Вариант 6

1. Построить квадратурную формулу $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx C\sum_{i=1}^{3} f(x_i)$, точную для всех полиномов третьей степени.
2. Имеется три приближенных значения интеграла: $Q_1 = 1.134$; $Q_2 = 1.150$; $Q_3 = 1.151$, найденные по некоторой составной квадратурной формуле с $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.1$, $h_3 = 0.05$ соответственно. Какую алгебраическую степень точности может иметь примененная квадратурная формула? Привести примеры таких формул.
3. Исследовать устойчивость метода $y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j + \frac{1}{2}h,\quad y_j + \frac{h}{2}f(x_j, y_j)\right)$ решения задачи Коши: $u'(x) = -3u(x)$, $\quad u(0) = 2$.
4. Записать алгоритм явного метода трапеций для задачи $u'''(x) = x^{u(x)}\ln\left(\sqrt{x}u''(x)\right) + 8u(x), u(5) = 8, u'(5) = 5, u''(5) = 3$.

Вар. 6

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right)$

$x^0: \int_{-1}^{1} dx = 2 = A+A+A = 3A \Rightarrow A = \cancel{\frac{3}{2}}\ \frac{2}{3}$

$x^1: \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = \frac{2}{3}(x_1+x_2+x_3) \Rightarrow x_1+x_2+x_3=0 \quad (1)$

$x^2: \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \quad (2)$

$x^3: \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = \frac{2}{3}(x_1^3+x_2^3+x_3^3) \Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=0 \quad (3)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = -1}$$

$x_3 = -x_1 - x_2$

$x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 1$

$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1^3 + x_2^3 - x_1^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - x_2^3 = 0$

$x_1x_2(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \vee x_1 = -x_2$

Пусть $x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, пусть $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Итого $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{2}}{3}\left(f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

2) $Q_1 = 1.134$ $\quad h_1 = 0.2$
$Q_2 = 1.150$ $\quad h_2 = 0.1$ $\quad$ АСТ - ?
$Q_3 = 1.151$ $\quad h_3 = 0.05$

Из правила Рунге

$$\begin{cases} I \approx Q_1 + Ch_1^m \\ I \approx Q_2 + Ch_2^m \\ I \approx Q_3 + Ch_3^m \end{cases} \Rightarrow \frac{Q_2 - Q_1}{h_1^m - h_2^m} = \frac{Q_3 - Q_2}{h_2^m - h_3^m}$$

$Q_2 - Q_1 = 0.016 = 16 \cdot 10^{-3}$

$Q_3 - Q_2 = 10^{-3}$ $\quad \Rightarrow 16 = \frac{h_1^m - h_2^m}{h_2^m - h_3^m} = \frac{1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^m}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^m - \left(\frac{h_3}{h_1}\right)^m} =$

$= \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{\frac{1}{2^m} - \frac{1}{4^m}} = \frac{4^m - 2^m}{2^m - 1}.$

Пусть $n = 1 \Rightarrow \frac{4-2}{2-1} = 2 \neq 16$

$n = 2 \Rightarrow \frac{16-4}{4-1} = \frac{12}{3} = 4 \neq 16$

$n = 3 \Rightarrow \frac{64-8}{8-1} = \frac{56}{7} = 8 \neq 16$

$n = 4 \Rightarrow \frac{\cancel{128}\,256 - 16}{16-1} = \frac{256}{15} = 16$ ✓ $\Rightarrow m = АСТ = 4$

(3) Аналогично вар. 3.

(4) $u''' = x^u \ln(\sqrt{x}\, u'') + 8u$

$u(5) = 8$

$u'(5) = 5$

$u''(5) = 3$

Заменяем:

$[u_1 = u]$
$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = x^{u_1} \ln(\sqrt{x}\, u_2) + 8u_1 \\ u_1(5) = 8 \\ u_2(5) = 5 \\ u_3(5) = 3 \end{cases}$$

ЯМТ:
$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f_j + f_{j+1}) \\ y_{j+1} = y_j + h f_j \end{cases} \Rightarrow$$

Начинаем с нижнего уравнения подбора:

$$\begin{cases} y_{j+1}^1 = y_j^1 + h y_j^2 \\ y_{j+1}^2 = y_j^2 + h y_j^3 \\ y_{j+1}^3 = y_j^3 + h \cdot \left(x_j^{y_j^1} \ln(\sqrt{x_j} \cdot y_j^2) + 8 y_j^1 \right) \\ y_{j+1}^1 = y_j^1 + \frac{h}{2}(y_j^2 + y_{j+1}^2) \\ y_{j+1}^2 = y_j^2 + \frac{h}{2}(y_j^3 + y_{j+1}^3) \\ y_{j+1}^3 = y_j^3 + \frac{h}{2}\left(x_j^{y_j^1} \ln(\sqrt{x_j}\, y_j^2) + 8 y_j^1 + x_{j+1}^{y_{j+1}^1} \ln(\sqrt{x_{j+1}}\, y_{j+1}^2) + 8 y_{j+1}^1 \right) \end{cases}$$

где $y_j = \begin{pmatrix} y_j^1 \\ y_j^2 \\ y_j^3 \end{pmatrix}$ – приближенное решение в узлах,

$y_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = y(x_0) = y(5)$