МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра компьютерных технологий и систем

Лабораторная работа №3

Вариант 4

Выполнил:

Бовт Тимофей Анатольевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:

Каркоцкий Александр Геннадьевич

Минск, 2024 г.

Постановка задачи.

Найти электрический и магнитный потенциал, электрическую и магнитную напряжённость внутри шара (внутри сферического слоя) при заданных диэлектрической проницаемости $\varepsilon = -1$, условиях на электрический и магнитный потенциал (u и v соответственно) на его поверхности (на границах сферического слоя), и постоянной магнитной проницаемости, если распределение зарядов изменяется по закону

$$\rho(r, \varphi, \theta) = 11r^6 \cos^4\theta \sin^4\theta(\cos 4\varphi - \sin^2\varphi).$$

1. $u|_{r=3} = 4\cos^2\theta \sin^4\theta \sin^4\varphi.$

2. $\begin{cases} v|_{r=1} = 7\sin\theta\cos^3\theta\cos\varphi, \\ v|_{r=4} = 6\sin^3\theta(\cos\varphi - \sin 3\varphi). \end{cases}$

Решение задачи.

Начнем с задачи для электрического потенциала. Считая

$$\Delta u = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon},$$

можем сформулировать задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 11r^6 \cos^4\theta \sin^4\theta(\cos 4\varphi - \sin^2\varphi), \\ u|_{r=3} = 4\cos^2\theta \sin^4\theta \sin^4\varphi. \end{cases} \tag{1}$$

Представим решение задачи в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = w(r, \theta, \varphi) + v(r, \theta, \varphi),$$

где

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \\ w|_{r=3} = 4\cos^2\theta \sin^4\theta \sin^4\varphi. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \Delta v = 11r^6 \cos^4\theta \sin^4\theta(\cos 4\varphi - \sin^2\varphi), \\ v|_{r=3} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

Начнем с отыскания решения задачи (2). Можно показать, что решение задачи (2) представимо в виде

$$w(r, \theta, \varphi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) \cdot r^n \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{4}$$

здесь мы учитываем неограниченность $r^{-(n+1)}$ при $r \to 0$. Подставим в выражение (4) граничное условие задачи (2):

$$w(r, \theta, \varphi)|_{r=3} = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) \cdot 3^n \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) = 4\cos^2\theta \sin^4\theta \sin^4\varphi.$$

В силу того, что

$$\sin^4\varphi = \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2\pi + \cos^2 2\varphi}{4} = \frac{1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}}{4} =$$
$$= \frac{3}{8}\cos 0\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi,$$

получаем

$$w(r,\theta,\varphi)|_{r=3} = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\cdot 3^n \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) =$$
$$= \frac{3}{2}\cos^2\theta\sin^4\theta\cos 0\varphi - 2\cos^2\theta\sin^4\theta\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin^4\theta\cos 4\varphi.$$

Таким образом, приравнивая соответствующие коэффициенты $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$, мы имеем

$$A_{nm} = \begin{cases} A_{n0},\ m=0, \\ A_{n2},\ m=2, \\ A_{n4},\ m=4, \\ 0,\ \text{иначе}. \end{cases} \qquad B_{nm} = 0,\ \forall m.$$

Отсюда следует, что

$$w(r,\theta,\varphi)|_{r=3} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(A_{n0}\cdot P_n^{(0)}(\cos\theta) + A_{n2}\cdot P_n^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi + A_{n4}\cdot P_n^{(4)}(\cos\theta)\cos 4\varphi\Big)\cdot 3^n =$$
$$= \frac{3}{2}\cos^2\theta\sin^4\theta - 2\cos^2\theta\sin^4\theta\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin^4\theta\cos 4\varphi.$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при $\cos m\varphi$ и получим 3 разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n0}\cdot P_n^{(0)}(\cos\theta))\cdot 3^n = \frac{3}{2}\cos^2\theta\sin^4\theta, \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n2}\cdot P_n^{(2)}(\cos\theta))\cdot 3^n = -2\cos^2\theta\sin^4\theta, \tag{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n4}\cdot P_n^{(4)}(\cos\theta))\cdot 3^n = \frac{1}{2}\cos^2\theta\sin^4\theta. \tag{7}$$

Теперь будем вычислять коэффициенты разложений A_{n0}, A_{n2}, A_{n4}. Начнем с разложения (5). Определим степень правой части при замене $x=\cos\theta$:

$$\deg\left(\frac{3}{2}x^2(1-x^2)^2\right) = 6.$$

Теперь оценим степень многочленов Лежандра $P_n^{(0)}(x)$, она должна не превосходить степень правой части:

$$\deg P_n^{(0)}(x) = \deg\left(\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right) = 2n-n = n \leqslant 6.$$

Таким образом, нам нужно вычислить все многочлены Лежандра вида $P_n^{(0)}(x)$, $n=\overline{0,6}$. С помощью Wolfram Mathematica мы можем получить следующий результат

$$P_0^{(0)}(x) = 1,$$
$$P_1^{(0)}(x) = x,$$
$$P_2^{(0)}(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$
$$P_3^{(0)}(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4^{(0)}(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$
$$P_5^{(0)}(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$
$$P_6^{(0)}(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

Подставим это в разложение (5) и получим

$$A_{00} + 3A_{10}x + 3^2A_{20} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + 3^3A_{30} \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) + 3^4A_{40} \cdot \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) +$$
$$+ 3^5A_{50} \cdot \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) + 3^6A_{60} \cdot \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) = \frac{3}{2}x^2(1 - x^2)^2.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x:

$$x^6 : 3^6A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 231 = \frac{3}{2} \Rightarrow A_{60} = \frac{8}{56133},$$
$$x^5 : 3^5A_{50} \cdot \frac{1}{8} \cdot 63 = 0 \Rightarrow A_{50} = 0,$$
$$x^4 : 3^4A_{40} \cdot \frac{1}{8} \cdot 35 - 3^6A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 315 = -3 \Rightarrow A_{40} = -\frac{4}{1485},$$
$$x^3 : 3^3A_{30}\frac{1}{2} \cdot 5 - 3^5 \cdot A_{50} \cdot \frac{1}{8} \cdot 70 = 0 \Rightarrow A_{30} = 0,$$
$$x^2 : 3^2A_{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - 3^4A_{40} \cdot \frac{1}{8} \cdot 30 + 3^6A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 105 = \frac{3}{2} \Rightarrow A_{20} = 0,$$
$$x : 3A_{10} - 3^3A_{30} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 3^5A_{50} \cdot 18 \cdot 15 = 0 \Rightarrow A_{10} = 0,$$
$$x^0 : A_{00} - 3^2A_{20} \cdot \frac{1}{2} + 3^4A_{40} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 - 3^6A_{60} \cdot \frac{1}{16} \cdot 5 = 0 \Rightarrow A_{00} = \frac{4}{35}.$$

Мы вычислили вручную все коэффициенты разложения (5).

