

Задачи с экзамена ЧМ

1. Методом наименьших квадратов в пространстве $L_2(p)[a, b]$, где $p(x) = 2$, $[a, b] = \left[-1, \frac{7}{2}\right]$, построить многочлен наилучшего приближения второй степени для функции $f(x)$, заданной таблично

x	0	1	3
$f(x)$	7	3	1

2. Методом механических квадратур решить интегральное уравнение (использовать составную формулу трапеций с $h = 0.5$)

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x xsu(s)ds = x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

3. Выбрать параметр из условия сходимости итерационного процесса

$$x^{k+1} = x^k + \tau f(x^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$, если $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

4. Пусть $P_n(x)$ — интерполяционный многочлен для функции $f(x) = x^{n+1}$, построенный по сетке узлов $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Вычислить $P_n(0)$.
5. Исследовать на устойчивость метод

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{j+\frac{1}{2}}\right), \\ y_{j+\frac{1}{2}} = y_{j+1} - \frac{h}{2}f(x_j + h, y_{j+1}). \end{cases}$$

6. Найти приближенную погрешность при $f(x) = 0$. Методом хорд найти корень $f(x) = e^{-x} - \ln x$, выбрать 0, 1, отрезок, проделать одну итерацию метода хорд.
7. Для многочлена $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ сделать одну итерацию метода Лобачевского.
8. Для функции $f(x) = 0$ построить итерационный метод кубического порядка сходимости. Взять начальное приближение и провести одну итерацию. В качестве $f(x)$ взять $f(x) = e^{-x} - \ln x$.
9. Функцию $f(x) = x^3$ приблизить полиномом первой степени на $[0, 4]$ по наилучшим узлам, оценить погрешность приближения.
10. Методом средних найти приближенное значение функции

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

11. Применить метод Ньютона к решению системы

$$\begin{cases} x_1^3 - x_2^2 = 1, \\ x_2(x_1x_2^2 - 1) = 4. \end{cases}$$

Выбрав в качестве начального приближения вектор $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, вычислить первую итерацию.

12. Методом Галеркина и базиса алгебраических функций построить $u_1(x)$ для задачи

$$u'' + xu' - u = -2, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

13. Методом Рунге и базиса алгебраических функций построить $u_1(x)$ для задачи

$$(xu'(x))' - u(x) = 2x, \quad u(1) = 0, \quad u(2) = 0, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

14. Методом механических квадратур решить интегральное уравнение (использовать формулу наивысшей алгебраической степени точности с одним узлом)

$$u(x) - 2 \int_0^1 \frac{u(s)}{2+x+s} ds = 1.$$

15. Для функции $f(x) = e^x + x^2$, $x \in [0, 2]$ на равномерной сетке из трех узлов методом моментов построить интерполяционный кубический сплайн, на концах которого заданы наклоны. Построить систему для определения моментов и записать формулу для приближенного вычисления функции $f(x)$ при $x \in [x_0, x_1]$.

16. В комплексной области исследовать устойчивость неявного метода трапеций.

17. Построить аналог простейшей формулы трапеций для вычисления интеграла

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$