

Fusão de evidências na detecção de bordas em Imagens PolSAR

Anderson Adaime de Borba

EXAME DE QUALIFICAÇÃO APRESENTADO
A
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
DA
UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa de Pós graduação em Engenharia Elétrica e Computação -
PPGEEC

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Marengoni

Coorientador: Prof. Dr. Alejandro César Frery Orgambide

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, 29 de outubro de 2018

Sumário

Lista de Abreviaturas	v
Lista de Símbolos	vii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Metodologia	1
1.1 Modelagem estatística para dados PolSAR	1
1.1.1 Matriz de coerência polarimétrica de Pauli (T_4) e matriz de covariância lexicográfica (C_4)	3
1.1.2 Matriz de coerência polarimétrica de Pauli (T_3) e matriz de covariância lexicográfica (C_3)	4
1.2 Estatística do Ruido Speckle	5
1.2.1 Formação do speckle	5
1.2.2 Modelo de Rayleigh para o <i>speckle</i>	6
1.3 Funções de densidade	9
1.3.1 Função de densidade Wishart para os canais de intensidade	9
1.3.2 Função de densidade para a magnitude do produto \mathbf{S}_i e \mathbf{S}_j	11
1.3.3 Função de densidade para cada canal complexo	12
1.3.4 distribuição conjunta para $(R_{ii}, R_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$	13
1.4 Modelos para dados dados	15
1.5 Método da máxima verossimilhança aplicado nas funções densidades de probabilidades	22
1.5.1 Método da verossimilhança aplicado na pdf univariada Γ	22
1.5.2 Método da verossimilhança aplicado na PDF univariada magnitude do produto	24
1.5.3 Método da verossimilhança aplicado na PDF univariada razão de intensidades	24
2 Detecção de bordas em imagens PolSAR	27
2.1 Estimativa por Máxima verossimilhança (MLE)	28
2.2 Função de verossimilhança	28
2.3 Estimativa de máxima verossimilhança aplicada a distribuição Wishart	29
Referências Bibliográficas	31

Lista de Abreviaturas

SAR	Imagens obtidas com radar de abertura sintética
PolSAR	Imagens obtidas com radar de abertura sintética polarimétrica
p.d.f	Função densidade de probabilidade
LoG	Detector de borda usando o laplaciano da gaussiana
MMQ	Método dos quadrados mínimos
MLE	Método de estimativa de máxima verossimilhança
GenSA	Método Simulated annealing
ROI	Método Simulated annealing

Lista de Símbolos

L	Número de visadas em uma imagem PolSAR
Σ	Matriz de covariância hermitiana e definida positiva
$E[\cdot]$	Valor esperado
Γ	Função Gamma
Γ_m	Função Gamma multivariada
$W(\Gamma, L)$	Distribuição Wishart

Lista de Figuras

1.1	Distribuição intensidade multiplas visadas com $\sigma = 0.01$	11
1.2	Distribuição interferograma multiplas visadas.	12
1.3	Distribuição diferença de fase <i>n-looks</i>	20

Lista de Tabelas

1.1 Tabela 10

Capítulo 1

Metodologia

1.1 Modelagem estatística para dados PolSAR

Os sistemas SAR totalmente polarimétricos transmitem pulsos de micro-ondas polarizados ortogonalmente e medem componentes ortogonais do sinal recebido. Para cada pixel, a medida resulta em uma matriz de coeficientes de espalhamento. Esses coeficientes são números complexos que descrevem no sistema SAR a transformação do campo eletromagnético transmitido para o campo eletromagnético recebido.

A transformação pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \frac{e^{ikr}}{r} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h^t \\ E_v^t \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

onde k denota o número de onda, i é um número complexo e r é a distância entre o radar e o alvo. O campo eletromagnético com componentes E_i^j , o índice subscrito denota polarização horizontal (h) ou vertical (v), enquanto o índice sobrescrito indica a onda recebida (r) ou transmitida (t). Definindo $S_{i,j}$ como os coeficientes de espalhamento complexo, tal que o índice i e j são associados com o recebimento com a transmissão das ondas, por exemplo, o coeficiente de espalhamento S_{hv} está associado a onda transmitida na direção vertical (v) e recebida na direção horizontal (h).

Sendo conhecido cada um dos coeficientes, a matriz de espalhamento complexa \mathbf{S} é definida por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

considerando a diagonal principal da matriz de espalhamento podemos definir a co-polarização relacionando a polarização das ondas transmitidas e recebidas nas mesmas direções. Ainda podemos definir a polarização cruzada como sendo a relação entre elementos da diagonal secundária da matriz de espalhamento relacionando assim os estados de polarizações ortogonais (ver Ref [Lee e Pottier \(2009\)](#)).

A definição da matriz \mathbf{S} depende da definição do sistema de coordenadas, se a antena transmissora e receptora de sinal estão localizadas na mesma posição consideramos as medidas mono estáticas e consideramos o sistema de coordenada **BSA** - *Back Scattering Alignment*. Podemos afirmar que o sistema de coordenadas da transmissão e recepção de sinal são coincidentes.

A potência total espalhada no caso de um sistema de radar polarimétrico é o chamado *span*, sendo definido no caso mais geral como:

$$\text{Span}(\mathbf{S}) = \text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) = |S_{hh}|^2 + |S_{hv}|^2 + |S_{vh}|^2 + |S_{vv}|^2, \quad (1.3)$$

onde o operador $\text{tr}(\cdot)$ é o traço de uma matriz.

O entendimento de como extrair informação da matriz de espalhamento \mathbf{S} pode ser alcançado coma construção de um sistema de vetores. Usando a matriz de espalhamento podemos construir

o seguinte vetor

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} \text{tr}(S\Psi), \quad (1.4)$$

onde Ψ é uma base para o espaço das matrizes complexas 2×2 .

Existe na literatura diferentes bases para o mesmo espaço matricial. Neste trabalho será considerado duas bases para os espaço das matrizes nomeadas como base de Pauli e base lexicográfica.

A base de Pauli pode ser definida como,

$$\{\Psi_P\} = \left\{ \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (1.5)$$

A base lexicográfica pode ser definida como,

$$\{\Psi_L\} = \left\{ 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad (1.6)$$

Usando as bases (1.5), (1.6) e a equação (1.17) geramos os seguintes vetores de espalhamento. A matriz de espalhamento pode ser representada pelo vetor característico de Pauli 4-D,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv}, & S_{hh} - S_{vv}, & S_{hv} + S_{vh}, & i(S_{hv} - S_{vh}) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} [k_1, k_2, k_3, k_4] \quad (1.7)$$

e pelo vetor característico lexicográfico 4-D

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh}, & S_{hv}, & S_{vh}, & S_{vv} \end{bmatrix}^T = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4] \quad (1.8)$$

A matriz de espalhamento pode ser relacionada com os vetores (1.7) e (1.8) da seguinte maneira,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_3 - ik_4 \\ k_3 + ik_4 & k_1 - k_2 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

As constantes 2 e $\sqrt{2}$ nas equações (1.5) e (1.6) tem o intuito de manter a norma dos vetores de espalhamento iguais independente da escolha das bases. O produto interno escolhido é o padrão para o espaço vetorial dos vetores complexos de dimensão 4.

Podemos assim garantir que a invariância da potencia total, isto é,

$$\begin{aligned} \text{Span}(\mathbf{S}) &= \text{tr}(SS^H) \\ &= \text{tr}(SS^H) = |S_{hh}|^2 + |S_{hv}|^2 + |S_{vh}|^2 + |S_{vv}|^2 \\ &= \mathbf{k}^H \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 \\ &= \boldsymbol{\Omega}^H \boldsymbol{\Omega} = |\boldsymbol{\Omega}|^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

A transformação linear unitária $U_{4(L \rightarrow P)}$ é definida como uma transformação que aplica o vetor na base lexicográfica em um vetor na base de Pauli. Definimos a notação $\text{SU}(4)$ para designar a transformação unitária.

$$\begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ S_{hv} + S_{vh} \\ i(S_{hv} - S_{vh}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{hv} \\ S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

desta maneira definimos,

$$U_{4(L \rightarrow P)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

1.1.1 Matriz de coerência polarimétrica de Pauli (T_4) e matriz de covariância lexicográfica (C_4)

Para o caso biestático definimos a matriz de coerência polarimétrica de Pauli

$$\mathbf{T}_4 = \mathbf{k}\mathbf{k}^H = \begin{bmatrix} |k_1|^2 & k_1\bar{k}_2 & k_1\bar{k}_3 & k_1\bar{k}_4 \\ k_2\bar{k}_1 & |k_2|^2 & k_2\bar{k}_3 & k_2\bar{k}_4 \\ k_3\bar{k}_1 & k_3\bar{k}_2 & |k_3|^2 & k_3\bar{k}_4 \\ k_4\bar{k}_1 & k_4\bar{k}_2 & k_4\bar{k}_3 & |k_4|^2 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

e a matriz de covariância lexicográfica

$$\mathbf{C}_4 = \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^H = \begin{bmatrix} |\Omega_1|^2 & \Omega_1\bar{\Omega}_2 & \Omega_1\bar{\Omega}_3 & \Omega_1\bar{\Omega}_4 \\ \Omega_2\bar{\Omega}_1 & |\Omega_2|^2 & \Omega_2\bar{\Omega}_3 & \Omega_2\bar{\Omega}_4 \\ \Omega_3\bar{\Omega}_1 & \Omega_3\bar{\Omega}_2 & |\Omega_3|^2 & \Omega_3\bar{\Omega}_4 \\ \Omega_4\bar{\Omega}_1 & \Omega_4\bar{\Omega}_2 & \Omega_4\bar{\Omega}_3 & |\Omega_4|^2 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Usando as definições e as propriedades acima teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_4 &= \mathbf{k}\mathbf{k}^H = \mathbf{U}_4\mathbf{\Omega}\mathbf{U}_4\mathbf{\Omega}^H \\ &= \mathbf{U}_4\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^H\mathbf{U}_4^H = \mathbf{U}_4\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^H\mathbf{U}_4^{-1} \\ &= \mathbf{U}_4\mathbf{C}_4\mathbf{U}_4^H = \mathbf{U}_4\mathbf{C}_4\mathbf{U}_4^{-1} \\ \mathbf{T}_4 &= \mathbf{U}_4\mathbf{C}_4\mathbf{U}_4^{-1} \end{aligned} \quad (1.15)$$

com isso, podemos concluir que

$$\text{tr } \mathbf{T}_4 = \text{tr } \mathbf{C}_4 = \text{Span}(\mathbf{S}). \quad (1.16)$$

Podemos entender as interações das ondas eletromagnéticas em alvos naturais sob a ótica do teorema da reciprocidade que considera o meio recíproco. Assim, se o meio de propagação das ondas é recíproco, isto é, de uma maneira geral as propriedades de transmissão e recebimento de uma antena são idênticos, então usaremos o teorema da reciprocidade, podemos consultar a mesma referência anterior [Lee e Pottier \(2009\)](#), para definir a matriz de espalhamento como sendo hermitiana, ou seja, a igualdade dos termos complexos (polarização cruzada) $S_{hv} = S_{vh}$.

Como anteriormente, o entendimento de como extrair informação da matriz de espalhamento \mathbf{S} pode ser alcançado com a construção de um sistema de vetores. Usando a matriz de espalhamento podemos construir o seguinte vetor

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}\Psi), \quad (1.17)$$

onde Ψ é uma base para o espaço das matrizes complexas 2×2 .

Existe na literatura diferentes bases para o mesmo espaço matricial. Neste trabalho será considerado duas bases para o espaço das matrizes nomeadas como base de Pauli e base lexicográfica.

A base de Pauli pode ser definida como,

$$\{\Psi_P\} = \left\{ \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (1.18)$$

A base lexicográfica pode ser definida como,

$$\{\Psi_L\} = \left\{ 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad (1.19)$$

Usando as bases (1.5), (1.6) e a equação (1.17) geramos os seguintes vetores de espalhamento.

