

### Definition 0.0.1: L'Hopitals regel

Tänk följande  $f(x) \mapsto A$ ,  $g(x) \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow a$  Om  $A > 0$  är ett ändligt nollskilt gränsvärde så gäller följande:

$$A \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$$

Om ovan kan vi veta något, men vi kan **inte** veta något om följande fall:

$$\begin{array}{c} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \\ \dots \end{array}$$

Då måste vi använda **L'Hopitals regel**. Exempelvis vid  $\frac{0}{0}$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

och att  $g'(x) \neq 0$  i en punkterad omgivning till  $a$ . Då gäller:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

givet att gränsvärdet existerar eller är lika med  $\pm\infty$ . Även  $a = \pm\infty$  är tillåtet och ensidiga gränsvärden.

**Fuskbevis**  $\frac{0}{0}$  :

Vi antar att  $f(a) = g(a) = 0$ . Vi har då att:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_f)(x - a)}{g'(c_g)(x - a)}$$

Det sista gäller enligt **medelvärdesatsen** och att  $c_g, c_f \in [x, a]$ . Vi kan då välja  $c_f = c_g = c \implies \frac{f'(c)}{g'(c)}$ . Om  $x \rightarrow a$  så går  $c \rightarrow a$  som medför följande:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**V.S.B!**