Лабораторная работа

Задача 1

Найти решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin 2x, \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Поставлена смешанная задача для неоднородного уравнения колебания с однородными граничными условиями первого рода. Следовательно, решение ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x), \tag{2}$$

где $X_k(x)$ – это решения задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Для задачи (3) общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Подставляя граничные условия, найдем собственные функции:

$$X(0) = C_1 = 0,$$

$$X(\pi) = 0 \cdot \cos \pi\lambda + C_2 \sin \pi\lambda = 0,$$

откуда $C_2 \neq 0$, иначе получаем только тривиальные решения, а значит

$$\sin \pi\lambda = 0.$$

Таким образом,

$$\pi\lambda = \pi k,\ k = 1, 2, \ldots,$$

в итоге получаем

$$\lambda_k = k,\ X_k(x) = \sin kx,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Подставляем в (2) полученные собственные функции

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin kx. \tag{5}$$

Подставляем этот ряд в дифференциальное уравнение исходной задачи (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \cdot \sin kx = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot T_k(t) \cdot \sin kx + x.$$

Необходимо представить функцию x в виде ряда Фурье по собственным функциям $\sin kx$, то есть

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kx, \;\; f_k = \frac{\int\limits_0^{\pi} x \sin kx dx}{\int\limits_0^{\pi} \sin^2 kx dx}.$$

Найдем значения интегралов в числителе и знаменателе:

$$\int\limits_0^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{x \cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} dx =$$

$$= -\frac{\pi \cdot (-1)^k}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi \cdot (-1)^k}{k},$$

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^2 kx dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{1-\cos 2kx}{2} dx = \frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin 2kx}{4k}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \cdot \sin kx = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot T_k(t) \cdot \sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

В получившемся уравнении приравниваем коэффициенты каждого ряда и получаем ОДУ

$$T_k''(t) + k^2 \cdot T_k(t) = \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k}. \tag{6}$$

Подставляя решение (5) в начальные условия задачи (1), получим

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \cdot \sin kx = \sin 2x,$$

откуда

$$T_k(0) = \begin{cases} 1, \;\; k = 2, \\ 0, k \neq 2; \end{cases} \tag{7}$$

и

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \cdot \sin kx = 0,$$

откуда

$$T_k'(0) = 0. \tag{8}$$

Объединив (6), (7), (8), получим задачу Коши для $T_k(t)$

$$\begin{cases} T_k''(t) + k^2 \cdot T_k(t) = \dfrac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k}, \\ T_k(0) = \begin{cases} 1, \ k = 2, \\ 0, k \neq 2; \end{cases} \\ T_k'(0) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Общее решение для уравнения из (9) имеет вид

$$T_k(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k^3}, \tag{10}$$

где для отыскания частного решения использовалось правило Эйлера. Подставим в общий вид решения начальные условия

$$T_k(0) = C_1 + \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k^3} = \begin{cases} 1, \ k = 2, \\ 0, k \neq 2; \end{cases} ,$$

отсюда

$$C_1 = \begin{cases} 1 + \dfrac{2 \cdot (-1)^k}{k^3}, \ k = 2, \\ \dfrac{2 \cdot (-1)^k}{k^3}, k \neq 2; \end{cases}$$

и также

$$T_k'(0) = kC_2 = 0,$$

откуда $C_2 = 0$. Таким образом, подставляя найденные C_1, C_2 в (10), а затем подставляя это в решение (5), получим решение исходной задачи (1)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^k}{k^3} \cdot (\cos kt - 1) \cdot \sin kx + \cos 2t \sin 2x.$$

При вводе данного решения и задачи (1) в Wolfram Mathematica выдается следующий результат

```
In[133]:= eq = u^(0,2)[x, t] - u^(2,0)[x, t] == x;
          cc = {u^(0,0)[0, t] == 0, u^(0,0)[Pi, t] == 0};
          bc = {u[x, 0] == Sin[2 x], u^(0,1)[x, 0] == 0};
```

```
In[136]:= solution[x_, t_] := Sum[((2 (-1)^k) Cos[k t]/k^3 - 2 (-1)^k/k^3) Sin[k x] + Sin[2 x] Cos[2 t], {k, 1, Infinity}]
```

