# Интерполяционный многочлен с кратными узлами

### Условие

Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = x^6$ по следующей таблице входных данных: $f(0), f'(0), f''(0), f(1), f'(1)$. Вычислить с его помощью приближенное значение $f(0.5)$ и оценить погрешность найденного значения.

### Алгоритм решения

Для решения данной задачи потребуются следующие формулы:

1. остаток интерполирования при интерполировании с кратными узлами

$$r_n(x) = \Omega(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \Omega(x) = (x - x_0)^{\alpha_0}\dots(x - x_m)^{\alpha_m}, \ \xi \in [a, b]. \tag{1}$$

2. представление многочлена Эрмита через разделенные разности

$$\begin{gathered} P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_0) + \dots + (x - x_0)^{\alpha_0 - 1}f(x_0, \dots, x_0) + \\ + (x - x_0)^{\alpha_0}f(x_0, \dots, x_0; x_1) + (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)f(x_0, \dots, x_0; x_1, x_1) + \dots + \\ + \dots + (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}f(x_0, \dots, x_0; x_1, \dots, x_1) + \dots + \\ + \dots + (x - x_0)^{\alpha_0}(x - x_1)^{\alpha_1}\dots(x - x_m)^{\alpha - 1}f(x_0, \dots x_0; x_1, \dots, x_1; \dots; x_m, \dots, x_m). \end{gathered} \tag{2}$$

3. для построения таблицы разделенных разностей, необходимо учитывать соотношение

$$f(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{j+1}) = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \tag{3}$$

4. аппарат разделенных разностей:

   - **разделенная разность нулевого порядка для функции** $f(x)$ совпадают со значениями функции $f(x_i)$ в узлах интерполирования;
   - **разделенная разность первого порядка** есть

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}. \tag{4}$$

   - **разделенная разность второго порядка**

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}. \tag{5}$$

   - **разделенная разность** $(k+1)$**-ого порядка**

$$f(x_0, \dots, x_{k+1}) = \frac{f(x_1, \dots, x_{k+1}) - f(x_0, \dots, x_k)}{x_{k+1} - x_0}. \tag{6}$$

5. таблица разделенных разностей

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | | |
| | | $f(x_0, x_1)$ | | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | $f(x_0, x_1, x_2)$ | | |
| | | $f(x_1, x_2)$ | | | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $f(x_0, \ldots, x_n)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | | |
| | | | $f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ | | |
| $x_{n-1}$ | $f(x_{n-1})$ | | | | |
| | | $f(x_{n-1}, x_n)$ | | | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | | | | |

Алгоритм решения задачи следующий: составляем таблицу разделенных разностей, записываем интерполяционный многочлен, вычисляем значение в нужной точке, оцениваем остаток интерполирования в этой точке.

Для начала рассчитаем входные данные:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = 6.$$

Далее составляем таблицу конечных разностей, которая в нашем случае примет вид

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | $f(x_0, x_0)$ | | | |
| $x_0$ | $f'(x_0)$ | | $f(x_0, x_0, x_0)$ | | |
| $x_0$ | $f''(x_0)$ | $f(x_0, x_0)$ | | $f(x_0, x_0, x_0, x_1)$ | $f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1)$ |
| | | $f(x_0, x_1)$ | $f(x_0, x_0, x_1)$ | $f(x_0, x_0, x_1, x_1)$ | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | | $f(x_0, x_1, x_1)$ | | |
| $x_1$ | $f'(x_1)$ | $f(x_1, x_1)$ | | | |

Заполним первые два столбца известными нам значениями:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $f(x_0, x_0)$ | | | |
| 0 | 0 | | $f(x_0, x_0, x_0)$ | | |
| 0 | 0 | $f(x_0, x_0)$ | | $f(x_0, x_0, x_0, x_1)$ | $f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1)$ |
| | | $f(x_0, x_1)$ | $f(x_0, x_0, x_1)$ | $f(x_0, x_0, x_1, x_1)$ | |
| 1 | 1 | | $f(x_0, x_1, x_1)$ | | |
| 1 | 6 | $f(x_1, x_1)$ | | | |

