1. МП.

$X \neq \varnothing$.

На X зад. метрика, если $\forall x, y \in X \longmapsto \rho(x,y) \in \mathbb{R}$:

1. $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

(X, ρ) – МП.

Примеры:

1. $X \neq \varnothing$ $\quad \rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ $\forall x, y \in X$ – МП изолир. т-к

2. $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\rho_c(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ – евкл. расст.

$$\rho_0(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$ – манх.

$$\rho_k(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$ – чебыш.

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

3. l_2

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

4. $C[a,b]$, $L[a,b]$

$$\rho_C(x,y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

$$\rho_L(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt$$

Прикладные задачи:

1) расст. Левенштейна – наименьш. число односимвольн. опер-й, необх. для перех. от одного слова к другому. Исп. в ТА.

2) расст. Хемминга – исп. для построения кодов с испр-ем ошибок $\left(\rho = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|\right)$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$, $x_i, y_i = \{0, 1\}$)

3) расст. Махаланобиса - исп. в кластерн. анализе и классиф-и

$d(A,B) = \sqrt{(x-y)^T \Sigma^{-1} (x-y)}$, - мера несходства СВ x и y из одного распр-я.

4) метр. Холстеда - оценка сложности программ.

5) метр. Хаусдорфа $d(G_1, G_2) = \max\{\delta(G_1, G_2), \delta(G_2 G_1)\}$ - характ. макс. выступ одной фигуры G_1 или G_2 за пр-во другой.

2. ВП. Баз. и разм.

P — поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

• $E \neq \varnothing$ — ~~ВП~~ над P с 2 алг. опер:

а) $\forall x, y \in E \quad x+y \in E$

в) $\forall x \in E, \alpha \in P \quad \alpha x \in E$

Примем

1) отн. слож-я абелева гр.

2) $0 \cdot x = 0$, $1 \cdot x = x$

3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

4) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

5) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

Примеры:

1) Мн-во век. в $\mathbb{R}^n$, $n=1,2,3$

2) $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad x = (x_1 \dots x_n) \Rightarrow x+y = (x_1+y_1 \dots x_n+y_n) \in \mathbb{R}^n$
$\alpha x = (\alpha x_1 \dots \alpha x_n)$

$\mathbb{C}^n$

3) $C^k[a,b]$: $x(t)+y(t) \in C^k[a,b]$ $\quad \forall x(t), y(t) \in C^k[a,b]$
$\alpha x(t) \in C^k[a,b]$

4) l_2: $\quad (x_1, \dots) + (y_1, \dots) = (x_1+y_1, \dots) \in l_2$
$\alpha(x_1, \dots) = (\alpha x_1, \dots) \in l_2$

5) m: аналог. l_2

• $x_1 \dots x_n \in E$ ЛНЗ, если $\nexists \alpha_1 \dots \alpha_n \neq 0$: $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

• Беск. посл-ть ЛНЗ, если любая кон. подсис-ма ЛНЗ

• E — n-мерно, если $\exists n$ ЛНЗ век., а сис-ма $n+1$ век. — ЛЗ, эти n век. обр. базис

• E бесконечномерно, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists n$ ЛНЗ век.

$\mathbb{R}^n$ — конечномерно с баз. $e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1)$

l_2 — бескон. с баз $e_1 = (1, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots)$ ...

• $E \cong F$, если м/у их эл-тами можно уст. взаимнооднозн. соотв-е, согл-е с опер. в E и F

Все конечномерн. ВП изоморфны $\mathbb{R}^n$ м/у собой

E - ВП, $L \subset E$

• L - подпр. E, если $\alpha x + \beta y \in L$ $\forall x, y \in L$, $\alpha, \beta \in P$

• E - ВП, $L_1 .. L_n \subset E$ - подпр.

$\forall x \in E$ $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, $x_i \in L_i \Rightarrow E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$

$E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n \Leftrightarrow \bigcap\limits_i L_i = \{0\}$

3. НВП, экв.

• E - НВП, если $\forall x \in E \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}^+_{\{0\}}$:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

• $(E, \|\cdot\|)$ - НВП

НВП - МП с $\rho(x,y) = \|x-y\|$, причем

1) $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$

2) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x,y)$

Св-ва:

1°. $\|x_1 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_n\|$

2.° $\|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

◊ $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$

Аналог. $\|x-y\| \geq \|y\| - \|x\|$ ⊠

Примеры:

1) $C^k[a,b]$ $\quad \|x\| = \sum\limits_{i=0}^{k} \max |x^{(i)}(t)|$

2) $CL_p[a,b]$ $\quad \|x\|_p = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$

3) l_p $\quad \|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

4) m $\quad \|x\| = \sup\limits_i |x_i|$

5) $\mathbb{R}^n$ $\quad \|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ - нормы в E

• $\exists \alpha > 0: \forall x \in E \ \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2 \Rightarrow \|\cdot\|_1$ подчин $\|\cdot\|_2$

• $\exists \alpha, \beta > 0: \forall x \in E \ \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \Rightarrow \|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$

Т. об экв. нормах

В конечномерн. ВП все нормы экв.

◊ E - НВП, $\dim E = n \Rightarrow E \cong \mathbb{R}^n$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\|x\| \leq |x_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |x_n| \cdot \|e_n\| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = \alpha \|x\|_0$

$\circledS$ др. обор.

$f: S \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_0 = 1\}$ –

огр. замкн. мн-

$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \beta \|x - y\|_0 \Rightarrow f$ зад. на S непр. отобр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ достиг. минимума

$\forall x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \tilde{x} = \frac{x}{\|x\|_0} \in S \Rightarrow f(\tilde{x}) \geq m$ – min $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\|x\|}{\|x\|_0} \geq m \Rightarrow \|x\| \geq m \|x\|_0$. $\boxtimes$

4. Н-ва Гельдера, Юнга, Минковского, Пр-ва $CL_p[a,b]$, ℓ_p

Вспомог. н-ва:

° p, q: $1 \le p \le q \le +\infty$ – сопр., если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

<u>Н-во Юнга</u>: $p, q > 1$ – сопр.

$\forall u, v > 0 \quad uv \le \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$

◊ $\varphi(t) = \frac{t^p}{p}+\frac{1}{q} - t, \quad t \in [0; +\infty)$

$\varphi'(t) = t^{p-1} - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 - \min$

$\varphi(t) \ge \varphi(1) \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q} - 1 = 0 \Rightarrow \varphi(t) \ge 0 \Rightarrow \frac{t^p}{p}+\frac{1}{q} \ge t$

Положим $t = uv^{\frac{1}{1-p}} \Rightarrow uv^{\frac{1}{1-p}} \le \frac{u^p v^{\frac{p}{1-p}}}{p}+\frac{1}{q} \Rightarrow$

$uv^{-\frac{q}{p}} \le \frac{u^p v^{-q}}{p}+\frac{1}{q} \Big| \cdot v^q \Rightarrow uv \le \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$ $\boxtimes$

<u>Н-во Гёльдера</u> p, q – сопр.

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \\ \int_a^b |y(t)|^q dt < \infty\end{array}\right. \Rightarrow \int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

◊ $x_1 = \frac{|x(t)|}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad y_1 = \frac{|y(t)|}{\left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{1/q}} \Rightarrow x_1 \cdot y_1 \le \frac{|x(t)|^p}{p\int_a^b |x(t)|^p dt}+\frac{|y(t)|^q}{q\int_a^b |y(t)|^q dt}$

$$\frac{\int_a^b |x(t)\cdot y(t)|dt}{\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{\int_a^b |x(t)|^p dt}{p\int_a^b |x(t)|^p dt}+\frac{\int_a^b |y(t)|^q dt}{q\int_a^b |y(t)|^q dt} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$ $\boxtimes$

Н-во Минковского

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \\ \int_a^b |y(t)|^q < \infty\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\int_a^b |x+y|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\Diamond$ $\forall a, b$ $|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$, т.к.