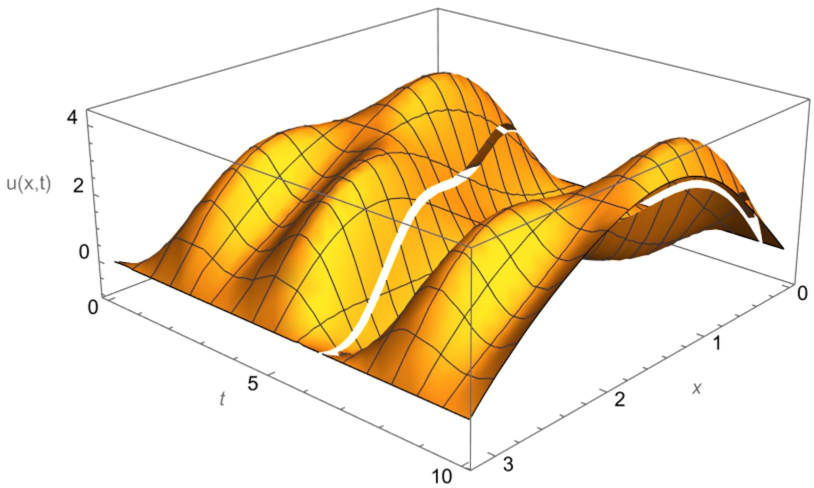
```
In[137]:= Simplify[{eq, cc, bc} /.
            u -> Activate[Function[{x, t}, solution[x, t]]]]

Out[137]= {True, {True, True}, {True, True}}
```

То есть решение удовлетворяет уравнению и всем дополнительным условиям. Таким образом, построенное решение удовлетворяет поставленной задаче (1).

Графически решение представляется в виде поверхности

```
In[39]:= Plot3D[Evaluate[solution[x, t]], {x, 0, Pi}, {t, 0, 10}, AxesLabel -> {x, t, "u(x,t)"}]
```

Out[39]=



Задача 2

Найти решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_{tt} - u_t = u_{xx} + 2t^2, \; 0 < x < 2, \; t > 0, \\ u_x|_{x=0} = u|_{x=2} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = x. \end{cases} \tag{11}$$

Поставлена смешанная задача для неоднородного уравнения гиперболического типа с однородными граничными условиями третьего рода. Следовательно, решение ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x), \tag{12}$$

где $X_k(x)$ – это решения задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями третьего рода

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = X(2) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Для задачи (13) общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Подставляя граничные условия, найдем собственные функции:

$$X'(0) = \lambda C_2 = 0,$$

откуда $C_2 = 0$;

$$X(2) = C_1 \cdot \cos 2\lambda + 0 \cdot \sin 2\lambda = 0,$$

откуда $C_1 \neq 0$, иначе получаем только тривиальные решения, а значит

$$2\lambda = \frac{\pi + 2\pi k}{2},\ k = 0, 1, \ldots.$$

В итоге получаем

$$\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{4},\ X_k(x) = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} x,\ k = 0, 1, \ldots. \tag{14}$$

Подставляем в (12) полученные собственные функции

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} x. \tag{15}$$

Подставляем этот ряд в дифференциальное уравнение исходной задачи (1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t) \cdot \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} x - \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(t) \cdot \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} x = \\ = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)^2 \cdot T_k(t) \cdot \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} x + 2t^2.$$

Необходимо представить функцию $2t^2$ в виде ряда Фурьем по собственным функциям $\cos \dfrac{\pi + 2\pi k}{4} x$, то есть

$$2t^2 = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} x,\ f_k = 2t^2 \cdot \frac{\int\limits_0^2 \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} x\, dx}{\int\limits_0^2 \cos^2 \frac{\pi + 2\pi k}{4} x\, dx}$$

Найдем значения интегралов в числителе и знаменателе

$$\int\limits_0^2 \cos\frac{\pi+2\pi k}{4}x\ dx = \frac{4}{\pi+2\pi k}\cdot\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}x\Big|_0^2 = \frac{4\cdot(-1)^k}{\pi+2\pi k},$$

$$\int\limits_0^2 \cos^2\frac{\pi+2\pi k}{4}x\ dx = \int\limits_0^2 \frac{1+\cos\dfrac{\pi+2\pi k}{2}x}{2}dx = \frac{x}{2}\Big|_0^2 + \frac{\sin\dfrac{\pi+2\pi k}{4}x}{\pi+2\pi k}\Big|_0^2 = 1.$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t)\cdot\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}x - \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(t)\cdot\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}x =$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)^2\cdot T_k(t)\cdot\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}x + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8t^2(-1)^k}{\pi+2\pi k}\cdot\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}x.$$

