СтЛНУ. Метод Коши. Метод Лагранжа. Метод Эйлера.

Сейчас мы переходим к рассмотрению другого типа стационарных линейных уравнений, а именно, к неоднородным СтЛУ. Рассмотрим уравнение

$$D^n x + a_{n-1}D^{n-1}x + \ldots + a_1 Dx + a_0 D^0 x = f(t), \quad t \in \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}. \tag{1}$$

Обозначим через $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ линейный оператор дифференцирования.

• *Уравнение $L_n x = f(t)$ будем называть* ***линейным неоднородным стационарным уравнением n-ого порядка (СтЛНУ-n)****, а функцию $f(t)$ —* ***неоднородностью****.*

Общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму *общего решения соответствующего ему однородного* уравнения и *частного решения неоднородного* уравнения. То есть

$$x_{\text{он}}(t) = x_{\text{оо}}(t) + x_{\text{чн}}(t).$$

Находить общее решение однородного уравнения мы научились в прошлом уроке. Сейчас необходимо научиться находить частные решения неоднородного уравнения. И для нахождения частных решений существуют три метода: метод Коши, метод Лагранжа и метод Эйлера.

Метод Коши.

Первый метод, который мы рассмотрим, называется **методом Коши**.

• *Пусть $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ — ФСР уравнения $L_n x = 0$, нормированная при $t_0 = 0$. Тогда функция $\varphi_{n-1}(t)$ называется* ***функцией Коши*** *линейного оператора L_n.*

То есть, исходя из определения, функция Коши — последняя функция ФСР нормированной в точке $t_0 = 0$. ФСР нормированную в точке мы уже умеем искать из прошлого урока.

Иначе можно сформулировать это определение как

• *Функция, являющаяся решением задачи Коши*

$$\begin{cases} L_n x = 0, \\ x|_{t=0} = 0, \\ Dx|_{t=0} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D^{n-1}x|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

называется ***функцией Коши****.*

Теорема (Метод Коши). *Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $\mathbb{I}$ и пусть $\varphi_{n-1}(t)$ — функция Коши оператора L_n. Тогда функция*

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{2}$$

является решением уравнения $L_n x = f(t)$ $\forall t_0 \in \mathbb{I}$.

Теперь сам алгоритм нахождения частного решения уравнений по методу Коши:

- находим корни и строим общее решение $x_{\text{оо}}(t)$ соответствующего для СтЛНУ однородного уравнения;
- находим все производные до $(n-1)$-го порядка от $x_{\text{оо}}(t)$;
- составляем систему уравнений из найденных производных $D^i x(t)$ в точке $t = 0$, где $D^i x(t)|_{t=0} = 0 \quad \forall i = \overline{0, n-2}$ и $D^{n-1} x(t)|_{t=0} = 1$;
- находим из составленной системы уравнений константы C_i и подставляем их в $x_{\text{оо}}(t)$, полученная функция и будет функцией Коши ($\varphi_{n-1}(t)$);
- вычисляем интеграл (2) и получаем $x_{\text{чн}}(t)$.

Для построения общего решения всего уравнения, как говорилось ранее, применяем формулу $x_{\text{он}}(t) = x_{\text{оо}}(t) + x_{\text{чн}}(t)$.

Пример 1. Найти общее решение неоднородного уравнения по методу Коши

$$D^2 x + 2Dx + x = e^{2t}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Решение. Запишем для нашего исходного уравнения соответствующее однородное

$$D^2 x + 2Dx + x = 0,$$

у которого характеристическое уравнение имеет корень $\lambda_1 = -1$, $k_1 = 2$. Составим общее решение однородного уравнения (теперь будем индексировать его как $x_{\text{оо}}(t)$ дабы различать общее решение однородного и неоднородного уравнений):

$$x_{\text{оо}}(t) = C_1 t e^{-t} + C_2 e^{-t}.$$

Для нахождения частного решения нам необходимо знать функцию Коши, следовательно, приступим к её нахождению (алгоритм похож на нахождение ФСР из прошлого урока, однако теперь нужно найти только $\varphi_{n-1}(t)$). Порядок уравнения $n = 2$, следовательно, нам необходимо найти только первую производную Dx (т.к. в нашем случае $n - 1 = 1$). Тогда

$$Dx(t) = C_1 e^{-t} - C_1 t e^{-t} - C_2 e^{-t}.$$

Теперь найдем значения полученных функций $D^i x(t)$ в точке $t = 0$:

$$x(t)|_{t=0} = C_1 \cdot 0 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 = C_2;$$

$$Dx(t)|_{t=0} = C_1 \cdot e^0 - C_1 \cdot 0 \cdot e^0 - C_2 \cdot e^0 = C_1 - C_2.$$

