# Разностная аппроксимация дифференциального оператора

## Условия

1. Используя метод неопределенных коэффициентов, построить разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор $Lu = u'(x)$ на шаблонах

   (a) $Ш(x) = \{x, x+h\}$;

   (b) $Ш(x) = \{x-h, x\}$;

   (c) $Ш(x) = \{x-h, x, x+h\}$.

   Определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. (Решение)

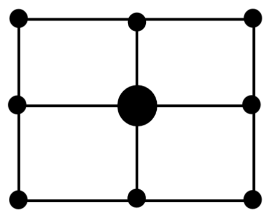
2. Используя метод неопределенных коэффициентов, построить разностный оператор, аппроксимирующий $u''(x)$ на шаблоне $Ш(x) = \{x, x+h, x+2h\}$. Определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. (Решение)

3. Используя метод неопределенных коэффициентов, построить разностный оператор, аппроксимирующий $u''(x)$ на шаблоне $Ш(x) = \{x-h, x, x+h\}$. Определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. (Решение)

4. Используя метод неопределенных коэффициентов, построить разностный оператор, аппроксимирующий $u'(x)$ на нерегулярном шаблоне $Ш(x) = \{x-h_1, x, x+h_2\}$, $h_1 \neq h_2$. Определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. (Решение)

5. Построить разностную аппроксимацию оператора $Lu$ методом неопределенных коэффициентов

$$Lu = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}.$$



(Решение)

**Решения**

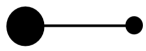
1. (a) Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu = u'(x)$$

и шаблон

$$Ш(x) = \{x, x+h\},$$

который можно изобразить как



Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции $u(x)$ в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) - u'(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки $x$:

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 \left( u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) \right) + O(h^3) - u'(x).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\psi(x) = (a_0 + a_1) \cdot u(x) + (ha_1 - 1) \cdot u'(x) + a_1 \frac{h^2}{2} u''(x) + O(h^3).$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты $a_k$ такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0, \\ ha_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_0 = -\frac{1}{h}, \; a_1 = \frac{1}{h}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u_x.$$

Построенная формула задает *правую разностную производную*, которая обозначается символом $u_x$.

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые два слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

$$\psi(x) = \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) = O(h).$$

То есть мы получаем аппроксимацию первого порядка, а главный член погрешности это $\frac{h}{2}u''(x)$. Учитывая, что

$$Lu = L_h u + \psi(x),$$

можно записать выражение

$$u'(x) = u_x + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2),$$

которое в последующих задачах будет использоваться.

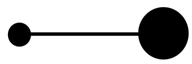
(b) Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu = u'(x)$$

и шаблон

$$\text{Ш}(x) = \{x - h, x\},$$

который можно изобразить как



Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции $u(x)$ в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x-h) + a_1 u(x).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x-h) + a_1 u(x) - u'(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки $x$:

$$\psi(x) = a_0 \left( u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) \right) + a_1 u(x) + O(h^3) - u'(x).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\psi(x) = (a_0 + a_1) \cdot u(x) + (-ha_1 - 1) \cdot u'(x) + a_1 \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3).$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты $a_k$ такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0, \\ -ha_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_0 = -\frac{1}{h},\ a_1 = \frac{1}{h}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u_{\overline{x}}.$$

Построенная формула задает *левую разностную производную*, которая обозначается символом $u_{\overline{x}}$.

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые два слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

$$\psi(x) = \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) = O(h).$$

То есть мы получаем аппроксимацию первого порядка, а главный член погрешности это $\frac{h}{2}u''(x)$. Учитывая, что

$$Lu = L_h u + \psi(x),$$

можно записать выражение

$$u'(x) = u_{\overline{x}} + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2),$$

которое в последующих задачах будет использоваться.

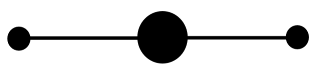
(c) Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu = u'(x)$$

и шаблон

$$\text{Ш}(x) = \{x-h, x, x+h\},$$

который можно изобразить как



Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции $u(x)$ в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x-h) + a_1 u(x) + a_2 u(x+h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x-h) + a_1 u(x) + a_2 u(x+h) - u'(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки $x$:

$$\psi(x) = a_0\left(u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x)\right) + a_1 u(x) +$$
$$+ a_2\left(u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x)\right) + O(h^4) - u'(x).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\psi(x) = (a_0 + a_1 + a_2)\cdot u(x) + (-ha_0 + ha_2 - 1)\cdot u'(x) +$$
$$+ \left(a_0\frac{h^2}{2} + a_2\frac{h^2}{2}\right)u''(x) + \left(-a_0\frac{h^3}{6} + a_2\frac{h^3}{6}\right)u'''(x) + O(h^3).$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты $a_k$ такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ -a_0 + a_2 - \dfrac{1}{h} = 0, \\ a_0 + a_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_0 = -\frac{1}{2h},\ a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2h}$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u_{\mathring{x}}.$$

Построенная формула задает *центральную разностную производную*, которая обозначается символом $u_{\mathring{x}}$.

