0.1 Сходимость и расходимость числовых рядов

Пусть задача числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}$. Сумма членов этой последовательности записывается в виде

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и называется **числовым рядом**. Сумма членов последовательности до k называется **частной суммой ряда**

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n. \tag{2}$$

Рассмотрим последовательность частных сумм ряда

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ \ldots.$$

Если существует конечный предел последовательности частных сумм ряда

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S,$$

то ряд называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**.

Теорема (Необходимое условие сходимости)**.** *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то*

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следствие. Если $a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (Критерий сходимости положительных числовых рядов ($a_n > 0$))**.** *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность частных сумм* $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ *ограничена, то есть* $|S_n| \leqslant M$, $\forall n$, $M = \text{const}$.

Теорема (Признаки сравнения)**.** *Пусть* $a_n \geqslant 0$, $a_n \leqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1. *Из сходимости* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*;*
2. *Из расходимости* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема (Предельный признак сравнения)**.** *Пусть* $b_n > 0$. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,\ 0 < l < +\infty, \tag{3}$$

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Практика

2546.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\dots$$

Перед нами бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, используя формулу для такой прогрессии, сразу найдем сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\left[\frac{b_1}{1-q}\right]=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

2547.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\dots$$

В данном случае имеем сумму двух бесконечно убывающих геометрических прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\left[\frac{b_1}{1-q}\right]=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

2549.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Разложим n-ый член последовательности a_n на простейшие дроби:

$$\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\left[A(n+1)+B\cdot n=1\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}\right]=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\dots.$$

Тогда рассмотрим частную сумму ряда

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}\xrightarrow[k\to\infty]{}1.$$

То есть мы доказали, что существует конечный предел последовательности частных сумм. А значит по определению ряд сходится и его сумма равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

2550. Обозначим исследуемый ряд

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Разложим a_n на сумму простейших дробей

$$\frac{A}{3n-2}+\frac{B}{3n+1}=\left[\begin{matrix}A(3n+1)+B(3n-2)=1\\ \begin{cases}3A+3B=0\\A-2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\3B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=-\frac{1}{3}\end{cases}\end{matrix}\right]=\frac{1}{3(3n-2)}-\frac{1}{3(3n+1)}$$

Тогда рассмотрим частную сумму ряда

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)} \right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{21} \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{3(3k-2)} - \frac{1}{3(3k+1)} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3k+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Последовательность часть ных сумм имеет конечный предел, следовательно ряд сходится его сумма равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}.$$

2552.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

Распишем сумму по членам

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - 2\sqrt{5} + \sqrt{4}) + \dots$$

$$\dots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) + \dots$$

Таким образом, частную сумму ряда можно записать в виде

$$S_k = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 - \sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2}.$$

2556.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \not\to 0, \text{предела не существ.}$$

Тогда по необходимому условию сходимости числовой ряд расходится.

2557.

$$0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (0.001)^{\frac{1}{n}}.$$

Рассмотрим n-ый член последовательности

$$a_n = (0.001)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0 \Rightarrow \text{расходится по необходимому условию сходимости.}$$

2558.

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Рассмотрим частную сумму ряда

$$S_k = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n!}.$$

Так как
$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)!} \geq S_k,$$
то последовательность монотонно возрастает. Нужно найти верхнюю грань. Из неравенства
$$n! \geq 2^{n-1}$$
следует, что
$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \left(n-1, \text{чтобы } \frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}\right).$$
Следовательно,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = [\text{геом. прогр. }] =$$
$$= \left[\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}\right] = \frac{1\cdot(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2 \quad \forall n \Rightarrow |S_n| \leq 2 \quad \forall n.$$
Тогда по критерию сходимости исходный ряд сходится, так как последовательность частных сумм является ограниченной.

2559.
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$
Используем признак сравнения:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
Необходимо доказать расходимость гармонического ряда. Доказательство Орема:
$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \dots$$
$$> 1 + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{16} + \dots\right] + \dots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \text{ - не ограничена сверху } \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \text{ - расх. .}$$
Значит по признаку сравнения исходный ряд расходится.

Альтернатива: Из книги Кастрицы:
$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = S_n + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > S_n + n \cdot \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2},$$
тогда при n $\to \infty$
$$S \geq S + \frac{1}{2} \quad \text{– противоречие.}$$

2560.
$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}.$$

Поскольку
$$1000n + 1 \le 2000n \Rightarrow \frac{1}{1000n+1} \ge \frac{1}{2000n},$$
то можем рассмотреть ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2000n} = \frac{1}{2000} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$
Этот ряд расходится как гармонический. Следовательно по признаку сравнения исходный ряд расходится.

2561.
$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}.$$
Рассмотрим a_n член
$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \ne 0.$$
А тогда по необходимому условию данный ряд расходится.

2562.
$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$
Возьмем ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
Рассмотрим отношение:
$$\frac{n^2}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4} = \text{const}$$
А тогда по предельному признаку сравнения ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходятся или расходятся одновременно. Докажем сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Для этого рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$
По аналогии с номером 2549
$$\frac{1}{n(n-1)} = \left[\begin{matrix} A(n-1) + Bn = 1 \\ \begin{cases} A + B = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases} \end{matrix} \right] = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow$$
$$S_k = \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$
При этом
$$\frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}, \text{ т.к. } n(n-1) < n^2 \quad \forall n \ge 2$$
а тогда ряд
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится.}$$

Причем, если добавить к нему единицу, то на сходимость это не повлияет:

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Таким образом, исходный ряд сходится по предельному признаку сравнения.

2563.

$$\frac{1}{1\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

По аналогии с 2549

$$S_k=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\dots+\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}1\Rightarrow \text{сходится.}$$

Теперь сравним его с исходным рядом. Сперва преобразуем:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

Разделим исходный ряд на получившийся:

$$\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n\sqrt{n+1}}=\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\xrightarrow[n\to\infty]{}2=\text{const}$$

Таким образом, по предельному признаку сравнения исходный ряд сходится.

0.2 Признаки Коши и Даламбера

Теорема (Радикальный признак Коши)**.** *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *существует предел*

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

- *Если $L<1$, то ряд сходится абсолютно.*
- *Если $L>1$, то ряд расходится.*
- *Если $L=1$, то признак не дает ответа.*

Теорема (Признак Даламбера)**.** *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *с ненулевыми членами существует предел*

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

- *Если $L<1$, то ряд сходится абсолютно.*
- *Если $L>1$, то ряд расходится.*
- *Если $L=1$, то признак не даёт ответа.*

Практика

2578.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера.Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{1000^n}{n!}.$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \frac{1000^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1000^n} = \frac{1000^n \cdot 1000}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{1000^n} = \frac{1000}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Так как полученный предел $q = 0$, и $q < 1$, то, согласно признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

2579.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Применим признак Даламбера. Общий член ряда

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Тогда следующий член ряда:

$$a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$$

Найдём предел отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right) =$$

Используя свойства факториала $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ и $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$, упростим выражение:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1) \cdot n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 (n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} =$$

После сокращения $(n!)^2$ и $(2n)!$ получаем:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} =$$

Разделим числитель и знаменатель на старшую степень n^2:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1+0+0}{4+0+0} = \frac{1}{4}.$$

Так как предел $q = \frac{1}{4} < 1$, то по признаку Даламбера исходный ряд сходится.