Так как мы ищем функцию Коши, то нам нужно составить и решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x(t)|_{t=0} = 0, \\ Dx(t)|_{t=0} = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 = 1. \end{cases}$$

Для решения воспользуемся методом Гаусса. Составим матрицу, в которой слева у нас будут коэффициенты при постоянных C_i, а справа столбец, полученный из правой части построенной выше системы уравнений:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Подставим полученные значения из правой части матрицы вместо коэффициентов C_i в $x_{\text{оо}}(t)$ для нахождения функции Коши:

$$\varphi_1(t) = te^{-t}.$$

По формуле (2) мы можем построить частное решение нашего СтЛНУ.

Нижний предел t_0 будем считать равным 0, но можно взять произвольное значение **из промежутка** $\mathbb{I}$ (то есть такое t, в котором функция $f(t)$ будет непрерывна).

Функцию $f(\tau) = e^{2\tau}$ возьмем из правой части исходного уравнения. Тогда по формуле (2)

$$x_{\text{чн}}(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}e^{2\tau}d\tau.$$

Значение этого интеграла мы можем вычислить [интегрирование по частям], и оно равно

$$x_{\text{чн}}(t) = \frac{e^{2t}}{9} - \frac{te^{-t}}{3} - \frac{e^{-t}}{9}.$$

Теперь остается лишь найти общее решение всего уравнения по формуле $x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$:

$$x_{\text{он}}(t) = (C_1te^{-t} + C_2e^{-t}) + \Big(\frac{e^{2t}}{9} - \frac{te^{-t}}{3} - \frac{e^{-t}}{9}\Big).$$

Ответ: $x_{\text{он}}(t) = e^{-t}(C_1t + C_2) + \dfrac{e^{2t}}{9} - \dfrac{te^{-t}}{3} - \dfrac{e^{-t}}{9}.$

Замечание: *Проверить правильность найденного частного решения можно путем подстановки.*

Замечание: *Если интеграл $x_{\text{чн}}(t)$ неберущийся, то в ответ записывается сумма общего решения и самого интеграла.*

То есть, если бы у нас получился, к примеру,

$$x_{\text{чн}}(t) = \int\limits_1^t \frac{e^\tau}{\tau}d\tau,$$

то общее решение неоднородного уравнения имело бы вид

$$x_{\text{он}}(t) = (C_1te^{-t} + C_2e^{-t}) + \int\limits_1^t \frac{e^\tau}{\tau}d\tau.$$

Пример 2. Найти общее решение неоднородного уравнения по методу Коши

$$D^3x - 3D^2x + 3Dx - x = e^t, \quad \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Решение. Составим соответствующее однородное уравнение для исходного:

$$D^3x - 3D^2x + 3Dx - x = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$x_{\text{оо}}(t) = C_1 t^2 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^t.$$

Займемся поиском частного решения, а для этого нужна функция Коши. Найдем производные 1-го и 2-го порядков:

$$Dx = C_1 t^2 e^t + 2C_1 t e^t + C_2 t e^t + C_2 e^t + C_3 e^t,$$

$$D^2 x = C_1 t^2 e^t + 4C_1 t e^t + 2C_1 e^t + C_2 t e^t + 2C_2 e^t + C_3 e^t.$$

Составим систему уравнений, чтобы найти функцию Коши

$$\begin{cases} x|_{t=0} = C_3 = 0, \\ Dx|_{t=0} = C_2 + C_3 = 0, \\ D^2 x|_{t=0} = 2C_1 + 2C_2 + C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}, \\ C_2 = 0, \\ C_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\varphi_{n-1}(t) = \frac{t^2 e^t}{2}.$$

Подставим полученную функцию в уравнение (2)

$$x_{\text{чн}}(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^2 \cdot e^{t-\tau}}{2} \cdot e^{\tau} d\tau = e^t \int\limits_0^t \Big(\frac{t^2}{2} - t\tau + \frac{\tau^2}{2}\Big) d\tau =$$

$$= \frac{t^2 e^t}{2} \int\limits_0^t d\tau - t e^t \int\limits_0^t \tau d\tau + \frac{e^t}{2} \int\limits_0^t \tau^2 d\tau = \frac{t^3 e^t}{2} - \frac{t^3 e^t}{2} + \frac{t^3 e^t}{6} = \frac{t^3 e^t}{6}.$$

