Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.

• *Уравнение*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

будем называть ***линейным уравнением первого порядка (ЛУ-1)****, если оно линейно относительно неизвестной функции.*

Возьмем в качестве неизвестной функции $y = y(x)$. Тогда уравнение

$$(p(x) \cdot y + q(x))dx + r(x)dy = 0, \tag{1}$$

где функции $p(x), q(x), r(x)$ непрерывны на промежутке $\mathbb{I}$, будет *линейным относительно* y.

Разберемся, как вообще решаются линейные уравнения. Рассмотрим ЛОУ-1

$$x' + a(t) \cdot x = 0.$$

В теме СтЛОУ мы аналогично выводили формулу, считая, что $a(t) = const$ (подробнее в уроке 1). Теперь выведем формулу для общего решения, взяв $a(t)$ в качестве непрерывной на $\mathbb{I}$ функции.

$$x' + a(t) \cdot x = 0 \;\Big|\cdot e^{\int a(t)dt};$$

$$x' \cdot e^{\int a(t)dt} + a(t) \cdot x \cdot e^{\int a(t)dt} = 0;$$

$$(x \cdot e^{\int a(t)dt})' = 0;$$

$$x \cdot e^{\int a(t)dt} = C \quad \Rightarrow \quad x = Ce^{\int a(t)dt}.$$

Такой вид имеет общее решение ЛОУ-1.

Теперь перед нами цель аналогичными действиями вывести общее решение уравнения (1). Разделим уравнение (1) на dx:

$$r(x) \cdot y' + p(x) \cdot y + q(x) = 0.$$

Полученное уравнение разделим на $r(x)$ (очевидно, что $r(x) \neq 0$):

$$y' + \frac{p(x)}{r(x)} \cdot y + \frac{q(x)}{r(x)} = 0.$$

Для избежания громоздкости в формулах сделаем замену

$$\frac{p(x)}{r(x)} = P(x), \quad -\frac{q(x)}{r(x)} = Q(x).$$

Очевидно, что P и Q также являются непрерывными на $\mathbb{I}$ функциями. Таким образом, получаем уравнение вида

$$y' + P(x) \cdot y - Q(x) = 0, \tag{2}$$

которое также называют ЛУ-1 относительно y (и чаще всего записывают ЛУ-1 именно в таком виде). Теперь из уравнения (2) выведем формулу, для нахождения общего решения ЛУ-1:

$$y' + P(x) \cdot y - Q(x) = 0 \;\Big|\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}.$$

$$y'\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}+P(x)\cdot y\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}-Q(x)\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}=0.$$

$$\left(y\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}\right)'_x-Q(x)\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}=0.$$

Проинтегрируем по x получившееся уравнение:

$$y\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}-\int\limits_{x_0}^{x}Q(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau}dt=C.$$

Тогда отсюда получаем формулу для нахождения общего решения

$$y=Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}+e^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}\int\limits_{x_0}^{x}Q(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau}dt. \tag{3}$$

Или

$$y=e^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}\cdot\left(C+\int\limits_{x_0}^{x}Q(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau}dt\right). \tag{4}$$

Для решения задач мы будем использовать только формулы (3) или (4).

Также можно немного классифицировать ЛУ-1:

$$\underbrace{y'+P(x)\cdot y=0}_{\text{однородное ЛУ-1 (ЛОУ-1)}}\qquad\underbrace{y'+P(x)\cdot y=Q(x)}_{\text{неоднородное ЛУ-1 (ЛНУ-1)}}$$

Тогда из (3) общее решение ЛОУ-1 будет иметь вид

$$y_{\text{оо}}=Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}. \tag{5}$$

Следовательно, мы можем определить частное решение ЛУ-1 как

$$y_{\text{чн}}=e^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}\int\limits_{x_0}^{x}Q(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau}dt. \tag{6}$$

Значит формулу (3) (или (4)) можно определить в виде

$$y_{\text{он}}=y_{\text{оо}}+y_{\text{чн}}.$$

Замечание. *Если в уравнении (2) взять P в качестве постоянной, то мы получим СтЛНУ-1, причем формула (6) будет являться методом Коши для нахождения частного решения СтЛНУ-1.*

Наконец можно переходить к решению задач.

Пример 1. Решить уравнение

$$y'-\frac{y}{x}=0.$$

Решение. Данное нам уравнение является ЛОУ-1, решение которого мы можем вычислить по формуле (5). Тогда, поскольку $P(x) = -\dfrac{1}{x}$, подставим это в формулу (5), положив $x_0 = 1$ (как всегда произвольное значение из D):

$$y = Ce^{-\int\limits_1^x (-\frac{1}{\tau})d\tau} = Ce^{\ln|\tau|\Big|_1^x} = Ce^{\ln x - \ln 1} = Ce^{\ln x} = Cx.$$

Ответ: $y = Cx$.

