Лемма о 2И по прямоугольнику

Пусть а) функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на прямоугольнике $P = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le b\}$, б) при каждом фиксированном $x \in [a,b]$ отображение $y \to f(x,y)$ интегрируемо на $[c,d]$. Тогда $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx = \iint\limits_P f(x,y)\,dxdy$$

Теорема о сведении 2И к повторному интегралу

Пусть D — криволинейная трапеция, элементарная относительно оси Oy, и пусть $f(x,y)$ интегрируема по Риману на D: при каждом фиксированном x функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$. Тогда

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Теорема о замене переменных в 2И

Пусть $\begin{cases} x{=}\phi(u,v), \\ x{=}\psi(u,v). \end{cases}$ $(u,v) \in E$ *— ε-диффеоморфное преобразование фигуры E в D и пусть $f(x,y)$, $f(\phi(u,v), \psi(u,v)|I(u,v)|$ — интегрируемые на D и E соответственно функции. Тогда имеет место формула*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_E f(x(u,v), y(u,v)|I(u,v)|\,dudv$$

называемая формулой замены переменных в 2И.

Теорема о сведении КРИ-2 к 2И

Пусть D — ограниченная замкнутая область, граница которой является простой кусочно-гладкой кривой ∂D, а $P(x,y), Q(x,y)$ — непрерывные дифференцируемые на D функции. Тогда справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\partial D+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})\,dxdy$$

где $\partial D+$— путь, находящийся на границе фигуры D и ориентированный таким образом, что при движении по пути в этом направлении, фигура остается слева