A matriz de espalhamento pode ser representada pelo vetor característico de Pauli 4-D,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} & S_{hh} - S_{vv} & 2S_{hv} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} [k_1, k_2, k_3] \quad (1.20)$$

e pelo vetor característico lexicográfico 4-D

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} & S_{vv} \end{bmatrix}^T = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3] \quad (1.21)$$

As constantes 2 e $\sqrt{2}$ nas equações (1.5) e (1.6) tem o intuito de manter a norma dos vetores de espalhamento iguais independente da escolha das bases. O produto interno escolhido é o padrão para o espaço vetorial dos vetores complexos de dimensão 4.

Podemos assim garantir que a invariância da potencia total, isto é,

$$\begin{aligned} \text{Span}(\mathbf{S}) &= \text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) \\ &= \text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}^H) = |S_{hh}|^2 + 2|S_{hv}|^2 + |S_{vv}|^2 \\ &= \mathbf{k}^H \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 \\ &= \mathbf{\Omega}^H \mathbf{\Omega} = |\mathbf{\Omega}|^2 \end{aligned} \quad (1.22)$$

A transformação linear unitária $U_{4(L \rightarrow P)}$ é definida como uma transformação que aplica o vetor na base lexicográfica em um vetor na base de Pauli. Definimos a notação $\text{SU}(4)$ para designar a transformação unitária.

$$\begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ 2 * S_{hv} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{hv} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

desta maneira definimos,

$$U_{3(L \rightarrow P)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

1.1.2 Matriz de coerência polarimétrica de Pauli (T_3) e matriz de covariância lexicográfica (C_3)

Para o caso mono estático definimos a matriz de coerência polarimétrica de Pauli

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{k}\mathbf{k}^H = \begin{bmatrix} |k_1|^2 & k_1 \bar{k}_2 & k_1 \bar{k}_3 \\ k_2 \bar{k}_1 & |k_2|^2 & k_2 \bar{k}_3 \\ k_3 \bar{k}_1 & k_3 \bar{k}_2 & |k_3|^2 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

e a matriz de covariância lexicográfica

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^H = \begin{bmatrix} |\Omega_1|^2 & \Omega_1 \bar{\Omega}_2 & \Omega_1 \bar{\Omega}_3 \\ \Omega_2 \bar{\Omega}_1 & |\Omega_2|^2 & \Omega_2 \bar{\Omega}_3 \\ \Omega_3 \bar{\Omega}_1 & \Omega_3 \bar{\Omega}_2 & |\Omega_3|^2 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Usando as definições e as propriedades acima teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3 &= \mathbf{k}\mathbf{k}^H = \mathbf{U}_3 \mathbf{\Omega} \mathbf{U}_3^H \\ &= \mathbf{U}_3 \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{U}_3^H = \mathbf{U}_3 \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{U}_3^H \\ &= \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3 \mathbf{U}_3^H = \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3 \mathbf{U}_3^{-1} \\ \mathbf{T}_3 &= \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3 \mathbf{U}_3^{-1} \end{aligned} \quad (1.27)$$

com isso, podemos concluir que

$$\text{tr } \mathbf{T}_3 = \text{tr } \mathbf{C}_3 = \mathbf{Span}(\mathbf{S}). \quad (1.28)$$

Podemos concluir,

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ \sqrt{2}S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Assim, a potência total espalhada no caso do de um sistema de radar polarimétrico em meio recíproco pode ser definido como:

$$\mathbf{Span} = \text{tr}(SS^H) = |S_{hh}|^2 + 2|S_{hv}|^2 + |S_{vv}|^2, \quad (1.30)$$

1.2 Estatística do Ruído Speckle

O ruído speckle causa uma variação de intensidade pixel a pixel imprimindo um aspecto granular nas imagens SAR / PolSAR.

O speckle dificulta a interpretação e análise das imagens reduzindo a efetividade da segmentação, classificação, ou detecção de mudanças de características das imagens SAR / PolSAR. O entendimento do comportamento estatístico do speckle é essencial para extrair boas informações das imagens e propor algoritmos efetivos para tratar o speckle. Assim, podemos propor tarefas de criação de filtros de imagens, estimativas de parâmetros geofísicos, classificação e segmentação de regiões, detectar bordas, entre outras.

Lee e Pottier (2009) realizaram um estudo sistemático do speckle com o objetivo de entender os seus efeitos nas imagens SAR e PolSAR, o estudo usou os dados com simples visada ou com múltiplas visadas. Como em Lee e Pottier (2009) e Deng *et al.* (2017) apresentamos a matriz polarimétrica de covariância e a matriz de coerência. Baseado na distribuição Wishart apresentamos as funções de densidades de probabilidades gaussiana, diferença de fase, produto de amplitudes, e razão de amplitude entre duas polarização.

1.2.1 Formação do speckle

A formação do speckle surge quando o radar ilumina uma superfície rugosa com escala do comprimento de onda do radar. O sinal de retorno consiste em ondas refletidas de muitos elementos de espalhamentos.

Os elementos de espalhamento tem geometrias complexas e distribuições aleatórias, tornando a modelagem estatística um tarefa indispensável. Podemos considerar três tipos de processos de espalhamento da onda em alvos (elementos de espalhamento). A dispersão de superfície, a dispersão de volume e o volume-superfície espalhamento. O primeiro é o espalhamento que acontece quando a onda eletromagnética atravessa uma mudança de meio de propagação. Segundo, o espalhamento de volume, que consiste no espalhamento que acontece na profundidade de um meio, por exemplo, o espalhamento no interior de uma floresta. E por último, o espalhamento volume superfície, que consiste em a onda atingir outra troca de meio de propagação, por exemplo o solo de uma floresta.

As distâncias entre os elementos de espalhamento e o recebimento no radar varia devido a natureza randomica da disposição desse elemento. A onda recebida de cada elemento espalhador embora coerente em frequência não são coerentes em fase. O sinal é forte se as ondas são construtivas, ou seja em fase, e fraco se as ondas não estão em fase.

Podemos escrever um sinal complexo da seguinte forma.

$$\sum_{i=1}^M (x_i + jy_i) = \sum_{i=1}^M x_i + j \sum_{i=1}^M y_i = x + jy = r \exp(j\theta), \quad (1.31)$$

onde, $x_i + jy_i$ é o retorno do espalhamento para cada elemento i , $x + jy$ é o retorno dos M espalhadores somados.

As imagens SAR / PolSAR são formadas pelo processamento de retornos dos elementos de espalhamento coerentemente vindo de diferentes pulsos. Este efeito causa uma variação na intensidade pixel a pixel dando a imagem um aspecto granular, que definimos como o ruído *speckle*.

1.2.2 Modelo de Rayleigh para o *speckle*

Podemos determinar as seguintes condições para a modelagem,

- 1) um número grande de espalhadores na resolução de célula em um meio homogêneo,
- 2) a distancia do radar é muito maior que o comprimento de onda,
- 3) A superfície tem rugosidade na escala do comprimento de onda de um radar.

A equação (1.31) para o *speckle* completamente desenvolvido é distribuído uniformemente no intervalo $[-\pi, \pi]$, podemos dizer que x e y são distribuídas independentemente e gaussiana com média zero. Podemos representar a suas probabilidades da seguinte maneira,

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x)p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right), \quad (1.32)$$

sendo $x = A \cos(\theta)$ e $y = A \sin(\theta)$ teremos,

$$p_{A\theta}(A, \theta) = \frac{A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}{\sigma^2}\right) = \frac{A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\right), \quad (1.33)$$

Essa é a distribuição conjunta. Integrando a variável θ no intervalo de $[-\pi, \pi]$ teremos a distribuição para a amplitude.

$$p_1(A) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\right) d\theta = \frac{A}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta,$$

definida como,

$$p_1(A) = \frac{2A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\right).$$

A média

$$E[A] = \int_0^{\infty} A f(A) dA = \int_0^{\infty} \frac{2A^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\right) dA = \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2}$$

. A variância $var = E[X^2] - E[x]^2$, assim a

$$E[A^2] = \int_0^{\infty} A^2 f(A) dA = \int_0^{\infty} \frac{2A^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\right) dA = \sigma^2$$

. Então

$$var = E[X^2] - E[x]^2 = \sigma^2 - \left(\frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2}\right)^2 = \sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{4}$$

A medida chamada de coeficiente de variação $CV(Z_A) = \frac{\sqrt{var}}{E[x]} = \frac{\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{4}}{\frac{\sqrt{\pi}\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{4}}{\frac{\pi\sigma^2}{4}}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} = 0,5227$

Definindo $I = A^2$ a pdf para intensidade é

$$p_1(Z_I) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z}{\sigma^2}\right).$$

Sendo $E[I] = \sigma^2$, e $E[I^2] = 2\sigma^2$ então $var = \sigma^4$, então o $CV(Z_I) = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sigma^2} = 1$.

Comparando os valores $CV(Z_A)$ e $CV(Z_I)$ podemos afirmar que o valor do *speckle* é mais pronunciado nas imagens de intensidade comparado com as imagens de amplitude.

A distribuição gaussiana circular complexa multivariada com média zero pode ser definida de acordo com Goodman (1985), assim, sendo $\mathbf{S}_i = x_j + iy_j$ é exigido que x_j e y_j com $j = 1, 2, 3$ tenham distribuições conjuntas gaussianas e satisfaçam as seguintes condições

- $E[x_j] = E[y_j] = 0$,
- $E[x_j^2] = E[y_j^2]$,
- $E[x_j y_j] = 0$,
- $E[x_j x_k] = E[y_j y_k]$,
- $E[y_j x_k] = -E[x_j y_k]$,

onde, $E[\cdot]$ é o valor esperado. outra forma de representar o vetor \mathbf{S} é realocar as partes reais e complexas de cada elemento em um vetor de dimensão 6 onde cada entrada é representado por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} R_{hh} \\ I_{hh} \\ R_{hv} \\ I_{hv} \\ R_{vv} \\ I_{vv} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

e respeitam uma distribuição gaussiana complexa de média 0, a qual representamos

A matriz de covariância considerando as 3 amostras (S_{hh}, S_{hv}, S_{vv}) complexas, por definição tem dimensão 6×6 , e por hipótese é uma distribuição gaussiana circular complexa multivariada com média zero assumindo a forma de matricial,

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^H = \begin{bmatrix} R_{hh}^2 & 0 & R_{hh}R_{hv} & -R_{hh}I_{hv} & R_{hh}R_{vv} & -R_{hh}I_{vv} \\ 0 & I_{hh}^2 & I_{hh}R_{hv} & I_{hh}I_{hv} & I_{hh}R_{vv} & I_{hh}I_{vv} \\ R_{hv}R_{hh} & R_{hv}I_{hh} & R_{hh}^2 & 0 & R_{hv}R_{vv} & -R_{hv}I_{vv} \\ -I_{hv}R_{hh} & I_{hv}I_{hh} & 0 & I_{hh}^2 & I_{hv}R_{vv} & I_{hh}I_{vv} \\ R_{vv}I_{hh} & R_{vv}I_{hh} & R_{vv}R_{hv} & R_{vv}I_{hv} & R_{vv}^2 & 0 \\ -I_{vv}R_{hh} & I_{vv}I_{hh} & -I_{vv}R_{hv} & I_{vv}I_{hv} & 0 & I_{vv}^2 \end{bmatrix}.$$

Na referência Goodman (1963) foi descrito a hipótese de ser uma distribuição gaussiana circular complexa multivariada com média zero, portanto, sendo $\mathbf{S}_{ij} = R_{ij} + iI_{ij}$ é exigido que R_{ij} e I_{ij} com $j = h, v$ satisfaçam a hipótese descritas detalhadamente por

- I- $E[R_{ij}] = E[I_{ij}] = 0$,
- II- $E[R_{ij}^2] = E[I_{ij}^2]$,
- II- $E[R_{ij}I_{ij}] = 0$,
- IV- $E[R_{ij}R_{ij}] = E[I_{ij}I_{ij}]$,
- V- $E[I_{ij}R_{ij}] = -E[R_{ij}I_{ij}]$,

onde, $E[\cdot]$ denota o valor esperado.

