Ортогональность многочленов Чебышева

Условие

Доказать, что многочлены Чебышева первого рода образуют ортогональную по весу

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

на отрезке $[-1, 1]$ систему.

Алгоритм решения

В гильбертовом пространстве система функций $\{\varphi_i\}$ ортогональна, если $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ $\forall i \neq j$.

Возьмем гильбертово пространство $L_2[-1, 1]$ с весом $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. В данном случае

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int\limits_{-1}^{1} p(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx.$$

Также, поскольку система функций является системой многочленов Чебышева, то

$$\varphi_k(x) = T_k(x) = \cos(k \arccos x).$$

Найдем скалярное произведение двух производных функций из системы многочленов Чебышева:

$$(T_i(x), T_j(x)) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos(i \arccos x)\cos(j \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{bmatrix} \arccos x = t, & x = \cos t \\ x = -1 \to t = \pi, & x = 1 \to t = 0 \\ dx = -\sin t dt & \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos(it)\cos(jt)}{\sqrt{1-\cos t^2}} \sin t \ dt = \int\limits_{0}^{\pi} \cos(it)\cos(jt)dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} \cos((i+j)t) + \cos((i-j)t)dt =$$

$$= \frac{1}{2(i+j)} \sin((i+j)t)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2(i-j)} \sin((i-j)t)\Big|_0^{\pi} = 0, \quad i \neq j.$$

Таким образом, система многочленов Чебышева при заданных условиях является ортогональной.