Рассмотрим разложение (6). Степень правой части все так же равна 6. Оценим степень левой части

$$\deg P_n^{(2)}(x) = \deg\left(\frac{(1 - x^2)}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2 - 1)^n\right) = 2 + 2n - (n + 2) = n \leqslant 6.$$

С помощью Wolfram Mathematica вычислим все многочлены вида $P_n^{(2)}(x)$:

$$P_2^{(2)}(x) = 3(1 - x^2),$$
$$P_3^{(2)}(x) = 15x(1 - x^2),$$
$$P_4^{(2)}(x) = \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2),$$
$$P_5^{(2)}(x) = \frac{105}{2}(3x^3 - x)(1 - x^2),$$
$$P_6^{(2)}(x) = \frac{105}{8}(33x^4 - 18x^2 + 1)(1 - x^2).$$

Подставим эти многочлены в разложение (6) и получим

$$3^2A_{22} \cdot 3(1 - x^2) + 3^3A_{32} \cdot 15x(1 - x^2) + 3^4A_{42} \cdot \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2) +$$
$$+ 3^5A_{52} \cdot \frac{105}{2}(3x^3 - x)(1 - x^2) + 3^6A_{62} \cdot \frac{105}{8}(33x^4 - 18x^2 + 1)(1 - x^2) = -2x^2(1 - x^2)^2$$

Можно сократить на $(1-x^2)$. Тогда получим

$$3^2A_{22}\cdot 3+3^3A_{32}\cdot 15x+3^4A_{42}\cdot\frac{15}{2}(7x^2-1)+\\ +3^5A_{52}\cdot\frac{105}{2}(3x^3-x)+3^6A_{62}\cdot\frac{105}{8}(33x^4-18x^2+1)=-2x^2(1-x^2).$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x и получим

$$\begin{aligned}
&x^4: 3^6A_{62}\cdot\frac{105}{8}\cdot 33=2\Rightarrow A_{62}=\frac{16}{2525985},\\
&x^3: 3^5A_{52}\cdot\frac{105}{2}\cdot 3=0\Rightarrow A_{52}=0,\\
&x^2: 3^4A_{42}\cdot\frac{15}{2}\cdot 7-3^6A_{62}\cdot\frac{105}{8}\cdot 18=-2\Rightarrow A_{42}=-\frac{4}{18711},\\
&x: 3^3A_{32}\cdot 15-3^5A_{52}\cdot\frac{105}{2}=0\Rightarrow A_{32}=0,\\
&x^0: 3^2A_{22}\cdot 3-3^4A_{42}\cdot\frac{15}{2}+3^6A_{62}\cdot\frac{105}{8}=0\Rightarrow A_{22}=-\frac{4}{567},\\
&A_{02}=A_{12}=0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим выражение (7). Степень правой части все так же равна 6. Оценим степень левой части

$$\deg P_n^{(4)}(x)=\deg\left(\frac{(1-x^2)^2}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^{n+4}}{dx^{n+4}}(x^2-1)^n\right)=4+2n-(n+4)=n\leqslant 6.$$

С помощью Wolfram Mathematica вычислим все многочлены вида $P_n^{(4)}(x)$:

$$\begin{aligned}
&P_4^{(4)}(x)=105(1-x^2)^2,\\
&P_5^{(4)}(x)=945x(1-x^2)^2,\\
&P_6^{(4)}(x)=\frac{945}{2}(11x^2-1)(1-x^2)^2.
\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в разложение (7) и получим

$$3^4A_{44}\cdot 105(1-x^2)^2+3^5A_{54}\cdot 945x(1-x^2)^2+3^6A_{64}\cdot\frac{945}{2}(11x^2-1)(1-x^2)^2=\frac{1}{2}x^2(1-x^2)^2.$$

Можем сократить все на $(1-x^2)^2$, тогда

$$3^4A_{44}\cdot 105+3^5A_{54}\cdot 945x+3^6A_{64}\cdot\frac{945}{2}(11x^2-1)=\frac{1}{2}x^2.$$

$$\begin{aligned}
&x^2: 3^6A_{64}\cdot\frac{945}{2}\cdot 11=\frac{1}{2}\Rightarrow A_{64}=\frac{1}{7577955},\\
&x: 3^5A_{54}\cdot 945=0\Rightarrow A_{54}=0,\\
&x^0: 3^4A_{44}\cdot 105-3^6A_{64}\cdot\frac{945}{2}=0\Rightarrow A_{44}=\frac{1}{187110},\\
&A_{04}=A_{14}=A_{24}=A_{34}=0.
\end{aligned}$$

Таким образом, подставляя все найденные коэффициенты в выражение (4), получим решение задачи (2)

$$w(r,\theta,\varphi)=\left[\frac{8}{56133}r^6P_6^{(0)}(\cos\theta)-\frac{4}{1485}r^4P_4^{(0)}(\cos\theta)+\frac{4}{35}P_0^{(0)}(\cos\theta)\right]+$$
$$+\left[\frac{16}{2525985}r^6P_6^{(2)}(\cos\theta)-\frac{4}{18711}r^4P_4^{(2)}(\cos\theta)-\frac{4}{567}r^2P_2^{(2)}(\cos\theta)\right]\cos 2\varphi+$$
$$+\left[\frac{1}{7577955}r^6P_6^{(4)}(\cos\theta)+\frac{1}{187110}r^4P_4^{(4)}(\cos\theta)\right]\cos 4\varphi. \quad (8)$$

Теперь будем искать решение задачи (3). Сперва нам нужно преобразовать правую часть дифференциального уравнения к более удобному виду. Мы можем записать правую часть как

$$11r^6\cos^4\theta\sin^4\theta(\cos 4\varphi-\sin^2\varphi)=11r^6\cos^4\theta\sin^4\theta(\cos 4\varphi-\frac{1-\cos 2\varphi}{2})=$$
$$=r^6\cos 4\varphi\sum_{n=0}^{\infty}A_{n4}P_n^{(4)}(\cos\theta)+r^6\cos 2\varphi\sum_{n=0}^{\infty}A_{n2}P_n^{(2)}(\cos\theta)+r^6\sum_{n=0}^{\infty}A_{n0}P_n^{(0)}(\cos\theta).$$

