Фазовая плоскость СтЛВУ. Классификация точек покоя.

Рассмотрим уравнение
$$DX = AX, \tag{1}$$
где
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ а } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$
— неизвестная векторная функция.

• ***Фазовым графиком*** *решения $X(t)$ называется график функции*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ x_2 = x_2(t). \end{cases}$$

• *Плоскость Ox_1x_2, на которой располагаются фазовые графики решений, называется* ***фазовой плоскостью уравнения****.*

• *Фазовый график, состоящий из одной точки, называется* ***точкой покоя****.*

Начало координат (точка (0; 0)) всегда является точкой покоя для уравнения (1). Рассмотрим классифицкации точек покоя.

I группа.

1. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда любая точка фазовой плоскости является фазовым графиком и других фазовых графиков нет.

2. Пусть $A = aE$, то есть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

   • *Точка покоя, в окрестности которой фазвоые графики имеют такое расположение, называется* ***дикритическим узлом*** *причем при $a > 0$* ***устойчивым****, а при $a < 0$* ***неустойчивым****.*

II группа. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, причем $A \neq aE$. Рассмотрим матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & \mathrm{Sp}A \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}A = a + d$. Матрицы A и B подобны, то есть $\exists S, \det S \neq 0 : B = S^{-1}AS$.

Выполним замену в уравнении (1) неизвестной функции $X = SY$. Тогда
$$DY = BY. \tag{2}$$

Координатная форма уравнения (2) имеет вид
$$\begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = -\det A y_1 + \mathrm{Sp}A D y_1. \end{cases}$$

Исключим из второго уравнения y_1 и получим
$$D^2 y_1 - (\mathrm{Sp}A)Dy_1 + (\det A)y_1 = 0.$$

Тогда решение $y_1(t)$ имеет фазовую тракекторию, являющуюся графиком функции

$$\begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = Dy_1(t); \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = y_2(t). \end{cases} \tag{3}$$

Типы точек покоя уравнения (1) будут совпадать с типами точек покоя уравнений (2) и (3). То есть все остальные классификации точек покоя мы можем перенести с СтЛУ на СтЛВУ.

Пусть λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ для уравнения (1). Тогда тип точки покоя O при $a_0 \neq 0$ определяется следующим образом:

1. Если λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ и
   (a) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, то точка покоя называется **седлом**;
   (b) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то точка покоя называется **бикритическим узлом**, причем, при $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ **устойчивым**; при $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ **неустойчивым**;
   (c) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$, то точка покоя называется **монокритическим узлом**, причем, при $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ **устойчивым**; при $\lambda_2 = \lambda_1 > 0$ **неустойчивым**;
2. Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ и
   (a) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, то точка покоя называется **фокусом**, причем, при $\alpha < 0$ **устойчивым**; при $\alpha > 0$ **неустойчивым**;
   (b) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, то точка покоя называется **центром**.

Если характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + a_1\lambda = 0$, где $a_1 \geqslant 0$, то прямая $x_1 = x_2$ состоит из точек покоя и называется **прямой покоя**.

Исследование типа точки покоя проводится аналогично исследованию в СтЛУ.

Пример 1. Установить тип точки покоя для уравнения $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Построим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0.$$

Корни уравнения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Тогда точка O является неустойчивым бикритическим узлом.

Ответ: Точка O — неустойчивый бикритический узел.

Пример 2. Установить тип точки покоя для уравнения $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица $A = (-5)E$, то есть ее вид совпадает с видом матрицы A для случая, когда точка O является дикритическим узлом, причем устойчивым, так как коэффициент

a отрицательный.

Ответ: Точка O — устойчивый дикритический узел.

Аналогичным образом рассматриваются и параметрические уравнения.

Пример 3. Определить тип точки покоя для уравнения $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} -3\alpha & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

в зависимости от значений параметра α.

Решение. Построим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3\alpha - \lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\alpha\lambda + 3 = 0.$$

Тогда корни уравнения имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{-3\alpha + \sqrt{9\alpha^2 - 12}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-3\alpha - \sqrt{9\alpha^2 - 12}}{2}.$$

1. Пусть $9\alpha^2 - 12 > 0$. Тогда $|\alpha| > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Подставим α в λ_1 и λ_2 и получим $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{9\alpha^2 - 9\alpha^2 + 12}{4} = 3 > 0,$$
следовательно, точка O — бикритический узел. Причем при $\alpha > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ получаем устойчивый бикритический узел, а при $\alpha < -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ — неустойчивый.

2. Пусть $9\alpha^2 - 12 = 0$. Тогда $|\alpha| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Подставим α в λ_1 и λ_2 и получим $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{3}{2}$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Таким образом, точка O — монокритический узел. Причем при $\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ получаем устойчивый бикритический узел, а при $\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ — неустойчивый.

3. Пусть $9\alpha^2 - 12 < 0$. Тогда получаем два случая:
   (a) $0 < |\alpha| < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ и $\alpha \neq 0$. Тогда точка O — фокус, причем при $0 < \alpha < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ устойчивый, а при $0 > \alpha > -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ неустойчивый.
   (b) $\alpha = 0$. Таким образом, $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$, и точка O — центр.

