СтЛВУ. Специальные СтЛВУ. Сведение к уравнениям высших порядков. Операторный метод интегрирования.

Мы переходим к рассмотрению нового раздела "Стационарные линейные векторные уравнения или "Системы стационарных линейных уравнений". И сразу же начнем с пары базовых определений.

• ***Системой ДУ*** *называется совокупность выражений вида*

$$F_i(t, x_1, Dx_1, \ldots, D^{m_1}x_1, \ldots, x_k, D^k x, \ldots, D^{m_k}x_k) = 0,$$
$$i = 1, \ldots, s, \quad t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R},$$

где F_i — некоторая функция от своих переменных.

Вынесем производные высших порядков и получим следующее.

• *Говорят, что система ДУ* ***имеет нормальную форму****, если она состоит из уравнений вида*

$$D^{m_i}x_i(t) = f_i(t, x_1, Dx_1, \ldots, D^{m_1-1}x_1, \ldots, x_k(t), Dx_k, \ldots, D^{m_k-1}x_k), \quad i = 1, \ldots, k.$$

• *Если функции f_i являются линейными функциями от неизвестных функций $x_i(t)$ и их производных, то система называется* ***линейной****.*

Однако удобнее рассматривать системы в более наглядном виде:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Dx_n = a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t); \end{cases} \qquad t \in \mathbb{I}. \tag{1}$$

• ***Решением*** *системы (1) называется совокупность непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{I}$ функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, обращающих систему (1) в верное равенство.*

• *Если коэффициенты a_{ij} систем являются постоянными, то системы называются* ***стационарными линейными****.*

• ***Задачей Коши*** *для системы (1) называется задача отыскания решения системы (1), удовлетворяющего условиям*

$$x_1|_{t=t_0} = \xi_0, x_2|_{t=t_0} = \xi_1, \ldots, x_n|_{t=t_0} = \xi_n, \quad t_0 \in \mathbb{I}.$$

Обозначив $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $DX(t) = \begin{pmatrix} Dx_1(t) \\ \vdots \\ Dx_n(t) \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, систему (1) можно записать в матричном виде

$$DX = AX + f(t). \tag{2}$$

А начальные условия задачи Коши в виде $X|_{t=t_0} = \xi$, где $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$.

• *Уравнение (2) называется* ***линейным стационарным векторным уравнением****.*

В дальнейшем будем рассматривать уравнения в виде (2).

Специальные СтЛВУ.

Теперь, когда мы ввели все необходимые нам определения и обозначения, мы можем перейти к рассмотрению первого типа задач. Характеризуются они специальным видом матрицы A. Матрица A в таких уравнениях обязательно имеет или диагональный вид, или треугольный вид. Решаются такие уравнения путем последовательного решения уравнений первого порядка относительно одной неизвестной.

Пример 1. Найти общее решение уравнения вида $DX = AX + f(t)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(t) \equiv 0.$$

Решение. Столбец неоднородности в нашем случае равен нулю, следовательно, уравнение имеет вид $DX = AX$. Перепишем в виде (1):

$$\begin{cases} Dx_1 = 2x_1, \\ Dx_2 = x_1 + x_2, \\ Dx_3 = x_1 - x_2 + 3x_3; \end{cases}$$

В первой строке системы СтЛОУ относительно одной неизвестной. Следовательно, мы можем найти общее решение для этого уравнения. Оно имеет вид

$$x_1(t) = C_1e^{2t}.$$

Теперь подставим полученную функцию в во вторую строку системы и получим

$$Dx_2 = C_1e^{2t} + x_2 \Longleftrightarrow Dx_2 - x_2 = C_1e^{2t}.$$

Получили СтЛНУ-1. Найдем его общее решение методом Лагранжа:
$x_{2\text{оо}} = C_2e^t$, $x_{2\text{чн}} = u_2e^t$. Тогда $u_2'e^t = C_1e^{2t} \Rightarrow u_2 = C_1e^t$. Получаем, что $x_{2\text{чн}} = C_1e^{2t}$,

$$x_2(t) = C_2e^t + C_1e^{2t}.$$

Полученные функции x_1 и x_2 подставим в последнее равенство системы и получим

$$Dx_3 = C_1e^{2t} - C_2e^t - C_1e^{2t} + 3x_3 \Longleftrightarrow Dx_3 - 3x_3 = -C_2e^t.$$

