Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Sprawozdanie z Laboratorium 5

DOMINIK JEŻÓW

GR NR 4

Specyfikacje sprzętowe urządzenia:

- System: 80SM (LENOVO_MT_80SM_BU_idea_FM_Lenovo ideapad 310-15ISK)
- Procesor: Intel(R) Core(TM) i5-6200U CPU @ 2.30GHz
- Pamięć RAM: 8GB
- Środowisko: Jupyther Notebook

Ćwiczenie zrealizowane w języku Julia 1.8.5, wraz z wykorzystaniem pakietu LinearAlgebra, Plots, PettyTables oraz PrettyNumbers

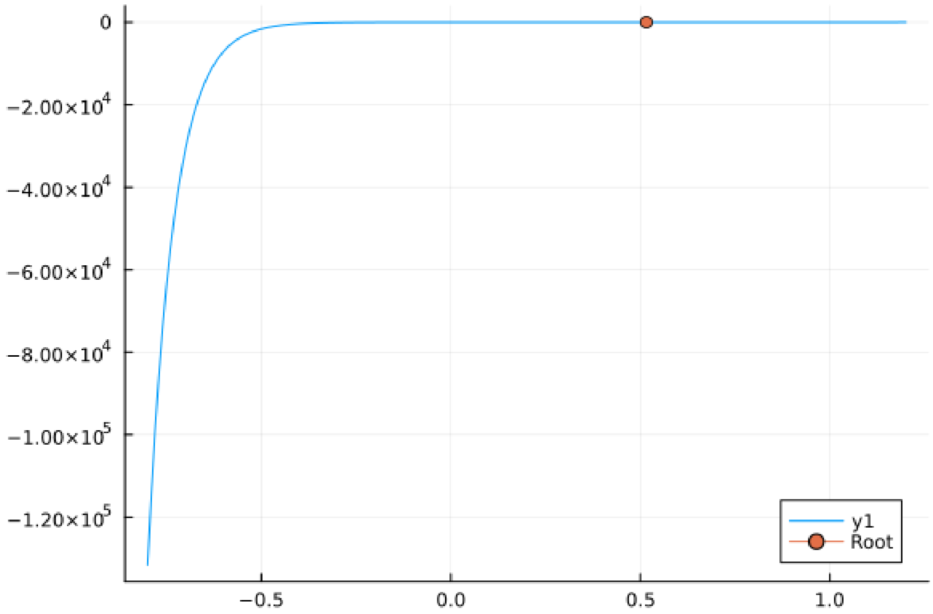
0. Opis ćwiczenia:

Zadanie polega na znalezieniu rozwiązań równania f(x) = 0 na danym przedziale [a, b] przy użyciu metody Newtona oraz metody siecznych. Metoda Newtona polega na iteracyjnym przybliżaniu pierwiastków, gdzie punkty startowe są wybierane z krokiem 0.1 na przedziale [a, b].

1. Zadana funkcja:

$$f\,(\mathrm{x}) = (x-1)e^{-m\cdot x} + x^n, n = 12,\ m = 14$$
$$[a,\ b] = [-0{,}8;\ 1{,}2]$$

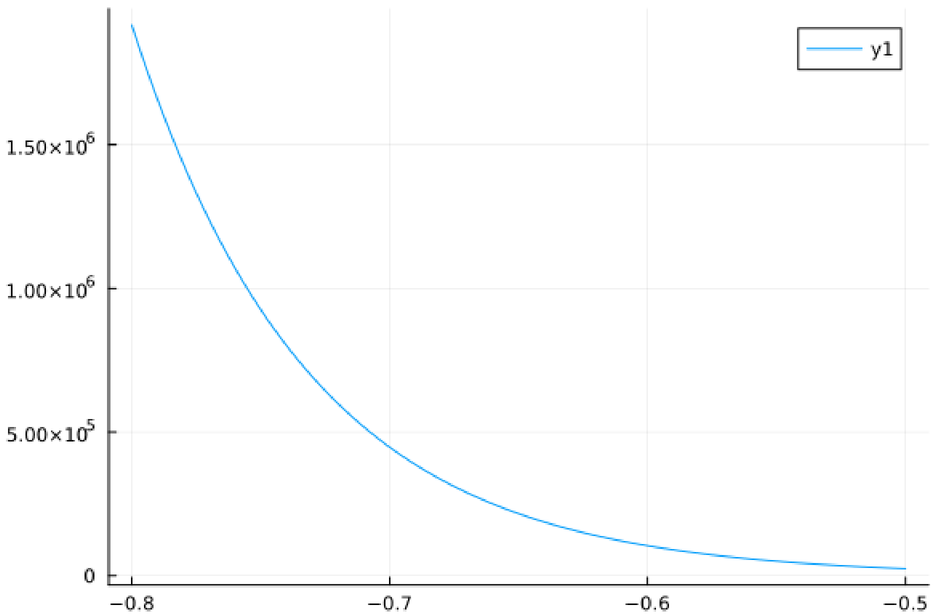
Wzór 1.1 wzór podanej funkcji



Rys 1.1 wykres funkcji na podanym przedziale

Podana funkcja przyjmuje wartość zero dla argumentu równego około 0.515749 (na wykresie 1.1 zaznaczanego czerwoną kopką).

Warto także zauważyć, że dla argumentów z przedziału [-0.8; 0.5] pochodna funkcji przyjmuje wysokie wartości. (widać to na rysunku 1.2) To zjawisko morze wpłynąć na wyniki i doprowadzić do katastrofalnych wyników.



