МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра компьютерных технологий и систем

**Отчет по лабораторной работе №2**
**«Решение смешанных задач для уравнения теплопроводности»**
**Вариант 9**

Пяловой Елизаветы Сергеевны
студентки 3 курса
специальности «прикладная математика»

Преподаватель:

И. С. Козловская

Минск, 2024 г.

# Постановка задачи

Решить следующую смешанную задачу

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin \dfrac{5\pi}{l} x. \end{cases} \tag{1}$$

# Решение задачи в пакете Wolfram Mathematica

Перепишем данную задачу в Wolfram Mathematica

```
In[25]:= $Assumptions = {l > 0, t > 0, 0 < x < l, lambda ≠ 0};
         eq = u^(0,1)[x, t] - u^(2,0)[x, t] == 0;
         cc = {u[0, t] == 1, u[l, t] == 0};
         bc = u[x, 0] == Sin[(5 Pi x) / l]

Out[28]= u[x, 0] == Sin[5 π x / l]
```

Так как уравнение в задаче (1) является однородным, а граничные условия неоднородными, то решение будем искать в виде

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t), \tag{2}$$

где функцию $w(x,t)$ ищем в виде

$$w(x,t) = a(t)x + b(t). \tag{3}$$

Необходимо, чтобы функция $w(x,t)$ удовлетворяла граничным условиям

$$w(0,t) = 1, \;\; w(l,t) = 0.$$

Найдем такую функцию с помощью Wolfram Mathematica

```
In[29]:= w[x_, t_] = a[t] x + b[t]

Out[29]= x a[t] + b[t]

In[36]:= Solve[w[0, t] == 1]

Out[36]= {{b[t] → 1}}

In[37]:= Solve[{(w[x, t] /. {x → l, b[t] → 1}) == 0}, a[t]]

Out[37]= {{a[t] → -1/l}}
```

то есть

$$w(x,t) = w(x) = 1 - \frac{x}{l}. \tag{4}$$

Очевидно, что $w_t = w_{xx} = 0$. В итоге при подстановке решения

$$u(x,t) = 1 - \frac{x}{l} + v(x,t) \tag{5}$$

в уравнение задачи (1) мы получим новую задачу с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, \\ v|_{x=0} = 0, \\ v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = \sin \dfrac{5\pi}{l} x - 1 + \dfrac{x}{l}. \end{cases} \tag{6}$$

В задаче (6) однородное уравнение и однородные граничные условия, поэтому будем искать его решение в виде

$$v(x,t) = T(t)X(x), \;\; T(t) \not\equiv 0, X(x) \not\equiv 0. \tag{7}$$

Подставим данный вид решения в уравнение задачи (6)

$$T'(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0.$$

По методу разделения переменных разделим это уравнение на $a^2 T(t)X(x)$ и получим

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Отсюда получаем два ОДУ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \tag{8}$$
$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0. \tag{9}$$

Используя граничные условия задачи (6), составим задачу Штурма-Лиувилля для уравнения (8)

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Найдем решение этой задачи в Wolfram Mathematica

```
In[8]:= eq2 = D[X[x], {x, 2}] + lambda^2 * X[x] == 0;

In[9]:= DSolve[eq2, X[x], x]
Out[9]= {{X[x] → c1 Cos[lambda x] + c2 Sin[lambda x]}}

In[21]:= solf[x_] = c1 Cos[lambda * x] + c2 Sin[lambda * x]
Out[21]= c1 Cos[lambda x] + c2 Sin[lambda x]

In[22]:= Solve[solf[0] == 0]
Out[22]= {{c1 → 0}}

In[23]:= Solve[{(solf[x] /. {x → l, C[1] → 0}) == 0}, lambda]
Out[23]= {{lambda → (2 π c1)/l if c1 ∈ ℤ && c1/l ≠ 0}, {lambda → (π + 2 π c1)/l if c1 ∈ ℤ && (π + 2 π c1)/l ≠ 0}}
```

