Definition 0.0.1: Första ordningens DE

En **homogen** DE av ordning 1 med konstant koefficienter kan skrivas som:

$$y'(t) + ky(t) = 0$$

Lösningen till den är $y(t) = e^{rt}$ om och endast om $r + k = 0 \iff r = -k$. Vi får sedan alla lösningar till differentialekvationen som $y(t) = Ce^{-kt}$, där C är en godtycklig konstant.

Bevis:
Låt $y = e^{rt}$, $y' = re^{rt}$. Sätt in den i ekvationen $y' + ky \implies re^{rt} + ke^{rt} = 0 \implies r + k = 0$. Alltså en lösning är $y = e^{-kt}$. Antag sedan att det finns någon annan lösning:

$$y = u(t)e^{-kt}$$

Vi har då $y' = u'e^{-kt} - kue^{-kt}$ och sätt in i ekvationen:

$$y' + ky \implies u'e^{-kt} - kue^{-kt} + kue^{-kt} = 0$$

Alltså $u'e^{-kt} = 0 \implies u' = 0$ och därmed det innebär att u är en konstant. Då blir alla lösningar till DE:

$$y = Ce^{-kt}$$