МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе №1
«Решение задач Коши и Гурса для уравнений в частных производных второго порядка при помощи Wolfram Mathematica»
Вариант 2

Бовта Тимофея Анатольевича
студента 3 курса
специальности «прикладная математика»

Преподаватель:

И. С. Козловская

Минск, 2024 г.

Постановка задачи.

Дана задача

$$\begin{cases} u_{xy} + xu_y = y, \\ u|_{x=0} = 1, \\ u|_{y=0} = x + 1. \end{cases}$$

- найти решение данной задачи Коши или Гурса;
- проверить полученное решение путем подстановки в уравнение и условия задачи;
- построить график поверхности $z = u(x, y)$, где u – решение задачи.

Решение задачи.

Сперва зададим задачу и граничные условия в Wolfram Mathematica:

```
In[1]:= eq = Derivative[1, 1][u][x, y] + x*Derivative[0, 1][u][x, y] == y;
        cc = {u[0, y] == 1, u[x, 0] == x + 1}

Out[2]= {u[0, y] == 1, u[x, 0] == 1 + x}
```

Определимся с тем, что перед нами поставлена задача Гурса. Так как исходное уравнение является уравнением гиперболического типа, а условия – краевыми (в случае задачи Коши условия являются начальными).

Проверим выполнение условий согласования, то есть оба условия должны выполняться на множестве, где для всех x и y выполняется

$$u(0, y) = u(x, 0).$$

```
In[3]:= intersect = Solve[{x == 0, y == 0}, {x, y}]

Out[3]= {{x -> 0, y -> 0}}

In[4]:= cc[[1, 2]] == cc[[2, 2]] /. intersect[[1]]

Out[4]= True
```

Таким образом, условия поставленной задачи Гурса согласованы.

Вернемся к рассмотрению исходного уравнения в поставленной задаче. Можно заметить, что данное уравнение уже является уравнением гиперболического типа в каноническом виде. Более того мы можем найти его общее решение, применим замену

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v(x, y).$$

Тогда при подстановке исходное уравнение примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} + xv = y.$$

Полученное уравнение является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛОДУ-1). Мы можем найти его решение с помощью Wolfram Mathematica:

```
In[5]:= vsol = DSolve[Derivative[1, 0][v][x, y] + x*v[x, y] == y, v, {x, y}]
```

$$\text{Out[5]= } \left\{\left\{v \to \text{Function}\left[\{x, y\}, e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y\, \text{Erfi}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right] + e^{-\frac{x^2}{2}} c_1[y]\right]\right\}\right\}$$

Решение данного уравнения мы также можем найти и самостоятельно. Для этого необходимо домножить данное уравнение на $e^{\int_0^x x dx}$, свернуть левую часть уравнения как производную произведения, а затем проинтегрировать обе части уравнения по x. В итоге получим

$$v(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}} C_1(y) + y e^{-\frac{x^2}{2}} \underbrace{\int\limits_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt}_{\sqrt{\frac{\pi}{2}} erfi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} .$$

Теперь делаем обратную замену, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-\frac{x^2}{2}} C_1(y) + y e^{-\frac{x^2}{2}} \int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

Проинтегрируем данное уравнение по y. Сперва с помощью Wolfram Mathematica:

```
In[6]:= usol = DSolve[Derivative[0, 1][u][x, y] == v[x, y] /.
vsol[[1]], u, {x, y}]
```

$$\text{Out[6]= } \left\{\left\{u \to \text{Function}\left[\{x, y\}, c_2[x] + \int_1^y \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\sqrt{2\pi}\, \text{Erfi}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right] \times K[1] + 2\, c_1[K[1]]\right) dK[1]\right]\right\}\right\}$$

Данная запись является слишком сложной для дальнейшей работы. Проинтегрируем вручную и проведем некоторые преобразования для упрощения уравнения:

$$u(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int\limits_0^y C_1(\eta) d\eta + \int\limits_0^y \eta e^{-\frac{x^2}{2}} \int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi d\eta + C_2(x).$$

Сделаем замену

$$\int\limits_0^y C_1(\eta) d\eta = C_1(y),$$

где функция $C_1(y)$ справа, вообще говоря, отлична от подынтегральной функции слева, но для упрощения записи будем использовать такое обозначение, так как оно не повлияет на дальнейшее решение. Тогда, если переставить местами интегралы, имеем

$$u(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}} C_1(y) + e^{-\frac{x^2}{2}} \int\limits_0^y \eta d\eta \int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C_2(x).$$

Интеграл по η мы можем вычислить. В итоге имеем более простую запись решения исходной задачи

$$u(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}} C_1(y) + \frac{y^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C_2(x).$$

В Wolfram Mathematica переопределим замену usol согласно сделанным преобразованиям. Также Подставим в эту функцию условия на характеристиках из исходной задачи. При этом используем также функцию «Activate», раскрывающую так называемые неактивные интегралы. В итоге имеем

```
In[7]:= usol =
        u -> Function[{x, y}, E^(-x^2/2)*C[1][y] + C[2][x] +
              y^2/2*E^(-x^2/2)*Inactive[Integrate][E^(t^2/2), {t, 0, x}]];
newcc = Activate[cc /. usol]
```

$$\text{Out[8]= } \left\{ c_1[y] + c_2[0] == 1,\ e^{-\frac{x^2}{2}} c_1[0] + c_2[x] == 1 + x \right\}$$