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые два слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

$$\psi(x) = \frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^4) = O(h^2).$$

То есть мы получаем аппроксимацию второго порядка, а главный член погрешности это $\dfrac{h^2}{6}u'''(x)$. Учитывая, что

$$Lu = L_h u + \psi(x),$$

можно записать выражение

$$u'(x) = u_{\mathring{x}} + \frac{h^2}{6}u'''(x) + O(h^4),$$

которое в последующих задачах будет использоваться.

2. Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u''(x),$$

и шаблон

$$\text{Ш}(x) = \{x, x+h, x+2h\}.$$

Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции $u$ в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) + a_2 u(x+2h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 u(x+h) + a_2 u(x+2h) - u''(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки $x$:

$$\psi(x) = a_0 u(x) + a_1 \left( u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \frac{h^3}{6} u'''(x) \right) + \\ + a_2 \left( u(x) + 2hu'(x) + \frac{4h^2}{2} u''(x) + \frac{8h^3}{6} u'''(x) \right) + O(h^4) - u''(x).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\psi(x) = (a_0 + a_1 + a_2) \cdot u(x) + (ha_1 + 2ha_2) \cdot u'(x) + \\ + \left( \frac{h^2}{2} a_1 + \frac{4h^2}{2} a_2 - 1 \right) \cdot u''(x) + \left( \frac{h^3}{6} a_1 + \frac{8h^3}{6} a_2 \right) \cdot u'''(x) + O(h^4).$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты $a_k$ такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ ha_1 + 2ha_2 = 0, \\ \dfrac{h^2}{2} a_1 + \dfrac{4h^2}{2} a_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Домножим второе уравнение на $h$, а третье на 2 и получим

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ h^2 a_1 + 2h^2 a_2 = 0, \\ h^2 a_1 + 4h^2 a_2 = 2. \end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнения второе и получим

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ h^2 a_1 + 2h^2 a_2 = 0, \\ 2h^2 a_2 = 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_2 = \frac{1}{h^2}.$$

Тогда из второго уравнения

$$a_1 = -\frac{2}{h^2},$$

а из первого уравнения

$$a_0 = \frac{1}{h^2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x) - 2u(x+h) + u(x+2h)}{h^2} = u_{xx}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые три слагаемых обращаются в ноль при подстановке)

$$\psi(x) = \left(-\frac{h^3}{6} \cdot \frac{2}{h^2} + \frac{8h^3}{6} \cdot \frac{1}{h^2}\right) \cdot u'''(x) + O(h^4) = hu'''(x) + O(h^4) = O(h).$$

То есть мы получаем аппроксимацию первого порядка, а главный член погрешности это $hu'''(x)$.

3. Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u''(x),$$

и шаблон

$$Ш(x) = \{x-h, x, x+h\}.$$

Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции $u$ в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_{-1}u(x-h) + a_0 u(x) + a_1 u(x+h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_{-1}u(x-h) + a_0 u(x) + a_1 u(x+h) - u''(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки $x$:

$$\psi(x) = a_{-1}\left(u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u''''(x)\right) + a_0 u(x)$$
$$+ a_1\left(u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u''''(x)\right) + O(h^5) - u''(x).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\psi(x) = (a_{-1} + a_0 + a_1)\cdot u(x) + (-ha_{-1} + ha_1)\cdot u'(x) + \left(\frac{h^2}{2}a_{-1} + \frac{h^2}{2}a_1 - 1\right)\cdot u''(x) +$$
$$+ \left(-\frac{h^3}{6}a_{-1} + \frac{h^3}{6}a_1\right)\cdot u'''(x) + \left(\frac{h^4}{24}a_{-1} + \frac{h^4}{24}a_1\right)\cdot u''''(x) + O(h^5).$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты $a_k$ такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 0, \\ -ha_{-1} + ha_1 = 0, \\ \dfrac{h^2}{2}a_{-1} + \dfrac{h^2}{2}a_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Домножим второе уравнение на $h$, а третье на 2 и получим

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 0, \\ -h^2 a_{-1} + h^2 a_1 = 0, \\ h^2 a_{-1} + h^2 a_1 = 2. \end{cases}$$

Прибавим к третьему уравнению второе и получим

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 0, \\ -h^2 a_{-1} + h^2 a_1 = 0, \\ 2h^2 a_1 = 2. \end{cases}$$