Тогда, приравнивая соответствующие коэффициенты, получим 3 разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_{n0}P_n^{(0)}(\cos\theta)=-\frac{11}{2}\cos^4\theta\sin^4\theta. \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_{n2}P_n^{(2)}(\cos\theta)=\frac{11}{2}\cos^4\theta\sin^4\theta, \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_{n4}P_n^{(4)}(\cos\theta)=11\cos^4\theta\sin^4\theta, \quad (11)$$

Далее отыщем все коэффициенты разложений. Рассмотрим разложение (9). Степень правой части при замене $x=\cos\theta$ будет равна

$$\deg\left(11x^4(1-x^2)^2\right)=8.$$

Ранее мы уже проводили оценку подобной левой части:

$$\deg P_n^{(0)}(x)=n\leqslant 8.$$

Таким образом, нам нужно вычислить все многочлены Лежандра вида $P_n^{(0)}(x)$, $n=\overline{0,8}$. С помощью Wolfram Mathematica мы можем получить следующий результат

$$P_0^{(0)}(x)=1,$$
$$P_1^{(0)}(x)=x,$$
$$P_2^{(0)}(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$
$$P_3^{(0)}(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$
$$P_4^{(0)}(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

$$
\begin{aligned}
P_5^{(0)}(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),\\
P_6^{(0)}(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),\\
P_7^{(0)}(x) &= \frac{1}{16}x(429x^6 - 693x^4 + 315x^2 - 35),\\
P_8^{(0)}(x) &= \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35).
\end{aligned}
$$

Подставим эти выражения в разложение (9) и получим

$$
\begin{gathered}
A_{00} + A_{10}x + A_{20}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1) + A_{30}\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x) + A_{40}\cdot\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)+\\
+ A_{50}\cdot\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) + A_{60}\cdot\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)+\\
+ A_{70}\cdot\frac{1}{16}x(429x^6-693x^4+315x^2-35)+\\
+ A_{80}\cdot\frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35) = -\frac{11}{2}x^4(1-x^2)^2.
\end{gathered}
$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x и получим

$$
\begin{aligned}
&x^8: A_{80}\cdot\frac{1}{128}\cdot 6435 = -\frac{11}{2} \Rightarrow A_{80} = -\frac{64}{585},\\
&x^7: A_{70} = 0,\\
&x^6: A_{60}\cdot\frac{1}{16}\cdot 231 - A_{80}\cdot\frac{1}{128}\cdot 12012 = 11 \Rightarrow A_{60} = \frac{16}{315},\\
&x^5: A_{50} = 0,\\
&x^4: A_{40}\cdot\frac{1}{8}\cdot 35 - A_{60}\cdot\frac{1}{16}\cdot 315 + A_{80}\cdot\frac{1}{128}\cdot 6930 = -\frac{11}{2} \Rightarrow A_{40} = \frac{148}{455},\\
&x^3: A_{30} = 0,\\
&x^2: A_{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 - A_{40}\cdot\frac{1}{8}\cdot 30 + A_{60}\cdot\frac{1}{16}\cdot 105 - A_{80}\cdot\frac{1}{128}\cdot 1260 = 0 \Rightarrow A_{20} = -\frac{8}{63},\\
&x: A_{10} = 0,\\
&x^0: A_{00} - A_{20}\cdot\frac{1}{2} + A_{40}\cdot\frac{1}{8}\cdot 3 - A_{60}\cdot\frac{1}{16}\cdot 5 + A_{80}\cdot\frac{1}{128}\cdot 35 = 0 \Rightarrow A_{00} = -\frac{44}{315}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим разложение (10). По аналогии с предыдущими разложениями

$$\deg P_n^{(2)}(x) = n \leqslant 8.$$

С помощью Wolfram Mathematica вычислим все многочлены вида $P_n^{(2)}(x)$:

$$
\begin{aligned}
P_2^{(2)}(x) &= 3(1-x^2),\\
P_3^{(2)}(x) &= 15x(1-x^2),\\
P_4^{(2)}(x) &= \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2),\\
P_5^{(2)}(x) &= \frac{105}{2}(3x^3-x)(1-x^2),\\
P_6^{(2)}(x) &= \frac{105}{8}(33x^4-18x^2+1)(1-x^2),\\
P_7^{(2)}(x) &= \frac{63}{8}x(143x^4-110x^2+15)(1-x^2),\\
P_8^{(2)}(x) &= \frac{315}{16}(143x^6-143x^4+33x^2-1)(1-x^2).
\end{aligned}
$$

Подставим эти выражения в разложение (10) и, сокращая на $(1-x^2)$, получим

$$A_{22}\cdot 3 + A_{32}\cdot 15x + A_{42}\cdot\frac{15}{2}(7x^2-1) + A_{52}\cdot\frac{105}{2}(3x^3-x) + A_{62}\cdot\frac{105}{8}(33x^4-18x^2+1)+$$
$$+A_{72}\cdot\frac{63}{8}x(143x^4-110x^2+15) + A_{82}\cdot\frac{315}{16}(143x^6-143x^4+33x^2-1) = \frac{11}{2}x^4(1-x^2).$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x

$$\begin{aligned}
&x^6: A_{82}\cdot\frac{315}{16}\cdot 143 = -\frac{11}{2} \Rightarrow A_{82} = -\frac{8}{4095},\\
&x^5: A_{72} = 0,\\
&x^4: A_{62}\cdot\frac{105}{8}\cdot 33 - A_{82}\cdot\frac{315}{16}\cdot 143 = \frac{11}{2} \Rightarrow A_{62} = 0,\\
&x^3: A_{52} = 0,\\
&x^2: A_{42}\cdot\frac{15}{2}\cdot 7 - A_{62}\cdot\frac{105}{8}\cdot 18 + A_{82}\cdot\frac{315}{16}\cdot 33 = 0 \Rightarrow A_{42} = \frac{11}{455},\\
&x: A_{32} = 0,\\
&x^0: A_{22}\cdot 3 - A_{42}\cdot\frac{15}{2} + A_{62}\cdot\frac{105}{8} - A_{82}\cdot\frac{315}{16} = 0 \Rightarrow A_{22} = \frac{1}{21},\\
&A_{12} = A_{02} = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим разложение (11). По аналогии с предыдущими разложениями

$$\deg P_n^{(4)}(x) = n \leqslant 8.$$

С помощью Wolfram Mathematica вычислим все многочлены вида $P_n^{(4)}(x)$:

$$\begin{aligned}
&P_4^{(4)}(x) = 105(1-x^2)^2,\\
&P_5^{(4)}(x) = 945x(1-x^2)^2,\\
&P_6^{(4)}(x) = \frac{945}{2}(11x^2-1)(1-x^2)^2,\\
&P_7^{(4)}(x) = \frac{3465}{2}x(13x^2-3)(1-x^2)^2,\\
&P_8^{(4)}(x) = \frac{10395}{8}(65x^4-26x^2+1)(1-x^2)^2.
\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в разложение (11) и, сокращая на $(1-x^2)^2$, получим

$$A_{44}\cdot 105 + A_{54}\cdot 945x + A_{64}\cdot\frac{945}{2}(11x^2-1) + A_{74}\cdot\frac{3465}{2}x(13x^2-3) + A_{84}\cdot\frac{10395}{8}(65x^4-26x^2+1) = 11x^4.$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x

$$\begin{aligned}
&x^4: A_{84}\cdot\frac{10395}{8}\cdot 65 = 11 \Rightarrow A_{84} = \frac{8}{61425},\\
&x^3: A_{74} = 0,\\
&x^2: A_{64}\cdot\frac{945}{2}\cdot 11 - A_{84}\cdot\frac{10395}{8}\cdot 26 = 0 \Rightarrow A_{64} = \frac{4}{4725},\\
&x: A_{54} = 0,\\
&x^0: A_{44}\cdot 105 - A_{64}\cdot\frac{945}{2} + A_{84}\cdot\frac{10395}{8} = 0 \Rightarrow A_{44} = \frac{1}{455},\\
&A_{34} = A_{24} = A_{14} = A_{04} = 0.
\end{aligned}$$

Все найденные коэффициенты позволяют нам записать неоднородность в следующем виде

$$11r^6\cos^4\theta\sin^4\theta(\cos 4\varphi-\sin^2\varphi)=$$
$$=r^6\left(-\frac{64}{585}P_8^{(0)}(\cos\theta)+\frac{16}{315}P_6^{(0)}(\cos\theta)+\frac{148}{455}P_4^{(0)}(\cos\theta)-\frac{8}{63}P_2^{(0)}(\cos\theta)-\frac{44}{315}P_0^{(0)}(\cos\theta)\right)+$$
$$+r^6\cos 2\varphi\left(-\frac{8}{4095}P_8^{(2)}(\cos\theta)+\frac{11}{455}P_4^{(2)}(\cos\theta)+\frac{1}{21}P_2^{(2)}(\cos\theta)\right)+$$
$$+r^6\cos 4\varphi\left(\frac{8}{61425}P_8^{(4)}(\cos\theta)+\frac{4}{4725}P_6^{(4)}(\cos\theta)+\frac{1}{455}P_4^{(4)}(\cos\theta)\right).$$

Введем замену $\cos m\varphi\cdot P_n^{(m)}(\cos\theta)=Y_n^{(m)}(\varphi,\theta)$. Причем учтем, что получившиеся функции $Y_n^{(m)}(\varphi,\theta)$ являются сферическими функциями. Для сферических функций справедливо соотношение

$$\Lambda Y_n^{(m)}(\varphi,\theta)+n(n+1)Y_n^{(m)}(\varphi,\theta)=0,\ \Lambda=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{12}$$

Тогда после замены неоднородность можно переписать в виде

$$11r^6\cos^4\theta\sin^4\theta(\cos 4\varphi-\sin^2\varphi)=r^6\left(-\frac{64}{585}Y_8^{(0)}+\frac{16}{315}Y_6^{(0)}+\frac{148}{455}Y_4^{(0)}-\frac{8}{63}Y_2^{(0)}-\frac{44}{315}Y_0^{(0)}\right)+$$
$$+r^6\left(-\frac{8}{4095}Y_8^{(2)}+\frac{11}{455}Y_4^{(2)}+\frac{1}{21}Y_2^{(2)}\right)+r^6\left(\frac{8}{61425}Y_8^{(4)}+\frac{4}{4725}Y_6^{(4)}+\frac{1}{455}Y_4^{(4)}\right). \tag{13}$$

Решение задачи (3) будем искать в виде

$$v(r,\theta,\varphi)=Z_1(r)Y_8^{(0)}+Z_2(r)Y_6^{(0)}+Z_3(r)Y_4^{(0)}+Z_4(r)Y_2^{(0)}+Z_5(r)Y_0^{(0)}+$$
$$+Z_6(r)Y_8^{(2)}+Z_7(r)Y_4^{(2)}+Z_8(r)Y_2^{(2)}+Z_9(r)Y_8^{(4)}+Z_{10}(r)Y_6^{(4)}+Z_{11}(r)Y_4^{(4)}. \tag{14}$$

В силу того, что оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид

$$\Delta v=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)+\frac{v_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\varphi},$$

то, подставляя выражение (13) в уравнение задачи (3), получим

$$\Delta v=\frac{Y_8^{(0)}}{r^2}(2rZ_1'+r^2Z_1'')+\frac{Z_1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{8_\theta}^{(0)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{8_{\varphi\varphi}}^{(0)}}{\sin^2\varphi}\right)+$$
$$+\frac{Y_6^{(0)}}{r^2}(2rZ_2'+r^2Z_2'')+\frac{Z_2}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{6_\theta}^{(0)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{6_{\varphi\varphi}}^{(0)}}{\sin^2\varphi}\right)+$$
$$+\frac{Y_4^{(0)}}{r^2}(2rZ_3'+r^2Z_3'')+\frac{Z_3}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{4_\theta}^{(0)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{4_{\varphi\varphi}}^{(0)}}{\sin^2\varphi}\right)+$$
$$+\frac{Y_2^{(0)}}{r^2}(2rZ_4'+r^2Z_4'')+\frac{Z_4}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{2_\theta}^{(0)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{2_{\varphi\varphi}}^{(0)}}{\sin^2\varphi}\right)+$$
$$+\frac{Y_0^{(0)}}{r^2}(2rZ_5'+r^2Z_5'')+\frac{Z_5}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{0_\theta}^{(0)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{0_{\varphi\varphi}}^{(0)}}{\sin^2\varphi}\right)+$$
$$+\frac{Y_8^{(2)}}{r^2}(2rZ_6'+r^2Z_6'')+\frac{Z_6}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{8_\theta}^{(2)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{8_{\varphi\varphi}}^{(2)}}{\sin^2\varphi}\right)+$$
$$+\frac{Y_4^{(2)}}{r^2}(2rZ_7'+r^2Z_7'')+\frac{Z_7}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{4_\theta}^{(2)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{4_{\varphi\varphi}}^{(2)}}{\sin^2\varphi}\right)+$$

