Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie z Laboratorium 1

DOMINIK JEŻÓW

GR NR 4

Specyfikacje sprzętowe urządzenia:

- System: 80SM (LENOVO_MT_80SM_BU_idea_FM_Lenovo ideapad 310-15ISK)
- Procesor: Intel(R) Core(TM) i5-6200U CPU @ 2.30GHz
- Pamięć RAM: 8GB
- Środowisko: Jupyther Notebook

Ćwiczenie zrealizowane w języku Julia 1.8.5, wraz z wykorzystaniem pakietu Plots oraz PrettyTables

0. Opis Ćwiczenia

Celem niniejszego zadania było przeprowadzenie obliczeń dla trzech różnych typów układów równań. Pierwszy układ dotyczył źle uwarunkowanego układu równań, drugi układ był dobrze uwarunkowany, natomiast trzeci układ opierał się na macierzy współczynników będącej macierzą diagonalną.

1. Źle uwarunkowany układ równań

Analizując tabelę 1.1, można zauważyć, że dla precyzji Float64, wyniki obliczeń były zadowalające dla wartości n maksymalnie równych 12. Dla tych rozmiarów macierzy, błędy obliczeniowe są bardzo małe i wynoszą rzędy 10^(-14) lub mniejsze. Czasy obliczeń dla tych przypadków są również niewielkie.

Dla wartości n większych niż 12, można zauważyć, że błędy obliczeniowe i czasy obliczeń zaczynają rosnąć. Wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy, uwarunkowanie macierzy również wzrasta, co prowadzi do większych błędów obliczeniowych. Dla wartości n większych niż 12, błędy obliczeniowe stają się znaczące, a czasy obliczeń wydłużają się.

n	Uwarunkowanie macierzy	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy	Czas obliczeń
3	482.92	4.66e-15	5.88e-15	0.000037 s
4	17032.90	1.48e-14	1.50e-14	0.000024 s
5	591877.12	1.00e-11	1.43e-11	0.000065 s
6	20378500.00	1.03e-10	1.51e-10	0.000048 s
7	698046100.00	6.42e-9	9.25e-9	0.000031 s
8	23839682280.00	8.15e-9	1.29e-8	0.000042 s
9	812689926800.00	1.25e-6	2.04e-6	0.000056 s
10	27673395684000.00	3.95e-4	6.22e-4	0.000066 s
11	941947271727300.00	7.08e-4	1.13e-3	0.000085 s
12	31319868266866000.00	1.57e-2	2.58e-2	0.000093 s
13	556076893565339500.00	6.60e+0	1.18e+1	0.000120 s
14	931241882086404100.00	1.26e+0	2.03e+0	0.000131 s
15	1544893756073606400.00	6.17e+0	1.03e+1	0.000177 s
16	641836588031790200.00	2.56e+0	5.25e+0	0.000300 s
17	1081644863632398000000.00	7.76e+0	1.17e+1	0.000188 s
18	734834296101390800000.00	4.05e+1	7.15e+1	0.000231 s
19	1773321189980072400.00	2.34e+1	4.58e+1	0.000457 s
20	1405948720706224300 0.00	2.75e+0	4.67e+0	0.000495 s

Tab. 1.1 obliczenia dla ćwiczenia pierwszego precyzja Float64

Analizując tabelę 1.2, można zauważyć, że dla wartości n równych 4 i 5, uzyskano poprawne wyniki obliczeń. Błędy obliczeniowe dla tych rozmiarów macierzy są bardzo małe i wynoszą odpowiednio 1.34e-5 i 1.64e-12. Czasy obliczeń dla tych przypadków są również niewielkie.

Dla wartości n równych 6, błąd obliczeniowy wzrósł do rzędu 20%. Mimo to, wynik dla tej wartości n można zaakceptować, ponieważ błąd ten nadal jest stosunkowo niewielki.

Jednak dla wartości n większych niż 6, można zauważyć, że błędy obliczeniowe i czasy obliczeń zaczynają rosnąć. Wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy, uwarunkowanie macierzy również rośnie, co prowadzi do większych błędów obliczeniowych. Dla wartości n większych niż 10, błędy obliczeniowe osiągają już znaczące wartości, a czasy obliczeń zaczynają się wydłużać.

n	Uwarunkowanie macierzy	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy	Czas obliczania układu (s)
4	17032.688	1.34e-5	1.74e-5	0.000030
5	592264.2	1.64e-12	2.20e-12	0.000021
6	2.0670938e7	0.122	0.179	0.000028
7	1.4037308e9	2.37	3.42	0.000034
8	1.3825076e9	4.68	7.21	0.000045
9	2.5577247e9	14.1	20.8	0.000058
10	1.0441515e9	10.7	21.1	0.000070
11	8.850115e9	2.07	3.64	0.000083
12	5.4787057e9	7.81	14.99	0.000109
13	4.8725946e10	2.91	4.98	0.000151
14	9.655593e9	3.75	5.83	0.000208
15	8.619993e9	2.99	5.90	0.000158
16	2.495352e9	4.44	9.32	0.000334
17	8.821021e9	4.00	9.22	0.000232
18	4.9829524e9	7.00	14.43	0.000305
19	1.5992415e10	7.56	18.1	0.000386
20	1.1936921e10	77.0	160.3	0.000502

Tab. 1.2 obliczenia dla ćwiczenia pierwszego Float32

Podsumowując, obie tabele wskazują na wzrost błędów obliczeniowych i czasów obliczeń wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy. Jednak tabela 1.1 (precyzja Float64) wykazuje mniejsze błędy obliczeniowe i krótsze czasy obliczeń w porównaniu do tabeli 1.2 (precyzja Float32). Precyzja danych ma istotny wpływ na dokładność wyników, dlatego wybór odpowiedniej precyzji jest istotny w przypadku wymagających obliczeń numerycznych.

2. Dobrze uwarunkowany układ równań

W przypadku dobrze uwarunkowanego układu równań nawet dla dużych wartości współczynnika n otrzymywane błędy są niski, co czyni rozwiązanie akceptowalne

Błędy maksymalne i średniokwadratowe są bardzo małe, rzędu 10^(-16) do 10^(-14), dla n=3-6. Oznacza to, że wyniki obliczeń są bardzo bliskie wartości dokładnych. Jednak dla większych wartości n, błędy obliczeniowe rosną, co wskazuje na mniejszą dokładność wyników.

Dla wartości n=50-1000, błędy maksymalne i średniokwadratowe są rzędu 10^(-11) do 10^(-10), co wskazuje na większe odchylenie wyników od wartości dokładnych.

Warto zauważyć, że dla bardzo dużych wartości n (np. n=1000), błędy obliczeniowe oraz czas obliczania układu rosną i mogą mieć wpływ na dokładność oraz przydatność wyników.

n	Uwarunkowanie macierzy	Czas obliczania układu	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
3	6.66	0.000034	4.44e-16	5.09e-16
4	12.21	0.000018	4.44e-16	5.55e-16
5	19.66	0.000027	3.33e-16	4.71e-16
6	29.04	0.000031	4.44e-16	6.38e-16
7	40.39	0.000047	8.88e-16	1.17e-15
8	53.72	0.000077	1.89e-15	2.46e-15
9	69.05	0.000087	1.89e-15	3.28e-15
10	86.39	0.000089	2.33e-15	4.96e-15
11	105.76	0.000046	7.55e-15	9.57e-15
12	127.16	0.000058	3.77e-15	6.23e-15
13	150.60	0.000064	8.44e-15	1.31e-14
14	176.10	0.000176	7.55e-15	1.52e-14
15	203.64	0.000278	5.55e-15	1.05e-14
16	233.26	0.000358	9.10e-15	2.00e-14
17	264.93	0.000189	7.77e-15	1.49e-14
18	298.68	0.000204	8.99e-15	1.89e-14
19	334.50	0.000530	8.88e-15	1.87e-14
20	372.41	0.000546	1.09e-14	2.89e-14
50	2487.032	0.004655	1.24e-13	2.30e-13
60	3615.902	0.008471	2.15e-13	6.76e-13
70	4958.039	0.013738	1.48e-13	4.66e-13
80	6513.905	0.049465	3.16e-13	9.68e-13
90	8283.862	0.020602	4.18e-13	9.97e-13
100	10268.203	0.039609	8.57e-13	2.48e-12
200	41942.699	0.316656	2.33e-12	8.18e-12
300	95198.173	0.439918	5.63e-12	2.75e-11
400	170087.838	0.798750	9.69e-12	4.17e-11
500	266640.507	1.399609	1.88e-11	1.26e-10
1000	1.0748e6	11.932040	6.47e-11	4.08e-10

Tab. 2.1 obliczenia dla ćwiczenia drugiego Float64

Błędy maksymalne i średniokwadratowe w tabeli 2.2 są również rzędu 10^(-7) do 10^(-2) dla większości wartości n. Jednak w porównaniu z tabelą 1.1, błędy wydają się być nieco większe. Dla małych wartości n (3-6), błędy są nadal niskie, ale dla większych wartości n, błędy rosną.

