Уравнения в полных диффренециалах. Интегрирующий множитель.

• *Уравнение вида*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в односвязной области (на компакте) D и $P^2 + Q^2 \neq 0$ будем называть ***уравнением в полных дифференциалах (УПД)****, если на D выполняются следующие условия:*

1. *существует непрерывно дифференцируемая на D функция $u(x,y)$ такая, что*

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \quad (x,y) \in D;$$

2. *функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ удовлетворяют условию Эйлера:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Также из курса математического анализа эти свойства можно называть "условиями независимости КРИ-2 от пути интегрирования".

Таким образом, мы решаем дифференциальное уравнение $du(x,y) = 0$, и его решение (общий интеграл, полное решение) имеет вид

$$u(x,y) = C.$$

Разберемся с тем, как найти это самое решение.

Первый способ. Для нахождения первообразной функции $u(x,y)$ воспользуемся известной из курса матанализа формулой

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy \tag{1}$$

или

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy. \tag{2}$$

Разница лишь в том, что при разбиении КРИ-2 на собственные интегралы точку x_0 или y_0 мы подставляем **только в один** из собственных интегралов.

Пример 1. Проверить, является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах, найти общий интеграл и указать область D:

$$(x+y)dx + (x-y)dy = 0.$$

Решение. Пойдем по пунктам из условия.

1. Укажем множество допустимых значений D. Поскольку $P(x,y) = x+y$ непрерывна на $\mathbb{R}$, $Q(x,y) = x-y$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то

$$D = \mathbb{R}^2 \text{ или } D = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

2. Выясним, является ли наше уравнение УПД. Для этого проверим, выполняется ли условие Эйлера:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

   Таким образом, уравнение является УПД, и мы можем проинтегрировать его.

3. Найдем общее решение уравнения. Для этого воспользуемся формулами (1) или (2). В качестве x_0 и y_0 можем взять любые значения из D, т. е. любые значения из $\mathbb{R}^2$. Пусть $x_0 = y_0 = 0$. Тогда по формуле (1)

$$u(x, y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (x + y)dx + (x - y)dy = \int\limits_0^x xdx + \int\limits_0^y (x - y)dy =$$

$$= \int\limits_0^x xdx + x\int\limits_0^y dy - \int\limits_0^y ydy = \frac{x^2}{2}\Big|_0^x + xy\Big|_0^y - \frac{y^2}{2}\Big|_0^y = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C.$$

   Последнее равенство домножим на 2 (от этого справа всё равно останется константа) и получим общее решение

$$x^2 + 2xy - y^2 = C.$$

Для того, чтобы убедиться, верно ли мы нашли общее решение уравнения, продифференцируем получившееся уравнения.

$$du(x, y) = u'_x dx + u'_y dy = (2x + 2y)dx + (2x - 2y)dy = 0.$$

Заметим, что в качестве x_0 и y_0 лучше брать как насколько это возможно минимальные числа. Но вообще можно брать любые числа из D. Например, если бы мы взяли

$$u(x, y) = \int\limits_{(\ln 2,0)}^{(x,y)} (x + y)dx + (x - y)dy = \frac{x^2}{2}\Big|_{\ln 2}^x + xy\Big|_0^y - \frac{y^2}{2}\Big|_0^y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln^2 2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C.$$

В получившемся уравнении все постоянные можем перенести вправо, а затем домножить на 2. Тогда все равно получаем решение

$$x^2 + 2xy - y^2 = C.$$

Ответ: $x^2 + 2xy - y^2 = C$.

Второй способ. Для отыскания функции можно использовать соотношения

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = u'_x = P(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = u'_y = Q(x, y).$$

Тогда если $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$, то

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^x P(x, y)dx + \varphi(y) = C. \tag{3}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y) =$$

$$= Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

Получаем

$$\varphi'(y) = Q(x_0,y).$$

Из получившегося уравнения найдем

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C.$$

Подставим его в (3) и получим

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C.$$

Таким образом и выглядит алгоритм для второго способа. Он может сначала показаться сложным, однако при решении всё становится интуитивно понятно.

Замечание. *Поскольку УПД имеет вид*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

то мы можем разделить все уравнение на dx и получить

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = P(x,y) + y' \cdot Q(x,y) = 0.$$

Аналогично УПД может иметь вид

$$x' \cdot P(x,y) + Q(x,y) = 0.$$

Независимо от вида записи, методы нахождения решения остаются неизменными.

Пример 2. Проверить, является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах, найти общий интеграл и указать область D:

$$2x^3 + xy^2 + (x^2y + 2y^3) \cdot y' = 0.$$

Решение. Приведем уравнение к более привычному для нас виду, домножив его на dx:

$$x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0.$$

Снова разобъем решение уравнения на 3 этапа.