2580.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Применим признак Даламбера. Общий член ряда

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

Тогда следующий член ряда:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

Найдём предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \right) =$$

Используя свойства факториала $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ и степеней $(n+1)^{n+1} = (n+1)\cdot(n+1)^n$, упростим выражение:

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!} \right) =$$

После сокращения $(n+1)$ и $n!$ получаем:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Здесь мы использовали второй замечательный предел: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Так как предел $q = \frac{1}{e} < 1$ (поскольку $e \approx 2.718$), то по признаку Даламбера исходный ряд сходится.

2582.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

Применим признак Даламбера. Общий член ряда $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. Тогда следующий член ряда:

$$a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}$$

Найдём предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} \right) =$$

Сгруппируем члены с факториалами и степенями:

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\cdot\frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{(n+1)\cdot n!}{n!}\right)^2\cdot 2^{n^2-(n+1)^2}\right) =$$

Упростим выражение в показателе степени: $n^2-(n+1)^2 = n^2-(n^2+2n+1) = -2n-1$.

$$= \lim_{n\to\infty}\left((n+1)^2\cdot 2^{-2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Предел равен нулю, так как экспоненциальная функция в знаменателе 2^{2n+1} растет быстрее любой степенной функции в числителе $(n+1)^2$. Так как предел $q = 0 < 1$, то по признаку Даламбера исходный ряд сходится.

2583.

$$\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\dots$$

Сначала запишем общий член ряда a_n. Числитель n-го члена представляет собой произведение n чисел, начиная с 1000: $1000\cdot 1001\cdot\dots\cdot(1000+n-1)$. Знаменатель n-го члена представляет собой произведение первых n нечётных чисел: $1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)$. Таким образом, общий член ряда имеет вид:

$$a_n = \frac{1000\cdot 1001\cdot\dots\cdot(1000+n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}$$

Применим признак Даламбера. Для этого запишем следующий член ряда a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \frac{1000\cdot 1001\cdot\dots\cdot(1000+n-1)\cdot(1000+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

Найдём предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1000\cdot\dots\cdot(1000+n)}{1\cdot\dots\cdot(2n+1)}}{\frac{1000\cdot\dots\cdot(1000+n-1)}{1\cdot\dots\cdot(2n-1)}} =$$

Большинство множителей в числителе и знаменателе сокращаются:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1000+n}{2n+1} =$$

Чтобы найти предел, разделим числитель и знаменатель на n:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1000}{n}+1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{0+1}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Так как предел $q = \frac{1}{2} < 1$, то по признаку Даламбера исходный ряд сходится.

2584.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}.$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)(3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)(4n+2)}.$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4\cdot 7\cdots(3n+1)(3n+4)}{2\cdot 6\cdots(4n-2)(4n+2)}}{\frac{4\cdot 7\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdots(4n-2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+4/n}{4+2/n} = \frac{3}{4}.$$

Так как полученный предел $q = \frac{3}{4}$, и $q < 1$, то, согласно признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

2585.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}).$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1} = (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}).$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2})}{(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}).$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+3]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2n+3}} = 2^0 = 1$, предел равен:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt{2} - 1.$$

Так как полученный предел $q = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$, и $q < 1$, то, согласно признаку Даламбера, исходный ряд сходится.

2586.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся радикальным признаком Коши. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Вычислим предел корня n-ой степени из общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, предел равен:

$$\frac{1^2}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Так как полученный предел $q = \frac{1}{2}$, и $q < 1$, то, согласно признаку Коши, исходный ряд сходится.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Рассмотрим предел $L = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$. Для его вычисления воспользуемся свойством непрерывности логарифмической и показательной функций. Прологарифмируем выражение под знаком предела:

$$\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln(n) = \frac{\ln(n)}{n}.$$

Теперь найдем предел этого выражения при $n \to \infty$. Мы имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, поэтому можем применить правило Лопиталя.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n))'}{(n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Мы нашли, что предел логарифма исходного выражения равен 0. Чтобы найти исходный предел L, мы потенцируем полученный результат:

$$L = e^{\lim_{n\to\infty} \ln(n^{\frac{1}{n}})} = e^0 = 1.$$

Таким образом, доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

2587.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся радикальным признаком Коши. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Вычислим предел корня n-ой степени из общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{(n+1/n)\cdot 1/n}}{n+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+1/n^2}}{n+\frac{1}{n}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на n, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^{1/n^2}}{n(1+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n^2]{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Так как полученный предел $q = 1$, то признак Коши не даёт ответа. Проверим выполнение необходимого признака сходимости: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Преобразуем общий член ряда:

$$a_n = \frac{n^n \cdot n^{1/n}}{\left(n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^n} = \frac{n^n \cdot \sqrt[n]{n}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}.$$

Найдем его предел:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n}} = \frac{1}{e^0} = 1.$$

Так как предел общего члена ряда не равен нулю ($\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$), необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

2588.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

Для доказательства расходимости ряда проверим выполнение необходимого признака сходимости. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$$

Вычислим предел общего члена ряда при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)^{1/n}}.$$

Рассмотрим предел знаменателя $L = \lim_{n\to\infty}(\ln n)^{1/n}$. Это неопределенность вида $[\infty^0]$. Прологарифмируем его:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left((\ln n)^{1/n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n}.$$

Применяя правило Лопиталя для неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(\ln n))'}{(n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \ln n}}{1} = 0.$$

Следовательно, предел знаменателя равен $L = e^0 = 1$. Тогда предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1} = 1.$$

Так как предел общего члена ряда не равен нулю ($\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$), необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

2589.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{n+1/2}}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся радикальным признаком Коши. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{n+1/2}}.$$

Вычислим предел корня n-ой степени из общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{n+1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{(n-1)/n}}{(2n^2+n+1)^{(n+1/2)/n}}.$$

Упростим степени в числителе и знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-1/n}}{(2n^2+n+1)^{1+1/(2n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot n^{-1/n}}{(2n^2+n+1)\cdot(2n^2+n+1)^{1/(2n)}}.$$

Разделим предел на произведение нескольких пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n^2+n+1}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n^2+n+1)^{1/(2n)}}.$$

Вычислим каждый из них по отдельности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+n+1} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n^2+n+1)^{1/(2n)}} = 1, \text{ поскольку это предел вида } \frac{1}{\infty^0} \text{ и } \lim_{n\to\infty}(\text{полином})^{1/n} = 1.$$

Предел всего произведения равен:

$$q = 0\cdot 1\cdot 1 = 0.$$

Так как полученный предел $q = 0$, и $q < 1$, то, согласно признаку Коши, исходный ряд сходится.