Получили СтЛНУ-1. Найдем его общее решние методом Эйлера: $x_{3\text{оо}} = C_3e^{3t}$, $x_{3\text{чн}} = Ae^t$, $Dx_3 = Ae^t$. Тогда $-2Ae^t = -C_2e^t$, отсюда $A = \dfrac{C_2}{2} \Rightarrow x_{3\text{чн}} = \dfrac{C_2}{2}e^t$. Получаем

$$x_3(t) = C_3e^{3t} + \frac{C_2}{2}e^t.$$

Таким образом, общее решение СтЛВУ имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^t + C_1e^{2t} \\ C_3e^{3t} + \frac{C_2}{2}e^t \end{pmatrix} = (C_1e^{2t}, C_2e^t + C_1e^{2t}, C_3e^{3t} + \frac{C_2}{2}e^t)^T.$$

Ответ: $X = (C_1e^{2t}, C_2e^t + C_1e^{2t}, C_3e^{3t} + \frac{C_2}{2}e^t)^T$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения вида $DX = AX + f(t)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -32 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} -4t - 1 \\ -t^2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Представим векторное уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} Dx_1 = 2x_1 - 32x_2 - 4t - 1, \\ Dx_2 = 4x_2 - t^2; \end{cases}$$

В нижней строке системы располагается СтЛНУ-1. Найдем его общее решение методом Эйлера: $x_{2\text{оо}} = C_1e^{4t}$, $x_{2\text{чн}} = At^2 + Bt + C$, $Dx_2 = 2At + B$. Подставим и получим

$$2At + B - 4At^2 - 4Bt - 4C = -t^2.$$

Отсюда $A = \dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{1}{8}$, $C = \dfrac{1}{32}$. Следовательно,

$$x_2 = C_1e^{4t} + \frac{t^2}{4} + \frac{t}{8} + \frac{1}{32}.$$

Подставим x_2 в верхнее уравнение системы и получим

$$Dx_1 - 2x_1 = C_1e^{4t} + 8t^2.$$

Решим уравнение также методом Эйлера:

$$x_{1\text{оо}} = C_2e^{2t},\ x_{1\text{чн}} = A_1e^{4t} + A_2t^2 + B_2t + C_2,\ Dx_1 = 4A_1e^{4t} + 2A_2t + B_2.$$

$$4A_1e^{4t} + 2A_2t + B_2 - 2A_1e^{4t} - 2A_2t^2 - 2B_2t - 2C_2 = C_1e^{4t} + 8t^2.$$

Таким образом, $A_1 = \dfrac{C_1}{2}$, $A_2 = -4$, $B_2 = -4$, $C_2 = -2$. Тогда

$$x_1 = C_2e^{2t} + \frac{C_1}{2}e^{4t} - 4t^2 - 4t - 2.$$

Тогда общее решение системы уравнений имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} C_2e^{2t} + \dfrac{C_1}{2}e^{4t} - 4t^2 - 4t - 2 \\ C_1e^{4t} + \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t}{8} + \dfrac{1}{32} \end{pmatrix} = (C_2e^{2t} + \frac{C_1}{2}e^{4t} - 4t^2 - 4t - 2, C_1e^{4t} + \frac{t^2}{4} + \frac{t}{8} + \frac{1}{32})^T.$$

Ответ: $X = (C_2e^{2t} + \dfrac{C_1}{2}e^{4t} - 4t^2 - 4t - 2, C_1e^{4t} + \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t}{8} + \dfrac{1}{32})^T$.

Теорема. *Задача Коши для действительного стационарного уравнения*

$$DX = AX + f(t), \quad X|_{t=t_0} = \xi \tag{3.1.4}$$

с непрерывной на $\mathbb{I}$ *векторной функцией* $f(t)$ *имеет единственное решение* $\forall t_0 \in \mathbb{I}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}_{n,1}$.

Пример 3. Решить задачу Коши для уравнения вида $DX = AX + f(t)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(t) \equiv 0, \quad t_0 = 2, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решение задачи Коши для СтЛВУ аналогично решению задачи Коши для СтЛУ. Для начала найдем общее решение уравнения:

$$\begin{cases} Dx_1 = 2x_1, \\ Dx_2 = 8x_2, \\ Dx_3 = 3x_3; \end{cases}$$

Получили систему из трех СтЛОУ-1. Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{8t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix};$$

Остается лишь подставить значения столбца X при $t = t_0 = 2$ и найти значения постоянных C_i

$$X|_{t=2} = \begin{pmatrix} C_1 e^{4} \\ C_2 e^{16} \\ C_3 e^{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 e^4 = 1, \\ C_2 e^{16} = 0, \\ C_3 e^6 = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = e^{-4}, \\ C_2 = 0, \\ C_3 = 2e^{-6}; \end{cases}$$

Тогда получаем решение задачи Коши

$$X = \begin{pmatrix} e^{2t-4} \\ 0 \\ 2e^{3t-6} \end{pmatrix} = (e^{2t-4}, 0, 2e^{3t-6})^T.$$

Ответ: $(e^{2t-4}, 0, 2e^{3t-6})^T$.

