Основные понятия. Простейшие ДУ.

Этот урок является вводным. В нем мы рассмотрим несколько простейших базовых примеров, которые пригодятся нам для дальнейшего изучения дифференциальных уравнений.

Основные понятия.

• ***Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)*** *называется выражение вида*

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где F — некоторая функция $(n+2)$-ух переменных, определенная в некоторой области, t — независимая переменная, $x = x(t)$ — неизвестная функция независимой переменной, $x', \ldots, x^{(n)}$ — производные функции $x(t)$, причем переменная t и функции F и x действительны.

• *Порядок старшей производной, присутствующей в уравнении, называется* ***поряком*** *уравнения.*

Пример. Для уравнения $x''' - x'' - x = 0$ порядок $n = 3$.

• ***Решением*** *уравнения* (1) *называется функция, заданная и n раз дифференцируемая на некотором промежутке $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ и обращающая уравнение в верное равенство.*

Пример 1. Показать, что функция

$$x(t) = te^t + t^2 + 2$$

является решением уравнения

$$x'' - x = 2e^t - t^2.$$

Решение. Для доказательства необходимо решение в данное уравнение. Для этого найдем вторую производную от функции $x(t)$ и подставим в уравнение. Первая производная равна

$$x' = e^t + te^t + 2t;$$

тогда вторая производная

$$x'' = 2e^t + te^t + 2.$$

Подставим полученную производную и функцию $x(t)$ в уравнение и получим

$$2e^t + te^t + 2 - te^t - t^2 - 2 = 2e^t - t^2,$$

что и требовалось показать.

• *Совокупность решений уравнения вида $x = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных C_i, называется* ***общим решением*** *уравнения.*

Пример 2. Показать, что функция

$$x(t) = C_1 t + \ln C_1$$

является общим решением уравнения

$$x - tx' = \ln x'.$$

Решение. Аналогично с предыдущим примером находим производную x' от функции $x(t)$:

$$x' = C_1$$

и подставляем эту производную и функцию $x(t)$ в уравнение

$$C_1 t + \ln C_1 - C_1 t = \ln C_1,$$

что и требовалось показать.

В будущем аналогичными действиями можно проверять, правильное ли решение дифференциального уравнения было найдено.

Пример 3. Построить дифференциальное уравнение наименьшего порядка путем исключения произвольных постоянных

$$x(t) = C_1 t e^t + C_2 e^t.$$

Решение. По сути своей задание сводится к тому, что мы должны построить по данному нам общему решению. Очень важно учитывать, что количество констант равно наименьшему порядку получаемого дифференциального уравнения. Так как мы имеем 2 постоянные, то наменьший порядкок уравнения, для которого функция будет являться решением, равен 2. Следовательно, найдем вторую производную от $x(t)$:

$$x' = C_1 e^t + C_1 t e^t + C_2 e^t;$$

$$x'' = 2C_1 e^t + C_1 t e^t + C_2 e^t.$$

Далее путем умножения на какие-то постоянные, сложения и прибавления или вычитания каких-то функций мы должны получить из x'' тождественный ноль (то есть нужно найти нетривиальную линейную комбинацию из производных, которая даст нам тождественный ноль):

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = 0.$$

$$\begin{aligned}\alpha(2C_1 e^t + C_1 t e^t + C_2 e^t) + \beta(C_1 e^t + C_1 t e^t + C_2 e^t) + \gamma(C_1 t e^t + C_2 e^t) = \\ = C_1 e^t(2\alpha + \beta) + C_1 t e^t(\alpha + \beta + \gamma) + C_2 e^t(\alpha + \beta + \gamma) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -2\alpha, \\ \alpha = \gamma. \end{cases}$$

Возьмем наименьшие ненулевые положительные коэффициенты: $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = -2$. Таким образом получим уравнение

$$x'' - 2x' + x = 2C_1 e^t + C_1 t e^t + C_2 e^t - 2C_1 e^t - 2C_1 t e^t - 2C_2 e^t + C_1 t e^t + C_2 e^t = 0.$$

Ответ: $x'' - 2x' + x = 0$.

Простейшие ДУ.

Пусть D — оператор дифференцирования, то есть $D : x \mapsto x'$. Тогда первую производную функции x будем обозначать $Dx = x'$, вторую $D^2 x = x''$ и так далее $D^i = x^{(i)}$. В течение 1-ой и 2-ой глав будем использовать такое обозначение.

• ***Простейшим*** *называется дифференциальное уравнение вида*

$$D^n x = f(t), \ t \in \mathbb{I},$$

где $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, $f(t)$ *— непрерывная в* $\mathbb{I}$ *функция.*

Общее решение простейшего ДУ первого порядка $Dx = f(t), \ t \in \mathbb{I}$ имеет вид

$$x(t) = \int f(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + C,$$

где $t_0 \in \mathbb{I}$, а C — произвольная постоянная.

Общее решение уравнения $D^n x = f(t)$ имеет вид

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau + \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{C}_i t^i. \tag{2}$$

Найти общее решение функции уравнения $D^n x = f(t)$ обычно можно путем интегрирования уравнения n раз. Формула (2) же используется зачастую для неберущихся интегралов.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$D^3 x = t^{-3}, \quad \mathbb{I} = (0; +\infty).$$

Решение. Как говорилось выше, необходимо $n = 3$ раза проинтегрировать наше уравнение:

$$D^2 x = \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2t^2} + C_1;$$

$$Dx = \int \Big(-\frac{1}{2t^2} + C_1 \Big) dt = \frac{1}{2t} + C_1 t + C_2;$$

$$x = \int \Big(\frac{1}{2t} + C_1 t + C_2 \Big) dt = \frac{\ln|t|}{2} + C_1 t^2 + C_2 t + C_3.$$

Таким образом, получили общее решение нашего уравнения, причем модуль в логарифме можно раскрыть, так как $t \in \mathbb{I} \Rightarrow t > 0$.