$|a| \leq |b| \Rightarrow |a+b| \leq 2|b| \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p|b|^p + 2^p|a|^p$

$|a| \geq |b| \Rightarrow |a+b| \leq 2|a| \Rightarrow |a+b|^p \leq 2^p|a|^p + 2^p|b|^p$

$|x(t) + y(t)|^p \leq 2^p(|x(t)|^p + |y(t)|^p) \Rightarrow$ исх. инт. сх.

$$\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt = \int_a^b |x+y|^{p-1} \cdot |x+y| dt \leq \int_a^b |x| \cdot |x+y|^{p-1} dt + \int_a^b |y| \cdot |x+y|^{p-1} dt \leq$$

$$\leq [\text{Н-во Гельдера}] \leq \left(\int_a^b |x+y|^{(p-1)\cdot q} dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |x|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_a^b |x+y|^{(p-1)\cdot q} dt\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_a^b |y|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = [(p-1)q = p] = \left(\int_a^b |x+y|^p dt\right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot$$

$$\cdot \left(\left(\int_a^b |x|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right) \quad \Big| \cdot \left(\int_a^b |x+y|^p dt\right)^{\frac{1}{p}-1} \boxtimes$$

Следствия:

1) $CL_p[a,b]$, $p \geq 1$ – НВП отн. $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$

2) l_p, $p \geq 1$ – НВП отн. $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

5. Откр., замкн., огр. и выпукл. мн-ва в НВП

E – НВП, зафикс. $r>0$

$B(x_0,r)=\{x\in E: \|x-x_0\|<r\}$ – откр. шар

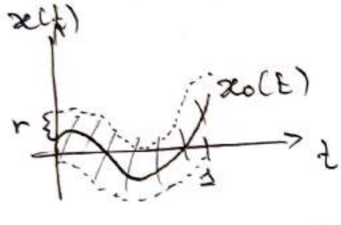
$B[x_0,r]=\{x\in E: \|x-x_0\|\le r\}$ – замкн. шар

$S(x_0,r)=\{x\in E: \|x-x_0\|=r\}$ – сфера

$B[x_0,r]=B(x_0,r)\cup S(x_0,r)$

Пример:

$C[0,1]$, $\|x\|=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|$



$B[x_0,r]=\{x(t)\in C[0,1]: \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-x_0(t)|\le r\}$

$B(x,r)\subset A \Rightarrow \forall y\in B(x,r) \Rightarrow y\in A$

- $A\subset E$ <u>откр.</u>, если $\forall x\in A\ \exists r>0: B(x,r)\subset A$
- $A\subset E$ <u>замкн.</u>, если $E\setminus A$ откр. в E.

Примеры: $\mathbb{Q}$ на числ. прямой не откр. и не замкн.

$A=\{x(t)\in C[0,1]: x(0)>0\}$ откр. в $C[0,1]$

$\forall x\in A\ \exists r=\frac{x(0)}{2}$ $B(x,r)\subset A$

$\|y-x\|<r \Rightarrow x(0)-r<y(0)<x(0)+r \Rightarrow y(0)>0\in A$

<u>Св-ва:</u>

1°. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset E$, A_i – откр. $\Rightarrow A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ откр. в E

◊ $x_0\in A \Rightarrow \exists i_0: \exists A_{i_0}\subset E: x_0\in A_{i_0} \Rightarrow \exists B(x_0,r), r>0: B(x_0,r)\subset A_{i_0}\subset A$ ⊠

2°. $\{A_i\}_{i=1}^{n}\subset E$, A_i откр $\Rightarrow A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ откр. в E

◊ $x_0\in A \Rightarrow x_0\in A_i,\ i=\overline{1,n} \Rightarrow \exists B(x_0,r_i)\in A_i \Rightarrow$

$\underbrace{B(x_0,r)}_{\subset A_i}$, $r=\min\{r_i\} \Rightarrow B(x_0,r)\subset A$, A – откр. ⊠

3°. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset E$, A_i – замкн $\Rightarrow A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ – замкн. в E

$\{A_i\}_{i=1}^{n}\subset E$, A_i – замкн $\Rightarrow A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ – замкн. в E

Пример: $A=\{x\in C[0,1]: x(0)\ge 0\}$ замкн., т.к. его доп-е откр.

Всякое откр. мн-во на числ. прямой — это сумма конечн. или счётн. числа попарно непересек. инт-ов

Замкн. мн-во на прямой получ. выбрас-ем из прямой конечн. или счётн. числа инт-ов.

- $A \subset E$ <u>выпукло</u>, если любые 2 точки из A можно соед. этое знач., сод. в A. $(\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0,1]\ \lambda x + (1-\lambda) y \in A)$
- $A \subset E$ <u>огран.</u>, если в E $\exists B$ сколь угодно больш. но конечн. рад. $r>0$: $A \subset B$
- $A \subset E$ <u>связно</u>, если его не представи его как объед. 2-ух непересек. непуст. откр. мн-во
  $(\forall A', A'' \neq \varnothing, A' \cap A'' = \varnothing$ - откр $\Rightarrow A \neq A' \cup A'')$

6. Внутр. и внешн., граничн. и пред. точки. Т. о замкн. мн.

E - НВП, $x_0 \in E$, $A \subset E$ - фиксир-е мн-во.

• x_0 - внутр. точка A, если $\exists B(x_0, r) \subset A$

Мн-во откр., если все точки внутр.

• x_0 - внешн. точка, если $\exists B(x_0, r) \subset (E \setminus A)$

• x_0 - граничн. точка, если в $\forall B(x_0, r)$ есть точки из A и не из A.

Мн-во A не откр., если $\exists x \in A$ - граничная

∂A - граница A - замкн. мн-во

• x_0 - точка прикосн-я для A, если в $\forall B(x_0, r) \subset E$ сод. хотя бы одна т. мн-ва A, т.е. $\forall B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$

• x_0 - изолир., если $\forall B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$

• x_0 - предельн., если $\forall B(x_0, r)$ ~~$\cap A =$~~ сод. беск. много точек из A.

Т. прикосн-я: • изолир • предельн

• Замыкание $\overline{A}$ - совок. всех т. прикосн-я

Св-ва:

Пример: $\overline{B[x_0, r]} = \overline{B(x_0, r)}$

1°. $A \subset \overline{A}$

2°. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

3°. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

4°. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

<u>Т1.</u> $A \subset E$ - НВП. A - замкн. $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$

◊ $\Rightarrow$) A - замкн. $\Rightarrow E \setminus A$ откр. $\Rightarrow \forall x \in E \setminus A$ - внутр, т.е. $\forall B(x, r) \subset E \setminus A \Rightarrow B(x, r) \cap A = \varnothing \Rightarrow x \notin \overline{A} \Rightarrow x \in E \setminus \overline{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow E \setminus A \subset E \setminus \overline{A} \Rightarrow \overline{A} \subset A$, но $A \subset \overline{A} \Rightarrow A = \overline{A}$

$\Leftarrow$) $A = \overline{A}$, но A не замкн. $\Rightarrow E \setminus A$ не откр $\Rightarrow$

$\exists x_0 \in E \setminus A$ - гран.: $\forall B(x_0, r) \cap E \setminus A \neq 0$

$\forall B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$

$x_0 \in \overline{A} = A$ - ?! ⊠

• $\rho(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x_0 - x\|$ – расст-е от $x_0 \in E$ до $A \subset E$

Т2. $x_0 \in E$ – т. прикосн-я для $A \iff \rho(x_0, A) = 0$

◊ $\Rightarrow$) x_0 – т. прик-я, $\forall B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$

$\rho(x_0, A) = \inf_{l \in A} \|x_0 - l\|$

$\|x_0 - l\| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_0, A) = 0$

$\Leftarrow$) $\rho(x_0, A) = 0 \Rightarrow \exists (l_n) \subset A : \|x_0 - l_n\| < \frac{1}{n} \Rightarrow B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$ ☒

• $A \subset E$ плотное в $B \subset E$, если $B \subset \overline{A}$

• $A \subset E$ всюду плотное в E, если $\overline{A} = E$

$\mathbb{Q}$ на $[0,1]$ всюду плотно

• E – сепарабельное, если $\exists A \subset E$ счётное, всюду плотное

Пример. l_1 с $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ сепарабельно

(счётное всюду плотное мн-во – ~~мн-во~~ финит. посл-ти с рац. коорд.)

m с $\|x\| = \sup_i |x_i|$ не сепар.

7. Предел посл-ти в НВП

E — НВП

• $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset E$ сх. в E, если $\exists x \in E : \|x^{(n)} - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Св-ва

1.° В НВП $\exists!$ пр-л сх. посл-ти

◊ $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

$\|x-y\| \le \underbrace{\|x - x^{(n)}\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\|y - x^{(n)}\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$ ☒

2.° Всякая сх. посл-ть огр.

◊ $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{E} x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) : \forall n \ge n(\varepsilon) \ \underbrace{\|x^{(n)} - x\| < \varepsilon}_{\exists B(x,\varepsilon) : x^{(n)} \in B(x,\varepsilon)}$

$\|x^{(i)} - x\| = r_i$, $i = \overline{1, n(\varepsilon)} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^{(n)}) \in B(x, r)$, $r = \max\{\varepsilon, r_i\}$ ☒

3.° $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{E} x$, $y^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{E} y \Rightarrow x^{(n)} + y^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{E} x + y$

4.° $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{E} x$, $\lambda \in P \Rightarrow \lambda x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{E} \lambda x$

5.° $x^{(n)} \to x$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_n \to \lambda \Rightarrow \lambda_n x^{(n)} \to \lambda x$

6.° $x^{(n)} \to x \Rightarrow \|x^{(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} \|x\|$

◊ $|\|x_n\| - \|x\|| \le \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ☒

<u>Т1.</u>

$x_0 \in E$ — точка прикосн. $A \Leftrightarrow \exists (x^{(n)}) \subset A$, $x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{E} x_0$

◊ $\Rightarrow$) $\forall n \ B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A \ne \varnothing$

$r_1 = 1 \Rightarrow \exists x^{(1)} \in A \cap B(x_0, 1)$

$r_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x^{(2)} \in A \cap B(x_0, \frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ построим посл-ть $x^{(n)}$:

$\|x^{(n)} - x_0\| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Leftarrow$) $\forall B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A \ne 0$ $x^{(k)} \in B(x_0, \frac{1}{k})$ $\forall k < n \Rightarrow$ x_0 — т. прикосн. ☒

Т2. x_0 – пред. точка $\Leftrightarrow$ $\exists$ посл-ть в A попарно разл. точек, сх. к x_0

С1.

$A \subset E$ замкн. $\Leftrightarrow$ конт. сх. посл-ть из A имеет пред., сод. в A

С2.

$\overline{A} = E \Leftrightarrow \forall x \in E\ \exists (x^{(n)}) \subset A : x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{E} x$

8. Аппрокс-я в НВП

E - НВП, $L \subset E$ - подпр-во

$x_0 \in E$: $\rho(x_0, L) = \inf_{l \in L} \|x - l\|$

- $\exists y \in L$: $\rho(x_0, L) = \|x - y\| \Rightarrow y$ - эл. наил. аппр-и (ЭНА)

<u>Т1 о $\exists$</u>.

L - конечномерн. подпр-во НВП $E \Rightarrow \forall x \in E$

$\exists y \in L$: $\rho(x, L) = \|x - y\|$

$\Diamond$ Обозн. $d = \rho(x, L)$.

$x \in L \Rightarrow y = x$, $d = 0$

$x \notin L \Rightarrow d > 0$

$L \cong \mathbb{R}^n$. Рассм. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(l) = \|x - l\|$ для зад. x

$|f(l_1) - f(l_2)| = |\|x - l_1\| - \|x - l_2\|| \leq \|l_1 - l_2\| \leq \beta \|l_1 - l_2\|_0$, $\|l\|_0 = \sum_{i=1}^n |l_i|$

$\Rightarrow f$ удовл. усл. Липшица

$f(l) \geq 0 \ \forall l \in \mathbb{R}^n$, т.е. огр. снизу

$\inf \|x - l\|$ достиг. лишь в шаре $B[0, r] = \{l \in L : \|l\|_0 \leq r\} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{d + 1 + \|x\|}{\alpha}$, $\|l\| \geq \alpha \|l\|_0$. Пусть не достиг. $B[0,r] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Пусть $\exists l^* \in L : \|l^*\|_0 > r$, $\rho(x, L) = \|x - l^*\| = d$.

$\|x - l^*\| \geq |\|x\| - \|l^*\|| = \|l^*\| - \|x\| \geq \alpha \|l^*\|_0 - \|x\| \geq$

$\geq \alpha r - \|x\| = 1 + d$ -?!

$\|l\| \leq r$ в $\mathbb{R}^n$ замкн. и огр., $f(l)$ равн. непр. $\Rightarrow \exists y \in B[0, r]$

: $d = \|x - y\|$ $\boxtimes$

- E - строго норм., если $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow y = \lambda x$, $\lambda > 0$

Т2 0!

В строго норм. E $\forall x \in E, \forall L \subset E$ $\exists!$ эл. наил. аппр-и

◊ $x \in E$, $y_1, y_2 \in L$: $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d > 0$

$d = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \in L \Rightarrow \|x - y\| \geq d$

С др. стороны:

$\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\| = \|\frac{x - y_1}{2} + \frac{x - y_2}{2}\| \leq \frac{1}{2}(\|x - y_1\| + \|x - y_2\|) = d \Rightarrow$

y т.ж. эл-т наил. аппр.

Но $\|(x - y_1) + (x - y_2)\| = 2d$

$\|x - y_1\| + \|x - y_2\| = 2d$

В силу строг. норм:

$\exists \lambda > 0$: $(x - y_1) = \lambda(x - y_2)$, $\lambda = 1 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

$\lambda \neq 1 \Rightarrow x = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \in L$ -?! $\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow y_1 = y_2$ $\boxtimes$

$x^{**} = x'$ ⊂ 0

9. БП, пр-п вл. шаров

E – НВП

• $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset E$ – <u>п.к.</u>, если $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_E = 0$

Св-ва:

1° п.к. огр.

2° $x^{(n_k)} \subset x^{(n)}$ – п.к.

3° $(x^{(n)}), (y^{(n)}) \subset E$ – п.к. $\Rightarrow (x^{(n)} + y^{(n)})$ – п.к.

