0.1 Сходимость и расходимость числовых рядов

Пусть задача числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}$. Сумма членов этой последовательности записывается в виде

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и называется **числовым рядом**. Сумма членов последовательности до k называется **частной суммой ряда**

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n. \tag{2}$$

Рассмотрим последовательность частных сумм ряда

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ \ldots.$$

Если существует конечный предел последовательности частных сумм ряда

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S,$$

то ряд называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**.

Теорема (Необходимое условие сходимости)**.** *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то*

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следствие. Если $a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (Критерий сходимости положительных числовых рядов ($a_n > 0$))**.** *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность частных сумм* $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ *ограничена, то есть* $|S_n| \leqslant M$, $\forall n$, $M = \mathrm{const}$.

Теорема (Признаки сравнения)**.** *Пусть* $a_n \geqslant 0$, $a_n \leqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1. *Из сходимости* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*;*
2. *Из расходимости* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Теорема (Предельный признак сравнения)**.** *Пусть* $b_n > 0$. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,\ 0 < l < +\infty, \tag{3}$$

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Практика

2546.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\dots$$

Перед нами бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, используя формулу для такой прогрессии, сразу найдем сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\left[\frac{b_1}{1-q}\right]=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

2547.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\dots$$

В данном случае имеем сумму двух бесконечно убывающих геометрических прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\left[\frac{b_1}{1-q}\right]=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

2549.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Разложим n-ый член последовательности a_n на простейшие дроби:

$$\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\left[A(n+1)+B\cdot n=1\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}\right]=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\dots.$$

Тогда рассмотрим частную сумму ряда

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}\xrightarrow[k\to\infty]{}1.$$

То есть мы доказали, что существует конечный предел последовательности частных сумм. А значит по определению ряд сходится и его сумма равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

2550. Обозначим исследуемый ряд

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Разложим a_n на сумму простейших дробей

$$\frac{A}{3n-2}+\frac{B}{3n+1}=\left[\begin{matrix}A(3n+1)+B(3n-2)=1\\ \begin{cases}3A+3B=0\\A-2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\3B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=-\frac{1}{3}\end{cases}\end{matrix}\right]=\frac{1}{3(3n-2)}-\frac{1}{3(3n+1)}$$

Тогда рассмотрим частную сумму ряда

$$S_k = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{21}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{3(3k-2)} - \frac{1}{3(3k+1)}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3k+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Последовательность часть ных сумм имеет конечный предел, следовательно ряд сходится его сумма равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}.$$

2552.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

Распишем сумму по членам

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - 2\sqrt{5} + \sqrt{4}) + \dots$$

$$\dots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) + \dots$$

Таким образом, частную сумму ряда можно записать в виде

$$S_k = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 - \sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}.$$

2556.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \not\to 0, \text{предела не существ.}$$

Тогда по необходимому условию сходимости числовой ряд расходится.

2557.

$$0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}(0.001)^{\frac{1}{n}}.$$

Рассмотрим n-ый член последовательности

$$a_n = (0.001)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0 \Rightarrow \text{расходится по необходимому условию сходимости.}$$

2558.

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Рассмотрим частную сумму ряда

$$S_k = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} = \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n!}.$$

Так как
$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)!} \geq S_k,$$
то последовательность монотонно возрастает. Нужно найти верхнюю грань. Из неравенства
$$n! \geq 2^{n-1}$$
следует, что
$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \left(n-1, \text{чтобы } \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}\right).$$
Следовательно,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = [\text{геом. прогр. }] =$$
$$= \left[\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}\right] = \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2 \quad \forall n \Rightarrow |S_n| \leq 2 \quad \forall n.$$
Тогда по критерию сходимости исходный ряд сходится, так как последовательность частных сумм является ограниченной.

2559.
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$
Используем признак сравнения:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
Необходимо доказать расходимость гармонического ряда. Доказательство Орема:
$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \dots$$
$$> 1 + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{16} + \dots\right] + \dots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \text{ - не ограничена сверху } \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \text{ - расх. .}$$
Значит по признаку сравнения исходный ряд расходится.

Альтернатива: Из книги Кастрицы:
$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = S_n + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > S_n + n \cdot \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2},$$
тогда при n $\to \infty$
$$S \geq S + \frac{1}{2} \quad - \text{противоречие.}$$

2560.
$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}.$$

Поскольку

$$1000n + 1 \le 2000n \Rightarrow \frac{1}{1000n+1} \ge \frac{1}{2000n},$$

то можем рассмотреть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2000n} = \frac{1}{2000} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Этот ряд расходится как гармонический. Следовательно по признаку сравнения исходный ряд расходится.

2561.

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}.$$

Рассмотрим a_n член

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0.$$

А тогда по необходимому условию данный ряд расходится.

2562.

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Возьмем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Рассмотрим отношение:

$$\frac{n^2}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4} = \text{const}$$

А тогда по предельному признаку сравнения ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходятся или расходятся одновременно. Докажем сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Для этого рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$
По аналогии с номером 2549

$$\frac{1}{n(n-1)} = \left[\begin{array}{c} A(n-1) + Bn = 1 \\ \begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases} \end{array} \right] = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$S_k = \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

При этом

$$\frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}, \text{ т.к. } n(n-1) < n^2 \quad \forall n \ge 2$$

а тогда ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится.}$$

Причем, если добавить к нему единицу, то на сходимость это не повлияет:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом, исходный ряд сходится по предельному признаку сравнения.

2563.

$$\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

По аналогии с 2549

$$S_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \xrightarrow[k \to \infty]{} 1 \Rightarrow \text{сходится.}$$

Теперь сравним его с исходным рядом. Сперва преобразуем:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

Разделим исходный ряд на получившийся:

$$\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{n\sqrt{n+1}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 2 = \text{const}$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения исходный ряд сходится.

0.2 Признаки Коши и Даламбера

Теорема (Радикальный признак Коши)**.** *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел*

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

- *Если* $L < 1$*, то ряд сходится абсолютно.*
- *Если* $L > 1$*, то ряд расходится.*
- *Если* $L = 1$*, то признак не дает ответа.*

Теорема (Признак Даламбера)**.** *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с ненулевыми членами существует предел*

$$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

- *Если* $L < 1$*, то ряд сходится абсолютно.*
- *Если* $L > 1$*, то ряд расходится.*
- *Если* $L = 1$*, то признак не даёт ответа.*

Практика

2578.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера.Обозначим общий член ряда как

$$a_n=\frac{1000^n}{n!}.$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1}=\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}}=\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1000^n}=\frac{1000^n\cdot 1000}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!}{1000^n}=\frac{1000}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Так как полученный предел $q=0$, и $q<1$, то, согласно признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

2579.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Применим признак Даламбера. Общий член ряда

$$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Тогда следующий член ряда:

$$a_{n+1}=\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$$

Найдём предел отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)=$$

Используя свойства факториала $(n+1)!=(n+1)\cdot n!$ и $(2n+2)!=(2n+2)(2n+1)(2n)!$, упростим выражение:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)\cdot n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=$$

После сокращения $(n!)^2$ и $(2n)!$ получаем:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=$$

Разделим числитель и знаменатель на старшую степень n^2:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1+0+0}{4+0+0} = \frac{1}{4}.$$

Так как предел $q = \frac{1}{4} < 1$, то по признаку Даламбера исходный ряд сходится.

2580.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Применим признак Даламбера. Общий член ряда

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

Тогда следующий член ряда:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

Найдём предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \right) =$$

Используя свойства факториала $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ и степеней $(n+1)^{n+1} = (n+1)\cdot(n+1)^n$, упростим выражение:

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!} \right) =$$

После сокращения $(n+1)$ и $n!$ получаем:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Здесь мы использовали второй замечательный предел: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Так как предел $q = \frac{1}{e} < 1$ (поскольку $e \approx 2.718$), то по признаку Даламбера исходный ряд сходится.

