$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 4t\sin x, \quad 0<x<4,\ t>0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ u_t\big|_{t=0} = 0 \qquad\qquad (1) \\ u\big|_{x=0} = 3 \\ u_x - 4u\big|_{x=4} = t^2 + t \end{cases}$$

Имеем смеш. задачу с неоднор. гран. усл.

Решение задачи ищем в виде

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где

$w(x,t) = ax^2 + bx + c$ такой, что

$$\begin{cases} w\big|_{x=0} = 3 \\ w_x - 4w\big|_{x=4} = t^2 + t \end{cases}$$

Подставим общий вид w в систему:

$w\big|_{x=0} = c = 3$

$w_x - 4w\big|_{x=4} = 8a + b - 64a - 16b - 12 = -56a - 15b - 12 =$

$= t^2 + t$

пусть $a = 0 \Rightarrow b = \dfrac{t^2+t+12}{-15} \Rightarrow$

$$w(x,t) = -\frac{(t^2+t+12)}{15}x + 3$$

Теперь мы можем построить смеш. задачу с однор. граничн. усл-ми для $v(x,t)$:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 4t\sin x - w_{tt} + w_{xx} = 4t\sin x + \frac{2x}{15} \\ v|_{t=0} = -w|_{t=0} = \frac{12x}{15} - 3 \\ v_t|_{t=0} = -w_t|_{t=0} = \frac{x}{15} \qquad (2) \\ v|_{x=0} = 0 \\ v_x - 4v|_{x=4} = 0 \end{cases}$$

Решение (2) ищем в виде

$v(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$, [т.к. (2) – смеш. задача с однор. гран. усл. и неоднор. ур-ем], где $X_k(x)$ – собств. ф-ии, получаемые из задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(4) - 4X(4) = 0 \end{cases}$$

Общее решение

$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$

Подст. дополнительные условия

$X(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$X'(4) - 4X(4) = \lambda C_2 \cos 4\lambda - 4 C_2 \sin 4\lambda = 0 \Rightarrow$

$C_2(\lambda \cos 4\lambda - 4 \sin 4\lambda) = 0$

т.к. $C_2 \neq 0$, то

$\frac{\lambda}{4} = \operatorname{tg} 4\lambda$

Корни этого ур-я $\lambda_k \in \mathbb{R}$ и будут являться собств. знач-ями оператора

Тогда собств. ф-ии

$X_k(x) = \sin \lambda_k x \implies$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \lambda_k x$$

Подставим этот ряд реш-я в ур-е и нач. усл-я задачи (2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \sin \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \lambda_k^2 \sin \lambda_k x = \underbrace{4t \sin x + \frac{2x}{15}}_{\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \lambda_k x}$$

Тогда

$$f_k = \frac{\int_0^4 \left(4t \sin x + \frac{2x}{15}\right) \sin \lambda_k x \, dx}{\int_0^4 \sin^2 \lambda_k x \, dx}$$

С помощью Wolfram получим

$$f_k(t) = \left[\frac{2(-4\lambda_k \cos 4\lambda_k + \sin 4\lambda_k)}{15\lambda_k^2} + \frac{4t(-\lambda_k \cos 4\lambda_k \sin 4\lambda_k + \cos 4 \sin 4\lambda_k)}{\lambda_k^2 - 1}\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2 - \frac{\sin 8\lambda_k}{4\lambda_k}} = \left[\sin \lambda_k = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\lambda_k}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\lambda_k}{2} + 1}, \ \frac{\lambda_k}{4} = \operatorname{tg} 4\lambda_k\right] =$$

$$= \left[\frac{2\cos 4\lambda_k \left(-4\lambda_k + \frac{\lambda_k}{4}\right)}{15\lambda_k^2} + \frac{4t \cos 4\lambda_k \left(-\frac{\lambda_k^2}{4} + \frac{\lambda_k}{4} \cos 4\right)}{\lambda_k^2 - 1}\right] \cdot$$

$$\frac{1}{2-\frac{1}{4\lambda_k}\cdot\frac{2\cdot\frac{\lambda_k}{4}}{\frac{\lambda_k^2}{16}+1}} = \left[\frac{-2\cdot 15\cos 4\lambda_k}{\frac{4\cdot 15}{2}\lambda_k}+\frac{t\lambda_k\cos 4\lambda_k(\cos 4-\lambda_k)}{\lambda_k^2-1}\right]$$

$$\frac{l}{2-\frac{\lambda}{\frac{\lambda_k^2}{2}+8}}$$

Таким образом, можем построить ОДУ (приравнивая коэф-ты)

$T_k''(t)+\lambda_k^2 T_k(t)=f_k(t)$

~~$T_k(t$~~

Общее решение которого

$$T_k(t)=C_1\cos\lambda_k t+C_2\sin\lambda_k t+\frac{f_k(t)}{\lambda_k^2} \qquad (3)$$

$[\text{т.к. } f_k''(t)=0]$

Подставим $v(x,t)$ в нач. усл-я:

