4. $$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=a} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=b} = 0 \\ u|_{z=0} = x(x-a)^2 \cos\left(\frac{3\pi}{b} y\right) \\ u|_{z=c} = \sin\left(\frac{5\pi}{2a} x\right) \cos\left(\frac{7\pi y}{b}\right) \end{cases}$$

Решение ищем в виде

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad X, Y, Z \neq 0$$

Подставляем в уравнение:

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0 \quad \Big| : XYZ$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{-Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda^2 \Rightarrow$$

Можем составить задачу Штурма – Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$X'(a) = \lambda C_2 \cos \lambda a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi + 2\pi n}{2a}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2a} x\right), \quad n = 0, 1 \ldots$$

Также можно выразить

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda^2 - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\mu^2 \Rightarrow \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \nu^2 = \lambda^2 + \mu^2$$

Можем составить задачу Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} Y''(y)+\mu^2 Y(y)=0 \\ Y'(0)=0 \\ Y'(b)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &Y(y)=C_1\cos\mu y + C_2 \sin \mu y \\ &Y'(0)=\mu C_2=0 \Rightarrow C_2=0 \\ &Y'(b)=-\mu C_1 \sin\mu b=0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mu_m=\frac{\pi m}{b}, \quad Y_m(y)=\cos\left(\frac{\pi m}{b}y\right), \ m=1,2..$$

Поскольку граничные усл. 2-го рода, то также есть

$$\mu_0=0, \quad Y_0=1$$

Тогда можно представить решение как

$$u(x,y,z)=\sum_{n,m=0}^{\infty}{}' Z_{nm}(z)\cdot \sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2a}x\right)\cos\left(\frac{\pi m}{b}y\right)$$

Подставим в $\Delta u=0$ и получим

$$\Delta u=-\sum_{n,m=0}^{\infty}{}' \lambda_n^2 Z_{nm}(z)\cdot \sin(\lambda_n x)\cos(\mu_m y)+\sum_{n,m=0}^{\infty}{}' \mu_m^2\cdot$$

$$\cdot Z_{nm}(z)\cdot \sin(\lambda_n x)\cos(\mu_m y)+\sum_{n,m=0}^{\infty}{}' Z''_{nm}(z)\cdot \sin(\lambda_n x)\cdot$$

$$\cdot\cos(\mu_m y)=0 \Rightarrow Z''_{nm}(z)-\nu_{nm}^2 Z_{nm}(z)=0,$$

где $\nu_{nm}^2=\lambda_n^2+\mu_m^2$

Подставим представление решения в граничное условие

$$u|_{z=0}=\sum_{n,m=0}^{\infty}{}' Z_{nm}(0)\cdot \sin(\lambda_n x)\cos(\mu_m y)=(x-a)^2 x\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{b}y\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}{}' \varphi_{n3}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{b}y\right) \Rightarrow Z_{nm}(0)=\begin{cases}\varphi_{n3}, & m=3 \\ 0, & m\neq 3\end{cases}, \text{ где}$$

$$\varphi_{n3} = \frac{\int\limits_0^a x(x-a)^2 \sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2a}x\right)dx}{\int\limits_0^a \sin^2\left(\frac{\pi+2\pi n}{2a}x\right)dx} =$$

$$= -\frac{32a^4\left(6\cdot(-1)^n - 2\pi(1+2n)\right)}{(\pi+2\pi n)^4\cdot a}$$

$$u\big|_{z=c} = \sum_{n;m=0}^{\infty} Z_{nm}(c)\cdot \sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2a}x\right)\cos\left(\frac{\pi m}{6}y\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{5\pi}{2a}x\right)\cos\left(\frac{7\pi}{6}y\right)$$, тогда

$$Z_{nm}(c) = \begin{cases} 1, & (n,m)=(2,7) \\ 0, & (n,m)\neq(2,7) \end{cases}$$

В итоге можем составить граничную задачу для ОДУ:

$$\begin{cases} Z''_{nm}(z) - \nu^2_{nm} Z_{nm}(z) = 0 \\ Z_{nm}(0) = \begin{cases} \varphi_{n3}, & m=3 \\ 0, & m\neq 3 \end{cases} \\ Z_{nm}(c) = \begin{cases} 1, & (n,m)=(2,7) \\ 0, & (n,m)\neq(2,7) \end{cases} \end{cases}$$

, найдем ее решение

$$Z_{nm}(z) = C_1 \operatorname{ch}(\nu_{nm} z) + C_2 \operatorname{sh}(\nu_{nm} z)$$

$$Z_{nm}(0) = C_1 = \begin{cases} \varphi_{n3}, & m=3 \\ 0, & m\neq 3 \end{cases}$$

$$Z_{nm}(c) = C_1 ch(\nu_{nm} c) + C_2 sh(\nu_{nm} c) = \begin{cases} 1, & (n,m) = (2,7) \\ 0, & (n,m) \neq (2,7) \end{cases}$$

Отсюда $C_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{sh(\nu_{27} c)}, & (n,m) = (2,7) \\ -\varphi_{n3}\, cth(\nu_{n3} c), & m = 3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

В итоге ~~ответ~~ решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,y,z) = \frac{sh(\nu_{27} z)}{sh(\nu_{27} c)} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{b}y\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\varphi_{n3}\, cth(\nu_{n3} c)\, sh(\nu_{n3} z) + \varphi_{n3}\, ch(\nu_{n3} z)\Big) \cdot$$

$$\cdot \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2a} x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{b} y\right)$$