As hipóteses explicam o formato da matriz de covariância e veremos a análise das condições acima detalhadamente,

- I- A condição

$$E[R_{ij}] = E[I_{ij}] = 0,$$

pode ser escrita por,

$$E[R_{hh}] = E[I_{hh}] = 0,$$

$$E[R_{hv}] = E[I_{hv}] = 0,$$

e

$$E[R_{vv}] = E[I_{vv}] = 0.$$

II- A condição (II)

$$E[R_{ij}^2] = E[I_{ij}^2],$$

pode ser escrita,

$$R_{hh}^2 = I_{hh}^2,$$

$$R_{hh}^2 = I_{hh}^2,$$

e

$$R_{vv}^2 = I_v^2.$$

III- A condição (III)

$$E[R_{ij}I_{ij}] = 0,$$

pode ser escrita,

$$R_{hh}I_{hh} = 0,$$

$$R_{hv}I_{hv} = 0,$$

e

$$R_{vv}I_{vv} = 0.$$

IV- A condição (IV)

$$E[R_{ij}R_{ij}] = E[I_{ij}I_{ij}],$$

pode ser escrita,

$$R_{hh}R_{hv} = I_{hh}I_{hv},$$

$$R_{hh}R_{vv} = I_{hh}I_{vv},$$

$$R_{hv}R_{vv} = I_{hv}I_{vv},$$

$$R_{hv}R_{hv} = I_{hv}I_{hv},$$

$$R_{vv}R_{hv} = I_{vv}I_{hv},$$

e

$$R_{vv}R_{hv} = I_{vv}I_{hv}.$$

V- A condição (V)

$$E[I_{ij}R_{ij}] = -E[R_{ij}I_{ij}],$$

pode ser escrita,

$$I_{hv}R_{hv} = -R_{hh}I_{hv},$$

$$I_{vv}R_{hh} = -R_{hh}I_{vv},$$

$$I_{vv}R_{hv} = -R_{vv}I_{hv},$$

$$I_{hv}R_{hh} = -R_{hh}I_{hv},$$

$$I_{hh}R_{vv} = -R_{hh}I_{vv},$$

e

$$I_{hv}R_{vv} = -R_{hv}I_{vv}.$$

$[S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^T$ e a multiplicação de $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]$ pelo seu conjugado transposto $\mathbf{S} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^H$, isto é, a hermitiana do vetor,

$$\mathbf{ss}^H = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}^H = [S_{ij}]_{i,j=h,v} \quad (1.35)$$

De acordo com [Goodman \(1963\)](#) a distribuição gaussiana complexa multivariada pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de S . Isto é chamado de *single-look complex PolSAR data representation* e podemos definir o vetor de espalhamento por $\mathbf{S} = [S_{hh}, S_{hv}, S_{vv}]^H$.

Dados polarimétricos são usualmente sujeitos a um processo de várias visadas com o intuito de melhorar a razão entre o sinal e o seu ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas estimadas são obtidas computando a média de L visadas independentes de uma mesma cena. Resultando na matriz de covariância amostral estimada \mathbf{Z} conforme [Anfinssen et al. \(2009\)](#); [Goodman \(1963\)](#)

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{s}_l \mathbf{s}_l^H, \quad (1.36)$$

onde \mathbf{s}_l com $l = 1, \dots, L$ é uma amostra de L vetores complexos distribuídos como \mathbf{S} , assim a matriz de covariância amostral associada a \mathbf{S}_l , com $l = 1, \dots, L$ denotam o espalhamento para cada visada L

Sendo $i = j$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{ii} \bar{\mathbf{S}}_{ii} &= (R_{ii} + iI_{ii}) \overline{(R_{ii} + iI_{jj})} \\ \mathbf{S}_{ii} \bar{\mathbf{S}}_{ii} &= (R_{ii} + iI_{ii})(R_{ii} - iI_{ii}) \\ \mathbf{S}_{ii} \bar{\mathbf{S}}_{ii} &= R_{ii}^2 + I_{ii}^2 \end{aligned} \quad (1.37)$$

e considerando $i \neq j$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{ii} \bar{\mathbf{S}}_{ij} &= (R_{ii} + iI_{ii}) \overline{(R_{ij} + iI_{ij})} \\ \mathbf{S}_{ii} \bar{\mathbf{S}}_{ij} &= (R_{ii} + iI_{ii})(R_{ij} - iI_{ij}) \\ \mathbf{S}_{ii} \bar{\mathbf{S}}_{ij} &= (R_{ii}R_{ij} + I_{ii}I_{ij}) + i(R_{ij}I_{ii} - R_{ii}I_{ij}) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Definindo,

$$RC_{ij} = R_{ii}R_{ij} + I_{ii}I_{ij} \quad (1.39)$$

e

$$IC_{ij} = R_{ij}I_{ii} - R_{ii}I_{ij} \quad (1.40)$$

Sendo a variável randômica gaussiana complexa $\mathbf{C}_{i,j} = RC_{ij} + iIC_{ij}$, ou ainda, $\mathbf{C}_{i,j} = (R_{ii}R_{ij} + I_{ii}I_{ij}) + i(R_{ij}I_{ii} - R_{ii}I_{ij})$. Podemos escrever uma variável randômica gaussiana complexa 4-variada $(R_{ii}, R_{ij}, I_{ii}, I_{ij})$.

De acordo com ([Goodman \(1963\)](#))

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E(X_i X_j) & E(X_i Y_j) \\ E(Y_i X_j) & E(Y_i Y_j) \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Tal que

$$\mathbf{C} = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_j^2 & \text{se } i = j, \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_{ij} & -\beta_{ij} \\ \beta_{ij} & \alpha_{ij} \end{bmatrix} \sigma_j \sigma_k & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (1.42)$$

1.3 Funções de densidade

1.3.1 Função de densidade Wishart para os canais de intensidade

Para os canais (hh) , (hv) e (vv) vamos usar a distribuição Wishart (PDF) descrita por

Tabela 1.1: Tabela

	R_{hh}	I_{hh}	R_{hv}	I_{hv}	R_{vv}	I_{vv}
R_{hh}	σ_{hh}^2	0	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\rho_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$
I_{hh}	0	σ_{hh}^2	$-\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$-\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$\rho_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$
R_{hv}	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$-\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	σ_{hv}^2	0	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	$\eta_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$
I_{hv}	$\eta_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	$\rho_{hh,hv}\sigma_{hh}\sigma_{hv}$	0	σ_{hv}^2	$-\eta_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$
R_{vv}	$\rho_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$-\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	$-\eta_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	σ_{vv}^2	0
I_{vv}	$\eta_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$\rho_{hh,vv}\sigma_{hh}\sigma_{vv}$	$\eta_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	$\rho_{hv,vv}\sigma_{hv}\sigma_{vv}$	0	σ_{vv}^2

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma_s, L) = \frac{L^m |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\Sigma_s|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \operatorname{tr}(\Sigma_s^{-1} \mathbf{Z})), \quad (1.43)$$

onde, $\operatorname{tr}(\cdot)$ é o operador traço de uma matriz, $\Gamma_m(L)$ é uma função Gamma multivariada definida por

$$\Gamma_m(L) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \quad (1.44)$$

e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma. Podemos afirmar que \mathbf{Z} é distribuído como uma distribuição Wishart denotando por $\mathbf{Z} \sim W(\Sigma_s, L)$ e satisfazendo $E[\mathbf{Z}] = \Sigma_s$. Sem perda de generalidade para o texto vamos usar o símbolo Σ em detrimento a Σ_s para representar a matriz de covariância associada a \mathbf{S} .

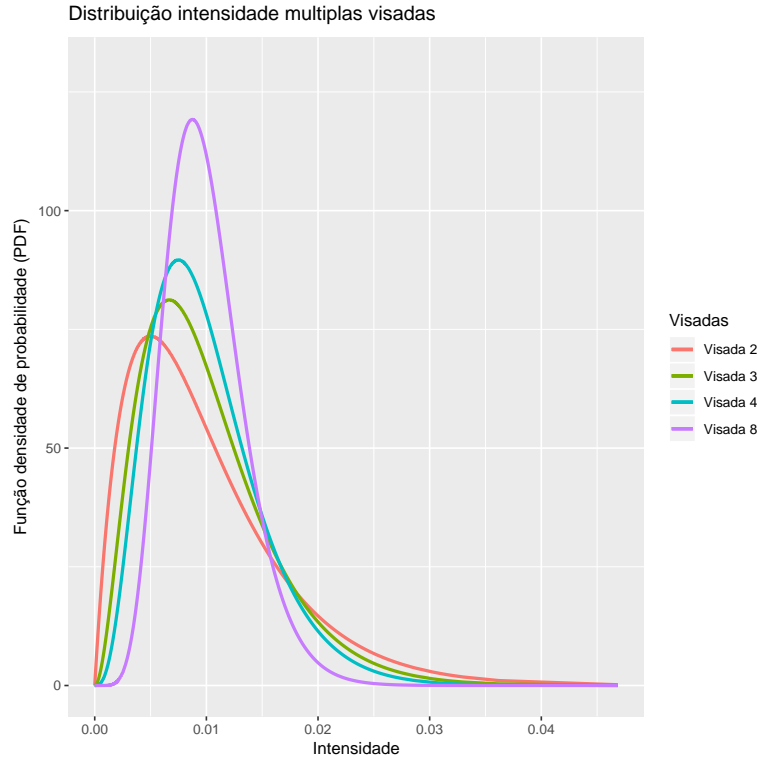


Figura 1.1: Distribuição intensidade múltiplas visadas com $\sigma = 0.01$.

1.3.2 Função de densidade para a magnitude do produto \mathbf{S}_i e \mathbf{S}_j

A magnitude do produto \mathbf{S}_i e \mathbf{S}_j é uma importante medida para as imagem SAR polarimétrica. Definimos a magnitude normalizada por

$$\xi = \frac{\left| \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{S}_i(k) \mathbf{S}_j^H(k) \right|}{\sqrt{E[|\mathbf{S}_i|^2] E[|\mathbf{S}_j|^2]}} = \frac{g}{h}. \quad (1.45)$$

onde é definido por $g = |\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^H|$ e $h = \sqrt{E[|\mathbf{S}_i|^2] E[|\mathbf{S}_j|^2]}$.

A PDF de ξ

$$f(\xi) = \frac{4L^{L+1} \xi^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) K_{L-1} \left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right). \quad (1.46)$$

onde I_0 e K_{L-1} são funções de Bessel modificadas.

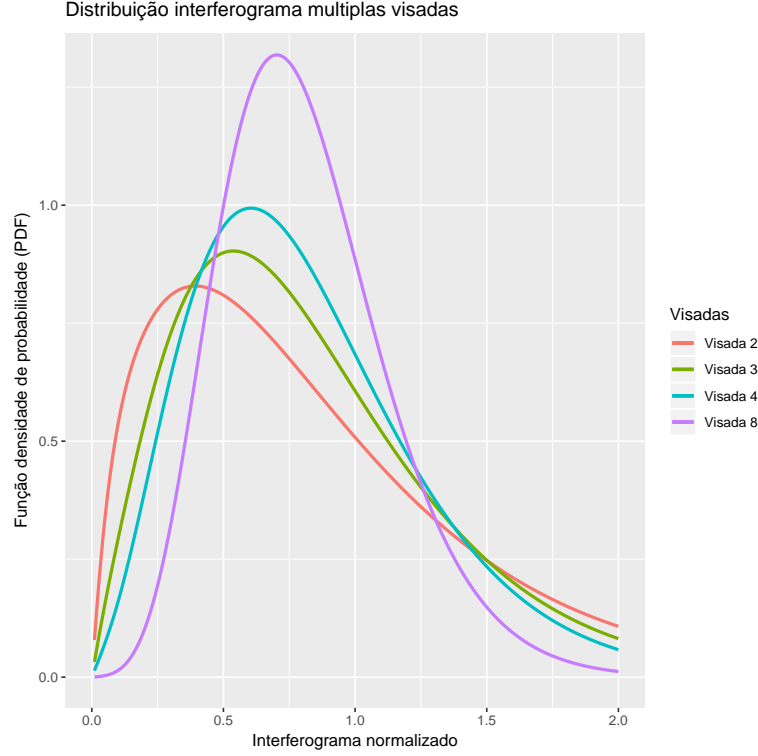


Figura 1.2: Distribuição interferograma múltiplas visadas.