Rys 1.2 wykres pochodnej funkcji na przedziale [-0.8; 0.5]

2. Sposoby dobierania punktów startowych:

2.1 Metoda Newtona:

Dla metody Newtona trzeba było wybrać tylko jeden punkt starowi x0, który wybierałem na trzy sposoby, które opierały się o wybór punktu stadowego który później zwiększaliśmy lub zmniejszaliśmy o 0.1.

- Pięć punktów startowych po prawej stronie lewego końca przedziału - a, a+0.1, a+0.2, …
- Pięć punktów startowych po lewej stronie lewego końca przedziału - a, a-0.1, a-0.2, …
- Pięć punktów startowych po lewej stronie prawego końca przedziału - b, b-0.1, b-0.2, …

2.2 Metoda Siecznych:

Dla metody siecznych na początku wybierałem dwa punkty startowe x0, x1. W tym przypadku analogicznie do metody Newtona wybierałem je na trzy sposoby.

- Pięć punktów startowych x0 po prawej stronie lewego końca przedziału oraz punkt x1 stale równy prawemu końcowi przedziału - x0 ∈ {a, a+0.1, a+0.2, …} x1 = b
- Pięć punktów startowych x0 po lewej stronie lewego końca przedziału oraz punkty x1 po lewej stronie prawego końca przedziału - x0 ∈ {a, a-0.1, a-0.2, …}, x1 ∈ {b, b-0.1, b-0.2, …}
- Punkt x0 stale równy lewemu końcowi przedziału oraz pięć punktów startowych x1 po lewej stronie prawego końca przedziału - x0 = a, x1 ∈ {b, b-0.1, b-0.2, …}

3. Kryteria stopu

Zastosowałem 2 różne kryteria stopu z czego drugie wydaje się bardziej odporne na błędy, gdyż bezpośrednio dotyczy oczekiwanego wyniku (szukamy takiej wartości x dla której funkcja przyjmuje zero f(x) = 0)

1. Kryterium zbieżności wyznaczonych przybliżeń miejsca zerowego: $|x_n - x_{n+1}| \leq \epsilon$
2. Kryterium zbieżności wartości funkcji w wyznaczonych przybliżeniach miejsc zerowych: $|f(x_n)| \leq \epsilon$

Obie metody badałem dla wartości epsilon równe 1e-6, 1e-7, 1e-8, … 1e-13.

4. Wyznaczone miejsce zerowe

2.1 Metoda Newtona:

Wszystkie przeprowadzone eksperymenty (różne dobory punktów startowych, różne wartości epsilon oraz różne warunki stopu) dla metody Newtona dawały poprawny wynik 0.515749.

2.2 Metoda Siecznych:

Metoda ta zwracała złe wyniki, gdy stosowaliśmy kryterium zbieżności wyznaczanych punktów oraz wybieraliśmy punkty startowe z lewej strony przedziału (jak widać w tabelach 2.1 oraz 2.2)

		ϵ							
x0	x1	1×10^{-6}	1×10^{-7}	1×10^{-8}	1×10^{-9}	1×10^{-10}	1×10^{-11}	1×10^{-12}	1×10^{-13}
-0.8	1.2	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-0.9	1.1	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-1.0	1.0	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-1.1	0.9	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-1.2	0.8	0.799999	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-1.3	0.7	0.7	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-1.4	0.6	0.6	0.6	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749

Tab. 2.1 Wyznaczone miejsce zerowe metodą siecznych z kryterium stopu nr 1

Wydaje mi się, że zjawisko to występuje, ponieważ bierzemy punkty z lewej strony przedziału, gdzie funkcja jest bardziej nachylona i w wyniku tego wyznaczamy kolejne punkty które są blisko siebie co sprawia, że kończymy iterować, warto zauważyć, że zwrócone błędne wyniki są równe wartości punku x1.

Na podstawie tabeli Tab. 2.2 oraz wykresu Rys 1.1   wyraźniej widać, że problemem jest wybór punktów startowych lewej strony przedziału. Warto też zauważyć, że dla kryterium zbieżności wartości funkcji ten problem nie zaszedł co wskazuje na większe bezpieczeństwo tej metody w tym przypadku.

		ϵ							
x0	x1	1×10^{-6}	1×10^{-7}	1×10^{-8}	1×10^{-9}	1×10^{-10}	1×10^{-11}	1×10^{-12}	1×10^{-13}
-0.8	1.2	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-0.9	1.1	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-1.0	1.0	0.999999	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-1.1	0.9	0.9	0.9	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-1.2	0.8	0.8	0.8	0.8	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-1.3	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.515749	0.515749	0.515749	0.515749
-1.4	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.515749	0.515749

Tab. 2.2 Wyznaczone miejsce zerowe metodą siecznych z kryterium stopu nr 1

5. Liczba iteracji

Badając liczbę iteracji potrzebnych do wyznaczenia miejsca zerowego można było zauważyć, że dla obu metod były to wartości tego samego rzędy różniące się o maksymalnie 5 iteracji (wyłączając przypadki, gdy metoda siecznych popełniała błąd wtedy to ilość iteracji była równa 1)

6. Wnioski

Wykorzystanie metody Newtona i kryterium zbieżności wartości funkcji wydaje się być bezpieczniejsze. Istnieją jednak pewne minusy związane z tą metodą. Po pierwsze, konieczne jest znać pochodną funkcji, co może stanowić problem. Po drugie, obliczanie wartości funkcji w punkcie może być czasochłonne.

W przypadku metody siecznych korzystamy z przybliżonej pochodnej i wskazane jest wybieranie punktów bliskich sobie. Wymaga to zastosowania kryterium zbieżności wartości funkcji.