4° $(x^{(n)})$ – п.к., $\lambda \in P \Rightarrow (\lambda x^{(n)})$ – п.к.

5° $(x^{(n)}) \subset E$ – п.к. $\Rightarrow \|x^{(n)}\| \subset \mathbb{R}$ – п.к.

• НВП <u>полное</u> или <u>БП</u>, если $\forall$ п.к. сх.

Примеры:

1. $C[a,b]$, $\|x\| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$
2. $l_p, p \ge 1$, $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
3. m, $\|x\| = \sup\limits_k |x_k|$
4. Неполное БП $CL_2[-1,1]$ $\|x\| = \left(\int\limits_{-1}^{1} |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

<u>Т. (Пр-п влож. шаров)</u>

В E – БП $\forall$ посл-ть замкн. влож. шаров, с $r \to 0$, имеет ! общ. точку.

$\triangleleft$ E – БП, $B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subset B[x_n, r_n]$, $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\exists x^* \in B[x_n, r_n]$; покажем, что она общ.

$x^{(n)} \to x^*$

$m > n \Rightarrow x_m \in B[x_n, r_n] \Rightarrow \|x_m - x_n\| \le r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Тогда $\exists x^* \in E : \|x^* - x_n\| \le \underbrace{\|x^* - x_m\|}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 0} + \underbrace{\|x_m - x_n\|}_{\le r_n} \xrightarrow[m\to\infty]{} r_n$

$\Rightarrow x^* \in B[x_n, r_n]$ – общая, $n = 1, 2, \ldots$

Пусть x' – еще одна общ.т. $\Rightarrow 0 \le \|x^* - x'\| \le \|x^* - x_n\| + \|x' - x_n\| \le 2r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\in B[x_n, r_n]$

$x^* = x'$ $\Leftarrow$

★ Справедл. и обратное

10. Ряды в БП.

E - НВП, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k \in E$ — ряд. (1)

- (1) сх., если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ в E

Т1. (1) сх. $\Rightarrow x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сх. $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сх. абс.

~~Т. В БП кажд абс. сх. ряд сх~~

Кр-й полноты пр-ва

НВП - БП $\Leftrightarrow$ кажд абс. сх ряд сх.

$\Delta \Rightarrow$) E - БП, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сх

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Док., что (S_n) - ф.п.

$m > n \Rightarrow \|S_m - S_n\| = \|\sum\limits_{k=n+1}^{m} x_k\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ в E.

$\Leftarrow$) В E кажд. абс. сх. ряд сх.

$(x^{(n)}) \subset E$ - ф.п.

Выберем $(x_{n_k}) \subset (x_n)$: $\|x_{n_1}\| < \frac{1}{2}$

$\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < \frac{1}{2^k}$ $\forall k \geq 2$

Рассм. $x_{n_1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})$. Док, что он сх. абс.

$\|x_{n_1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сх. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty} (x_{n_1} + \sum\limits_{k=2}^{N} (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})) = \lim\limits_{N\to\infty} x_{n_N} = x$

$\boxtimes$

11. Пополнение НВП

Т о пополнении НВП.

Для НВП E $\exists \hat{E}$ - БП, наз. пополнением, :

1) $E \subset \hat{E}$

2) $\forall x \in E$ $\|x\|_E = \|x\|_{\hat{E}}$

3) E всюду плотно в $\hat{E}$

◊ 1) Рассм. все $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$

$(x_n) \sim (y_n)$, если $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

E разбив. на классы эквив. посл-й

$\hat{E}$ - мн-во этих классов

$\hat{x}, \hat{y} \in E$, $(x_n) \in \hat{x}$, $(y_n) \in \hat{y}$ - ф.К. =>

$(x_n + y_n)$, (αx_n) - ф.К. => $\exists$ $\widehat{x+y}$, $\hat{\alpha x}$, соотв-е эти посл-ти

Проверим нез-ть „$\hat{+}$" классов от выбора предст-й

$(x'_n) \in \hat{x}$, $(y'_n) \in \hat{y}$ => $x_n \sim x'_n$, $y_n \sim y'_n$ => $\|x_n - x'_n\| \to 0$, $\|y_n - y'_n\| \to 0$

$\|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)\| \le \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\| \to 0$ =>

$(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ => они принадл. классу $\widehat{x+y} = \hat{x} + \hat{y}$

Аналог. для умнож. => $\hat{E}$ - ~~НВ~~ ВП

Введем в $\hat{E}$ норму: $\forall \hat{x} \in \hat{E}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \hat{x}$

$\|\hat{x}\|_{\hat{E}} = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_E$

(x_n) - ф.К. => $(\|x_n\|)$ - ф.К. в $\mathbb{R}$ => $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_E$

Кроме того $x'_n \sim x_n$ => $\|x_n\| \sim \|x'_n\|$, т.е. н/з от выб. $\hat{x}$

2) E - часть $\hat{E}$?

$\forall x \in E \mapsto \hat{x} \in \hat{E}$, при этом $\|\hat{x}\|_{\hat{E}} = \lim \|x_n\|_E = \|x\|_E$

3) E всюду пл. в $\hat{E}$? $\forall \hat{x} \in \hat{E}$, $\forall \varepsilon > 0$. Док, что в

$B(\hat{x}, \varepsilon) \exists x_n \in E$. Выберем $(x_n) \in \hat{x}$ - ф.К., т.е. $\exists N(\varepsilon)$:

$m, n > N(\varepsilon)$ => $\|x_n - x_m\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$ => при $n > N(\varepsilon)$

$\|x_n - x\|_{\hat{E}} = \lim\limits_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|_{\hat{E}} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ => $x_n \in B(\hat{x}, \varepsilon)$

4) $\hat{E}$ - БП - ?

$\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \hat{E}$ - п.к.

E всюду пл. в $\hat{E} \Rightarrow \exists (x_k^{(n)}) \subset E : \|\hat{x}_n - x_k^{(n)}\|_{\hat{E}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$(x_k^{(n)})$ - п.к. в E ?

$m > k \quad \|x_m^{(n)} - x_k^{(n)}\| \le \|x_m^{(n)} - \hat{x}_n\| + \|\hat{x}_n - x_k^{(n)}\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \hat{x} \ni (x_k^{(n)})$.

$\hat{x} \stackrel{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n$

$\|\hat{x}_n - \hat{x}\|_{\hat{E}} \le \|\hat{x}_n - x_k^{(n)}\| + \|x_k^{(n)} - \hat{x}\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \hat{E}$ - БП $\boxtimes$

12. Непр. отобр-я в БП

E, F – БП

$f: E \to F$

- f непр. в x_0, если

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon): \forall x \in E: \|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon$

2) $\forall (x^{(n)}) \subset E \ x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{E} x_0 \Rightarrow f(x^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{F} f(x_0)$

3) $\forall W_{f(x_0)} \subset F \ \exists V_{x_0} \subset E: f(V_{x_0}) \subset W_{f(x_0)}$

- f непр. на E, если непр. $\forall x_0 \in E$.

Кр-й непр-ти отобр.

f непр. на $E \Leftrightarrow$ прообр. любого откр. мн-ва откр

$\Diamond \Rightarrow)$ Пусть $B \subset F$ откр. Док, что это прообр.

$f^{-1}(B) \subset E$ откр., т.е. $\forall x \in f^{-1}(B)$ – внутр. точка,

$\exists B(x, r) \subset f^{-1}(B)$

По x строим $f(x) \in B$

f непр. $\Rightarrow \forall W_{f(x)} \subset F \ \exists V_x \subset E: f(V_x) \subset W_{f(x)} \Rightarrow V_x = B(x,r)$

$\Leftarrow)$ $\forall B \subset F$ – откр., $f^{-1}(B) \subset E$ откр.