$$+\frac{Y_2^{(2)}}{r^2}(2rZ_8'+r^2Z_8'')+\frac{Z_8}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{2_\theta}^{(2)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{2_{\varphi\varphi}}^{(2)}}{\sin^2\varphi}\right)+$$
$$+\frac{Y_8^{(4)}}{r^2}(2rZ_9'+r^2Z_9'')+\frac{Z_9}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{8_\theta}^{(4)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{8_{\varphi\varphi}}^{(4)}}{\sin^2\varphi}\right)+$$
$$+\frac{Y_6^{(4)}}{r^2}(2rZ_{10}'+r^2Z_{10}'')+\frac{Z_{10}}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{6_\theta}^{(4)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{6_{\varphi\varphi}}^{(4)}}{\sin^2\varphi}\right)+$$
$$+\frac{Y_4^{(4)}}{r^2}(2rZ_{11}'+r^2Z_{11}'')+\frac{Z_{11}}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Y_{4_\theta}^{(4)}\sin\theta\right)+\frac{Y_{4_{\varphi\varphi}}^{(4)}}{\sin^2\varphi}\right)=$$
$$=r^6\left(-\frac{64}{585}Y_8^{(0)}+\frac{16}{315}Y_6^{(0)}+\frac{148}{455}Y_4^{(0)}-\frac{8}{63}Y_2^{(0)}-\frac{44}{315}Y_0^{(0)}\right)+$$
$$+r^6\left(-\frac{8}{4095}Y_8^{(2)}+\frac{11}{455}Y_4^{(2)}+\frac{1}{21}Y_2^{(2)}\right)+$$
$$+r^6\left(\frac{8}{61425}Y_8^{(4)}+\frac{4}{4725}Y_6^{(4)}+\frac{1}{455}Y_4^{(4)}\right).$$

Тогда мы добавим и отнимем соответствующие значения, чтобы выполнялась формула (12).

$$\Delta v=\frac{Y_8^{(0)}}{r^2}(2rZ_1'+r^2Z_1'')+\frac{Z_1}{r^2}\left(-72Y_8^{(0)}\right)+\frac{Y_6^{(0)}}{r^2}(2rZ_2'+r^2Z_2'')+\frac{Z_2}{r^2}\left(-42Y_6^{(0)}\right)+$$
$$+\frac{Y_4^{(0)}}{r^2}(2rZ_3'+r^2Z_3'')+\frac{Z_3}{r^2}\left(-20Y_4^{(0)}\right)+\frac{Y_2^{(0)}}{r^2}(2rZ_4'+r^2Z_4'')+\frac{Z_4}{r^2}\left(-6Y_2^{(0)}\right)+$$
$$+\frac{Y_0^{(0)}}{r^2}(2rZ_5'+r^2Z_5'')+\frac{Y_8^{(2)}}{r^2}(2rZ_6'+r^2Z_6'')+\frac{Z_6}{r^2}\left(-72Y_8^{(2)}\right)+$$
$$+\frac{Y_4^{(2)}}{r^2}(2rZ_7'+r^2Z_7'')+\frac{Z_7}{r^2}\left(-20Y_4^{(2)}\right)+\frac{Y_2^{(2)}}{r^2}(2rZ_8'+r^2Z_8'')+\frac{Z_8}{r^2}\left(-6Y_2^{(2)}\right)+$$
$$+\frac{Y_8^{(4)}}{r^2}(2rZ_9'+r^2Z_9'')+\frac{Z_9}{r^2}\left(-72Y_8^{(4)}\right)+\frac{Y_6^{(4)}}{r^2}(2rZ_{10}'+r^2Z_{10}'')+\frac{Z_{10}}{r^2}\left(-42Y_6^{(0)}\right)+$$
$$+\frac{Y_4^{(4)}}{r^2}(2rZ_{11}'+r^2Z_{11}'')+\frac{Z_{11}}{r^2}\left(-20Y_4^{(4)}\right)=$$
$$=r^6\left(-\frac{64}{585}Y_8^{(0)}+\frac{16}{315}Y_6^{(0)}+\frac{148}{455}Y_4^{(0)}-\frac{8}{63}Y_2^{(0)}-\frac{44}{315}Y_0^{(0)}\right)+$$
$$+r^6\left(-\frac{8}{4095}Y_8^{(2)}+\frac{11}{455}Y_4^{(2)}+\frac{1}{21}Y_2^{(2)}\right)+$$
$$+r^6\left(\frac{8}{61425}Y_8^{(4)}+\frac{4}{4725}Y_6^{(4)}+\frac{1}{455}Y_4^{(4)}\right).$$

Таким образом, мы можем составить 11 граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера. Будем последовательно составлять и сразу же решать граничные задачи.

$$\begin{cases} r^2Z_1''+2rZ_1'-72Z_1=-\dfrac{64}{585}r^8,\\ Z_1(3)=0.\end{cases}\tag{15}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_1^{\text{oo}}(r)=C_1r^8,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_1^{\text{чн}}(r) = Cr^8 \ln r,$$

подставляя, получим

$$2Cr^8 + 8Cr^8 + 7Cr^8 = -\frac{64}{585}r^8,$$

откуда

$$C = -\frac{64}{9945}.$$

Таким образом,

$$Z_1(r) = C_1 r^8 - \frac{64}{9945}r^8 \ln r.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_1(3) = C_1 3^8 - \frac{64}{9945}3^8 \ln 3 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{64}{9945}\ln 3.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_1(r) = \frac{64}{9945}r^8(\ln 3 - \ln r). \tag{16}$$

$$\begin{cases} r^2 Z_2'' + 2rZ_2' - 42Z_2 = \dfrac{16}{315}r^8, \\ Z_2(3) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_2^{\text{оо}}(r) = C_1 r^6,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_2^{\text{чн}}(r) = Cr^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 42Cr^8 = 30Cr^8 = \frac{16}{315}r^8,$$

откуда

$$C = \frac{8}{4725}.$$

Таким образом,

$$Z_2(r) = C_1 r^6 + \frac{8}{4725}r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_2(3) = C_1 3^6 + \frac{8}{4725}3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{8}{4725}3^2.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_2(r) = \frac{8}{4725}r^6(r^2 - 3^2). \tag{18}$$

$$
\begin{cases}
r^2 Z_3'' + 2r Z_3' - 20 Z_3 = \dfrac{148}{455} r^8, \\
Z_3(3) = 0.
\end{cases}
\tag{19}
$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_3^{\text{оо}}(r) = C_1 r^4,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_3^{\text{чн}}(r) = C r^8,$$