A PDF para a magnitude não normalizada g pode ser obtida pelas equações acima:

$$f(g) = \frac{4L^{L+1}g^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)h^{L+1}} I_0 \left(\frac{2|\rho|Lg}{(1-|\rho|^2)h} \right) K_{L-1} \left(\frac{2Lg}{(1-|\rho|^2)h} \right). \quad (1.47)$$

1.3.3 Função de densidade para cada canal complexo

Sendo $(R_{ii}, R_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$ podemos observar na tabela anterior que

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} \\ \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.48)$$

A pdf para esta distribuição normal é:

$$f_{Z_{R_{ii}R_{ij}}}(z) = \frac{1}{\pi\sigma_{ii}\sigma_{ij}\sqrt{1-\rho_{ii,ij}^2}} \exp \left(\frac{\rho_{ii,ij}z}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij}^2)} \right) K_0 \left(\frac{|z|}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij}^2)} \right). \quad (1.49)$$

Sendo $(I_{ii}, I_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$ podemos observar na tabela anterior que

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} \\ \rho_{ii,ij}\sigma_{ii}\sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

$$f_{Z_{R_{ii}R_{ij}}}(z) = \frac{1}{\pi\sigma_{ii}\sigma_{ij}\sqrt{1-\rho_{ii,ij}^2}} \exp \left(\frac{\rho_{ii,ij}z}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij}^2)} \right) K_0 \left(\frac{|z|}{\sigma_{ii}\sigma_{ij}(1-\rho_{ii,ij}^2)} \right). \quad (1.51)$$

Definindo o funcional $\Theta(z; \sigma_p, \sigma_q, \gamma)$

$$\Theta(z; \sigma_p, \sigma_q, \gamma) = \frac{1}{\pi \sigma_p \sigma_q \sqrt{1-\gamma^2}} \exp\left(\frac{\gamma z}{\sigma_p \sigma_q (1-\gamma^2)}\right) K_0\left(\frac{|z|}{\sigma_p \sigma_q (1-\gamma^2)}\right). \quad (1.52)$$

onde, $\sigma_p, \sigma_q, \gamma$ são parâmetros da função.

1.3.4 distribuição conjunta para $(R_{ii}, R_{ij}) \sim N2(0, C_{ij})$

Sendo $(R_{ii}, R_{ij}, I_{ii}, I_{ij}) \sim N4(0, C_{ii,ij})$ podemos observar na tabela anterior que

$$C_{ii,ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij} \sigma_{ii} \sigma_{ij} & 0 & \eta_{ii,ij} \sigma_{ii} \sigma_{ij} \\ \rho_{ii,ij} \sigma_{ii} \sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 & -\eta_{ii,ij} \sigma_{ii} \sigma_{ij} & 0 \\ 0 & -\eta_{ii,ij} \sigma_{ii} \sigma_{ij} & \sigma_{ii}^2 & \rho_{ii,ij} \sigma_{ii} \sigma_{ij} \\ \eta_{ii,ij} \sigma_{ii} \sigma_{ij} & 0 & \rho_{ii,ij} \sigma_{ii} \sigma_{ij} & \sigma_{ij}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.53)$$

Realizar a transformação

$$\begin{bmatrix} Z = R_{ii} R_{ij} + I_{ii} I_{ij} \\ U_1 = R_{ii} \\ U_2 = R_{ij} \\ U_3 = I_{ii} \end{bmatrix}, \quad (1.54)$$

De acordo com [Goodman \(1963\)](#) e [Lee et al. \(1994\)](#) esta distribuição pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de \mathbf{s} . A hipótese de ser gaussiana e circular foi comprovada para dados SAR polarimétricos no artigo [Sarabandi \(1992\)](#).

A função densidade de probabilidade (**pdf**) da distribuição gaussiana complexa m -variada é dada por

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^m |\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{s}}|} \exp(-\mathbf{s}^H \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{s}), \quad (1.55)$$

sendo $|\cdot|$ o determinante de uma matriz ou o valor absoluto de um escalar, e $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{s}}$ é a matriz de covariância associada a \mathbf{s} definida por

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{s}} = E[\mathbf{s} \mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E[S_1 \overline{S_1}] & E[S_1 \overline{S_2}] & \dots & E[S_1 \overline{S_m}] \\ E[S_2 \overline{S_1}] & E[S_2 \overline{S_2}] & \dots & E[S_2 \overline{S_m}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[S_m \overline{S_1}] & E[S_m \overline{S_2}] & \dots & E[S_m \overline{S_m}] \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

talque, $E[\cdot]$ denota o valor esperado e $\overline{\cdot}$ denota o conjugado complexo. A matriz de covariância é hermitiana positiva definida e contém todas as informações necessárias para caracterizar o retro-espalhamento, podemos consultar mais informações em ([López-Martínez et al., 2005](#)).

Nas imagens PolSAR serão consideradas três componentes para o vetor $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^T$ e a multiplicação de $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]$ pelo seu conjugado transposto $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^H$, isto é, a hermitiana do vetor,

$$\mathbf{s} \mathbf{s}^H = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} S_{hh} \overline{S_{hh}} & S_{hh} \overline{S_{vh}} & S_{hh} \overline{S_{vv}} \\ S_{vh} \overline{S_{hh}} & S_{vh} \overline{S_{vh}} & S_{vh} \overline{S_{vv}} \\ S_{vv} \overline{S_{hh}} & S_{vv} \overline{S_{vh}} & S_{vv} \overline{S_{vv}} \end{bmatrix}. \quad (1.57)$$

A matriz $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{s}}$ tem dimensão 3×3 , e pode ser definida como sendo a matriz de covariância associada a \mathbf{s} .

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{s}} = E[\mathbf{s} \mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E[S_{hh} \overline{S_{hh}}] & E[S_{hh} \overline{S_{vh}}] & E[S_{hh} \overline{S_{vv}}] \\ E[S_{vh} \overline{S_{hh}}] & E[S_{vh} \overline{S_{vh}}] & E[S_{vh} \overline{S_{vv}}] \\ E[S_{vv} \overline{S_{hh}}] & E[S_{vv} \overline{S_{vh}}] & E[S_{vv} \overline{S_{vv}}] \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

Dados polarimétricos são usualmente sujeitados a um processo de várias visadas com o intuito de melhorar a razão entre o sinal e o seu ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas estimadas são obtidas computando a média de L visadas independentes de uma mesma cena. Resultando na matriz de covariância amostral estimada \mathbf{Z} conforme (Anfinssen *et al.*, 2009; Goodman, 1963)

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H, \quad (1.59)$$

onde \mathbf{s}_i com $i = 1, \dots, L$ é uma amostra de L vetores complexos distribuídos como \mathbf{s} , assim a matriz de covariância amostral associada a \mathbf{s}_i , com $i = 1, \dots, L$ denotam o espalhamento para cada visada L seguindo uma distribuição complexas de Wishart.

Sendo agora $\Sigma_{\mathbf{s}}$ e L parâmetros conhecidos a função densidade de probabilidade da distribuição Wishart por

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma_{\mathbf{s}}, L) = \frac{L^m |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\Sigma_{\mathbf{s}}|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \operatorname{tr}(\Sigma_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{Z})), \quad (1.60)$$

onde, $\operatorname{tr}(\cdot)$ é o operador traço de uma matriz, $\Gamma_m(L)$ é uma função Gamma multivariada definida por

$$\Gamma_m(L) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \quad (1.61)$$

e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma. Podemos afirmar que \mathbf{Z} é distribuído como uma distribuição Wishart denotando por $\mathbf{Z} \sim W(\Sigma_{\mathbf{s}}, L)$ e satisfazendo $E[\mathbf{Z}] = \Sigma_{\mathbf{s}}$. Sem perda de generalidade para o texto vamos usar o símbolo Σ em detrimento a $\Sigma_{\mathbf{s}}$ para representar a matriz de covariância associada a \mathbf{s} .

Seja a função densidade de probabilidade da distribuição complexa Wishart (1.60) na qual vamos aplicar o logaritmo natural e suas propriedades com o intuito de reescrever a função na forma adequada para aplicar o método de estimativa de máxima verossimilhança. Assim,

$$\begin{aligned} \ln f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L) &= \ln \left(\frac{L^m |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\Sigma|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z})) \right), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= \ln \left(\frac{L^m |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\Sigma|^L \Gamma_m(L)} \right) + \ln(\exp(-L \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}))), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= \ln(L^m |\mathbf{Z}|^{L-m}) - \ln(|\Sigma|^L \Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= mL \ln L + (L-m) \ln(|\mathbf{Z}|) - \ln(|\Sigma|^L) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\Sigma|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (1.62)$$

lembrando que a função Gamma multivariada é definida na equação (1.61) então, podemos rescrever a equação da seguinte forma

$$\begin{aligned} \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\Sigma|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\Sigma|) \\ &\quad - \ln \left(\pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \right) - L \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\Sigma|) \\ &\quad - \ln \left(\pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \right) - \ln \left(\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \right) - L \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}), \\ \ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \Sigma, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\Sigma|) \\ &\quad - \frac{1}{2}m(m-1) \ln(\pi) - \sum_{i=0}^{m-1} \ln(\Gamma(L-i)) - L \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (1.63)$$

equação equivalente pode ser encontrada em (Frery *et al.*, 2011).

1.4 Modelos para dados dados

A matriz de espalhamento complexa \mathbf{S} é definida por

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}.$$

Usaremos o caso do meio de propagação ser recíproco, isto é, $S_{hv} = S_{vh}$ tornando a matriz de espalhamento simétrica. Podemos facilitar a notação representando a matriz de espalhamento por um vetor da seguinte forma

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{vv} \\ S_{vh} \\ S_{hh} \end{bmatrix}.$$

De acordo com [Goodman \(1963\)](#) a distribuição gaussiana complexa multivariada pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de \mathbf{S} . Isto é chamado de *single-look complex PolSAR data representation* e podemos definir o vetor de espalhamento por $\mathbf{s} = [S_1, S_2, \dots, S_p]^T$.

A função densidade de probabilidade (pdf) da distribuição gaussiana complexa p -variada é dada por

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^p |\Sigma_{\mathbf{s}}|} \exp(-\bar{\mathbf{s}}^T \Sigma_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{s}). \quad (1.64)$$

O parâmetro que indexa a distribuição é a matriz de covariância, que é definida por:

$$\Sigma_{\mathbf{s}} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_p^H) \\ E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_p^H) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_1^H) & E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_2^H) & \dots & E(\mathbf{s}_p\mathbf{s}_p^H) \end{bmatrix}. \quad (1.65)$$

onde $E(\cdot)$ e $(\cdot)^H$ denotam o valor esperado e o conjugado transposto.