В получившемся уравнении приравниваем коэффициенты каждого ряда и получаем ОДУ

$$T_k''(t) - T_k'(t) + \left(\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)^2\cdot T_k(t) = \frac{8t^2(-1)^k}{\pi+2\pi k}. \tag{16}$$

Подставляя решение (15) в начальные условия задачи (11), получим

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\cdot\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}x = 0,$$

откуда

$$T_k(0) = 0, \tag{17}$$

и

$$u_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)\cdot\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}x = x,$$

откуда

$$T_k'(0) = \frac{\int\limits_0^2 x\cos\dfrac{\pi+2\pi k}{4}x\ dx}{\int\limits_0^2 \cos^2\dfrac{\pi+2\pi k}{4}x\ dx} = \frac{4x\sin\dfrac{\pi+2\pi k}{4}x}{\pi+2\pi k}\Big|_0^2 - \frac{4}{\pi+2\pi k}\int\limits_0^2 \sin\frac{\pi+2\pi k}{4}xdx.$$

Таким образом,

$$T_k'(0) = \frac{8\cdot(-1)^k}{\pi+2\pi k} - \frac{16}{(\pi+2\pi k)^2}. \tag{18}$$

Объединив (16), (17), (18), получим задачу Коши для $T_k(t)$

$$\begin{cases} T_k''(t) - T_k'(t) + \left(\dfrac{\pi + 2\pi k}{4}\right)^2 \cdot T_k(t) = \dfrac{8t^2(-1)^k}{\pi + 2\pi k}, \\ T_k(0) = 0, \\ T_k'(0) = \dfrac{8 \cdot (-1)^k}{\pi + 2\pi k} - \dfrac{16}{(\pi + 2\pi k)^2}. \end{cases} \tag{19}$$

Сперва ищем общее решение дифференциального уравнения, для этого составляем характеристическое уравнение

$$\nu^2 - \nu + \left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)^2 = 0,$$

тогда

$$D = 1 - 4 \cdot \left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)^2 < 0,\ k = 0, 1, \ldots .$$

Получаем общее решение однородного уравнения

$$T_{\text{оо}}(t) = C_1 e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{\dfrac{(\pi + 2\pi k)^2}{4} - 1}}{2} t + C_2 e^{t/2} \sin \frac{\sqrt{\dfrac{(\pi + 2\pi k)^2}{4} - 1}}{2} t.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем по правилу Эйлера. Пусть

$$T_{\text{чн}}(t) = At^2 + Bt + C,$$

тогда, подставляя, получим

$$2A - 2At - B + \left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)^2 (At^2 + Bt + C) = \frac{8t^2(-1)^k}{\pi + 2\pi k},$$

откуда

$$A = \frac{128 \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^3},\ B = \frac{32 \cdot 128 \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^5},\ C = \frac{512 \cdot 128 \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^7} - \frac{32 \cdot 128 \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^5}$$

В итоге имеем

$$T_k(t) = C_1 e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{\dfrac{(\pi + 2\pi k)^2}{4} - 1}}{2} t + C_2 e^{t/2} \sin \frac{\sqrt{\dfrac{(\pi + 2\pi k)^2}{4} - 1}}{2} t + \\ + \frac{128 \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^7} \cdot (512 + 32(\pi + 2\pi k)^2(t - 1) + (\pi + 2\pi k)^4 t^2)$$

Подставим начальные условия:

$$T_k(0) = C_1 + \frac{128 \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^7} \cdot (512 - 32(\pi + 2\pi k)^2) = 0,$$

отсюда

$$C_1 = \frac{128 \cdot (-1)^{k+1}}{(\pi + 2\pi k)^7} \cdot (32(\pi + 2\pi k)^2 - 512);$$

$$T_k'(0) = \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{\frac{(\pi + 2\pi k)^2}{4} - 1}}{2} C_2 + \frac{128 \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^7} \cdot 32(\pi + 2\pi k)^2 =$$
$$= \frac{8 \cdot (-1)^k}{\pi + 2\pi k} - \frac{16}{(\pi + 2\pi k)^2},$$