Замечание: *Далее подробное описание нахождения частного решения линейного уравнения относительно одной переменной будет опускаться. Предполагается, что у читателя уже достаточно навыков, для самостоятельного вычисления.*

Сведение СтЛВУ к уравнениям высших порядков.

Перейдем к рассмотрению следующего метода. Поскольку векторное стационарное уравнение можно записать в виде системы линейны уравнений, то и найти решение системы можно достаточно тривиальным способом — выражением и подстановкой переменных. Таким образом, уравнения с несколькими неизвестными в системе можно привести к уравнениям высших порядком относительно одной неизвестной функции.

Алгоритм нахождения решения незамысловатый:

- дифференцируем первое уравнение по x_1;
- подставляем в него дифференциал из другого уравнения;
- из исходного первого уравнения выражаем какую-либо переменную $x_2, \ldots, x_n$ и подставляем в получившееся;
- если не получили СтЛУ относительно одной неизвестной, то повторяем действия;
- если получили СтЛУ, находим функцию x_1, подставляем ее в одно из остальных $n-1$ уравнений;
- повторяем действия, пока не найдем все x_i переменные.

Необязательно начинать именно с первой строки как в алгоритме. Можно так же начать алгоритм с любой другой строки.

Пример 4. Путем сведения к уравнениям высших порядков разрешить систему:

$$\begin{cases} Dx_1 = -2x_1 + x_3, \\ Dx_2 = 2x_2, \\ Dx_3 = -x_1. \end{cases}$$

Решение. Сначала рассмотрим всё уравнение и постараемся выделить части, которые мы сразу можем решить. В нашем случае это вторая строчка $Dx_2 = 2x_2$. Данное уравнение зависит лишь от одной переменной, и мы сразу можем сказать, что решением будет функция

$$x_2 = C_1 e^{2t}.$$

Тогда можем выбросить из исходной системы вторую строку и получить

$$\begin{cases} Dx_1 = -2x_1 + x_3, \\ Dx_3 = -x_1. \end{cases}$$

Без преобразований найти решение в таком уравнении мы уже не сможем. Тогда воспользуемся методом сведения к уравнению высшего порядка. Продифференцируем первую строку:

$$\begin{cases} D^2x_1 = -2Dx_1 + Dx_3, \\ Dx_3 = -x_1. \end{cases}$$

Теперь мы можем подставить вторую строку в первую и получить уравнение высшего порядка относительно одной переменной

$$D^2x_1 + 2Dx_1 + x_1 = 0.$$

Найдем решение этого уравнения, оно имеет вид

$$x_1 = C_2 te^{-t} + C_3 e^{-t}.$$

Осталь найти x_3. Для этого вернемся к системе вида

$$\begin{cases} Dx_1 = -2x_1 + x_3, \\ Dx_3 = -x_1, \end{cases}$$

где из первой строки выразим переменную x_3:

$$x_3 = Dx_1 + 2x_1.$$

Функцию x_1 мы знаем. Следовательно, мы можем найти и функцию $Dx_1 = -C_2 te^{-t} + C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t}$. Подставим эти функции и получим

$$x_3 = -C_2 te^{-t} + C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t} + 2C_2 te^{-t} + 2C_3 e^{-t} = C_2 te^{-t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-t}.$$

Все неизвестные функции мы нашли. Тогда мы можем составить общее решение исходной системы уравнений

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_2 te^{-t} + C_3 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} \\ C_2 te^{-t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Вообще говоря, мы могли бы для поиска x_3 использовать и последнюю строку исхондой системы $Dx_3 = -x_1$, однако тогда пришлось бы интегрировать x_1. Но тут кому как удобнее.

