Exempel 0.0.1

Undersök om följadne gäller:

$$\frac{1}{2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} < \frac{\pi+1}{2}$$

Lösning:

Då $k = 1$ gäller $\frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} = \frac{1}{2}$. Då alla termer i serien är positiva måste:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} > \frac{1}{2}$$

Vi måste undersöka då om:

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} < \frac{\pi}{2} \text{ (I såfall är vi klara)}$$

Med $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$:

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} < \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx$$

Vi gör subtitutionen $u = \sqrt{x},\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$:

$$2\int_{1}^{\infty} \frac{1}{u^2+1}\, du = \Big[2arctan(u)\Big]_{1}^{\infty} = 2\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}$$

Slutsats: Ja!, eftersom integralen som är större än serien är lika med $\frac{\pi}{2}$.