Метод простой итерации

Дано уравнение
$$2\sin 3x = x^2 - 4x + 3.$$

Отделить корень и привести к виду, удобному для итераций. Выбрать начальное приближение, обеспечивающее выполнение условий теоремы о сходимости метода простой итерации. Вычислить с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ корень уравнения.

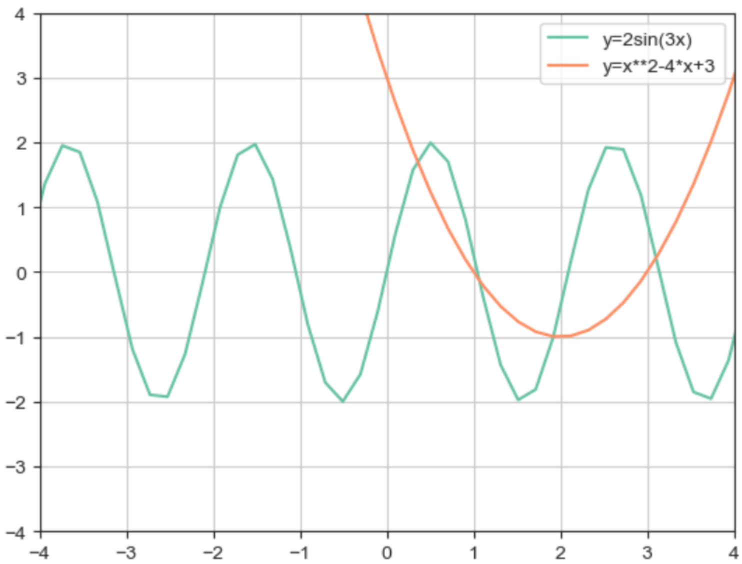
Приведем исходное уравнение к виду $f(x) = 0$:

$$\underbrace{2\sin 3x - (x^2 - 4x + 3)}_{f(x)} = 0.$$

Область определения функции $f(x)$ совпадает с $\mathbb{R}$. Для начала построим графики для данного уравнения, так как в данном случае это легко сделать. Определим две функции

$$y = 2\sin 3x, \quad y = x^2 - 4x + 3$$

и построим их графики.



Таким образом, уравнение $f(x) = 0$ имеет 4 корня. Будем вычислять корень, который находится *левее всех* на графике. Его мы и будем отделять.

Отделение корня. По графику мы можем понять, что нужный нам корень лежит где-то на отрезке $[0, 0.5]$. Покажем, что на этом отрезке действительно есть только один корень нашего уравнения. Воспользуемся теоремой:

Теорема. *Если функция $f(x) \in C[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то на этом отрезке существует по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$. Если при этом функция $f(x)$ будет монотонной на отрезке $[a, b]$, то она может иметь только один корень.*

1. Покажем *существование*: вычислим значения на концах отрезка

$$f(0) = -3, \quad f(0.5) = 0.745 \quad \Rightarrow \quad f(0) < 0 < f(0.5)$$

То есть, действительно на $[0, 0.5]$ есть корень уравнения, т.к. значения разных знаков.

В случае, если знаки окажутся одинаковыми, необходимо сделать несколько шагов деления отрезка пополам (дихотомии). Пусть мы изначально взяли отрезок $[0, 1.5]$. В этом случае, как можно увидеть на графике, мы случайно захватили еще один корень и при этом

$$f(1.5) = -1.21 \quad \Rightarrow \quad f(0) < f(1.5) < 0.$$

Для отделения корней поделим отрезок пополам, то есть

$$[0, 1.5] = [0, 0.75] \cup [0.75, 1.5]$$

и рассмотрим значение в новой точке

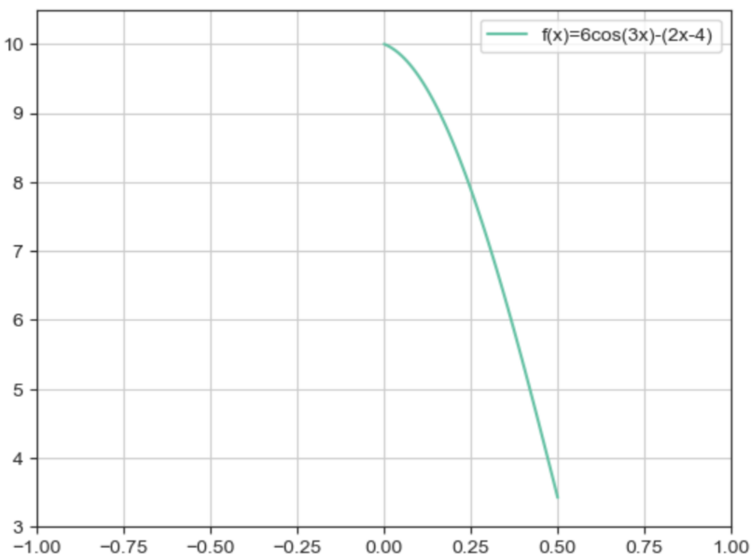
$$f(0.75) = 0.993 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) < 0 < f(0.75),$$

что нам и требовалось. В ином случае пришлось бы делать еще шаги деления отрезка. Таким образом, мы проделали *одну итерацию дихотомии.*

2. Покажем *единственность*:

$$f'(x) = 6\cos 3x - (2x - 4) > 0 \quad \forall x \in [0, 0.5],$$

то есть $f(x)$ является монотонно возрастающей, т.к. первая производная не меняет знак. Действительно



(график производной необязателен). Значит корень на $[0, 0.5]$ всего один.