2582.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

Применим признак Даламбера. Общий член ряда $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. Тогда следующий член ряда:

$$a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}$$

Найдём предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} \right) =$$

Сгруппируем члены с факториалами и степенями:

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{(n+1)\cdot n!}{n!} \right)^2 \cdot 2^{n^2-(n+1)^2} \right) =$$

Упростим выражение в показателе степени: $n^2 - (n+1)^2 = n^2 - (n^2+2n+1) = -2n-1$.

$$= \lim_{n\to\infty} \left((n+1)^2 \cdot 2^{-2n-1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Предел равен нулю, так как экспоненциальная функция в знаменателе 2^{2n+1} растет быстрее любой степенной функции в числителе $(n+1)^2$. Так как предел $q = 0 < 1$, то по признаку Даламбера исходный ряд сходится.

2583.

$$\frac{1000}{1} + \frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3} + \frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5} + \dots$$

Сначала запишем общий член ряда a_n. Числитель n-го члена представляет собой произведение n чисел, начиная с 1000: $1000 \cdot 1001 \cdot \dots \cdot (1000+n-1)$. Знаменатель n-го члена представляет собой произведение первых n нечётных чисел: $1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)$. Таким образом, общий член ряда имеет вид:

$$a_n = \frac{1000\cdot 1001\cdot \dots \cdot (1000+n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)}$$

Применим признак Даламбера. Для этого запишем следующий член ряда a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \frac{1000\cdot 1001\cdot \dots \cdot (1000+n-1)\cdot (1000+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}$$

Найдём предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000\cdot\dots\cdot(1000+n)}{1\cdot\dots\cdot(2n+1)}}{\frac{1000\cdot\dots\cdot(1000+n-1)}{1\cdot\dots\cdot(2n-1)}} =$$

Большинство множителей в числителе и знаменателе сокращаются:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1000+n}{2n+1} =$$

Чтобы найти предел, разделим числитель и знаменатель на n:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1000}{n}+1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{0+1}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Так как предел $q = \frac{1}{2} < 1$, то по признаку Даламбера исходный ряд сходится.

2584.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}.$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)(3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)(4n+2)}.$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4\cdot 7\cdots(3n+1)(3n+4)}{2\cdot 6\cdots(4n-2)(4n+2)}}{\frac{4\cdot 7\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdots(4n-2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+4/n}{4+2/n} = \frac{3}{4}.$$

Так как полученный предел $q = \frac{3}{4}$, и $q < 1$, то, согласно признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

2585.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}).$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1} = (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}).$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2})}{(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}).$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+3]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2n+3}} = 2^0 = 1$, предел равен:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt{2} - 1.$$

Так как полученный предел $q = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$, и $q < 1$, то, согласно признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

2586.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся радикальным признаком Коши. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Вычислим предел корня n-ой степени из общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, предел равен:

$$\frac{1^2}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Так как полученный предел $q = \frac{1}{2}$, и $q < 1$, то, согласно признаку Коши, исходный ряд сходится.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Рассмотрим предел $L = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$. Для его вычисления воспользуемся свойством непрерывности логарифмической и показательной функций. Прологарифмируем выражение под знаком предела:

$$\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln(n) = \frac{\ln(n)}{n}.$$

Теперь найдем предел этого выражения при $n \to \infty$. Мы имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, поэтому можем применить правило Лопиталя.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n))'}{(n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Мы нашли, что предел логарифма исходного выражения равен 0. Чтобы найти исходный предел L, мы потенцируем полученный результат:

$$L = e^{\lim_{n\to\infty} \ln(n^{\frac{1}{n}})} = e^0 = 1.$$

Таким образом, доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

2587.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся радикальным признаком Коши. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Вычислим предел корня n-ой степени из общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{(n+1/n)\cdot 1/n}}{n+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+1/n^2}}{n+\frac{1}{n}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на n, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot n^{1/n^2}}{n(1+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n^2]{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Так как полученный предел $q = 1$, то признак Коши не даёт ответа. Проверим выполнение необходимого признака сходимости: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Преобразуем общий член ряда:

$$a_n = \frac{n^n \cdot n^{1/n}}{\left(n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^n} = \frac{n^n \cdot \sqrt[n]{n}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}.$$

Найдем его предел:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n}} = \frac{1}{e^0} = 1.$$

Так как предел общего члена ряда не равен нулю ($\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$), необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

2588.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

Для доказательства расходимости ряда проверим выполнение необходимого признака сходимости. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$$

