Метод Эйлера построения ФСР СтЛВУ.

Перенесем СтЛОУ некоторые необходимые нам определения.
Рассмотрим стационарное линейное векторное уравнение

$$DX = AX, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Множество решений системы (1) является **векторным пространством**.

• *Пусть* $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, ..., $X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ *— некоторые векторные функции.*
Определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

*называется **определителем Вронского** системы* $X_1, \dots, X_n$.

Если векторные функции $X_1, \dots, X_n$ линейно зависимы, то их $W(t) = 0\ \forall t$.

Если система решений уравнения (1) линейно независимая, то их $W(t) \neq 0\ \forall t$.

Рассмотрим n задач Коши $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = E_i$, где E_i — i-ый столбец единичной матрицы $E = [E_1, \dots, E_n]$. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши все эти задачи Коши имеют единственные решения $X_1(t), \dots, X_n(t)$, которые являются линейно независимыми и образуют базис пространства решений (ФСР) системы (1). Таким образом, общее решение имеет вид

$$X_{\text{OP}}(t) = C_1 X_1 + \dots + C_n X_n, \quad \forall C_i \in \mathbb{R}.$$

• *Матрица* $\Phi(t) = [X_1(t), \dots, X_n(t)]$ *называется **фундаментальной матрицей (ФМ)** системы* (1).

Тогда общее решение уравнения (1) в матричном виде может быть записано следующим образом:

$$X_{\text{OP}}(t) = \Phi(t) \cdot C, \quad \forall C \in \mathbb{R}_{n,1}.$$

Теперь рассмотрим метод Эйлера, который непосредственно позволяет нам построить ФМ.

Запишем решение уравнения в виде $X(t) = Be^{\lambda t}$, где B — собственный вектор, а λ — собственное значение матрицы A, так как, подставив решение в уравнение (1), получим СЛАУ $(A - \lambda E)B = 0$. Используя жорданов базис матрицы A, составленный из жордановых цепочек $B_0, \dots, B_k$, можно построить n различных решений уравнения (1). Тогда матрица составленная из этих решений образует фундаментальную матрицу.

Таким образом, нахождение ФСР и построение ФМ сводится к построению жорданова базиса матрицы A, то есть нахождению собственных векторов этой матрицы. Подробнее с построением собственных векторов ознакомиться в разделах Линейной Алгебры "Линейные операторы"(собственные векторы и значения) и "Полиномиальные матрицы"(построение жорданова базиса).

Для освежения в памяти рассмотрим один пример с подробным нахождением собственных векторов. Далее будем ссылаться на то, что читатель уже умеет находить собственные векторы матрицы.

Пример 1. Построить базис пространства решений уравнения

$$DX = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Построим характеристическую матрицу $A - \lambda E$ и найдем с помощью нее характеристический многочлены матрицы A, который равен $\det(A - \lambda E)$:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Таким образом, собственными значениями матрицы A являются $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $k_{1,2,3} = 1$. Следовательно, каждому собственному значению соответствует жорданова клетка размера 1, то есть каждое значение имеет ровно 1 собственный вектор. Найдем их:

1. $$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

   Возьмем третий столбец в качестве свободной переменной и обозначим его за α. Тогда фундаментальная система решений $A - E$ равна $(0, 2\alpha, \alpha)$, собственный вектор матрицы равен $(0, 2, 1)$. Тогда по формуле $X(t) = Be^{\lambda t}$ введенной ранее решение уравнения записывается как
   $$x_1(t) = e^t (0, 2, 1)^T.$$

2. $$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

   Возьмем второй столбец в качестве свободной переменной. Тогда собственный вектор равен $(1, 1, 0)$. А соответствующее ему линейно независимое векторного уравнения имеет вид
   $$x_2(t) = e^{2t} (1, 1, 0)^T.$$

3. $$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

   Таким образом,
   $$x_3(t) = e^{3t} (0, 0, 1)^T.$$

Мы нашли все столбцы, которые образуют ФСР. Следовательно, теперь мы можем построить искомую фундаментальную матрицу

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & 0 \\ 2e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$X_{\text{оо}} = \Phi(t) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & 0 \\ 2e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Также заметим, что данное СтЛВУ мы рассматривали в качестве первого примера прошлом уроке. Вы можете самостоятельно перемножить матрицы в последнем уравнении и сравнить с прошлым уроком.