Таким образом, сложим полученные решения общего однородного и частное неоднородного и получим

$$x_{\text{он}}(t) = C_1 t^2 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^t + \frac{t^3 e^t}{6}.$$

Ответ: $x_{\text{он}}(t) = C_1 t^2 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^t + \dfrac{t^3 e^t}{6}.$

Иногда нужно не только найти общее решение неоднородного уравнения, но и решить задачу Коши. Для этого применяется следующее следствие.

Следствие (из метода Коши)**.** *Если* $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)$ *— ФСР* $L_n x = 0$*, нормированная при* $t = 0$*, то задача Коши* $L_n x = f(t)$*,* $D^i x|_{t=t_0} = \xi_i$*,* $\forall i = \overline{0, n-1}$ *имеет решение*

$$x(t) = \xi_0 \varphi_0(t - t_0) + \ldots + \xi_{n-1} \varphi_{n-1}(t - t_0) + \int\limits_{t_0}^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Следствие. *Уравнение* (2) *является решением нулевой задачи Коши при* $t = t_0$*.*

Стоит также учесть, что если стоит вопрос о решении задачи Коши для СтЛНУ, то для поиска решения используется только метод Коши.

Рассмотрим пример 1, но уже с задачей Коши.

Пример 3. Найти решение задачи Коши $x|_{t=7} = 2,\ Dx|_{t=7} = 3$ для уравнения

$$D^2x + 2Dx + x = e^{2t}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Решение. Из примера 1 возьмём общее решение однородного уравнения

$$x_{\text{оо}}(t) = C_1te^{-t} + C_2e^{-t}$$

и найдем ФСР нормированную в точке $t_0 = 7$ (как находить ФСР нормированную в точке мы рассматривали в прошлом уроке). Для начала построим ФСР нормированную в точке $t = 0$: если

$$Dx(t) = C_1e^{-t} - C_1te^{-t} - C_2e^{-t},$$

то

$$x|_{t=0} = C_2;$$
$$Dx|_{t=0} = C_1 - C_2.$$

Составим системы уравнений

$$\begin{cases} x|_{t=0} = C_1 = 1, \\ Dx|_{t=0} = C_1 - C_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x|_{t=0} = C_1 = 0, \\ Dx|_{t=0} = C_1 - C_2 = 1; \end{cases}$$

и решим их методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Теперь определим сами функции, образующие ФСР нормированную в точке $t = 0$ (последняя функция является функцией Коши):

$$\varphi_0(t) = te^{-t} + e^{-t};$$
$$\varphi_1(t) = te^{-t}.$$

Сделаем сдвиг функций в точку $t_0 = 7$:

$$\varphi_0(t-7) = (t-7)e^{7-t} + e^{7-t};$$
$$\varphi_1(t-7) = (t-7)e^{7-t}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения (приняв в (2) $t_0 = 7$ по условию задачи Коши):

$$x_{\text{чн}}(t) = \int\limits_7^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}e^{2\tau}d\tau = \frac{e^{2t}}{9} + \frac{20e^{21-t}}{9} - \frac{te^{21-t}}{3}.$$

Теперь по следствию из метода Коши построим решение задачи Коши. Для этого возьмем формулу

$$x(t) = \xi_0\varphi_0(t-t_0) + \ldots + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t-t_0) + \int\limits_{t_0}^t \varphi_{n-1}(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

где вместо ξ_i подставим значения соответствующих D^ix из задачи Коши, вместо $\varphi_i(t-t_0)$ подставим полученную нами ФСР нормированную в точке $t_0 = 7$. Тогда получим

$$x(t) = (2\cdot(t-7)e^{7-t} + 2\cdot e^{7-t} + 3\cdot(t-7)e^{7-t}) + \Big(\frac{e^{2t}}{9} + \frac{20e^{21-t}}{9} - \frac{te^{21-t}}{3}\Big) =$$
$$= (5t-33)e^{7-t} + \Big(\frac{e^{2t}}{9} + \frac{20e^{21-t}}{9} - \frac{te^{21-t}}{3}\Big).$$

Ответ: $x(t) = (5t-33)e^{7-t} + \dfrac{e^{2t}}{9} + \dfrac{20e^{21-t}}{9} - \dfrac{te^{21-t}}{3}.$

Метод Лагранжа.

