Exempel 0.0.1 (Lös initialvärdeproblemet:)

$$y'' + y = sint,\;\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0$$

Solution: Vi börjar med att lösa partikulära lösningen. Vi gissar att partikulärlösningen har formen $Acos(t) + Bsin(t)$. Vi måste bestämma andra derivatan för att kunna sätta in partikulära lösningen i differentialekvationen:

$$\begin{aligned} f(x) &= Acos(t) + Bsin(t) \\ f'(x) &= -Asin(t) + Bcos(t) \\ f''(x) &= -Acos(t) - Bsin(t) \end{aligned}$$

Vi kan se direkt att $y_p'' + y_p = sint \implies 0 = sint$, alltså vår gissande misslyckades. Vi testar multiplicera förra partikulära lösningen med t och bestämmer dess andra derivata:

$$\begin{aligned} f(x) &= Atcos(t) + Btsin(t) \\ f'(x) &= Acos(t) + Bsin(t) - Atsin(t) + Btcos(t) \\ f''(x) &= -Asin(t) + Bcos(t) - Asin(t) - Atcos(t) - Btsin(t) \end{aligned}$$

Om man sätter in i differentialekvationen så får vi följande:

$$y_p'' + y_p = sin(t) \implies -2Asint + 2Bcost = sin(t) \implies A = -\frac{1}{2},\;\; B = 0$$

Alltså $y_p = -\frac{t}{2}cos(t)$. Om man löser y_h så får vi att den allmäna lösningen för den **homogena** differentialekvationen är:

$$y_h = Ccos(t) + Dsin(t)$$

Då blir den hela lösningen $y = y_p + y_h$:

$$y = Ccos(t) + Dsin(t) - \frac{t}{2}cos(t)$$

Om vi sätter in initialvillkoren för att lösa ut C och D så får vi:

$$\begin{aligned} y(0) &= C = 0 \\ y'(0) &= D - \frac{1}{2} \implies D = \frac{1}{2} \end{aligned}$$