Пример 4. Установить тип точки покоя и начертить фазовый портрет для уравнения $DX = AX$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для начала необходимо установить тип точки покоя для данного уравнения. Построим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0.$$

То есть корни данного характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Таким образом, точка O — седло. То есть построенный в итоге график будет соответствовать виду фазового графика такой точки покоя. Теперь построим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & \mathrm{Sp}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix},$$

которая является подобной матрице A, то есть $\exists S, \det S \neq 0 : B = S^{-1}AS$. Выполним замену $X = SY$ для исходного уравнения и получим уравнение вида

$$DY = BY \iff \begin{cases} Dy_1 = y_2, \\ Dy_2 = 6y_1 - Dy_1. \end{cases}$$

Исключим y_1 из второго уравнения и получим СтЛОУ

$$D^2 y_1 + Dy_1 - 6y_1 = 0.$$

Фазовый портрет такого уравнения мы уже умеем строить, и задается он параметрически заданной функцией

$$\begin{cases} y_1 = y_1(t), \\ y_2 = Dy_1(t). \end{cases}$$

Полученное СтЛОУ имеет корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Следовательно, $y_1(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$. Подставим $y_1(t)$ и $Dy_1(t)$ в параметрическое уравнение и получим, что фазовый портрет СтЛОУ задается системой

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}, \\ y_2 = -3C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

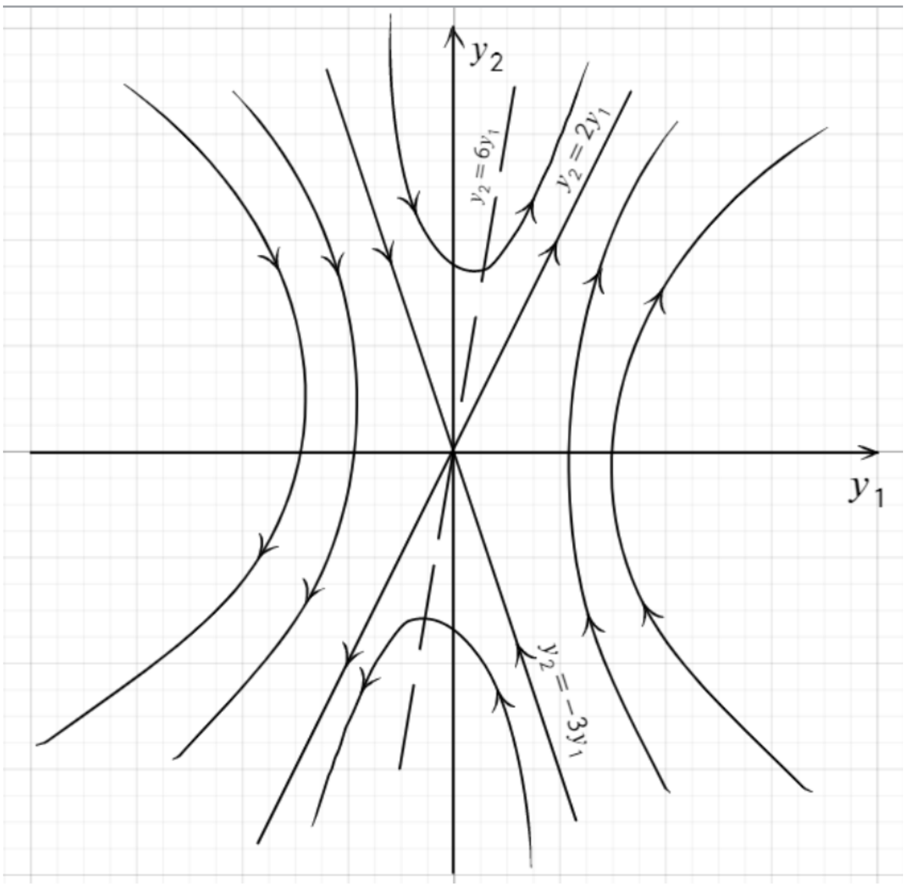
Мы уже знаем, каким уравнением задается фазовый портрет и какой вид он имеет (седло). Остается выяснить асимптоты, к которым стремятся фазовые графики. Для этого найдем пределы

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \frac{-3C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t}}{C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}} = 2.$$

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \frac{-3C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t}}{C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}} = -3.$$

Таким образом, прямые $y_2 = 2y_1$ и $y_2 = -3y_1$ являются асимптотами фазовых графиков. А в точках, где $Dy_2 = 0$, то есть $-a_1 y_2 - a_0 y_1 = 0$, то есть на прямой $y_2 = 6y_1$ касатлельные к фазовым графикам параллельны оси Ox (т.е. на пересечении с этой прямой у верхних и нижних графиков находится точка перегиба). Построим фазовый портрет на основании полученной информации: (см. следующую страницу)

Однако полученный фазовый портрет соответствует лишь уравнению $DY = BY$, но не исходному. Для получения фазового портрета исходного уравнения сделаем обратное линейное преобразование $X = SY$, где S — матрица перехода от базиса A к базису B



y_2
$y_2 = 6y_1$
$y_2 = 2y_1$
y_1
$y_2 = -3y_1$