Следующий метод нахождения частного решения неоднорогодного СтЛУ называется **методом Лагранжа**, или **методом вариации произвольных постоянных**.

Теорема (Метод Лагранжа). *Пусть* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *— ФСР* $L_n x = 0$. *Тогда функция*

$$x_{чн}(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + u_n(t)\varphi_n(t)$$

является решением уравнения $L_n x = f(t)$, $t \in \mathbb{I}$, *если функции* $u_i(t)$ *удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} Du_1\varphi_1 + \ldots + Du_n\varphi_n = 0, \\ Du_1 D\varphi_1 + \ldots + Du_n D\varphi_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Du_1 D^{n-2}\varphi_1 + \ldots + Du_n D^{n-2}\varphi_n = 0, \\ Du_1 D^{n-1}\varphi_1 + \ldots + Du_n D^{n-1}\varphi_n = f(t); \end{cases} \tag{3}$$

Соответственно, из формулировки теоремы мы можем сделать определенные выводы: для нахождения частного решения уравнения мы должны

- найти корни и построить общее решение $x_{оо}(t)$ соответствующего для СтЛНУ однородного уравнения;
- найти ФСР соответствующего СтЛОУ;
- составить функцию $x_{чн}$;
- составить линейную систему уравнений (3) из соответствующих производных;
- найти функции $u_i(t)$ из системы уравнений;
- подставить $u_i(t)$ в функцию $x_{чн}$;

Теперь пришло время рассмотрения задач.

Пример 4. Применить метод Лагранжа нахождения общего решения уравнения

$$D^2x - 4Dx + 4 = 2te^{2t}, \quad \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Решение. По аналогии с методом Коши найдем общее решение соответствующего однорогодно уравнения $D^2x - 4Dx + 4 = 0$: $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 2$. Тогда

$$x_{оо}(t) = C_1 te^{2t} + C_2 e^{2t}.$$

Далее находим ФСР (значения при постоянных C_i, то есть $\varphi_1(t) = te^{2t}$, $\varphi_2(t) = e^{2t}$) и составляем функцию, являющуюся частным решением уравнения:

$$x_{чн}(t) = u_1(t) \cdot te^{2t} + u_2(t) \cdot e^{2t}.$$

Теперь на основе этой функции составляем систему n уравнений (3), учитывая, что в последнем равенстве справа стоит функция $f(t) = 2te^{2t}$:

$$\begin{cases} u_1'(t) \cdot te^{2t} + u_2'(t) \cdot e^{2t} = 0, \\ u_1'(t) \cdot e^{2t} + 2u_1'(t) \cdot te^{2t} + 2u_2'(t) \cdot e^{2t} = 2te^{2t}; \end{cases}$$

Домножим первое равенство на -2 и прибавим ко второму. Тогда получим

$$\begin{cases} u_1'(t)\cdot te^{2t} + u_2'(t)\cdot e^{2t} = 0, \\ u_1'(t)\cdot e^{2t} = 2te^{2t}; \end{cases}$$

Теперь мы можем найти функцию $u_1(t)$, проинтегрировав уравнение $u_1'(t) = 2t$:

$$u_1(t) = \int 2tdt = 2\int tdt = t^2.$$

Возвращаясь к нашей системе, находим $u_2(t)$:

$$\begin{cases} u_2'(t) = -u_1'(t)t, \\ u_1'(t) = 2t; \end{cases}$$

$$u_2(t) = \int (-2)t^2 dt = -\frac{2t^3}{3}.$$

Подставим полученные функции $u_i(t)$ в $x_{\text{чн}}(t)$. Тогда частное решение уравнения имеет вид

$$x_{\text{чн}}(t) = 2t^3e^{2t} - \frac{2t^3}{3}e^{2t} = \frac{4t^3}{3}e^{2t}.$$

Последним действием находим общее решение неоднородного уравнения уравнения

$$x_{\text{он}}(t) = (C_1te^{2t} + C_2e^{2t}) + \Big(\frac{4t^3}{3}e^{2t}\Big).$$