Дополнительно: докажите, что полученные решения действительно являются линейно независимыми.

Ответ: $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & 0 \\ 2e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$

Замечание. *Отличительной чертой такого метода нахождения решения СтЛВУ от рассмотренных в прошлом уроке является своего рода "отсутствие взаимодействия" с оператором дифференцирования. Мы работаем лишь с матрицей A, не занимаясь вычислением производных или интегралов.*

На данном этапе можно было бы и закончить текущий урок. Однако не всё так просто. Мы рассмотрели лишь случай, при котором матрица A имеет собственные значения, **геометрическая кратность** которых **совпадает с алгебраической**. В этом случае все СтЛВУ решаются аналогичным обраом.

Теперь же рассмотрим случай, когда **алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения не совпадают**. Геометрическая кратность соответствует количеству линейно независимых рещений $x(t)$, соответствующих собственному значению λ. И в случае, когда алгебраическая кратность k больше, чем геометрическая кратность r, нам необходимо дополнить совокупность линейно независимыми решениями вида

$$x(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_m t^m)e^{\lambda t},$$

где α_i — векторы, а $m = \overline{1, r-k}$.

То есть, если нам необходимо найти одно независимое решение, то оно имеет вид

$$x_1(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t)e^{\lambda t}.$$

Если нужно найти второе решение, то оно будет иметь вид

$$x_2(t) = (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)e^{\lambda t}.$$

И так далее.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$DX = AX, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет собственные значения равные $\lambda_1 = -2$, $k_1 = 2$; $\lambda_2 = 2$.

1. Найдем геометрическую кратность собственного значения -2: $r_1 = n - rank(A + 2E) = 3 - rank\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$. Следовательно, $r_1 < k_1$, значит, мы сможем найти один собственный вектор
$$x_1(t) = e^{-2t}(-1, 0, 1)^T$$
путем решения СЛАУ $A + 2E = 0$. В качестве второго собственного вектора возьмем $x_2(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t)e^{-2t}$. Найдем векторы α_0, α_1. Подставим $x_2(t)$ в уравнение $DX = AX$, так как он является решением, получим
$$D((\alpha_0 + \alpha_1 t)e^{-2t}) = A(\alpha_0 + \alpha_1 t)e^{-2t};$$
$$(-2\alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_1 t)e^{-2t} = A(\alpha_0 + \alpha_1 t)e^{-2t}.$$
Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях t:
$$-2\alpha_1 = A\alpha_1 \Longleftrightarrow (A + 2E)\alpha_1 = 0.$$
А данную СЛАУ мы уже решили ранее, когда искали $x_1(t)$, то есть $\alpha_1 = (-1, 0, 1)$.
$$-2\alpha_0 + \alpha_1 = A\alpha_0 \Longleftrightarrow (A + 2)\alpha_0 = \alpha_1.$$
Полученную СЛАУ решим методом Гаусса:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Если $\alpha_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, то $\gamma_1 = -1 - \gamma_3$, $\gamma_2 = 0$. Таким образом, $\alpha_0 = (-1, 0, 0)$. Полученные α_i подставим в $x_2(t)$ и получим
$$x_2(t) = e^{-2t}(-t - 1, 0, t)^T.$$

2. Для собственного значения $\lambda_2 = 2$ найдем собственный вектор аналогично предыдущему примеру:
$$A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \quad\alpha \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$
Тогда
$$x_3(t) = e^{2t}(0, 1, 0)^T.$$

