МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра вычислительной математики

Лабораторная работа №1

«Аппроксимация дифференциальных задач разностными операторами»

Вариант 2

Выполнил:

Бовт Тимофей Анатольевич
студент 4 курса 7 группы

Преподаватель:

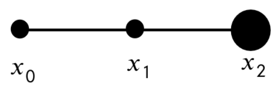
Репников Василий Иванович

Минск, 2024 г.

Задача 1

Постановка задачи. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов

$$Lu = u''(x_2).$$



Решение. Пусть у нас имеется равномерная сетка узлов с шагом h. Введем следующие обозначения

$$x = x_2, \ x - h = x_1, \ x - 2h = x_0,$$

где h – шаг равномерной сетки. Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u''(x),$$

и шаблон

$$\text{Ш}(x) = \{x, x-h, x-2h\}.$$

Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x-h) + a_2 u(x-2h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x-h) + a_2 u(x-2h) - u''(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки x:

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 \left(u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) - \frac{h^3}{6} u'''(x) \right) + \\ + a_2 \left(u(x) - 2hu'(x) + \frac{4h^2}{2} u''(x) - \frac{8h^3}{6} u'''(x) \right) + O(h^4) - u''(x).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\psi(x) = (a_0 + a_1 + a_2) \cdot u(x) - h(a_1 + 2a_2) \cdot u'(x) + \\ + \frac{h^2}{2} \left(a_1 + 4a_2 - \frac{2}{h^2} \right) \cdot u''(x) + \frac{h^3}{6} (a_1 + 8a_2) \cdot u'''(x) + O(h^4).$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 = 0, \\ a_1 + 4a_2 = \dfrac{2}{h^2}. \end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнения второе и получим

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 = 0, \\ 2a_2 = \dfrac{2}{h^2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_2 = \frac{1}{h^2}.$$

Тогда из второго уравнения

$$a_1 = -\frac{2}{h^2},$$

а из первого уравнения

$$a_0 = \frac{1}{h^2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x) - 2u(x-h) + u(x-2h)}{h^2}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые три слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

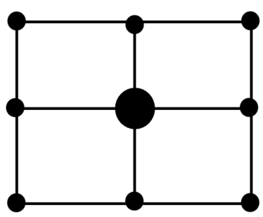
$$\psi(x) = \left(-\frac{h^3}{6} \cdot \frac{2}{h^2} + \frac{8h^3}{6} \cdot \frac{1}{h^2}\right) \cdot u'''(x) + O(h^4) = hu'''(x) + O(h^4) = O(h).$$

То есть мы получаем аппроксимацию первого порядка, а главный член погрешности это $hu'''(x)$.

Задача 2

Постановка задачи. Построить разностную аппроксимацию оператора Lu методом неопределенных коэффициентов

$$Lu = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}.$$



Решение. Пусть у нас имеется равномерная сетка узлов. Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции u в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 - h, x_2 - h) + a_2 u(x_1 - h, x_2) + a_3 u(x_1 - h, x_2 + h) + a_4 u(x_1, x_2 - h) + \\ + a_5 u(x_1, x_2 + h) + a_6 u(x_1 + h, x_2 - h) + a_7 u(x_1 + h, x_2) + a_8 u(x_1 + h, x_2 + h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 - h, x_2 - h) + a_2 u(x_1 - h, x_2) + a_3 u(x_1 - h, x_2 + h) + a_4 u(x_1, x_2 - h) +$$
$$+ a_5 u(x_1, x_2 + h) + a_6 u(x_1 + h, x_2 - h) + a_7 u(x_1 + h, x_2) + a_8 u(x_1 + h, x_2 + h) - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}.$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора, используя формулу разложения функции двух переменных

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right) u(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^2 u(x_0, y_0) + \ldots,$$

в окрестности точек x_1, x_2 по степеням h. Для упрощения записи, сразу же будем выносить общие множители за скобки, тогда

$$\psi(x) = u \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) +$$
$$+ h\frac{\partial u}{\partial x_1}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + h\frac{\partial u}{\partial x_2}(-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8 - \frac{2}{h^2}\right) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) +$$
$$+ h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 x_2}(-a_1 + a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}(-a_1 - a_3 + a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) +$$
$$+ \frac{h^4}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(a_1 + a_3 + a_6 + a_8) + O(h^5).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты a_k такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого нам нужно построить систему из 9 уравнений. Очевидно, что приравнивая сейчас все коэффициенты при производных от функции u, мы получим сильно больше уравнений. Заметим, что некоторые из этих коэффициентов повторяются.

