Нахождение электрического потенциала для одного из уравнений Максвелла в параллелепипеде.

Постановка задачи. Методом разделения переменных найти решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ 0 < x < a, \ 0 < y < b, \ 0 < z < c, \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, \\ u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0, \\ u|_{z=0} = x + y, \\ u|_{z=c} = x - y. \end{cases} \tag{1}$$

где $a, b, c > 0$ – параметры.

Решение задачи. По методу разделения переменных будем искать решение этой задачи в виде

$$u(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \ X, Y, Z \not\equiv 0. \tag{2}$$

Подставляем этот вид решения в дифференциальное уравнение задачи (1)

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0.$$

Разделяем переменные путем деления уравнения на XYZ и получаем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Оставим слева только первое слагаемое, а остальное перенесем в правую часть. Получим слева функцию, зависящую от x, а справа – функцию, зависящую от (y, z), поэтому обе части уравнения могут быть равны только константе. Пусть эта константа $-\lambda^2$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda^2, \tag{3}$$

Используя равенство

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

мы можем построить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Подставляя выражение (2) в первые граничные условия задачи (1), получим

$$X(0)Y(y)Z(z) = X(a)Y(y)Z(z) = 0,$$

но $Y, Z \not\equiv 0$ по определению. Поэтому

$$X(0) = X(a) = 0.$$

Взяв построенное обыкновенное дифференциальное уравнение и полученные условия, можем построить задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(a) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Найдем собственные значения и собственные функции из задачи (4). Общее решение задачи (4) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Подставим первое краевое условие

$$X(0) = C_1 = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0$. Подставим второе краевое условие

$$X(a) = C_2 \sin \lambda a = 0.$$

Тогда

$$\lambda_n a = \pi n,$$

а отсюда собственные значения и собственные функции равны соответственно

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a},\ X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right),\ n = 1, 2 \ldots . \tag{5}$$

Вернемся к равенствам (3). Рассмотрим уравнение

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda^2.$$

Можем оставить слева только первое слагаемое, а все остальное перенести в правую часть, тогда

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2 - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\mu^2, \tag{6}$$

то есть слева функция зависит от y, а справа – от z, соответственно это равно константе $-\mu^2$. Используя равенство

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu^2,$$

и вторые граничные условия задачи (1)

$$X(x)Y(0)Z(z) = X(x)Y(b)Z(z) = 0,$$

аналогично задаче (4) можем построить задачу Штурма-Лиувилля для $Y(y)$:

$$\begin{cases} Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0, \\ Y(0) = 0, \\ Y(b) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Найдем собственные значения и собственные функции из задачи (7). Общее решение задачи (7) имеет вид

$$Y(y) = C_1 \cos \mu y + C_2 \sin \mu y,$$

подставим первое краевое условие и получим

$$Y(0) = C_1 = 0.$$

Подставим второе краевое условие и получим

$$Y(b) = C_2 \cos \mu b = 0,$$

отсюда собственные значения и собственные функции равны

$$\mu_m = \frac{\pi n}{b},\ Y_m(y) = \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right),\ m = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Возьмем полученные результаты (5), (8) и подставим их в общий вид (2). Тогда произведение преобразуется в сумму следующего вида

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(z) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right). \tag{9}$$

Подставим этот вид решения в уравнение задачи (1) и получим

$$-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(z) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(z) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z''_{nm}(z) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) = 0.$$

Приравнивая коэффициенты степенных рядов, получим

$$Z''_{nm}(z) - \left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\right] Z_{nm}(z) = 0.$$

Введем новую величину

$$\nu_{nm}^2 = \lambda_n^2 + \mu_m^2, \tag{10}$$

Тогда

$$Z''_{nm}(z) - \nu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = 0. \tag{11}$$

Подставим в выражение (9) третье граничное условие задачи (1) и получим

$$u|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(0) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) = x + y.$$

Разложим функцию справа в ряд Фурье по собственным функциям и получим

$$u|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(0) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{nm} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right),$$

где

$$\varphi_{nm} = \frac{\int\limits_0^a \int\limits_0^b (x + y) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) dx dy}{\int\limits_0^a \int\limits_0^b \sin^2\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin^2\left(\frac{\pi m}{b} y\right) dx dy}. \tag{12}$$