Мы нашли ФСР $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, теперь можем построим ФМ:
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & (-t-1)e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \\ e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \end{pmatrix}.$$
И общее решение исходного СтЛВУ имеет вид
$$X(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & (-t-1)e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \\ e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & (-t-1)e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \\ e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$DX = AX, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Собственное значение матрицы $\lambda = -1$, $k = 3$. Найдем геометрическую кратность. Она равна $r = 1$. Следовательно, для построения ФСР мы найдем один собственный вектор и дополним его двумя независимыми. Найдем собственный вектор:

$$A + E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Возьмем в качестве свободной переменной третий столбец и получим собственный вектор $(-1, 1, 1)$ и

$$x_1(t) = e^{-t}(-1, 1, 1)^T.$$

В качестве дополнения возьмем векторы $x_2(t) = e^{-t}(\alpha_0 + \alpha_1 t)$ и $x_3(t) = (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)$. Найдем $x_2(t)$ аналогично предыдущему примеру, то есть подставим в уравнение $DX = AX$:

$$(\alpha_0 - \alpha_1 t + \alpha_1)e^{-t} = A(\alpha_0 + \alpha_1 t)e^{-t}.$$

Снова приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях t и получаем $\alpha_1(-1, 1, 1)$; $(A + E)\alpha_0 = \alpha_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, $\alpha_0(1, 1, 0)$ и

$$x_2(t) = e^{-t}(1 - t, 1 + t, t)^T.$$

Так же найдем и вектор $x_3(t)$:

$$(-\beta_0 - \beta_1 t - \beta_2 t^2 + \beta_1 + 2\beta_2 t)e^{-t} = A(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)e^{-t}.$$

Отсюда $\beta_2(-1, 1, 1)$; $(A + E)\beta_1 = 2\beta_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \beta_1(2, 2, 0)$$

и $(A + E)\beta_0 = \beta_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \beta_0(-2, -4, 0).$$

Подставим полученные β_i в $x_3(t)$ и получим

$$x_3(t) = e^{-t}(-2 + 2t - t^2, -4 + 2t + t^2, t^2)^T.$$

Теперь составим из найденной ФСР фундаментальную матрицу и найдем общее решние СтЛВУ

$$\Phi(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 & 1-t & -2+2t-t^2 \\ 1 & 1+t & -4+2t+t^2 \\ 1 & t & t^2 \end{pmatrix}.$$

$$X(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 & 1-t & -2+2t-t^2 \\ 1 & 1+t & -4+2t+t^2 \\ 1 & t & t^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -1 & 1-t & -2+2t-t^2 \\ 1 & 1+t & -4+2t+t^2 \\ 1 & t & t^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$

Также для поиска решений в матрице с одним и больше собственными значениями геометрической кратности меньше, чем алгебраической, можно воспользоваться теоремой.

Теорема. *Если $B_0, B_1, \ldots, B_k$ — жорданова цепочка матрицы A, соответствующая собственному значению λ_0, то векторная функция*

$$X(t) = (B_0\frac{t^k}{k!} + B_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + B_2\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + B_{k-1}\frac{t}{1!} + B_k)e^{\lambda_0 t}$$

является решением уравнения (1).

Где жорданова цепочка — это собственные векторы и присоединенные к ним линейно независимые векторы, соответствующие одному собственному значению λ_0. Рассмотрим пример, где найдем решения таким способом. Подробнее данный пример рассмотрен в матричном методе (Пример 6).