A matriz $\Sigma_{\mathbf{s}}$ é hermitiana pois se $\mathbf{S}_j = x_j + iy_j$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_j + iy_j)(x_j + iy_j) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= (x_j + iy_j)(x_j - iy_j) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= x_j^2 + y_j^2 \end{aligned} \quad (1.66)$$

considerando $j \neq k$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j + iy_j)(x_k + iy_k) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j + iy_j)(x_k - iy_k) \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= (x_j x_k + y_j y_k) + i(x_k y_j - x_j y_k) \end{aligned} \quad (1.67)$$

ainda,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= \overline{(x_k + iy_k)(x_j + iy_j)} \\ \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= \overline{(x_k + iy_k)(x_j - iy_j)} \\ \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= \overline{(x_k x_j + y_k y_j) + i(x_j y_k - x_k y_j)} \\ \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= (x_k x_j + y_k y_j) - i(x_j y_k - x_k y_j) \\ \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} &= (x_k x_j + y_k y_j) + i(x_k y_j - x_j y_k) \end{aligned} \quad (1.68)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j &= \overline{\mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_j} \\ \mathbf{S}_j \bar{\mathbf{S}}_k &= \overline{\mathbf{S}_k \bar{\mathbf{S}}_j} \end{aligned} \quad (1.69)$$

Assim com j e k varrendo toda a matriz podemos afirmar que $\Sigma_{\mathbf{s}} = \Sigma_{\mathbf{s}}^H$ portanto hermitiana.

Dados polarimétricos são usualmente sujeitados a um processo *multilook* com o intuito de melhorar a razão sinal-ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas são obtidas computando a médias de L visadas independentes de uma mesma cena. Isto resulta na matriz de

covariância \mathbf{Z} dada por:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H. \quad (1.70)$$

Coefficiente de correlação *Multilook*

O coeficiente de correlação complexo é um importante parâmetro para descrever a função de densidade de probabilidade. Podemos defini-lo como

$$\rho_c = \frac{E[\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j^H]}{\sqrt{E[|\mathbf{s}_i|^2]E[|\mathbf{s}_j|^2]}} = |\rho_c| e^{i\theta}. \quad (1.71)$$

em que \mathbf{s}_i e \mathbf{s}_j são duas componentes da matriz de espalhamento ou dois retorno do radar polarimétrico ou interferométrico SAR. Para dados de radar polarimétricos representado pela matriz de Mueller, ρ_c pode ser calculado encontrando a média da vizinhança de um pixel de uma matriz Mueller. A magnitude de ρ_c pode também ser estimada usando duas intensidade *multilook* Z_{ii} e Z_{jj} . O coeficiente de correlação de dados L looks intensidade é definida como

$$\rho_I^{(n)} = \frac{E[(Z_{ii} - \overline{Z_{ii}})(Z_{jj} - \overline{Z_{jj}})]}{\sqrt{E[(Z_{ii} - \overline{Z_{ii}})^2]E[(Z_{jj} - \overline{Z_{jj}})^2]}}. \quad (1.72)$$

No apêndice do artigo [Lee *et al.* \(1994\)](#) foi mostrado que

$$\rho_I^{(n)} = |\rho_c|^2 \quad (1.73)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= a_R + ia_I \\ \mathbf{S}_j &= b_R + ib_I \end{aligned} \quad (1.74)$$

Assim a equação (1.71) pode ser reescrita

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{E[(a_R + ia_I)(b_R + ib_I)]}{\sqrt{E[a_R^2 + a_I^2]E[b_R^2 + b_I^2]}} \\ \rho_c &= \frac{E[(a_R + ia_I)(b_R - ib_I)]}{\sqrt{E[a_R^2 + a_I^2]E[b_R^2 + b_I^2]}} \\ \rho_c &= \frac{E[a_R b_R + ia_I b_R - ia_R b_I + a_I b_I]}{\sqrt{E[a_R^2 + a_I^2]}\sqrt{E[b_R^2 + b_I^2]}} \\ \rho_c &= \frac{E[a_R b_R + ia_I b_R - ia_R b_I + a_I b_I]}{\sqrt{E[a_R^2 + a_I^2]}\sqrt{E[b_R^2 + b_I^2]}}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Definindo os desvios padrões,

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sqrt{E[a_R^2 + a_I^2]} \\ \sigma_b &= \sqrt{E[b_R^2 + b_I^2]} \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{E[a_R b_R + ia_I b_R - ia_R b_I + a_I b_I]}{\sigma_a \sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_R b_R + ia_I b_R - ia_R b_I + a_I b_I]}{\sigma_a \sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_R b_R] + E[a_I b_I] + i(E[a_I b_R] - E[a_R b_I])}{\sigma_a \sigma_b} \\ \rho_c &= \frac{E[a_R b_R]}{\sigma_a \sigma_b} + \frac{E[a_I b_I]}{\sigma_a \sigma_b} + i \left(\frac{E[a_I b_R]}{\sigma_a \sigma_b} - \frac{E[a_R b_I]}{\sigma_a \sigma_b} \right). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Definindo

$$\rho_{RR} = \frac{E[a_R b_R]}{\sigma_a \sigma_b}, \quad \rho_{II} = \frac{E[a_I b_I]}{\sigma_a \sigma_b}, \quad \rho_{IR} = \frac{E[a_I b_R]}{\sigma_a \sigma_b}, \quad \rho_{RI} = \frac{E[a_R b_I]}{\sigma_a \sigma_b}. \quad (1.78)$$

Portanto,

$$\rho_c = \frac{(\rho_{RR} + \rho_{II}) + i(\rho_{IR} - \rho_{RI})}{2}. \quad (1.79)$$

obs:Explicar melhor o fator 2

Devido a condição de ser gaussiana circular

$$\rho_{RR} = \rho_{II}, \quad \rho_{IR} = -\rho_{RI}. \quad (1.80)$$

podemos escrever ρ_c

$$\rho_c = \rho_{RR} + i\rho_{IR}. \quad (1.81)$$

Portanto

$$|\rho_c|^2 = \rho_{RR}^2 + \rho_{IR}^2. \quad (1.82)$$

O processo de **Multilook** produz

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [a_R^2(k) + a_I^2(k)]. \\ B_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [b_R^2(k) + b_I^2(k)]. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Assumindo a independência estatística entre amostras, a média e o desvio padrão podem ser definidos por

$$\begin{aligned} \overline{A_n} &= E[A_n] = 2E[a_R^2(k)] = 2\sigma_a^2, \quad SD[A_n] = \frac{2\sigma_a^2}{\sqrt{n}}. \\ \overline{B_n} &= E[B_n] = 2E[b_R^2(k)] = 2\sigma_b^2, \quad SD[B_n] = \frac{2\sigma_b^2}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

O coeficiente de correlação *Multilook* para intensidade (equação (1.72)) pode ser escrito por:

$$\rho_I^{(n)} = \frac{E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})]}{SD[A_n]SD[B_n]}. \quad (1.85)$$

Assumindo a independência entre as amostras e depois de algumas manipulações algébricas para o numerador da equação (1.85).

$$E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [E[(a_R^2(k) + a_I^2(k))(b_R^2(k) + b_I^2(k))] - 4\sigma_a^2\sigma_b^2] \quad (1.86)$$

OBS: Entender melhor a equação (1.86) e (1.87).

$$E[(A_n - \overline{A_n})(B_n - \overline{B_n})] = \frac{4}{n} \sigma_a^2 \sigma_b^2 |\rho_c|^2 \quad (1.87)$$

Agora substituindo em (1.85)

$$\begin{aligned} \rho_I^{(n)} &= \frac{\frac{4}{n} \sigma_a^2 \sigma_b^2 |\rho_c|^2}{SD[A_n]SD[B_n]}. \\ \rho_I^{(n)} &= \frac{\frac{4}{n} \sigma_a^2 \sigma_b^2 |\rho_c|^2}{\frac{2\sigma_a^2}{\sqrt{n}} \frac{2\sigma_b^2}{\sqrt{n}}}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

completando as simplificações

$$\rho_I^{(n)} = |\rho_c|^2. \quad (1.89)$$

OBS: Esta relação mostra que o coeficiente de correlação da intensidade não depende dos *nlooks*.

Diferença de fase *Multilook*

A *PDF* diferença de fase é derivada nesta seção para cada duas componentes do *SAR* polarimétrico. A *look* diferença de fase é definida como

$$\psi_1 = \angle(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^H). \quad (1.90)$$

A fase *multilook* é obtida por

$$\psi_n = \angle \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{S}_i(\mathbf{k}) \mathbf{S}_j^H(\mathbf{k}) \right). \quad (1.91)$$

A ψ_n são os elementos fora da diagonal principal da matriz de covariança Z . Podemos pensar como uma média de *1-looks*.

Para derivar estas *PDF's* vamos usar duas componentes de seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \alpha e^{i\psi_n} \\ \alpha e^{-i\psi_n} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

$$C = E[\mathbf{S}\mathbf{S}^H] = \begin{bmatrix} C_{11} & \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta} \\ \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{-i\theta} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

Onde $A_{12R} + iA_{12I} = \alpha e^{i\psi_n}$ e $C_{ii} = E[|\mathbf{S}_i|^2]$, assim podemos rescrever a matriz (1.92)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12R} + iA_{12I} \\ A_{12R} - iA_{12I} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

$$p_A^{(n)}(A) = \frac{|A|^{n-p}}{K(n,p)|C|^n} \exp(-\text{tr}(C^{-1}A)), \quad (1.95)$$

onde

$$K(n,p) = \pi^{\frac{1}{2}p(p-1)} \Gamma(n) \dots \Gamma(n-p+1), \quad (1.96)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma.

Como nesse caso estamos usando $p = 2$ podemos rescrever,

$$p_A^{(n)}(A) = \frac{|A|^{n-2}}{K(n,2)|C|^n} \exp(-\text{tr}(C^{-1}A)), \quad (1.97)$$

$$K(n,2) = \pi \Gamma(n) \Gamma(n-1), \quad (1.98)$$

Efetutando as manipulações algébricas

$$\begin{aligned} |A| &= A_{11}A_{22} - (A_{12R} + iA_{12I})(A_{12R} - iA_{12I}) \\ |A| &= A_{11}A_{22} - (A_{12R}^2 + A_{12I}^2) \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} |C| &= C_{11}C_{22} - C_{11}C_{22}|\rho_c|^2 \\ |C| &= C_{11}C_{22}(1 - |\rho_c|^2) \end{aligned} \quad (1.100)$$

assim temos

$$\begin{aligned} |A|^{n-2} &= (A_{11}A_{22} - (A_{12R}^2 + A_{12I}^2))^{n-2} \\ |C|^n &= (C_{11}C_{22})^n (1 - |\rho_c|^2)^n \end{aligned} \quad (1.101)$$

Agora será verificado somente quociente,

$$\frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} = \frac{(A_{11}A_{22} - (A_{12R}^2 + A_{12I}^2))^{n-2}}{(C_{11}C_{22})^n (1 - |\rho_c|^2)^n} \quad (1.102)$$

Como $A_{12R} + iA_{12I} = \alpha e^{i\psi_n}$ então $|A_{12R} + iA_{12I}| = |\alpha e^{i\psi_n}|$ portanto $\alpha = A_{12R}^2 + A_{12I}^2$

$$\frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} = \frac{(A_{11}A_{22} - \alpha^2)^{n-2}}{(C_{11}C_{22})^n (1 - |\rho_c|^2)^n} \quad (1.103)$$

reescrevendo a equação (1.103)

$$\begin{aligned}\frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} &= \frac{(A_{11}A_{22}-\alpha^2)^{n-2}}{(C_{11}C_{22})^n \left(\frac{C_{11}C_{22}}{C_{11}C_{22}}\right)^2 (1-|\rho_c|^2)^n} \\ \frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} &= \frac{(A_{11}A_{22}-\alpha^2)^{n-2}}{\frac{(C_{11}C_{22})^{n-2}}{(C_{11}C_{22})^2} (1-|\rho_c|^2)^n} \\ \frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} &= \frac{\left(\frac{A_{11}A_{22}}{C_{11}C_{22}} - \frac{\alpha^2}{C_{11}C_{22}}\right)^{n-2} (C_{11}C_{22})^{-2}}{(1-|\rho_c|^2)^n}\end{aligned}\quad (1.104)$$

Definindo a seguinte normalização

$$B_1 = \frac{A_{11}}{C_{11}}, \quad B_2 = \frac{A_{22}}{C_{22}}, \quad \eta = \frac{\alpha}{\sqrt{C_{11}C_{22}}}.\quad (1.105)$$

Substituindo na equação (1.104)

$$\begin{aligned}\frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} &= \frac{(B_1B_2-\eta^2)^{n-2} (C_{11}C_{22})^{-2}}{(1-|\rho_c|^2)^n} \\ \frac{|A|^{n-2}}{|C|^n} &= \frac{(B_1B_2-\eta^2)^{n-2} (C_{11}C_{22})^{-2}}{(1-|\rho_c|^2)^n}\end{aligned}\quad (1.106)$$

OBS:Entender melhor o fator $(C_{11}C_{22})^{-2}$, não está compatível com o artigo Lee *et al.* (1994)-verificar o Jacobiano.