подставляя, получим

$$56 C r^8 + 16 C r^8 - 20 C r^8 = 52 C r^8 = \frac{148}{455} r^8,$$

откуда

$$C = \frac{37}{5915}.$$

Таким образом,

$$Z_3(r) = C_1 r^4 + \frac{37}{5915} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_3(3) = C_1 3^4 + \frac{37}{5915} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{37}{5915} 3^4.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_3(r) = \frac{37}{5915} r^4 (r^4 - 3^4). \tag{20}$$

$$
\begin{cases}
r^2 Z_4'' + 2r Z_4' - 6 Z_3 = -\dfrac{8}{63} r^8, \\
Z_4(3) = 0.
\end{cases}
\tag{21}
$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_4^{\text{оо}}(r) = C_1 r^2,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_4^{\text{чн}}(r) = C r^8,$$

подставляя, получим

$$56 C r^8 + 16 C r^8 - 6 C r^8 = 66 C r^8 = -\frac{8}{63} r^8,$$

откуда

$$C = -\frac{4}{2079}.$$

Таким образом,

$$Z_4(r) = C_1 r^2 - \frac{4}{2079} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_4(3) = C_1 3^2 - \frac{4}{2079} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{4}{2079} 3^6.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_4(r) = \frac{4}{2079} r^2 (3^6 - r^6). \tag{22}$$

$$\begin{cases} r^2 Z_5'' + 2r Z_5' = -\dfrac{44}{315} r^8, \\ Z_5(3) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_5^{\text{оо}}(r) = C_1,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_5^{\text{чн}}(r) = C r^8,$$

подставляя, получим

$$56 C r^8 + 16 C r^8 = 72 C r^8 = -\frac{44}{315} r^8,$$

откуда

$$C = -\frac{11}{5670}.$$

Таким образом,

$$Z_5(r) = C_1 - \frac{11}{5670} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_5(3) = C_1 - \frac{11}{5670} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{11}{5670} 3^8.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_5(r) = \frac{11}{5670} (3^8 - r^8). \tag{24}$$

$$\begin{cases} r^2 Z_6'' + 2r Z_6' - 72 Z_6 = -\dfrac{8}{4095} r^8, \\ Z_4(3) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_6^{\text{оо}}(r) = C_1 r^8,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_6^{\text{чн}}(r) = C r^8 \ln r,$$

подставляя, получим

$$2Cr^8 + 8Cr^8 + 7Cr^8 = 17Cr^8 = -\frac{8}{4095}r^8,$$

откуда

$$C = -\frac{8}{69615}.$$

Таким образом,

$$Z_6(r) = C_1 r^8 - \frac{8}{69615} r^8 \ln r.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_6(3) = C_1 3^8 - \frac{8}{69615} 3^8 \ln 3 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{8}{69615} \ln 3.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_6(r) = \frac{8}{69615} r^8 (\ln 3 - \ln r). \tag{26}$$

$$\begin{cases} r^2 Z_7'' + 2r Z_7' - 20 Z_7 = \dfrac{11}{455} r^8, \\ Z_7(3) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_7^{\text{оо}}(r) = C_1 r^4,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_7^{\text{чн}}(r) = Cr^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 20Cr^8 = 52Cr^8 = \frac{11}{455} r^8,$$

откуда

$$C = \frac{11}{23660}.$$

Таким образом,

$$Z_7(r) = C_1 r^4 + \frac{11}{23660} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_7(3) = C_1 3^4 + \frac{11}{23660} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{11}{23660} 3^4.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_7(r) = \frac{11}{23660} r^4 (r^4 - 3^4). \tag{28}$$

$$\begin{cases} r^2 Z_8'' + 2rZ_8' - 6Z_8 = \dfrac{1}{21} r^8, \\ Z_8(3) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_8^{\text{oo}}(r) = C_1 r^2,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_8^{\text{чн}}(r) = C r^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 6Cr^8 = 66Cr^8 = \frac{1}{21} r^8,$$

откуда

$$C = \frac{1}{1386}.$$

Таким образом,

$$Z_8(r) = C_1 r^2 + \frac{1}{1386} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_8(3) = C_1 3^2 + \frac{1}{1386} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{1}{1386} 3^6.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_8(r) = \frac{1}{1386} r^2 (r^6 - 3^6). \tag{30}$$

$$\begin{cases} r^2 Z_9'' + 2rZ_9' - 72Z_9 = \dfrac{8}{61425} r^8, \\ Z_9(3) = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_9^{\text{oo}}(r) = C_1 r^8,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_9^{\text{чн}}(r) = C r^8 \ln r,$$

подставляя, получим

$$2Cr^8 + 8Cr^8 + 7Cr^8 = \frac{8}{61425} r^8,$$

откуда

$$C = \frac{8}{1044225}.$$

Таким образом,

$$Z_9(r) = C_1 r^8 + \frac{8}{1044225} r^8 \ln r.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_9(3) = C_1 3^8 + \frac{8}{1044225} 3^8 \ln 3 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{8}{1044225}\ln 3.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_9(r) = \frac{8}{1044225}r^8(\ln r - \ln 3). \tag{32}$$

$$\begin{cases} r^2 Z_{10}'' + 2rZ_{10}' - 42Z_{10} = \dfrac{4}{4725}r^8, \\ Z_{10}(3) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_{10}^{\text{оо}}(r) = C_1 r^6,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_{10}^{\text{чн}}(r) = Cr^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 42Cr^8 = 30Cr^8 = \frac{4}{4725}r^8,$$

откуда

$$C = \frac{2}{70875}.$$

Таким образом,

$$Z_{10}(r) = C_1 r^6 + \frac{2}{70875}r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_{10}(3) = C_1 3^6 + \frac{2}{70875}3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{2}{70875}3^2.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_{10}(r) = \frac{2}{70875}r^6(r^2 - 3^2). \tag{34}$$

$$\begin{cases} r^2 Z_{11}'' + 2rZ_{11}' - 20Z_{11} = \dfrac{1}{455}r^8, \\ Z_{11}(3) = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$Z_{11}^{\text{оо}}(r) = C_1 r^4,$$

