Вариант 1

Задание 1.

Определить порядок аппроксимации РС $\frac{3}{2}y_t - \frac{1}{2}y_{\bar t} = \widehat{y}_{\bar x x} + \varphi$, аппроксимирующей задачу для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ с краевыми условиями первого рода.

Решение.

$$\Psi = \widehat{u}_{\bar x x} - \frac{3}{2}u_t + \frac{1}{2}u_{\bar t} + \varphi = [\widehat{u} = u + \tau u_t] = u_{\bar x x} + \tau u_{\bar x x t} - \frac{3}{2}u_t + \frac{1}{2}u_{\bar t} + \varphi =$$
$$= u'' + \frac{h^2}{2}u^{(IV)} + \tau(\dot u + \frac{\tau}{2}\ddot u)_{\bar x x} - \frac{3}{2}\dot u - \frac{3\tau}{4}\ddot u + \frac{1}{2}\dot u - \frac{\tau}{4}\ddot u + \varphi + O(h^4 + \tau^2) =$$
$$= u'' + \frac{h^2}{2}u^{(IV)} + \tau \dot u'' + -\frac{3}{2}\dot u - \frac{3\tau}{4}\ddot u + \frac{1}{2}\dot u - \frac{\tau}{4}\ddot u + \varphi + O(h^4 + \tau^2) =$$
$$= [u'' - \dot u = -f, u^{(IV)} = \dot u'' - f'', \ddot u = \dot u'' + \dot f] =$$
$$= \varphi - f + \frac{h^2}{2}\dot u'' - \frac{h^2}{2}f'' + \tau\dot u'' - \tau \dot u'' - \tau\dot f + O(h^4 + \tau^2) = \varphi - f - \tau \dot f + O(h^2 + \tau^2).$$

Не добавляя новых узлов в шаблон можно получить следующие порядки точности для аппроксимации:

1. Если взять $\varphi = f$, то получим погрешность аппроксимации будет равна $O(h^2 + \tau)$.
2. Если взять $\varphi = f + \tau \dot f$, то получим погрешность аппроксимации будет равна $O(h^2 + \tau^2)$.

Задание 2.

Выполнив разделение переменных, исследовать устойчивость по начальным данным РС $y_{\bar t t} = \check{y}_{\bar x x} + \varphi$, аппроксимирующей уравнение колебаний $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.

Решение.

$$y_{\bar t t} = \check{y}_{\bar x x}$$

Разложим по собственным функциям оператора второй производной:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t)\mu_k(t), \quad [\mu_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x].$$

Заметим, что $\Lambda \mu_k = -\lambda_k \mu_k$, где $\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2}$.
Выполнив разделение переменных, для T_k получим задачу

$$(T_k)_{\bar t t} + \lambda_k \check{T}_k = 0$$

или

$$\widehat{T}_k - 2T_k + (1 + \lambda_k\tau^2)\check{T}_k = 0.$$
$$q^2 - 2q + (1 + \lambda_k \tau^2) = 0.$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 1 - \lambda_k \tau^2 = -\lambda_k \tau^2 = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2} \tau^2$$

$$q_{1,2} = 1 \pm i\frac{2\tau}{h} \sin \frac{k\pi h}{2}$$

Устойчивость на k-ой гармонике будет иметь место при выполнении нер-ва $|q_k| \leqslant 1$:

$$|q|^2 = 1 + \frac{4\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2} \leqslant 1$$

$$\frac{4\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2} \leqslant 0 \quad [\sin^2 \alpha \geqslant 0]$$

$$\frac{\tau^2}{h^2} \leqslant 0$$

Ответ. Данная схема абсолютно неустойчива.

Задание 3.

Записать алгоритм реализации РС

$$\begin{cases} y_t = y_{\overline{x}x}^{(\sigma)} + (x+1)t, \quad (x,t) \in w_{h\tau}, \\ y(x,0) = x^2, \quad x \in \overline{w}_h, \\ y_x^{(\sigma)}(0,t) = y^{(\sigma)}(0,t) + \dfrac{h}{2} y_t(0,t) - \dfrac{h}{2} t, \quad t \in \overline{w}_\tau \\ y(1,t) = 1, \quad t \in \overline{w}_\tau, \end{cases}$$

где $\overline{w}_{h\tau} = \overline{w}_h \times \overline{w}_\tau$, $\overline{w}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0,N}, Nh = 1\}$, $\overline{w}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0,N_1}, N_1\tau = T\}$, $v^{(\sigma)} = \sigma \widehat{v} + (1-\sigma)v$, $\sigma = \dfrac{1}{2}$.

Решение.

Запишем РС в индексной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} = \Lambda\left(\dfrac{1}{2} y_k^{j+1} + \dfrac{1}{2} y_k^j\right) + (x_k+1)t_j, \quad k = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N_1 - 1}, \\ y_k^0 = x_k^2, \quad k = \overline{0,N}, \\ \dfrac{1}{2}(y_0^{j+1} + y_0^j)_x = \dfrac{1}{2}(y_0^{j+1} + y_0^j) + \dfrac{h}{2} \dfrac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} - \dfrac{h}{2} t_j, \quad j = \overline{1, N_1 - 1}, \\ y_N^{j+1} = 1 \quad , j = \overline{1, N_1 - 1}. \end{cases}$$

Заполнив нулевой слой по формуле $y_k^0 = x_k^2, \quad k = \overline{0,N}$, далее для всех $j = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ заполняем очередной ($(j+1)$-ый) слой, решая систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\Lambda y_k^{j+1} - \dfrac{1}{\tau} y_k^{j+1} = -\dfrac{1}{\tau} y_k^j - \dfrac{1}{2}\Lambda y_k^j - (x_k+1)t_j, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \dfrac{1}{2}(y_0^{j+1})_x - y_0^{j+1}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{h}{2\tau}\right) = -\dfrac{1}{2}(y_0^j)_x + \dfrac{1}{2} y_0^j - \dfrac{h}{2\tau} y_0^j - \dfrac{h}{2} t_j, \\ y_N^{j+1} = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2h^2}y_{k-1}^{j+1} - \left(\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{1}{h^2}\right)y_k^{j+1} + \dfrac{1}{2h^2}y_{k+1}^{j+1} = -F_k^j, \quad k = \overline{1, N-1} \\ -\left(\dfrac{1}{2h} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{h}{2\tau}\right)y_0^{j+1} + \dfrac{1}{2h}y_1^{j+1} = -\dfrac{1}{2h}y_1^j + \left(\dfrac{1}{2h} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{2\tau}\right)y_0^j - \dfrac{h}{2}t_j, \\ y_N^{j+1} = 1, \end{cases}$$

где $F_k^j = \dfrac{1}{\tau}y_k^j + \dfrac{1}{2}\dfrac{y_{k-1}^j - 2y_k^j + y_{k+1}^j}{h^2} + (x_k+1)t_j$.

Решение такой системы целесообразно проводить с использованием метода разностной прогонки, которая, очевидно, будет устойчивой.

Вариант 2

Задание 1.

Указать порядок аппроксимации РС $y_{\bar{t}t} = \check{y}_{\bar{x}x} + \varphi$, аппроксимирующей задачу для волнового уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ с краевыми условиями второго рода. Дописать соответствующего порядка аппроксимацию граничных и начальных условий.

Решение.

РС для волнового уравнения:

$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = \check{y}_{\bar{x}x} + \varphi, \quad (x,t) \in w_{h\tau} \\ y(x,0) = u_0(x), \ y_t(0,t) = \overline{u}_1(x), \quad x \in w_h, \\ y_x(0,t) = \overline{\mu}_0(t), \\ y_{\overline{x}}(1,t) = \overline{\mu}_1(t). \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации для РУ:

$$\Psi = u_{\bar{t}t} - \check{u}_{\bar{x}x} - \varphi = [\check{u} = u - \tau u_{\bar{t}}] = u_{\bar{t}t} - u_{\bar{x}x} + \tau u_{\bar{x}x\bar{t}} - \varphi = \ddot{u} + \frac{\tau^2}{12}u^{(4)} - u'' - \frac{h^2}{12}u^{(IV)} + \tau(\dot{u} - \frac{\tau}{2}\ddot{u})_{\bar{x}x} -$$

$$- \varphi + O(h^4 + \tau^4) = \ddot{u} + \frac{\tau^2}{12}u^{(4)} - u'' - \frac{h^2}{12}u^{(IV)} + \tau\dot{u}'' + \frac{\tau h^2}{12}\dot{u}^{(IV)} - \frac{\tau^2}{2}\ddot{u}'' - \varphi + O(h^4 + \tau^4) =$$

$$= f - \varphi + \tau\dot{u}'' + O(h^2 + \tau^2).$$

Если $\varphi(x,t) = f(x,t) + \tau\dot{u}'' = f(x,t) + \tau u_{\bar{x}xt}$, то $\Psi = O(h^2 + \tau^2)$.

Первое начальное условие аппроксимируется точно, поэтому перейдем ко второму начальному условию и вычислим его погрешность аппроксимации:

$$\nu_1(x,0) = u_t(0,t) - \overline{u}_1(x) = \dot{u}(x,0) + \frac{\tau}{2}\ddot{u}(x,0) - \overline{u}_1(x) + O(\tau^2) = u_1(x,0) - \overline{u}_1(x) + \frac{\tau}{2}\ddot{u}(x,0) + O(\tau^2).$$

Отсюда следует, что если $\overline{u}_1(x) = u_1(x,0) + \dfrac{\tau}{2}\ddot{u}(x,0) = u_1(x,0) + \dfrac{\tau}{2}\big(u_0''(x) + f(x,0)\big)$, то получим аппроксимацию второго порядка.

Вычислим погрешность аппроксимации для левого граничного условия:

$$\nu_2(0,t) = u_x(0,t) - \overline{\mu}_0(t) = u'(0,t) + \frac{h}{2}u''(0,t) - \overline{\mu}_0(t) + O(h^2) = \mu_0(t) - \overline{\mu}_0(t) + \frac{h}{2}u''(0,t) + O(h^2).$$

Возьмем $\overline{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \dfrac{h}{2}u''(0,t) = \mu_0(t) + \dfrac{h}{2}\big(u_{\bar{t}t}(0,t) - f(0,t)\big)$ и получим второй порядок аппроксимации.

