Exempel 0.0.1

Nisse befinner sig på fel sida av älven och vill ta sig hem. Älven är 4 km bred och rinner i nord-sydlig riktning. Nisse befinner sig 4 km vänster och 7 km söder om sitt hus. Han ror med hastigheten 3 km/h och går med hastigheten 5km/h. På vilket sätt tar sig Nisse hem snabbast och hur lång tid tar det då? D.v.s., ska han ro rakt över och sedan gå, ro hela vägen fram eller någonstans däremellan? Du får anta att vattnet står stilla i älven.

Lösning:
Vi ror $\sqrt{16+x^2}$ km och det tar $\frac{\sqrt{16+x^2}}{3}$ timmar. Vi går $7-x$ km och det tar $\frac{7-x}{5}$ timmar. Vi har antagit att $x \in [0,7]$. **Vi söker**: x så att den totala tiden $T(x) = \frac{7-x}{5} + \frac{\sqrt{16+x^2}}{3}$ är minimal. Minimala antas i ändpunkter eller i kritiska punkter.

Kritiska punkter:

$$\frac{d}{dx}T(x) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{16+x^2}} \cdot 2x$$

$$T'(x) = 0 \iff \frac{1}{5} = \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{16+x^2}} \iff 9(16+x^2) = 25x^2 \iff x_{1,2} = \pm 3$$

Den enda kritiska punkten är då $x = 3$ eftersom -3 är utanför den bestämda intervallen.
Vi **jämför**:

$$T(3) = \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{16+9}}{3} = \frac{37}{15}$$
$$T(0) = \frac{7}{5} + \frac{4}{3} = \frac{41}{15}$$
$$T(7) = \frac{\sqrt{16+49}}{3} > \frac{8}{3}, \ \frac{8}{3} = \frac{40}{15}$$

Alltså det minsta punkten är den kritiska punkten $x = 3$ och då är tiden $T(3) = \frac{37}{15}$ timmar.