Тогда мы можем приравнять коэффициенты степенных рядов и получить условие

$$Z_{nm}(0) = \varphi_{nm}.$$

Аналогично подставляем в выражение (9) четвертое граничное условие задачи (1) и получим

$$u|_{z=c} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{nm}(c) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{nm} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right),$$

где

$$\psi_{nm} = \frac{\int\limits_0^a \int\limits_0^b (x-y) \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right) dxdy}{\int\limits_0^a \int\limits_0^b \sin^2\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{\pi m}{b}y\right) dxdy}. \tag{13}$$

Тогда мы можем приравнять коэффициенты степенных рядов и получить условие

$$Z_{nm}(c) = \psi_{nm}.$$

Соберем вместе уравнение (11) и построенные условия, чтобы сформулировать граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} Z''_{nm}(z) - \nu_{nm}^2 Z_{nm}(z) = 0, \\ Z_{nm}(0) = \varphi_{nm}, \\ Z_{nm}(c) = \psi_{nm}. \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение задачи (14). Построим общее решение этого дифференциального уравнения. Для этого составим соответствующее характеристическое уравнение

$$\xi^2 - \nu_{nm}^2 = 0,$$

корнями которого будут

$$\xi_{1,2} = \pm\nu_{nm}.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$Z_{nm}(z) = C_1 e^{-\nu_{nm}} + C_2 e^{\nu_{nm}}.$$

Однако такая форма записи общего решения может оказаться не совсем удобной. Поэтому мы построим альтернативный вид общего решения. Поскольку C_1 и C_2 – это произвольные постоянные, то их можно выразить через другие константы $C_1 = A - B$, $C_2 = C + D$, тогда

$$Z_{nm}(z) = \frac{Ae^{-\nu_{nm}} + Ce^{\nu_{nm}}}{2} + \frac{-Be^{-\nu_{nm}} + De^{\nu_{nm}}}{2}.$$

А константы A, B, C, D можно заменить на новые константы. Мы обозначим для удобства эти новые константы через C_1, C_2, но, вообще говоря, это не те же постоянные, что мы вводили выше. Тогда

$$Z_{nm}(z) = C_1 \frac{e^{-\nu_{nm}} + e^{\nu_{nm}}}{2} + C_2 \frac{-e^{-\nu_{nm}} + e^{\nu_{nm}}}{2} = C_1 \operatorname{ch} \nu_{nm} z + C_2 \operatorname{sh} \nu_{nm} z. \tag{15}$$

Таким образом, имеем

$$Z_{nm}(z) = C_1 \operatorname{ch} \nu_{nm} z + C_2 \operatorname{sh} \nu_{nm} z, \;\; n, m = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Подставим в это решение первое граничное условие задачи (14)

$$Z_{nm}(0) = C_1 = \varphi_{nm}.$$

Подставим в решение второе граничное условие задачи (14)

$$Z_{nm}(c) = \varphi_{nm} \operatorname{ch} \nu_{nm} c + C_2 \operatorname{sh} \nu_{nm} c = \psi_{nm}.$$

Тогда из этого уравнения выразим

$$C_2 = \frac{\psi_{nm}}{\operatorname{sh} \nu_{nm} c} - \varphi_{nm} \operatorname{cth} \nu_{nm} c.$$

Тогда можно подставить найденные C_1 и C_2 в решение (16)

$$Z_{nm}(z) = \varphi_{nm} \operatorname{ch} \nu_{nm} z + \left(\frac{\psi_{nm}}{\operatorname{sh} \nu_{nm} c} - \varphi_{nm} \operatorname{cth} \nu_{nm} c \right) \operatorname{sh} \nu_{nm} z. \tag{17}$$

Выражение (17) подставляем в вид (9) и получаем решение исходной задачи (1) равное

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\varphi_{nm} \operatorname{ch} \nu_{nm} z + \left(\frac{\psi_{nm}}{\operatorname{sh} \nu_{nm} c} - \varphi_{nm} \operatorname{cth} \nu_{nm} c \right) \operatorname{sh} \nu_{nm} z \right] \sin\left(\frac{\pi n}{a} x \right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y \right), \tag{18}$$

где функции φ_{nm}, ψ_{nm} вычисляются по формулам (12) и (13).