Метод введения параметра. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро.

Рассматриваем всё те же уравнения неразрещенные относительно производной. То есть уравнения вида
$$F(x, y, y') = 0.$$

В прошлом уроке мы рассмотрели два метода, с помощью которых мы можем свести такие уравнения к нескольким разрешенным относительно производной. Однако не все уравнения мы сможем так же легко разложить, как в прошлом уроке. Поэтому мы рассмотрим еще один метод.

Метод введения параметра заключается в замене производной какой-то другой функцией. И зачастую берется
$$y' = p.$$

Тогда отсюда получаем, что
$$dy = p \cdot dx.$$

Именно эти два уравнения мы и будем использовать. В основном рассматриваются уравнения разрешенные относительно x или y.

(Далее пояснение, какого вида решения мы получаем в конкретных случаях. Этот момент нужен для понимания, однако можно пропустить это и переходить сразу к примеру 1)

1. Если **уравнение разрешенное относительно** y, то есть его можно представить в виде
$$y = f(x, y'),$$
то используем замену $y' = p$ и получаем $y = f(x, p)$. Тогда, подставляя эту функцию в равенство $dy = pdx$, получаем
$$dy = d(f(x, p)) = f'_x dx + f'_p dp = pdx.$$
Отсюда
$$(f'x - p)dx + f'_p dp = 0.$$
Если его решение можно выразить через x, т.е.
$$x = \varphi(p, C),$$
то общее решение исходного уравнения будет иметь **параметрический** вид
$$\begin{cases} x = \varphi(p, C), \\ y = f(\varphi(p, C), p). \end{cases}$$
Иначе, если через $p = \varphi(x, C)$, то его решение будет иметь **явный** вид
$$y = f(x, \varphi(x, C)).$$

2. Если **уравнение разрешенное относительно** x, то есть его можно представить в виде
$$x = f(y, y'),$$

то используем замену $y' = p$ и получаем $x = f(y,p)$. Тогда, подставляя эту функцию в равенство $dy = pdx$, получаем

$$dy = pdx = pd(f(y,p)) = p(f'_y dy + f'_p dp).$$

Отсюда

$$(1 - pf'_y)dy - pf'_p dp = 0.$$

Если его решение можно выразить через y, т.е.

$$y = \varphi(p, C),$$

то общее решение исходного уравнения будет иметь **параметрический** вид

$$\begin{cases} x = f(\varphi(p,C), p), \\ y = \varphi(p, C). \end{cases}$$

Иначе, если через $p = \varphi(y, C)$, то его решение будет иметь **явный** вид

$$x = f(y, \varphi(y, C)).$$

Пример 1. Найти полное решение уравнения

$$2xy' - y = y' \ln(yy').$$

Решение. Сразу же сделаем замену

$$y' = p.$$

Тогда наше исходное уравнение будет иметь вид

$$2xp - y = p \ln(y \cdot p).$$

Теперь нам необходимо выбрать, через какую функцию (x или y) мы будем всё выражать. Так как y находится и под логарифмом, и как слагаемое, то проще выразить x (то есть получить уравнение $x = f(y, y')$). Таким образом,

$$x = \frac{p \ln(y \cdot p) + y}{2p} = \frac{\ln(y \cdot p)}{2} + \frac{y}{2p}.$$

Теперь воспользуемся соотношением

$$dy = pdx.$$

Тогда (x дифференцируем как функцию 2 переменных)

$$dy = pdx = p \cdot d\Big(\frac{\ln(y \cdot p)}{2} + \frac{y}{2p}\Big) = p\Big(\Big(\frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2}\Big)dp + \Big(\frac{1}{2y} + \frac{1}{2p}\Big)dy\Big).$$

Домножим всё на 2 и раскроем скобки

$$2dy = 2 \cdot \Big(\Big(\frac{1}{2} - \frac{y}{2p}\Big)dp + \Big(\frac{p}{2y} + \frac{1}{2}\Big)dy\Big) = \Big(1 - \frac{y}{p}\Big)dp + \Big(\frac{p}{y} + 1\Big)dy.$$

