Многочлен Лагранжа при равноотстоящих узлах

Условие

Построить интерполяционный многочлен в форме Лагранжа для сетки равноотстоящих узлов.

Алгоритм решения

Пусть функция $f(x)$ задана таблично в n узлах x_i, которые являются равноотстоящими, то есть

$$x_i = x_0 + ih,\ h > 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда интерполяционный многочлен будет иметь степень n.

Интерполяционный многочлен Лагранжа записывается в общем виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k), \quad l_k(x) = \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}. \tag{1}$$

Тогда, поскольку узлы равноотстоящие, имеем

- $x - x_j = x - x_0 - jh$;
- $x_k - x_j = x_0 - kh - x_0 + jh = h(k - j)$.

Отсюда

$$l_k(x) = \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_0 - jh)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} h(k - j)} = \frac{1}{h^n} \cdot \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_0 - jh)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (k - j)}.$$

Введем замену $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Отсюда

$$l_k(x) = l_k(x_0 + th) = \frac{1}{h^n} \cdot \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (th - jh)}{\prod\limits_{j=0, j\neq k}^{n} (k - j)} = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(t - j)}{(k - j)} =$$

$$= \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-k} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} = (-1)^{n-k} C_n^k \frac{1}{t-k} \cdot \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!}.$$

Подставим это в выражение (1), тогда

$$P_n(x) = (-1)^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{-k} C_n^k \frac{1}{t-k} f(x_k).$$

Недостатком данной формулы является факториальная сложность числителя и знаменателя, что делает вычисления достаточно трудоемкими. Поэтому при равноотстоящих узлах принято использовать интерполяционный многочлен в форме Ньютона.