Exempel 0.0.1 (Gammal tentauppgift)
Bestäm en tangent till kurvan $y = e^{2x} - 2e^{-x} + x$ som inte är paralell med någon annan tangent till kurvan.

Lösning:
Om tangenterna i två punkter är parallella, betyder det att lutningen är den samma, med andra ord: att derivatan sammanfaller. Vi söker tangenten i en punkt x_0 så at $f'(x) \neq f'(x_0)$ för alla $x \neq x_0$. Vi får helt enkelt analysera: $f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{-x} + 1$. Vi ser att $f'(x) \to +\infty$, $x \to \infty$ och $f'(0) = 5$. Alltså: f' antar min men ej max. Min måste antas i en kritiskt punkt:

$$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^{-x},\ f''(x) = 0 \iff 4e^{2x} = 2e^{-x} \implies x = -\frac{ln(2)}{3}$$

Om det värdet antas i någon annan punkt, så måste den också vara en kritisk punkt, men $x = -\frac{ln(2)}{3}$ är den enda kritiska punkten. Alltså antas min värdet i en punkt. $f'\left(-\frac{ln(2)}{3}\right) = 2e^{-\frac{2}{3}ln(2)} + 2e^{\frac{ln(2)}{3}} + 1 = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{4}{3}} + 1$. Den sökta tangenten är tangentlinjen i $x = -\frac{ln(2)}{3}$, med lutning $2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{4}{3}} + 1$. Tangentlinjen i x_0 ges av $y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$. $f\left(-\frac{ln(2)}{3}\right) = e^{-\frac{2}{3}ln(2)} - 2e^{\frac{ln(2)}{3}} - \frac{ln(2)}{3}$. **Alltså**: Tangentlinjen ges av $y = (2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{4}{3}} + 1)(x + \frac{ln(2)}{3}) + (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} - 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - \frac{ln(2)}{3}$.