Перенесём все слагаемые в одну сторону и вынесем общий множитель dy

$$\Big(1 - \frac{y}{p}\Big)dp + \Big(\frac{p}{y} - 1\Big)dy = 0.$$

Получили уравнение в нормальной форме, которое мы уже умеем решать. Домножим уравнение на py

$$(py - y^2)dp + (p^2 - py)dy = 0.$$

Тогда

$$(p - y)ydp + (p - y)pdy = 0.$$

Можем сократить уравнение на $(p - y)$, при этом учитывая, что

$$p - y = 0.$$

К рассмотрению этого случая вернёмся чуть позже. Продолжим предыдущие рассуждения

$$ydp + pdy = 0.$$

Получили УРП. Его общее решение имеет вид

$$py = C.$$

В данном случае мы можем выбрать 2 пути: выразить через p или выразить через y. По первому пути общее решение будет задано явно, а по второму — параметрически. Чтобы не награмождать ответ, выберем первый путь:

$$p = \frac{C}{y}.$$

Теперь вернемся к началу, а именно к уравнению, которое мы получили после замены

$$x = \frac{\ln(y \cdot p)}{2} + \frac{y}{2p}.$$

Остается лишь подставить найденное нами p и получить общее решение. **НО** не забываем, что мы получили 2 выражения относительно p:

$$\left[\begin{aligned} &p = y, \\ &p = C/y. \end{aligned}\right.$$

Соответственно, мы получим 2 решения, совокупность которых и будет составлять полное решение исходного уравнения:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\ln(y \cdot p)}{2} + \dfrac{y}{2p}, \\ \left[\begin{aligned} &p = y, \\ &p = C/y. \end{aligned}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{\ln(y^2)}{2} + \frac{1}{2}, \\ &x = \frac{\ln C}{2} + \frac{y^2}{2C}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{aligned} &x = \dfrac{\ln(y^2)}{2} + \dfrac{1}{2}, \\ &x = \dfrac{\ln C}{2} + \dfrac{y^2}{2C}. \end{aligned}\right.$

Пример 2. Найти полное решение уравнения

$$y = \frac{y'^2}{2} + \ln y'.$$

Решение. Опять же сразу вводим замену

$$y' = p.$$

Тогда уравнение примет вид

$$y = \frac{p^2}{2} + \ln p.$$

Получили сразу же уравнение относительно y. Подставляем его в соотношение

$$dy = pdx.$$

Получаем

$$dy = d\Big(\frac{p^2}{2} + \ln p\Big) = \Big(p + \frac{1}{p}\Big)dp = pdx.$$

Раздели уравнение на pdp. Таким образом, получаем

$$\frac{dx}{dp} = 1 + \frac{1}{p^2}.$$

Причем случай $p = 0$ мы не рассматриваем, потому что $p \geqslant 1$ (т.к. стоит под логарифмом). Полученное уравнение является простейшим. Так что можем проинтегрировать его по p:

$$x = \int\limits_{p_0}^{p} \Big(1 + \frac{1}{p^2}\Big)dp + C = p - \frac{1}{p} + C.$$

Так как мы получили общее решение, выраженное относительно x, то, подставив его, получим полное решение исходного уравнения в параметрическом виде.

НО в равенстве $y = p^2/2 + \ln p$ у нас даже не присутствует x, поэтому в ответ мы можем сразу записать эту функцию, не подставляя x. Тогда полное решение исходного уравнения имеет вид

$$\left[\begin{aligned} &x = p - \frac{1}{p} + C,\\ &y = \frac{p^2}{2} + \ln p. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{aligned} &x = p - \frac{1}{p} + C,\\ &y = \frac{p^2}{2} + \ln p. \end{aligned}\right.$

Частные случаи. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро.

Мы рассмотрели метод введения параметра в общем случае для всех уравнений. По-хорошему на этом можно было бы и закончить. Однако есть несколько частных случаев, когда мы можем знать, что получится после замены.

1. Если уравнение имеет вид

   $$F(y') = 0,$$

   то его общее решение будет иметь вид $F\Big(\dfrac{y - C}{x}\Big) = 0$. И если

   $$\lim_{y' \to \infty} F(y') = 0,$$

   то общее решение дополняется решениями вида $x = C$.

2. Если уравнение можно записать в виде

$$y = x\psi(y') + \varphi(y'),$$

то оно называется **уравнением Лагранжа**. И с помощью замены $y' = p$, мы сведем это уравнение к линейному уравнению относительно x.

3. Если уравнение можно записать в виде

$$y = xy' + \varphi(y'),$$

то оно называется **уравнением Клеро**. И после замены $y' = p$ мы всегда будем получать полное решение вида

$$\left[\begin{array}{l} y = Cx + \varphi(C), \\ \begin{cases} x + \varphi'(p) = 0, \\ y = px + \varphi(p). \end{cases} \end{array}\right.$$

В нижней системе мы из первого уравнения выражаем x и подставляем во второе.