Вычислим погрешность аппроксимации для правого граничного условия:

$$\nu_3(0,t) = u_{\overline{x}}(0,t) - \overline{\mu}_1(t) = u'(0,t) - \frac{h}{2}u''(0,t) - \overline{\mu}_1(t) + O(h^2) = \mu_1(t) - \overline{\mu}_1(t) - \frac{h}{2}u''(0,t) + O(h^2).$$

Возьмем $\overline{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - \dfrac{h}{2}u''(0,t) = \mu_1(t) - \dfrac{h}{2}\big(u_{\bar{t}t}(0,t) - f(0,t)\big)$ и получим второй порядок аппроксимации.

Задание 2.

В зависимости от параметра σ исследовать устойчивость по начальным данным РС $(1+\sigma)y_t - \sigma\tau y_{\bar{t}} = \Lambda y + \varphi$, аппроксимирующей уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.

Решение.

$$(1+\sigma)y_t - \sigma\tau y_{\bar{t}} = \Lambda y$$

Разложим по собственным функциям оператора второй производной:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t)\mu_k(t), \quad [\mu_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x].$$

Заметим, что $\Lambda\mu_k = -\lambda_k\mu_k$, где $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{k\pi h}{2}$.

Выполнив разделение переменных, для T_k получим задачу

$$(1+\sigma)(T_k)_t - \sigma\tau(T_k)_{\bar{t}} = -\lambda_k T_k$$

$$\Downarrow$$

$$(1+\sigma)\frac{\widehat{T}_k - T_k}{\tau} - \sigma(T_k - \check{T}_k) = -\lambda_k T_k$$

или

$$(1+\sigma)\widehat{T}_k - (1+\sigma+\sigma\tau-\tau\lambda_k)T_k + \sigma\tau\check{T}_k = 0.$$

$$F(q) = (1+\sigma)q^2 - (1+\sigma+\sigma\tau-\tau\lambda_k)q + \sigma\tau = 0,$$

где $\lambda_k \geqslant 0$. Возьмем $\lambda_k = 0$. Чтобы для этого значения λ_k корни уравнения удовлетворяли условию $|q_{1,2}| \leqslant 1$ необходимо выполнение неравенства $\sigma \geqslant -\dfrac{1}{1+\tau}$ (из системы в конце решения с $\lambda_k = 0$). Поэтому далее можно рассматривать только такие значения σ.

Разделим последнее равенство на $1+\sigma$:

$$q^2 - \left(1 + \frac{\sigma\tau}{1+\sigma} - \frac{\tau\lambda_k}{1+\sigma}\right)q + \frac{\sigma\tau}{1+\sigma} = 0.$$

Выполним замену $\alpha = \dfrac{\sigma\tau}{1+\sigma}$:

$$q^2 - \left(1+\alpha - \frac{\alpha\lambda_k}{\sigma}\right)q + \alpha = 0.$$

$$D = \left(1+\alpha-\frac{\alpha\lambda_k}{\sigma}\right)^2 - 4\alpha.$$

Рассмотрим случай, когда $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$:

$$q_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(1+\alpha-\frac{\alpha\lambda_k}{\sigma}\right) \pm i\sqrt{-\left(1+\alpha-\frac{\alpha\lambda_k}{\sigma}\right)^2 + 4\alpha}\right]$$

Так как для устойчивости необходимо $|q_i| \leqslant 1 \Rightarrow$

$$|q|^2 \leqslant 1$$

$$\frac{1}{4}\left[\left(1+\alpha-\frac{\alpha\lambda_k}{\sigma}\right)^2 - \left(1+\alpha-\frac{\alpha\lambda_k}{\sigma}\right)^2 + 4\alpha\right] \leqslant 1$$

$$\alpha \leqslant 1$$

$$\frac{\tau\sigma}{1+\sigma} \leqslant 1, \quad [\sigma \neq -1]$$

$$\tau\sigma \leqslant 1+\sigma$$
$$\sigma \leqslant \frac{1}{\tau-1}.$$

Рассмотрим случай, когда $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, т. е. $D \geqslant 0$. Корни уравнения вещественные и условие $|q_{1,2}| \leqslant 1$ будет эквивалентно выполнению системы неравенств

$$\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{1+\sigma+\sigma\tau-\tau\lambda_k}{2(1+\sigma)} \leqslant 1, \\ F(-1) \geqslant 0, \\ F(1) \geqslant 0 \end{cases}$$

Напомним $F(q) = (1+\sigma)q^2 - (1+\sigma+\sigma\tau-\tau\lambda_k)q + \sigma\tau = 0$.

$$\begin{cases} -2 \leqslant \dfrac{1+\sigma+\sigma\tau-\tau\lambda_k}{1+\sigma} \leqslant 2, \\ 2+2\sigma+2\tau\sigma-\tau\lambda_k \geqslant 0, \\ \tau\lambda_k \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant 1+\tau-\dfrac{\tau+\tau\lambda_k}{1+\sigma} \leqslant 2, \\ 2\sigma(1+\tau) \geqslant \tau\lambda_k - 2 \to 2\sigma(1+\tau) \geqslant \tau\lambda_k, \\ \tau\lambda_k \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma \geqslant \dfrac{\tau\lambda_k-3}{\tau+3},\ \sigma \geqslant -\dfrac{1+\tau\lambda_k}{1-\tau}, \\ \sigma \geqslant \dfrac{\tau\lambda_k}{1+\tau}, \\ \tau\lambda_k \geqslant 0 \end{cases}$$

Таким образом, $\sigma \geqslant \dfrac{\tau\lambda_k}{1+\tau}$.

Итак, необходимое условие устойчивости эквивалентно условию $\sigma \in \left[\dfrac{\tau\lambda_k}{1+\tau}; \dfrac{1}{\tau-1}\right]$, при $\tau^2\lambda_k - \tau\lambda_k - \tau \geqslant 1$.

Задание 3.

Дана краевая задача для уравнения переноса. Построить неявную разностную схему первого порядка аппроксимации и записать алгоритм ее реализации.

Решение.

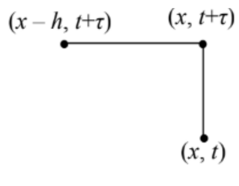
Уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Неявная РС:

$$\begin{cases} y_t + a\widehat{y_{\overline{x}}} = 0, \quad (x,t) \in w_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x), \quad x \in w_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t), \quad t \in w_\tau, \end{cases}$$

записанная на шаблоне



Записывая первое из уравнений в индексной форме и выражая из него y_k^{j+1}, получим правило для выполнения расчетов:

$$y_k^{j+1} = \frac{\gamma}{1+\gamma} y_{k-1}^{j+1} + \frac{1}{\gamma} y_k^j, \quad \gamma = \frac{a\tau}{h}.$$

Таким образом, счет можно начинать с точки (x_1, t_0) последовательно вычисляя y_1^j до некоторого $j = j_0$, затем увеличив k, повторять все сначала (либо в обратном порядке: сначала вычислять y_k^1 до некоторого $k = k_0$, затем увеличивать j).

Вычислим аппроксимацию разностного уравнения:

$$\psi(x,t) = u_t + a\widehat{u}_{\overline{x}} = \dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + a(\widehat{u}' - \frac{h}{2}) + O(\tau^2 + h^2) = \dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + a(u' + \tau\dot{u}' - \frac{h}{2}u'') + O(\tau^2 + h^2) =$$
$$= \frac{\tau}{2}\ddot{u} + a(\tau\dot{u}' - \frac{h}{2}u'') + O(\tau^2 + h^2) = O(h + \tau).$$

Данная схема обладает первым порядком аппроксимации.

Вариант 3

Задание 1.

В зависимости от параметра σ и сеточной функции φ указать порядок аппроксимации РС $y_t + \sigma\tau y_{\bar{t}t} = \Lambda\widehat{y} + \varphi$, аппроксимирующей неоднородное уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.

Решение.

Итак, зададим сетку узлов

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau.$$

На этой сетке узлов построим разностную схему для уравнения теплопроводности в следующем виде

$$\begin{cases} y_t + \sigma\tau y_{\bar{t}t} = \Lambda\widehat{y} + \varphi, \ (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ y(x,0) = u_0(x), \ y_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t), \ y(1,t) = \mu_1(t), \ t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases}$$

Необходимо определить порядок аппроксимации дифференциального уравнения в зависимости от параметров σ и φ. Для этого рассмотрим погрешность как невязку на точном решении

$$\psi(x,t) = u_t + \sigma\tau u_{\bar{t}t} - \Lambda\widehat{u} - \varphi.$$

Для дальнейших вычислений необходимо расписать $\Lambda\hat{u}$. Сделаем это

$$\Lambda\widehat{u} = u(x,t+\tau)_{\bar{x}x} = \left(u(x,t) + \tau\dot{u}(x,t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{u}(x,t) + \frac{\tau^3}{6}\dddot{u}(x,t) + O(\tau^4)\right)_{\bar{x}x} =$$
$$= u'' + \frac{h^2}{12}u^{(IV)} + \tau\dot{u}'' + O(\tau^2 + h^4), \quad (1)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u} = u^{(1)}, \ \frac{\partial u}{\partial x} = u' = u^{(I)}.$$

Тогда, используя полученный результат, получаем выражение для погрешности

$$\psi(x,t) = \dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + \sigma\tau\ddot{u} - u'' - \frac{h^2}{12}u^{(IV)} - \tau\dot{u}'' + O(\tau^2 + h^4) - \varphi = [\dot{u} = u'' + f, \ddot{u} = \dot{u}'' + \dot{f}, u^{(IV)} = \dot{u}'' - f''] =$$
$$= f - \varphi + \frac{\tau}{2}\dot{u}'' + \frac{\tau}{2}\dot{f} + \sigma\tau\dot{u}'' + \sigma\tau\dot{f} - \frac{h^2}{12}\dot{u}'' + \frac{h^2}{12}f'' - \tau\dot{u}'' + O(\tau^2 + h^4) =$$
$$= f - \varphi + \tau\left(\frac{1}{2} + \sigma\right)\dot{f} + \frac{h^2}{12}f'' - \tau\left(\frac{1}{2} + \frac{h^2}{12\tau} - \sigma\right)\dot{u}'' + O(\tau^2 + h^4).$$

Теперь при анализе выражения для погрешности аппроксимации рассмотрим следующие возможные ситуации:

1. параметр σ — произвольное число (не совпадающее ни с одним из значений, рассматриваемых ниже). Тогда выбирая
   - $\varphi = f$, получаем: $\psi = O(\tau + h^2)$;
   - $\varphi = f + \dfrac{\tau}{2}\dot{f} - \tau\left(\dfrac{1}{2} - \sigma\right)u_{\bar{x}xt}$, получаем $\psi = O(\tau^2 + h^2)$;

- $\varphi = f + \tau\left(\frac{1}{2}+\sigma\right)\dot{f} + \frac{h^2}{12}f'' - \tau\left(\frac{1}{2}+\frac{h^2}{12\tau}-\sigma\right)u_{\overline{x}xt}$, получаем $\psi = O(\tau^2+h^4)$;

2. $\tau\left(-\frac{1}{2}+\sigma\right) = \alpha h^2$ при некотором значении α, т. е. $\sigma = \frac{1}{2}+\alpha\frac{h^2}{\tau}$. Тогда выбирая

- $\varphi = f$, получаем: $\psi = O(\tau+h^2)$;
- $\varphi = f + (\tau+\alpha h^2)\dot{f}$, получаем $\psi = O(\tau^2+h^2)$;
- $\varphi = f + (\tau+\alpha h^2)\dot{f} + \frac{h^2}{12}f'' + h^2\left(\alpha-\frac{1}{12}\right)u_{\overline{x}xt}$, получаем $\psi = O(\tau^2+h^4)$;

3. $\tau\left(\sigma-\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12\tau}\right) = 0$, т. е. $\sigma = \frac{1}{2}+\frac{h^2}{12\tau}$. Тогда выбирая

- $\varphi = f$, получаем: $\psi = O(\tau+h^2)$;
- $\varphi = f + \left(\tau+\frac{h^2}{12}\right)\dot{f}$, получаем $\psi = O(\tau^2+h^2)$;
- $\varphi = f + \left(\tau+\frac{h^2}{12}\right)\dot{f} + \frac{h^2}{12}f''$, получаем $\psi = O(\tau^2+h^4)$;

Задание 2.

Аппроксимировать краевое условие $-\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \beta_1 u(1,t) - \mu_1(t)$ в задаче для уравнения колебаний $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ на шаблоне $\{(1,t),(1-h,t),(1,t+\tau),(1-h,t+\tau),(1,t-\tau),(1-h,t-\tau)\}$ с погрешностью $O(h^2+\tau^2)$.

Решение.

Стандартная двухточечная аппроксимация правого краевого условия третьего рода имеет вид

$$-y_{\overline{x}}(1,t) = \beta_1 y(1,t) - \overline{\mu}_1(t).$$

Тогда погрешность аппроксимации равна:

$$\nu(1,t) = \beta_1 u(1,t) - \overline{\mu}_1(t) + u_{\overline{x}}(1,t) = \beta_1 u(1,t) - \overline{\mu}_1(t) + u'(1,t) - \frac{h}{2}u''(1,t) + O(h^2) =$$
$$= \beta_1 u(1,t) - \overline{\mu}_1(t) - \beta_1 u(1,t) + \mu_1(t) - \frac{h}{2}\Big(\ddot{u}(1,t) - f(1,t)\Big) + O(h^2) =$$
$$= -\overline{\mu}_1(t) + \mu_1(t) - \frac{h}{2}\Big(\ddot{u}(1,t) - f(1,t)\Big) + O(h^2).$$

Отсюда видим, что, выбрав $\overline{\mu}_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h}{2}f(1,t) - \frac{h}{2}y_{\overline{t}t}(1,t)$, получим разностное граничное условие с погрешностью $O(\tau^2+h^2)$.

$$-y_{\overline{x}}(1,t) = \beta_1 y(1,t) + \frac{h}{2}y_{\overline{t}t}(1,t) - \frac{h}{2}f(1,t) - \mu_1(t).$$

Задание 3.

Определить количество арифметических операций, необходимых для вычисления решения смешанной задачи для уравнения колебаний с краевыми условиями третьего рода на верхнем временном слое с помощью разностной схемы $y_{\overline{t}t} = \Lambda\widehat{y} + \varphi$.

Решение.

Итак, зададим сетку узлов

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau.$$

На этой сетке узлов построим разностную схему для уравнения колебаний в следующем виде

$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = \Lambda \widehat{y} + \varphi, \ (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ y(x,0) = u_0(x), \ y_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t), \ t \in \overline{\omega}_\tau, \\ -y_{\bar{x}}(1,t) = \beta_1 y(1,t) - \mu_1(t), \ t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases}$$

Запишем в индексной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \varphi_i^j, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \\ \dfrac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = u_1(x_i), \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \\ -\dfrac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} = \beta_1 y_N^{j+1} - \mu_1(t). \end{cases}$$

Следовательно, порядок расчетов будет таким:

1. заполняем начальный (нулевой слой) по формулам

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, N};$$

2. заполняем первый слой по формулам

$$y_0^1 = \mu_0(\tau), \ y_i^1 = y_i^0 + \tau u_1(x_i), i = \overline{1, N-1}, \ y_N^1 = \frac{\mu_1(\tau)h + y_{N-1}^1}{1 + \beta_1 h}.$$

3. Для всех $j = \overline{1, N_1 - 1}$ заполняем очередной ($(j+1)$-й) слой, решая систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(\dfrac{1}{\tau^2} + \dfrac{2}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \dfrac{1}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -\dfrac{2}{\tau^2} y_i^j + \dfrac{1}{\tau^2} y_i^{j-1} - \varphi_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \\ \dfrac{1}{h} y_{N-1}^{j+1} - \left(\beta_1 + \dfrac{1}{h}\right) y_N^{j+1} = -\mu_1(t_{j+1}). \end{cases}$$

   Решение такой системы целесообразно проводить с использованием метода разностной прогонки.

Посчитаем количество операций, необходимых для вычисления решения задачи. Кол-во операций для метода прогонки

$$Q(n) \approx 8n,$$

где n — кол-во уравнений в системе. В нашем случае в системе $N-1$ уравнение, т. е. необходимо $\approx 8(N-1)$ операций для метода прогонки. Там нужно решить $N_1 - 1$ систем, следовательно, нужно $\approx 8(N_1 - 1)(N-1)$ операций. Также для заполнения нулевого и первого слоев необходимо $2(N+1)$ операций. Таким образом, всего необходимо $\approx 2(N+1) + 8(N_1 - 1)(N-1)$ операций, необходимых для вычисления смешанной задачи.

Вариант 4

Задание 1.

Определить порядок аппроксимации РУ

$$\frac{1}{12}\Bigg(y_{t,i+1}+10y_{t,i}+y_{t,i-1}\Bigg)=\frac{1}{2}\Bigg(\Lambda\widehat{y}+\Lambda y\Bigg)$$

на решении однородного уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Решение.

Для дальнейших вычислений необходимо расписать $\Lambda\hat{u}$. Сделаем это

$$\Lambda\hat{u}=u(x,t+\tau)_{\overline{x}x}=\Bigg(u(x,t)+\tau\dot{u}(x,t)+\frac{\tau^2}{2}\ddot{u}(x,t)+\frac{\tau^3}{6}\dddot{u}(x,t)+O(\tau^4)\Bigg)_{\overline{x}x}=u''+\frac{h^2}{12}u^{(IV)}+$$
$$+\frac{h^4}{360}u^{(VI)}+\tau\dot{u}''+\frac{\tau h^2}{12}\dot{u}^{(IV)}+\frac{\tau h^4}{360}\dot{u}^{(VI)}+\frac{\tau^2}{2}\ddot{u}''+\frac{\tau^2h^2}{24}\ddot{u}^{(IV)}+\frac{\tau^3}{6}\dddot{u}''+\frac{\tau^3h^2}{72}\dddot{u}''+O(\tau^4+h^6), \tag{2}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\dot{u}=u^{(1)},\ \frac{\partial u}{\partial x}=u'=u^{(I)}.$$

Тогда, используя полученный результат, получаем выражение для погрешности

$$\psi(x,t)=\frac{1}{12}\big(u(x+h,t)+10u(x,t)+u(x-h,t)\big)_t-\frac{1}{2}\Bigg(\Lambda\widehat{y}+\Lambda y\Bigg)=\dot{u}+\frac{\tau}{2}\ddot{u}+\frac{\tau^2}{6}\dddot{u}+\frac{\tau^3}{24}u^{(4)}+$$
$$+\frac{h^2}{12}\dot{u}''+\frac{h^2\tau}{24}\ddot{u}''+\frac{h^2\tau^2}{72}\dddot{u}''+\frac{h^2\tau^3}{288}u^{(II,4)}+\frac{h^4}{144}\dot{u}^{(IV)}+\frac{h^4\tau}{288}\ddot{u}^{(IV)}-u''-\frac{h^2}{12}u^{(IV)}-\frac{h^4}{360}u^{(VI)}-\frac{1}{2}\tau\dot{u}''-$$
$$-\frac{\tau h^2}{24}\dot{u}^{(IV)}-\frac{\tau h^4}{720}\dot{u}^{(VI)}-\frac{\tau^2}{4}\ddot{u}''-\frac{\tau^2h^2}{48}\ddot{u}^{(IV)}-\frac{\tau^3}{12}\dddot{u}''-\frac{\tau^3h^2}{144}\dddot{u}''+O(\tau^4+h^6)=$$
$$=[\dot{u}=u'',\ddot{u}=\dot{u}'',\ \dddot{u}=\ddot{u}'',u^{(IV)}=\dot{u}'',u^{(VI)}=\dot{u}^{(IV)}]=$$
$$=\Bigg(\frac{\tau^2}{6}-\frac{\tau^2}{4}\Bigg)\dddot{u}+\frac{\tau^3}{24}u^{(4)}+\frac{h^2\tau}{24}\ddot{u}''+\frac{h^2\tau^2}{72}\dddot{u}''+\frac{h^2\tau^3}{288}u^{(II,4)}+\Bigg(\frac{h^4}{144}-\frac{h^4}{360}\Bigg)\dot{u}^{(IV)}+\frac{h^4\tau}{288}\ddot{u}^{(IV)}-$$
$$-\frac{\tau h^2}{24}\dot{u}^{(IV)}-\frac{\tau h^4}{720}\dot{u}^{(VI)}-\frac{\tau^2h^2}{48}\ddot{u}^{(IV)}-\frac{\tau^3}{12}\dddot{u}''-\frac{\tau^3h^2}{144}\dddot{u}''+O(\tau^4+h^6)=O(\tau^2+h^4)$$

Погрешность аппроксимации равняется $O(\tau^2+h^4)$.