отсюда

$$C_2 = \frac{2}{\sqrt{\frac{(\pi + 2\pi k)^2}{4} - 1}} \Big(\frac{8 \cdot (-1)^k}{\pi + 2\pi k} - \frac{16}{(\pi + 2\pi k)^2} -$$
$$- \frac{128 \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^7} \cdot 32(\pi + 2\pi k)^2 - \frac{64 \cdot (-1)^{k+1}}{(\pi + 2\pi k)^7} \cdot (32(\pi + 2\pi k)^2 - 512) \Big).$$

Таким образом, решение поставленной задачи (11) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\frac{128 \cdot (-1)^{k+1}}{(\pi + 2\pi k)^7} \cdot (32(\pi + 2\pi k)^2 - 512) \cdot e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{\frac{(\pi + 2\pi k)^2}{4} - 1}}{2} t +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\frac{(\pi + 2\pi k)^2}{4} - 1}} \Big(\frac{8 \cdot (-1)^k}{\pi + 2\pi k} - \frac{16}{(\pi + 2\pi k)^2} - \frac{128 \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^7} \cdot 32(\pi + 2\pi k)^2 -$$
$$- \frac{64 \cdot (-1)^{k+1}}{(\pi + 2\pi k)^7} \cdot (32(\pi + 2\pi k)^2 - 512) \Big) \cdot e^{t/2} \sin \frac{\sqrt{\frac{(\pi + 2\pi k)^2}{4} - 1}}{2} t +$$
$$+ \frac{128 \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^7} \cdot (512 + 32(\pi + 2\pi k)^2 (t - 1) + (\pi + 2\pi k)^4 t^2) \Big] \cdot \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} x.$$

Аналогично предыдущей задаче, с помощью Wolfram Mathematica можно подставить решение в задачу (11) с помощью команд

```
In[140]:= solution2[x_, t_] :=
```

$$\sum_{k=0}^{\text{Infinity}}\left(\frac{\left(128\,(-1)^{k+1}\right)\left(32\,(\pi+2\pi k)^2-512\right)\operatorname{Exp}\left[\frac{t}{2}\right]\operatorname{Cos}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(\pi+2\pi k)^2-1}\;t\right]}{(\pi+2\pi k)^7}+\right.$$

$$\frac{2\left(\frac{8\,(-1)^k}{\pi+2\pi k}-\frac{16}{(\pi+2\pi k)^2}-\frac{\left(128\,(-1)^k\right)32\,(\pi+2\pi k)^2}{(\pi+2\pi k)^7}-\frac{\left(64\,(-1)^{k+1}\right)\left(32\,(\pi+2\pi k)^2-512\right)}{(\pi+2\pi k)^7}\right)\operatorname{Exp}\left[\frac{t}{2}\right]\operatorname{Sin}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(\pi+2\pi k)^2-1}\;t\right]}{\sqrt{\frac{1}{4}(\pi+2\pi k)^2-1}}+$$

$$\left.\frac{\left(128\,(-1)^k\right)\left(512+32\,(\pi+2\pi k)^2\,(t-1)+(\pi+2\pi k)^4\,t^2\right)}{(\pi+2\pi k)^7}\right)\operatorname{Cos}\left[\frac{1}{4}(\pi+2\pi k)\,x\right]$$

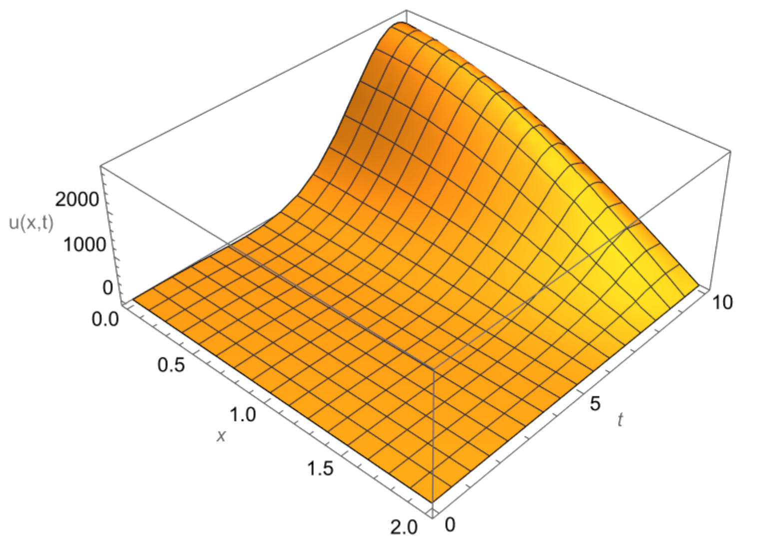
```
In[141]:= eq = u^(0,2)[x, t] - u^(0,1)[x, t] - u^(2,0)[x, t] == 2 t^2;
          cc = {u^(1,0)[0, t] == 0, u^(0,0)[2, t] == 0};
          bc = {u[x, 0] == 0, u^(0,1)[x, 0] == x};

In[144]:= Simplify[{eq, cc, bc} /.
            u → Activate[Function[{x, t}, solution2[x, t]]]]

Out[144]= {True, {True, True}, {True, True}}
```