Пример 2. Решить уравнение

$$y' + 2xy = e^{-x^2}.$$

Решение. Данное уравнение нам сразу дано в виде ЛУ-1 (в виде (2)). Нахождение решения разобьем на 3 этапа, как в СтЛНУ, т.е. найдем сначала общее решение соответствующего ЛОУ-1 по формуле (5), затем частное решение ЛНУ-1 по формуле (6) и в конце сложим получившееся решения.

1. Найдем общее решение соответствующего ЛОУ-1

$$y' + 2xy = 0.$$

   Из условия выпишем $P(x) = 2x$. Тогда воспользуемся формулой (5), взяв $x_0 = 0$:

$$y_{\text{оо}} = Ce^{-\int\limits_0^x (2\tau)d\tau} = Ce^{-x^2}.$$

2. Найдем частное решение ЛНУ-1

$$y' + 2xy = e^{-x^2}.$$

   По условию у нас $Q(x) = e^{-x^2}$. А также из предыдущего этапа нам известно, что $e^{-\int\limits_{x_0}^x P(\tau)d\tau} = e^{-x^2}$. Воспользуемся формулой (6), положив $x_0 = 0$:

$$y_{\text{чн}} = e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}e^{t^2}dt = e^{-x^2}\int\limits_0^x dt = xe^{-x^2}.$$

3. Найдем решение исходного уравнения. Оно равно

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = Ce^{-x^2} + xe^{-x^2}.$$

Ответ: $y = Ce^{-x^2} + xe^{-x^2}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$(2x + y)dy = ydx + 4\ln y dy.$$

Решение. Такое уравнение уже слегка сложнее, чем предыдущие. Для приведем уравнение к виду (2). Для этого разделим его на dx:

$$(2x + y)y' = y + 4y'\ln y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{y}{2x + y - 4\ln y} = 0.$$

К виду (2) мы не смогли привести, следовательно, данное уравнение не является линейным относительно y. Но мы можем проверить, будет ли оно линейным относительно x. Для этого вернемся к исходному виду и разделим его уже на dy:

$$2x + y = yx' + 4\ln y = 0 \quad \Rightarrow \quad x' - \frac{2x}{y} = 1 - \frac{4\ln y}{y}.$$

Относительно x мы получили ЛУ-1. Опять же разобъем поиск его решения на 3 этапа.

1. Найдем общее решение ЛОУ-1
$$x' - \frac{2x}{y} = 0.$$
То есть $P(y) = -\frac{2}{y}$. По формуле (5), приняв $y_0 = 1$, получим
$$x_{\text{оо}} = Ce^{-\int\limits_1^y (-\frac{2}{\tau})d\tau} = Ce^{2\ln y} = Cy^2.$$

2. Найдем частное решение ЛНУ-1
$$x' - \frac{2x}{y} = 1 - \frac{4\ln y}{y}.$$
Так как $Q(y) = 1 - \frac{4\ln y}{y}$, а $e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} = y^2$, то по формуле (6) имеем
$$x_{\text{чн}} = y^2 \int\limits_1^y \left(1 - \frac{4\ln t}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}dt = y^2\Big(\int\limits_1^y \frac{dt}{t^2} - 4\int\limits_1^y \frac{\ln t}{t^3}dt\Big) =$$
$$= y^2\Big(-\frac{1}{t}\Big|_1^y - 4\Big(-\frac{\ln t}{2t^2}\Big|_1^y + \int\limits_1^y \frac{dt}{2t^3}dt\Big)\Big) = y^2\Big(-\frac{1}{y} + 1 + 4\cdot\frac{\ln y}{2y^2} - 4\cdot\frac{\ln 1}{2} + \frac{1}{y^2} - 1\Big) =$$
$$= -y + y^2 + 2\ln y + 1 - y^2.$$

3. Найдем полное решение уравнения (все слагаемые с y^2 уходят к константе C):
$$x = Cy^2 + -y + y^2 + 2\ln y + 1 - y^2 = Cy^2 - y + 2\ln y + 1.$$

Ответ: $x = Cy^2 - y + 2\ln y + 1$.

