Exempel 0.0.1 (Geometriska summan)

För serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ är den N:te partalsumman:

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^N} = \frac{1 - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Bevis:

$$\begin{aligned}
s_N &= 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^N \\
as_N &= a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{N+1} \\
s_N - as_N &= 1 - a^{N+1} \\
s_N &= \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}
\end{aligned}$$

Då måste geometriska summan **konvergera** om $a \in (0, 1)$ och då $s_N \to \frac{1}{1-a}$. Geometriska summan är då **divergent** om $a \geq 1$.