Задание 2.

Исследовать устойчивость по начальным данным разностной схемы $y_{\overline{t}t}=\dfrac{1}{2}(\Lambda\widehat{y}+\Lambda\check{y})+\varphi$, аппроксимирующей задачу для уравнения колебаний $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$ с краевыми условиями первого рода.

Решение.

$$y_{\bar{t}t} = \frac{1}{2}(\Lambda\widehat{y} + \Lambda\check{y})$$

Разложим по собственным функциям оператора второй производной:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t)\mu_k(t), \quad [\mu_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x].$$

Заметим, что $\Lambda\mu_k = -\lambda_k\mu_k$, где $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{k\pi h}{2}$.

Выполнив разделение переменных, для T_k получим задачу

$$(T_k)_{\bar{t}t} + \frac{1}{2}\lambda_k\left(\widehat{T}_k + \check{T}_k\right) = 0$$

или

$$(2+\lambda_k\tau^2)\widehat{T}_k - 4T_k + (2+\lambda_k\tau^2)\check{T}_k = 0.$$

Последнее равенство, разделив почленно на $(2+\lambda_k\tau^2)$, перепишем в виде

$$\widehat{T}_k - \frac{4}{2+\lambda_k\tau^2}T_k + \check{T}_k = 0.$$

Очевидно, достаточным условием устойчивости данного РУ будет условие

$$q_{1,2} \leqslant 1, \tag{2.1}$$

где q_i — корни характеристического уравнения

$$q^2 - \frac{4}{2+\lambda_k\tau^2}q + 1 = 0.$$

Так как $|q_1 \cdot q_2| = 1$, то выполнение (2.1) возможно лишь в случае, когда q_1 и q_2 образуют комплексно сопряженную пару, а тогда

$$\frac{D}{4} = \frac{4}{(2+\lambda_k\tau^2)^2} - 1 = \frac{-\lambda_k\tau^2(\lambda_k\tau^2+4)}{(2+\lambda_k\tau^2)^2} < 0,$$

т. е. $\lambda_k\tau^2 \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

1.
$$\lambda_k\tau^2 > 0, \quad [\lambda_k > 0]$$
$$\tau^2 > 0$$

2.
$$\lambda_k\tau^2 < -4$$
$$\tau^2 < -\frac{4}{\lambda_k}$$

Поскольку для собственных значений λ_k справедлива оценка $\lambda_k \leqslant \lambda_{N-1} < \dfrac{4}{h^2}$:

$$\tau^2 < -h^2.$$

Таким образом, схема абсолютно устойчива.

Задание 3.

Записать алгоритм реализации РС

$$\begin{cases} y_t = y_{\overline{x}x}^{(\sigma)} + (x+1)t, \quad (x,t) \in w_{h\tau}, \\ y(x,0) = x^2, \quad x \in \overline{w}_h, \\ y(0,t) = 1, -y_{\overline{x}}^{(\sigma)}(1,t) = y^{(\sigma)}(1,t) + \dfrac{h}{2} y_t(1,t) - ht, \quad t \in \overline{w}_\tau, \end{cases}$$

где $\overline{w}_{h\tau} = \overline{w}_h \times \overline{w}_\tau$, $\overline{w}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0,N}, Nh = 1\}$, $\overline{w}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0,N_1}, N_1\tau = T\}$, $v^{(\sigma)} = \sigma\widehat{v} + (1-\sigma)v$, $\sigma = \dfrac{1}{4}$.

Решение.

Запишем РС в индексной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} = \Lambda\left(\dfrac{1}{2} y_k^{j+1} + \dfrac{1}{2} y_k^j\right) + (x_k+1)t_j, \quad k = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N_1 - 1}, \\ y_k^0 = x_k^2, \quad k = \overline{0,N}, \\ y_0^{j+1} = 1 \quad , j = \overline{1, N_1 - 1}, \\ -\dfrac{1}{4}(y_N^{j+1} + 3y_N^j)_{\overline{x}} = \dfrac{1}{4}(y_N^{j+1} + 3y_N^j) + \dfrac{h}{2}\dfrac{y_N^{j+1} - y_N^j}{\tau} - ht_j, \quad j = \overline{1, N_1 - 1}. \end{cases}$$

Заполнив нулевой слой по формуле $y_k^0 = x_k^2, \quad k = \overline{0,N}$, далее для всех $j = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ заполняем очередной ($(j+1)$-ый) слой, решая систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}\Lambda y_k^{j+1} - \dfrac{1}{\tau} y_k^{j+1} = -\dfrac{1}{\tau} y_k^j - \dfrac{3}{4}\Lambda y_k^j - (x_k+1)t_j, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ y_0^{j+1} = 1, \\ \dfrac{1}{4}(y_N^{j+1})_{\overline{x}} + \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{h}{2\tau}\right) y_N^{j+1} = -\dfrac{3}{4}(y_N^j)_{\overline{x}} - \dfrac{3}{4} y_N^j + \dfrac{h}{2\tau} y_N^j + ht_j \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4h^2} y_{k-1}^{j+1} - \left(\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{1}{2h^2}\right) y_k^{j+1} + \dfrac{1}{4h^2} y_{k+1}^{j+1} = -F_k^j, \quad k = \overline{1, N-1} \\ y_0^{j+1} = 1, \\ -\dfrac{1}{4\tau} y_{N-1}^{j+1} + \left(\dfrac{1}{4h} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{h}{2\tau}\right) y_N^{j+1} = \dfrac{3}{4\tau} y_{N-1}^j - \left(\dfrac{3}{4\tau} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{h}{2\tau}\right) y_N^j + ht_j, \end{cases}$$

где $F_k^j = \dfrac{1}{\tau} y_k^j + \dfrac{3}{4}\dfrac{y_{k-1}^j - 2y_k^j + y_{k+1}^j}{h^2} + (x_k+1)t_j$.

Решение такой системы целесообразно проводить с использованием метода разностной прогонки, которая, очевидно, будет устойчивой.

Вариант 5

Задание 1.

В зависимости от параметра σ и сеточной функции φ определить порядок аппроксимации разностной схемы $y_{\bar{t}t} = \sigma\Lambda\hat{y} + (1-\sigma)\Lambda y + \varphi$, аппроксимирующей уравнение колебаний $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.

Решение.

Итак, зададим сетку узлов

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau.$$

На этой сетке узлов построим разностную схему для уравнения колебаний в следующем виде

$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = \sigma\Lambda\hat{y} + (1-\sigma)\Lambda y + \varphi, \ (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ y(x,0) = u_0(x), \ y_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = 0, \ y(1,t) = 0, \ t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases}$$

Необходимо определить порядок аппроксимации дифференциального уравнения в зависимости от параметров σ и φ. Для этого рассмотрим погрешность как невязку на точном решении

$$\psi(x,t) = u_{\bar{t}t} - \sigma\Lambda\hat{u} - (1-\sigma)\Lambda u - \varphi.$$

Для дальнейших вычислений необходимо расписать $\Lambda\hat{u}$. Сделаем это

$$\Lambda\hat{u} = u(x,t+\tau)_{\bar{x}x} = \left(u(x,t) + \tau\dot{u}(x,t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{u}(x,t) + \frac{\tau^3}{6}\dddot{u}(x,t) + O(\tau^4) \right)_{\bar{x}x} =$$

$$= u'' + \frac{h^2}{12}u^{(IV)} + \tau\dot{u}'' + \frac{\tau h^2}{12}\dot{u}^{(IV)} + \frac{\tau^2}{2}\ddot{u}'' + \frac{\tau^3}{6}\dddot{u}'' + O(\tau^4 + h^4),$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u} = u^{(1)}, \ \frac{\partial u}{\partial x} = u' = u^{(I)}.$$

Тогда, используя полученный результат, получаем выражение для погрешности

$$\psi(x,t) = \ddot{u} + \frac{\tau^2}{12}u^{(4)} - \sigma u'' - \sigma\frac{h^2}{12}u^{(IV)} - \sigma\tau\dot{u}'' - \sigma\frac{\tau h^2}{12}\dot{u}^{(IV)} - \sigma\frac{\tau^2}{2}\ddot{u}'' - \sigma\frac{\tau^3}{6}\dddot{u}'' -$$

$$- (1-\sigma)u'' - (1-\sigma)\frac{h^2}{12}u^{(IV)} + O(\tau^4 + h^4) - \varphi =$$

$$= \left[\ddot{u} = u'' + f, \ u^{(IV)} = -f'' + \ddot{u}'', \ u^{(4)} = \ddot{u}'' + \ddot{f}, \ \dddot{u}'' = \dot{u}^{(IV)} + \dot{f}'' \right] =$$

$$= f + \frac{\tau^2}{12}\ddot{f} + \frac{h^2}{12}f'' + \left(\frac{1}{12} + \frac{h^2}{12\tau^2} - \frac{\sigma}{2} \right)\tau^2\ddot{u}'' - \sigma\tau\dot{u}'' - \left(\frac{h^2}{12\tau^2} + \frac{1}{6} \right)\sigma\tau^3\dot{u}^{(IV)} - \sigma\frac{\tau^3}{6}\dot{f}'' +$$

$$+ O(\tau^4 + h^4) - \varphi$$

1. Если взять σ любое и

   $$\varphi = f,$$

   то получим аппроксимацию

   $$\psi(x,t) = O(\tau + h^2).$$

2. Если взять $\sigma = 0$ и
$$\varphi = f,$$
то получим аппроксимацию
$$\psi(x,t) = O(\tau^2 + h^2).$$
3. Если взять $\sigma = 0$ и
$$\varphi = f + \frac{\tau^2}{12}\ddot{f} + \frac{h^2}{12}f'' + \frac{\tau^2}{12}\ddot{u}'' + \frac{h^2}{12}\ddot{u}'',$$
то получим аппроксимацию
$$\psi(x,t) = O(\tau^4 + h^4).$$

Задание 2.

Исследовать устойчивость по начальным данным разностной схемы $3y_t - y_{\bar{t}} = \Lambda\hat{y} + \Lambda y + 2\varphi$, аппроксимирующей уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.

Решение.

