Метод Ритца

Условие

Методом Ритца при $n = 2$ найти решение следующей задачи

$$\begin{cases} u''(x) - xu(x) = x, \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

Решение

Решение задачи ищем в виде

$$u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x).$$

Поскольку $n = 2$, то имеем

$$u_2(x) = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x).$$

В качестве системы функций $\{\varphi_i(x)\}$ будем использовать алгебраический базис, но со смещением, чтобы эти функции удовлетворяли граничным условиям.

Так как граничные условия первого рода, но неоднородные, то функцию $\varphi_0(x)$ мы выбираем таким образом, чтобы она «вобрала» в себя неоднородность. Строим эту функцию в виде

$$\varphi_0(x) = C_0 x + C_1,$$

где C_0, C_1 — некоторые константы. Эта функция должна удовлетворять граничным условиям. Тогда подставим ее в граничные условия и получим

$$\begin{cases} \varphi_0(0) = C_0 \cdot 0 + C_1 = 0, \\ \varphi_0(1) = C_0 + C_1 = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1, \\ C_1 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, построили функцию

$$\varphi_0(x) = x.$$

Остальные функции строим в виде

$$\varphi_i(x) = (x-a)^i(x-b).$$

Тогда

$$\varphi_1(x) = x(x-1), \ \varphi_2(x) = x^2(x-1).$$

Для отыскания коэффициентов a_{ij} строим систему вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} a_j = d_i, \ i = \overline{1,n},$$

$$c_{ij} = \int\limits_a^b (k(x)\varphi_j'\varphi_i' + q(x)\varphi_j\varphi_i)dx, \ d_i = -\int_a^b (f\varphi_i + k(x)\varphi_0'\varphi_i' + q(x)\varphi_0\varphi_i)dx.$$

В нашем случае эту систему образуют 2 уравнения

$$\begin{cases} c_{11}a_1 + c_{12}a_2 = d_1, \\ c_{21}a_2 + c_{22}a_2 = d_2. \end{cases}$$

Для вычисления значений c_{ij}, d_i нам требуется информация о $k(x), q(x), f(x)$ и $\varphi_i'(x)$. Определим эти значения.

Исходная задача ставится для дифференциального оператора

$$Lu \equiv -(k(x)u'(x))' + q(x)u)x = -f(x).$$

Таким образом, из исходного уравнения имеем

$$k(x) = 1,\ q(x) = x,\ f(x) = x.$$

Найдем производные от базисных функций:

$$\varphi_0'(x) = 0,$$

$$\varphi_1'(x) = 2x - 1,$$

$$\varphi_2'(x) = x(3x - 2).$$

Также вычислим следующие значения:

$$\varphi_1'(x) \cdot \varphi_2'(x) = (2x-1)x(3x-2) = 6x^3 - 7x^2 + 2x.$$

Таким образом, коэффициенты для системы получаем следующие:

$$c_{11} = \int\limits_0^1 \left[(2x-1)^2 + x^3(x-1)^2\right] dx = \frac{7}{20},$$

$$c_{12} = c_{21} = \int\limits_0^1 \left[(2x-1)(3x-2)x + x^4(x-1)^2\right] dx = \frac{37}{210},$$

$$c_{22} = \int\limits_0^1 \left[x^2(3x-2)^2 + x^5(x-1)^2\right] dx = \frac{39}{280},$$

$$d_1 = -\int\limits_0^1 \left[x^2(x-1) + 2x - 1 + x^3(x-1)\right] dx = \frac{2}{15},$$

$$d_2 = -\int\limits_0^1 \left[x^3(x-1) + x(3x-2) + x^4(x-1)\right] dx = \frac{1}{12}.$$

В итоге, подставляя эти значения в систему для отыскания a_i, получим

$$\begin{cases} \dfrac{7}{20}a_1 + \dfrac{37}{210}a_2 = \dfrac{2}{15}, \\ \dfrac{37}{210}a_1 + \dfrac{39}{280}a_2 = \dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

Решая эту систему точным или приближенным методом, получим

$$a_1 = \frac{1372}{6247} \approx 0.2196,\ a_2 = \frac{2002}{6247} \approx 0.3204.$$

Таким образом, приближенное решение поставленной задачи имеет вид

$$u_2(x) = x + 0.2196x(x-1) + 0.3204x^2(x-1).$$