Ответ: $x_{\text{он}}(t) = C_1te^{2t} + C_2e^{2t} + \dfrac{4t^3}{3}e^{2t}.$

Замечание: *Вообще говоря, основываясь на определении неопределенного интеграла, значения функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ были найдены неправильно. К нашим найденным функциям необходимо добавить константы C_1 и C_2 в функции соответственно. Тогда при подстановке $u_i(t)$ в $x_{\text{чн}}(t)$ мы сразу получаем общее решение. То есть, подводя итог, в случае, когда интеграл берущийся, для правильного решения необходимо добавлять к $u_i(t)$ константы C_i, и решение уравнения имеет вид*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1}(u_i(t) + C_i)\varphi_i(t).$$

В противном случае, если интеграл неберущийся, записываем в привычном виде $x_{он} = x_{оо} + x_{чн}$. Однако для берущегося интеграла также можно использовать привычную формулу для $x_{он}$.

Пример 5. Применить метод Лагранжа нахождения общего решения уравнения

$$D^2x + x = \frac{1}{\cos t}, \quad \mathbb{I} = \Big(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big).$$

Решение. Корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения следующие: $\lambda_1 = i$, $k_1 = 1$; $\lambda_2 = -i$, $k_2 = 1$. Составим общее решение однородного:

$$x_{\text{оо}}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t.$$

Тогда ФСР $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = \sin t$ и

$$x_{\text{чн}}(t) = u_1(t) \cdot \cos t + u_2(t) \cdot \sin t.$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1'(t) \cdot \cos t + u_2'(t) \cdot \sin t = 0, \\ -u_1'(t) \cdot \sin t + u_2'(t) \cdot \cos t = \dfrac{1}{\cos t}; \end{cases}$$

Выводим $u_2(t)$ из верхнего уравнения и подставляем в нижнее:

$$\begin{cases} u_2'(t) = -u_1'(t) \cdot \dfrac{\cos t}{\sin t}, \\ u_1'(t) \cdot \sin t + u_1'(t) \cdot \dfrac{\cos^2 t}{\sin t} = -\dfrac{1}{\cos t}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2'(t) = -u_1'(t) \cdot \dfrac{\cos t}{\sin t}, \\ u_1'(t) = -\dfrac{\sin t}{\cos t}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2'(t) = 1, \\ u_1'(t) = -\dfrac{\sin t}{\cos t}; \end{cases}$$

Проинтегрируем нижнее уравнение и получим $u_2(t) = t$. Теперь проинтегрируем нижнее уравнение:

$$u_1(t) = \int \frac{d(\cos t)}{\cos t} = \ln|\cos t| = \ln(\cos t).$$

Подставим все полученные функции и получим общее решение СтЛУ

$$x_{\text{он}}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \ln(\cos t) \cdot \cos t + t \sin t.$$

Ответ: $x_{\text{он}}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \ln(\cos t) \cdot \cos t + t \sin t$.

Метод Эйлера.

Последним методом в этом уроке будет **метод Эйлера**. Методом Эйлера решаются СтЛНУ со специальной правой частью.

Пусть $\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ — характеристический многочлен уравнения $L_n x = 0$.

Теорема. *Уравнение*

$$L_n x = P(t)e^{\gamma t},$$

где $x(t)$ — неизвестная действительная функция, $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, $\deg P(t) = m$, $\gamma \in \mathbb{R}$, имеет частное решение вида

$$x_1(t) = t^k Q(t) e^{\gamma t},$$

где $Q(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q(t) \leqslant m$, k — кратность корня γ характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$.

Из теоремы сделаем следующий вывод: в СтЛНУ, которое мы будем решать данным методом, справа должно быть обязательно произведение многочлена, зависящего от t на $e^{\gamma t}$.

- *Число γ будем называть* ***контрольным числом*** *правой части.*

Пример 6. Применить метод Эйлера для нахождения общего решения уравнения:

$$D^2x - x = 2e^t - t^2.$$

Решение. Как всегда построим общее решение для левой части: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

$$x_{\text{оо}}(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению правой части равенства. Немного перепишем её, чтобы получить специальную правую часть:

$$P_1(t)e^{\gamma_1 t} + P_2(t)e^{\gamma_2 t} = 2e^t - t^2e^{0t}.$$

В итоге мы получили сумму двух многочленов. Обозначим их $P_1(t) = 2$ и $P_2(t) = -t^2$ с контрольными числами $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 0$ соответственно.