Вычислим предел общего члена ряда при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)^{1/n}}.$$

Рассмотрим предел знаменателя $L = \lim_{n\to\infty} (\ln n)^{1/n}$. Это неопределенность вида $[\infty^0]$. Прологарифмируем его:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left((\ln n)^{1/n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n}.$$

Применяя правило Лопиталя для неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(\ln n))'}{(n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\ln n}}{1} = 0.$$

Следовательно, предел знаменателя равен $L = e^0 = 1$. Тогда предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1} = 1.$$

Так как предел общего члена ряда не равен нулю ($\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$), необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

2589.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{n+1/2}}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся радикальным признаком Коши. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{n+1/2}}.$$

Вычислим предел корня n-ой степени из общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{n+1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{(n-1)/n}}{(2n^2+n+1)^{(n+1/2)/n}}.$$

Упростим степени в числителе и знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-1/n}}{(2n^2+n+1)^{1+1/(2n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^{-1/n}}{(2n^2+n+1)\cdot(2n^2+n+1)^{1/(2n)}}.$$

Разделим предел на произведение нескольких пределов:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n^2+n+1}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n^2+n+1)^{1/(2n)}}.$$

Вычислим каждый из них по отдельности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2+n+1} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n^2+n+1)^{1/(2n)}} = 1, \text{ поскольку это предел вида } \frac{1}{\infty^0} \text{ и } \lim_{n\to\infty} (\text{полином})^{1/n} = 1.$$

Предел всего произведения равен:

$$q = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0.$$

Так как полученный предел $q = 0$, и $q < 1$, то, согласно признаку Коши, исходный ряд сходится.

2589.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$$

Для исследования сходимости воспользуемся признаком сравнения. Оценим общий член ряда $a_n = \frac{n^5}{2^n+3^n}$. Так как $2^n + 3^n > 3^n$, то

$$\frac{n^5}{2^n+3^n} < \frac{n^5}{3^n}.$$

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$ с помощью радикального признака Коши.

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[n]{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^5}{3}.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, предел равен:

$$q = \frac{1^5}{3} = \frac{1}{3}.$$

Так как $q < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$ сходится. Следовательно, по признаку сравнения, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$ также сходится.

2589.2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

Для исследования сходимости воспользуемся радикальным признаком Коши. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

Вычислим предел корня n-ой степени из общего члена ряда:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}.$$

Мы имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Преобразуем выражение, чтобы использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{n-1}{n+1}}.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-2}$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$, предел равен:

$$q = (e^{-2})^1 = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Так как полученный предел $q = \frac{1}{e^2} \approx \frac{1}{7.389} < 1$, то, согласно признаку Коши, исходный ряд сходится.

2595.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$$

Для исследования сходимости воспользуемся признаком сравнения. Оценим числитель общего члена $a_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n}$. Так как $(-1)^n$ принимает значения 1 (для четных n) и -1 (для нечетных n), то

$$1 \le 2 + (-1)^n \le 3.$$

Следовательно, для общего члена ряда справедливо неравенство:

$$a_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \le \frac{3}{2^n}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Это сходящийся геометрический ряд, так как его знаменатель $q = \frac{1}{2} < 1$. Поскольку члены исходного ряда меньше членов сходящегося ряда, то, согласно признаку сравнения, исходный ряд сходится.

2596.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos^2(n\pi/3)}{2^n}$$

Для исследования сходимости воспользуемся признаком сравнения. Оценим общий член ряда $a_n = \frac{a \cos^2(n\pi/3)}{2^n}$. Так как функция косинуса ограничена, для ее квадрата справедливо неравенство:

$$0 \le \cos^2(n\pi/3) \le 1.$$

Тогда для модуля общего члена ряда (при $a \neq 0$) имеем:

$$|a_n| = \left|\frac{a \cos^2(n\pi/3)}{2^n}\right| = \frac{|a| \cos^2(n\pi/3)}{2^n} \le \frac{|a|}{2^n}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|}{2^n} = |a| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Этот ряд является сходящимся геометрическим рядом со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$. Поскольку исходный ряд сходится абсолютно (его члены по модулю меньше членов сходящегося ряда), он сходится.