то есть

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2 \ldots. \tag{11}$$

Найдем общее решение уравнения (9) с помощью Wolfram Mathematica

```
In[35]:= Simplify[DSolve[Derivative[1][T][t] + (π n / l)^2 T[t] == 0, T[t], t]]
```

Out[35]= $\left\{\left\{T[t] \to e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{l^2}} c_1\right\}\right\}$

то есть

$$T_n(t) = C_1 e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} t}. \tag{12}$$

Подставляем (11) и (12) в общий вид (7) и получим

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{13}$$

Подставляя в (13) начальное условие задачи (6), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_1 \sin \frac{\pi n}{l} x = \sin \frac{5\pi}{l} x - 1 + \frac{x}{l},$$

то есть $C_1$ — это коэффициент разложения функции справа в ряд Фурье по собственным функциям

$$C_1 = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \left( \sin \frac{5\pi}{l} x - 1 + \frac{x}{l} \right) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Найдем значение этого интеграла с помощью Wolfram Mathematica

In[36]:= $\dfrac{2 \int_0^l \left(x/l - 1 + \mathrm{Sin}\left[\frac{5 \pi x}{l}\right]\right) \mathrm{Sin}\left[\frac{\pi n x}{l}\right] dx}{l}$

Out[36]= $-\dfrac{2 \left(n \left(-25 + n^2\right) \pi + \left(25 + n^2 \left(-1 + 5 \pi\right)\right) \mathrm{Sin}[n \pi]\right)}{n^2 \left(-25 + n^2\right) \pi^2}$

Поскольку $\sin \pi n = 0$, то, сократив, получим

$$C_1 = -\frac{2}{\pi n}. \tag{14}$$

Подставим (14) в (13) и получим

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi n} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{15}$$

Складывая (4) и (15) в соответствии с (2), получим итоговый вид решения задачи (1)

$$u(x,t) = 1 - \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi n} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{16}$$

Для проверки подставим $n$-ое слагаемое суммы (16) в задачу (1)

In[38]:= Simplify[{eq, cc, bc} /.

$u \to \mathrm{Activate}\left[\mathrm{Function}\left[\{x, t\}, 1 - \frac{x}{l} - \dfrac{2 e^{-\frac{\pi^2 t K[1]^2}{l^2}} \mathrm{Sin}\left[\frac{\pi x K[1]}{l}\right]}{\pi K[1]}\right]\right]]$

Out[38]= $\left\{\mathrm{True}, \left\{\mathrm{True}, \frac{\mathrm{Sin}[\pi K[1]]}{K[1]} == 0\right\}, \frac{x}{l} + \mathrm{Sin}\left[\frac{5 \pi x}{l}\right] + \frac{2 \mathrm{Sin}\left[\frac{\pi x K[1]}{l}\right]}{\pi K[1]} == 1\right\}$

то есть $T_n(t)X_n(x)$ удовлетворяют уравнению и граничным условиям (второе условие также выполнено, так как $\sin \pi n = 0$). Для третьего условия получилось равенство

$$\frac{x}{l} - 1 + \sin \frac{5\pi}{l} x = -\frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{l},$$

где значение справа соответствует одному из коэффициентов разложения в ряд Фурье функции слева, то есть условие тоже выполняется (если бы мы подставляли бесконечную сумму). Таким образом, решение задачи (1) задано функцией.

Теперь найдем решение задачи (1) через команду DSolve

```
In[25]:= DSolve[{eq, bc, cc}, u, {x, t}]
```

$$\text{Out[25]=} \left\{\left\{u \to \text{Function}\left[\{x, t\}, 1 - \frac{x}{l} + \sum_{K[1]=1}^{\infty} -\frac{2\, e^{-\frac{\pi^2 t K[1]^2}{l^2}} \, \text{Sin}\left[\frac{\pi x K[1]}{l}\right]}{\pi K[1]}\right]\right\}\right\}$$

что совпадает с построенным нами решением.

# Вывод

Таким образом, мы нашли решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом разделения переменных, а затем проверили, правильно ли оно было вычислено, с помощью Wolfram Mathematica.