Encontrando a matriz inversa de C ,

$$C^{-1} = \frac{1}{C_{11}C_{22}(1-|\rho_c|^2)} \begin{bmatrix} C_{22} & -\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta} \\ -\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{-i\theta} & C_{11} \end{bmatrix}\quad (1.107)$$

$$C^{-1}A = \frac{1}{C_{11}C_{22}(1-|\rho_c|^2)} \begin{bmatrix} C_{22}A_{11} - \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta}\alpha e^{-i\psi_n} & C_{22}\alpha e^{i\psi_n} - A_{22}\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta} \\ C_{11}\alpha e^{-i\psi_n} - A_{11}\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{-i\theta} & C_{11}A_{22} - \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{-i\theta}\alpha e^{i\psi_n} \end{bmatrix}\quad (1.108)$$

Aplicando o traço para a matriz $C^{-1}A$,

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{1}{C_{11}C_{22}(1-|\rho_c|^2)} \left[C_{22}A_{11} - \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta}\alpha e^{-i\psi_n} + C_{11}A_{22} - \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{-i\theta}\alpha e^{i\psi_n} \right]\quad (1.109)$$

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{1}{C_{11}C_{22}(1-|\rho_c|^2)} \left[C_{22}A_{11} - \alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i(\theta-\psi_n)} + C_{11}A_{22} - \alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i(\psi_n-\theta)} \right]\quad (1.110)$$

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{1}{(1-|\rho_c|^2)} \left[\frac{C_{22}A_{11}}{C_{11}C_{22}} + \frac{C_{11}A_{22}}{C_{11}C_{22}} - \frac{2\alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|\cos(\psi_n-\theta)}{C_{11}C_{22}} \right]\quad (1.111)$$

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{1}{(1-|\rho_c|^2)} \left[\frac{A_{11}}{C_{11}} + \frac{A_{22}}{C_{22}} - \frac{2\alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|\cos(\psi_n-\theta)}{C_{11}C_{22}} \right]\quad (1.112)$$

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{1}{(1-|\rho_c|^2)} [B_1 + B_2 - 2\eta|\rho_c|\cos(\psi_n-\theta)]\quad (1.113)$$

$$tr(-C^{-1}A) = -\frac{B_1 + B_2 - 2\eta|\rho_c|\cos(\psi_n-\theta)}{(1-|\rho_c|^2)}\quad (1.114)$$

portanto usando a equação (1.106), (1.114), (1.97), (1.98) termos

$$p(B_1, B_2, \eta, \psi_n) = \frac{(B_1B_2-\eta^2)^{n-2} \eta}{\pi(1-|\rho_c|^2)^n \Gamma(n) \Gamma(n-1)} \exp\left(-\frac{B_1 + B_2 - 2\eta|\rho_c|\cos(\psi_n-\theta)}{(1-|\rho_c|^2)}\right)\quad (1.115)$$

Derivando a equação (1.115) com relação a B_1 , B_2 e η podemos afirmar que a distribuição

diferença de fase *multilook* é

$$p_{\psi}^{(n)}(\psi) = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})(1 - |\rho_c|^2)^n \beta}{2\sqrt{\pi}\Gamma(n)(1 - \beta^2)^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{(1 - |\rho_c|^2)^n}{2\pi} F(n, 1; \frac{1}{2}; \beta^2) \quad (1.116)$$

Sendo $-\pi < \psi \leq \pi$, $\beta = |\rho_c| \cos(\psi - \theta)$ e $F(n, 1; \frac{1}{2}; \beta^2)$ a função de Gauss hipergeométrica.

Para $n = 1$ vale a seguinte identidade para a função de Gauss Hipergeométrica,

$$F(1, 1; \frac{1}{2}; z) = (1 - z)^{-1} \left[1 + \frac{\sqrt{z} \sin^{-1}(\sqrt{z})}{\sqrt{1 - z}} \right] \quad (1.117)$$

Pela equação (1.116)

$$p_{\psi}^{(1)}(\psi) = \frac{(1 - |\rho_c|^2)[(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} + \beta(\pi - \cos^{-1}(\beta))]}{2\pi(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.118)$$

Da mesma forma podemos obter 2 - look, 3 - look e 4 - look,

$$p_{\psi}^{(2)}(\psi) = \frac{3}{8} \frac{(1 - |\rho_c|^2)^2 \beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(1 - |\rho_c|^2)^2}{4\pi(1 - \beta^2)^2} \left[2 + \beta^2 + \frac{3\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \sin^{-1}(\beta) \right] \quad (1.119)$$

$$p_{\psi}^{(3)}(\psi) = \frac{15}{32} \frac{(1 - |\rho_c|^2)^3 \beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{(1 - |\rho_c|^2)^3 (1 - \beta^2)^{-3}}{16\pi} \left[8 + 9\beta^2 - 2\beta^4 + \frac{15\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \sin^{-1}(\beta) \right] \quad (1.120)$$

$$p_{\psi}^{(4)}(\psi) = \frac{35}{64} \frac{(1 - |\rho_c|^2)^4 \beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{9}{2}}} + \frac{(1 - |\rho_c|^2)^4 (1 - \beta^2)^{-4}}{96\pi} \left[48 + 87\beta^2 - 38\beta^4 + 8\beta^6 + \frac{105\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \sin^{-1}(\beta) \right] \quad (1.121)$$

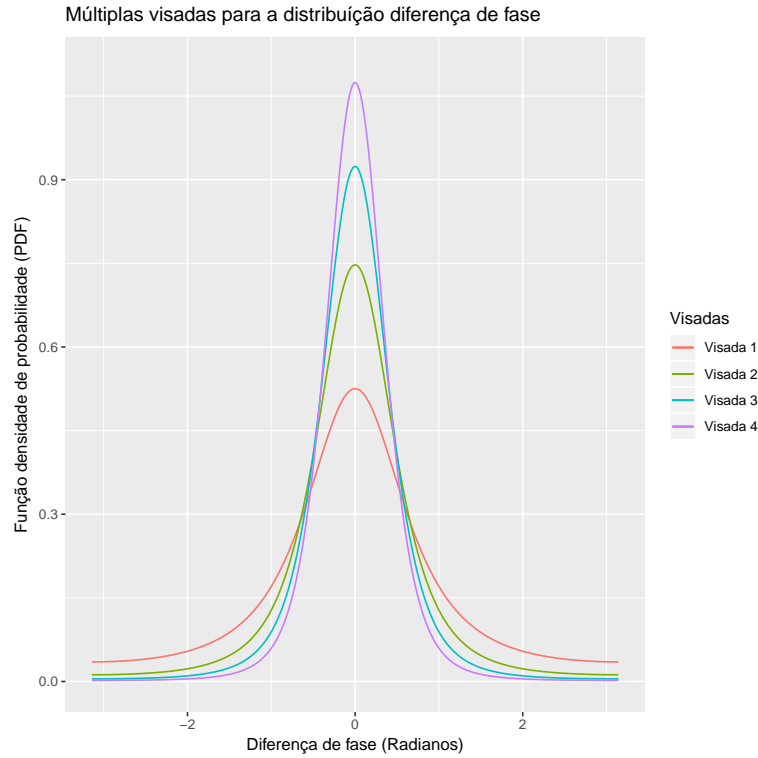


Figura 1.3: Distribuição diferença de fase n -looks.

A figura (1.3) mostra a equação (1.116) para seus diferentes 1, 2, 3 e 4 - looks que são $p_{\psi}^{(1)}(\psi)$, $p_{\psi}^{(2)}(\psi)$, $p_{\psi}^{(3)}(\psi)$ e $p_{\psi}^{(4)}(\psi)$.

Distribuição conjunta do *Multilook* $|S_i|^2$ e $|S_j|^2$

O *PDF* conjunto retorna de dois canais correlacionados dos radares polarimétricos e interferométricos são importantes. As *PDF's* conjuntas conduzem a derivação da intensidade e amplitude razão *PDF's*. Da equação (1.105) temos que as intensidades *multilook* sejam

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2 = \frac{B_1 C_{11}}{n} \\ R_2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2 = \frac{B_2 C_{22}}{n} \end{aligned} \quad (1.122)$$

Integrando a equação (1.115) em relação a η e ψ . A *PDF* é

$$p(B_1, B_2) = \frac{(B_1 B_2)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{B_1+B_2}{1-|\rho_c|^2}\right)}{\Gamma(n)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{n-1}} I_{n-1}\left(2\sqrt{B_1 B_2} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \quad (1.123)$$

Sendo

$$I_\mu(Z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} F_1^0\left[-; \mu+1; \frac{z^2}{4}\right] \quad (1.124)$$

OBS: As integrações na equação (1.115) não foram realizadas neste estudo.

$$p(B_1, B_2) = \frac{n^{n+1} (R_1 R_2)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{n(\frac{R_1}{C_{11}} + \frac{R_2}{C_{22}})}{1-|\rho_c|^2}\right)}{(C_{11} C_{22})^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(n)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{n-1}} I_{n-1}\left(2n\sqrt{\frac{R_1 R_2}{C_{11} C_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \quad (1.125)$$

OBS: Verificar o surgimento de um fator $\frac{n^2}{C_{11} C_{22}}$ na equação (1.125) - Mudança de variável!!!!!!.

Distribuição razão intensidade e amplitude para *multilook*

A razão de intensidade e amplitude entre S_{hh} e S_{vv} são importantes no estudo de radares polarimétricos. A *PDF's* razão de intensidade e amplitude normalizada será mostrada agora

$$\mu = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|S_i(k)|^2}{C_{11}}}{\sum_{k=1}^n \frac{|S_j(k)|^2}{C_{22}}} = \frac{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2} \quad (1.126)$$

Onde $\tau = \frac{C_{11}}{C_{22}}$.

A *PDF* razão intensidade *multilook* normalizada é mostrada no apêndice (C) do artigo Lee *et al.* (1994)

$$p^{(n)}(\mu) = \frac{\Gamma(2n)(1-|\rho_c|^2)^n(1+\mu)\mu^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(1+\mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (1.127)$$

OBS: Não realizei as contas do apêndice (C).

Realizando a troca de variável $\nu = \sqrt{\mu}$ a equação (1.127) pode ser rescrita por

$$p^{(n)}(\nu) = \frac{2\Gamma(2n)(1-|\rho_c|^2)^n(1+\nu^2)\nu^{2n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n)[(1+\nu^2)^2 - 4|\rho_c|^2\nu^2]^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (1.128)$$

As *PDF's* razão de intensidade e amplitude entre os *multilook* \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 podem ser facilmente deduzidas das seguintes definições e posterior aplicação nas equações (1.127) e (1.128). definindo

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2}{\sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2} = \tau \mu \\ z &= \frac{w}{\sqrt{w}} = \sqrt{\tau \nu} \end{aligned} \quad (1.129)$$

Portanto a distribuição da razão w de intensidade *multilook* é

$$p^{(n)}(w) = \frac{\tau^n \Gamma(2n) (1 - |\rho_c|^2)^n (\tau + w) w^{n-1}}{\Gamma(n) \Gamma(n) [(\tau + w)^2 - 4\tau |\rho_c|^2 w]^{\frac{2n+1}{2}}}. \quad (1.130)$$

Portanto a distribuição da razão z de amplitude *multilook* é

$$p^{(n)}(z) = \frac{\tau^n \Gamma(2n) (1 - |\rho_c|^2)^n (\tau + z^2) z^{2n-1}}{\Gamma(n) \Gamma(n) [(\tau + z^2)^2 - 4\tau |\rho_c|^2 z^2]^{\frac{2n+1}{2}}}. \quad (1.131)$$

A discussão será limitada para estatística da razão ν amplitude normalizada. A figura (1.2) mostra a distribuição razão amplitude apresentada na equação (1.128). Notadamente a medida que n aumenta tendemos a ter uma aproximação da "função" delta de Dirac e uma concentração em torno da abscissa $\nu = 1$.