Подчеркнем все уникальные коэффициенты:

$$
\begin{gathered}
\psi(x) = u\cdot\underline{(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9)}+\\
+h\frac{\partial u}{\partial x_1}\underline{(-a_1-a_2-a_3+a_6+a_7+a_8)}+h\frac{\partial u}{\partial x_2}\underline{(-a_1+a_3-a_4+a_5-a_6+a_8)}+\\
+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\underline{\left(a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8-\frac{2}{h^2}\right)}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\underline{(a_1+a_3+a_4+a_5+a_6+a_8)}+\\
+h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\underline{(a_1-a_3-a_6+a_8)}+\\
+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(-a_1-a_2-a_3+a_6+a_7+a_8)+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(-a_1+a_3-a_4+a_5-a_6+a_8)+\\
+\frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 x_2}\underline{(-a_1+a_3-a_6+a_8)}+\frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2}\underline{(-a_1-a_3+a_6+a_8)}+\\
+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8)+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(a_1+a_3+a_4+a_5+a_6+a_8)+\\
+\frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3\partial x_2}(a_1-a_3-a_6+a_8)+\frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_2^3}(a_1-a_3-a_6+a_8)+\\
+\frac{h^4}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\underline{(a_1+a_3+a_6+a_8)}+O(h^5).
\end{gathered}
$$

Итого мы имеем 9 уникальных коэффициентов, которые позволяют нам построить СЛАУ для отыскания неизвестных a_k, если мы приравняем их к нулю (заметим, что коэффициент при $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$ мы не считаем уникальным, потому что в таком случае матрица системы будет иметь линейно независимые строки). Итак, выпишем расширенную матрицу получившейся системы уравнений

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{2}{h^2}\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

Методом Гаусса приводим матрицу слева к единичной и, опуская все преобразования, получаем

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{h^2}\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{h^2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

Отсюда

$$
a_0 = -\frac{2}{h^2},\ a_2 = a_7 = \frac{1}{h^2}.
$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x_1 - h, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 + h, x_2)}{h^2}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации. Все коэффициенты обратятся в ноль кроме коэффициента при $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$, то есть

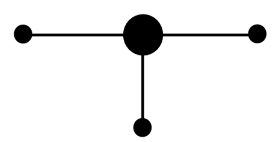
$$\psi(x) = \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + O(h^4) = O(h^2).$$

То есть мы получаем аппроксимацию первого порядка, а главный член погрешности это $\dfrac{h^2}{12}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$.

Задача 3

Постановка задачи. Аппроксимировать дифференциальную задачу разностной схемой на заданном шаблоне. Определить погрешность аппроксимации.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t),\ u(1,t) = \mu_1(t),\ t \geqslant 0. \end{cases}$$



Решение. У нас задана сетка узлов $\overline{\omega}_{h\tau}$. На данном шаблоне мы заменим дифференциальные операторы разностными. Для этого дифференциальному оператору $Lu = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ поставим в соответствие разностный оператор

$$L_h u = \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) u_{\overline{x}}\right)_x.$$

Или же в другой записи

$$L_h u = \\ = \frac{k\left(x + \frac{h}{2}, t\right) u(x+h,t) - k\left(x + \frac{h}{2}, t\right) u(x,t) - k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) u(x,t) + k\left(x - \frac{h}{2}, t\right) u(x-h,t)}{h^2}.$$

Покажем, что в данном случае мы имеем аппроксимацию второго порядка (доказывать будем для оператора $Lu = (k(x)u'(x))'$). Запишем, чему равна погрешность, предварительно разложив все функции в ряд Тейлора в окрестности точки x. Затем сократим подобные слагаемые и получим

$$\psi(x) = \frac{1}{h^2}\Big[\left(k + \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k''\right)\left(u + hu' + \frac{h^2}{2}u''\right) - \left(k + \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k''\right)u -$$

$$-\left(k - \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k''\right)u + \left(k - \frac{h}{2}k' + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2}k''\right)\left(u - hu' + \frac{h^2}{2}u''\right)\Big] + O(h^3) - (ku')' =$$

$$= \frac{h^2}{8}k''u'' + O(h^3).$$

Итак, заменив дифференциальные операторы на разностные, получим разностную схему вида

$$\begin{cases} u_{\bar{t}} = \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right)u_{\bar{x}}\right)_x + f(x,t),\ (x,t) \in \overline{\omega}_{h\tau}, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ u_x(0,t) = \mu_0(t),\ t \in \overline{\omega}_\tau, \\ u(1,t) = \mu_1(t),\ t \in \overline{\omega}_\tau, \end{cases}$$

где

$$u_{\bar{t}} = \frac{u(t) - u(t-\tau)}{\tau},\ u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Оценим погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным

$$\psi(x,t) = u_{\bar{t}} - \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right)u_{\bar{x}}\right)_x - f(x,t)$$

Зная, что

$$u_{\bar{t}} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau),\ \left(k\left(x - \frac{h}{2}, t\right)u_{\bar{x}}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{h^2}{8}k''u'' + O(h^3),$$

подставим в уравнение для погрешности и получим

$$\psi(x,t) = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{8}k''u'' + O(\tau^2 + h^3) = O(\tau + h^2).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение аппроксимируется на шаблоне с первым порядком по t и вторым порядком по x.

