МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

Отчет по лабораторной работе №1
«Решение задач Коши и Гурса для уравнений в частных производных второго порядка при помощи Wolfram Mathematica»
Вариант 2

Бовта Тимофея Анатольевича
студента 3 курса
специальности «прикладная математика»

Преподаватель:

И. С. Козловская

Минск, 2024 г.

Постановка задачи.

Дана задача

$$\begin{cases} u_{xy} + xu_y = y, \\ u|_{x=0} = 1, \\ u|_{y=0} = x + 1. \end{cases}$$

- найти решение данной задачи Коши или Гурса;
- проверить полученное решение путем подстановки в уравнение и условия задачи;
- построить график поверхности $z = u(x, y)$, где u – решение задачи.

Решение задачи.

Сперва зададим задачу и граничные условия в Wolfram Mathematica:

```
In[1]:= eq = Derivative[1, 1][u][x, y] + x*Derivative[0, 1][u][x, y] == y;
        cc = {u[0, y] == 1, u[x, 0] == x + 1}

Out[2]= {u[0, y] == 1, u[x, 0] == 1 + x}
```

Определимся с тем, что перед нами поставлена задача Гурса. Так как исходное уравнение является уравнением гиперболического типа, а условия – краевыми (в случае задачи Коши условия являются начальными).

Проверим выполнение условий согласования, то есть оба условия должны выполняться на множестве, где для всех x и y выполняется

$$u(0, y) = u(x, 0).$$

```
In[3]:= intersect = Solve[{x == 0, y == 0}, {x, y}]

Out[3]= {{x -> 0, y -> 0}}

In[4]:= cc[[1, 2]] == cc[[2, 2]] /. intersect[[1]]

Out[4]= True
```

Таким образом, условия поставленной задачи Гурса согласованы.

Вернемся к рассмотрению исходного уравнения в поставленной задаче. Можно заметить, что данное уравнение уже является уравнением гиперболического типа в каноническом виде. Более того мы можем найти его общее решение, применив замену

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v(x, y).$$

Тогда при подстановке данной замены исходное уравнение примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} + xv = y.$$

Полученное уравнение является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛОДУ-1). Мы можем найти его решение с помощью Wolfram Mathematica:

```
In[5]:= vsol = DSolve[Derivative[1, 0][v][x, y] + x*v[x, y] == y, v, {x, y}]
```

Out[5]= $\left\{\left\{\mathtt{v} \to \mathtt{Function}\left[\{\mathtt{x},\mathtt{y}\},\ e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \mathtt{y}\ \mathtt{Erfi}\left[\frac{\mathtt{x}}{\sqrt{2}}\right] + e^{-\frac{x^2}{2}}\ c_1[\mathtt{y}]\right]\right\}\right\}$

Решение данного уравнения мы также можем найти и самостоятельно. Для этого необходимо домножить данное уравнение на $e^{\int_0^x x dx}$, свернуть левую часть уравнения как производную произведения, а затем проинтегрировать обе части уравнения по x. В итоге получим

$$v(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}}C_1(y) + ye^{-\frac{x^2}{2}} \underbrace{\int\limits_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt}_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}erfi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Сделаем обратную замену и получим простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-\frac{x^2}{2}}C_1(y) + ye^{-\frac{x^2}{2}}\int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}}d\xi.$$

Данное уравнение можно решить, проинтегрировав обе части уравнения по y. В итоге мы и получим общее решение исходного уравнения в частных производных. Сперва проинтегрируем это уравнение с помощью Wolfram Mathematica:

```
In[6]:= usol = DSolve[Derivative[0, 1][u][x, y] == v[x, y] /.
vsol[[1]], u, {x, y}]
```

Out[6]= $\left\{\left\{\mathtt{u} \to \mathtt{Function}\left[\{\mathtt{x},\mathtt{y}\},\ c_2[\mathtt{x}] + \int_1^{\mathtt{y}} \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{2\pi}\ \mathtt{Erfi}\left[\frac{\mathtt{x}}{\sqrt{2}}\right]\times \mathtt{K[1]} + 2\,c_1[\mathtt{K[1]}]\right) d\mathtt{K[1]}\right]\right\}\right\}$

Полученный вид общего решения является слишком сложным для дальнейшей работы. Проинтегрируем уравнение вручную и проведем некоторые преобразования для упрощения вида общего решения:

$$u(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}}\int\limits_0^y C_1(\eta)d\eta + \int\limits_0^y \eta e^{-\frac{x^2}{2}}\int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}}d\xi d\eta + C_2(x).$$

Сделаем замену

$$\int\limits_0^y C_1(\eta)d\eta = C_1(y),$$

где функция $C_1(y)$ справа, вообще говоря, отлична от подынтегральной функции слева, но для упрощения записи будем использовать такое обозначение, так как оно не повлияет на дальнейшее решение. Тогда, если переставим местами интегралы, имеем

$$u(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}}C_1(y) + e^{-\frac{x^2}{2}}\int\limits_0^y \eta d\eta\int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}}d\xi + C_2(x).$$

Интеграл по η мы можем вычислить. В итоге имеем более простую запись общего решения исходной задачи

$$u(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}}C_1(y) + \frac{y^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}}d\xi + C_2(x).$$

Но нас интересует частное решение поставленной задачи. Его мы можем получить, подставляя заданные условия в полученное общее решение.