Зададим сетку узлов Зададим сетку узлов
$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$$
и на ней шеститочечный шаблон. На этом шаблоне построим разностную схему для уравнения теплопроводности
$$\begin{cases} 3y_t - y_{\bar{t}} = \Lambda\hat{y} + \Lambda y + 2\varphi, \ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x), \ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = 0, \ y(1,t) = 0, \ t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases}$$
С помощью метода разделения переменных исследуем устойчивость разностной схемы по начальным данным. Для этого представим сеточное решение в виде разложения по собственным функциям $\mu_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x$:
$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t)\mu_k(t).$$
Поскольку $\Lambda\mu_k = -\lambda_k\mu_k$, где $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{k\pi h}{2}$, то, подставляя в соответствующее однородное разностное уравнение и приравнивая соответствующие коэффициенты, имеем
$$3(T_k)_t - (T_k)_{\bar{t}} = -\lambda_k(\hat{T}_k + T_k),$$
$$3\frac{\hat{T}_k - T_k}{\tau} - \frac{T_k - \check{T}_k}{\tau} = -\lambda_k\hat{T}_k - \lambda_k T_k,$$
$$(3 + \lambda_k\tau)\hat{T}_k - (4 + \lambda_k\tau)T_k + \check{T}_k = 0.$$
Заменим $(3 + \lambda_k\tau) = \alpha$ и запишем соответствующее характеристическое уравнение
$$\alpha q^2 - (\alpha + 1)q + 1 = 0.$$

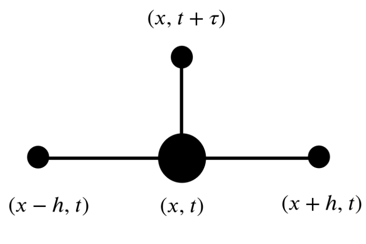
Его корни
$$q_1 = \frac{\alpha + 1 - (\alpha - 1)}{2} = 1,\ q_2 = \frac{\alpha + 1 + \alpha - 1}{2} = \alpha.$$
Для устойчивости необходимо выполнение условия $|q_k| \leqslant 1$ для всех гармоник $|q_k|$. Проверим выполнение этого условия:
$$|q_1| = 1 \leqslant 1$$
это верно,
$$|q_2| = |\alpha| = 3 + \lambda_k \tau \leqslant 1,$$
отсюда необходимо
$$\tau \leqslant -\frac{2}{\lambda_k},\ \lambda_k > 0,$$
что неверно, поскольку мы выбираем $\tau \geqslant 0$. Таким образом, разностная схема является неустойчивой.

Задание 3.

Записать алгоритм реализации явной разностной схемы в случае задачи для уравнения теплопроводности с краевым условием третьего рода.

Решение.

Итак, пусть дана задача
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < t \leqslant T,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \beta_0 u(0,t) - \mu_0(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T \\ u(1,t) = \mu_1(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$
Зададим сетку узлов
$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$$
и на ней четырехточечный шаблон



На этом шаблоне построим явную разностную схему
$$\begin{cases} y_t = y_{\overline{x}x} + \varphi,\ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ y_x(0,t) = \beta_0 y(0,t) - \mu_0(t),\ t \in \overline{\omega}_\tau \\ y(1,t) = \mu_1(t),\ t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases}$$

Для реализации разностной схемы перепишем ее в индексной форме

$$\begin{cases} \dfrac{y_k^{j+1} - y_k^j}{\tau} = \dfrac{y_{k+1}^j - 2y_k^j + y_{k-1}^j}{h^2} + \varphi_k^j, \ k = \overline{1, N_1 - 1}, \ j = \overline{1, N_2 - 1}, \\ y_k^0 = u_0(x_k), \ k = \overline{0, N_1}, \\ \dfrac{y_1^j - y_0^j}{h} = \beta_0 y_0^j - \mu_0(t_j), \ j = \overline{0, N_2} \\ y_N^j = \mu_1(t_j), \ j = \overline{0, N_2}. \end{cases}$$

Тогда алгоритм реализации следующий.

1. Заполняем нулевой временной слой по формуле

$$y_k^0 = u_0(x_k), \ k = \overline{0, N_1}.$$

2. Заполняем правую границу по формуле

$$y_N^j = \mu_1(t_j), \ j = \overline{0, N_2}.$$

3. Для j-ого временного слоя проводим расчеты по формуле

$$y_k^{j+1} = \tau \frac{y_{k+1}^j - 2y_k^j + y_{k-1}^j}{h^2} + y_k^j + \tau\varphi_k^j, \ k = \overline{1, N_1 - 1}.$$

4. Находим значение на левой границе $(j+1)$-ого слоя по формуле

$$y_0^{j+1} = \frac{y_1^j + h\mu_0(t_j)}{1 + \beta_0 h}.$$

Вариант 6

Задание 1

Для уравнения переноса $\dfrac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ определить порядок аппроксимации РС

$$\frac{y_i^j - 0.5(y_{i+1}^j + y_{i-1}^j)}{\tau} + a_i^j \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h} = 0.$$

Решение

Чтобы оценить погрешность аппроксимации схемы, преобразуем ее следующим образом:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} - \frac{1}{2}\frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{\tau} + a\frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h} = 0$$

или в безындексной форме

$$y_t - \frac{h^2}{2\tau} y_{\overline{x}x} + a y_{\overset{\circ}{x}} = 0.$$

Отсюда

$$\Psi = u_t - \frac{h^2}{2\tau}u_{\overline{x}x} + a u_{\overset{\circ}{x}} = \dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + au' - \frac{h^2}{2\tau}\left(u'' + O(h^2)\right) + O(\tau^2 + h^2)$$

Так как $\ddot{u} = -a\dot{u}' - \dot{a}u'$, а с другой стороны $u' = -\dfrac{1}{a}\dot{u}$, и, значит, $u'' = -\dfrac{\dot{u}'a - \dot{u}a'}{a^2}$, то $\ddot{u} = a^2u'' - \dot{a}u' - \dot{u}a'$. Поэтому последнее равенство для погрешности можно переписать в виде

$$\Psi = \left(\frac{a^2\tau}{2} - \frac{h^2}{2\tau}\right)u'' - \frac{\tau}{2}\left(\dot{a}u' + \dot{u}a'\right) + O(\tau^2 + h^2 + \frac{h^4}{\tau}) = -\frac{h^2}{2\tau}u'' + O(\tau + h^2 + \frac{h^4}{\tau}).$$

Схема аппроксимирует исходное уравнение только при выполнении условия $\dfrac{h^2}{\tau} \to 0$ при $h \to 0$ и $\tau \to 0$. Так, например, если выбрать $\tau = O(h)$, то $\Psi = O(\tau + h)$, т. е. схема в этом случае будет схемой первого порядка.

Задание 2

в зависимости от параметра σ исследовать устойчивость по начальным данным РС $y_{\overline{t}} = \sigma\Lambda\widehat{y} + (1-\sigma)\Lambda y + \varphi$, аппроксимирующей уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.

Решение

$$y_{\overline{t}} = \sigma\Lambda\widehat{y} + (1-\sigma)\Lambda y$$

Разложим по собственным функциям оператора второй производной:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t)\mu_k(t), \quad [\mu_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x].$$

Заметим, что $\Lambda\mu_k = -\lambda_k\mu_k$, где $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{k\pi h}{2}$.

Выполнив разделение переменных, для T_k получим задачу

$$(T_k)_{\bar t} + \sigma\lambda_k \widehat{T}_k + (1-\sigma)\lambda_k T_k = 0$$

$$T_k - \check{T}_k + \sigma\tau\lambda_k \widehat{T}_k + (1-\sigma)\tau\lambda_k T_k = 0$$

$$\sigma\tau\lambda_k \widehat{T}_k + \Big((1-\sigma)\tau\lambda_k + 1\Big) T_k - \check{T}_k = 0$$

$$F(q) = \sigma\tau\lambda_k q^2 + \Big((1-\sigma)\tau\lambda_k + 1\Big) q - 1 = 0$$

$$D = \Big((1-\sigma)\tau\lambda_k + 1\Big)^2 + 4\sigma\tau\lambda_k.$$

Рассмотрим случай, когда $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$:

$$q_{1,2} = \frac{1}{2\sigma\tau\lambda_k}\left[-\Big((1-\sigma)\tau\lambda_k + 1\Big) \pm i\sqrt{-\Big((1-\sigma)\tau\lambda_k + 1\Big)^2 - 4\sigma\tau\lambda_k}\right]$$

Так как для устойчивости необходимо $|q_i| \leqslant 1 \Rightarrow$

$$|q|^2 \leqslant 1$$

$$\frac{1}{4(\sigma\tau\lambda_k)^2}\Big[-4\sigma\tau\lambda_k\Big] \leqslant 1$$

$$-\frac{1}{\sigma\tau\lambda_k} \leqslant 1$$

$$\sigma \geqslant -\frac{1}{\tau\lambda_k}.$$

Рассмотрим случай, когда $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, т. е. $D \geqslant 0$. Корни уравнения вещественные и условие $|q_{1,2}| \leqslant 1$ будет эквивалентно выполнению системы неравенств

$$\begin{cases} -1 \leqslant -\dfrac{(1-\sigma)\tau\lambda_k + 1}{2\sigma\tau\lambda_k} \leqslant 1, \\ F(-1) \geqslant 0, \\ F(1) \geqslant 0 \end{cases}$$

Напомним $F(q) = \sigma\tau\lambda_k q^2 + \Big((1-\sigma)\tau\lambda_k + 1\Big) q - 1 = 0.$

$$\begin{cases} -2 \leqslant -\dfrac{(1-\sigma)\tau\lambda_k + 1}{\sigma\tau\lambda_k} \leqslant 2, \\ 2\sigma\tau\lambda_k - 2 - \tau\lambda_k \geqslant 0, \\ \tau\lambda_k \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant -\dfrac{(1-\sigma)\tau\lambda_k + 1}{\sigma\tau\lambda_k} \leqslant 2, \\ 2\sigma\tau\lambda_k \geqslant \tau\lambda_k + 2, \\ \tau\lambda_k \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma \geqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\lambda_k\tau},\ \sigma \geqslant -1 - \dfrac{1}{\tau\lambda_k}, \\ \sigma \geqslant 1 + \dfrac{2}{\tau\lambda_k}, \\ \tau\lambda_k \geqslant 0 \end{cases}$$

Таким образом, $\sigma \geqslant 1 + \dfrac{2}{\tau\lambda_k}$.

Итак, необходимое условие устойчивости эквивалентно условию $\sigma \geqslant 1 + \dfrac{2}{\tau\lambda_k}$, при $\forall \tau, h$.