В итоге найденное решение удовлетворяет задаче (11).

Также можно построить график получившейся поверхности

```
In[73]:= Plot3D[Evaluate[solution2[x, t]], {x, 0, 2}, {t, 0, 10}, AxesLabel → {x, t, "u(x,t)"}]
```

Out[73]=



Задача 3

Найти решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^t \cos x, \;\; 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u|_{x=0} = 2t, \\ u_x|_{x=l} = t - 1, \\ u|_{t=0} = \cos x, \\ u_t|_{t=0} = 2x. \end{cases} \tag{20}$$

Поставлена смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний с неоднородными граничными условиями третьего рода. Следовательно, решение ищем в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{21}$$

где

$$w(x,t) = a(t)x + b(t),$$

при этом

$$\begin{cases} w(0,t) = 2t, \\ w_x(l,t) = t-1. \end{cases}$$

Тогда, подставим общий вид $w(x,t)$ в данные условия

$$\begin{cases} w(0,t) = b(t) = 2t, \\ w_x(l,t) = a(t) = t-1. \end{cases}$$

В итоге

$$w(x,t) = (t-1)\cdot x + 2t. \tag{22}$$

Для функции $v(x,t)$ формулируется задача с однородными граничными условиями ($w_t t = w_x x = 0$)

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + e^t \cos x, \ 0 < x < l, \ t > 0, \\ v|_{x=0} = 0, \\ v_x|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = \cos x - w(0,t) = x + \cos x, \\ u_t|_{t=0} = 2x - w_t(0,t) = x - 2. \end{cases} \tag{23}$$

Ищем решение этой задачи в виде

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x),$$

где $X_k(x)$ – решения задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями третьего рода

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Для задачи (24) общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x.$$

Подставляя граничные условия, найдем собственные функции:

$$X(0) = C_1 = 0,$$

откуда $C_1 = 0$;

$$X'(l) = \lambda C_2 \cos \lambda l = 0,$$

откуда $C_2 \neq 0$, иначе получаем только тривиальные решения, а значит

$$\lambda l = \frac{\pi + 2\pi k}{2},\ k = 0, 1, \ldots .$$

В итоге получаем

$$\lambda_k = \frac{\pi + 2\pi k}{2l},\ X_k(x) = \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x,\ k = 0, 1, \ldots . \tag{25}$$

Подставляем в выражение $v(x,t)$ полученные собственные функции

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x. \tag{26}$$

Теперь подставим это выражение в дифференциальное уравнение задачи (20)

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} \right)^2 \cdot T_k(t) \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x + e^t \cos x.$$

Необходимо разложить функцию $e^t \cos x$ в ряд Фурье по собственным функциям

$$e^t \cos x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x,\ f_k = \frac{\int\limits_0^{\pi} e^t \cos x \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x dx}{\int\limits_0^{\pi} \sin^2 \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x dx}.$$

Найдем значения интегралов в числителе и знаменателе

$$\int\limits_0^{\pi} e^t \cos x \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x dx =$$

$$= e^t \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi + 2\pi k + 2l}{2l} x - \sin \frac{\pi + 2\pi k - 2l}{2l} x \right) dx =$$

$$= -le^t \left[\frac{\cos \frac{\pi + 2\pi k + 2l}{2l} x}{\pi + 2\pi k + 2l} + \frac{\cos \frac{\pi + 2\pi k - 2l}{2l} x}{\pi + 2\pi k - 2l} \right] \Bigg|_0^l =$$

$$= \frac{4le^t \cdot (\pi + 2\pi k - 2l \cdot (-1)^k \cdot \sin l)}{(\pi + 2\pi k)^2 - 4l^2},$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos \dfrac{\pi + 2\pi k}{l} x}{2} dx = \frac{l}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t) \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} \right)^2 \cdot T_k(t) \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x +$$

$$+ \sum_{k=0} \frac{8e^t \cdot (\pi + 2\pi k - 2l \cdot (-1)^k \cdot \sin l)}{(\pi + 2\pi k)^2 - 4l^2} \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x.$$