Ответ: $x = \dfrac{\ln t}{2} + C_1 t^2 + C_2 t + C_3$.

Проверить, правильное ли решение уравнения можно взяв третью прозводную от полученного решения.

Пример 5. Найти общее решение

$$D^2 x = \frac{e^t}{t}, \quad \mathbb{I} = (0; +\infty).$$

Решение. Для нахождения общего решения так же, как и в прошлом примере, необходимо проинтегрировать $n = 2$ раза данное уравнение. Однако функция $\int \frac{e^t}{t} dt$ не имеет первообразной в элементарных функциях, то есть интеграл от данной функции неберущийся. Следовательно, общее решение можно записать по формуле (2):

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)\cdot e^{\tau}}{1!\cdot\tau} d\tau + C_2 t + C_1.$$

Ответ: $x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \dfrac{(t-\tau)\cdot e^{\tau}}{\tau} d\tau + C_2 t + C_1.$

Начальные задачи. Граничные задачи. Задачи Коши.

• *Дополнительные условия накладываемые на неизвестную функцию называются* ***начальными****, если они относятся к одному значению аргумента, и* ***граничными****, если относятся к разным значениям аргумента.*

Пример 6. Решить начальную задачу:

$$D^2x = 1,\ x|_{t=0} = 1,\ Dx|_{t=1} = 0, \quad t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Решение. Найдем общее решение уравнения. Для этого проинтегрируем его два раза:

$$Dx(t) = \int dt = t + C_1,$$

$$x(t) = \int (t + C_1)dt = \int t dt + C_1 \int dt = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Подставим наши начальные условия. Возьмем условие $Dx|_{t=1} = Dx(1) = 0$. Тогда

$$0 = 1 + C_1.$$

Таким образом, $C_1 = -1$. Теперь подставим условие $x(0) = 1$:

$$1 = 0 + 0 + C_2.$$

Соответственно, $C_2 = 1$.
Если бы уравнение имело больший порядок, то подставляли бы мы до тех пор, пока не нашли все C_i. Теперь все полученные C_i необходимо подставить в общее решение $x(t)$.

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - t + 1.$$

Ответ: $x(t) = \dfrac{t^2}{2} - t + 1.$

Пример 7. Решить граничную задачу:

$$D^2x = 1,\ x|_{t=0} = 4,\ x|_{t=2} = 6, \quad t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Решение. В предыдущем примере мы нашли общее решение уравнения. Оно имеет вид

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Аналогично начальным задачам, граничные задачи также решаются подстановкой. Однако сейчас нам не нужно задействовать производные от функции, все условия мы подставляем непосредственно в общее решение:

$$\begin{cases} 4 = 0 + 0 + C_2, \\ 6 = 2 + 2C_1 + C_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 4, \\ 6 = 2C_1 + 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 4, \\ C_1 = 0; \end{cases}$$

Полученные коэффициенты подставляем в общее решение и получаем

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + 4.$$

Ответ: $x(t) = \dfrac{t^2}{2} + 4$.

• *Начальная задача вида*

$$\begin{cases} F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \\ x|_{t=t_0} = \xi_0, x'|_{t=t_0} = \xi_1, \dots, x^{(n-1)}|_{t=t_0} = \xi_{n-1}; \end{cases} \qquad t_0 \in \mathbb{I}$$

называется ***задачей Коши***.

То есть, исходя из определения, задача Коши — начальная задача, где в каждом условии t_0 имеет одно и то же значение.

Пример 8. Решить задачу Коши:

$$D^3x = e^t,\ x|_{t=1} = 1,\ Dx|_{t=1} = 0,\ D^2x|_{t=1} = 1 \quad t \in \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Решение. Для начала найдем общее решение уравнения

$$D^2x = \int e^t dt = e^t + C_1;$$

$$Dx = \int (e^t + C_1)dt = e^t + C_1t + C_2;$$

$$x = \int (e^t + C_1t + C_2)dt = e^t + \frac{C_1t^2}{2} + C_2t + C_3.$$

Подставим начальные условия и составим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = e + C_1 + C_2 + C_3, \\ 0 = e + C_1 + C_2, \\ 1 = e + C_1; \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - e, \\ C_2 = -1, \\ C_3 = 1. \end{cases}$$

Полученные коэффициенты подставим в общее решение и получим

$$x(t) = e^t + \frac{(1-e)t^2}{2} - t + 1.$$

Ответ: $x(t) = e^t + \dfrac{(1-e)t^2}{2} - t + 1$.

Иногда в задачах может стоять вопрос о поиске решения **нулевой задачи Коши**. В таком случае для $x^{(i)}|_{t=t_0} = \xi_i$ его $\xi_i = 0$. То есть, к примеру, условие

”найти решение нулевой задачи Коши при $t = 3$”

будет эквивалентно условию

”найти решение задачи Коши при $x|_{t=3} = 0$, $Dx|_{t=3} = 0$, $D^2x|_{t=3} = 0$”.