Dla wartości n=1000, błędy maksymalne i średniokwadratowe wynoszą odpowiednio 8.15e-3 i 5.60e-2. Oznacza to, że wyniki obliczeń mają znaczne odchylenie od wartości dokładnych.

n	Uwarunkowanie macierzy	Czas obliczania układu (s)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
3	6.663	0.000013	9.14e-8	1.01e-7
4	12.206	0.000017	1.63e-7	2.23e-7
5	19.655	0.000023	4.85e-7	6.29e-7
6	29.040	0.000030	9.20e-8	1.65e-7
7	40.387	0.000047	2.09e-7	2.44e-7
8	53.717	0.000080	4.75e-7	6.63e-7
9	69.046	0.000039	1.50e-7	2.43e-7
10	86.389	0.000038	3.41e-7	5.68e-7
11	105.757	0.000092	1.13e-6	1.62e-6
12	127.158	0.000109	6.59e-7	1.22e-6
13	150.602	0.000317	1.69e-6	3.71e-6
14	176.095	0.000234	3.28e-7	4.63e-7
15	203.644	0.000284	2.30e-6	4.13e-6
16	233.255	0.000433	1.86e-7	3.37e-7
17	264.933	0.000293	5.05e-6	8.25e-6
18	298.680	0.000516	3.88e-7	6.30e-7
19	334.503	0.000375	3.43e-6	6.61e-6
30	866.388	0.001	7.66e-6	1.52e-5
40	1570.810	0.002	1.57e-5	4.07e-5
50	2487.023	0.006	3.46e-5	8.57e-5
60	3615.903	0.008	2.88e-5	7.31e-5
70	4958.005	0.029	3.25e-5	6.56e-5
80	6513.862	0.015	5.43e-5	1.81e-4
90	8283.800	0.023	5.42e-5	1.95e-4
100	10268.228	0.035	6.86e-5	2.34e-4
200	41940.080	0.328	3.87e-4	1.54e-3
300	95197.870	0.385	6.54e-4	2.69e-3
400	170090.720	0.781	1.19e-3	6.65e-3
500	266622.440	1.420	1.72e-3	9.37e-3
1000	1.0749172e6	10.655	8.15e-3	5.60e-2

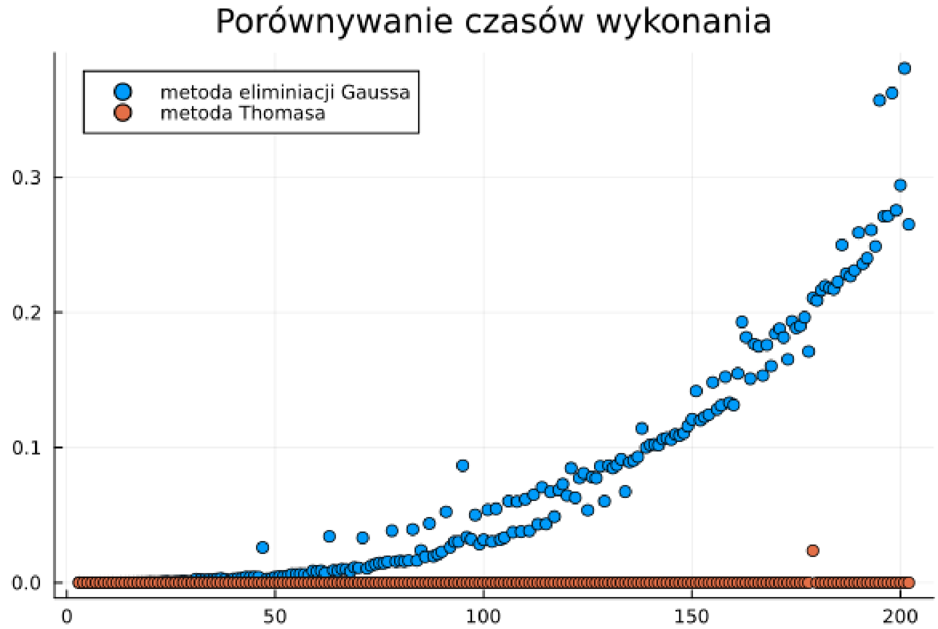
Tab. 2.2 obliczenia dla ćwiczenia drugiego Float32

tabela 2.2 wskazuje na większe błędy obliczeniowe w porównaniu z tabelą 1.1. Wyniki dla n=3-6 wydają się dawać najbardziej wiarygodne wyniki, podczas gdy dla większych wartości n dokładność wyników maleje. Wartości błędów dla n=1000 są znaczące, co wskazuje na dużą niestabilność wyników dla tej wartości.

3. Układem równań z trójdiagonalną macierzą współczynników

Możemy zauważyć, że dla małych układów (4 - 30 niewiadome) obie metody mają podobne czasy wykonania, jednak metoda Thomasa jest nieco szybsza. Jednak wraz ze wzrostem liczby niewiadomych, metoda eliminacji Gaussa zaczyna mieć dłuższe czasy wykonania niż metoda Thomasa. Dla dużych układów (100 niewiadomych) metoda eliminacji Gaussa ma znacznie dłuższy czas wykonania (0.0603311 s) w porównaniu do metody Thomasa (2.959e-6 s).

Ogólnie rzecz biorąc, metoda Thomasa jest bardziej efektywna dla układów z trójdiagonalną macierzą współczynników, ponieważ ma złożoność obliczeniową O(n), gdzie n to liczba niewiadomych, podczas gdy metoda eliminacji Gaussa ma złożoność O(n^3).



Rys 3.1 Porównanie czasów wykonania algorytmów metoda eliminacji Gaussa, metoda Thomasa

Na podstawie wykresu 3.1 można zauważyć, że metoda Thomasa osiąga znacznie krótsze czasy wykonania niż metoda eliminacji Gaussa. Istnieje możliwość, że jest to spowodowane różnicą w podejściu do przetwarzania danych w mojej implementacji.

W przypadku metody eliminacji Gaussa stosuję proces preprocesingu danych, który może wymagać dodatkowego czasu. Jednak w mojej implementacji metody Thomasa od razu obliczam układ równań bez potrzeby wykonywania dodatkowych kroków przygotowawczych.

4. Wnioski

Precyzja danych ma istotny wpływ na dokładność i czas obliczeń. Tabela 1.1 (precyzja Float64) wykazuje mniejsze błędy obliczeniowe i krótsze czasy obliczeń w porównaniu do tabeli 1.2 (precyzja Float32). Wybór odpowiedniej precyzji danych jest istotny w przypadku wymagających obliczeń numerycznych.

Dla źle uwarunkowanego układu równań, błędy obliczeniowe i czasy obliczeń rosną wraz z rozmiarem macierzy. Dla wartości n większych niż 12, błędy obliczeniowe stają się znaczące, a czasy obliczeń wydłużają się.

Dla dobrze uwarunkowanego układu równań, nawet dla dużych wartości n, uzyskiwane błędy są niskie, co czyni rozwiązanie akceptowalnym. Jednak dla bardzo dużych wartości n, błędy obliczeniowe oraz czas obliczeń mogą rosnąć i wpływać na dokładność i przydatność wyników.

W przypadku dobrze uwarunkowanego układu równań, błędy obliczeniowe dla wartości n od 3 do 6 są bardzo małe, rzędu 10^(-16) do 10^(-14). Dla większych wartości n, błędy rosną, ale nadal są stosunkowo niewielkie do n=50-1000.

Dla źle uwarunkowanego układu równań, błędy maksymalne i średniokwadratowe są rzędu 10^(-7) do 10^(-2) dla większości wartości n. Dla wartości n=1000, błędy osiągają większe wartości, co oznacza znaczne odchylenie wyników od wartości dokładnych.

Wnioski potwierdzają, że uwarunkowanie macierzy ma istotny wpływ na dokładność wyników obliczeń. Im bardziej macierz jest źle uwarunkowana, tym większe błędy obliczeniowe można oczekiwać.