Уравнение в полных дифференциалах (УПД).

Условие. $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ и $P'_y=Q'_x$.

Решение.

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy=C.$$

Уравнение с разделенными переменными.

Условие. $P(x)dx+Q(y)dy=0$.

Решение.

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(y)dy=C.$$

Интегрирующий множитель.

Условие. $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ и $P'_y\neq Q'_x$.

Решение.

$$\frac{P'_y-Q'_x}{Q\omega'_x-P\omega'_y}=\psi(\omega)\quad\Rightarrow\quad\mu(\omega)=e^{\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\psi(\tau)d\tau}\quad\Rightarrow\quad\mu(\omega)\cdot P(x,y)dx+\mu(\omega)\cdot Q(x,y)dy=0\text{ — УПД.}$$

Уравнения с разделяющимися переменными (УРП).

Условие. $P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$.

Решение.

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0\quad\Rightarrow\quad\int\limits_{x_0}^{x}\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=C.$$

Линейные уравнения первого порядка (ЛУ-1).

Условие. $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$.

Решение.

$$y=e^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}\cdot\Big(C+\int\limits_{x_0}^{x}Q(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau}dt\Big).$$

Уравнение Бернулли.

Условие. $y'+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^m$.

Решение.

$$u=y^{1-m}\quad\Rightarrow\quad u'+(1-m)\cdot P(x)\cdot u=(1-m)\cdot Q(x)\text{ — ЛУ-1.}$$

$$y^{1-m} = e^{(m-1)\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} \cdot \Big(C + (1-m) \int\limits_{x_0}^{x} Q(t) \cdot e^{(1-m)\int\limits_{t_0}^{t} P(\tau)d\tau} dt \Big).$$