Вспомним, что частное решение должно иметь вид $x_1(t) = t^{k_1}Q_1(t)e^{\gamma_1 t} + t^{k_2}Q_2(t)e^{\gamma_2 t}$, где k — кратность корня γ (если он является корнем). Значит проверим, являются ли контрольные числа γ_i корнями СтЛОУ λ_i. Поскольку $\gamma_1 = \lambda_1$, $k_1 = 1$, то контрольное число γ_1 будет также иметь кратность 1. Значит первое слагаемое частного решения будет умножаться на t^1. Второе же слагаемое на $t^0 = 1$, потому что γ_2 не является корнем (значит кратность контрольного числа будет 0). Таким образом частное решение имеет вид

$$x_{\text{чн}}(t) = tQ_1(t)e^t + Q_2(t)e^{0t}$$

Теперь нужно определить вид многочленов $Q_i(t)$. Для этого рассмотрим многочлены $P_i(t)$: $\deg P_1(t) = 0$, значит $\deg Q_1(t) = 0$, тогда можем заменить $Q_1(t) = C_1$, где C_1 — какой-то постоянный коэффициент; $\deg P_2(t) = 2$, значит $\deg Q_1(t) \leqslant 2$, тогда применима замена $Q_2(t) = A_2t^2 + B_2t + C_2$, где $A_2,\ B_2,\ C_2$ — какие-то постоянные коэффициенты.

Теперь наше частное решение будет иметь вид

$$x_{\text{чн}}(t) = tC_1e^t + (A_1t^2 + B_2t + C_2).$$

Далее нужно найти $D^2x - x$ (левую часть исходного уравнения) и приравнять ее к правой части исходного уравнения. Для этого посчитаем первую и вторую производную от x:

$$Dx = tC_1e^t + C_1e^t + 2A_2t + B_2;$$

$$D^2x = tC_1e^t + 2C_1e^t + 2A_2.$$

Теперь подставляем всё необходимое в исходное уравнение и получаем

$$tC_1e^t + 2C_1e^t + 2A_2 - tC_1e^t - A_2t^2 - B_2t - C_2 = 2e^t - t^2.$$

Сократим и получим

$$2C_1e^t + 2A_2 - A_2t^2 - B_2t - C_2 = 2e^t - t^2.$$

Данное равенство лучше всего решать методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} e^t : 2C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 1; \\ t^2 : -A_2 = -1 \Rightarrow A_2 = 1; \\ t\ \ : -B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = 0 \\ t^0 : 2A_2 - C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 2. \end{cases}$$

Полученные коэффициенты подставим в $x_{\text{чн}}(t)$ и получим

$$x_{\text{чн}}(t) = te^t + (t^2 + 2).$$

Отсюда

$$x_{\text{он}} = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t + t^2 + 2.$$

Ответ: $x_{\text{он}} = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t + t^2 + 2.$

Теперь на основе решения задачи можем составить определенный алгоритм нахождения частного решения СтЛНУ методом Эйлера:

- находим корни и строим общее решение $x_{\text{оо}}(t)$ соответствующего для СтЛНУ однородного уравнения;

- сравниваем контрольное число (или числа, если их несколько) с корнями характеристического уравнения СтЛОУ;

- находим кратность контрольного значения (если значение совпало с корнем, то кратность значения равна кратности корня, иначе 0);

- считаем степени многочленов $P_i(t)$ и на основе этой степени составляем $Q_i(t)$ (к примеру, если $\deg P_i = 0$, то $Q_i = A_i$; если $\deg P_i = 1$, то $Q_i = A_it + B_i$; если $\deg P_i = 2$, то $Q_i = A_it^2 + B_it + C_i$);

- составляем $x_{\text{чн}}(t)$ в виде $t^kQ(t)e^{\gamma t}$;

- находим находим все производные до n порядка уравнения и подставляем левую часть исходного уравнения (если производные были найдены правильно, то $e^{\gamma t}$ сократится);

- методом неопределенных коэффциентов находим коэффициенты A_i, B_i, C_i и т.д, затем подставляем их в $Q_i(t)$ для $x_{\text{чн}}(t)$;