а частное решение ищем в виде

$$Z_{11}^{\text{чн}}(r) = Cr^8,$$

подставляя, получим

$$56Cr^8 + 16Cr^8 - 20Cr^8 = 52Cr^8 = \frac{1}{455}r^8,$$

откуда

$$C = \frac{1}{23660}.$$

Таким образом,

$$Z_{11}(r) = C_1 r^4 + \frac{1}{23660} r^8.$$

Подставим в это решение граничное условие и найдем значение C_1:

$$Z_{11}(3) = C_1 3^4 + \frac{1}{23660} 3^8 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{1}{23660} 3^4.$$

В итоге решение граничной задачи имеет вид

$$Z_{11}(r) = \frac{1}{23660} r^4 (r^4 - 3^4). \tag{36}$$

Все найденные функции $Z_i(r)$ позволяют нам записать итоговую формулу решения задачи (3)

$$\begin{aligned}
v(r,\theta,\varphi) &= \frac{64}{9945} r^8 (\ln 3 - \ln r) P_8^{(0)}(\cos\theta) + \frac{8}{4725} r^6 (r^2 - 3^2) P_6^{(0)}(\cos\theta) + \\
&+ \frac{37}{5915} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(0)}(\cos\theta) + \frac{4}{2079} r^2 (3^6 - r^6) P_2^{(0)}(\cos\theta) + \frac{11}{5670} (3^8 - r^8) P_0^{(0)}(\cos\theta) + \\
&+ \left[\frac{8}{69615} r^8 (\ln 3 - \ln r) P_8^{(2)}(\cos\theta) + \frac{11}{23660} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(2)}(\cos\theta) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{1386} r^2 (r^6 - 3^6) P_2^{(2)}(\cos\theta)\right] \cos 2\varphi + \left[\frac{8}{1044225} r^8 (\ln r - \ln 3) P_8^{(4)}(\cos\theta) + \right. \\
&\left. + \frac{2}{70875} r^6 (r^2 - 3^2) P_6^{(4)}(\cos\theta) + \frac{1}{23660} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(4)}(\cos\theta)\right] \cos 4\varphi.
\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) &= \left[\frac{8}{56133} r^6 P_6^{(0)}(\cos\theta) - \frac{4}{1485} r^4 P_4^{(0)}(\cos\theta) + \frac{4}{35} P_0^{(0)}(\cos\theta)\right] + \\
&+ \left[\frac{16}{2525985} r^6 P_6^{(2)}(\cos\theta) - \frac{4}{18711} r^4 P_4^{(2)}(\cos\theta) - \frac{4}{567} r^2 P_2^{(2)}(\cos\theta)\right] \cos 2\varphi + \\
&+ \left[\frac{1}{7577955} r^6 P_6^{(4)}(\cos\theta) + \frac{1}{187110} r^4 P_4^{(4)}(\cos\theta)\right] \cos 4\varphi + \\
&+ \frac{64}{9945} r^8 (\ln 3 - \ln r) P_8^{(0)}(\cos\theta) + \frac{8}{4725} r^6 (r^2 - 3^2) P_6^{(0)}(\cos\theta) + \\
&+ \frac{37}{5915} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(0)}(\cos\theta) + \frac{4}{2079} r^2 (3^6 - r^6) P_2^{(0)}(\cos\theta) + \frac{11}{5670} (3^8 - r^8) P_0^{(0)}(\cos\theta) + \\
&+ \left[\frac{8}{69615} r^8 (\ln 3 - \ln r) P_8^{(2)}(\cos\theta) + \frac{11}{23660} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(2)}(\cos\theta) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{1386} r^2 (r^6 - 3^6) P_2^{(2)}(\cos\theta)\right] \cos 2\varphi + \left[\frac{8}{1044225} r^8 (\ln r - \ln 3) P_8^{(4)}(\cos\theta) + \right. \\
&\left. + \frac{2}{70875} r^6 (r^2 - 3^2) P_6^{(4)}(\cos\theta) + \frac{1}{23660} r^4 (r^4 - 3^4) P_4^{(4)}(\cos\theta)\right] \cos 4\varphi.
\end{aligned}$$

Для магнитного потенциала сформулируем задачу следующим образом

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v|_{r=1} = 7\sin\theta\cos^3\theta\cos\varphi, \\ v|_{r=4} = 6\sin^3\theta(\cos\varphi - \sin 3\varphi). \end{cases} \tag{37}$$

Решение задачи (14) будем искать в виде

$$v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \Big[(A_{nm}r^n + B_{nm}r^{-(n+1)})\cos m\varphi + (C_{nm}r^n + D_{nm}r^{-(n+1)})\sin m\varphi\Big] \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta). \tag{38}$$

Подставим в выражение (15) внутреннее граничное условие

$$v|_{r=1} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \Big[(A_{nm} + B_{nm})\cos m\varphi + (C_{nm} + D_{nm})\sin m\varphi\Big] \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) = 7\sin\theta\cos^3\theta\cos\varphi.$$

Отсюда следует, что

$$A_{nm} + B_{nm} = \begin{cases} A_{n1} + B_{n1}, \ m = 1, \\ 0, \ m \neq 1, \end{cases} \qquad C_{nm} + D_{nm} = 0 \ \forall m.$$

Таким образом, можно записать

$$v|_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1} + B_{n1})\cos\varphi \cdot P_n^{(1)}(\cos\theta) = 7\sin\theta\cos^3\theta\cos\varphi.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1} + B_{n1}) \cdot P_n^{(1)}(\cos\theta) = 7\sin\theta\cos^3\theta.$$

Оценим степени:

$$\deg(7(1-x^2)^{1/2}x^3) = 4,$$

$$\deg P_n^{(1)}(x) = \deg\left(\frac{(1-x^2)^{1/2}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n\right) = 1 + 2n - (n+1) = n \leqslant 4.$$

Таким образом, нужно вычислить все многочлены вида $P_n^{(1)}(x)$, $n \leqslant 4$:

$$\begin{aligned} P_1^{(1)}(x) &= \sqrt{(1-x^2)}, \\ P_2^{(1)}(x) &= 3x\sqrt{(1-x^2)}, \\ P_3^{(1)}(x) &= \frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{(1-x^2)}, \\ P_4^{(1)}(x) &= \frac{5}{2}x(7x^2-3)\sqrt{(1-x^2)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$(A_{41} + B_{41})P_4^{(1)}(\cos\theta) + (A_{31} + B_{31})P_3^{(1)}(\cos\theta) + (A_{21} + B_{21})P_2^{(1)}(\cos\theta) + \\ + (A_{11} + B_{11})P_1^{(1)}(\cos\theta) = 7\cos^3\theta\sin\theta.$$

