Решение СНУ

Рассмотрим СНУ при $n = 2$ вида

$$f(x) = 0, \quad f = (f_1, f_2)^T,\ x = (x_1, x_2)^T.$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 2x_1 - \sin\dfrac{x_1 - x_2}{2} = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 2x_2 - \cos\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 0. \end{cases}$$

- **Отделение корней.**
  - **Графический метод.** $x^* \in [-1, 0] \times [0, 1]$, берем середину отрезка $x^0 = (-0.5, 0.5)$.
  - **"Перемена знака".** Аналог метода дихотомии. Мы выбираем множетсво точек, в которых одна из функции обращается в ноль. Одну из этих точек подставляем во вторую функцию. Легко видеть, что
    $x^* \in [-\pi, \pi] \times 0$, $x^0 = (0, 0)$.

- Построение итерационной последовательности.
  - **Метод простой итерации.** Этот метод требует приведения системы к каноническому виду

    $$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2), x_2 = \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

    а затем использование формулы метода простых итераций $x^{k+1} = \varphi(x^k)$. В данном случае мы можем взять

    $$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x_1 - x_2}{2}, \\ \varphi_2 = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x_1 + x_2}{2}. \end{cases}$$

    Необходимо проверить достаточное условие сходимости:

    $$\max_{1 \leqslant i \leqslant 2} \max_{|x - x^0| \leqslant \delta} \{\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}\right|\} \leqslant q = \frac{1}{2} < 1$$

    В случае $x_0 = (-0.5, 0.5)$ получим $\delta = \dfrac{1}{2}$.
  - **Метод Ньютона.**

    $$\left(\frac{\partial f(x^k)}{\partial x}\right)(x^{k+1} - x^k) = -f(x^k).$$

    Необходимым условием реализации данного метода является существование обратной матрицы

    $$J_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1^k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1^k}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2^k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2^k}{\partial x_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

    $$x_1^{k+1} = x_1^k - \frac{\begin{vmatrix} f_1^k & \frac{\partial f_1^k}{\partial x_2} \\ f_2^k & \frac{\partial f_2^k}{\partial x_2} \end{vmatrix}}{J_k}$$

    $$x_2^{k+1} = x_2^k - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1^k}{\partial x_1} & f_1^k \\ \frac{\partial f_2^k}{\partial x_1} & f_2^k \end{vmatrix}}{J_k}$$

- **Контроль сходимости**
$$\Delta^k = \left\|x^{k+1} - x^k\right\| \leqslant \varepsilon$$
  Оценка невязки:
$$\left\|r^k\right\| = \left\|f^k\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем случай $\varepsilon = 10^{-2}$, $x^0 = \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.