Рассмотрим последовательно все эти 3 случая.

Пример 3. Найти полное решение уравнения

$$\ln y' + \frac{1}{y'^2} + 8 = 0.$$

Решение. Это уравнение вида $F(y') = 0$, поэтому мы можем сразу записать его решения в виде $F\left(\dfrac{y-C}{x}\right) = 0$.

$$\ln\left(\frac{y-C}{x}\right) + \frac{x^2}{(y-C)^2} + 8 = 0.$$

А так как $\lim\limits_{y'\to\infty} F(y') = 0$, то полное решение уравнения будет иметь вид

$$\left[\begin{array}{l} \ln\left(\dfrac{y-C}{x}\right) + \dfrac{x^2}{(y-C)^2} + 8 = 0, \\ x = C. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \ln\left(\dfrac{y-C}{x}\right) + \dfrac{x^2}{(y-C)^2} + 8 = 0, \\ x = C. \end{array}\right.$

Пример 4. Найти полное решение уравнения

$$xy'(y' + 2) = y.$$

Решение. Перед нами уравнение Лагранжа. Сделаем замену

$$y' = p.$$

Тогда уравнение примет вид

$$y = xp^2 + 2xp.$$

Пользуясь соотношением $dy = pdx$, получаем

$$dy = d(xp^2 + 2xp) = (p^2 + 2p)dx + (2xp + 2x)dp = pdx.$$

Отсюда

$$(p^2 + p)dx + (2xp + 2x)dp = (p + 1)pdx + (p + 1)2xdp = 0.$$

Тогда сокращаем на $(p + 1)$, при этом не забывая, что

$$p = -1.$$

У нас остается уравнение

$$pdx + 2xdp = 0.$$

Его можно рассматривать и как линейное относительно x и как УРП. Общее решение такого уравнения имеет вид

$$xp^2 = C.$$

Можем выразить через p и получить совокупность из двух решений в явном виде:

$$p = \pm\sqrt{\frac{C}{x}}.$$

Тогда, подставляя в уравнение $y = xp^2 + 2xp$, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} y = C + 2\sqrt{Cx}. \\ y = C - 2\sqrt{Cx}. \end{array}\right.$$

Теперь добавим к этой совокупность случай $p = -1$. Также подставим его в уравнение $y = xp^2 + 2xp \Rightarrow y = x - 2x$. Таким образом, полное решение исходного уравнения имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} y = C + 2\sqrt{Cx}, \\ y = C - 2\sqrt{Cx}, \\ y = -x. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = C + 2\sqrt{Cx}, \\ y = C - 2\sqrt{Cx}, \\ y = -x. \end{array}\right.$

Пример 5. Найти полное решение уравнения

$$y = xy' + y' - y'^2.$$

Решение. В данном случае имеем уравнение Клеро. Введем замену $y' = p$. Тогда

$$y = xp + p - p^2.$$

Подставим это уравнение в соотношение $dy = pdx$ и получим

$$dy = d(xp + p - p^2) = pdx + (x + 1 - 2p)dp = pdx.$$

Отсюда

$$(x + 1 - 2p)dp = 0.$$

Тогда у нас получается совокупность

$$\left[\begin{aligned}&x+1-2p=0,\\&dp=0.\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&x+1-2p=0,\\&dp=0\cdot dx \Rightarrow dp/dx=0 \Rightarrow p=C.\end{aligned}\right. \Rightarrow$$

Подставим $p=C$ в $y=xp+p-p^2$. Тогда

$$\left[\begin{aligned}&x+1-2p=0,\\&y=Cx-C+C^2.\end{aligned}\right.$$

А это и есть та совокупность, которую мы записывали, когда ввели понятие уравнения Клеро.

Остается из верхнего уравнения совокупности выделить p ($p=\dfrac{x+1}{2}$) и подставить в $y=xp+p-p^2$. Тогда

$$\left[\begin{aligned}&y=x\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2}-\frac{(x+1)^2}{4},\\&y=Cx+C-C^2.\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&y=\frac{(x+1)^2}{4},\\&y=Cx+C-C^2.\end{aligned}\right.$$

Данная совокупность и будет полным решением исходного уравнения.

Ответ:

$$\left[\begin{aligned}&y=\frac{(x+1)^2}{4},\\&y=Cx+C-C^2.\end{aligned}\right.$$