Пример 7. Применить метод Эйлера для нахождения общего решения уравнения:

$$D^2x + Dx = 4t^2e^t.$$

Решение. Находим корни соответствующего однородного уравнения: $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$, $k_2 = 1$. Составляем общее решение

$$x_{\text{оо}}(t) = C_1 + C_2e^{-t}.$$

Контрольное число правой части $\gamma = 1$. Такого корня нет, следовательно его кратность $k = 0$. Рассмотрим многочлен $P(t) = 4t^2$: $\deg P(t) = 2$, следовательно, $Q(t) = At^2 + Bt + C$. Тогда

$$x_{\text{чн}}(t) = (At^2 + Bt + C)e^t.$$

Найдем первую и вторую производные от этой функции:

$$Dx = (2At + B + At^2 + Bt + C)e^t;$$

$$D^2x = (2A + 2At + B + 2At + B + At^2 + Bt + C)e^t.$$

Подставим их в исходное уравнение и получим

$$(2At^2 + (6A + 2B)t + (2A + 3B + 2C))e^t = 4t^2e^t.$$

$$\begin{cases} t^2 : A = 2; \\ t \ : 6A + 2B = 0 \Rightarrow B = -6; \\ t^0 : 2A + 3B + 2C = 0 \Rightarrow C = 7. \end{cases}$$

Подставим полученные коэффициенты в частное решение и получим

$$x_{\text{чн}}(t) = (2t^2 - 6t + 7)e^t.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x_{\text{он}}(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + (2t^2 - 6t + 7)e^t.$$

Ответ: $x_{\text{он}}(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + (2t^2 - 6t + 7)e^t$.

Также разрешимыми по методу Эйлера являются уравнения с правой частью выраженной по формуле Эйлера. Для нахождения решений таких уравнений будем применять следующее следствие.

Следствие. *Уравнение*

$$L_n x = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)),$$

где $P_1(t), P_2(t) \in \mathbb{R}[t]$*, причем* $\max\{\deg P_1(t), \deg P_2(t)\} = m$*, и* $(\alpha + \beta i)$ *— корень многочлена* $\Delta(\lambda)$ *кратности* k *имеет решение вида*

$$x_1(t) = t^k e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)),$$

где $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathbb{R}[t], \deg Q_1(t) \leqslant m$*,* $\deg Q_2(t) \leqslant m$*,* k *— кратность корня* $(\alpha + \beta i)$ *характеристического многочлена* $\Delta(\lambda)$*.*

Замечание. *Число* $\alpha + \beta i$ *из следствия будем называть аналогично* ***контрольным числом****.*

Пример 8. Применить метод Эйлера для нахождения общего решения уравнения:

$$D^2 x + x = t \sin t.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, $k_{1,2} = 1$ и общее решение вида

$$x_{\text{оо}}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

В правой части равенства

$$e^{\alpha t}(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)) = e^{0t}(0 \cdot \cos t + t \sin t).$$

Число $\alpha + \beta i = 0 + 1 \cdot i$ является корнем характеристического уравнения, значит кратность контрольного числа $k = k_1 = 1$. Рассмотрим многочлены $P_i(t)$: $\max\{\deg P_1(t), \deg P_2(t)\} = \deg\{0, t\} = 1$. Следовательно, $\deg Q_1(t) = \deg Q_2(t) \leqslant 1$. Примем степени обоих многочленов за 1 и построим частное решение:

$$x_{\text{чн}}(t) = te^{0t}((A_1 t + B_1)\cos t + (A_2 t + B_2)\sin t).$$

Переходим к самой страшной части решения: подсчету производных 1-го и 2-го порядков:

$$Dx = (B_2 - t(A_1 t + B_1 - 2A_2))\sin t + (t(2A_1 + A_2 t + B_2) + B_1)\cos t;$$

$$D^2x = (-4A_1t - 2B_1 - A_2t^2 + 2A_2 - 2B_2t)\sin t + (-A_1t^2 + 2A_1 - B_1t + 4A_2t + 2B_2);$$

Подставим полученные функции в исходное уравнение и получим:

$$(-4A_1t - 2B_1 + 2B_2)\sin t + (2A_1 + 4A_2t + 2B_2)\cos t = t\sin t.$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A_1 = -\dfrac{1}{4}, \\ B_1 = 0, \\ A_2 = 0, \\ B_2 = \dfrac{1}{4;} \end{cases}$$

Подставляем полученные коэффициенты в частное решение и получаем

$$x_{\text{чн}}(t) = \frac{1}{4}(-t^2\cos t + \sin t).$$

И находим общее решение уравнения как обычно

$$x_{\text{он}}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{1}{4}(-t^2\cos t + \sin t).$$

Ответ: $x_{\text{он}}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \dfrac{1}{4}(-t^2\cos t + \sin t)$.

