

Exempel 0.0.1 (Möjlig tentauppgift!!)

Bestäm den totala arean av den yta som omsluter kroppen som uppstår när (det ändliga) området som begränsas av kurvan $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ och linjäerna $x = 0$ och $y = \frac{2}{3}$ roterar kring y-axeln. **OBS:** Notera att ytan består av flera delar. Kom ihåg formeln:

$$A = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Lösning:

Den omslutande ytan består av två delar:

Del 1: Ytan som genereras då kurvan roterar kring y-axeln.

Del 2: Cirkelskiva med radie 1.

$$A_1 = (\text{area del 1}) = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x+1} dx = 2\pi \int_0^1 (x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} dx$$

$$A_1 = 2\pi \left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{8\pi}{15}(\sqrt{2} + 1)$$

Slutsats: Den totala arean blir $\pi + \frac{8\pi}{15}(\sqrt{2} + 1)$