Пример 5. Найти общее решение уравнения $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица имеет одно собственное значение $\lambda = 1$ алгебраической кратности $k = 3$ и геометрической кратности $r = 1$. Следовательно, собственному значению соответствует один собственный вектор. Теперь найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению

$$A - E = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

В качестве свободной переменной возьмем второй столбец. Тогда ФСР имеет вид $(-\alpha, \alpha, \alpha)$, а собственный вектор

$$B_0(1, -1, -1).$$

Теперь займемся поиском присоединенных векторов. Для поиска присоединенного к a_1 решим СЛАУ $(A - E \mid a_1)\gamma = 0$:

$$(A - E \mid a_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Возьмем в качестве свободной переменной второй столбец. Тогда ФСР имеет вид $(1-\alpha,\alpha,1+\alpha)$ и собственный вектор

$$B_1(1,0,1).$$

Осталось найти последний присоединенный вектор. Искать мы его будем для вектора a_2:

$$(A-E\mid a_2)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&5&-2&1\\-2&-3&1&0\\-1&-1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-1\\0&-1&1&-2\end{array}\right).$$

Снова возьмем второй столбец в качестве свободной переменной и получим ФСР $(-1-\alpha,\alpha,-2+\alpha)$ и собственный вектор

$$B_3(-1,0,-2).$$

Тогда при $k=0$ по формуле из теоремы получаем решение

$$x_1(t)=e^t(1,-1,-1).$$

При $k=1$ получаем

$$x_2(t)=e^t(t+1,-t,-t+1).$$

При $k=2$ аналогично

$$x_3(t)=e^t\Big(\frac{t^2}{2}+t-1,-\frac{t^2}{2},-\frac{t^2}{2}+t-2\Big).$$

Таким образом, общее решение СтЛВУ имеет вид

$$X(t)=e^t\begin{pmatrix}1&t+1&\frac{t^2}{2}+t-1\\-1&-t&-\frac{t^2}{2}\\-1&1-t&-\frac{t^2}{2}+t-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X(t)=e^t\begin{pmatrix}1&t+1&\frac{t^2}{2}+t-1\\-1&-t&-\frac{t^2}{2}\\-1&1-t&-\frac{t^2}{2}+t-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}.$

Замечание. *Причем, если обратимся к матричному методу, можно проследить, что полученная в ходе решения фундаментальная матрица $\Phi(t)=Se^{Jt}$, но нормированной она не будет.*

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$DX=AX,\quad A=\begin{pmatrix}2&-4\\1&2\end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет комплексные собственные значения $\lambda_1=2-2i$, $\lambda_2=2+2i$, которым соответствуют собственные векторы $a_1(-2i,1)$, $a_2(2i,1)$. Далее стоит учесть одно важдное замечание.

Замечание. *Если среди собственных значений матрицы A существуют мнимые, то собственные и присоединенные векторы, соответствующие этим собственным значениям, также мнимые. Но так как матрица A действительная, их действительные и мнимые части являются линейно независимыми действительными решениями. Следовательно, используя комплексное собственное значение кратности k можно построить*

*$2k$ линейно независимых действительных решений. При этом аналогично построенные решения для сопряженного мнимого значения **новыми** независимыми решениями **не являются**.*

Из этого следует, что собственному значению $2+2i$ соответствует комплекснозначная функция $x_1(t) = e^{2+2i}(2i,1)^T = \begin{pmatrix} 2ie^{2t}cos(2t) - 2e^{2t}sin(2t) \\ e^{2t}cos(2t) + ie^{2t}sin(2t) \end{pmatrix}$. В таком случае действительными линейно независимыми решениями являются столбцы

$$Re(x_1(t)) = \begin{pmatrix} -2e^{2t}sin(2t) \\ e^{2t}cos(2t) \end{pmatrix}, \quad Im(x_1(t)) = \begin{pmatrix} 2e^{2t}cos(2t) \\ e^{2t}sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Из замечания следует, что данные решения соответствуют как λ_1, так и λ_2. То есть эти векторы и образуют ФСР. Тогда фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t}sin(2t) & 2e^{2t}cos(2t) \\ e^{2t}cos(2t) & e^{2t}sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t}sin(2t) & 2e^{2t}cos(2t) \\ e^{2t}cos(2t) & e^{2t}sin(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t}sin(2t) & 2e^{2t}cos(2t) \\ e^{2t}cos(2t) & e^{2t}sin(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Сделаем небольшой вывод нахождении решения СтЛВУ методом Эйлера: если стоит задача построить ФСР или найти общее решение однородного СтЛВУ, то