2589.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$$

Для исследования сходимости воспользуемся признаком сравнения. Оценим общий член ряда $a_n = \frac{n^5}{2^n+3^n}$. Так как $2^n + 3^n > 3^n$, то

$$\frac{n^5}{2^n+3^n} < \frac{n^5}{3^n}.$$

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n}$ с помощью радикального признака Коши.

$$q = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[n]{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^5}{3}.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, предел равен:

$$q = \frac{1^5}{3} = \frac{1}{3}.$$

Так как $q < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n}$ сходится. Следовательно, по признаку сравнения, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$ также сходится.

2589.2.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

Для исследования сходимости воспользуемся радикальным признаком Коши. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

Вычислим предел корня n-ой степени из общего члена ряда:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}.$$

Мы имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Преобразуем выражение, чтобы использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{n-1}{n+1}}.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-2}$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$, предел равен:

$$q = (e^{-2})^1 = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Так как полученный предел $q = \frac{1}{e^2} \approx \frac{1}{7.389} < 1$, то, согласно признаку Коши, исходный ряд сходится.

2595.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$$

Для исследования сходимости воспользуемся признаком сравнения. Оценим числитель общего члена $a_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n}$. Так как $(-1)^n$ принимает значения 1 (для четных n) и -1 (для нечетных n), то

$$1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3.$$

Следовательно, для общего члена ряда справедливо неравенство:

$$a_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2^n}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Это сходящийся геометрический ряд, так как его знаменатель $q = \frac{1}{2} < 1$. Поскольку члены исходного ряда меньше членов сходящегося ряда, то, согласно признаку сравнения, исходный ряд сходится.

2596.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\cos^2(n\pi/3)}{2^n}$$

Для исследования сходимости воспользуемся признаком сравнения. Оценим общий член ряда $a_n = \frac{a\cos^2(n\pi/3)}{2^n}$. Так как функция косинуса ограничена, для ее квадрата справедливо неравенство:

$$0 \leq \cos^2(n\pi/3) \leq 1.$$

Тогда для модуля общего члена ряда (при $a \neq 0$) имеем:

$$|a_n| = \left|\frac{a\cos^2(n\pi/3)}{2^n}\right| = \frac{|a|\cos^2(n\pi/3)}{2^n} \leq \frac{|a|}{2^n}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|}{2^n} = |a|\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Этот ряд является сходящимся геометрическим рядом со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$. Поскольку исходный ряд сходится абсолютно (его члены по модулю меньше членов сходящегося ряда), он сходится.

0.3 Интегральный критерий Коши, степенной признак, тейлоровские разложения

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$. Пусть функция $f(x)$ определена на $[1;+\infty)$ и $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема (Интегральный критерий Коши)**.** *Если функция $f(x)$ положительна и убывает, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел*

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)dx. \tag{1}$$

Принято обозначать $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$. Интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ называют **несобственным**. Если упомянутый предел конечен, то несобственный интеграл называют **сходящимся**. В противном случае интеграл **расходится**.

Задача.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Для исследования сходимости данного обобщенного гармонического ряда воспользуемся интегральным признаком Коши. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. При $x \geq 1$ и $\alpha > 0$ эта функция является положительной, непрерывной и монотонно убывающей. Исследуем на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A x^{-\alpha} dx.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\alpha \neq 1$.

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A\to+\infty} (A^{1-\alpha} - 1).$$

Этот предел конечен тогда и только тогда, когда $1-\alpha < 0$, то есть $\alpha > 1$. В этом случае $\lim_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = 0$, и интеграл равен $\frac{1}{\alpha-1}$. Если $\alpha < 1$, то $1-\alpha > 0$, и предел равен $+\infty$.

2. Пусть $\alpha = 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln x\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Согласно интегральному признаку Коши, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Теорема. *Если $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{M}{n^{\alpha}}$, $0 < M < +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.*

Задача.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+20)\sqrt{\ln(n+1)}}$$

Для исследования сходимости применим интегральный признак Коши. Прямое интегрирование функции $f(x) = \frac{x}{(x^2+20)\sqrt{\ln(x+1)}}$ затруднительно. Поэтому сначала воспользуемся предельным признаком сравнения, чтобы упростить общий член ряда.

Обозначим $a_n = \frac{n}{(n^2+20)\sqrt{\ln(n+1)}}$. Для больших n, $n^2+20 \sim n^2$ и $\ln(n+1) \sim \ln n$. Сравним исходный ряд с рядом, общий член которого $b_n = \frac{n}{n^2\sqrt{\ln n}} = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Вычислим предел их отношения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{(n^2+20)\sqrt{\ln(n+1)}}}{\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{\ln n}}{(n^2+20)\sqrt{\ln(n+1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+20}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}} = 1 \cdot \sqrt{1} = 1.$$

Так как предел равен конечному числу, отличному от нуля, то ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Теперь исследуем сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ с помощью интегрального признака. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Она положительна, непрерывна и монотонно убывает при $x \geq 2$. Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

Сделаем замену $u = \ln x$, тогда $du = \frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2} du = 2u^{1/2} + C = 2\sqrt{\ln x} + C.$$

Подставим пределы интегрирования:

$$\lim_{A\to+\infty} 2\sqrt{\ln x}\Big|_2^A = \lim_{A\to+\infty}(2\sqrt{\ln A} - 2\sqrt{\ln 2}) = +\infty.$$

Так как несобственный интеграл расходится, то и ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ расходится. Следовательно, по предельному признаку сравнения, исходный ряд также расходится.

Задача.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся интегральным признаком Коши. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 e^{-x^3}$. При $x \geq 1$ эта функция положительна, непрерывна и монотонно убывает, так как ее производная $f'(x) = xe^{-x^3}(2 - 3x^3) < 0$ при $x \geq 1$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A x^2 e^{-x^3} dx.$$

Применим замену $u = -x^3$. Тогда $du = -3x^2dx$, откуда $x^2dx = -\frac{1}{3}du$. Новые пределы интегрирования: если $x = 1$, то $u = -1$; если $x = A$, то $u = -A^3$.

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-1}^{-A^3} e^u \left(-\frac{1}{3}du\right) = \frac{1}{3} \lim_{A\to+\infty} \int_{-A^3}^{-1} e^u du = \frac{1}{3} \lim_{A\to+\infty} e^u\Big|_{-A^3}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{A\to+\infty} (e^{-1} - e^{-A^3}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{e} - 0\right) = \frac{1}{3e}.$$

Так как несобственный интеграл сходится (равен конечному числу), то, согласно интегральному признаку Коши, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ также сходится.

2619*.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$$

Для исследования сходимости данного ряда в зависимости от параметра p воспользуемся интегральным признаком Коши. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$. При $x \geq 2$ функция является положительной, непрерывной и монотонно убывающей. Все условия для применения признака выполнены.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln^p x}.$$

Применим замену $u = \ln x$, тогда $du = \frac{dx}{x}$. Новые пределы интегрирования: если $x = 2$, то $u = \ln 2$; если $x = A$, то $u = \ln A$.