Док., что f непр. т.е. $\forall W_{f(x)} \subset F \ \exists V_x \subset E: f(V_x) \subset E \Rightarrow$

непр-ть $B = W_{f(x)}$ ☒

Сл.

f непр. на $E \Leftrightarrow$ прообр. замкн. мн-ва замкн.

- f равн. непр., если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon): \forall x, y \in E: \|x - y\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon$

- Усл-е Липшица

$\exists L>0: \|f(x)-f(y)\|_F \leq L\|x-y\|_E \quad \forall x,y \in E$

<u>Т</u> Отобр-е, удовл. усл-ю Липшица непр. и равн. непр.

E, F, W – НВП, f, g – непр: $f: E \to F$, $g: F \to W \Rightarrow f \circ g: x \mapsto g(f(x))$ – непр.

- f – гомеоморфизм, если взаимно однозн. и вз. непр.
- f – изоморф., если оно гомеом. при этом $\exists \alpha, \beta > 0$:

$\alpha\|x\|_E \leq \|f(x)\|_F \leq \beta\|x\|_E$

13. Предгильб. пр-ва.

E – ВП

- СкП $\forall x, y \in E \mapsto (x, y) \in \mathbb{C}$

1) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

3) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$

4) $(x+z, y) = (x,y) + (z,y)$

- ВП с СкП – предгильберт.

Пример:

1. $\mathbb{R}^n$ – ЕП, $\mathbb{C}^n$ – УП

$(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$, $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$

2. l_2

$(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} < \infty$

3. $CL_2[a,b]$

$(x,y) = \int\limits_a^b x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt$

4. $L_2[a,b]$, с (x,y) из $CL_2[a,b]$, но $x(t)$ и $y(t)$ могут иметь разрыв I и II рода

Св-ва:

1° $(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}(x, y_1) + \overline{\beta}(x, y_2)$

2° Н-во К-Б

$|(x,y)|^2 \leq (x,x) \cdot (y \cdot y)$

◊ $x = 0 \vee y = 0 \Rightarrow$ верно

$x \neq 0 \wedge y \neq 0$, $\lambda = \dfrac{(x,y)}{(y,y)}$

В силу А1:

$$0 \leq (x-\lambda y, x-\lambda y) = (x-\lambda y, x) - \overline{\lambda}(x-\lambda y, y) = (x-\lambda y, x) =$$
$$= (x,x) - \lambda(y,x) = (x,x) - \frac{(x,y)}{(y,y)}\cdot(y,x) = (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \boxtimes$$

Введем $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Н-во К-Б: $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

3° $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} x,$
$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} y \implies (x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y)$

$\Diamond \|(x_n,y_n)-(x,y)\| \leq \|(x_n,y_n)-(x_n,y)\| + \|(x_n,y)-(x,y)\| \leq$
$\leq \|x_n\|\cdot\|y_n-y\| + \|y\|\cdot\|x_n-x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \boxtimes$

4° Рав-во парал-ма

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$\Diamond \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = 2(x,x) + 2(y,y) =$
$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \boxtimes$

- $(x^{(n)}) \subset E$ - предг.п. слабо сх. к x, если $\forall y \in E$ $\left(x^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{сл.} x\right)$
  $(x^{(n)}, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y)$

Если $(x^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{сл.} x$, то $\|x^{(n)}\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

14. ГП, ЭНА

- Предгил. пр-во – ГП, если оно полно по $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Примеры:

1. l_2 отн. $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$

2. $L_2[a,b]$ отн. $(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$

H–ГП, $L \subset H$ – подпр-во $\forall x \in H$

Т1.

$\forall x \in H\ \exists!\, y \in L: \rho(x,L) = \|x-y\|_H$

◊ 1) $x \in L \Rightarrow \rho(x,L) = 0 \Rightarrow y = x$

2) $x \notin L \Rightarrow \rho(x,L) = d > 0$

$\exists)\ \rho(x,L) = \inf_{l \in L} \|x-l\| \Rightarrow \exists (l^{(n)}) \subset L : d \le \|x - l^{(n)}\| < d + \frac{1}{n}$

Док., что $(l^{(n)})$ – ф.п.

$0 \le \|l^{(n)} - l^{(m)}\|^2 = \|(\cancel{x} - l^{(n)}) - (x - l^{(m)})\|^2 = 2\|x-l^{(m)}\|^2 + 2\|x-l^{(n)}\|^2 -$

$- \|(x-l^{(m)}) + (x-l^{(n)})\|^2 = 2\|x-l^{(m)}\|^2 + 2\|x-l^{(n)}\|^2 - 4\|x - \underbrace{\frac{l_n+l_m}{2}}_{\in L}\|^2 \le$

$\le 2\left(d+\frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d+\frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \Rightarrow (l^{(n)})$ – ф.п. в H

$\Rightarrow \exists y \in L = \lim_{n\to\infty} l^{(n)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x - l^{(n)}\| \le \lim_{n\to\infty} \left(d+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \underbrace{\|x-y\|}_{d\le} \underset{=}{\le} d$

$\Rightarrow d = \|x-y\| \Rightarrow y$ – ЭНА.

!) $\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = d$

$\|y_1-y_2\|^2 = \|(x-y_1)-(x-y_2)\|^2 = 2\|x-y_1\|^2 + 2\|x-y_2\|^2 - 4\|x - \frac{y_1+y_2}{2}\|^2 \le$

$\le 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$ ☒

15. Проекции в ГП

H - ГП, $x, y \in H$

• $x \perp y$, если $(x,y)=0$

Св-ва:

1° $0 \perp x \quad \forall x \in H$

2° $x \perp x \Leftrightarrow x = 0$

3° $x \perp y_1, x \perp y_2 \Rightarrow x \perp (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

4° $x \perp y^{(n)}, \; y^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{H} y \Rightarrow x \perp y$

• $x, y \neq 0 \quad \cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}, \; 0 \le \varphi \le \pi$

Т. Пифагора

$\{x_1, \dots, x_n\}$ ортог. сис-ма $\Rightarrow \|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$

$\Diamond \; \|x\|^2 = (x,x) = \left(\sum' x_k, \sum' x_i\right) = \sum'^{n}_{k,i=1} (x_k, x_i) = \sum'^{n}_{k=1} (x_k, x_k) = \sum^{n}_{k=1} \|x_k\| \; \boxtimes$

Т.

$\forall x, y \in H \quad x \perp y \Leftrightarrow \|x\| \le \|x + \lambda y\|, \; \lambda \in \mathbb{C}$

• $L \subset H$ - подпр-во (лин. многообр-е)

$y \in L$ - проекция $y = P_L x$, если $(x-y) \perp L \Leftrightarrow (x-y, l) = 0 \; \forall l \in L$

Т. о проекции в H

H-ГП, $L \subset H$ - замкн. подпр-во $\Rightarrow \forall x \in H \; \exists! y \in L : y = P_L x$, т.е. $(x-y, l) = 0 \; \forall l \in L$

$\Diamond \; \forall x \in H \; \exists! y \in L$ - ЭНА т.е. $\rho(x, L) = \|x - y\| = d > 0$

Пок., что $y = P_L x$, т.е. $(x-y, l) = 0, \; l \in L$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad d^2 \le \|x - (y + \lambda l)\|^2 = ((x-y) - \lambda l, (x-y) - \lambda l) =$

$= \|x-y\|^2 + \lambda^2 \|l\|^2 - (x-y, \lambda l) - \lambda(l, x-y) = d^2 + \lambda^2 \|l\|^2 -$

$- 2\lambda \operatorname{Re}(x-y, l) \Rightarrow \lambda^2 \|l\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}(x-y, l) \ge 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(x-y, l) = 0$

Для $i\lambda \quad \|x - (y - i\lambda l)\|^2 \Rightarrow \operatorname{Im}(x-y, l) = 0 \quad \boxtimes$

Сл.

