7 группа
Бобэт Т.А.

Вар. 2

1. $q = 0.01$

Пусть I – СВ, обозначающая наступление страхового случая. Тогда

$$\begin{cases} P\{I=0\} = 1-q = 0.99 \\ P\{I=1\} = q = 0.01 \end{cases}$$

Распределение СВ B – выплаты имеет вид

$$p_B(x) = \begin{cases} 5x^4, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найти ES, DS, где $S = X_1 + \dots + X_{289}$, X_i – независимые СВ такие, что $X_i = I \cdot B$

Итак,

$$ES = E\{X_1 + \dots + X_{289}\} = EX_1 + \dots + EX_{289},$$

причем

$$EX_1 = \dots = EX_{289} = EX \Rightarrow ES = 289 \cdot EX$$

Воспользуемся ф-лой усл. МО:

$$EX = E\{E\{X|I\}\}$$

Рассмотрим

$E\{X|I\}$: $E\{X|I=0\}=0$

$E\{X|I=1\}=E\{B|I=1\}=EB$

Найдем EB:

$$EB=\int_0^1 x\cdot p_B(x)dx=\int_0^1 5x^5dx=$$

$$=\frac{5}{6}x^6\Big|_0^1=\frac{5}{6}\Rightarrow$$

$$E\{X|I\}=\frac{5}{6}I$$

$$E\{E\{X|I\}\}=E\left\{\frac{5}{6}I\right\}=\frac{5}{6}EI=$$

$$=\frac{5}{6}\left(1\cdot q+0\cdot(1-q)\right)=\frac{5}{6}q=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{100}=$$

$$=\frac{1}{120}\Rightarrow ES=289\cdot EX=\frac{289}{120}.$$

Аналогично по СВ-вам дисперсии:

$$DS=D\{X_1+\dots+X_{289}\}=DX_1+\dots+DX_{289}=$$

$=289\cdot DX$, где

$$DX=DX_1=\dots=DX_{289}$$

Восп. ф-лой усл. дисп.:

$$DX = D\{E\{X|I\}\} + E\{D\{X|I\}\}$$

$$D\{E\{X|I\}\} = D\{\tfrac{5}{6} I\} = \frac{25}{36} DI =$$

$$= \frac{25}{36}\cdot q(1-q) = \frac{25}{36}\cdot 0.01\cdot 0.99 = 0.006875 =$$

$$= \frac{11}{1600}$$

$$D\{X|I\} = \begin{cases} D\{X|I=0\} = 0 \\ D\{X|I=1\} = D\{B\} \end{cases}$$

$$D\{B\} = \int_0^1 x^2 \cdot p_B(x)\,dx - \left(E\{B\}\right)^2 =$$

$$= \int_0^1 5x^6\,dx - \frac{25}{36} = \frac{5}{7} - \frac{25}{36} = \cancel{\frac{48}{72} - \frac{50}{72}} -$$

$$\approx 0.0198 \Rightarrow$$

$$D\{X|I\} = I\cdot D\{B\} = 0.0198\cdot I$$

$$E\{D\{X|I\}\} = 0.0198\,EI = 0.0198\cdot 0.01 =$$

$$= 0.000198 \Rightarrow$$

$$DX \approx \frac{11}{1600} - 0.02\cdot 0.01 \approx 0.006675 \Rightarrow$$

$$DS = 289\cdot DX \approx 1.929$$

Ответ: $\frac{289}{120}$, 1.929

2. Оценить вер-ть того, что выплаты превысят среднее на 1%

То есть

~~$P\{S > 1.01$~~

$$P\{S > 1.01\,ES\} = 1 - P\{S \leq 1.01\,ES\} =$$

$$= 1 - P\left\{\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} \leq \frac{1.01\,ES - ES}{\sqrt{DS}}\right\} =$$

$$= 1 - P\left\{\frac{S - \frac{289}{120}}{1.388} \leq \frac{1.01 \cdot \frac{289}{120} - \frac{289}{120}}{1.388}\right\} =$$

$$= 1 - P\left\{\frac{120S - 289}{166.666} \leq 0.0173\right\} =$$

$$= 1 - \Phi(0.0173) = 1 - 0.5040 =$$

$$= 0.496$$

3. Пусть X_1 – СВ с эксп. распр-ем с $\lambda_1 = 1$, а X_2 – СВ с равном. распр-ем на $[0, 3]$, X_1, X_2 – независимы