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\sin\lambda_k x=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\lambda_k x, \text{ где}$$

$$\varphi_k=\frac{\int_0^4\left(\frac{12x}{15}-3\right)\sin\lambda_k x\,dx}{\int_0^4\sin^2\lambda_k x\,dx}=\frac{15\lambda_k+\lambda_k\cos 4\lambda_k-4\sin 4\lambda_k}{5\lambda_k^2\left(2-\frac{\sin 8\lambda_k}{4\lambda_k}\right)}$$

$$=\frac{15\lambda_k+\cos 4\lambda_k\left(\lambda_k-\frac{\lambda_k}{4}\cdot 4\right)}{5\lambda_k^2\left(2-\frac{1}{\frac{\lambda_k^2}{2}+8}\right)}=\frac{3}{\lambda_k\left(2-\frac{1}{\frac{\lambda_k^2}{2}+8}\right)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)\sin\lambda_k x = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin\lambda_k x \text{, где}$$

$$\psi_k = \frac{\int_0^4 \frac{x}{15}\sin\lambda_k x\,dx}{\int_0^4 \sin^2\lambda_k x\,dx} = \frac{-4\lambda_k\cos 4\lambda_k + \sin 4\lambda_k}{15\lambda_k^2\left(2-\frac{\sin 8\lambda_k}{4\lambda_k}\right)} =$$

$$= \frac{\cos 4\lambda_k\left(-4\lambda_k+\frac{\lambda_k}{4}\right)}{15\lambda_k^2\left(2-\frac{1}{\frac{\lambda_k^2}{2}+8}\right)} = -\frac{\cancel{15}\cos 4\lambda_k\cdot\cancel{\lambda_k}}{4\cdot\cancel{15}\lambda_k^{\cancel{2}}\left(2-\frac{1}{\frac{\lambda_k^2}{2}+8}\right)}$$

Таким образом, имеем, приравнивая коэф-ты

$$\begin{cases} T_k(0) = \varphi_k \\ T_k'(0) = \psi_k \end{cases} \Rightarrow \text{подставим их в } (3)$$

$$T_k(0) = C_1 + \frac{f_k(0)}{\lambda_k^2} = \varphi_k \Rightarrow C_1 = \varphi_k - \frac{f_k(0)}{\lambda_k^2}$$

$$T_k'(0) = \lambda_k C_2 + \frac{f_k'(0)}{\lambda_k^2} = \psi_k \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow$$

$$C_2 = \frac{\psi_k}{\lambda_k} - \frac{f_k'(0)}{\lambda_k^3}$$

Решение задачи (1) имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{(t^2+t+12)}{15}x + 3 +$$

5

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\varphi_k - \frac{f_k(0)}{\lambda_k^2}\right)\cos\lambda_k t + \left(\frac{\psi_k}{\lambda_k} - \frac{f_k'(0)}{\lambda_k^3}\right)\sin\lambda_k t + \frac{f_k(t)}{\lambda_k^2}\right]\sin\lambda_k x$$

2. $$\begin{cases} u_{tt} = 4u & 0<x<4,\ 0<y<6,\ t>0 \\ u_x|_{x=0} = u|_{x=4} = 0 \\ u_y|_{y=0} = u_y|_{y=6} = 0 & (1) \\ u|_{t=0} = xy \\ u_t|_{t=0} = 8 \end{cases}$$

Имеем смеш. задачу с однор. гранич. усл-ми.
Решение ищем в виде
$u(x,t) = T(t)\,V(x,y)$, $T \not\equiv 0$, $V \not\equiv 0$
Подставим в ур-е:
$T''V = T\Delta V \Rightarrow$
$\frac{T''}{T} = \frac{\Delta V}{V} = -\lambda^2 \Rightarrow$ строим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta V + \lambda^2 V = 0 \\ V_x|_{x=0} = V|_{x=4} = 0 & (2) \\ V_y|_{y=0} = V_y|_{y=6} = 0 \end{cases}$$

Ищем реш-е (2) в виде
$V(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$, $X \not\equiv 0$
Подставим
$X''Y + XY'' + \lambda^2 XY = 0$
$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2 = -\mu^2$, где $\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2 \xrightarrow{\text{получаем 2 задачи Штурма}}$

$$\begin{cases} X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \\ X'(0) = 0 & (3) \\ X(4) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0 \\ Y'(0) = 0 & (4) \\ Y'(6) = 0 \end{cases}$$

1

Найдем решение (3)

~~$X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda$~~

$X(x) = C_1\cos\mu x + C_2\sin\mu x$

$X'(0) = \mu C_2\cos\mu x = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$X(4) = C_1\cos 4\mu = 0 \Rightarrow 4\mu = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow$

$\mu_n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$

$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}\right)x$

Найдем решение (4)

$Y(y) = C_1\cos\nu x + C_2\sin\nu x$

$Y'(0) = \nu C_2 \cancel{\cos\nu x} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$Y'(6) = -\nu C_1\sin 6\nu = 0 \Rightarrow 6\nu = \frac{\pi}{2} + \pi m \Rightarrow$

$\nu_m = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}$

$Y_m(y) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}\right)y$

Строим

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(t)\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}\right)x\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}\right)y \quad (5)$$

$$\lambda_{nm}^2 = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}\right)^2$$

~~Ас~~ Из ИРП имеем ОДУ-2

$T''_{nm}(t) + \lambda_{nm}^2 T_{nm}(t) = 0 \Rightarrow$

$T_{nm}(t) = A_{nm}\cos\lambda_{nm}t + B_{nm}\sin\lambda_{nm}t$

Из (5) можем получить

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{nm}\cos\lambda_{nm}t + B_{nm}\sin\lambda_{nm}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}\right)x \cdot$$

$$\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6}\right)y \quad (6)$$

Подставляя (6) в нач. усл-я, получим

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\right)x \cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{6}\right)y = xy \Rightarrow$$

$$A_{nm} = \frac{\int_0^4\int_0^6 xy \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\right)x \cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{6}\right)y \, dx dy}{\int_0^4\int_0^6 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\right)x \cos^2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{6}\right)y \, dx dy}$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{nm} B_{nm} \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\right)x \cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{6}\right)y = 1 \Rightarrow$$

$$B_{nm} = \frac{1}{\lambda_{nm}} \frac{\int_0^4\int_0^6 \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\right)x \cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{6}\right)y \, dx dy}{\int_0^4\int_0^6 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\right)x \cos^2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{6}\right)y \, dx dy}$$