Начальное условие аппроксимируется точно.

Определим значение погрешности для аппроксимации левого граничного условия, аналогично раскладывая разностный оператор в ряд Тейлора, а также используя тот факт, что $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t)$,

$$\nu(0,t) = u_x(0,t) - \mu_0(t) = \frac{u(h,t) - u(0,t)}{h} - \mu_0(t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \mu_0(t) =$$

$$= \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2) = O(h).$$

Таким образом, левое граничное условие аппроксимируется с первым порядком по x.

Правое граничное условие аппроксимируем точно.

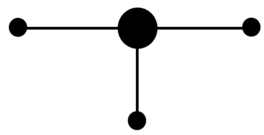
В итоге построенная разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу с первым порядком по t и по x.

Замечание. Также мы могли бы взять аппроксимацию $L_h u = \left(k\left(x,t\right)u_{\overline{x}}\right)_x$. Но в таком случае мы бы получили погрешность $O(h)$, то есть аппроксимация по x была бы также первого порядка.

Задача 4

Постановка задачи. Повысить порядок аппроксимации разностной схем на минимальном шаблоне, используя вид дифференциальной задачи.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t),\ 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t),\ u(1,t) = \mu_1(t),\ t \geqslant 0. \end{cases}$$



Решение. Из предыдущей задачи известно, что дифференциальная задача аппроксимируется разностной схемой на выбранном шаблоне с погрешностями $\psi(x,t) = O(\tau + h^2)$ для уравнения и $\nu(0,t) = O(h)$ для краевого условия. Задача ставится следующим образом: за счет повышения порядка аппроксимации граничного условия требуется повысить порядок аппроксимации задачи с $O(\tau + h)$ до $O(\tau + h^2)$. Разностную аппроксимацию граничного условия будем искать в следующем виде

$$u_x(0,t) = \overline{\mu}_0(t),$$

где сеточная функция $\overline{\mu}_0(t)$ подлежит определению. Определим погрешность аппроксимации граничного условия:

$$\nu(0,t) = u_x(0,t) - \overline{\mu}_0(t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \overline{\mu}_0(t) = \\ = \mu_0(t) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2) - \overline{\mu}_0(t).$$

Таким образом, мы должны выбрать

$$\overline{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}.$$

Из исходного уравнения поставленной дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + k(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

мы можем выразить

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{k(x,t)} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - f(x,t) \right).$$

Принимая $x = 0$, имеем

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{k(0,t)} \left(\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - \frac{\partial k(0,t)}{\partial x} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - f(0,t) \right).$$

Из самого граничного условия мы можем взять $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t)$. А частные производные $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial t}, \dfrac{\partial k(0,t)}{\partial x}$ в рамках аппроксимации уместно заменить на разностные производные $u_{\overline{t}}(0,t), k_{\overline{x}}(0,t)$ соответственно. Тогда в итоге мы получим

$$\overline{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + \frac{h}{2} \frac{1}{k(0,t)} \left(u_{\overline{t}}(0,t) - k_{\overline{x}}(0,t) \cdot \mu_0(t) - f(0,t) \right).$$

Таким образом, мы получаем разностную схему повышенного порядка аппроксимации

$$\begin{cases} u_{\overline{t}} = \left(k\left(x - \dfrac{h}{2}, t \right) u_{\overline{x}} \right)_x + f(x,t),\ (x,t) \in \overline{\omega}_{h\tau}, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{\omega}_h, \\ u_x(0,t) = \mu_0(t) + \dfrac{h}{2} \dfrac{1}{k(0,t)} \left(u_{\overline{t}}(0,t) - k_{\overline{x}}(0,t) \cdot \mu_0(t) - f(0,t) \right),\ t \in \overline{\omega}_\tau, \\ u(1,t) = \mu_1(t),\ t \in \overline{\omega}_\tau, \end{cases}$$

в частности она аппроксимирует дифференциальную задачу с первым порядком по t и по x.