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} C_2 te^{-t} + C_3 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} \\ C_2 te^{-t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-t} \end{pmatrix}.$

Пример 5. Путем сведения к уравнениям высших порядков разрешить системы:

$$\begin{cases} Dx_1 = -2x_1 + 2x_2 + e^t, \\ Dx_2 = x_1 - 3x_2 + t. \end{cases}$$

Решение. В данном уравнении присутствует неоднородность. Однако ход решения остается аналогичным. Продифференцируем первое уравнение системы:

$$D^2x_1 = -2Dx_1 + 2Dx_2 + e^t.$$

Подставим Dx_2 из второго уравнения системы и получим

$$D^2x_1 = -2Dx_1 + 2x_1 - 6x_2 + 2t + e^t.$$

Выразим x_2 из первого равенства системы $Dx_1 = -2x_1 + 2x_2 + e^t$:

$$x_2 = \frac{Dx_1 + 2x_1 - e^t}{2}$$

и подставим его в полученное уравнение. Таким образом, получаем СтЛНУ-2, которое имеет вид

$$D^2x_1 = -2Dx_1 + 2x_1 - 3Dx_1 - 6x_1 + 3e^t + 2t + e^t \Longleftrightarrow D^2x_1 + 5Dx_1 + 4x_1 = 4e^t + 2t.$$

С помощью метода Эйлера найдем частное решение уравнения: $x_{1\text{чн}} = A_1e^t + A_2t + B_2 = \frac{2}{5}e^t + \frac{t}{2} - \frac{5}{8}$. Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$x_1 = C_1e^{-4t} + C_2e^{-t} + \frac{2}{5}e^t + \frac{t}{2} - \frac{5}{8}.$$

Теперь найдем x_2. Рассмотрим исходную систему. Для вычисления x_2 перспективнее брать первое уравнение, так как, если вычислять с помощью второго уравнения, придется искать решение еще одного СтЛНУ. В свою очередь, в первом уравнении нам необходимо лишь знать Dx_1, которое мы можем запросто найти:

$$Dx_1 = -4C_1e^{-4t} - C_2e^{-t} + \frac{2}{5}e^t + \frac{1}{2}.$$

Подставим x_1 и Dx_1 в выраженное ранее из первого уравнения x_2 и получим

$$x_2 = -C_1e^{-4t} + C_2e^{-t} + \frac{1}{10}e^t + \frac{t}{2} - \frac{3}{8}.$$

Таким образом, решением векторного уравнения является столбец

$$X = \begin{pmatrix} C_1e^{-4t} + C_2e^{-t} + \frac{2}{5}e^t + \frac{t}{2} - \frac{5}{8} \\ -C_1e^{-4t} + C_2e^{-t} + \frac{1}{10}e^t + \frac{t}{2} - \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(C_1e^{-4t} + C_2e^{-t} + \frac{2}{5}e^t + \frac{t}{2} - \frac{5}{8},\ -C_1e^{-4t} + C_2e^{-t} + \frac{1}{10}e^t + \frac{t}{2} - \frac{3}{8})^T$.

Операторный метод интегрирования.

Операторный метод напоминает напоминает метод Гаусса для решения линейный система алгебраических уравнений и по сути своей является его модификацией. Основан он на свойстве оператора дифференцирования $D^n D^k = D^{n+k}$.
Для интегрирования операторным методом необходимо

- представить систему в операторном виде (для наглядности, но не обязательно);
- записать матрицу, элементами которой являются операторы D при соответствующих неизвестных;
- элементарными преобразованиями привести матрицу к треугольному виду;
- перейти обратно к системе уравнений и, начиная со строки, где все элементы нулевые кроме последнего или первого, аналогично первому методу искать решения $x_1, \dots, x_n$.

Таким образом, введем определение

• ***Элементарными преобразованиями*** *матриц, составленных из оператора дифференцирования, являются*

1. *домножение строки на постоянный ненулевой множитель;*
2. *прибавление к одной строки другой, домноженной на ненулевой постоянный множитель;*
3. *перестановка двух строк.*

Для столбцов преобразования неверны. Если столбец неоднородности СтЛВУ ненулевой, то записывается **расширенная матрица**, элементами которой являются операторы дифференцированиая, а последний столбец — столбец неоднородности исходного СтЛВУ.

Стоит подметить, что приведение операторной матрицы к треугольному виду напоминает преобразование полиномиальной матрицы. Поэтому для того, чтобы потренироваться в преобразованиях, можно обратиться к теме полиномиальных матриц в курсе линейной алгебры.