Как и со всеми ранее пройденными типами уравнений рассмотрим задачу Коши и для ЛУ-1. Если $y|_{x=\nu} = \xi$, $\nu \in \mathbb{I}$, $\xi \in \mathbb{R}$ — задача Коши, то ее решением будет
$$y = e^{-\int\limits_{\nu}^{x} P(\tau)d\tau} \cdot \Big(\xi + \int\limits_{\nu}^{x} Q(t)\cdot e^{\int\limits_{\nu}^{t} P(\tau)d\tau}dt\Big). \tag{7}$$
То есть во все крайние нижние точки подставляем ν, а вместо C подставляем ξ. Аналогично можно ввести решение задачи Коши с начальными условиями $x|_{y=\xi} = \nu$.

Пример 4. Решить задачу Коши
$$(x + y^2)dy = ydx, \quad x|_{y=1} = 2.$$
Решение. В начальном условии для нас уже есть подсказка, что лучше будет рассмотреть ЛУ-1 относительно x. Тогда разделим исходное уравнение на dy:
$$yx' = x + y^2 \quad \Rightarrow \quad x' - \frac{x}{y} = y.$$
Перепишем формулу (7) для нашего случая, подставив начальные условия:
$$x = e^{-\int\limits_1^y P(\tau)d\tau} \cdot \Big(2 + \int\limits_1^y Q(t)\cdot e^{\int\limits_1^t P(\tau)d\tau}dt\Big) = e^{\int\limits_1^y \frac{d\tau}{\tau}} \cdot \Big(2 + \int\limits_1^y t\cdot e^{-\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\tau}}dt\Big) = y\Big(2 + \int\limits_1^y t\cdot\frac{1}{t}dt\Big) = y + y^2.$$
Ответ: $x = y + y^2$.

Уравнение Бернулли.

К теме ЛУ-1 можно также отнести **уравнение Бернулли**, которое имеет вид

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^m, \quad x \in \mathbb{I}. \tag{8}$$

Для его решения заменим $u = y^{1-m}$. Тогда, подставив, получим

$$u' + (1-m) \cdot P(x) \cdot u = (1-m) \cdot Q(x).$$

Пример 5. Решить уравнение

$$y' + 2y = y^2 e^x.$$

Решение. Данное уравнение сразу имеет вид (8). Воспользуемся заменой $u = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$. Тогда $u'_x = -\dfrac{y'_x}{y^2}$. Тогда для того, чтобы сразу подставить u', домножим исходное уравнение на $-\dfrac{1}{y^2}$:

$$-\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{y} = -e^x.$$

Теперь подставим нашу замену и получим

$$u' - 2u = -e^x.$$

А это уже ЛУ-1 относительно u, причем СтЛУ-1. Найдем его решение, взяв $x_0 = 0$

$$u = Ce^{2x} + e^{2x} \int\limits_0^x (-e^t) \cdot e^{-2t} dt = Ce^{2x} + e^{2x} \int\limits_0^x e^{-t} d(-t) = Ce^{2x} + e^x.$$

Сделаем обратную замену и получим

$$\frac{1}{y} = Ce^{2x} + e^x.$$

Ответ: $y(Ce^{2x} + e^x) = 1$.

Пример 6. Решить задачу Коши

$$y' + xy = xy^3, \quad y|_{x=0} = 1.$$

Решение. Данное уравнение снова является уравнением Бернулли, поэтому введем замену

$$u = y^{-2} = \frac{1}{y^2}, \quad u' = -\frac{2y'}{y^3}.$$

Для того, чтобы подставить замену, преобразуем исходное уравнение. Домножим всё уравнение на $-\dfrac{2}{y^3}$, тогда

$$-\frac{2y'}{y^3} - \frac{2x}{y^2} = -2x.$$

Тогда, заменяя, получим

$$u' - 2xu = -2x.$$

Полученное уравнение является ЛУ-1, для его нахождения решения применим формулу (3), взяв $x_0 = 0$ (причем мы не будем сразу решать задачу Коши),

$$u = Ce^{x^2} + e^{x^2} \int\limits_0^x (-2t) \cdot e^{-t^2} dt = Ce^{x^2} + e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-t^2} d(-t^2) = Ce^{x^2} + e^{x^2}(e^{-x^2} - 1) = Ce^{x^2} + 1 - e^{x^2} = Ce^{x^2} + 1.$$

Сделаем обратную замену и получим

$$\frac{1}{y^2} = Ce^{x^2} + 1.$$

Это полное решение исходного уравнения. Теперь найдем решение задачи Коши. Для этого подставим в получившееся уравнение начальные условия

$$1 = C + 1 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Тогда, подставляя $C = 0$, получим решение задачи Коши

$$\frac{1}{y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

$y = -1$ не подходит, так как не соответствует начальным условиям.

Ответ: $y = 1$.