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{du}{u^p}.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $p \neq 1$.

$$\int_{\ln 2}^{\ln A} u^{-p} du = \left[\frac{u^{1-p}}{1-p}\right]_{\ln 2}^{\ln A} = \frac{(\ln A)^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}}{1-p}.$$

Предел этого выражения при $A \to +\infty$ конечен тогда и только тогда, когда показатель степени у $\ln A$ отрицателен, то есть $1 - p < 0$, что эквивалентно $p > 1$. При $p > 1$, $\lim_{A\to+\infty} (\ln A)^{1-p} = 0$, и интеграл сходится. При $p < 1$, $\lim_{A\to+\infty} (\ln A)^{1-p} = +\infty$, и интеграл расходится.

2. Пусть $p = 1$.

$$\int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{du}{u} = [\ln |u|]_{\ln 2}^{\ln A} = \ln(\ln A) - \ln(\ln 2).$$

При $A \to +\infty$, $\ln(\ln A) \to +\infty$, следовательно, интеграл расходится.

Таким образом, несобственный интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Согласно интегральному признаку Коши, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

11.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n^2+2n+1} \cdot \frac{1 - \cos(1/n)}{\operatorname{ch} \frac{2}{\sqrt{n}} - 1}$$

Для исследования сходимости воспользуемся предельным признаком сравнения, заменив сомножители в общем члене ряда a_n на эквивалентные им бесконечно малые.

При $n \to \infty$:

- Дробь с многочленами эквивалентна отношению старших членов:

$$\frac{2n+3}{3n^2+2n+1} \sim \frac{2n}{3n^2} = \frac{2}{3n}.$$

- Используя эквивалентность $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$:

$$1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{(1/n)^2}{2} = \frac{1}{2n^2}.$$

- Используя эквивалентность $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) - 1 \sim \frac{(2/\sqrt{n})^2}{2} = \frac{4/n}{2} = \frac{2}{n}.$$

Собираем эквивалентное выражение для общего члена a_n:

$$a_n \sim \frac{2}{3n} \cdot \frac{1/(2n^2)}{2/n} = \frac{2}{3n} \cdot \frac{n}{4n^2} = \frac{2n}{12n^3} = \frac{1}{6n^2}.$$

Сравним исходный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ является обобщенным гармоническим рядом (p-рядом) с показателем $p = 2$. Так как $p > 1$, этот ряд сходится. Поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{6}$ (конечен и не равен нулю), то исходный ряд ведет себя так же, как и ряд сравнения. Следовательно, исходный ряд сходится.

12.)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^{2n}$$

Для исследования сходимости воспользуемся предельным признаком сравнения. Обозначим общий член ряда как $a_n = \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^{2n}$. Преобразуем a_n, используя свойство $a^b = e^{b \ln a}$:

$$a_n = \exp\left(2n \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)\right).$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, мы можем использовать эквивалентность $\ln(1-x) \sim -x$ при $x \to 0$. Полагая $x = \frac{\ln n}{n}$, получаем:

$$\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) \sim -\frac{\ln n}{n}.$$

Тогда показатель степени в экспоненте эквивалентен:

$$2n \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) \sim 2n\left(-\frac{\ln n}{n}\right) = -2\ln n = \ln(n^{-2}) = \ln\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Следовательно, общий член ряда a_n эквивалентен:

$$a_n \sim \exp\left(\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n^2}.$$

Сравним исходный ряд с рядом $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ является сходящимся p-рядом ($p = 2 > 1$). Так как $a_n \sim b_n$, то по предельному признаку сравнения исходный ряд также сходится.

2626.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$$

Для исследования сходимости воспользуемся предельным признаком сравнения. Упростим числитель, домножив на сопряженное выражение:

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2} = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = \frac{(n+2)-(n-2)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = \frac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}.$$

При $n \to \infty$, знаменатель эквивалентен:

$$\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2} \sim \sqrt{n}+\sqrt{n} = 2\sqrt{n}.$$

Тогда общий член ряда a_n эквивалентен:

$$a_n = \frac{4}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})n^{\alpha}} \sim \frac{4}{2\sqrt{n}\cdot n^{\alpha}} = \frac{2}{n^{\alpha+1/2}}.$$

Сравним исходный ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$. Этот ряд сходится, если показатель степени больше 1:

$$\alpha + \frac{1}{2} > 1 \implies \alpha > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, исходный ряд сходится при $\alpha > 1/2$ и расходится при $\alpha \leq 1/2$.

2627*.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)$$

Для исследования сходимости преобразуем общий член ряда a_n, чтобы привести корни к одному показателю.

$$\sqrt{n+a} = \sqrt[4]{(n+a)^2} = \sqrt[4]{n^2+2an+a^2}.$$

Тогда общий член ряда принимает вид:

$$a_n = \sqrt[4]{n^2+2an+a^2} - \sqrt[4]{n^2+n+b}.$$

Теперь применим формулу разности $x - y = \frac{x^4-y^4}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$, домножив числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$a_n = \frac{(n^2+2an+a^2)-(n^2+n+b)}{(\sqrt[4]{n^2+2an+a^2})^3 + \cdots + (\sqrt[4]{n^2+n+b})^3}.$$

Упростим числитель:

$$(n^2+2an+a^2)-(n^2+n+b) = (2a-1)n + (a^2-b).$$

Теперь оценим поведение знаменателя при $n \to \infty$. Каждый из четырех членов в знаменателе эквивалентен $(\sqrt[4]{n^2})^3 = (n^{1/2})^3 = n^{3/2}$. Следовательно, знаменатель эквивалентен:

$$n^{3/2} + n^{3/2} + n^{3/2} + n^{3/2} = 4n^{3/2}.$$

Таким образом, общий член ряда a_n эквивалентен:

$$a_n \sim \frac{(2a-1)n + (a^2-b)}{4n^{3/2}}.$$

Теперь рассмотрим два случая.

- **Случай 1: $a \neq 1/2$.**
  В этом случае старший член в числителе — это $(2a-1)n$. Тогда
  $$a_n \sim \frac{(2a-1)n}{4n^{3/2}} = \frac{2a-1}{4n^{1/2}}.$$
  Ряд эквивалентен обобщенному гармоническому ряду $\sum \frac{1}{n^p}$ с показателем $p = 1/2$. Так как $p \leq 1$, ряд расходится.

- **Случай 2: $a = 1/2$.**
  В этом случае коэффициент при n в числителе обращается в ноль: $2a - 1 = 0$. Числитель становится константой: $a^2 - b = (1/2)^2 - b = 1/4 - b$. Тогда
  $$a_n \sim \frac{1/4 - b}{4n^{3/2}}.$$
  Ряд эквивалентен обобщенному гармоническому ряду $\sum \frac{1}{n^p}$ с показателем $p = 3/2$. Так как $p > 1$, ряд сходится для любого значения b. (Если $b = 1/4$, то с некоторого номера члены ряда будут нулевыми, и ряд, очевидно, сходится).

Вывод: Ряд сходится, если $a = 1/2$ (при любом b), и расходится, если $a \neq 1/2$.

2628.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$$
Для исследования сходимости преобразуем аргументы тригонометрических функций.