В случае, если первая производная меняет знак, то это еще не значит, что корень на отрезке не единственный. Для примера возьмем отрезок $[0, 0.75]$. Ранее мы выяснили, что на этом отрезке существуют корни $f(x) = 0$. Но поскольку $f'(0) > 0$, $f'(0.75) < 0$, то $f'(x)$ на этом отрезке меняет знак. Тогда вычислим вторую производную

$$f''(x) = -18\sin(3x) - 2 < 0 \quad \forall x \in [0, 0.75].$$

Вторая производная не изменяет знак, и этого достаточно для того, чтобы функция была монотонна. Поэтому на отрезке $[0, 0.75]$ также один корень.

Приведем уравнение к виду, удобному для итераций, т.е. к виду $x = \varphi(x)$. Одним из способов является приведение уравнения к виду

$$x = \underbrace{x - \lambda f(x)}_{\varphi(x)}, \quad \lambda = \frac{1}{\max_{x\in[a,b]} |f'(x)|},$$

причем мы *гарантировано получим сходящийся итерационный процесс*. Вычислим λ: (исходя из графика)

$$|f'(x)| = |6\cos 3x - (2x-4)| \leqslant |f'(0)| = 10.$$

Значит

$$\lambda = \frac{1}{10} = 0.1$$

и

$$x = \underbrace{x - 0.1 \cdot (2\sin 3x - (x^2 - 4x + 3))}_{\varphi(x)}.$$

Отсюда итерационный процесс будет определяться формулой

$$x_{k+1} = x_k - 0.1 \cdot (2\sin 3x_k - (x_k^2 - 4x_k + 3)).$$

Выберем начальное приближение. К примеру возьмем левый край нашего отрезка $[0, 0.5]$, то есть

$$x_0 = 0.$$

Мы также могли бы взять и правый край отрезка, и его центр или любую другую точку из отрезка.

Проверим выполнение условий теоремы о сходимости МПИ:

Теорема (о сходимости метода простой итерации)**.** *Пусть выполняются следующие условия:*

1. *функция $\varphi(x)$ определена на отрезке*

$$|x - x_0| \leqslant \delta, \tag{3}$$

непрерывна на нем и удовлетворяет условию Липшица с постоянным коэффициентом меньше единицы, то есть $\forall x, \widetilde{x}$

$$|\varphi(x) - \varphi(\widetilde{x})| \leqslant q|x - \widetilde{x}|, \quad 0 \leqslant q < 1; \tag{4}$$

2. *для начального приближения x_0 верно неравенство*

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \leqslant m;$$

3. *числа δ, q, m удовлетворяют условию*

$$\frac{m}{1-q} \leqslant \delta. \tag{5}$$

Тогда

1. *уравнение $x = \varphi(x)$ в области (3) имеет решение;*

2. *последовательность x_k построенная по правилу $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ принадлежит отрезку $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, является сходящейся и ее предел удовлетворяет уравнению $x = \varphi(x)$.*

Будем идти последовательно по пунктам теоремы.

1. Выберем произвольно $\delta = 0.5$. Поскольку $x_0 = 0$, то для выполнения условия необходимо, чтобы на отрезке

   $$[x_0 - \delta; x_0 + \delta] = [-0.5; 0.5]$$

   функция $\varphi(x)$ была определена и непрерывна. Очевидно это выполняется, т.к. $\varphi(x) = x - 0.1 \cdot (2\sin 3x - (x^2 - 4x + 3))$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}$.

   Выполнение условия Липшица можно заменить равносильным ему условием

   $$|\varphi'(x)| \leqslant q.$$

   Отсюда остается лишь найти значение q:

   $$|\varphi'(x)| = |1 - 0.6\cos 3x + 0.2x - 0.4| \leqslant |\varphi'(0.5)| \approx 0.658.$$

   Таким образом, выбираем $q = 0.658$, а значит условие выполнено.

2. Из неравенства найдем значение m:

   $$|x_0 - \varphi(x_0)| = |0 - \varphi(0)| = |0 - 0.3| = 0.3.$$

   Отсюда выбираем $m = 0.3$.

3. Проверяем, выполнилось ли неравенство (5):

   $$\frac{0.3}{1 - 0.658} \approx 0.0877 < 0.5.$$

Условия теоремы выполнены, значит итерационный процесс действительно сойдется к некоторому решению при заданной точности.

В случае, если условия теоремы не были выполнены, то можно попробовать взять другое начальное приближение x_0, а также попробовать задать другое δ.

Вычислим корень уравнения с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-2}$. Выпишем еще раз формулы для итерационного процесса:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - 0.1 \cdot (2\sin 3x_k - x_k^2 + 4x_k - 3), \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Будем делать итерации, пока

$$|x_{k+1} - x_k| > \varepsilon.$$

Легко вычислить

$$x_1 = x_0 - 0.1 \cdot (2\sin 3x_0 - x_0^2 + 4x_0 - 3) = -0.1 \cdot (-3) = 0.3 \quad \Rightarrow \quad |0.3 - 0| = 0.3 > 0.01.$$

$$x_2 \approx 0.332 \quad \Rightarrow \quad |0.332 - 0.3| = 0.032 > 0.01.$$

$$x_3 \approx 0.342 \quad \Rightarrow \quad |0.342 - 0.332| = 0.012 > 0.01.$$

$$x_4 \approx 0.346 \quad \Rightarrow \quad |0.346 - 0.342| = 0.004 < 0.01.$$

Таким образом, получаем приближенный корень $x \approx 0.346$.