Отсюда
$$a_1 = \frac{1}{h^2}.$$
Тогда из второго уравнения
$$a_{-1} = \frac{1}{h^2},$$
а из первого уравнения
$$a_0 = -\frac{2}{h^2}.$$
Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,
$$L_h u(x) = \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} = u_{\bar{x}x}.$$
Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые три слагаемых обращаются в ноль при подстановке)
$$\psi(x) = \left(-\frac{h^3}{6}\cdot\frac{1}{h^2} + \frac{h^3}{6}\cdot\frac{1}{h^2}\right)\cdot u'''(x) + \left(\frac{h^4}{24}\cdot\frac{1}{h^2} + \frac{h^4}{24}\cdot\frac{1}{h^2}\right)\cdot u''''(x) + \\ + O(h^5) = \frac{h^2}{12}u''''(x) + O(h^5) = O(h^2).$$
То есть мы получаем аппроксимацию второго порядка, а главный член погрешности это $\dfrac{h^2}{12}u''''(x)$.

4. Итак, мы имеем дифференциальный оператор

$$Lu(x) = u'(x),$$

и нерегулярный шаблон (то есть с разным шагом)

$$\text{Ш}(x) = \{x - h_1, x, x + h_2\}, \;\; h_1 \neq h_2.$$

Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции $u$ в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_{-1}u(x - h_1) + a_0 u(x) + a_1 u(x + h_2).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_{-1}u(x - h_1) + a_0 u(x) + a_1 u(x + h_2) - u'(x).$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки $x$:

$$\psi(x) = a_0\left(u(x) - h_1 u'(x) + \frac{h_1^2}{2}u''(x) - \frac{h_1^3}{6}u'''(x)\right) + a_1 u(x) \\ + a_2\left(u(x) + h_2 u'(x) + \frac{h_2^2}{2}u''(x) + \frac{h_2^3}{6}u'''(x)\right) + O(h_1^4 + h_2^4) - u'(x).$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Теперь преобразуем выражение справа, вынеся общие множители, следующим образом

$$\psi(x) = (a_0 + a_1 + a_2)\cdot u(x) + (-h_1 a_0 + h_2 a_2 - 1)\cdot u'(x) + \\ + \left(\frac{h_1^2}{2}a_0 + \frac{h_2^2}{2}a_2\right)\cdot u''(x) + \left(-\frac{h_1^3}{6}a_0 + \frac{h_2^3}{6}a_2\right)u'''(x) + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты $a_k$ такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого коэффициенты при $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ мы приравниваем к нулю и получаем следующую систему линейных уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ -h_1 a_0 + h_2 a_2 - 1 = 0, \\ \dfrac{h_1^2}{2}a_0 + \dfrac{h_2^2}{2}a_2 = 0. \end{cases}$$

Домножим второе уравнение на $h_1$, а третье на 2 и получим

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ -h_1^2 a_0 + h_1 h_2 a_2 = h_1, \\ h_1^2 a_0 + h_2^2 a_2 = 0. \end{cases}$$

Прибавим к третьему уравнению второе и получим

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0, \\ -h_1^2 a_0 + h_1 h_2 a_2 = h_1, \\ (h_1 h_2 + h_2^2)a_2 = h_1. \end{cases}$$

Отсюда
$$a_2 = \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)}.$$
Тогда из второго уравнения
$$a_0 = \frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)},$$
а из первого уравнения
$$a_1 = -\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{h_1h_2}\right)\cdot\frac{1}{h_1+h_2}.$$
Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,
$$L_hu(x) = \frac{1}{h_1+h_2}\cdot\left(\frac{h_2^2u(x-h_1)-(h_1^2+h_2^2)u(x)+h_1^2u(x+h_2)}{h_1h_2}\right).$$
Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации (учитываем, что первые три слагаемых обращаются в ноль при подстановке)
$$\begin{aligned}\psi(x) = \left(-\frac{h_1^3}{6}\cdot\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)}+\frac{h_2^3}{6}\cdot\frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)}\right)\cdot u'''(x)+\\ +O(h_1^4+h_2^4) = \frac{h_1h_2}{6(h_1+h_2)}(h_1-h_2)\cdot u''''(x)+O(h_1^4+h_2^4) = O(h_1^2+h_2^2).\end{aligned}$$
То есть мы получаем аппроксимацию второго порядка, а главный член погрешности это $\dfrac{h_1h_2}{6(h_1+h_2)}(h_1-h_2)\cdot u''''(x)$.