1. Найдем множество допустимых значений D. Так как $P(x,y) = x(2x^2+y^2)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $Q(x,y) = y(x^2+2y^2)dy$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то $D = \mathbb{R}^2$.

2. Проверим, является ли уравнение УПД.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3. Найдем общее решение вторым способом и пусть $x_0 = y_0 = 0$. Возьмем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = 2x^3 + xy^2.$$

Отсюда

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \varphi(y) = \int\limits_{0}^{x} (2x^3 + xy^2)dx + \varphi(y) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y) = C. \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \Big(\frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y)\Big)'_y = x^2y + \varphi'(y) = x^2y + 2y^3.$$

Следовательно, $\varphi'(y) = 2y^3$, а $\varphi(y) = \dfrac{y^4}{2}$. Подставим полученное $\varphi(y)$ в (4). Тогда

$$u(x,y) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{2} = C.$$

Наконец домножим последнее уравнение на 2 и получим общий интеграл исходного уравнения

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = C.$$

Ответ: $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$.

Уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

с непрерывными на D и не обращающимися в 0 одновременно функциями P и Q мы также будем считать уравнением в полных дифференциалах (иногда его еще называют **уравнением с разделенными переменными**). И его общее решение будет иметь вид

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(y)dy = C. \quad (5)$$

Пример 3. Проверить, является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах, найти общее решение и указать область D:

$$\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Решение.

1. Найдем множество допустимых значений. $P(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, $Q(x,y) = \dfrac{1}{y}$ непрерывна на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и для уточнения возьмем множество $(0;+\infty)$. Тогда

$$D = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

2. Так как это УПД с разделенными переменными, то очевидно, что
$$P'_y = Q'_x = 0.$$

3. Для нахождения общего решения воспользуемся формулой (5). Пусть $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.
$$u(x,y) = \int\limits_0^x \frac{xdx}{1+x^2} + \int\limits_1^y \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^x + \ln|y|\Big|_1^y =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln 1 + \ln y - \ln 1 = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln y = C.$$

Домножим на 2 и преобразуем
$$\ln(1+x^2) + 2\ln y = \ln(y^2(1+x^2)) = C.$$

Ответ: $\ln(y^2(1+x^2)) = C$.

Иногда в задачах может стоять вопрос о поиске решения задачи Коши для УПД. Например, если
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad y|_{x=\nu} = \xi \ \vee \ x|_{y=\xi} = \nu,$$
то решение задачи Коши определяется формулой
$$u(x,y) = \int\limits_{(\nu,\xi)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

То есть, в отличие от общего решения, начальные точки нам уже даны и $u(x,y) = 0$ (а не $u(x,y) = C$).

Пример 4. Решить задачу Коши:
$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0, \quad y|_{x=1} = 1.$$

Решение. Проверим, является ли уравнение УПД
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$
Условие Эйлера выполняется, значит можем применить формулу (2)
$$u(x,y) = \int\limits_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = \frac{2}{y^3}\int\limits_1^x xdx + \int\limits_1^y \frac{dy}{y^2} - 3\int\limits_1^y \frac{dy}{y^4} =$$
$$= \frac{x^2}{y^3}\Big|_1^x - \frac{1}{y}\Big|_1^y + \frac{1}{y^3}\Big|_1^y = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{y^3} - 1 = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = 0.$$
Отсюда
$$x^2 = y^2 \Rightarrow x = y.$$
Проверить, правильным ли является найденное решение, можно подстановкой начальных условий (получим $1 = 1$).

Ответ: $x = y$.

Интегрирующий множитель.

Рассмотрим уравнение
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$
где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в односвязной области D и $P^2+Q^2 \neq 0$. И пусть оно не является УПД.

• *Непрерывную на $G \subset D$ функцию $\mu(x,y)$ будем называть* ***интегрирующим множителем****, если уравнение*

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{6}$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Выведем формулу для нахождения интегрирующего множителя. Возьмем функцию $\omega = \omega(x,y)$ такую, что $\mu(\omega)$ — интегрирующий множитель.