1. Аргумент котангенса:
$$\frac{n\pi}{4n-2} = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{2}{4n-2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4n-2}.$$
Обозначим $x_n = \frac{\pi}{4n-2}$.

2. Аргумент синуса:
$$\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n+1}.$$
Обозначим $y_n = \frac{\pi}{2n+1}$.

Теперь преобразуем сами функции. Для котангенса используем свойство $\operatorname{ctg} z = 1/\operatorname{tg} z$ и формулу тангенса суммы $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$:
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x_n\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x_n\right)} = \frac{1 - \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}(x_n)}{\operatorname{tg}(\pi/4) + \operatorname{tg}(x_n)} = \frac{1 - \operatorname{tg}(x_n)}{1 + \operatorname{tg}(x_n)}.$$
Для синуса используем формулу приведения:
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y_n\right) = \cos(y_n).$$
При $n \to \infty$, $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$. Используем разложения в ряд Тейлора:
$$\operatorname{tg}(x_n) = x_n + O(x_n^3).$$
$$\cos(y_n) = 1 - \frac{y_n^2}{2} + O(y_n^4).$$

Разложим выражение для котангенса, используя $(1+z)^{-1} \approx 1 - z + z^2$:

$$\frac{1-\mathrm{tg}(x_n)}{1+\mathrm{tg}(x_n)} = (1-\mathrm{tg}(x_n))(1-\mathrm{tg}(x_n)+\mathrm{tg}^2(x_n)-\dots) \approx (1-x_n)(1-x_n) = 1-2x_n+x_n^2.$$

Теперь соберем общий член ряда a_n:

$$a_n = \left(1-2x_n+O(x_n^2)\right) - \left(1-\frac{y_n^2}{2}+O(y_n^4)\right) = -2x_n + \frac{y_n^2}{2} + O(x_n^2).$$

Подставим обратно выражения для x_n и y_n:

$$a_n = -2\left(\frac{\pi}{4n-2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2 + \dots = -\frac{\pi}{2n-1} + \frac{\pi^2}{2(2n+1)^2} + \dots$$

При $n \to \infty$ главный член асимптотики a_n определяется слагаемым с наименьшей степенью n в знаменателе:

$$a_n \sim -\frac{\pi}{2n-1} \sim -\frac{\pi}{2n}.$$

Сравним исходный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{1}{n}$. Ряд $\sum \frac{1}{n}$ является гармоническим и расходится. Поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{\pi}{2}$ (конечен и не равен нулю), то исходный ряд ведет себя так же, как и гармонический ряд. Следовательно, исходный ряд расходится.

2629.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$$

Разложим в ряд Тейлора выражение под корнем:

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Теперь разложим корень из этого выражения:

$$\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \dots} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{1}{2n} + \dots}.$$

Используем разложение $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{4n} + \dots\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right).$$

Подставим это в общий член ряда a_n:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4n^{3/2}} + \dots\right) = \frac{1}{4n^{3/2}} - \dots$$

Главный член выражения a_n равен $\frac{1}{4n^{3/2}}$. Ряд эквивалентен сходящемуся гармоническому ряду $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ (так как $p = 3/2 > 1$), следовательно, исходный ряд сходится.

2630.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$$

Для исследования сходимости воспользуемся предельным признаком сравнения. Для нахождения асимптотики числителя при $n \to \infty$ применим формулу Стирлинга, которая является асимптотическим разложением для факториала.

Формула Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Прологарифмируем это выражение:

$$\ln(n!) \sim \ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) = \ln(\sqrt{2\pi n}) + \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln n + n(\ln n - \ln e) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

При $n \to \infty$ главный член этой асимптотики — это $n\ln n$, так как он растет быстрее всех остальных слагаемых.

$$\ln(n!) \sim n\ln n.$$

Теперь подставим это в общий член ряда a_n:

$$a_n = \frac{\ln(n!)}{n^\alpha} \sim \frac{n\ln n}{n^\alpha} = \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}.$$

Сравним исходный ряд с рядом $\sum b_n$, где $b_n = \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$. Этот ряд сходится, если показатель степени у n в знаменателе строго больше 1, и расходится в противном случае.

Исследуем сходимость ряда $\sum \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$:

- Если $\alpha - 1 > 1$, то есть $\alpha > 2$, ряд сходится. Это можно показать, сравнив его с рядом $\sum \frac{1}{n^p}$ где $1 < p < \alpha - 1$.
- Если $\alpha - 1 \le 1$, то есть $\alpha \le 2$, ряд расходится. Это можно показать, сравнив его с расходящимся рядом $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Поскольку исходный ряд эквивалентен ряду $\sum \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$, он имеет ту же область сходимости.

Вывод: Ряд сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \le 2$.

Задача.

Доказать расходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{n^2+n+1}{3n}}$, используя необходимое условие.

Необходимое условие сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ гласит, что предел его общего члена должен быть равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Если этот предел не равен нулю или не существует, то ряд расходится (этот вывод также называют признаком расходимости).

Проверим выполнение этого условия для нашего ряда. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{n^2+n+1}{3n}}.$$

Найдем предел $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Мы имеем неопределенность вида $[1^\infty]$, так как основание стремится к 1, а показатель — к ∞. Для ее раскрытия воспользуемся тождеством $a^b = e^{b\ln a}$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{n^2+n+1}{3n}\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right).$$

В силу непрерывности показательной функции, можно внести предел в показатель степени:

$$L = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{3n} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right).$$

Найдем предел показателя. Сначала преобразуем аргумент логарифма:

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Используем известную эквивалентность $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$. Так как при $n \to \infty$ выражение $-\frac{1}{n+2} \to 0$, то

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \sim -\frac{1}{n+2}.$$

Теперь вычислим предел показателя, заменяя логарифм на эквивалентное выражение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{3n}\left(-\frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^2+n+1}{3n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^2+n+1}{3n^2+6n}.$$

Предел этого отношения равен отношению коэффициентов при старших степенях (n^2):

$$-\frac{1}{3}.$$

Мы нашли предел показателя. Теперь вернемся к исходному пределу L:

$$L = e^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

Вывод: Предел общего члена ряда не равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \neq 0.$$

Так как необходимое условие сходимости не выполняется, ряд расходится.

0.4 Признак Раабе и Гаусса

Признак Раабе — это более "тонкий"признак сходимости для знакоположительных рядов (рядов с положительными членами). Его применяют в тех случаях, когда более простой признак Даламбера не дает ответа, то есть когда предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ равен 1. Признак Раабе, по сути, анализирует, *насколько быстро* это отношение стремится к единице.

Теорема (Признак Раабе)**.** *Пусть дан числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *где все члены* $a_n > 0$. *Рассмотрим предел:*

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

Тогда:

1. *Если* $R > 1$, *то ряд* ***сходится***.
2. *Если* $R < 1$, *то ряд* ***расходится***.
3. *Если* $R = 1$, *то признак* ***не дает ответа***.

Признак Гаусса предоставляет решающее заключение о сходимости или расходимости знакоположительного ряда в тех критических случаях, где более простые признаки (Даламбера, Раабе) оказываются бессильны. Он основан на представлении отношения $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ в виде асимптотического разложения по степеням $\frac{1}{n}$.