OBS: Processos de *multilook* reduzem a variância.

1.5 Método da máxima verossimilhança aplicado nas funções densidades de probabilidades

1.5.1 Método da verossimilhança aplicado na pdf univariada Γ .

Considerando a função distribuição de densidade univariada gaussiana

$$f_Z(z; \mu, L) = \frac{L^L}{\Gamma(L) \mu^L} z^{L-1} \exp \left\{ -L \frac{z}{\mu} \right\}, \quad (1.132)$$

onde, $\mu > 0$ e $L > 0$. Aplicando o logaritmo natural na equação (1.132) e realizando algumas manipulações algébricas teremos:

$$\begin{aligned} \ln f_Z(z; \mu, L) &= \ln \left(\frac{L^L}{\Gamma(L) \mu^L} z^{L-1} \exp \left\{ -L \frac{z}{\mu} \right\} \right), \\ &= \ln \left(\frac{L}{\mu} \right)^L - \ln \Gamma(L) + \ln z^{L-1} + \ln \exp \left\{ -L \frac{z}{\mu} \right\}, \end{aligned}$$

resultando na função,

$$\ln f_Z(z; \mu, L) = L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) + (L-1) \ln z - \frac{L}{\mu} z. \quad (1.133)$$

A função log-verossimilhança pode ser deduzida da seguinte maneira, dado a amostra $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$,

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{z}; \mu, L) &= \ln \prod_{k=1}^n f_Z(z_k; \mu, L) \\ \ell(\mathbf{z}; \mu, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f_Z(z_k; \mu, L), \end{aligned}$$

usando a função (1.133) teremos,

$$\begin{aligned}
\ell(\mathbf{z}; \mu, L) &= \sum_{k=1}^n \ln f_Z(z_k; \mu, L) \\
&= \sum_{k=1}^n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) + (L-1) \ln z_k - \frac{L}{\mu} z_k \right] \\
&= \sum_{k=1}^n L \ln \frac{L}{\mu} - \sum_{k=1}^n \ln \Gamma(L) + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k \\
&= L \ln \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n 1 - \ln \Gamma(L) \sum_{k=1}^n 1 + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k \\
&= L \ln \frac{L}{\mu} n - \ln \Gamma(L) n + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k.
\end{aligned}$$

Definimos a equação log-verossimilhança para a PDF univariada (1.133).

$$\ell(\mu, L; \mathbf{z}) = n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) \right] + (L-1) \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k,$$

e a forma reduzida,

$$\ell(\mathbf{z}; L, \mu) = n \left[L \ln \frac{L}{\mu} - \ln \Gamma(L) \right] + L \sum_{k=1}^n \ln z_k - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^n z_k. \quad (1.134)$$

We obtain $(\hat{L}, \hat{\mu})$, the maximum likelihood estimator (MLE) of (L, μ) based on \mathbf{z} , by maximizing (1.134) with the BFGS method implemented in the `maxLik` package [Henningsen e Toomet \(2011\)](#). We prefer optimization to solving $\nabla \ell = \mathbf{0}$ for improved numerical stability.

The value function is the reduced log-likelihood of the inner and external samples of the strip denoted, respectively, as \mathbf{z}_I and \mathbf{z}_E . Each strip $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ is, thus, partitioned in two disjoint samples at position j :

$$\mathbf{z} = (\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_j}_{\mathbf{z}_I}, \underbrace{z_{j+1}, z_{j+2}, \dots, z_n}_{\mathbf{z}_E}).$$

We assume two (possibly) different models for each partition: $\mathbf{Z}_I \sim \Gamma(\mu_I, L_I)$, and $\mathbf{Z}_E \sim \Gamma(\mu_E, L_E)$. We then estimate (μ_I, L_I) and (μ_E, L_E) with \mathbf{z}_I and \mathbf{z}_E , respectively, by maximizing (??), and obtain $(\hat{\mu}_I, \hat{L}_I)$ and $(\hat{\mu}_E, \hat{L}_E)$.

The total log-likelihood at point j is, then,

$$\begin{aligned}
\ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E) &= \\
&= j \left[\hat{L}_I \ln(\hat{L}_I / \hat{\mu}_I) - \ln \Gamma(\hat{L}_I) \right] + \hat{L}_I \sum_{k=1}^j \ln z_k - \frac{\hat{L}_I}{\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j z_k + \\
&+ (n-j) \left[\hat{L}_E \ln(\hat{L}_E / \hat{\mu}_E) - \ln \Gamma(\hat{L}_E) \right] + \hat{L}_E \sum_{k=j+1}^n \ln z_k - \\
&- \frac{\hat{L}_E}{\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^n z_k.
\end{aligned} \quad (1.135)$$

We then apply GenSA to find

$$\hat{j} = \arg \max_{j \in [\min_s, N - \min_s]} \ell(j; \hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E),$$

where \min_s is a minimum sample size that we set to 14.

In this way, we obtain one estimates for the edge for each intensity channel. Notice that this approach can be extended and/or modified to cope with any kind of data.

We will see ways of fusing these evidences in the next section.

1.5.2 Método da verossimilhança aplicado na PDF univariada magnitude do produto

Considerando a função a PDF univariada magnitude do produto,

$$f(\xi) = \frac{4L^{L+1}\xi^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) K_{L-1} \left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right). \quad (1.136)$$

onde, $\xi > 0$ e $L > 0$. Aplicando o logaritmo natural na equação (1.136) e realizando algumas manipulações algébricas teremos:

$$\begin{aligned} \ln f(\xi) &= \ln \left(\frac{4L^{L+1}\xi^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) K_{L-1} \left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right) \right), \\ \ln f(\xi) &= \ln \left(\frac{4L^{L+1}\xi^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} \right) + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right), \\ \ln f(\xi) &= \ln(4L^{L+1}\xi^L) - \ln(\Gamma(L)(1-|\rho|^2)) + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right), \\ \ln f(\xi) &= \ln(4) + \ln L^{L+1} + \ln \xi^L - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right), \\ \ln f(\xi) &= \ln(4) + (L+1) \ln L + L \ln \xi - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right). \end{aligned}$$

Definimos a equação reduzida log-verossimilhança para a PDF univariada magnitude do produto

$$\ln f(\xi) = \ln(4) + (L+1) \ln L + L \ln \xi - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2} \right). \quad (1.137)$$

1.5.3 Método da verossimilhança aplicado na PDF univariada razão de intensidades

Considerando a função a PDF univariada magnitude do produto,

$$p^{(L)}(\mu) = \frac{\Gamma(2L)(1-|\rho_c|^2)^L(1+\mu)\mu^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L)[(1+\mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2L+1}{2}}} \quad (1.138)$$

onde, $\mu > 0$ e $L > 0$. Aplicando o logaritmo natural na equação (1.138) e realizando algumas manipulações algébricas teremos:

$$\begin{aligned} \ln p^{(L)}(\mu) &= \ln \left(\frac{\Gamma(2L)(1-|\rho_c|^2)^L(1+\mu)\mu^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L)[(1+\mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2L+1}{2}}} \right), \\ \ln p^{(L)}(\mu) &= \ln \left(\Gamma(2L)(1-|\rho_c|^2)^L(1+\mu)\mu^{L-1} \right) \\ &\quad - \ln \left(\Gamma(L)\Gamma(L)[(1+\mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2L+1}{2}} \right), \\ \ln p^{(L)}(\mu) &= \ln \Gamma(2L) + \ln(1-|\rho_c|^2)^L + \ln(1+\mu) + \ln \mu^{L-1} \\ &\quad - \left(\ln \Gamma(L) + \ln \Gamma(L) + \ln [(1+\mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2L+1}{2}} \right), \\ \ln p^{(L)}(\mu) &= \ln \Gamma(2L) + L \ln(1-|\rho_c|^2) + \ln(1+\mu) + (L-1) \ln \mu \\ &\quad - 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L+1}{2} \ln [(1+\mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]. \end{aligned}$$

Definimos a equação reduzida log-verossimilhança para a PDF univariada razão de intensidades

$$\begin{aligned}\ln p^{(L)}(\mu) &= \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho_c|^2) + \ln(1 + \mu) + (L - 1) \ln \mu \\ &- 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L+1}{2} \ln [(1 + \mu)^2 - 4|\rho_c|^2 \mu].\end{aligned}\tag{1.139}$$

Capítulo 2

Detecção de bordas em imagens PolSAR

Na literatura encontramos uma grande oferta de métodos clássicos para detectar bordas, por exemplo Sobel, Canny, Laplaciano da gaussiana(LoG) e LoG piramidal. Os métodos clássicos de detecção de bordas são construídos assumindo que o ruído é aditivo, tornando esses métodos ineficientes para aplicação em imagens PolSAR, entretanto, nas imagens PolSAR o ruído é multiplicativo.

Na corrente seção conceitos baseados nos artigos [Gambini *et al.* \(2006\)](#); [Nascimento *et al.* \(2014\)](#) serão introduzidos e proporemos modificações para os métodos de detecção de borda em imagens PolSAR com múltiplas visadas. A ideia principal é detectar o ponto de transição em uma faixa tão fina quanto possível entre duas regiões da imagem. O ponto de transição é definido como uma evidência de borda. Os ruídos nesse tipo de imagens são do tipo *speckle*, os mesmos têm natureza multiplicativa, tornando a detecção de bordas em imagens SAR uma tarefa desafiadora.

Podemos indicar que o problema de detecção de bordas, pode ser resumido em três importantes aspectos:

1. o procedimento para detecção;
2. a determinação de uma posição mais acurada da posição da borda;
3. a especificação de tamanho para uma janela (pode ser uma janela quadrada ou em uma faixa de dados).

O tamanho da janela pode influenciar em alguns aspectos como por exemplo, em uma janela pequena pode não conter informações para identificar a presença de bordas, ou em janelas maiores podem obter informações para mais de uma borda. Assim o tamanho de janela ideal é aquele que contém as informações para detecção de uma borda. Vamos assumir que há uma borda na janela fornecida pela seleção inicial, quando forem realizados os testes computacionais.

Em linhas gerais seguiremos as seguintes afirmações:

1. tentar encontrar faixas finas de dados, idealmente do tamanho de um pixel;
2. será usado o método de máxima verossimilhança;
3. de que maneira a detecção trabalha em diferentes canais da imagem PolSAR.

De uma maneira geral, a ideia se baseia em encontrar um ponto de transição em uma faixa de dados, o qual é considerado uma estimativa de posicionamento da borda, isto é, uma evidência de borda. A evidência de borda é encontrada em um processo de otimização.

As metodologias de detecção de bordas ocorrem em diversos estágios, abaixo enumeramos os estágios:

1. identificar o centroide de uma região de interesse (ROI) de maneira automática, semiautomática ou manual;

2. construir raios do centroide para fora da área de interesse;
3. coletar dados em uma vizinhança em torno dos raios;
4. detectar pontos na faixa de dados os quais fornecem evidências de mudanças de propriedades estatística, ou seja, uma transição que define uma evidência de borda;
5. definir o contorno usando um método de interpolação entre os pontos de transição, por exemplo, as B-Splines, ou o método dos quadrados mínimos **MMQ**.

