Projekt 2 WdAD

Filip Cebula 151410

31 stycznia 2025

1 Zadanie 1

1.1 Model regresji

Tworzymy model regresji w R, używając polecenia **lm()** i sprawdzamy jego parametry korzystając z polecenia **summary**. Na potrzebę zadania analizie poddamy zestaw danych *crabs* z biblioteki MASS, który zawiera informacje o rozmiarach badanych krabów.

```
regression = lm(CW ~ CL, data = crabs);
cat("\nRegression model width~length of crabs body\n");
summary(regression);
cat("\n");

# OUTPUT:
# Regression model width~length of crabs body
#
# Call:
# lm(formula = CW ~ CL, data = crabs)
#
# Residuals:
    # Min      1Q  Median      3Q     Max
# -1.7683 -0.6088  0.1075  0.5394  1.8092
#
# Coefficients:
            # Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
# (Intercept) 1.089919   0.257490   4.233 3.53e-05 ***
# CL          1.100266   0.007831 140.504  < 2e-16 ***
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#
# Residual standard error: 0.7864 on 198 degrees of freedom
# Multiple R-squared:  0.9901,  Adjusted R-squared:   0.99
# F-statistic: 1.974e+04 on 1 and 198 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

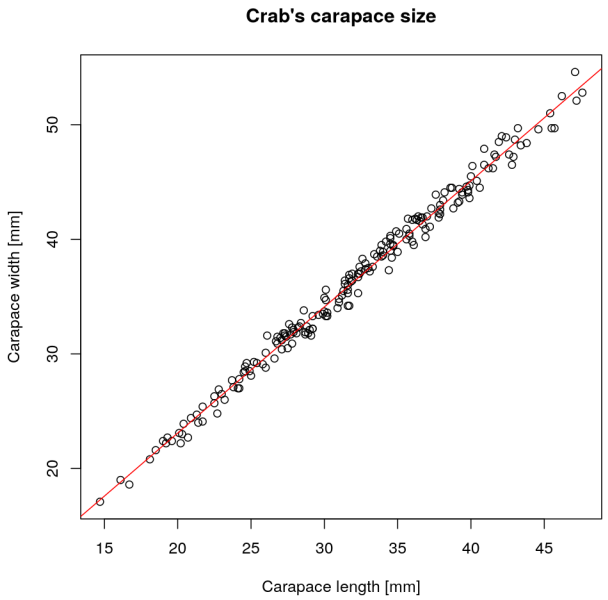
1.2 Wykresy

Generujemy wykresy do zadania, które pozwolą nam na lepszą analizę naszego modelu.

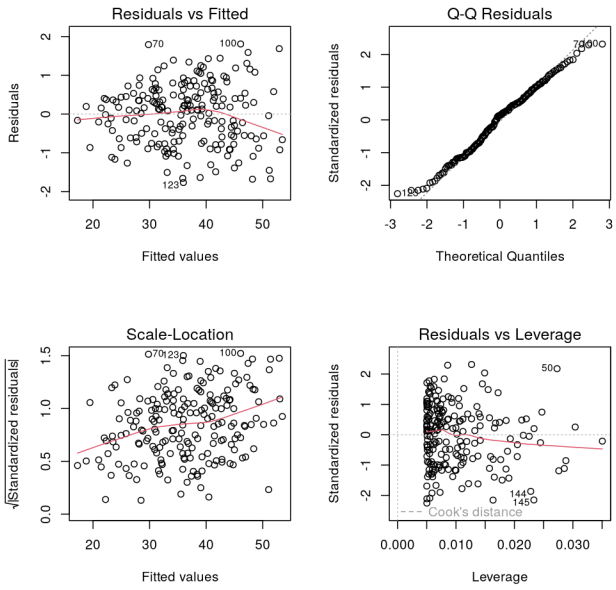
```
png(file = "plots/scatterplot.png", height=1000, width=1000, res=150);
plot(x=crabs$CL, y=crabs$CW, xlab="Carapace length [mm]",
  ylab="Carapace width [mm]", main="Crab's carapace size");
abline(reg = regression, col = "red");
dev.off();