Тогда для получения выражений на коэффициенты нам нужно представить правую часть в виде линейной комбинации многочленов Лежандра вида $P_n^{(1)}(x)$. Путем подбора можно получить

$$7\cos^3\theta\sin\theta = \frac{2}{5}P_4^{(1)} + P_2^{(1)}.$$

Отсюда получаем условия на коэффициенты

$$\begin{cases} A_{41} + B_{41} = \dfrac{2}{5}, \\ A_{21} + B_{21} = 1. \end{cases}$$

Подставим выражение (15) во внешнее граничное условие

$$v|_{r=4} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \Big[(A_{nm}4^n + B_{nm}4^{-(n+1)})\cos m\varphi + (C_{nm}4^n + D_{nm}4^{-(n+1)})\sin m\varphi\Big] \cdot P_n^{(m)}(\cos\theta) =$$
$$= 6\sin^3\theta(\cos\varphi - \sin 3\varphi).$$

Отсюда, оценивая ненулевые коэффициенты при соответствующих значениях $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$, получаем, что

$$v|_{r=4} = \sum_{n=0}^{\infty}(A_{n1}4^n + B_{n1}4^{-(n+1)}) \cdot P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(C_{n3}4^n + D_{n3}4^{-(n+1)}) \cdot P_n^{(3)}(\cos\theta)\sin 3\varphi = 6\sin^3\theta(\cos\varphi - \sin 3\varphi).$$

Отсюда получаем два выражения

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n1}4^n + B_{n1}4^{-(n+1)}) \cdot P_n^{(1)}(\cos\theta) = 6\sin^3\theta, \tag{39}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(C_{n3}4^n + D_{n3}4^{-(n+1)}) \cdot P_n^{(3)}(\cos\theta) = -6\sin^3\theta. \tag{40}$$

Рассмотрим разложение (16). Оценим степени

$$\deg(6(1-x^2)^{3/2}) = 3,$$

$$\deg P_n^{(1)}(x) = n \leqslant 3.$$

Таким образом, нам нужно взять многочлены

$$P_1^{(1)}(x) = \sqrt{(1-x^2)},$$
$$P_2^{(1)}(x) = 3x\sqrt{(1-x^2)},$$
$$P_3^{(1)}(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{(1-x^2)}.$$

Тогда разложение (16) может быть записано как

$$(A_{31}4^3 + B_{31}4^{-4})P_3^{(1)}(\cos\theta) + (A_{21}4^2 + B_{21}4^{-3})P_2^{(1)}(\cos\theta) +$$
$$+ (A_{11}4 + B_{11}4^{-2})P_1^{(1)}(\cos\theta) = 6\sin^3\theta.$$

Для задания условий на коэффициенты выразим правую часть в виде линейной комбинации многочленов Лежандра вида $P_n^{(1)}(\cos\theta)$. Путем подбора можно определить, что

$$6\sin^3\theta = -\frac{4}{5}P_3^{(1)} + \frac{24}{5}P_1^{(1)}.$$

Таким образом, условия на коэффициенты будут следующими

$$\begin{cases} A_{31}4^3 + B_{31}4^{-4} = -\dfrac{4}{5}, \\ A_{11}4 + B_{11}4^{-2} = \dfrac{24}{5}. \end{cases}$$

Рассмотрим разложение (17). Оценим степени

$$\deg(-6(1-x^2)^{3/2}) = 3,$$

$$\deg P_n^{(3)}(x) = \deg\left(\frac{(1-x^2)^{3/2}}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n+3}}{dx^{n+3}}(x^2-1)^n\right) = 3 + 2n - (n+3) = n \leqslant 3.$$

Таким образом, нам нужно взять многочлен

$$P_3^{(3)}(x) = 15(1-x^2)^{3/2}.$$

Тогда разложение (17) может быть записано как

$$(C_{33}4^3 + D_{33}4^{-4})P_3^{(3)}(\cos\theta) = -6\sin^3\theta.$$

Для задания условия на коэффициент, представим правую часть как

$$-6\sin^3\theta = -\frac{2}{5}P_3^{(3)}(\cos\theta).$$

Таким образом,

$$C_{33}4^3 + D_{33}4^{-4} = -\frac{2}{5}.$$

С учетом того, что все остальные суммы коэффициентов равны нулю, мы можем дополнить все наши условия на коэффициенты дополнительными условиями и получить 4 системы уравнений для коэффициентов:

$$\begin{cases} A_{41} + B_{41} = \dfrac{2}{5}, \\ A_{41}4^4 + B_{41}4^{-5} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{21} + B_{21} = 1, \\ A_{21}4^2 + B_{21}4^{-3} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{31}4^3 + B_{31}4^{-4} = -\dfrac{4}{5}, \\ A_{31} + B_{31} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{11}4 + B_{11}4^{-2} = \dfrac{24}{5}, \\ A_{11} + B_{11} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{33}4^3 + D_{33}4^{-4} = -\dfrac{2}{5}, \\ C_{33} + D_{33} = 0. \end{cases}$$

С помощью Wolfram Mathematica найдем решения систем. Таким образом

$$A_{41} = -\frac{2}{1310715},\ B_{41} = \frac{524288}{1310715},\ A_{21} = -\frac{1}{1023},\ B_{21} = \frac{1024}{1023},\ A_{31} = -\frac{1024}{81915},\ B_{31} = \frac{1024}{81915},$$

$$A_{11} = \frac{128}{105},\ B_{11} = -\frac{128}{105},\ C_{33} = -\frac{512}{81915},\ D_{33} = \frac{512}{81915}.$$

В итоге мы можем записать решение задачи (14)

$$v(r,\theta,\varphi) = \Big[\left(-\frac{2}{1310715}\cdot r^4 + \frac{524288}{1310715}\cdot r^{-5}\right)\cdot P_4^{(1)}(\cos\theta) +$$
$$+ \left(-\frac{1024}{81915}\cdot r^3 + \frac{1024}{81915}\cdot r^{-4}\right) P_3^{(1)}(\cos\theta) + \left(-\frac{1}{1023}\cdot r^2 + \frac{1024}{1023} r^{-3}\right) P_2^{(1)}(\cos\theta) +$$
$$+ \left(\frac{128}{105}\cdot r + -\frac{128}{105}\cdot r^{-2}\right) P_1^{(1)}(\cos\theta)\Big] \cos\varphi + \left(-\frac{512}{81915}\cdot r^3 + \frac{512}{81915} r^{-4}\right) P_3^{(3)}(\cos\theta)\sin 3\varphi.$$