Сплайн-интерполирование с заданными на концах наклонами

Условие

Построить кубический сплайн для функции $y = f(x)$ заданной таблицей значений

x	0	2	3
$f(x)$	1	5	7
$f'(x)$	1	-	0

Вычислить приближенное значение функции в точке $x = 1$.

Алгоритм решения

Для решения данной задачи нам понадобятся следующие формулы (N – количество узлов):

1. расстояние между i-ым и $(i-1)$-ым узлами
$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = \overline{1, N} \tag{1}$$

2. формула кубического сплайна
$$S_3(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(f_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \\ + \left(f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{(x_i - x)}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, N} \tag{2}$$

3. формулы для коэффициентов кубического сплайна
$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, N-1} \tag{3}$$

4. граничные условия для коэффициентов
$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{f_1 - f_0}{h_1} - f'(a)\right), \\ M_{N-1} + 2M_N = \dfrac{6}{h_N}\left(f'(b) - \dfrac{f_N - f_{N-1}}{h_N}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Сначала по формуле (1) найдем расстояния между узлами:
$$h_1 = x_1 - x_0 = 2$$
$$h_2 = x_2 - x_1 = 1.$$

Теперь составим по формулам (3) и (4) СЛАУ для коэффициентов кубического сплайна:
$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{f_1 - f_0}{h_1} - f'(a)\right), \\ \dfrac{h_1}{6}M_0 + \dfrac{h_1 + h_2}{3}M_1 + \dfrac{h_2}{6}M_2 = \dfrac{f_2 - f_1}{h_2} - \dfrac{f_1 - f_0}{h_1}, \\ M_1 + 2M_2 = \dfrac{6}{h_2}\left(f'(b) - \dfrac{f_2 - f_1}{h_2}\right). \end{cases}$$

Подставим в эту систему значения (h_i нам известны, f_i и $f'(a)$, $f'(b)$ берем из заданной таблицы):

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{2}\left(\dfrac{5-1}{2} - 1\right), \\ \dfrac{2}{6}M_0 + \dfrac{2+1}{3}M_1 + \dfrac{1}{6}M_2 = \dfrac{7-5}{1} - \dfrac{5-1}{2}, \\ M_1 + 2M_2 = \dfrac{6}{1}\left(0 - \dfrac{7-5}{1}\right). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2M_0 + M_1 = 3, \\ \dfrac{1}{3}M_0 + M_1 + \dfrac{1}{6}M_2 = 0, \\ M_1 + 2M_2 = -12. \end{cases}$$

Найдем решение методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & -9 & -57 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{3} \end{array}\right)$$

То есть

$$M_0 = \frac{7}{6}, \quad M_1 = \frac{2}{3}, \quad M_2 = -\frac{19}{3}.$$

У нас есть все необходимые значения для того, чтобы построить кубический сплайн, кроме x_i, x_{i-1}. По условию необходимо вычислить значение в точке $x = 1$, она находится между узлами $x_0 = 0$ и $x_1 = 2$. Тогда кубический сплайн по формуле (2) мы будем строить на узлах x_0, x_1.

В нашем случае формула (2) примет вид

$$S_3(x) = M_0\frac{(x_1 - x)^3}{6h_1} + M_1\frac{(x - x_0)^3}{6h_1} + \left(f_1 - M_1\frac{h_1^2}{6}\right)\frac{x - x_0}{h_1} + \\ + \left(f_0 - M_0\frac{h_1^2}{6}\right)\frac{(x_1 - x)}{h_1}, \quad x \in [x_0, x_1].$$

Подставляем все известные нам значения:

$$S_3(x) = \frac{7}{6}\frac{(2-x)^3}{12} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{12} + \left(5 - \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{6}\right)\frac{x}{2} + \left(1 - \frac{7}{6}\cdot\frac{4}{6}\right)\frac{(2-x)}{2}, \quad x \in [0, 2].$$

Сделаем некоторые преобразования для упрощения формулы

$$S_3(x) = \frac{7(2-x)^3}{72} + \frac{x^3}{18} + \frac{22x}{9} + \frac{(2-x)}{9}, \quad x \in [0, 2].$$

Найдем значение в точке $x = 1$:

$$S_3(1) = \frac{7}{72} + \frac{1}{18} + \frac{22}{9} + \frac{1}{9} = \frac{195}{72}.$$