Фазовая плоскость. Классификация точек покоя.

Пусть линейное уравнение имеет вид

$$D^2x + a_1Dx + a_0x = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

• ***Фазовым графиком*** *решения $x(t)$ называется график параметрически заданной функции вида*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = Dx(t); \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

• *Решение, сохраняющее постоянное значение при всех t, называется* ***стационарным****.*

Фазовый график стационарного решения $x(t) \equiv C$ состоит из единственной точки $(C, 0)$.

• *Точка, являющаяся фазовым графиком стационарного решения, называется* ***точкой покоя*** *уравнения.*

Любое уравнение вида (1) имеет стационарное решение $x(t) \equiv C$. Следовательно, точка $O(0, 0)$ является точкой покоя для этого уравнения.

Пусть λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения для уравнения (1). Тогда тип точки покоя O при $a_0 \neq 0$ определяется следующим образом:

1. Если λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ и
   (a) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, то точка покоя называется **седлом**;
   (b) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то точка покоя называется **бикритическим узлом**, причем, при $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ **устойчивым**; при $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ **неустойчивым**;
   (c) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$, то точка покоя называется **монокритическим узлом**, причем, при $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ **устойчивым**; при $\lambda_2 = \lambda_1 > 0$ **неустойчивым**;
2. Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ и
   (a) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, то точка покоя называется **фокусом**, причем, при $\alpha < 0$ **устойчивым**; при $\alpha > 0$ **неустойчивым**;
   (b) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, то точка покоя называется **центром**.

Если линейное уравнение имеет вид $D^2x + a_1Dx = 0$, где $a_1 \geqslant 0$, то прямая $y = 0$ состоит из точек покоя и называется **прямой покоя**.

Пример 1. Установить тип точки покоя для уравнения

$$D^2x - 4Dx + 3 = 0.$$

Решение. Найдем корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Таким образом, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Следовательно, точка покоя O — неустойчивый бикритический узел.

Ответ: O — неустойчивый бикритический узел.

Пример 2. Установить тип точки покоя для уравнения

$$D^2x + 9Dx = 0.$$

Решение. Так как коэффициент $a_0 = 0$, то прямая $y = 0$ является прямой покоя.

Ответ: $y = 0$ — прямая покоя.

Пример 3. Определить тип точки покоя уравнения

$$D^2x + 3\alpha Dx + 3x = 0$$

в зависимости от значений параметра α.

Решение. Построим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 3\alpha\lambda + 3 = 0.$$

Тогда корни уравнения имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{-3\alpha + \sqrt{9\alpha^2 - 12}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-3\alpha - \sqrt{9\alpha^2 - 12}}{2}.$$

1. Пусть $9\alpha^2 - 12 > 0$. Тогда $|\alpha| > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Подставим α в λ_1 и λ_2 и получим $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{9\alpha^2 - 9\alpha^2 + 12}{4} = 3 > 0,$$
следовательно, точка O — бикритический узел. Причем при $\alpha > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ получаем устойчивый бикритический узел, а при $\alpha < -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ — неустойчивый.

2. Пусть $9\alpha^2 - 12 = 0$. Тогда $|\alpha| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Подставим α в λ_1 и λ_2 и получим $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{3}{2}$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Таким образом, точка O — монокритический узел. Причем при $\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ получаем устойчивый бикритический узел, а при $\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ — неустойчивый.

3. Пусть $9\alpha^2 - 12 < 0$. Тогда получаем два случая:
   (a) $0 < |\alpha| < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ и $\alpha \neq 0$. Тогда точка O — фокус, причем при $0 < \alpha < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ устойчивый, а при $0 > \alpha > -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ неустойчивый.
   (b) $\alpha = 0$. Таким образом, $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, и точка O — центр.