Задание 3

Определить с каким порядком выражение $y_x^{(\sigma)}(0,t) = \beta_0 y^{(\sigma)}(0,t) + \dfrac{h}{2} y_{\bar{t}t}(0,t) - \dfrac{h}{2} f(0,t)$ аппроксимирует условие $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \beta_0 u(0,t)$ в задаче для уравнения колебаний $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$, где $v^{(\sigma)} = \sigma\widehat{v} + (1-2\sigma)v + \sigma\check{v},\ \sigma = \dfrac{1}{2}$.

Решение

$$\Psi = y_x^{(\sigma)}(0,t) - \beta_0 y^{(\sigma)}(0,t) - \frac{h}{2} y_{\bar{t}t}(0,t) + \frac{h}{2} f(0,t) = [\check{u} + \widehat{u} = 2u + \tau^2 u_{\bar{t}t}] =$$
$$= (u + \frac{\tau^2}{2} u_{\bar{t}t})_x - \beta_0 y^{(\sigma)}(0,t) - \frac{h}{2} y_{\bar{t}t}(0,t) + \frac{h}{2} f(0,t) = u'(0,t) + \frac{h}{2} u''(0,t) + \frac{h^2}{6} u'''(0,t) +$$
$$+ \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}'(0,t) + \frac{\tau^4}{24} u'^{(4)}(0,t) + \frac{h\tau^2}{4} \ddot{u}''(0,t) + \frac{h\tau^4}{48} u''^{(4)}(0,t) + \frac{h^2\tau^2}{12} \ddot{u}'''(0,t) -$$
$$-\beta_0 \left(u(0,t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u} + \frac{\tau^4}{24} u^{(4)}(0,t) \right) - \frac{h}{2} \ddot{u}(0,t) - \frac{h\tau^2}{24} u^{(4)}(0,t) - \frac{h\tau^4}{720} u^{(6)}(0,t) + \frac{h}{2} f(0,t) + O(h^3 + \tau^6) =$$
$$= [u'(0,t) = \beta_0 u(0,t), \ddot{u}(0,t) = u''(0,t) + f(0,t)] =$$
$$= \frac{h^2}{6} u'''(0,t) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}'(0,t) + \frac{\tau^4}{24} u'^{(4)}(0,t) + \frac{h\tau^2}{4} \ddot{u}''(0,t) + \frac{h\tau^4}{48} u''^{(4)}(0,t) + \frac{h^2\tau^2}{12} \ddot{u}'''(0,t) -$$
$$- \beta_0 \left(\frac{\tau^2}{2} \ddot{u} + \frac{\tau^4}{24} u^{(4)}(0,t) \right) - \frac{h\tau^2}{24} u^{(4)}(0,t) - \frac{h\tau^4}{720} u^{(6)}(0,t) + O(h^3 + \tau^6) = O(h^2 + \tau^4)$$

Таким образом, погрешность аппроксимации правого граничного условия равна $O(h^2 + \tau^4)$.

Вариант 7

Задание 1.

В зависимости от параметра σ и сеточной функции φ определить порядок аппроксимации разностной схемы $(1+\sigma)y_t - \sigma y_{\bar{t}} = \Lambda\hat{y} + \varphi$, аппроксимирующей уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.

Решение.

Итак, зададим сетку узлов

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau.$$

На этой сетке узлов зададим девятиточечный шаблон и построим разностную схему для уравнения теплопроводности в следующем виде

$$\begin{cases} (1+\sigma)y_t - \sigma y_{\bar{t}} = \Lambda\hat{y} + \varphi, \ (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ y(x,0) = u_0(x), \ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = 0, \ y(1,t) = 0, \ t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases}$$

Необходимо определить порядок аппроксимации дифференциального уравнения в зависимости от параметров σ и φ. Для этого рассмотрим погрешность как невязку на точном решении

$$\psi(x,t) = (1+\sigma)u_t - \sigma u_{\bar{t}} - \Lambda\hat{u} - \varphi.$$

Для дальнейших вычислений необходимо расписать $\Lambda\hat{u}$. Сделаем это

$$\Lambda\hat{u} = u(x,t+\tau)_{\overline{x}x} = \left(u(x,t) + \tau\dot{u}(x,t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{u}(x,t) + \frac{\tau^3}{6}\dddot{u}(x,t) + O(\tau^4)\right)_{\overline{x}x} =$$
$$= u'' + \frac{h^2}{12}u^{(IV)} + \tau\dot{u}'' + O(\tau^2 + h^4),$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u} = u^{(1)}, \ \frac{\partial u}{\partial x} = u' = u^{(I)}.$$

Тогда, используя полученный результат, получаем выражение для погрешности

$$\psi(x,t) = (1+\sigma)\left(\dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u} + O(\tau^2)\right) - \sigma\left(\dot{u} - \frac{\tau}{2}\ddot{u} + O(\tau^2)\right) - u'' - \frac{h^2}{12}u^{(IV)} + \tau\dot{u}'' + O(\tau^2 + h^4) - \varphi =$$
$$= \left[\dot{u} = u'' + f, \ u^{(IV)} = -f'' + \dot{u}''\right] =$$
$$= f + \frac{\tau}{2}\dot{f} + \frac{h^2}{12}f'' + \sigma\tau\dot{f} + \left(\sigma - \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau^2}\right)\tau\dot{u}'' + O(\tau^2 + h^4) - \varphi$$

1. Если взять σ любое и
$$\varphi = f,$$
то получим аппроксимацию
$$\psi(x,t) = O(\tau + h^2).$$

2. Если взять $\sigma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{h^2}{\tau}\left(\dfrac{1}{12} + \alpha\right)$ и
$$\varphi = f + \frac{\tau}{2}\dot{f} + \frac{h^2}{12}f'' + \sigma\tau\dot{f},$$

то получим аппроксимацию

$$\psi(x,t) = O(\tau^2 + h^2).$$

3. Если взять $\sigma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{h^2}{12\tau}$ и

$$\varphi = f + \frac{\tau}{2}\dot{f} + \frac{h^2}{12}f'' + \sigma\tau\dot{f},$$

то получим аппроксимацию

$$\psi(x,t) = O(\tau^2 + h^4).$$

Задание 2.

Исследовать устойчивость по начальным данным разностной схемы $y_{\bar{t}t} = \hat{y}_{\bar{x}x} + \varphi$, аппроксимирующей уравнение колебаний $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ с краевыми условиями первого рода.

Решение.

Зададим сетку узлов

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$$

и на ней шеститочечный шаблон. На этом шаблоне построим разностную схему для уравнения колебаний с краевыми условиями первого рода (здесь не важно однородные условия или неоднородные)

$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = \hat{y}_{\bar{x}x} + \varphi, \ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = u_0(x), \ y_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = 0, \ y(1,t) = 0, \ t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases}$$

С помощью метода разделения переменных исследуем устойчивость разностной схемы по начальным данным. Для этого представим сеточное решение в виде разложения по собственным функциям $\mu_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x$:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t)\mu_k(t).$$

Поскольку $\Lambda\mu_k = -\lambda_k\mu_k$, где $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{k\pi h}{2}$, то, подставляя в соответствующее однородное разностное уравнение и приравнивая соответствующие коэффициенты, имеем

$$(T_k)_{\bar{t}t} = -\lambda_k \hat{T}_k,$$

$$\frac{\hat{T}_k - 2T_k + \check{T}_k}{\tau^2} = -\lambda_k \hat{T}_k$$

$$(1 + \lambda_k\tau^2)\hat{T}_k - 2T_k + \check{T}_k = 0.$$

Заменим $\lambda_k\tau^2 = \alpha \geqslant 0$ и запишем соответствующее характеристическое уравнение

$$(\alpha + 1)q^2 - 2q + 1 = 0.$$

Его корни
$$q_{1,2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{\alpha}}{2(\alpha+1)} = \frac{1 \pm i\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}.$$
Для устойчивости необходимо выполнение условия $|q_k| \leqslant 1$ для всех гармоник $|q_k|$. Проверим выполнение этого условия:
$$|q_k|^2 = \left|\frac{1 \pm i\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}\right|^2 = \frac{1}{(\alpha+1)^2} + \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1^2)} = \frac{1}{\alpha+1} \leqslant 1.$$
Таким образом, необходимо выполнение условия
$$\alpha + 1 \geqslant 1 \Rightarrow \alpha \geqslant 0,$$
делая обратную замену, получаем
$$\tau^2 \lambda_k \geqslant 0 \Rightarrow \frac{\tau^2}{h^2} \geqslant 0.$$
Это условие выполняется всегда, следовательно, схема является устойчивой при любых шагах τ и h.

Задание 3.

Записать алгоритм реализации разностной схемы
$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = y_{\bar{x}x}^{(\sigma)} + (x+1)t, \ (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(x,0) = e^x, \ x \in \overline{\omega}_h, \\ y_t(x,0) = 2e^x x, \ x \in \overline{\omega}_h, \\ y_x^{(\sigma)}(0,t) = y^{(\sigma)}(0,t) + \dfrac{h}{2} y_{\bar{t}t}(0,t) - \dfrac{h}{2}t, \ t \in \overline{\omega}_\tau \\ y(1,t) = 1, \ t \in \overline{\omega}_\tau, \end{cases}$$
где $\overline{w}_{h\tau} = \overline{w}_h \times \overline{w}_\tau$, $\overline{w}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0,N}, Nh = 1\}$, $\overline{w}_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{0,N_1}, N_1\tau = T\}$, $v^{(\sigma)} = \sigma\widehat{v} + (1-\sigma)v$, $\sigma = \dfrac{1}{2}$.

Решение.

Для реализации разностной схемы перепишем ее в индексной форме
$$\begin{cases} \dfrac{y_k^{j+1} - 2y_k^j - y_k^{j-1}}{\tau^2} = \dfrac{y_{k+1}^{j+1} - 2y_k^{j+1} + y_{k-1}^{j+1}}{h^2} + \dfrac{y_{k+1}^j - 2y_k^j + y_{k-1}^j}{h^2} + (x_k+1)t_j, \ k = \overline{1, N-1}, \\ \hfill j = \overline{1, N_1 - 1}, \\ y_k^0 = u_0(x_k), \ k = \overline{0, N_1}, \\ \dfrac{y_1^j - y_0^j}{h} = \beta_0 y_0^j - \mu_0(t_j), \ j = \overline{0, N_2} \\ y_N^j = \mu_1(t_j), \ j = \overline{0, N_2}. \end{cases}$$
Тогда алгоритм реализации следующий.