То есть мы получили систему уравнений относительно функций $C_1(y)$ и $C_2(x)$

$$\begin{cases} C_1(y) + C_2(0) = 1, \\ e^{-\frac{x^2}{2}} C_1(0) + C_2(x) = 1 + x. \end{cases}$$

Решив ее, мы найдем значения для $C_1(y)$ и $C_2(x)$, подставляя которые в решение исходного уравнения, мы найдем вид решения поставленной задачи Гурса.

Из первого уравнения системы выразим $C_1(y)$, причем заменив $C_2(0) = t$. Имеем

```
In[9]:= c1sol = RSolve[newcc[[1]] /. C[2][0] -> t, C[1], y]
```

$$\text{Out[11]= } \{\{c_1 \to \text{Function}[\{y\}, 1 - t]\}\}$$

Получившуюся функцию подставим во второе уравнение системы:

```
In[12]:= newcc[[2]] /. c1sol[[1]] /. C[2][0] -> t
```

$$\text{Out[12]= } e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - t) + c_2[x] == 1 + x$$

Найдем функцию $C_2(x)$:

```
In[13]:= c2sol = RSolve[%, C[2], x]
```

$$\text{Out[13]= } \left\{\left\{c_2 \to \text{Function}\left[\{x\},\ e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-1 + e^{\frac{x^2}{2}} + t + e^{\frac{x^2}{2}} x\right)\right]\right\}\right\}$$

Подставляем найденные $C_1(y)$ и $C_2(x)$ в полученное ранее решение. Тогда

```
In[18]:= u[x, y] /. usol /.c1sol[[1]] /. c2sol[[1]]
```

$$\text{Out[20]= } e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - t) + e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-1 + e^{\frac{x^2}{2}} + t + e^{\frac{x^2}{2}} x\right) + \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} y^2 \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \, dt$$

Для того, чтобы избавиться от введенной постоянной t, упростим выражение:

```
In[19]:= % // Simplify
```

$$\text{Out[21]= } 1 + x + \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} y^2 \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \, dt$$

В итоге получили решение исходной задачи Гурса

$$u(x,y) = 1 + x + \frac{y^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

С помощью подстановки в поставленную задачу убедимся в том, что мы действительно нашли верное решение:

In[24]:= $\mathtt{Simplify}\Big[\{\mathtt{eq},\ \mathtt{cc}\}\ /.\ \mathtt{u} \to \mathtt{Activate}\Big[\mathtt{Function}\Big[\{x,\ y\},\ 1 + x + \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, y^2 \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt\Big]\Big]\Big]$

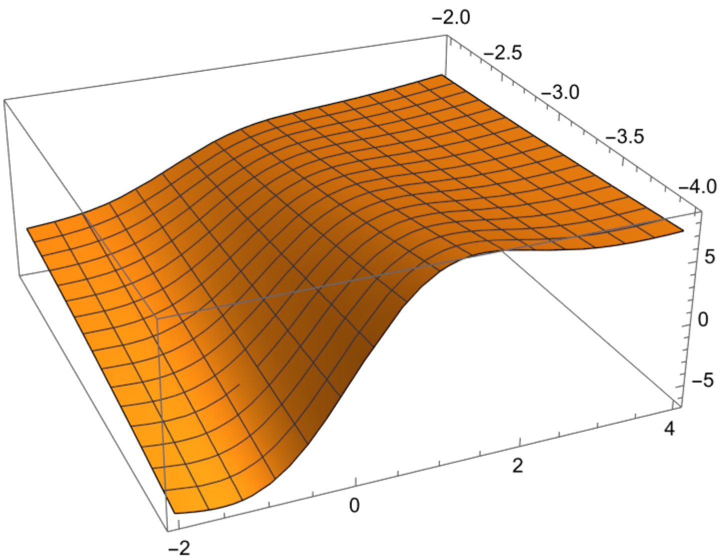
Out[24]= {True, {True, True}}

То есть построенное решение удовлетворяет поставленной задаче.

Графически изобразим полученную поверхность. К примеру, возьмем область $[-2, 4] \times [-4, 2]$. Тогда

In[46]:= $\mathtt{Plot3D}\Big[1 + x + \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ y^2\, \mathtt{Erfi}\Big[\frac{x}{\sqrt{2}}\Big],\ \{x, -2, 4\},\ \{y, -4, -2\}\Big]$

Out[46]=



Вывод.

Таким образом, мы нашли решение поставленной задачи Гурса с помощью пакета Wolfram Mathematica, применяя также аналитические рассуждения. Проверили путем подстановки, является ли полученная функция решением поставленной задачи и изобразили графически плоскость, которую задает построенная нами функция. Подобным образом можно решать и другие задачи, поставленные для дифференциальных уравнений в частных производных.