ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАБОЛЕВАНИЙ

Гут Валерия Александровна

Научный руководитель: С.В. Лобач

Цели и задачи работы

- Объектом исследования является модель SIR (Susceptible-Infectious-Recovered), основанная на разделении населения на три группы.
- Целью курсовой работы является рассмотрение базовой модели SIR и ее рандомизации.

Математические модели распространения заболеваний

- классическая модель SI (Susceptible-Infectious);
- базовая модель SIR (Susceptible-Infectious-Recovered);
- расширения модели SIR.

Модель SI

Классическая модель SI разбивает предполагает, что все население делится на две группы:

- $S(t) = \{$люди, подверженные заболеванию (susceptible) в момент времени $t\}$;
- $I(t) = \{$инфицированные люди (infectious) в момент времени $t\}$.

Введем также обозначение $N = \mathrm{const}$ — общая численность населения. Ввиду этих обозначений имеет место запись $S(t) + I(t) = N$. Скорость изменения числа здоровых и больных людей задается системой ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\, S(t)}{\mathrm{d}\, t} = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\, I(t)}{\mathrm{d}\, t} = \beta \cdot S(t) \cdot I(t), \end{cases} \tag{1}$$

где β – вероятность заражения здорового человека при контакте с больным.

Базовая модель SIR

Модель SIR основана на разделении населения на три группы:

- $S(t) = \{$люди, подверженные заболеванию (susceptible) в момент времени $t\}$;
- $I(t) = \{$инфицированные люди (infectious) в момент времени $t\}$;
- $R(t) = \{$люди, имеющие иммунитет к болезни (recovered)$\}$.

Тогда $S + I + R = N$, где $N = \mathrm{const}$ – общая численность населения. Модель SIR задается в общем виде системой ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,S(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,I(t)}{\mathrm{d}\,t} = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,R(t)}{\mathrm{d}\,t} = \gamma \cdot I(t), \end{cases} \tag{2}$$

где γ – интенсивность выздоровления.

Модель SIRS

Модель SIRS (Susceptible-Infected-Recovered-Susceptible) является вариацией модели SIR, которая учитывает возможность повторного заражения после выздоровления (потери иммунитета). В модели SIRS существует циклическое движение между состояниями подверженных (S), инфицированных (I) и восстановленных (R). Эта модель задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,S(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) + \lambda \cdot R(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,I(t)}{\mathrm{d}\,t} = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,R(t)}{\mathrm{d}\,t} = \gamma \cdot I(t) - \lambda \cdot R(t), \end{cases} \tag{3}$$

где число λ определяет вероятность потери иммунитета и перехода из группы $R(t)$ в группу $I(t)$.

SEIR-модель

В SEIR модели предполагается, что инфекция имеет инкубационный (exposed) период, в течение которого люди инфицированы, но еще не заразны. Эта группа людей обозначается через $E(t)$. С учетом нового класса получаем следующую структуру популяции:
$S + E + I + R = N = \mathrm{const}\,.$
Модель SEIR задается в общем виде системой ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,S(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\beta \cdot I(t) \cdot S(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,E(t)}{\mathrm{d}\,t} = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \sigma \cdot E(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,I(t)}{\mathrm{d}\,t} = \sigma \cdot E(t) - \gamma \cdot I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,R(t)}{\mathrm{d}\,t} = \gamma \cdot I(t). \end{cases} \tag{4}$$

параметр σ^{-1} представляет собой среднюю продолжительность инкубационного периода.

Модели SIR с учетом смертности и рождаемости

Пусть $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ коэффициенты рождаемости и смертности популяции соответственно. Система ОДУ для SIR-модели в предположении, что все рожденные являются здоровыми людьми, имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,S(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) + \lambda \cdot N(t) - \mu \cdot S(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,I(t)}{\mathrm{d}\,t} = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) - \mu \cdot I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,R(t)}{\mathrm{d}\,t} = \gamma \cdot I(t) - \mu \cdot R(t), \end{cases} \tag{5}$$

где $S(t) + I(t) + R(t) = N(t)$.

Складывая все уравнения системы, мы получаем уравнение Мальтуса для численности популяции

$$\frac{\mathrm{d}\,N(t)}{\mathrm{d}\,t} = (\lambda - \mu) \cdot N(t). \tag{6}$$

Модель MSIR

Модель MSIR (M – «maternally derived immunity») включает класс $M(t)$ (для материнского иммунитета) в начало модели. Модель MSIR с учетом смертности и рождаемости описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,M(t)}{\mathrm{d}\,t} = \lambda \cdot N(t) - \delta \cdot M(t) - \mu \cdot M(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,S(t)}{\mathrm{d}\,t} = \delta \cdot M(t) - \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \mu \cdot S(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,I(t)}{\mathrm{d}\,t} = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot S(t) - \mu \cdot I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,R(t)}{\mathrm{d}\,t} = \gamma \cdot I(t) - \mu \cdot R(t), \end{cases} \tag{7}$$

где $S(t) + I(t) + R(t) + M(t) = N(t)$.