1. Заполняем нулевой временной слой по формуле
$$y_k^0 = u_0(x_k), \ k = \overline{0, N_1}.$$

2. Заполняем правую границу по формуле
$$y_N^j = \mu_1(t_j),\ j = \overline{0, N_2}.$$
3. Для j-ого временного слоя проводим расчеты по формуле
$$y_k^{j+1} = \tau \frac{y_{k+1}^j - 2y_k^j + y_{k-1}^j}{h^2} + y_k^j + \tau\varphi_k^j,\ k = \overline{1, N_1 - 1}.$$
4. Находим значение на левой границе $(j+1)$-ого слоя по формуле
$$y_0^{j+1} = \frac{y_1^j + h\mu_0(t_j)}{1 + \beta_0 h}.$$

Вариант 8

Задание 1

Указать порядок аппроксимации РС $y_{\overline{t}t} = \widehat{y}_{\overline{x}x} + \varphi$, аппроксимирующей задачу для уравнения колебаний $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ с краевыми условиями второго рода. Дописать соответствующего порядка аппроксимацию граничных и начальных условий.

Решение

РС для волнового уравнения:

$$\begin{cases} y_{\overline{t}t} = \widehat{y}_{\overline{x}x} + \varphi, \quad (x,t) \in w_{h\tau} \\ y(x,0) = u_0(x),\ y_t(0,t) = \overline{u}_1(x), \quad x \in w_h, \\ y_x(0,t) = \overline{\mu}_0(t), \\ y_{\overline{x}}(1,t) = \overline{\mu}_1(t). \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации для РУ:

$$\Psi = u_{\overline{t}t} - \widehat{u}_{\overline{x}x} - \varphi = [\widehat{u} = u + \tau u_t] = u_{\overline{t}t} - u_{\overline{x}x} - \tau u_{\overline{x}xt} - \varphi = \ddot{u} + \frac{\tau^2}{12}u^{(4)} - u'' - \frac{h^2}{12}u^{(IV)} - \tau(\dot{u} + \frac{\tau}{2}\ddot{u})_{\overline{x}x} -$$

$$- \varphi + O(h^4+\tau^4) = \ddot{u} + \frac{\tau^2}{12}u^{(4)} - u'' - \frac{h^2}{12}u^{(IV)} - \tau\dot{u}'' - \frac{\tau h^2}{12}\dot{u}^{(IV)} - \frac{\tau^2}{2}\ddot{u}'' - \varphi + O(h^4+\tau^4) =$$

$$= f - \varphi - \tau\dot{u}'' + O(h^2+\tau^2).$$

Если $\varphi(x,t) = f(x,t) - \tau\dot{u}'' = f(x,t) - \tau u_{\overline{x}xt}$, то $\Psi = O(h^2+\tau^2)$.

Первое начальное условие аппроксимируется точно, поэтому перейдем ко второму начальному условию и вычислим его погрешность аппроксимации:

$$\nu_1(x,0) = u_t(0,t) - \overline{u}_1(x) = \dot{u}(x,0) + \frac{\tau}{2}\ddot{u}(x,0) - \overline{u}_1(x) + O(\tau^2) = u_1(x,0) - \overline{u}_1(x) + \frac{\tau}{2}\ddot{u}(x,0) + O(\tau^2).$$

Отсюда следует, что если $\overline{u}_1(x) = u_1(x,0) + \dfrac{\tau}{2}\ddot{u}(x,0) = u_1(x,0) + \dfrac{\tau}{2}\big(u_0''(x) + f(x,0)\big)$, то получим аппроксимацию второго порядка.

Вычислим погрешность аппроксимации для левого граничного условия:

$$\nu_2(0,t) = u_x(0,t) - \overline{\mu}_0(t) = u'(0,t) + \frac{h}{2}u''(0,t) - \overline{\mu}_0(t) + O(h^2) = \mu_0(t) - \overline{\mu}_0(t) + \frac{h}{2}u''(0,t) + O(h^2).$$

Возьмем $\overline{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \dfrac{h}{2}u''(0,t) = \mu_0(t) + \dfrac{h}{2}\big(u_{\overline{t}t}(0,t) - f(0,t)\big)$ и получим второй порядок аппроксимации.

Вычислим погрешность аппроксимации для правого граничного условия:

$$\nu_3(0,t) = u_{\overline{x}}(0,t) - \overline{\mu}_1(t) = u'(0,t) - \frac{h}{2}u''(0,t) - \overline{\mu}_1(t) + O(h^2) = \mu_1(t) - \overline{\mu}_1(t) - \frac{h}{2}u''(0,t) + O(h^2).$$

Возьмем $\overline{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - \dfrac{h}{2}u''(0,t) = \mu_1(t) - \dfrac{h}{2}\big(u_{\overline{t}t}(0,t) - f(0,t)\big)$ и получим второй порядок аппроксимации.

Задание 2

В зависимости от параметра σ исследовать устойчивость по начальным данным РС $y_t + \sigma\tau y_{\overline{t}t} = \Lambda\widehat{y} + \varphi$, аппроксимирующей уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.

Решение

$$y_t + \sigma\tau y_{\bar{t}t} = \Lambda\widehat{y}$$

Разложим по собственным функциям оператора второй производной:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t)\mu_k(t), \quad [\mu_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x].$$

Заметим, что $\Lambda\mu_k = -\lambda_k\mu_k$, где $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{k\pi h}{2}$.

Выполнив разделение переменных, для T_k получим задачу

$$(T_k)_t + \sigma\tau(T_k)_{\bar{t}t} = -\lambda_k\widehat{T}_k$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\widehat{T}_k - T_k}{\tau} + \sigma\frac{\widehat{T}_k - 2T_k + \check{T}_k}{\tau} + \lambda_k\widehat{T}_k = 0$$

или

$$(1+\sigma+\lambda_k\tau)\widehat{T}_k - (2\sigma+1)T_k + \sigma\check{T}_k = 0.$$

$$F(q) = (1+\sigma+\lambda_k\tau)q^2 - (2\sigma+1)q + \sigma = 0,$$

где $\lambda_k \geqslant 0$. Возьмем $\lambda_k = 0$. Чтобы для этого значения λ_k корни уравнения удовлетворяли условию $|q_{1,2}| \leqslant 1$ необходимо выполнение неравенства $\sigma \geqslant -0.5$. Поэтому далее можно рассматривать только такие значения σ. Если дискриминант $D = 1 - 4\sigma\lambda_k\tau < 0$, то

$$|q_{1,2}|^2 = \frac{\sigma}{1+\sigma+\lambda_k\tau} \leqslant 1.$$

Данное неравенство верно для $\forall\sigma$.

Случай $D \geqslant 0$. Корни уравнения вещественные и условие $|q_{1,2}| \leqslant 1$ будет эквивалентно выполнению системы неравенств

$$\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{2\sigma+1}{2(1+\sigma+\lambda_k\tau)} \leqslant 1, \\ F(-1) \geqslant 0, \\ F(1) \geqslant 0 \end{cases}$$

Напомним $F(q) = \sigma\tau\lambda_k q^2 + \Big((1-\sigma)\tau\lambda_k + 1\Big)q - 1 = 0.$

$$\begin{cases} -2 \leqslant \dfrac{2\sigma+1}{1+\sigma+\lambda_k\tau} \leqslant 2, \\ 2 + 4\sigma + \lambda_k\tau \geqslant 0, \\ \tau\lambda_k \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant \dfrac{2\sigma+1}{1+\sigma+\lambda_k\tau} \leqslant 2, \\ 4\sigma \geqslant -\tau\lambda_k - 2, \\ \tau\lambda_k \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma \geqslant -1 - \dfrac{2}{3}\lambda_k\tau, \ \forall\sigma, \\ \sigma \geqslant -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\tau\lambda_k}{4}, \\ \tau\lambda_k \geqslant 0 \end{cases}$$

Таким образом, $\sigma \geqslant -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\tau\lambda_k}{4}$.

Итак, необходимое условие устойчивости эквивалентно условию $\sigma \geqslant -0.5$, при $\forall\tau, h$.

Задание 3

Аппроксимировать краевое условие $-\dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \beta_1 u(1,t) - \mu_1(t)$ в задаче для уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ на шаблоне $\{(1,t),(1-h,t),(1,t+\tau),(1-h,t+\tau)\}$ с погрешностью $O(h^2+\tau)$.

Решение

Стандартная двухточечная аппроксимация правого краевого условия третьего рода имеет вид

$$-y_{\overline{x}}(1,t) = \beta_1 y(1,t) - \overline{\mu}_1(t).$$

Тогда погрешность аппроксимации равна:

$$\begin{aligned}\nu(1,t) = \beta_1 u(1,t) - \overline{\mu}_1(t) + u_{\overline{x}}(1,t) = \beta_1 u(1,t) - \overline{\mu}_1(t) + u'(1,t) - \frac{h}{2}u''(1,t) + O(h^2) = \\ = \beta_1 u(1,t) - \overline{\mu}_1(t) - \beta_1 u(1,t) + \mu_1(t) - \frac{h}{2}\Big(\dot{u}(1,t) - f(1,t)\Big) + O(h^2) = \\ = -\overline{\mu}_1(t) + \mu_1(t) - \frac{h}{2}\Big(\dot{u}(1,t) - f(1,t)\Big) + O(h^2).\end{aligned}$$

Отсюда видим, что, выбрав $\overline{\mu}_1(t) = \mu_1(t) + \dfrac{h}{2}f(1,t) - \dfrac{h}{2}y_t(1,t)$, получим разностное граничное условие с погрешностью $O(\tau + h^2)$.

$$-y_{\overline{x}}(1,t) = \beta_1 y(1,t) + \frac{h}{2}y_t(1,t) - \frac{h}{2}f(1,t) - \mu_1(t).$$

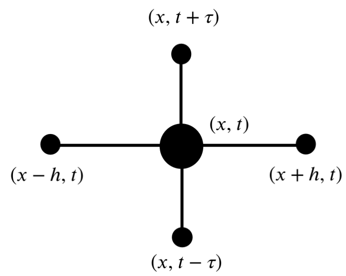
Вариант 9

Задание 1

Для уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2)$ построить аппроксимацию с порядком $O(h_1^2 + h_2^2)$ граничного условия $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \beta u\right|_{x_1=0} = 0,\ \beta > 0$, используя минимальное число узлов.