5. Пусть у нас имеется равномерная сетка узлов. Разностную аппроксимацию будем искать в виде линейной комбинации значений функции $u$ в точках шаблона, то есть

$$L_h u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 - h, x_2 - h) + a_2 u(x_1 - h, x_2) + a_3 u(x_1 - h, x_2 + h) + a_4 u(x_1, x_2 - h) + \\ + a_5 u(x_1, x_2 + h) + a_6 u(x_1 + h, x_2 - h) + a_7 u(x_1 + h, x_2) + a_8 u(x_1 + h, x_2 + h).$$

Выпишем погрешность аппроксимации $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в соответствии с нашими данными:

$$\psi(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 - h, x_2 - h) + a_2 u(x_1 - h, x_2) + a_3 u(x_1 - h, x_2 + h) + a_4 u(x_1, x_2 - h) + \\ + a_5 u(x_1, x_2 + h) + a_6 u(x_1 + h, x_2 - h) + a_7 u(x_1 + h, x_2) + a_8 u(x_1 + h, x_2 + h) - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}.$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора, используя формулу разложения функции двух переменных

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^2 u(x_0, y_0) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^2 u(x_0, y_0) + \ldots,$$

в окрестности точек $x_1, x_2$ по степеням $h$. Для упрощения записи, сразу же будем выносить общие множители за скобки, тогда

$$\begin{aligned}
\psi(x) = {} & u \cdot (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \\
& + h\frac{\partial u}{\partial x_1}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + h\frac{\partial u}{\partial x_2}(-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8 - \frac{2}{h^2}\right) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) + \\
& + h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(-a_1 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 x_2}(-a_1 + a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2}(-a_1 - a_3 + a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_6 + a_7 + a_8) + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3}(a_1 - a_3 - a_6 + a_8) + \\
& + \frac{h^4}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(a_1 + a_3 + a_6 + a_8) + O(h^5).
\end{aligned}$$

При необходимости можно записать и больше членов разложения. Нас интересует возможность найти неизвестные коэффициенты $a_k$ такими, чтобы погрешность аппроксимации была минимальной. Для этого нам нужно построить систему из 9 уравнений. Очевидно, что приравнивая сейчас все коэффициенты при производных от функции $u$, мы получим сильно больше уравнений. Заметим, что некоторые из этих коэффициентов повторяются. Подчеркнем все уникальные коэффициенты:

$$\begin{gathered}
\psi(x) = u\cdot\underline{(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8)}+\\
+h\frac{\partial u}{\partial x_1}\underline{(-a_1-a_2-a_3+a_6+a_7+a_8)}+h\frac{\partial u}{\partial x_2}\underline{(-a_1+a_3-a_4+a_5-a_6+a_8)}+\\
+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\underline{\left(a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8-\frac{2}{h^2}\right)}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\underline{(a_1+a_3+a_4+a_5+a_6+a_8)}+\\
+h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\underline{(a_1-a_3-a_6+a_8)}+\\
+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}(-a_1-a_2-a_3+a_6+a_7+a_8)+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}(-a_1+a_3-a_4+a_5-a_6+a_8)+\\
+\frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 x_2}\underline{(-a_1+a_3-a_6+a_8)}+\frac{h^3}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2}\underline{(-a_1-a_3+a_6+a_8)}+\\
+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8)+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(a_1+a_3+a_4+a_5+a_6+a_8)+\\
+\frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3\partial x_2}(a_1-a_3-a_6+a_8)+\frac{h^4}{6}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_2^3}(a_1-a_3-a_6+a_8)+\\
+\frac{h^4}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\underline{(a_1+a_3+a_6+a_8)}+O(h^5).
\end{gathered}$$

Итого мы имеем 9 уникальных коэффициентов, которые позволяют нам построить СЛАУ для отыскания неизвестных $a_k$, если мы приравняем их к нулю (заметим, что коэффициент при $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$ мы не считаем уникальным, потому что в таком случае матрица системы будет иметь линейно независимые строки). Итак, выпишем расширенную матрицу получившейся системы уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{2}{h^2}\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Методом Гаусса приводим матрицу слева к единичной и, опуская все преобразования, получаем

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{h^2}\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{h^2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Отсюда

$$a_0 = -\frac{2}{h^2},\ a_2 = a_7 = \frac{1}{h^2}.$$

Таким образом, мы можем построить разностную аппроксимацию дифференциального оператора, подставив найденные коэффициенты в записанный ранее общий вид,

$$L_h u(x) = \frac{u(x_1 - h, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 + h, x_2)}{h^2}.$$

Остается лишь определить порядок аппроксимации и главный член погрешности. Для этого найденные коэффициенты подставляем в нашу крайнюю запись для погрешности аппроксимации. Все коэффициенты обратятся в ноль кроме коэффициента при $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$, то есть

$$\psi(x) = \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + O(h^4) = O(h^2).$$

То есть мы получаем аппроксимацию второго порядка, а главный член погрешности это $\dfrac{h^2}{12}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}$.