Модель MSEIR

Модель MSEIR (M – наделенные иммунитетом от рождения, S – восприимчивые, E – контактные, I – инфицированные, R – выздоровевшие) – одна из самых сложных для анализа в силу наличия большого числа независимых параметров. Система уравнений для нее имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,M(t)}{\mathrm{d}\,t} = \lambda \cdot N(t) - \delta \cdot M(t) - \mu \cdot M(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,S(t)}{\mathrm{d}\,t} = \delta \cdot M(t) - \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \mu \cdot S(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,E(t)}{\mathrm{d}\,t} = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - (\sigma + \mu) \cdot E(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,I(t)}{\mathrm{d}\,t} = \sigma \cdot E(t) - (\gamma + \mu) \cdot I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\,R(t)}{\mathrm{d}\,t} = \gamma \cdot I(t) - \mu \cdot R(t). \end{cases} \tag{8}$$

где $M(t)$ – численность индивидов с приобретенным внутриутробно иммунитетом.

Рандомизация базовой SIR модели

Произведем обобщение базовой SIR-модели, добавив к ней рандомизацию.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\, S(t)}{\mathrm{d}\, t} = -\Big(\beta + \sigma_1 \cdot dW(t)\Big) \cdot S(t) \cdot I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\, I(t)}{\mathrm{d}\, t} = \Big(\beta + \sigma_1 \cdot dW(t)\Big) \cdot S(t) \cdot I(t) - \Big(\gamma + \sigma_2 dW(t)\Big) \cdot I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}\, R(t)}{\mathrm{d}\, t} = \Big(\gamma + \sigma_2 dW(t)\Big) \cdot I(t), \end{cases} \tag{9}$$

где $dW(t)$ – производная стохастического винеровского процесса, введенная в систему дифференциальных уравнений исходя из предположения, что внешние случайные возмущения представляют собой белый шум; σ_1, σ_2 – это константы, описывающие интенсивность стохастического окружения для процессов инфицирования и выздоровления соответственно.

Приближенное численное решение задачи Коши для базовой модели SIR

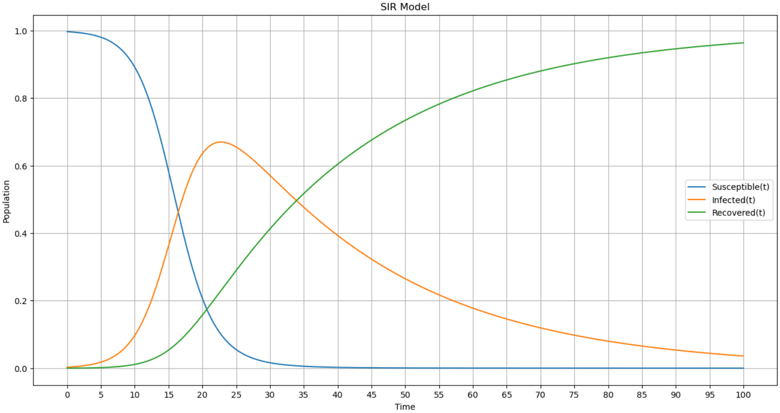

Рис.: Зависимость S, I, R от времени при начальных условиях $S(0) = 997$, $I(0) = 3$, $R(0) = 0$ интенсивности инфицирования $\beta = 0.4$ и интенсивности выздоровления $\gamma = 0.04$

Приближенное численное решение задачи Коши для рандомизированной модели SIR

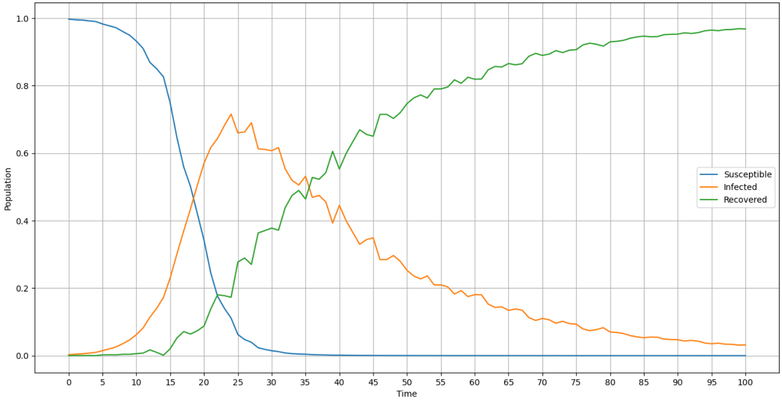

Рис.: Зависимость S, I, R от времени при начальных условиях $S(0) = 997$, $I(0) = 3$, $R(0) = 0$ интенсивности инфицирования $\beta = 0.4$ и интенсивности выздоровления $\gamma = 0.04$ при $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.05$

Заключение

Основными результатами работы являются построение, исследование базовой и рандомизированной моделей SIR для распространения заболеваний.

Список используемых источников

1. Statistical forecasting of the dynamics of epidemiological indicators for COVID-19 incidence in the Republic of Belarus / Yu. S. Kharin, V. A. Valoshka, O. V. Dernakova, V. I. Malugin, A. Yu. Kharin// Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. - 2020. - № 3. - C. 36-50
2. Methods of intellectual data analysis in COVID-19 research / O. V. Senko, A. V. Kuznetsova, E. M. Voronin, O. A. Kravtsova, L. R. Borisova, I. L. Kirilyuk, V. G. Akimkin// Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2022. – № 1. – C. 83-96
3. Детерминированные и стохастические модели распространения инфекции и тестирование в изолированном контингенте/ Чигарев, А. В.,Журавков, М. А.,Чигарев, В. А.// Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика - 2021. - № 3. - С. 57-67