В получившемся уравнении приравниваем коэффициенты каждого ряда и получаем ОДУ

$$T_k''(t) + \left(\frac{\pi + 2\pi k}{2l} \right)^2 \cdot T_k(t) = \frac{8e^t \cdot (\pi + 2\pi k - 2l \cdot (-1)^k \cdot \sin l)}{(\pi + 2\pi k)^2 - 4l^2}. \tag{27}$$

Подставляя решение (5) в начальные условия задачи (1), получим

$$u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x = x + \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x,$$

а поскольку

$$\varphi_k = \frac{\int_0^{\pi} (x + \cos x) \sin \dfrac{\pi + 2\pi k}{2l} x dx}{\int_0^{\pi} \sin^2 \dfrac{\pi + 2\pi k}{2l} x dx} = \frac{8l \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^2} + \frac{8 \cdot (\pi + 2\pi k - 2l \cdot (-1)^k \cdot \sin l)}{(\pi + 2\pi k)^2 - 4l^2}$$

то

$$T_k(0) = \frac{8l \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^2} + \frac{8 \cdot (\pi + 2\pi k - 2l \cdot (-1)^k \cdot \sin l)}{(\pi + 2\pi k)^2 - 4l^2} \tag{28}$$

и

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0) \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x = x - 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2l} x,$$

а поскольку

$$\psi_k = \frac{\int_0^{\pi} (x - 2) \sin \dfrac{\pi + 2\pi k}{2l} x dx}{\int_0^{\pi} \sin^2 \dfrac{\pi + 2\pi k}{2l} x dx} = \frac{8l \cdot (-1)^k}{(\pi + 2\pi k)^2} - \frac{8l}{\pi + 2\pi k} =$$

$$= \frac{8l}{\pi + 2\pi k} \cdot \left(\frac{(-1)^k}{\pi + 2\pi k} - 1 \right)$$

то

$$T'_k(0)=\frac{8l}{\pi+2\pi k}\cdot\left(\frac{(-1)^k}{\pi+2\pi k}-1\right). \tag{29}$$

Объединив (27), (28), (29), получим задачу Коши для $T_k(t)$

$$\begin{cases} T''_k(t)+\left(\dfrac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2\cdot T_k(t)=\dfrac{8e^t\cdot(\pi+2\pi k-2l\cdot(-1)^k\cdot\sin l)}{(\pi+2\pi k)^2-4l^2},\\ T_k(0)=\dfrac{8l\cdot(-1)^k}{(\pi+2\pi k)^2}+\dfrac{8\cdot(\pi+2\pi k-2l\cdot(-1)^k\cdot\sin l)}{(\pi+2\pi k)^2-4l^2},\\ T'_k(0)=\dfrac{8l}{\pi+2\pi k}\cdot\left(\dfrac{(-1)^k}{\pi+2\pi k}-1\right). \end{cases} \tag{30}$$

Для дифференциального уравнения общее решение однородного

$$T_{\text{оо}}(t)=C_1\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)t+C_2\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)t,$$

а частное решение неоднородного по правилу Эйлера

$$T_{\text{чн}}(t)=Ae^t,$$

где, подставляя

$$Ae^t+\left(\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)^2Ae^t=\frac{8e^t\cdot(\pi+2\pi k-2l\cdot(-1)^k\cdot\sin l)}{(\pi+2\pi k)^2-4l^2},$$

получим

$$A=\frac{32l^2(\pi+2\pi k-2l(-1)k\sin l)}{(\pi+2\pi k)^4-4l^4},$$

таким образом,

$$T_k(t)=C_1\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)t+C_2\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)t+ \\ +e^t\cdot\frac{32l^2(\pi+2\pi k-2l(-1)k\sin l)}{(\pi+2\pi k)^4-4l^4}.$$

