Дифференциальное уравнение для многочленов Чебышева

Условие

Доказать, что многочлены Чебышева удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

Алгоритм решения

Многочлены Чебышева задаются формулой

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x).$$

Чтобы функции являлись решениями дифференциального уравнения, они должны при подстановке в уравнение давать верное равенство.

Вычислим первую и вторую производные от многочленов Чебышева:

$$T_n'(x) = \frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$T_n''(x) = \frac{n^2\cos(n\arccos x)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot n\sin(n\arccos x)}{1-x^2}.$$

Подставим найденные производные в данное по условию дифференциальное уравнение:

$$(1-x^2)\cdot\frac{-n^2\cos(n\arccos x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot n\sin(n\arccos x)}{1-x^2} - x\cdot\frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} + n^2\cos(n\arccos x) = 0.$$

Равенство выполняется, следовательно, многочлены Чебышева являются решениями данного дифференциального уравнения.