Exempel 0.0.1

Varför är följande summa en bra approximation på $ln2$ när N är stort?

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{1+\frac{i}{N}} \cdot \frac{1}{N}$$

Med $c_i = x_i = \frac{i}{N}$, $i = 1, \ldots, N$ fick vi att Riemannsumman är:

$$\sum_{i=1}^{N} f(\frac{i}{N})\frac{1}{N}$$

Dock i vårt fall när $f(x) = \frac{1}{1+x}$ blir detta:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{1+\frac{i}{N}} \cdot \frac{1}{N}$$

Vi vet då att $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{1+\frac{i}{N}} \frac{1}{N}$. Eftersom f är kontinuerlig på intervallen $[0, 1]$ och därmed integrerbar. Eftersom $\frac{d}{dx} ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$ så har vi att:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [ln(1+x)]_0^1 = ln(2) - ln(1) = ln(2)$$

Alltså gränsvärdet av Riemannsumman är ln2, då $N \to \infty$