Inicialmente, escolhemos uma região de interesse (ROI) \mathbf{R} com centroide \mathbf{C} e traçamos raios iniciando em \mathbf{C} e indo até um ponto de controle \mathbf{P}_i , com $i = 1, 2, \dots, S$, estes pontos de controle estão fora da região \mathbf{R} . Teremos S raios resultantes representados por $\mathbf{s}^{(i)} = \overline{\mathbf{C}\mathbf{P}_i}$ com ângulos $\epsilon_i = \angle(\mathbf{s}^{(i)}, \mathbf{s}^{(i+1)})$.

Os raios serão convertidos sobre pixels usando o algoritmo *Bresenham's midpoint line algorithm*, esse algoritmo fornece uma fina representação digital para os raios. Portanto, em cada raio vamos assumir que os dados seguem uma distribuição complexa Wishart com sua respectiva função de distribuição dada por (1.60) e denotada por $W(\Sigma, L)$.

A faixa de dados coletada no i -ésimo raio \mathbf{s}^i , com i variando em $i = 1, 2, \dots, S$, contém $N^{(i)}$ pixels. Para cada pixel k em uma dada faixa i , a mesma pode ser descrita pelo resultado da matriz $Z_k^{(i)}$ sendo esta uma distribuição de Wishart, portanto podemos representar cada pixel como uma distribuição,

$$\begin{cases} Z_k^{(i)} \sim W(\Sigma_A^{(i)}, L_A^{(i)}), & \text{para } k = 1, \dots, j^{(i)}, \\ Z_k^{(i)} \sim W(\Sigma_B^{(i)}, L_B^{(i)}), & \text{para } k = j^{(i)} + 1, \dots, N^{(i)}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Podemos definir cada faixa composta de dois tipos de amostras, e, cada tipo obedece uma lei de Wishart complexa com diferentes parâmetros. Vamos assumir que o número de visadas é constante para todas as faixas. A ideia principal é encontrar uma evidência de borda $j^{(i)}$ em cada faixa, ao longo do raio $\mathbf{s}^{(i)}$, a evidência de borda ou ponto de transição representa um pixel de transição entre as duas amostras. O modelo proposto em (2.1) assume que existir uma transição ocorrendo ao longo da faixa $\mathbf{s}^{(i)}$. Sem perda de generalidade na continuidade do trabalho será omitido o índice (i) focando nossa análise em uma única faixa.

2.1 Estimativa por Máxima verossimilhança (MLE)

O conceito de verossimilhança é importante em estatística, pois descreve de maneira precisa as informações sobre os parâmetros do modelo estatístico que representa os dados observados. De maneira geral, a estimativa por máxima verossimilhança (**MLE**) é um método que, tendo um conjunto de dados e um modelo estatístico, estima os valores dos parâmetros do modelo estatísticos com intuito de maximizar uma função de probabilidade dos dados.

2.2 Função de verossimilhança

Suponha $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ um vetor randômico distribuído de acordo com a **p.d.f** função densidade de probabilidade $f(\mathbf{x}, \theta)$ com parâmetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)^T$ no espaço dos parâmetros Θ . Definimos a **função de verossimilhança** cuja amostra é

$$L(\theta; \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \quad (2.2)$$

e a função logarítmica de verossimilhança a qual podemos chamar de **função de log-verossimilhança** é a soma

$$l(\theta; \mathbf{X}) = \ln(L(\theta; \mathbf{X})) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i; \theta)). \quad (2.3)$$

Podemos definir o método da **estimativa de máxima verossimilhança (MLE)** de θ como sendo o vetor $\hat{\theta}$ tal que $L(\hat{\theta}; \mathbf{x}) \geq L(\theta; \mathbf{x})$ para todo θ no espaço dos parâmetros Θ . De maneira simplificada a **estimativa de máxima verossimilhança** pode ser escrita por

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x}), \quad (2.4)$$

ou de maneira similar

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta; \mathbf{x}). \quad (2.5)$$

2.3 Estimativa de máxima verossimilhança aplicada a distribuição Wishart

Nesta seção vamos usar o método de máxima verossimilhança aplicado na distribuição Wishart. Suponha $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_N)^T$ um vetor randômico distribuído de acordo com a **p.d.f** função densidade de probabilidade (1.60) com parâmetros $\Sigma = \{\Sigma_A, \Sigma_B\}$ e L .

A **função de verossimilhança** da amostra descrita por (2.1) é dada pela equação produtório das funções de densidade respectivamente associadas a cada amostra

$$L(j) = \prod_{k=1}^j f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_A, L) \prod_{k=j+1}^N f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_B, L), \quad (2.6)$$

onde \mathbf{Z}'_k é uma possível aproximação da matriz randômica descrita em (2.1).

Usando a equação (1.63) e propriedades de logaritmos natural teremos para cada termo do produtório (2.6) uma **função de log-verossimilhança**. Assim, encontramos uma função dependente de j

$$l(j) = \ln L(j) = \sum_{k=1}^j \ln f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_A, L) + \sum_{k=j+1}^N \ln f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_B, L). \quad (2.7)$$

Nesse momento, podemos realizar manipulações algébricas na função distribuição em cada termo do somatório conforme (1.63) e substituir nas duas parcelas da equação (2.7) levando em consideração que as duas amostras são diferentes, desta forma

$$\begin{aligned} l(j) &= \sum_{k=1}^j \left[mL \ln(L) + (L - m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \ln(|\Sigma_A|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ &+ \sum_{k=j+1}^N \left[mL \ln(L) + (L - m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \ln(|\Sigma_B|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ l(j) &= \sum_{k=1}^j [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - \sum_{k=1}^j \left[L \ln(|\Sigma_A|) - L \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ &+ \sum_{k=1}^N \left[(L - m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) \right] - \sum_{k=j+1}^N \left[L \ln(|\Sigma_B|) - L \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + \sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ &+ (L - m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[(N - j) \ln(|\Sigma_B|) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\ l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\Sigma_A|) + (N - j) \ln(|\Sigma_B|) \right], \\ &+ (L - m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right]. \end{aligned}$$

A matriz Σ pode ser encontrada usando o estimador de máxima verossimilhança denotado por $\hat{\Sigma}$ de acordo com a referência (Goodman, 1963). A equação (2.8) representa duas estimativa para a matriz de covariância Σ que dependem da posição j

$$\widehat{\Sigma}_I(j) = \begin{cases} j^{-1} \sum_{k=1}^j \mathbf{Z}_k & \text{se } I = A, \\ (N - j)^{-1} \sum_{k=j+1}^N \mathbf{Z}_k & \text{se } I = B. \end{cases} \quad (2.8)$$

Usando a equação (2.8) podemos substituir na equação acima e continuar a manipulação

algébrica

$$\begin{aligned}
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\Sigma_{\mathbf{A}}|) + (N-j) \ln(|\Sigma_{\mathbf{B}}|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\sum_{k=1}^j \text{tr}(\Sigma_{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{Z}'_k) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\Sigma_{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\Sigma_{\mathbf{A}}|) + (N-j) \ln(|\Sigma_{\mathbf{B}}|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\text{tr} \left(\sum_{k=1}^j \Sigma_{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{Z}'_k \right) + \text{tr} \left(\sum_{k=j+1}^N \Sigma_{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{Z}'_k \right) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\Sigma_{\mathbf{A}}|) + (N-j) \ln(|\Sigma_{\mathbf{B}}|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[\text{tr} \left(\Sigma_{\mathbf{A}}^{-1} \sum_{k=1}^j \mathbf{Z}'_k \right) + \text{tr} \left(\Sigma_{\mathbf{B}}^{-1} \sum_{k=j+1}^N \mathbf{Z}'_k \right) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\Sigma_{\mathbf{A}}|) + (N-j) \ln(|\Sigma_{\mathbf{B}}|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L [mj + (N-j)m], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\Sigma_{\mathbf{A}}|) + (N-j) \ln(|\Sigma_{\mathbf{B}}|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - LNm, \\
l(j) &= N [-mL(1 - \ln(L)) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\Sigma_{\mathbf{A}}|) + (N-j) \ln(|\Sigma_{\mathbf{B}}|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|),
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
l(j) &= N [-mL(1 - \ln(L)) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[j \ln(|\widehat{\Sigma}_{\mathbf{A}}(j)|) + (N-j) \ln(|\widehat{\Sigma}_{\mathbf{B}}(j)|) \right], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

O estimador de máxima verossimilhança \widehat{j}_{ML} é uma evidência de borda por representar uma aproximação da transição de região e pode ser calculado pelo método de maximização

$$\widehat{j}_{ML} = \arg \max_j l(j). \tag{2.10}$$

Referências Bibliográficas

- Anfinsen et al.(2009)** Stian Normann Anfinsen, Anthony P Doulgeris e Torbjón Eltoft. Estimation of the equivalent number of looks in polarimetric synthetic aperture radar imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 47(11):3795–3809. Citado na pág. 9, 14
- Deng et al.(2017)** Xinping Deng, Carlos López-Martínez, Jinsong Chen e Pengpeng Han. Statistical modeling of polarimetric sar data: A survey and challenges. *Remote Sensing*, 9(4). ISSN 2072-4292. doi: 10.3390/rs9040348. URL <https://www.mdpi.com/2072-4292/9/4/348>. Citado na pág. 5
- Frery et al.(2011)** Alejandro C Frery, Abraao DC Nascimento e Renato J Cintra. Information theory and image understanding: An application to polarimetric SAR imagery. *Chilean Journal of Statistics*, 2(2):81–100. Citado na pág. 14
- Gambini et al.(2006)** J. Gambini, M. Mejail, J. Jacobo-Berlles e A. C. Frery. Feature extraction in speckled imagery using dynamic B-spline deformable contours under the G0 model. *International Journal of Remote Sensing*, 27(22):5037–5059. doi: 10.1080/01431160600702616. Citado na pág. 27
- Goodman(1985)** J.W. Goodman. *Statistical Optics*. A Wiley-Interscience publication. Wiley. ISBN 9780471015024. URL <https://books.google.com.br/books?id=2VTwAAAAMAAJ>. Citado na pág. 7
- Goodman(1963)** N. R. Goodman. The distribution of the determinant of a complex Wishart distributed matrix. *Ann. Math. Statist.*, 34(1):178–180. doi: 10.1214/aoms/1177704251. URL <http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177704251>. Citado na pág. 7, 9, 13, 14, 15, 29
- Henningsen e Toomet(2011)** Arne Henningsen e Ott Toomet. maxlik: A package for maximum likelihood estimation in R. *Computational Statistics*, 26(3):443–458. doi: 10.1007/s00180-010-0217-1. Citado na pág. 23
- Lee et al.(1994)** J. S. Lee, K. W. Hoppel, S. A. Mango e A. R. Miller. Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(5):1017–1028. doi: 10.1109/36.312890. Citado na pág. 13, 16, 19, 21
- Lee e Pottier(2009)** Jong-Sen Lee e Eric Pottier. *Polarimetric radar imaging: from basics to applications*. CRC press. Citado na pág. 1, 3, 5
- López-Martínez et al.(2005)** Carlos López-Martínez, Xavier Fàbregas e Eric Pottier. Multidimensional speckle noise model. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2005(20): 180956. ISSN 1687-6180. doi: 10.1155/ASP.2005.3259. URL <https://doi.org/10.1155/ASP.2005.3259>. Citado na pág. 13
- Nascimento et al.(2014)** Abraão Nascimento, Michelle Horta, Alejandro Frery e Renato Cintra. Comparing edge detection methods based on stochastic entropies and distances for PolSAR imagery. *Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 7(2): 648–663. Citado na pág. 27
- Sarabandi(1992)** K Sarabandi. Derivation of phase statistics from the mueller matrix. *Radio Science*, 27. doi: 10.1029/92RS00195. Citado na pág. 13