В Wolfram Mathematica переопределим замену usol согласно сделанным преобразованиям. После чего подставим в эту функцию условия на характеристиках из исходной задачи. При этом используем также функцию «Activate», раскрывающую так называемые неактивные интегралы. В итоге имеем

```
In[7]:= usol =
        u -> Function[{x, y}, E^(-x^2/2)*C[1][y] + C[2][x] +
                y^2/2*E^(-x^2/2)*Inactive[Integrate][E^(t^2/2), {t, 0, x}]];
newcc = Activate[cc /. usol]
```

Out[8]= $$\left\{\mathbb{c}_1[y] + \mathbb{c}_2[0] == 1,\ \mathbb{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathbb{c}_1[0] + \mathbb{c}_2[x] == 1 + x\right\}$$

То есть мы получили систему уравнений относительно функций $C_1(y)$ и $C_2(x)$

$$\begin{cases} C_1(y) + C_2(0) = 1, \\ e^{-\frac{x^2}{2}} C_1(0) + C_2(x) = 1 + x. \end{cases}$$

Решив ее, мы найдем значения для $C_1(y)$ и $C_2(x)$, подставляя которые в общее решение исходного уравнения, мы найдем вид частного решения поставленной задачи Гурса.

Из первого уравнения системы выразим $C_1(y)$, причем заменив $C_2(0) = t$. Имеем

```
In[9]:= c1sol = RSolve[newcc[[1]] /. C[2][0] -> t, C[1], y]
```

Out[11]= $$\{\{\mathbb{c}_1 \to \mathrm{Function}[\{y\}, 1 - t]\}\}$$

Получившуюся функцию подставим во второе уравнение системы:

```
In[12]:= newcc[[2]] /. c1sol[[1]] /. C[2][0] -> t
```

Out[12]= $$\mathbb{e}^{-\frac{x^2}{2}}(1 - t) + \mathbb{c}_2[x] == 1 + x$$

Найдем функцию $C_2(x)$:

```
In[13]:= c2sol = RSolve[%, C[2], x]
```

Out[13]= $$\left\{\left\{\mathbb{c}_2 \to \mathrm{Function}\left[\{x\},\ \mathbb{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(-1 + \mathbb{e}^{\frac{x^2}{2}} + t + \mathbb{e}^{\frac{x^2}{2}}\,x\right)\right]\right\}\right\}$$

Подставляем найденные $C_1(y)$ и $C_2(x)$ в полученное ранее решение. Тогда

```
In[18]:= u[x, y] /. usol /.c1sol[[1]] /. c2sol[[1]]
```

Out[20]= $$\mathbb{e}^{-\frac{x^2}{2}}(1 - t) + \mathbb{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(-1 + \mathbb{e}^{\frac{x^2}{2}} + t + \mathbb{e}^{\frac{x^2}{2}}\,x\right) + \frac{1}{2}\,\mathbb{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,y^2\int_0^x \mathbb{e}^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Для того, чтобы избавиться от введенной постоянной t, упростим выражение:

```
In[19]:= % // Simplify
```

Out[21]= $1 + x + \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} y^2 \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$

В итоге получили решение исходной задачи Гурса

$$u(x, y) = 1 + x + \frac{y^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \int\limits_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

С помощью подстановки в поставленную задачу убедимся в том, что мы действительно нашли верное решение:

In[24]:= Simplify[{eq, cc} /. u → Activate[Function[{x, y}, $1 + x + \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} y^2 \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$]]]

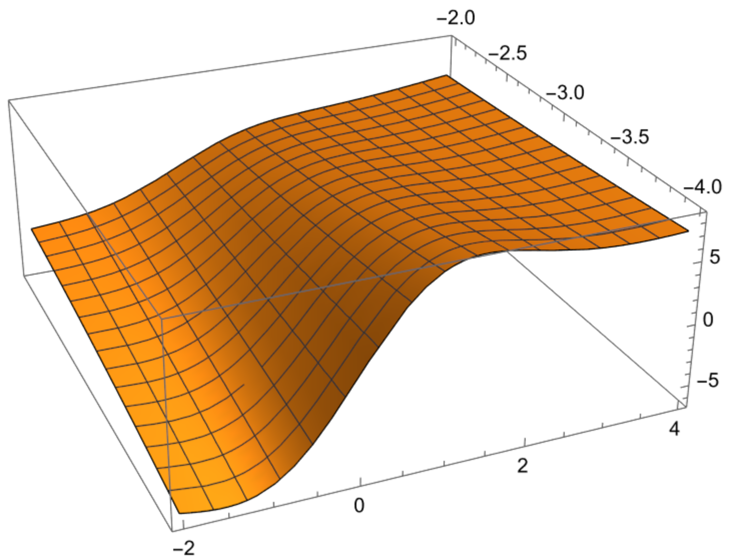
Out[24]= {True, {True, True}}

То есть построенное частное решение удовлетворяет поставленной задаче.

Графически изобразим полученную поверхность. К примеру, возьмем область $[-2, 4] \times [-4, 2]$. Тогда

In[46]:= Plot3D[$1 + x + \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} y^2$ Erfi[$\frac{x}{\sqrt{2}}$], {x, -2, 4}, {y, -4, -2}]

Out[46]=



Вывод.

Таким образом, мы нашли решение поставленной задачи Гурса с помощью пакета Wolfram Mathematica, применяя также аналитические рассуждения. Проверили путем подстановки, является ли полученная функция решением поставленной задачи и изобразили графически поверхность, которую задает построенная нами функция. Подобным образом можно решать и другие задачи, поставленные для дифференциальных уравнений в частных производных.