Теорема (Признак Гаусса)**.** *Пусть для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ отношение его соседних членов может быть представлено в виде:*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $\varepsilon > 0$ — константа. Тогда:

1. *Если $\lambda > 1$, то ряд* ***сходится****.*
2. *Если $\lambda < 1$, то ряд* ***расходится****.*
3. *Если $\lambda = 1$, то*
   а) *если $\mu > 1$, то ряд* ***сходится****;*
   б) *если $\mu \leq 1$, то ряд* ***расходится****.*

Задача. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2.$$

Возьмем общий член

$$a_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^2.$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+1)!!/(2n+2)!!}{(2n-1)!!/(2n)!!}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2$$

Предел этого отношения при $n \to \infty$ равен 1 (признак Даламбера не работает). Применим признак Раабе

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)^2 - (2n+1)^2}{(2n+1)^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{4n^2+8n+4-(4n^2+4n+1)}{(2n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{4n+3}{4n^2+4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n}{4n^2+4n+1} = 1$$

Признак Раабе не дает ответа. Применим признак Гаусса. Нам нужно разложить отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^2$$

Разложим по формуле квадрата суммы:

$$= 1 + \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Нам нужно разложение по степеням $1/n$, а не $1/(2n+1)$. Для этого преобразуем дробь:

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n(1+1/(2n))} = \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}$$

Используем разложение $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \ldots$ для $x = \frac{1}{2n}$:

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Теперь подставим это в наше выражение:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + 2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Объединяя члены с $1/n^2$, получаем:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Таким образом, ряд расходится по признаку Гаусса.

2598.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^p$$

Для исследования сходимости данного ряда в зависимости от параметра p воспользуемся признаком Раабе. Сначала необходимо убедиться, что более простой признак Даламбера не дает результата. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p.$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1} = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^p.$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^p}{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+2)!!}\right)^p$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{2+2/n}\right)^p = 1^p = 1.$$

Так как предел равен 1, признак Даламбера не применим. Воспользуемся признаком Раабе и вычислим предел:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Обратное отношение равно:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p.$$

Подставим его в формулу для R:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p - 1\right].$$

Используя известное асимптотическое разложение $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ при $x\to 0$, и полагая $x = \frac{1}{2n+1}$, получаем:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+p\cdot\frac{1}{2n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{p}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{pn}{2n+1}.$$

Вычислив предел, находим:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{p}{2+1/n} = \frac{p}{2}.$$

Согласно признаку Раабе, делаем вывод о сходимости ряда:

1. Если $R>1$, то есть $\frac{p}{2}>1$ или $p>2$, ряд **сходится**.

2. Если $R<1$, то есть $\frac{p}{2}<1$ или $p<2$, ряд **расходится**.

3. Если $R=1$, то есть $p=2$, признак Раабе не дает ответа.

2599.

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots$$

где a,b,d — положительные числа. Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{a(a+d)\cdots(a+(n-1)d)}{b(b+d)\cdots(b+(n-1)d)}.$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1} = \frac{a(a+d)\cdots(a+(n-1)d)(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+(n-1)d)(b+nd)}.$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+nd)}}{\frac{a(a+d)\cdots(a+(n-1)d)}{b(b+d)\cdots(b+(n-1)d)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a+nd}{b+nd}.$$

Разделив числитель и знаменатель на n, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a/n+d}{b/n+d} = \frac{d}{d} = 1.$$

Так как предел равен 1, признак Даламбера не дает ответа. Воспользуемся признаком Раабе и вычислим предел:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Обратное отношение равно:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+nd}{a+nd}.$$

Подставим его в формулу для R:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+nd}{a+nd} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+nd-(a+nd)}{a+nd}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b-a}{a+nd}\right).$$

Вычислив предел, находим:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n(b-a)}{a+nd} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{a/n+d} = \frac{b-a}{d}.$$

Согласно признаку Раабе, делаем вывод о сходимости ряда:

1. Если $R > 1$, то есть $\frac{b-a}{d} > 1$ или $b - a > d$, ряд **сходится**.
2. Если $R < 1$, то есть $\frac{b-a}{d} < 1$ или $b - a < d$, ряд **расходится**.
3. Если $R = 1$, то есть $b - a = d$, признак Раабе не дает ответа (в этом случае для исследования требуется признак Гаусса, который покажет, что ряд расходится).

2601.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$$

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}.$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{(n+1)!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})(2+\sqrt{n+1})}.$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(2+\sqrt{1})\cdots(2+\sqrt{n+1})}}{\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\cdots(2+\sqrt{n})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{n+1}}.$$

Упрощая выражение, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(n+1)!}{n!}} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2+\sqrt{n+1}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\sqrt{n}$, находим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+1/n}}{2/\sqrt{n}+\sqrt{1+1/n}} = \frac{\sqrt{1}}{0+\sqrt{1}} = 1.$$

Так как предел равен 1, признак Даламбера не применим. Воспользуемся признаком Раабе и вычислим предел:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Обратное отношение равно:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

Подставим его в формулу для R:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}}.$$

Вычислив предел, находим:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n}\sqrt{1+1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{1+1/n}} = \infty.$$

Поскольку $R = \infty > 1$, исходный ряд **сходится**.

2602.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}, \quad q > 0$$

Для исследования сходимости данного ряда в зависимости от параметра p воспользуемся признаком Даламбера. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}.$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!(n+1)^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)(q+n+1)}.$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(n+1)^{-p}}{q\cdots(q+n+1)} \cdot \frac{q\cdots(q+n)}{n!n^{-p}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(n+1)^{-p}}{n^{-p}} \cdot \frac{1}{q+n+1} = \lim_{n\to\infty} (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^p \frac{1}{q+n+1}.$$

Сгруппируем члены:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{q+n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^p.$$

Предел первого множителя $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{q+n+1} = 1$. Предел второго множителя $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1^p = 1$. Таким образом, итоговый предел равен $1 \cdot 1 = 1$. Так как предел равен 1, признак Даламбера не дает ответа. Воспользуемся признаком Раабе и вычислим предел:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Обратное отношение равно:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{q+n+1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p.$$

Подставим его в формулу для R:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{q+n+1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right].$$

Используя асимптотические разложения при больших n:

$$\frac{q+n+1}{n+1} = 1 + \frac{q}{n+1} = 1 + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Тогда произведение равно:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{p+q}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Подставляя это в предел для R:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1 + \frac{p+q}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{p+q}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = p+q.$$

Согласно признаку Раабе, делаем вывод о сходимости ряда:

1. Если $R > 1$, то есть $p+q > 1$, ряд **сходится**.
2. Если $R < 1$, то есть $p+q < 1$, ряд **расходится**.
3. Если $R = 1$, то есть $p+q = 1$, признак Раабе не дает ответа (в этом случае требуется признак Гаусса, который покажет, что ряд расходится).