$L \subset H$ - подпр. $\Rightarrow \forall x \in H\ \exists!\ x = \underset{\in L}{y} + \underset{\perp L}{z}$

- $L \subset H$ - лин. многообр.

  $L^{\perp} = \{ z \in H : z \perp L \}$ - орт. доп.

Т.

$L^{\perp}$ - подпр-во H

$\lozenge$ $L^{\perp}$ - лин многообр, т.е. $\forall z_1, z_2 \in L^{\perp}, \forall \alpha, \beta \Rightarrow \alpha z_1 + \beta z_2 \in L^{\perp}$, т.к.

$(\alpha z_1 + \beta z_2, l) = \alpha (z_1, l) + \beta (z_2, l) = 0$

$L^{\perp}$ - замкн. мн-во, т.к.

$\forall (z^{(n)}) \subset L^{\perp},\ z^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{H} z \Rightarrow \forall l \in L\ \ (z^{(n)}, l) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} (z, l) = 0$, т.е. $z \in L^{\perp}$. $\boxtimes$

16. Орт. разл-е ГП. Т о всюду пл. мн.

H - ГП, $L \subset H$ - подпр-во

- $L^{\perp} = \{ z \in H \mid z \perp L \}$ - орт. дополн-е.

По т. о проекции $\forall x \in H \ \exists! \ x = y + z, \ y \in L, z \in L^{\perp}$

Тогда можно сформулир.

<u>Т. о разл. H</u>

H - ГП, $L \subset H$ - подпр. $\Rightarrow$ ~~$\forall x \in H$~~ $H = L \oplus L^{\perp}$

<u>Т. о всюду плотном мн-ве</u>

L - лин. многообр. в H

$\overline{L} = H \Leftrightarrow L^{\perp} = \{0\}$

$\Diamond \Rightarrow) \ \overline{L} = H \Rightarrow \forall x \in H \ \exists (\ell^{(n)}) \in L : \ \ell^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{H} x$

Расм. $z \in L^{\perp} \Rightarrow z \perp L \Rightarrow (\ell^{(n)}, z) = 0 \Rightarrow (x, z) = 0 \ \forall x \in H$

$\Rightarrow$ Если $x = z$, то $(z, z) = 0 \Rightarrow \|z\| = 0 \Rightarrow z = 0$, $L^{\perp} = \{0\}$

$\Leftarrow) \ L^{\perp} = \{0\}$. Пусть L не пл. в H, т.е. $\exists x \in H \setminus \overline{L} \Rightarrow$

$\exists! \ x = y + z, \ y \in \overline{L}, \ z \in (\overline{L}^{\perp}) = L^{\perp}$. Но $z = 0 \Rightarrow x = y \in \overline{L}$ -?!

$\boxtimes$

17. Ортог. сис-мы в ГП. Процесс ортог.

H – ГП

$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ – ортог., если $(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \ \forall i \neq j$, $\varphi_i \neq 0 \ \forall i$

$\{\varphi_j\}$ – ортонорм., если при этом $(\varphi_i, \varphi_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots$

Т1.

$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ – ортог. $\Rightarrow$ ЛНЗ

◊ Беск. сис-ма ЛНЗ, если $\forall$ подсис-ма ЛНЗ

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n = 0$

Умнж. скал. на $\varphi_j, j = \overline{1, n} \Rightarrow \alpha_j \underbrace{(\varphi_j, \varphi_j)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j \Rightarrow$ ЛНЗ ☒

Т2.

~~По любой $\{x_i\} \subset H$ (конечн. v счетн.) – ЛНЗ можно постр.~~

$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ – ЛНЗ $\Rightarrow \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ – ортог (ортонорм.)

Причем $\mathcal{L}\{(x_i)\} = \mathcal{L}\{(\varphi_j)\}$

◊ $\varphi_1 = x_1 \neq 0$

$\varphi_2 = x_2 - \lambda_{21}\varphi_1 \Rightarrow \underbrace{(\varphi_2, \varphi_1)}_{\varphi_1 \perp \varphi_2 \Rightarrow = 0} = (x_2, \varphi_1) - \lambda_{21}(\varphi_1, \varphi_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{21} = \dfrac{(x_2, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}$ и т.д.

$\varphi_k = x_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki}\varphi_k$, $\lambda_{ki} = \dfrac{(x_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}$.

φ_k – лин. комб $x_1 \dots x_k \Rightarrow$ лин. оболочка совп. ☒

18. Р.Ф. в ГП. Т о разл. в р.ф. Экстр. св-во отрезка

H - ГП, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ - ортог. сис-ма

• $\forall x \in H \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ - р.ф. для x по $\{\varphi_j\}$, $c_k = \frac{(x, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$

$\{\varphi_j\}$ ортонорм $\Rightarrow c_k = (x, \varphi_k)$

Т. о разл. в р.ф. ($\{\varphi_k\}$ - ортонорм.)

1) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|x\|^2$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k < \infty$

3) $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$

4) $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k = P_L x$, $L = \mathcal{L}\{(\varphi_k)\}$

$\Diamond$ $L_n = \mathcal{L}\{(\varphi_k)\}$ $\qquad x = \underbrace{x - S_n}_{z} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k}_{y \in L_n}$

$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$

Пок, что $z \perp L_n$, т.е. $(x - S_n, \varphi_j) = 0$, $j = \overline{1, n}$

$(x, \varphi_j) - \sum_{k=1}^{n} c_k (\varphi_k, \varphi_j) = c_j - c_j = 0$

По т. Пиф. $\|x\|^2 = \|x - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow_{n = 1, 2 \ldots}$

$\Rightarrow \sum |c_k|^2$ сх. и $\sum |c_k|^2 \le \|x\|^2$

Пок., что S_n - п.к. (для док-ва сх.)

$n > m$ $\|S_n - S_m\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k\|^2 \le \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0 \Rightarrow$

$\exists S = \lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \Rightarrow x = x - S + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$
$\in H$

По т. Пиф-а $\|x\|^2 = \underbrace{\|x - S\|^2}_{\ge 0} + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ $\boxtimes$

1 Т.

$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ - ортог., L_n - подпр-во : $L_n = \mathcal{L}\{(\varphi_k)\}$ => для $x \in H$

$\rho(x, L_n) = \| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \| = d_n$

$d_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$

Сл1.

$c_k = (x, \varphi_k)_H \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\|\varphi_k\| = 1$

19. Полн. (Ортог.) ортонорм. сис-мы

• $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ — полная, если $(x, \varphi_k) = 0$, $k = 1, 2 \ldots \Rightarrow x = 0$

Т. о полн. ортонорм. сис-мах

H-ГП, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ — ортонорм $\Rightarrow$

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = x$

2) $\{\varphi_k\}$ — полная

3) $\overline{\mathcal{L}\{(\varphi_k)\}} = H$

4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$

◊ 1 → 2

$x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$, $c_k = \underbrace{(x, \varphi_k) = 0}_{\text{пусть}} \Rightarrow c_k = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \{\varphi_k\}$ полн.