- для матрицы A строим характеристический многочлен и находим собственные значения;
- если для собственных значений геометрические кратности совпадают с алгебраическими, то для каждого собственного значения находим собственный вектор;
- если для собственных значений геометрические кратности совпадают с алгебраическими, то для этих собственных значений строим дополнительные $k-r$ линейно независимых решений, зависящих от t.
- если собственные значения являются мнимыми, то одному собственному значению кратности k соответствует $2k$ действительных линейно независимых решений, которые являются действительной и мнимой частями комплексного линейно независимого решения $x(t)$, соответствующего этому собственному значению;
- строим ФСР и фундаментальную матрицу;
- произведение фундаментальной матрицы на столбец постоянных C является общим решением СтЛВУ.

Замечание. *Методом Эйлера мы находили ФСР СтЛВУ, однако мы не искали ФСР нормированную в точке. Подробнее поиск таких ФСР мы рассмотрим в матричном методе. Но мы можем получить фундаментальную матрицу нормированной ФСР в точке $t = t_0$ методом Эйлера. Для этого введем определение*

- *ФСР называется **нормированной при** $t = t_0$, если ее $\Phi(t_0) = E$.*

Если $X(t)$ — решение задачи Коши $DX = AX$, $X|_{t=t_0} = \xi$, то $X(t_0) = \Phi(t_0) \cdot C = \xi$. Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$X(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0) \cdot \xi. \tag{2}$$

Таким образом, полученная матрица $\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)$ будет являться **фундаментальной матрцией ФСР нормированной в точке $t = t_0$.** Поэтому ФСР полученная в методе Эйлера будет отличаться от ФСР полученной в матричном методе. Но матрица $\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)$ уже будет совпадать. То есть, домножив $\Phi(t)$ на $\Phi^{-1}(t_0)$, мы получим ФСР нормированную в точке $t = t_0$.

Пример 5. Решить задачу Коши $X|_{t=t_0} = \xi$ для уравнения

$$DX = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 0, \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вернемся к примеру 1. Фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} & 0 \\ 2e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи Коши воспользуемся уравнением (2). Для этого нам необходимо найти обратную матрицу к фундаментальной. Можете найти ее известным Вам способом, я предлагаю расширить её единичной матрицей и привести методом Гаусса к частично-мономиальной:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & e^{2t} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2e^t & e^{2t} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e^t & 0 & e^{3t} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{e^{-t}}{2} & \frac{e^{-t}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{e^{-t}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^{-3t}}{2} & -\frac{e^{-3t}}{2} & e^{-3t} \end{array}\right).$$

Теперь найдем произведние $\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} e^{2(t-t_0)} & 0 & 0 \\ e^{2(t-t_0)} - e^{(t-t_0)} & e^{(t-t_0)} & 0 \\ \frac{1}{2}(e^{3(t-t_0)} - e^{(t-t_0)}) & \frac{1}{2}(e^{(t-t_0)} - e^{3(t-t_0)}) & e^{3(t-t_0)} \end{pmatrix}$.

Осталось умножить полученную матрицу на столбец ξ при $t_0 = 0$ (подставить начальные условия):

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} - e^t \\ \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}.$$

Полученный столбец является решением исходной задачи Коши.

Ответ: $X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} - e^t \\ \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}$.

Попробуйте найти решение задачи Коши уже известным из прошлого урока Вам методом, то есть найти из уравнения $(\Phi(t) \cdot C)|_{t=t_0} = \xi$ коэффициенты C_i и подставить в столбец $\Phi(t) \cdot C$ и сравнить полученные решения.

Задачи для самостоятельного решения.

Найти общие решения уравнений $DX = AX$, где

1.
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix};$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$