По формуле (3)

$$f(x_0, x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!} = 0, \quad f(x_1, x_1) = \frac{f'(x_1)}{1!} = 6.$$

По формуле (4)

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1.$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $f(x_0, x_0, x_0)$ | $f(x_0, x_0, x_0, x_1)$ | $f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1)$ |
| 0 | 0 | 0 | $f(x_0, x_0, x_1)$ | $f(x_0, x_0, x_1, x_1)$ | |
| 0 | 0 | 1 | $f(x_0, x_1, x_1)$ | | |
| 1 | 1 | 6 | | | |
| 1 | 6 | | | | |

По формуле (3)

$$f(x_0, x_0, x_0) = \frac{f'(x_0)}{2!} = 0.$$

По формуле (5)

$$f(x_0, x_0, x_1) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_0, x_0)}{x_1 - x_0} = 1, \quad f(x_0, x_1, x_1) = \frac{f(x_1, x_1) - f(x_0, x_1)}{x_1 - x_0} = 5.$$

Далее аналогично по формуле (6)

$$f(x_0, x_0, x_0, x_1) = \frac{f(x_0, x_0, x_1) - f(x_0, x_0, x_0)}{x_1 - x_0} = 1, \quad f(x_0, x_0, x_1, x_1) = \frac{f(x_0, x_1, x_1) - f(x_0, x_0, x_1)}{x_1 - x_0} = 4.$$

И в итоге

$$f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1) = \frac{f(x_0, x_0, x_1, x_1) - f(x_0, x_0, x_0, x_1)}{x_1 - x_0} = 3.$$

Тогда таблица принимает окончательный вид

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | |
| 0 | 0 | 1 | 5 | | |
| 1 | 1 | 6 | | | |
| 1 | 6 | | | | |

Из этой таблицы нам нужны лишь значения

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | |
| 0 | 0 | 1 | 5 | | |
| 1 | 1 | 6 | | | |
| 1 | 6 | | | | |

Далее по формуле (2) запишем сначала интерполяционный многочлен в общем виде для нашего случая (5 узлов $\Rightarrow$ 4 степень многочлена)

$$P_4(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_0) + (x - x_0)^2 f(x_0, x_0, x_0) +$$
$$+ (x - x_0)^3 f(x_0, x_0, x_0, x_1) + (x - x_0)^3 (x - x_1) f(x_0, x_0, x_0, x_1, x_1).$$

Подставляем все известные нам значения и получаем

$$P_4(x) = 0 + x \cdot 0 + x^2 \cdot 0 + x^3 \cdot 1 + x^3(x_1) \cdot 3 = 3x^4 - 2x^3.$$

Можно, подставив известные точки и их значения, убедиться в том, что многочлен был построен правильно.

Вычислим значение в точке $x = 0.5$:

$$P_4(0.5) = \frac{3}{16} - \frac{2}{8} = -\frac{1}{16}.$$

Оценим остаток по формуле (1). Для начала запишем его в общем виде для нашего случая:

$$r_4(x) = (x - x_0)^3(x - x_1)^2 \cdot \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}, \quad \xi \in [0, 1].$$

Нам неизвестно значение $f^{(5)}(\xi)$. Оценим его сверху:

$$f^{(5)}(x) = (x^6)^{(5)} = 720x \Rightarrow |f^{(5)}(x)| \leqslant 720 \quad x \in [0, 1].$$

Тогда оценка для остатка примет вид

$$|r_4(x)| \leqslant \left| x^3(x-1)^2 \cdot \frac{720}{120} \right| = 6 \left| x^3(x-1)^2 \right|.$$

Отсюда погрешность вычисленного значения в точке $x = 0.5$ составляет

$$|r_4(0.5)| \leqslant 6 \left| \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^2} \right| = \frac{3}{16}.$$