Пример 6. Используя операторный метод, проинтегрировать систему:

$$\begin{cases} 2D^2x_2 + Dx_1 + 3Dx_2 + 3x_1 = 0, \\ Dx_2 + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для начала запишем систему в операторном виде (вынесем переменные x_i за скобки):

$$\begin{cases} (D + 3D^0)x_1 + (2D^2 + 3D)x_2 = 0, \\ D^0x_1 + (D + D^0)x_2 = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу системы, состоящую из операторов дифференцирования (первый столбец — операторы при x_1, второй — при x_2 и так далее)

$$\begin{pmatrix} D + 3D^0 & 2D^2 + 3D \\ D^0 & D + D^0 \end{pmatrix}$$

Данную матрицу требуется привести к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} D+3D^0 & 2D^2+3D \\ D^0 & D+D^0 \end{pmatrix} \sim \text{[меняем 1-ую и 2-ую строки местами]}$$
$$\sim \begin{pmatrix} D^0 & D+D^0 \\ D+3D^0 & 2D^2+3D \end{pmatrix} \sim \text{[1-ую строку домножим на } -D-3D^0 \text{ и прибавим ко второй]}$$
$$\sim \begin{pmatrix} D^0 & D+D^0 \\ 0 & D^2-4D \end{pmatrix}.$$

Перепишем обратно матрицу в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 + Dx_2 + x_2 = 0, \\ D^2x_2 - 4Dx_2 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем x_2:

$$x_2 = C_1 + C_2e^{4t}.$$

Тогда $Dx_2 = 4C_2e^{4t}$. Подставим в первое уравнение и получим

$$x_1 = -4C_2e^{4t} - C_1 - C_2e^{4t} = -C_1 - 5C_2e^{4t}.$$

И решением исходной системы является столбец

$$X = \begin{pmatrix} -C_1 - 5C_2e^{4t} \\ C_1 + C_2e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(-C_1 - 5C_2e^{4t},\ C_1 + C_2e^{4t})^T$.

Пример 7. Используя операторный метод, проинтегрировать систему:

$$\begin{cases} D^2x_1 + 2x_2 = 2e^t, \\ 4D^2x_2 + 2x_1 = t. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы (учитывая неоднородность) и приведем ее к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} D^2 & 2D^0 & 2e^{2t} \\ 2D^0 & 4D^2 & t \end{array}\right) \sim \text{[меняем 1-ую и 2-ую строки местами]} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2D^0 & 4D^2 & t \\ D^2 & 2D^0 & 2e^{2t} \end{array}\right) \sim$$
$$\left[\text{домножим первую строку на } -\frac{D^2}{2} \text{ и прибавим ко второй}\right]$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2D^0 & 4D^2 & t \\ 0 & -2D^4+2D^0 & 2e^{2t} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2D^0 & 4D^2 & t \\ 0 & D^4-D^0 & e^{2t} \end{array}\right).$$

Стоит подметить, что когда мы домножаем строку на оператор дифференцирования однородность также домножается. Однако, в нашем случае, $-\dfrac{D^2t}{2} = 0$.
Вернемся к системе:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4D^2x_2 = t, \\ D^4x_2 - x_2 = e^t \end{cases}$$

Отсюда найдем методом Эйлера x_2:

$$x_2 = C_1e^{-t} + C_2e^t + C_3cos(t) + C_4sin(t) + \frac{e^{2t}}{15}.$$

Тогда из первого уравнения получим $x_1 = \frac{t}{2} - 2D^2x_2$. Найдем D^2x_2:

$$Dx_2 = -C_1e^{-t} + C_2e^t - C_3sin(t) + C_4cos(t) + \frac{2e^{2t}}{15}.$$

$$D^2x_2 = C_1e^{-t} + C_2e^t - C_3cos(t) - C_4sin(t) + \frac{4e^{2t}}{15}.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{t}{2} - 2C_1e^{-t} - 2C_2e^t + 2C_3cos(t) + 2C_4sin(t) - \frac{8e^{2t}}{15}.$$

И решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} - 2C_1e^{-t} - 2C_2e^t + 2C_3cos(t) + 2C_4sin(t) - \frac{8e^{2t}}{15} \\ C_1e^{-t} + C_2e^t + C_3cos(t) + C_4sin(t) + \frac{e^{2t}}{15} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(\frac{t}{2} - 2C_1e^{-t} - 2C_2e^t + 2C_3cos(t) + 2C_4sin(t) - \frac{8e^{2t}}{15},\ C_1e^{-t} + C_2e^t + C_3cos(t) + C_4sin(t) + \frac{e^{2t}}{15})^T$