Найти п.р.в. $\eta_1 = 4X_1 + X_2$

Итак,

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$p_{X_2}(x) = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3}, \; x \in [0, 3] \\ 0, \; x \notin [0, 3] \end{array}\right.$$

Введем новую СВ $\eta_2 = X_2$, тогда можно запис.

$$\begin{cases} \eta_1 = 4X_1 + X_2 \\ \eta_2 = X_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{на переменные}]{\text{заменим СВ}}$$

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}, \xrightarrow[\text{зование!}]{\text{обратное преобра-}}$$

Kroyter

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{4} \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

Найдем Якобиан преобразования:

$$|I| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left|\dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$$

Тогда можно записать

$$p_{\eta_1}(y_1) = \int_{B_x} p_{\eta_1\eta_2}(X_1, X_2)\, dy_2 =$$

$$= \int_{B_x} \frac{1}{4} p_{X_1X_2}\left(\frac{y_1 - y_2}{4}, y_2\right) dy_2 =$$

[т.к. X_1, X_2 - независ. СВ] =

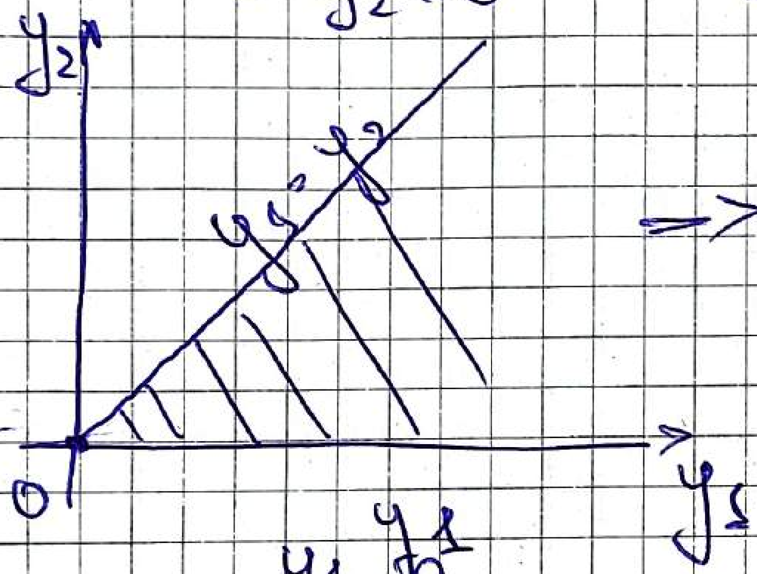
$$= \frac{1}{4} \int_{B_x} p_{X_1}\left(\frac{y_1 - y_2}{4}\right) p_{X_2}(y_2)\, dy_2 =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{B_x} e^{-\left(\frac{y_1 - y_2}{4}\right)} \cdot \frac{1}{3}\, dy_2 =$$

$$= \frac{1}{4} e^{-\frac{y_1}{4}} \cdot \frac{1}{3} \int\limits_{B_x} e^{\frac{y_2}{4}} dy_2 = \dots$$

Нам необх. задать область интегр-я B_x. Зададим ее след. образом:

$$B_x: \begin{cases} \frac{y_1 - y_2}{4} \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} y_1 \geq y_2 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$



$\to$

$$\dots = \frac{1}{12} e^{-\frac{y_1}{4}} \int\limits_0^{y_1} e^{\frac{y_2}{4}} dy_2 = \frac{4}{12} e^{-\frac{y_1}{4}} \cdot e^{\frac{y_1}{4}} - \frac{4}{12} e^{-\frac{y_1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-\frac{y_1}{4}}\right), \; y_1 \geq 0$$

То есть $p_{\eta_1}(x) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-\frac{x}{4}}\right), \; x \geq 0$