Для решения данной задачи нам понадобятся следующие формулы (N – количество узлов):

   (a) расстояние между i-ым и $(i-1)$-ым узлами

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = \overline{1, N} \tag{36}$$

   (b) формула кубического сплайна

$$S_3(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \\ + \left(f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{(x_i - x)}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, N} \tag{37}$$

   (c) формулы для коэффициентов кубического сплайна

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, N-1} \tag{38}$$

   (d) граничные условия для коэффициентов

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{f_1 - f_0}{h_1} - f'(a)\right), \\ M_{N-1} + 2M_N = \dfrac{6}{h_N}\left(f'(b) - \dfrac{f_N - f_{N-1}}{h_N}\right). \end{cases} \tag{39}$$

Сначала по формуле (1) найдем расстояния между узлами:

$$h_1 = x_1 - x_0 = 2$$
$$h_2 = x_2 - x_1 = 1.$$

Теперь составим по формулам (3) и (4) СЛАУ для коэффициентов кубического сплайна:

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{f_1 - f_0}{h_1} - f'(a)\right), \\ \dfrac{h_1}{6}M_0 + \dfrac{h_1 + h_2}{3}M_1 + \dfrac{h_2}{6}M_2 = \dfrac{f_2 - f_1}{h_2} - \dfrac{f_1 - f_0}{h_1}, \\ M_1 + 2M_2 = \dfrac{6}{h_2}\left(f'(b) - \dfrac{f_2 - f_1}{h_2}\right). \end{cases}$$

Подставим в эту систему значения (h_i нам известны, f_i и $f'(a)$, $f'(b)$ берем из заданной таблицы):

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{2}\left(\dfrac{5 - 1}{2} - 1\right), \\ \dfrac{2}{6}M_0 + \dfrac{2 + 1}{3}M_1 + \dfrac{1}{6}M_2 = \dfrac{7 - 5}{1} - \dfrac{5 - 1}{2}, \\ M_1 + 2M_2 = \dfrac{6}{1}\left(0 - \dfrac{7 - 5}{1}\right). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2M_0 + M_1 = 3, \\ \dfrac{1}{3}M_0 + M_1 + \dfrac{1}{6}M_2 = 0, \\ M_1 + 2M_2 = -12. \end{cases}$$

Найдем решение методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & -9 & -57 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{3} \end{array}\right)$$

То есть

$$M_0 = \frac{7}{6}, \quad M_1 = \frac{2}{3}, \quad M_2 = -\frac{19}{3}.$$

У нас есть все необходимые значения для того, чтобы построить кубический сплайн, кроме x_i, x_{i-1}. По условию необходимо вычислить значение в точке $x = 1$, она находится между узлами $x_0 = 0$ и $x_1 = 2$. Тогда кубический сплайн по формуле (2) мы будем строить на узлах x_0, x_1.

В нашем случае формула (2) примет вид

$$S_3(x) = M_0 \frac{(x_1 - x)^3}{6h_1} + M_1 \frac{(x - x_0)^3}{6h_1} + \left(f_1 - M_1 \frac{h_1^2}{6}\right) \frac{x - x_0}{h_1} + \\ + \left(f_0 - M_0 \frac{h_1^2}{6}\right) \frac{(x_1 - x)}{h_1}, \quad x \in [x_0, x_1].$$

Подставляем все известные нам значения:

$$S_3(x) = \frac{7}{6} \frac{(2-x)^3}{12} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{12} + \left(5 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6}\right) \frac{x}{2} + \left(1 - \frac{7}{6} \cdot \frac{4}{6}\right) \frac{(2-x)}{2}, \quad x \in [0, 2].$$

Сделаем некоторые преобразования для упрощения формулы

$$S_3(x) = \frac{7(2-x)^3}{72} + \frac{x^3}{18} + \frac{22x}{9} + \frac{(2-x)}{9}, \quad x \in [0, 2].$$

Найдем значение в точке $x = 1$:

$$S_3(1) = \frac{7}{72} + \frac{1}{18} + \frac{22}{9} + \frac{1}{9} = \frac{195}{72}.$$