Если уравнение (6) является УПД, то

$$(\mu(\omega)P(x,y))'_y = (\mu(\omega)Q(x,y))'_x.$$

По формуле производной сложной функции нескольких переменных получим

$$\mu'_\omega \omega'_y P(x,y) + \mu(\omega)P'_y = \mu'_\omega \omega'_x Q(x,y) + \mu(\omega)Q'_x.$$

Отсюда
$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q\omega'_x - P\omega'_y} = \frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} = \psi(\omega).$$
Мы получили линейное ДУ-1 (подробнее мы рассмотрим их через 1 урок)

$$\mu'(\omega) - \mu(\omega)\cdot\psi(\omega) = 0.$$

Найдем его решение
$$\mu'(\omega) - \mu(\omega)\cdot\psi(\omega) = 0 \,\Big|\, \cdot e^{-\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\psi(\tau)d\tau}.$$
$$\mu'(\omega)\cdot e^{-\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\psi(\tau)d\tau} - \mu(\omega)\cdot\psi(\omega)\cdot e^{-\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\psi(\tau)d\tau} = 0.$$
$$\left(\mu(\omega)e^{-\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\psi(\tau)d\tau}\right)'_\omega = 0.$$
$$\mu(\omega)e^{-\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\psi(\tau)d\tau} = C.$$
$$\mu(\omega) = Ce^{\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\psi(\tau)d\tau}.$$
Причем так как при подстановке C сократится, то можно записать

$$\mu(\omega) = e^{\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\psi(\tau)d\tau}.$$

Отсюда следует, что если $\mu(\omega)$ — интегрирующий множитель, то и $C\mu(\omega)$ также является интегрирующим множителем.

Из всех вычислений для решения задачи нам пригодятся лишь формулы (6),

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q\omega'_x - P\omega'_y} = \psi(\omega) \tag{7}$$

и

$$\mu(\omega) = e^{\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \psi(\tau)d\tau}. \tag{8}$$

Обычно функция $\omega(x, y)$ будет задана в условии, и ее не нужно подбирать.

Пример 5. Найти общее решение уравнения, найдя интегрирующий множитель указанного вида:

$$2xy\ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})dy = 0, \quad \mu = \mu(x) \quad \text{или} \quad \mu = \mu(y).$$

Решение. Проверим, является ли исходное уравнение УПД.

$$P'_y = 2x\ln y + 2x,\ Q'_x = 2x, \text{ то есть } P'_y \neq Q'_x.$$

Таким образом, не выполняется условие Эйлера, следовательно, мы не сможем решить данное уравнение как УПД. Найдем интегрирующий множитель для того, чтобы привести его к УПД.

В условии нам предложено взять в качестве функции ω переменные x или y. Возьмем $\omega = x$. Тогда по формуле (7) мы должны получить функцию $\psi(x)$ (функцию **одной переменной**). Причем $\omega'_x = x'_x = 1$, $\omega'_y = x'_y = 0$.

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q\omega'_x - P\omega'_y} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2x\ln y + 2x - 2x}{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}} = \psi(x, y) \neq \psi(x).$$

Мы получили несоответствие. Значит подстановка $\omega = x$ не подходит нам. Попробуем взять $\omega = y$, и получить мы должны функцию $\psi(y)$. Тогда

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q\omega'_x - P\omega'_y} = \frac{P'_y - Q'_x}{-P} = \frac{2x\ln y + 2x - 2x}{-2xy\ln y} = -\frac{2x\ln y}{2xy\ln y} = -\frac{1}{y} = \psi(y).$$

Теперь мы можем применить формулу (8) для нахождения интегрирующего множителя

$$\mu(\omega) = e^{\int\limits_{\omega_0}^{\omega} \psi(\tau)d\tau} = e^{-\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{\tau}} = e^{-(\ln y - \ln y_0)} = e^{-\ln\frac{y}{y_0}} = -\frac{y_0}{y}.$$

Так как $\mu(y) = -\dfrac{y_0}{y}$ — интегрирующий множитель, то функция $\mu(y) = \dfrac{1}{y}$ также будет являться интегрирующим множителем.

Воспользуемся формулой (6), то есть домножим исходное уравнение на $\mu(y)$

$$2x\ln y dx + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0.$$

Данное уравнение является УПД. Убедимся в этом:

$$P'_y = 2x/y,\ Q'_x = 2x/y, \text{ то есть } P'_y = Q'_x.$$

А УПД мы уже научились решать. Возьмем $x_0 = 0$ и $y_0 = 1$. Тогда

$$u(x,y) = \int\limits_{(0,1)}^{(x,y)} 2x\ln y dx + \Big(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\Big)dy = 2\ln y \int\limits_0^x x dx + \int\limits_1^y y\sqrt{y^2+1}dy =$$

$$= 2\ln y \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^x + \frac{1}{2}\int\limits_1^y (y^2+1)^{\frac{1}{2}} d(y^2+1) = x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^x = x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} = C.$$

Перенесем последнее слагаемое к константе, а затем домножим всё уравнение на 3 и получим общее решение

$$3x^2\ln y + (y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C.$$

Ответ: $3x^2\ln y + (y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C$.