Пример 9. Применить метод Эйлера для нахождения общего решения уравнения:

$$x'' - x - e^t - 4\sin^3 t = 0.$$

Решение. Приведем уравнение к виду (1), то есть оставим слева всё, что связано с $x(t)$, а остальное перенесем в правую часть:

$$x'' - x = e^t + 4\sin^3 t.$$

Найдем общее решение для соответствующего однородного уравнения. Так как корни характеристического многочлена $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, то общее решение будет

$$x_{\text{oo}}(t) = C_1e^{-t} + C_2e^t.$$

Для поиска частного решения преобразуем правую уравнения. Для применения метода Эйлера нам необходимо, чтобы в правой части синус был в первой степени. Воспользуемся формулой

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Тогда получим уравнение

$$x'' - x = e^t + 3\sin t - \sin(3t).$$

Запишем частное решение в общем виде. Для этого разобьем частное решение на 3 части, каждая из которых соответствует одному из слагаемых справа, то есть

$$x'' - x = \underbrace{e^t}_{x_{\text{чн}_1}} + \underbrace{3\sin t}_{x_{\text{чн}_2}} - \underbrace{\sin(3t)}_{x_{\text{чн}_3}}.$$

Сначала рассмотрим слагаемое e^t. Число $\gamma_1 = 1$ является корнем характеристического многочлена, а deg многочлена при e^t равна 1. Следовательно,

$$x_{\text{чн}_1} = tA_1e^t.$$

Рассмотрим $3\sin t$. Контрольное число $\gamma_2 = 0 + i$, и оно не является корнем характеристического уравнения. deg многочлена при этом слагаемом также равна 0, то есть в общем виде

$$x_{\text{чн}_2} = A_2 \sin t + A_3 \cos t.$$

Рассотрим $-\sin(3t)$. Контрольное число $\gamma_3 = 0 + 3i$, также не является корнем характеристического уравнения, а deg многочлена при этом слагаемом также равна 1. Тогда в общем виде

$$x_{\text{чн}_3} = A_4 \sin(3t) + A_5 \cos(3t).$$

Сложим получившиеся части, тогда

$$x_{\text{чн}} = tA_1 e^t + A_2 \sin t + A_3 \cos t + A_4 \sin(3t) + A_5 \cos(3t).$$

Найдем вторую производную от $x_{\text{чн}}$:

$$x' = tA_1 e^t + A_1 e^t + A_2 \cos t - A_3 \sin t + 3A_4 \cos(3t) - 3A_5 \sin(3t).$$

$$x'' = tA_1 e^t + 2A_1 e^t - A_2 \sin t - A_3 \cos t - 9A_4 \sin(3t) - 9A_5 \cos(3t).$$

Подставим это в уравнение $x'' - x = e^t + 3\sin t - \sin(3t)$ и получим

$$\begin{multline*} tA_1 e^t + 2A_1 e^t - A_2 \sin t - A_3 \cos t - 9A_4 \sin(3t) - 9A_5 \cos(3t) - \\ - tA_1 e^t - A_2 \sin t - A_3 \cos t - A_4 \sin(3t) - A_5 \cos(3t) = e^t + 3\sin t - \sin(3t). \end{multline*}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{2}, \\ A_2 = -\dfrac{3}{2}, \\ A_3 = A_5 = 0, \\ A_4 = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Подставим эти коэффициенты в $x_{\text{чн}}$ и получим

$$x_{\text{чн}} = \frac{te^t}{2} - \frac{3}{2}\sin t + \frac{\sin(3t)}{10}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x_{\text{он}} = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + \frac{te^t}{2} - \frac{3}{2}\sin t + \frac{\sin(3t)}{10}.$$

Ответ: $x_{\text{он}} = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + \dfrac{te^t}{2} - \dfrac{3}{2}\sin t + \dfrac{\sin(3t)}{10}$.

Подводя итог, хотелось бы отметить, что чаще всего на практике студенты применяют методы Лагранжа и Эйлера, так как в методе Коши мы вынуждены заниматься подсчётом не всегда лёгкого интеграла. Однако вы можете использовать тот метод, который вам нравится больше.