Подставляем в общий вид решения начальные условия:

$$T_k(0)=C_1+\frac{32l^2(\pi+2\pi k-2l(-1)^k\sin l)}{(\pi+2\pi k)^4-4l^4}= \\ =\frac{8l\cdot(-1)^k}{(\pi+2\pi k)^2}+\frac{8\cdot(\pi+2\pi k-2l\cdot(-1)^k\cdot\sin l)}{(\pi+2\pi k)^2-4l^2},$$

отсюда

$$C_1 = \frac{8l\cdot(-1)^k}{(\pi+2\pi k)^2} + \frac{(8-32l^2)\cdot(\pi+2\pi k-2l\cdot(-1)^k\cdot\sin l)}{(\pi+2\pi k)^2-4l^2};$$

$$T_k'(0) = \left(\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)C_2 + \frac{32l^2(\pi+2\pi k-2l(-1)k\sin l)}{(\pi+2\pi k)^4-4l^4} =$$
$$= \frac{8l}{\pi+2\pi k}\cdot\left(\frac{(-1)^k}{\pi+2\pi k}-1\right),$$

отсюда

$$C_2 = \frac{2l}{\pi+2\pi k}\left[\frac{8l}{\pi+2\pi k}\cdot\left(\frac{(-1)^k}{\pi+2\pi k}-1\right) - \frac{32l^2(\pi+2\pi k-2l(-1)k\sin l)}{(\pi+2\pi k)^4-4l^4}\right].$$

Таким образом, решение задачи (20) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg\{\Bigg(\frac{8l\cdot(-1)^k}{(\pi+2\pi k)^2}+$$
$$+\frac{(8-32l^2)\cdot(\pi+2\pi k-2l\cdot(-1)^k\cdot\sin l)}{(\pi+2\pi k)^2-4l^2}\Bigg)\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)t+$$
$$+\frac{2l}{\pi+2\pi k}\left[\frac{8l}{\pi+2\pi k}\cdot\left(\frac{(-1)^k}{\pi+2\pi k}-1\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{32l^2(\pi+2\pi k-2l(-1)k\sin l)}{(\pi+2\pi k)^4-4l^4}\right]\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{2l}\right)t+$$
$$+e^t\cdot\frac{32l^2(\pi+2\pi k-2l(-1)k\sin l)}{(\pi+2\pi k)^4-4l^4}\Bigg\}\cdot\sin\frac{\pi+2\pi k}{2l}x+(t-1)\cdot x+2t.$$

С помощью Wolfram Mathematica можно подставить решение в задачу (20)

```
In[146]:= solution3[x_, t_] :=
  Sum[((8 l (-1)^k)/(π + 2 π k)^2 + ((8 - 32 l^2) (π + 2 π k - 2 l (-1)^k Sin[l]))/((π + 2 π k)^2 - 4 l^2)) Cos[((π + 2 π k) t)/(2 l)] +
    ((2 l) (((8 l) ((-1)^k/(π + 2 π k) - 1))/(π + 2 π k) - (32 l^2 (π + 2 π k - 2 l (-1)^k Sin[l]))/((π + 2 π k)^4 - 4 l^4)) Sin[((π + 2 π k) t)/(2 l)])/(π + 2 π k) +
    (Exp[t] (32 l^2 (π + 2 π k - 2 l (-1)^k Sin[l])))/((π + 2 π k)^4 - 4 l^4)) Sin[((π + 2 π k) x)/(2 l)], {k, 1, Infinity}] + (t - 1) x + 2 t

In[147]:= $Assumptions = {l > 0};

In[148]:= eq = u^(0,2)[x, t] - u^(2,0)[x, t] == Exp[t] Cos[x];
          cc = {u^(0,0)[0, t] == 2 t, u^(1,0)[l, t] == t - 1};
          bc = {u[x, 0] == Cos[x], u^(0,1)[x, 0] == 2 x};

In[151]:= Simplify[{eq, cc, bc} /.
            u → Activate[Function[{x, t}, solution3[x, t]]]]

Out[151]= {True, {True, True}, {True, True}}
```

Таким образом, построенное решение удовлетворяет задаче (20).

График полученной поверхности при заданном $l = 1$ имеет вид

```
In[107]:= l = 1
Out[107]= 1

In[110]:= Plot3D[Evaluate[solution3[x, t]], {x, 0, l}, {t, 0, 10}, AxesLabel → {x, t, "u(x,t)"}]
```

Out[110]=