Задача 5.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\sqrt{n}}$$

Примечание: в задаче опечатка, для корректного ряда первый член должен быть $(2n-1)!!/((2n)!!\sqrt{n})$, а не $(2n+1)!!/((2n+2)!!\sqrt{n})$. Исследуем исправленный ряд.

Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера. Обозначим общий член ряда как

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\sqrt{n}}.$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!\sqrt{n+1}}.$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!\sqrt{n+1}} \cdot \frac{(2n)!!\sqrt{n}}{(2n-1)!!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Так как предел равен 1, признак Даламбера не дает ответа. Воспользуемся признаком Раабе и вычислим предел:

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Обратное отношение равно:
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$
Подставим его в формулу для R:
$$R = \lim_{n\to\infty} n \left[\frac{2n+2}{2n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \right].$$
Используя асимптотические разложения при больших n:
$$\frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
Перемножим эти разложения:
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2}\right) + \ldots = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{8n^2} + \ldots$$
$$= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
Подставляя это в предел для R:
$$R = \lim_{n\to\infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \right] = \lim_{n\to\infty} n \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = 1.$$
Согласно признаку Раабе, делаем вывод о сходимости ряда:

1. Если $R > 1$, ряд **сходится**.

2. Если $R < 1$, ряд **расходится**.

3. Если $R = 1$, признак Раабе **не дает ответа**.

Поскольку $R = 1$, признак Раабе не позволяет сделать вывод. Однако, полученное нами асимптотическое разложение $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{8n^2} + \ldots$ имеет вид $1 + \frac{h}{n} + \ldots$ с коэффициентом $h = 1$. Согласно признаку Гаусса, при $h \leq 1$ ряд расходится. Следовательно, исходный ряд **расходится**.

Задача.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{(2n+3)!!} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
Для исследования сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера. Обозначим общий член ряда как
$$a_n = \frac{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{(2n+3)!!} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
Тогда следующий член ряда будет:
$$a_{n+1} = \frac{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)(3n+5)}{(2n+5)!!} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Вычислим предел отношения следующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5\cdot\ldots\cdot(3n+5)}{(2n+5)!!}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{(2n+3)!!}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{2n+5}\cdot\frac{2}{3}.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(3n+5)}{3(2n+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+10}{6n+15}=\frac{6}{6}=1.$$

Так как предел равен 1, признак Даламбера не дает ответа. Воспользуемся признаком Раабе и вычислим предел:

$$R=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right).$$

Обратное отношение равно:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3(2n+5)}{2(3n+5)}=\frac{6n+15}{6n+10}.$$

Подставим его в формулу для R:

$$R=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{6n+15}{6n+10}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{6n+15-(6n+10)}{6n+10}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{6n+10}.$$

Вычислив предел, находим:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{6+10/n}=\frac{5}{6}.$$

Согласно признаку Раабе, делаем вывод о сходимости ряда:

1. Если $R>1$, ряд **сходится**.
2. Если $R<1$, ряд **расходится**.
3. Если $R=1$, признак не дает ответа.

Поскольку $R=\frac{5}{6}<1$, исходный ряд **расходится**. Конечно. Это классический пример, где необходим признак Гаусса, основанный на асимптотическом разложении с помощью формулы Стирлинга или, как вы просили, разложений Тейлора.

2600.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$$

Для исследования сходимости данного ряда в зависимости от параметра p сначала найдем отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, так как признак Даламбера в пределе даст 1. Обозначим общий член ряда как

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+p}}.$$

Тогда следующий член ряда будет:

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}.$$

Составим отношение, удобное для признака Гаусса:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!e^n}{n^{n+p}}\cdot\frac{(n+1)^{n+p+1}}{(n+1)!e^{n+1}}=\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{e^n}{e^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{(n+1)^{n+p}(n+1)}{n^{n+p}} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}.$$

Для того чтобы представить это выражение в виде $1+\frac{h}{n}+\ldots$, воспользуемся разложением в ряд Тейлора. Удобнее всего сначала прологарифмировать выражение:

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}\right)$$

$$= -1 + (n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Теперь используем разложение Тейлора для логарифма: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$. Полагая $x = \frac{1}{n}$, получаем:

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = -1 + (n+p)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= -1 + \left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \ldots\right) + p\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \ldots\right)\right)$$

$$= -1 + \left(1 - \frac{1}{2n} + \ldots\right) + \left(\frac{p}{n} - \ldots\right) = \left(\frac{p}{n} - \frac{1}{2n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{p-1/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Мы получили разложение для логарифма. Теперь, чтобы найти разложение для самого отношения, воспользуемся разложением экспоненты $e^z = 1 + z + O(z^2)$. Полагая $z = \frac{p-1/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \exp\left(\frac{p-1/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{p-1/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Мы представили отношение в форме, необходимой для признака Гаусса:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{где } h = p - \frac{1}{2}.$$

Согласно признаку Гаусса, делаем вывод о сходимости ряда:

1. Если $h > 1$, то есть $p - \frac{1}{2} > 1 \implies p > \frac{3}{2}$, ряд **сходится**.
2. Если $h \le 1$, то есть $p - \frac{1}{2} \le 1 \implies p \le \frac{3}{2}$, ряд **расходится**.

0.5 Функциональные пространства, норма и расстояние

0.5.0.1 Напоминание: Норма и расстояние в $\mathbb{R}^n$

Прежде чем говорить о функциях, вспомним более простой объект — векторы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Вектор в $\mathbb{R}^n$ — это упорядоченный набор из n действительных чисел: $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Норма вектора (часто называемая евклидовой нормой) — это, по сути, его длина. Обозначается $\|\vec{v}\|$ и вычисляется по теореме Пифагора:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Например, для вектора $\vec{v} = (3, 4)$ в $\mathbb{R}^2$, его норма (длина) равна $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Расстояние между двумя векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — это длина вектора их разности $\vec{u} - \vec{v}$.

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Это обычное расстояние по прямой между двумя точками в n-мерном пространстве.

0.5.0.2 Функциональное пространство E и норма-супремум

Теперь перейдем от векторов к функциям. Функциональное пространство — это множество функций, обладающее структурой векторного пространства (функции можно складывать и умножать на числа).

Возьмем в качестве E пространство всех **ограниченных** функций, определенных на некотором множестве X. То есть $f \in E$, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in X$.

В этом пространстве мы можем ввести норму, аналогичную длине вектора, но для функции. Одна из самых важных норм — это **супремум-норма** (или равномерная норма), обозначаемая $\|f\|_C$ или $\|f\|_\infty$.

Определение: Нормой функции $f \in E$ называется

$$\|f\|_E = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

где sup (супремум) — это точная верхняя грань. Интуитивно, это "максимальная высота"или "максимальное отклонение"графика функции от оси $x = 0$.

0.5.0.3 Взаимосвязь с пространством C[a,b]

Одним из важнейших примеров такого пространства является пространство $C[a, b]$ — множество всех **непрерывных** функций, определенных на замкнутом отрезке $[a, b]$.

Каждая непрерывная на отрезке функция является ограниченной (согласно теореме Вейерштрасса), поэтому $C[a, b]$ является подпространством E, если в качестве X взять отрезок $[a, b]$.