2 → 1

$y = x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$: $y \perp \varphi_k$, $k = 1, 2 \ldots \Rightarrow (y, \varphi_k) = 0$.

$\{\varphi_k\}$ полна $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$

1 ~ 4 из т. о разл. в р.ф.

1 ~ 3 из опр. лин. обол. ☒

• Полная ортог. $\{\varphi_k\} \subset H$ — ортог. базис в H.

Т2.

H-сепар $\Leftrightarrow \exists$ ортог. баз. из конечн. либо счетн. числа эл-тов

$H_1 \cong H_2$, если $\exists f: H_1 \to H_2$ вз. однозн. $(x, y)_{H_1} = (f(x), f(y))_{H_2}$

Т3.

Конечномерн. ГП $\cong \mathbb{C}^n$

Бесконечн. сепар. ГП $\cong l_2$

20. Примеры полн. ортонорм. сис-м

1. Триг. сис-ма

В $L_2[-1,1]$ $\quad 1, \sin\pi t, \cos\pi t, \dots, \sin\pi k t, \cos\pi k t, \dots$

Триг. р.Ф. $x(t) \in L_2[-1,1]$ $\quad \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos\pi k t + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin\pi k t$

$a_0 = \int\limits_{-1}^{1} x(t)dt$

$a_k = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\cos\pi k t\, dt \quad b_k = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\sin\pi k t\, dt$

р.Ф. в ср.кв. сх. к $x(t)$

$$\varepsilon^2 = \|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. Триг. сис. в компл. форме

В $L_2[-1,1]$ $\quad e^{ik\pi t}$

$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\pi t}, \quad c_k = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x(t) e^{-ik\pi t} dt$

Полнота из т. Вейерштр.: $\forall$ непр. период. ф-ию можно прибл-ть триг. мн-ом.

3. Мн-ны Лежандра

В $L_2[-1,1]$ $\quad P_k(t) = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k}\left[(t^2-1)^k\right]$

$\int\limits_{-1}^{1} P_n(t) P_k(t) dt = \begin{cases} \frac{2}{2k+1}, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$

$P_0(t) = 1,\ P_1(t) = t,\ P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),\ P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$

$1 = P_0(t),\ t = P_1(t),\ t^2 = \frac{1}{3}(P_0(t) + 2P_2(t)),\ t^3 = \frac{1}{5}(3P_1(t) + 2P_3(t))$

р.Ф. сх. в ср.кв к $x(t)$

$x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k P_k, \quad C_k = \frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x(t) P_k(t) dt$

$(1-t^2)x'' - 2tx' + k(k+1)x = 0$

4. Мн-ы Чебышева

$L_2[-1,1]$ $\quad T_k(t) = \cos(k\arccos t)$

$p(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$T_0(t) = 1,\ T_1(t) = t,\ T_2(t) = 2t^2 - 1,\ T_3(t) = 4t^3 - 3t$

$x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}{}' C_k T_k(t),\quad C_k = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x(\cos\theta)\cos k\theta\, d\theta$

Сх. в ср.кв.

$(1-t^2)x'' - tx' + k^2 x = 0$

5. Ф-ии Хаара

$L_2[0,1]$ Разоб $[0,1)$ на 2^m частей $\quad \chi_m^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & t \in [\frac{k}{2^m}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^m}) \\ -\sqrt{2^m} & t \in [\frac{k+\frac{1}{2}}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}) \\ 0 & t \notin [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}) \end{cases}$

$m = 0, 1, \dots$

$k = 0, 1, \dots, 2^m - 1,\quad \chi_0(t) = 1.$

$n = 2^m + k \Rightarrow x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}{}' C_n \chi_n(t),\quad C_n = \int\limits_0^1 x(t)\chi_n(t)\,dt$

6. В l_2 $\quad e^{(n)} = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots)$

21. СО. Т о неподв. т. СО. Пос. ПСО.

- $x^* \in E$ – неподв. т. f, если $f(x^*) = x^*$
- f – сжатие, если $\exists\, 0 \le \alpha < 1$: $\|f(x) - f(y)\|_E \le \alpha \|x - y\|_E$ $\forall x, y \in E$.

<u>Т1. ПСО</u>

E – БП, $M = \overline{M} \subset E$, $f: M \to M$ – сжатие с коэф. $\alpha \Rightarrow$

$\exists! x^* \in M$: $x^* = f(x^*)$, кот. м.б. найдена МПП

$x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2 \ldots$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$

Оценка скор-ти сх:

$\|x_n - x^*\| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_0 - x_1\|$, $x_1 = f(x_0)$

◊ $f(M) \subset M \Rightarrow (x_n) \subset M$. Пок., что x_n – п.К.

$\|x_k - x_{k+1}\| = \|f(x_{k-1}) - f(x_k)\| \le \alpha \|x_{k-1} - x_k\| \le \cdots \le \alpha^k \|x_0 - x_1\|$

$m > n$

$\|x_m - x_n\| \le \|x_n - x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{m-1} - x_m\| \le (\alpha^n + \cdots + \alpha^{m-1}) \cdot \|x_0 - x_1\| =$

$= \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha} \Rightarrow m \to \infty \Rightarrow$ $\|x_n - x^*\| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_0 - x_1\|$

E полное $\Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^* \in E$. M замкн. $\Rightarrow x^* \in M$

x^* – неп. т.?

f равн. непр. и непр. $\Rightarrow x^* \underset{n\to\infty}{=} f(x^*)$

$!$ – ? $y^* = f(y^*) \Rightarrow 0 \le \|x - y^*\| \le \alpha \|x^* - y^*\| \Leftrightarrow \|x^* - y^*\| = 0$ ☒

<u>Сл-е 1</u>. $f: E \to E$, E – БП, f – сжатие $\Rightarrow \exists! x^*$: $x^* = f(x^*)$:

$x_n = f(x_{n-1})$

<u>Сл-е 2</u>. $f: B[a, r_0] \to E$ – БП, f – сжатие, $\|f(a) - a\| \le (1-\alpha) r_0$

$\Rightarrow \exists! x^* \in B[a, r_0]$: $x^* = f(x^*)$, $x_n = f(x_{n-1})$

◊ $f(B[a, r_0]) \overset{?}{\subset} B[a, r_0]$

Пусть $x \in B[a, r_0] \Rightarrow \|x - a\| \le r_0 \Rightarrow$

$\|f(x) - a\| \le \|f(x) - f(a)\| + \|f(a) - a\| \le \alpha \|x - a\| + r_0(1-\alpha) \le$

$\le \alpha r_0 + r_0(1-\alpha) = r_0 \Rightarrow f(x) \in B[a, r_0]$ ☒

Т2.

$f: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \subset E$, $\exists m \in \mathbb{N}$: $\cancel{f^m(x)}$ $f^m(x)$ – сжатие на $\mathcal{M}$ $\Rightarrow$

$\exists!\, x^* = f(x^*) \in \mathcal{M}$

◁ $g = f^m$. По Т1. $\exists!\, x^* = g(x^*)$
g – сжатие

$g(f^m(x^*)) = f \circ g(x^*) = f(x^*) \Rightarrow f(x^*) \in \mathcal{M}$ – неподв. т. g.

Но g имеет ! неп. т. $\Rightarrow x^* = f(x^*)$ ▷

Сл 3.

$f: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \subset E$, f непр. диф., $\|f'(x)\|_E < \alpha < 1 \Rightarrow$

Спр. Т1.