png(file = "plots/model_plots.png", height=1000, width=1000, res=150);
par(mfrow = c(2,2));
plot(regression);
dev.off();
```

1.3 Scatterplot



1.4 Wykresy diagnostyczne



1.5 Wnioski

Patrząc na wartość R-squared możemy wywnioskować, że nasz model wyjaśnia 99% zmienności szerokości ciała kraba na podstawie jego długości. Sugeruje to, że długość ciała ma silny wpływ na jego szerokość.

Widzimy że wszyskie residuals, mieszczą się w przedziale [-2;2], co oznacza, że wartości faktyczne są bardzo mało oddalone od wartości, które przewiduje nasz model.

Na podstawie wartości F-statistic i p-value, możemy odrzucić hipotezę zerową, że nie ma relacji pomiędzy szerokością a długością ciała kraba.

Patrząc na scatterplot widzimy, że wszystkie punkty są blisko czerwonej lini (lini przewidywanej przez nasz model) i nie ma wartości odstających, co sugeruje że model jest dobrze dopasowany.

Z wykresu Residuals vs Fitted, możemy odczytać że liniowość jest zachowana (patrząc na czerwoną linię), nie ma dużych wartości odstających (wszystkie są w miarę zgrupowane), oraz że nasze wartości są homoskedastyczne (tzn. mają podobną wariancje). Wykres Scale-Location potwierdza homoskedastyczność, którą ustaliliśmy wcześniej.

Z wykresu kwantyl-kwantyl widzimy, że nasze wartości mają rozkład podobny do normalnego, co wskazuje, że założenie o normalności reszt jest spełnione i nasz model może być odpowiedni. Możemy jednak zwrócić uwagę na lekko długie ogony naszego rozkładu, ale ich odchylenie od lini prostej wykresu jest stosunkowo małe i występuje dla bardzo małej ilości wartości.

Z wykresu Residuals vs Leverage widzimy, że rozpiętość wartości na wykresie jest stosunkowo równa i żadna wartość nie przekracza dystansu Cook'a, przez co możemy stwierdzić, że nasz model nie ma dużo wartości odstających.

Na podstawie powyższych obserwacji możemy stwierdzić, że nasz model regresji liniowej jest dobrze dopasowany do danych.

2 Zadanie 2

2.1 Współczynniki regresji

Zakładamy, że mamy n obserwacji (x_i, y_i), gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$. Wiemy także, że model regresji liniowej ma postać $y_i = b_0 + b_1 x_i$

Chcemy wyznaczyć b_0 i b_1, które minimalizują sumę kwadratów reszt. W tym celu zapiszmy sumę kwadratów reszt jako funkcje dwóch zmiennych b_0 i b_1.

$$X(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b_0 + b_1 x_i))^2 \tag{1}$$

Aby znaleźć minima naszej funkcji za względu na parametry b_0 i b_1, różniczkujemy ją po b_0 i b_1 i przyrównujemy do 0.

Dla b_0:

$$\frac{\partial X}{\partial b_0} = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - (b_0 + b_i x_i)) = 0 \tag{2}$$

Co po uproszczeniu da nam:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

Dla b_1:

$$\frac{\partial X}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - (b_0 + b_i x_i)) = 0 \tag{4}$$

Co po uproszczeniu da nam:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = b_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{5}$$

Wyliczamy b_0 korzystając ze wzoru na średnią ($\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} x_i$):

$$n\overline{y} = n b_0 + n\overline{x} b_1 \Rightarrow b_0 = \overline{y} - \overline{x} b_1 \tag{6}$$

Wyliczamy b_1 korzystając ze wzory na średnią oraz wyliczonego wcześniej przez nas b_0

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (\overline{y} - \overline{x} b_1) \sum_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = n\overline{x}\overline{y} - b_1 n\overline{x}^2 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{7}$$

Otrzymujemy więc:

$$b_0 = \overline{y} - \overline{x} b_1 \tag{8}$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2} \tag{9}$$

2.2 Dowód 1

Rozwijamy lewą stronę:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} + n\overline{x}^2 \tag{10}$$

Ze wzoru na średnią:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \tag{11}$$

Co kończy dowód.

2.3 Dowód 2

Rozwijamy lewą stronę:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - x_i\overline{y} - y_i\overline{x} + \overline{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{y}\sum_{i=1}^{n} x_i - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{xy} \tag{12}$$

Ze wzoru na średnią:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy} - n\overline{xy} + n\overline{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy} \tag{13}$$

Zamieńmy średnie na sumy:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{14}$$

Co kończy dowód

2.4 Wzór na współczynnik b_1

Weźmy wyliczony przez nas w zadaniu 2.1 wzór na współczynnik b_1

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2} \tag{15}$$

Zamieńmy średnie na sumy

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \tag{16}$$

Podstawiamy udowodnione przez nas wzory z Dowodu 1 i Dowodu 2

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \Rightarrow b_1 = \frac{cov(x,y)}{var(x,y)} \tag{17}$$