Решение

Для аппроксимации дифференциального оператора Лапласа может быть использован пятиточечный шаблон «крест».



Поэтому во всех внутренних узлах оператор Лапласа можно заменить разностным оператором

$$u_{\overline{x}_1 x_1} + u_{\overline{x}_2 x_2}$$

Правую часть уравнение можно аппроксимировать некоторой сеточной функцией $\varphi(x)$.Таким образом разностное уравнение имеет вид:

$$u_{\overline{x}_1 x_1} + u_{\overline{x}_2 x_2} = \varphi(x)$$

Вычислим погрешность аппроксимации для данного РУ:

$$\Psi = u_{\overline{x}_1 x_1} + u_{\overline{x}_2 x_2} - \varphi(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{h_1^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} - \varphi(x) + O(h_1^4 + h_2^4) = f(x) - \varphi(x) + O(h_1^2 + h_2^2)$$

Если взять $\varphi = f$, то получим аппроксимацию второго порядка по всем переменным.

Разностная схема для граничного условия имеет вид:

$$u_{x_1}(0, x_2) = \beta u(0, x_2) + \overline{\mu}$$

Теперь вычислим погрешность аппроксимации для граничного условия:

$$\nu(0, x_2) = u_{x_1}(0, x_2) - \beta u(0, x_2) - \overline{\mu} = \frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_1} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 u(0, x_2)}{\partial^2 x_1} - \beta u(0, x_2) - \overline{\mu} + O(h_1^2) =$$
$$= \frac{h_1}{2}\left(f(0, x_2) - \frac{\partial^2 u(0, x_2)}{\partial x_2^2}\right) - \overline{\mu} + O(h_1^2)$$

Если взять $\overline{\mu} = \dfrac{h_1}{2} f(0, x_2) - \dfrac{h_1}{2} u_{\overline{x}_2 x_2}(0, x_2)$, то получим погрешность аппроксимации равную $O(h_1^2 + h_2^2)$.

Задание 2

Исследовать устойчивость по начальным данным РС $y_{\overset{\circ}{t}} = \Lambda\widehat{y} + \varphi$, аппроксимирующей уравнение теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.

Решение

$$y_{\overset{\circ}{t}} = \Lambda\widehat{y} + \varphi$$

Разложим по собственным функциям оператора второй производной:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} T_k(t)\mu_k(t), \quad [\mu_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x].$$

Заметим, что $\Lambda\mu_k = -\lambda_k\mu_k$, где $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{k\pi h}{2}$.

Выполнив разделение переменных, для T_k получим задачу

$$(T_k)_{\overset{\circ}{t}} + \lambda_k\widehat{T}_k = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{T}_k - \check{T}_k + 2\lambda_k\tau\widehat{T}_k = 0$$

$$(1 + 2\tau\lambda_k)q^2 - 1 = 0$$

Для устойчивости необходимо, чтобы $|q_i| \leqslant 1 \Rightarrow |q_i|^2 \leqslant 1$.

$$q^2 = \frac{1}{1 + 2\tau\lambda_k} \leqslant 1$$

$$1 \leqslant 1 + 2\tau\lambda_k$$

$$2\tau\lambda_k \geqslant 0.$$

Схема абсолютно устойчива.

Задание 3

Записать алгоритм реализации на нулевом, первом, и втором временных слоях РС $y_{\bar{t}t} = \widehat{y}_{\bar{x}x} + \varphi$, аппроксимирующей задачу для уравнения колебаний $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ с краевыми условиями первого рода. Указать вид функции φ, а также дополнить схему аппроксимацией начального условия соответствующего порядка.

Решение

Итак, зададим сетку узлов

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau.$$

На этой сетке узлов построим разностную схему для уравнения колебаний в следующем виде

$$\begin{cases} y_{\bar{t}t} = \Lambda\widehat{y} + \varphi, \ (x,t) \in \omega_{h\tau} \\ y(x,0) = u_0(x), \ y_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(0,t) = \mu_0(t), \ t \in \overline{\omega}_\tau, \\ y(1,t) = \mu_1(t), \ t \in \overline{\omega}_\tau. \end{cases}$$

Запишем в индексной форме:

$$\begin{cases}\dfrac{y_i^{j+1}-2y_i^j+y_i^{j-1}}{\tau^2}=\dfrac{y_{i+1}^{j+1}-2y_i^{j+1}+y_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\varphi_i^j,\\ y_i^0=u_0(x_i),\\ \dfrac{y_i^1-y_i^0}{\tau}=u_1(x_i),\\ y_0^{j+1}=\mu_0(t_{j+1}),\\ y_N^{j+1}=\mu_1(t_{j+1}).\end{cases}$$

Следовательно, порядок расчетов будет таким:

1. заполняем начальный (нулевой слой) по формулам
$$y_i^0=u_0(x_i),\quad i=\overline{0,N};$$
2. заполняем первый слой по формулам
$$y_0^1=\mu_0(\tau),\ y_i^1=y_i^0+\tau u_1(x_i), i=\overline{1,N-1},\ y_N^1=\mu_1(\tau).$$
3. Для всех $j=\overline{1,N_1-1}$ заполняем очередной ($(j+1)$-й) слой, решая систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей
$$\begin{cases}\dfrac{1}{h^2}y_{i-1}^{j+1}-\left(\dfrac{1}{\tau^2}+\dfrac{2}{h^2}\right)y_i^{j+1}+\dfrac{1}{h^2}y_{i+1}^{j+1}=-\dfrac{2}{\tau^2}y_i^j+\dfrac{1}{\tau^2}y_i^{j-1}-\varphi_i^j,\quad i=\overline{1,N-1},\\ y_0^{j+1}=\mu_0(t_{j+1}),\\ y_N^{j+1}=\mu_1(t_{j+1}).\end{cases}$$
Решение такой системы целесообразно проводить с использованием метода разностной прогонки.

Вычислим погрешность аппроксимации для РУ. Для дальнейших вычислений необходимо расписать $\Lambda\hat{u}$. Сделаем это

$$\Lambda\hat{u}=u(x,t+\tau)_{\overline{x}x}=\left(u(x,t)+\tau\dot{u}(x,t)+\frac{\tau^2}{2}\ddot{u}(x,t)+\frac{\tau^3}{6}\dddot{u}(x,t)+O(\tau^4)\right)_{\overline{x}x}=$$
$$=u''+\frac{h^2}{12}u^{(IV)}+\tau\dot{u}''+\frac{\tau h^2}{12}\dot{u}^{(IV)}+\frac{\tau^2}{2}\ddot{u}''+\frac{\tau^3}{6}\dddot{u}\,''+O(\tau^4+h^4),$$

где
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\dot{u}=u^{(1)},\ \frac{\partial u}{\partial x}=u'=u^{(I)}.$$

Вычислим погрешность аппроксимации:

$$\Psi=u_{\overline{t}t}-\widehat{u}_{\overline{x}x}-\varphi=\ddot{u}+\frac{\tau^2}{12}u^{(4)}-u''-\frac{h^2}{12}u^{(IV)}-\tau\dot{u}''-\frac{\tau h^2}{12}\dot{u}^{(IV)}-\frac{\tau^2}{2}\ddot{u}''-\frac{\tau^3}{6}\dddot{u}\,''+O(\tau^4+h^4)=$$
$$=[\ddot{u}=u''+f,\ u^{(IV)}=-f''+\ddot{u}'',\ u^{(4)}=\ddot{u}''+\ddot{f},\ \dddot{u}\,''=\dot{u}^{(IV)}+\dot{f}'']=f-\varphi-\tau\dot{u}''+O(h^2+\tau^2)$$

Если взять $\varphi=f-\tau u_{\overline{x}xt}$, то получим аппроксимацию второго порядка по всем переменным.

Первое начальное условие аппроксимируется точно, поэтому перейдем ко второму начальному условию и вычислим его погрешность аппроксимации:

$$\nu_1(x,0)=u_t(0,t)-\overline{u}_1(x)=\dot{u}(x,0)+\frac{\tau}{2}\ddot{u}(x,0)-\overline{u}_1(x)+O(\tau^2)=u_1(x,0)-\overline{u}_1(x)+\frac{\tau}{2}\ddot{u}(x,0)+O(\tau^2).$$

Отсюда следует, что если $\overline{u}_1(x)=u_1(x,0)+\dfrac{\tau}{2}\ddot{u}(x,0)=u_1(x,0)+\dfrac{\tau}{2}\big(u_0''(x)+f(x,0)\big)$, то получим аппроксимацию второго порядка.

Вариант 10

Задание 1

Определить при каком соотношении шагов сетки РУ $y_{\bar{t}t} = \Lambda y + \varphi$ при соответствующем выборе сеточной функции φ аппроксимирует уравнение колебаний $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ с погрешностью $O(h^4)$.

Решение

Вычислим аппроксимацию РУ:

$$\begin{aligned}\Psi = y_{\bar{t}t} - \Lambda y - \varphi = \ddot{u} + \frac{\tau^2}{12}u^{(4)} - u'' - \frac{h^2}{12}u^{(IV)} - \varphi + O(\tau^4 + h^4) = \\ = [\ddot{u} = u'' + f, u^{(4)} = \ddot{u}'' + \ddot{f}, u^{(IV)} = \ddot{u}'' - f''] = \\ = f - \varphi + \left(\frac{\tau^2}{12} - \frac{h^2}{12}\right)\ddot{u}'' + \frac{\tau^2}{12}\ddot{f} + \frac{h^2}{12}f'' + O(h^4 + \tau^4)\end{aligned}$$

Если взять $\tau = h$ и $\varphi = f + \dfrac{h^2}{12}\left(\ddot{f} + f''\right)$, то получим погрешность $O(h^4)$.

Задание 2

Построить РС второго порядка аппроксимации по каждой переменной для задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \quad x > 0, t > 0, a(x,t) \geqslant a_0 > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u(0,t) = \mu_0(t) \end{cases}$$

и исследовать ее устойчивость.

Решение

Задание 3

Записать алгоритм вычисления приближенного решения задачи для уравнения теплопроводности с краевыми условиями второго рода с помощью разностной схемы $y_t - \dfrac{\tau}{h}y_{\bar{t}t} = y_{\bar{x}x} + \varphi$.

Решение