22. Примен ПСО в МА

$Ax = b$, $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists!$ реш-е

$$\underbrace{X = Cx + D}_{F(x):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m}$$ – сжатие? если да, то можно примен. ПСО

или $y_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j + d_i$

Т1.

$x = Cx + D$, $C: 0 \le \alpha < 1$, где $\alpha = \max\limits_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{m} |c_{ij}| < 1 \Rightarrow$

$\alpha = \max\limits_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}| < 1$ или

$\exists!$ реш-е $Ax = b$, кот. м.б. найд. ММП:

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j^{(n)} + d_i$$

$\lozenge$ В $\mathbb{R}^m$ $\|x\|_k = \max\limits_i |x_i| \Rightarrow$

$\|y^{(1)} - y^{(2)}\|_k = \max\limits_i \left| \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right| \le \max\limits_i \sum_j |c_{ij}| \cdot \max\limits_j |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| =$

$= \left(\max\limits_i \sum_j |c_{ij}|\right) \cdot \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_k = \alpha \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_k \Rightarrow \alpha = \max\limits_i \sum_j |c_{ij}|$

Аналог. для $\|x\|_0 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$ $\boxtimes$

$C = (c_{ij})$ – симметр. $\Rightarrow$ по сф. норме $\sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| < 1 \Rightarrow \|C\| < 1$

$\|C\| = |\max(\lambda(C))| \Rightarrow$ ~~теперь это~~ C – симм., ПСО $\Leftrightarrow$ к реш-ю

$\Leftrightarrow |\max\limits_i \lambda_i(C)| < 1$

Преобр. $Ax = b$ в виде $x = Cx + D$. Исх ур-е можно запис. как.

~~Пусть~~ A

$$x = \underbrace{\left(E - \frac{A^T A}{\lambda(A^T A)}\right)}_{C} x + \underbrace{\frac{A^T B}{\lambda(A^T A)}}_{D} \Rightarrow |\lambda_i(C)| < 1$$

Рассм

$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i$, $i = 1, 2 \ldots$

бе реш-е $(x_1, \ldots)$. пусть $x \in m$, $\sup\limits_i |x_i| < \infty$

приводим к виду $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} x_j + b_i$, где $c_{ij} = -a_{ij} + \delta_{ij}$

(1) $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

• (1) вполне рег., если $\exists q : 0 < q < 1$:
$\sum\limits_{i,j=1}^{m} c_{ij} \leq q \ \forall i$

Пусть $F : m \to m$, $b = (b_1, \dots) \in m$

Т2.

Вполне рег. сис-ма (1) имеет ! реш-е $x \in m$ $\forall b \in m$. Если $\|b_m\| \leq B$, то $|x_i| \leq \frac{B}{1-q}$

23. Примен ПСО к ИУФ

$$a(x)\,x(t) - \int_a^b K(t,s,x(s))ds = y(t),\quad t\in[a,b]$$ – ИУФ-II

лин., нелин.

Пусть $x(t) = \int_T K(t,s,x(s))ds + y(t)$, $T=[a,b]$ (1)

$x \mapsto \int_T K(t,s;x(s))ds + y(t)$ опред отобр. мн-ва ф-й, зад. на T, на себя $\Rightarrow$ (1): $x = F(x) \Rightarrow$ реш-е ур-я – неподв. точка. Для примен ПСО, необх:

– выбр БП

– проверить, что (1) – сжим. отобр.

Для $C[a,b]$ и $x(t) - \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t)$

Т1.

$K(t,s)$ непр. на $[a,b]\times[a,b] = \Omega$, $M = \max_{(t,s)\in\Omega}|K(t,s)| \Rightarrow$

$\forall\lambda: |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ $\exists!$ реш-е ИУФ-II $\forall y(t)\in C[a,b]$

Д $F(x)(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds + y(t)$, $F: C[a,b]\to C[a,b]$

F – сжим?

$$\|F(x_1)-F(x_2)\|_{C[a,b]} = \max_{a\le t\le b}|\lambda|\left|\int_a^b K(t,s)(x_1(s)-x_2(s))ds\right| \le$$

$$\le |\lambda|\max\int_a^b |K(t,s)|\,|x_1(s)-x_2(s)|ds \le |\lambda|\max|K(t,s)|\cdot$$

$$\cdot(b-a)\cdot\max|x_1(s)-x_2(s)| = \underbrace{|\lambda|\,M(b-a)}_{\alpha<1}\|x_1-x_2\|$$

$\alpha<1 \Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \Rightarrow$

по ПСО $\exists!$ реш-е, кот. м.б. найд. МПП

$$x_n(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)x_{n-1}(s)ds + y(t)\ \boxtimes$$

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s;x(s))\,ds = y(t) \quad (2)$$

T2.

$K(t,s,z)$ непр. по t,s,z, удовл. усл. Липшица по z с $L>0$.

$L(b-a)|\lambda| < 1 \Rightarrow \exists!$ непр. реш-е (2) $\forall y(t) \in C[a,b]$

$\Diamond$ $F(x)(t) = \lambda \int_a^b K(t,s,x(s))\,ds + y(t)$

$F: C[a,b] \xrightarrow{?} C[a,b]$

$y(t) \in C[a,b] \Rightarrow$ дост-но док., что $z(t) = \int_a^b K(t,s,x(s))ds$ непр.

При фикс. x $K(t,s,x(s))$ непр по t и s $\Rightarrow$ по т. ИЗОП непр.

F – сжатие?

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \le |\lambda| \int_a^b |K(t,s,x_1(s)) - K(t,s,x_2(s))|\,ds \le$$

$$\le |\lambda| L \int_a^b |x_1(s) - x_2(s)|\,ds \le \underbrace{|\lambda| L(b-a)}_{\alpha < 1 \Rightarrow |\lambda| L(b-a) < 1} \|x_1 - x_2\| \quad \boxtimes$$

24. Примен ПСО к ИУВ-II

$$a(t)x(t) - \int_a^t K(t,s,x(s))\,ds = y(t)$$

$$x(t) = \int_{[a,t]} K(t,s,x(s))\,ds + y(t) \quad (1)$$

$$x \to \int_{[a,t]} K(t,s,x(s))\,ds + y(t) \Rightarrow (1) \text{ запис. как } x = F(x)$$

$\Rightarrow$ реш-е — неподв. точка F

Для примен ПСО нужно:
- выбр. БП
- провер., что (1) — сжим. отобр.

Т1. $K(t,s)$ непр. по t и s $\Rightarrow \forall y(t) \in C[a,b]$, $\forall \lambda \in P$

$\exists!$ реш-е ИУВ-II

$\square$ $C[a,b]$

$$F(x) = \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds + y(t)$$

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq |\lambda| \int_a^t |K(t,s)| \cdot |x_1(s) - x_2(s)|\,ds \leq |\lambda| M (t-a) \|x_1 - x_2\|$$

$$M = \max_{t,s} |K(t,s)|$$

$$|F^2(x_1) - F^2(x_2)| \leq |\lambda|^2 \int_a^t \int_a^s |K(t,s)|\,|K(t,\tau)|\,|x_1(\tau) - x_2(\tau)|\,d\tau\,ds$$

$$\leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2!} \|x_1 - x_2\| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(b-a)^2}{2!} \|x_1 - x_2\| \Rightarrow$$

$\exists n \in \mathbb{N}: |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} < 1 \Rightarrow F^n$ — сжатие $\Rightarrow \exists!$ неподв. т.

$\Rightarrow \exists!$ реш-е ИУВ $\blacksquare$