Более того, для непрерывной функции на отрезке супремум всегда достигается, поэтому его можно заменить на максимум:

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

0.5.0.4 Вычисление расстояния между функциями

Аналогично векторным пространствам, расстояние между двумя функциями $f(x)$ и $g(x)$ в пространстве E определяется как норма их разности:

$$d(f, g) = \|f - g\|_E = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Интуитивное понимание: Это расстояние представляет собой **максимальное вертикальное расхождение** между графиками функций $f(x)$ и $g(x)$ на всей области определения. Представьте, что вы измеряете расстояние по вертикали между двумя кривыми в каждой точке x и находите самое большое из этих расстояний.

Пример: $f(x) = x^2$ и $g(x) = x$ на $[0, 1]$.
$d(f, g) = \max_{x\in[0,1]} |x^2 - x|$. Функция $h(x) = x - x^2$ достигает максимума в точке $x = 1/2$, где $h(1/2) = 1/2 - 1/4 = 1/4$. Таким образом, расстояние между этими функциями в $C[0, 1]$ равно $1/4$.

0.5.1 Сходимость функциональных последовательностей

Пусть у нас есть последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где каждая функция $f_n(x)$ принадлежит пространству E. Мы хотим понять, что значит "последовательность функций сходится к некоторой функции $f(x)$".

Определение: Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится **поточечно** к функции $f(x)$ на множестве X, если для **каждой фиксированной точки** $x_0 \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится к числу $f(x_0)$.

$$\forall x_0 \in X : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Функция $f(x)$, значения которой являются пределами в каждой точке, называется **предельной функцией**.

Ключевая мысль: Сходимость в каждой точке рассматривается **независимо** от других точек. В одной точке сходимость может быть очень быстрой, а в другой — очень медленной.

Пример: $f_n(x) = x^n$ на $[0, 1]$.

- Если взять $x_0 = 1/2$, то последовательность $(1/2)^n \to 0$.
- Если взять $x_0 = 0.99$, то последовательность $(0.99)^n \to 0$ (хоть и медленнее).
- Если взять $x_0 = 1$, то последовательность $1^n = 1 \to 1$.

Предельная функция $f(x)$ является разрывной:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Это классический пример, где предел последовательности непрерывных функций не является непрерывной функцией.

Определение: Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится **равномерно** к функции $f(x)$ на множестве X, если расстояние между f_n и f, измеренное в супремум-норме, стремится к нулю.

Критерий равномерной сходимости:

$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_E = 0$$

Раскрывая норму, это означает:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

Сравнение и различие:

- **Поточечная:** В каждой *отдельной* точке x_0 график f_n со временем попадает в ε-окрестность точки $f(x_0)$. Но для разных точек это может случиться при разных n.

- **Равномерная:** Весь график f_n *целиком* и *одновременно* для всех x попадает в ε-коридор вокруг $f(x)$. Скорость сходимости не зависит от точки x, она "равномерна"по всему множеству.

Вернемся к примеру $f_n(x) = x^n$ на $[0, 1]$. Эта сходимость не является равномерной. Почему? Нарисуйте ε-коридор вокруг предельной функции $y = 0$ (для $x \in [0, 1)$), например, с $\varepsilon = 0.1$. Как бы велик ни был номер n, график $y = x^n$ всегда будет "выскакивать"из этого коридора при x, близких к 1. Например, для $x = \sqrt[n]{0.5}$, $f_n(x) = 0.5 > 0.1$. То есть, максимальное отклонение $\|f_n - f\|$ не стремится к нулю.

0.5.2 Исследование последовательностей на равномерную сходимость

1. $f_n(x) = \frac{n}{nx+4}, E = [1; 5]$

   (a) **Точечный предел:**

   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{nx+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x + 4/n} = \frac{1}{x}.$$

   (b) **Равномерная сходимость:**

   $$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n}{nx+4} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{nx - (nx+4)}{x(nx+4)} \right| = \frac{4}{x(nx+4)}$$

   Для $x \in [1; 5]$ функция $r_n(x)$ убывает, поэтому супремум достигается в точке $x = 1$.

   $$\sup_{x\in[1;5]} r_n(x) = r_n(1) = \frac{4}{n+4}$$

   $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1;5]} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+4} = 0$$

   Вывод: Сходится равномерно.

2. $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}, E = [0; 1]$

   (a) **Точечный предел:** Для $x = 0$, $f_n(0) = 0$. Для $x \in (0; 1]$,

   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} n^2 x e^{-nx} = 0$$

   Предельная функция $f(x) = 0$.

(b) **Равномерная сходимость:** $r_n(x) = |n^2xe^{-nx}|$. Найдем максимум $r_n(x)$ на $[0,1]$.

$$r_n'(x) = n^2e^{-nx}(1-nx) = 0 \Rightarrow x = 1/n$$

Точка $x = 1/n \in [0,1]$ для $n \geq 1$.

$$\sup_{x\in[0,1]} r_n(x) = r_n(1/n) = n^2(1/n)e^{-1} = n/e$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e} = \infty \neq 0$$

Вывод: Сходится неравномерно.

3. $f_n(x) = \sqrt{16x^2 + \frac{1}{\ln n}}, E = \mathbb{R}$

(a) **Точечный предел:**

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{16x^2 + \frac{1}{\ln n}} = \sqrt{16x^2} = 4|x|$$

(b) **Равномерная сходимость:**

$$r_n(x) = \left|\sqrt{16x^2 + \frac{1}{\ln n}} - 4|x|\right| = \frac{(\sqrt{16x^2 + 1/\ln n} - 4|x|)(\sqrt{16x^2 + 1/\ln n} + 4|x|)}{\sqrt{16x^2 + 1/\ln n} + 4|x|} =$$

$$= \frac{1/\ln n}{\sqrt{16x^2 + 1/\ln n} + 4|x|}$$

Супремум достигается при $x = 0$.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} r_n(x) = \frac{1/\ln n}{\sqrt{1/\ln n}} = \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n}} = 0$$

Вывод: Сходится равномерно.

4. $f_n(x) = x^{n+2} - x^n, E = [0;1]$

(a) **Точечный предел:**

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (x^{n+2} - x^n) = \lim_{n\to\infty} x^n(x^2-1)$$

Для $x \in [0;1)$, $f(x) = 0$. Для $x = 1$, $f(1) = 0$. Итак, $f(x) = 0$.

(b) **Равномерная сходимость:**

$$r_n(x) = |x^n(x^2-1)| = x^n(1-x^2)$$

на $[0,1]$.

$$r_n'(x) = nx^{n-1}(1-x^2) - 2x^{n+1} = x^{n-1}(n - nx^2 - 2x^2) = 0$$

$$x^2 = n/(n+2) \Rightarrow x_n = \sqrt{n/(n+2)}$$

$$\sup r_n(x) = r_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n/2} \left(1 - \frac{n}{n+2}\right) = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n/2} \frac{2}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^{n/2} \frac{2}{n+2} = e^{-1} \cdot 0 = 0$$

Вывод: Сходится равномерно.