Наилучшее среднеквадратичное приближение многочленом первой степени

Условие

Построить наилучшее среднеквадратичное приближение к аналитически заданной функции с помощью алгебраического многочлена первой степени:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [1, 2].$$

Оценить величину наилучшего приближения.

Алгоритм решения

Наилучшее среднеквадратичное приближение алгебраическим многочленом строится в виде

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n, \tag{1}$$

где коэффициенты являются решениями СЛАУ

$$\begin{cases} c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n = m_0, \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \ldots + c_n s_{n+1} = m_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 s_n + c_1 s_{n+1} + \ldots + c_n s_{2n} = m_n. \end{cases} \tag{2}$$

$$s_i = \int\limits_a^b p(x) x^i dx, \quad m_j = \int\limits_a^b p(x) f(x) x^j dx, \quad i = \overline{0, 2n}, j = \overline{0, n}. \tag{3}$$

В нашем случае формулы принимают вид

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x, \tag{4}$$

$$\begin{cases} c_0 \int\limits_a^b p(x) dx + c_1 \int\limits_a^b p(x) x dx = \int\limits_a^b p(x) f(x) dx, \\ c_0 \int\limits_a^b p(x) x dx + c_1 \int\limits_a^b p(x) x^2 dx = \int\limits_a^b p(x) f(x) x dx. \end{cases} \tag{5}$$

По условию ничего не сказано про весовую функцию $p(x)$, поэтому принимаем $p(x) = 1$. Тогда, подставляя известные значения в (5), получаем систему вида

$$\begin{cases} c_0 \int\limits_1^2 dx + c_1 \int\limits_1^2 x dx = \int\limits_1^2 x^2 dx, \\ c_0 \int\limits_1^2 x dx + c_1 \int\limits_1^2 x^2 dx = \int\limits_1^2 x^3 dx. \end{cases}$$

Вычислим все необходимые интегралы

$$\int\limits_1^2 dx = 1, \quad \int\limits_1^2 x dx = \frac{3}{2}, \quad \int\limits_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}, \quad \int\limits_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}.$$

Подставим найденные значения в систему:

$$\begin{cases} c_0 + \dfrac{3}{2}c_1 = \dfrac{7}{3}, \\ \dfrac{3}{2}c_0 + c_1\dfrac{7}{3} = \dfrac{15}{4}. \end{cases}$$

Запишем СЛАУ в виде матрицы и применим метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & \frac{15}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Таким образом, $c_0 = 3$, $c_1 = -\dfrac{13}{6}$. Тогда приближающий многочлен первой степени имеет вид

$$\varphi(x) = 3x - \frac{13}{6}.$$

Величину наилучшего приближения оценим по формуле

$$\|f(x) - \varphi(x)\| = \left(\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставим наши функции и получим

$$\left(\int_1^2 \left(x^2 - 3x + \frac{13}{6}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_1^2 x^4 + 9x^2 + \frac{169}{36} - 6x^3 + \frac{13}{3}x^2 - 13x dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 - 6\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 + \frac{40}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - 13\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{169}{36}x\Big|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{180}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.0745.$$

Графически это будет выглядеть следующим образом: