1 Estudo da bibliografia

Este arquivo serve para fazer apontamentos acerca da bibliografia indicada/pesquisada.

1.1 Estudo do artigo [1]

.

A matriz de espalhamento complexa $\mathbf{S}$ é definida por

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}.$$

Por facilidade usaremos o fato de ser um *reciprocal medium*, isto é, $S_{hv} = S_{vh}$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{vv} \\ S_{vh} \\ S_{hh} \end{bmatrix}.$$

De acordo com [2] a distribuíção gaussiana complexa multivariada pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de $\mathbf{S}$. Isto é chamado de *single-look PolSar data representation* e podemos definir o vetor de espalhamento por $\mathbf{s} = [S_1, S_2, \ldots, S_p]^T$.

A função densidade de probabilidade (**pdf**) da distribuição gaussiana complexa $p-$variada é dada por

$$p(\mathbf{s}) \quad = \quad \tfrac{1}{\pi^p |\Sigma_\mathbf{s}|} \exp(-\bar{\mathbf{s}}^T \Sigma_\mathbf{s}^{-1} \mathbf{s}) \tag{1}$$

Sendo a matriz de covariância definida por:

$$\mathbf{\Sigma_s} = E[\mathbf{ss}^H] = \begin{bmatrix} E(\mathbf{s_1 s_1}^H) & E(\mathbf{s_1 s_2}^H) & \ldots & E(\mathbf{s_1 s_p}^H) \\ E(\mathbf{s_2 s_1}^H) & E(\mathbf{s_2 s_2}^H) & \ldots & E(\mathbf{s_2 s_p}^H) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathbf{s_p s_1}^H) & E(\mathbf{s_p s_2}^H) & \ldots & E(\mathbf{s_p s_p}^H) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

onde $E(\cdot)$ e $(\cdot)^H$ denotam o valor esperado e o conjugado transposto.

Dados polarimétricos são usualmente sujeitados a um processo *multilook* com o intuito de melhorar a razão *signal-to-noise*. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas são obtidas computando a médias de L *looks* independentes de uma mesma cena. Isto resulta na matriz de covariância $\mathbf{Z}$ dada por:

$$\mathbf{Z} \quad = \quad \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{L} \mathbf{s_i s_i}^H. \tag{3}$$

1.2 Estudo do artigo [2]

A variável randômica gaussiana complexa $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{iY}$ é uma variável randômica complexa cuja parte imaginária e complexa são distribuída de forma Gaussiana. E uma variável randômica gaussiana complexa $p-$variada $\xi^{'} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_p)$ é uma $p-$upla de variáveis randômica gaussiana complexas tal que o vetor de partes imaginárias e reais é $\eta^{'} = (X_1, Y_1, \ldots, X_p, Y_p)$.

A matriz de covariância definida positiva $2p \times 2p$ será:

$$\mathbf{\Sigma}_\eta = \begin{bmatrix} E(X_jX_k) & E(X_jY_k) \\ E(Y_jX_k) & E(Y_jY_k) \end{bmatrix}.$$

Tal que

$$\mathbf{\Sigma}_\eta = \begin{bmatrix} E(X_jX_k) & E(X_jY_k) \\ E(Y_jX_k) & E(Y_jY_k) \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\sigma_k^2 & \text{se} \quad j = k, \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha_{ik} & -\beta_{jk} \\ \beta_{jk} & \alpha_{ik} \end{bmatrix}\sigma_j\sigma_k & \text{se} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Onde $E(\cdot)$ denota o operador de valor esperado(esperança).

Podemos usar a matriz de covariância hermitiana complexa definida positiva usando a ξ variável randômica gaussiana complexa de dimensão $p \times p$

$$\Sigma_\xi = E(\xi\bar{\xi}^T) = ||E(Z_j\bar{Z}_k)|| = ||\sigma_{jk}||$$

onde

$$\sigma_{jk} = \begin{cases} \sigma_k^2 & \text{se} \quad j = k, \\ (\alpha_{jk} + i\beta_{jk})\sigma_j\sigma_k & \text{se} \quad j \neq k. \end{cases}$$

A função densidade de probabilidade (**pdf**) da distribuição gaussiana complexa $p-$variada é dada por

$$p(\xi) \quad = \quad \tfrac{1}{\pi^p|\Sigma_\xi|}\exp(-\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi) \tag{4}$$

Exemplo 1 - Seja a distribuição gaussian complexa univariada ($p = 1$). Sendo $\xi^T = z_1 = x_1 + iy_1$. E a "matriz"de covariância $\Sigma_\xi = \sigma_1^2$ com determinante $|\Sigma_\xi| = \sigma_1^2$ e "matriz inversa"$\Sigma_\xi^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2}$, Assim,

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi &= (x_i - iy_1)\tfrac{1}{\sigma_1^2}(x_1 + iy_1) \\ \bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi &= (x_i - iy_1)(x_1 + iy_1)\tfrac{1}{\sigma_1^2} \\ \bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi &= \tfrac{x_1^2 + y_1^2}{\sigma_1^2} \end{aligned} \tag{5}$$

$$p(\xi) \quad = \quad \tfrac{1}{\pi\Sigma_\xi^2}\exp\left(-\tfrac{x_1^2+y_1^2}{\sigma_1^2}\right) \tag{6}$$

Exemplo 2 - Seja a distribuição gaussian complexa bivariada ($p = 2$). Sendo $\xi^T = (z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)^T$. E a matriz de covariância

$$\Sigma_\xi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ (\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

com determinante $|\Sigma_\xi| = (1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$ e matriz inversa

$$\Sigma_\xi^{-1} = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi \quad = \quad [z_1, z_2]^H\Sigma_\xi^{-1}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = [z_1, z_2]^H \frac{1}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12}+i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12}-i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} [z_1, z_2]^H \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12}+i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12}-i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} [z_1, z_2]^H \begin{bmatrix} \sigma_2^2 z_1 - (\alpha_{12}+i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 z_2 \\ -(\alpha_{12}-i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 z_1 + \sigma_1^2 z_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(\sigma_2^2 \bar{z_1} z_1 - (\alpha_{12}+i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \bar{z_1} z_2 - (\alpha_{12}-i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \bar{z_2} z_1 + \sigma_1^2 \bar{z_2} z_2 \right) \quad (11)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{1}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2 \bar{z_1} z_2 \right) \quad (12)$$

$$\bar{\xi}^T \Sigma_\xi^{-1} \xi = \frac{\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2 \bar{z_1} z_2}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \quad (13)$$

Assim, a função densidade de probabilidade (**pdf**)

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi^2(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2 |z_1|^2 + \sigma_1^2 |z_2|^2 - 2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2 \bar{z_1} z_2}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \right) \quad (14)$$

Distribuição complexa de Wishart

A distribuição complexa de Wishart descrita no artigo [2], define agora uma amostra de n vetores com valores complexos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ então a matriz hermitiana de covariância é

$$\hat{\Sigma}_\xi = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \bar{\xi}_j^T. \quad (15)$$

A matriz $\hat{\Sigma}_\xi$ é uma "maximum likelihood"para Σ_ξ sendo uma estatística suficiente para a matriz hermitiana de covariância.

Considerando $A = ||A_{jkR} + iAjkI|| = n\hat{\Sigma}_\xi$ chamaremos a matriz A de distribuição complexa de Wishart. A função densidade de probabilidade de A é

$$p_W(A) = \frac{|A|^{n-p}}{I(\Sigma_\xi)} \exp(-tr(\Sigma_\xi^{-1} A)), \quad (16)$$

onde

$$I(\Sigma_\xi) = \pi^{\frac{1}{2}p(p-1)} \Gamma(n) \ldots \Gamma(n-p+1) |\Sigma_\xi|^n, \quad (17)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma.

1.3 Estudo do artigo [3]

Definição importante

Definição 1.1 *Divergência (h,ϕ). Sejam as variáveis aleatórias X e Y com mesmo suporte S e p.d.f respectivamente $f_X(x|\theta_1)$ e $f_Y(x|\theta_2)$. Sejam ainda $\phi : (0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ uma função convexa e diferenciável, e h uma função crescente tal que $h(0) = 0$ então a divergência (h,ϕ) é definida como*

$$d_\phi^h(X||Y) \quad = \quad h\left[\int_{x\in S(x)} f_Y(x|\theta_2)\phi\left(\frac{f_X(x|\theta_1)}{f_Y(x|\theta_2)}\right)dx\right]. \tag{18}$$

Definindo que divergência é uma maneira de medir as diferenças entre duas distribuições. A seguir descreveremos um exemplo para ilustrar a definição.

Para começar a entender os resultados do artigo [3] é descrito abaixo o exemplo 1 sobre medida craniana de rãs:

Sendo (x_1) o comprimento craniano e (x_2) a amplitude craniana, uma amostra de $n = 35$ rãs femeas maduras conduziu a seguinte estatística:

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 22.860 \\ 24.397 \end{bmatrix} \mathbf{S_1} = \begin{bmatrix} 17.178 & 19.710 \\ 19.710 & 23.710 \end{bmatrix}.$$

e similar medidas para uma amostra $m = 14$ rãs machos,

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 21.821 \\ 22.843 \end{bmatrix} \mathbf{S_2} = \begin{bmatrix} 17.159 & 17.731 \\ 17.731 & 19.273 \end{bmatrix}.$$

onde $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ são estimadores de máxima varossimilhança da matriz de covariância.

Para auxiliar foi criado dois programas em matlab chamados "salicruex1a.m"e "salicru1ex1b.m"armazenado em (meu micro):

$"/home/aborba/MEGAsync/mack/alejandro/gitufalmackbackup/doclatex/"$

(a) Sendo:

$$\mathbf{S} = \frac{n\mathbf{S_1} + m\mathbf{S_2}}{n+m} = \begin{bmatrix} 17.173 & 19.145 \\ 19.145 & 22.442 \end{bmatrix}.$$

tal que sua matriz inversa é:

$$\mathbf{S^{-1}} = \begin{bmatrix} 1.18958 & -1.01482 \\ -1.01482. & 0.91028 \end{bmatrix}.$$

A expressão (r,s)-divergência obtida de (h,ϕ)-divergência sobre certas condições pode ser escrita:

$$\begin{aligned} D_r^s((\mu_1,\Sigma_1),(\mu_2,\Sigma_2)) \quad &= \quad \tfrac{1}{(s-1)}\left[\exp\left(\tfrac{r(s-1)}{2}(\mu_1-\mu_2)^T[r\Sigma_2+(1-r)\Sigma_1]^{-1}(\mu_1-\mu_2)\right)\right. \\ &\quad \left. \cdot \quad \frac{|r\Sigma_2+(1-r)\Sigma_1|^{\frac{(1-s)}{2(r-1)}}}{|\Sigma_1|^{\frac{s-1}{2}}|\Sigma_2|^{\frac{(1-s)r}{2(r-1)}}} - 1\right] \end{aligned} \tag{19}$$

Assim calculando

$$\begin{aligned} T_4 &= \tfrac{2nm}{r(n+m)} D_r^s((\mathbf{x_1},\mathbf{S}),(\mathbf{x_2},\mathbf{S})) \\ T_4 &= 40(0.052663) \\ T_4 &= 2.10653 \end{aligned} \tag{20}$$

(b) Será usado o corolário $2b$ do artigo [3] assim a estatística que vamos calcular será:

$$\begin{array}{rcl} T_3 & = & \frac{2nm}{r(n+m)} D_r^s((\mathbf{x_1}, \mathbf{S_1}), (\mathbf{x_2}, \mathbf{S_2})) \\ T_3 & = & 4.76047 \end{array} \tag{21}$$

Tendo um valor diferente do artigo, investigando onde pode estar a discrepância encontramos o seguinte valor para,

$$(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2})^T [r\mathbf{S_2} + (\mathbf{1} - \mathbf{r})\mathbf{S_1}]^{-1} (\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}) \quad = \quad 0.22724 \tag{22}$$

enquanto o artigo encontrou 0.06970 para o mesmo passo, até o momento não sei explicar a diferença.

1.4 Estudo do artigo [4]

O instrumento SAR totalmente polarimétrico transmite pulsos de microondas polarizados ortogonalmente e mede componentes ortogonais do sinal recebido. Para cada pixel a medida resulta em uma matriz de coeficientes de espalhamento. Esses coeficientes são números complexos que descrevem a transformação do campo eletromagnético trasmitido para o campo eletromagnético recebido para todas as combinações de transmitidas e recebidas polarizações.

A transformação pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \frac{e^{jkr}}{r} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h^t \\ E_v^t \end{bmatrix} \tag{23}$$

Onde k denota o número de onda e r é a distância entre o radar e o alvo. No campo eletromagnético com componentes E_i^j os índices subscritos denotados polarização horizontal h ou vertical v enquanto os índices sobrescritos indicam a onda recebida r ou transmitida t.

A matrix de espalhamento pode ser reduzida ao seguintes vetores:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ \frac{S_{hv}+S_{vh}}{\sqrt{2}} \\ S_{vv} \end{bmatrix} . \mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ S_{hv} + S_{vh} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

1.4.1 Modelos Gaussianos

Podemos assumir que o vetor de espalhamento é uma distribuíção gaussiana complexa circular. A matriz $\mathbf{S}$ e os vetores $\mathbf{s}$ e $\mathbf{k}$ são *Single-look complex* representação dos daos PolSAR. Dados PolSAR *Multilook* podem ser representados por

$$\mathbf{C_s} \quad = \quad \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \mathbf{s_i}\mathbf{s_i}^H. \quad \mathbf{C_k} \quad = \quad \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \mathbf{k_i}\mathbf{k_i}^H. \tag{25}$$

chamadas de matriz de covariância e matriz de coerência, sendo L o número de *looks*. Por definição assumimos que $\mathbf{s}$ ou $\mathbf{k}$ é gaussiana multivariada e complexa circular e tem média zero. Será denotado $s \sim N_d^{\mathbb{C}}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma_s})$ onde $\mathbf{0}$ é um vetor coluna de zeros, d a dimensão de $\mathbf{s}$ a matriz de covariância de $\mathbf{s}$

$$\mathbf{\Sigma_s} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E(\mathbf{s_1}\mathbf{s_1}^H) & E(\mathbf{s_1}\mathbf{s_2}^H) & \dots & E(\mathbf{s_1}\mathbf{s_p}^H) \\ E(\mathbf{s_2}\mathbf{s_1}^H) & E(\mathbf{s_2}\mathbf{s_2}^H) & \dots & E(\mathbf{s_2}\mathbf{s_p}^H) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\mathbf{s_p}\mathbf{s_1}^H) & E(\mathbf{s_p}\mathbf{s_2}^H) & \dots & E(\mathbf{s_p}\mathbf{s_p}^H) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

A função densidade de probabilidade (*pdf*) de $\mathbf{s}$ é

$$p(\mathbf{s}, \Sigma_{\mathbf{s}}) = \tfrac{1}{\pi^p|\Sigma_{\mathbf{s}}|} \exp(-\mathbf{s}^H \Sigma_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{s}) \quad (27)$$

Se $L \geq d$ e os S_i (ou k_i) e na equação (25) são independentes, então ma matriz de covariância escalada pode ser definida como $\mathbf{Z} = L\mathbf{C_s}$ (ou $\mathbf{Z} = L\mathbf{C_k}$), de acordo com distribuição de Wishart complexa não singular [2]

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; L, \mathbf{\Sigma}) = \tfrac{|\mathbf{Z}|^{L-p}}{|\mathbf{\Sigma}|^L \Gamma_d(L)} \exp(-tr(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{Z})), \quad (28)$$

onde $tr(\cdot)$ é o operadot traço e $\Sigma = \frac{E[\mathbf{Z}]}{L} = E[\mathbf{C_s}]$.

Vamos escrever $\mathbf{Z} \sim W_d^{\mathbb{C}}(L, \mathbf{\Sigma})$.

E ainda, A constante de normalização $\Gamma_d(L)$ é a função Gamma multivariada definida como

$$\Gamma_d(L) = \pi^{\frac{1}{2}d(d-1)} \prod_{i=0}^{d-1} \Gamma(L-i) \quad (29)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma.

1.4.2 Coeficiente de estimador de variação

O exemplo da figura (1) mostra uma distribuíção gamma $g(\sigma, L)$ parametrizada com intensidade média $\sigma = 0.0358$ e com múmeros de *looks* $L = \{8, 10, 12\}$.

$$p_I(I; \sigma, L) = \tfrac{1}{\Gamma(L)} \left(\tfrac{L}{\sigma}\right)^L \exp(-\tfrac{LI}{\sigma}), \quad (30)$$

onde intensidade média σ e número de *looks* L são parametros desta distribuição gamma.

obs 1 - Programa *proanfinsen2009.r* armazenado no meu computador pessoal.

1.5 Estudo do artigo [5]

As definições deste artigo são semelhantes as definições do artigo [4] descrita na seção acima.

1.5.1 Entendendo as densidades e seus gráficos

Nesta seção o intuito é reproduzir e entender as distribuições que geraram as figuras (1), (2) e (3) do artigo [5].

$$f_X(x) = \tfrac{r_{\alpha,\omega}}{2K_\alpha(\omega)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\tfrac{\omega}{2}\left(\tfrac{1}{r_{\alpha,\omega}x} + r_{\alpha,\omega}x\right)\right), \quad (31)$$

onde $x > 0$ e $r_{\alpha,\omega} = \frac{K_{\alpha+1}(\omega)}{K_\alpha(\omega)}$

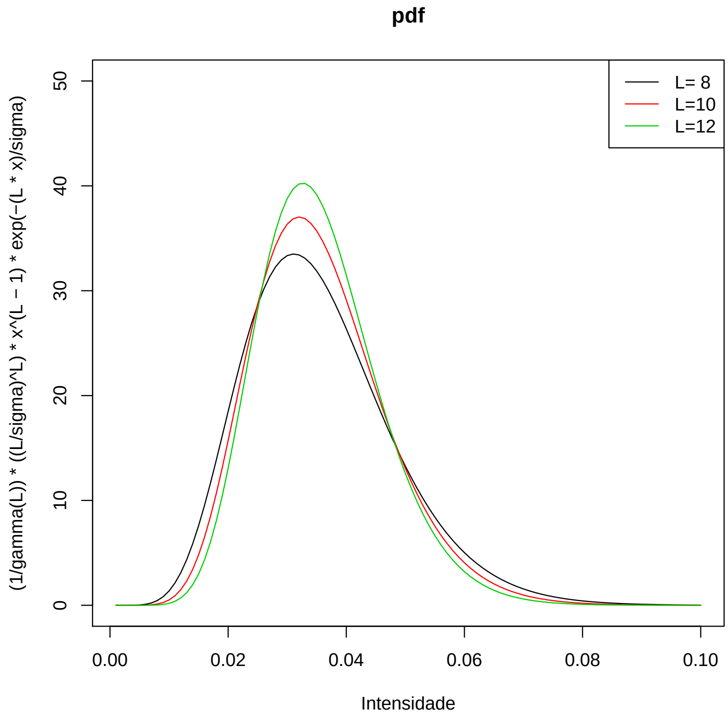

Figura 1: Distribuição gamma da referência [4] com parametros $\sigma = 0.0356$ e $L = \{8, 10, 12\}$.

Seja K_ν uma função de Bessel de terceiro tipo e com ordem ν. Na figura (2) é mostrado os gráficos das funções para diferentes valores de $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ e $\nu = 20$.

A figura (3) mostra os gráficos da equação (31) para $\omega = 1$ e diferentes valores de $\alpha \in (1.1, 3, 10, 20)$.

A figura (4) mostra os gráficos da equação (31) para $\alpha = 1$ e diferentes valores de $\omega \in (1, 2, 10, 30)$.

As figuras (3) e (4) deste estudo deveriam estar equivalentes as figuras (1) e (2) do artigo [5], porém mostraram diferenças consideráveis nas magnitudes das funções.

Para gerar as figuras (2), (3) e (4) usei a função de Bessel (besselk) programada no pacote R.

obs 2 - Programa *probesselfreitasfrery2005.r* armazenado no meu computador pessoal.

obs 3 - Programa *profig1freitasfrery2005.r* armazenado no meu computador pessoal.

obs 4 - Programa *profig2freitasfrery2005.r* armazenado no meu computador pessoal.

A densidade que caracteriza a distribuição gamma com média unitária

$$f_X(x) \quad = \quad \frac{\alpha^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left(-\alpha x\right), \qquad (32)$$

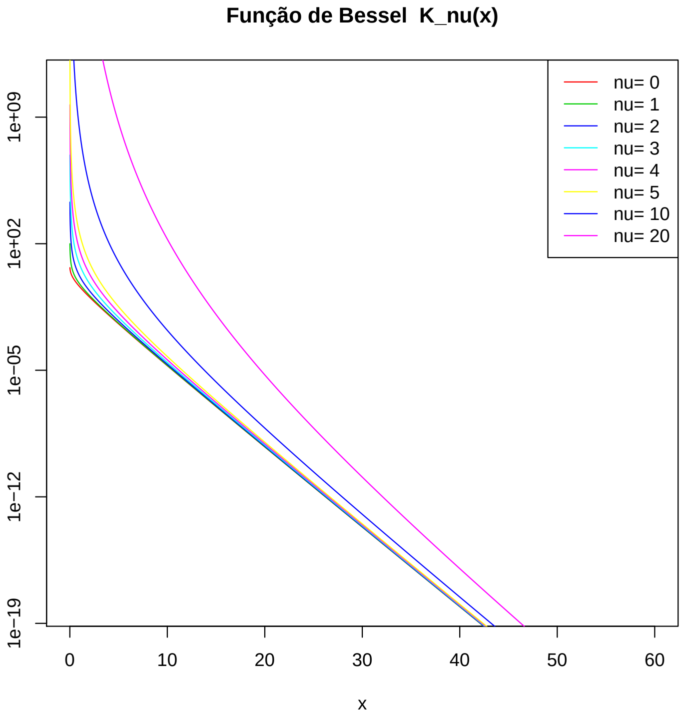

Figura 2: Gráficos da referência [5] para as funções de Bessel de terceiro tipo para diferentes ν.

onde α,$x > 0$, cujos gráficos estão na figura (5).

A densidade que caracteriza a distribuição gamma reciproca com média unitária

$$f_X(x) \quad = \quad \frac{x^{\alpha-1}}{(-\alpha-1)^{\alpha}\Gamma(-\alpha)} \exp\left(\frac{\alpha+1}{x}\right), \tag{33}$$

onde $-\alpha$,$x > 0$, cujos gráficos estão na figura (6).

obs 5 - Programa *profig3afreitasfrery2005.r* armazenado no meu computador pessoal.

obs 6 - Programa *profig3bfreitasfrery2005.r* armazenado no meu computador pessoal.

Referências

[1] J. S. Lee, K. W. Hoppel, S. A. Mango, and A. R. Miller. Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(5):1017–1028, September 1994.

[2] N. R. Goodman. The distribution of the determinant of a complex wishart distributed matrix. *Ann. Math. Statist.*, 34(1):178–180, 03 1963.

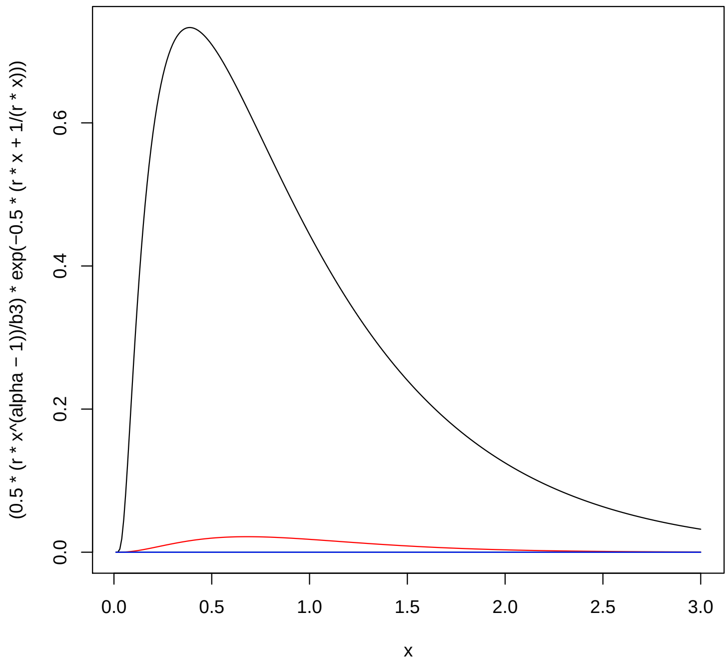

Figura 3: Gráficos da referência [5] para as equação (31) para $\omega = 1$ e $\alpha \in (1.1, 3, 10, 20)$.

[3] M. Salicru, D. Morales, M.L. Menendez, and L. Pardo. On the applications of divergence type measures in testing statistical hypotheses. *Journal of Multivariate Analysis*, 51(2):372 – 391, 1994.

[4] Stian Normann Anfinsen, Anthony P Doulgeris, and Torbjørn Eltoft. Estimation of the equivalent number of looks in polarimetric synthetic aperture radar imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 47(11):3795–3809, 2009.

[5] Corina C Freitas, Alejandro C Frery, and Antonio H Correia. The polarimetric g distribution for sar data analysis. *Environmetrics*, 16(1):13–31, 2005.

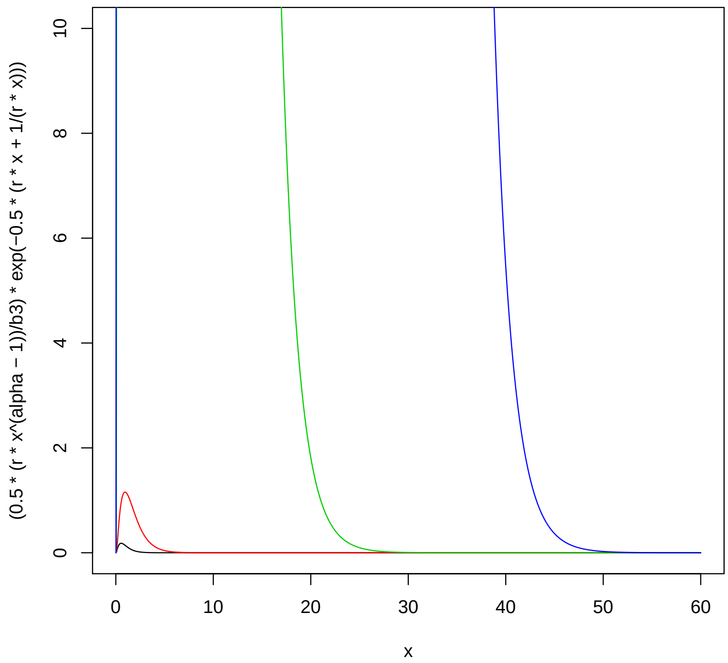

Figura 4: Gráficos da referência [5] para as equação (31) para $\alpha = 1$ e $\omega \in (1, 2, 10, 30)$.

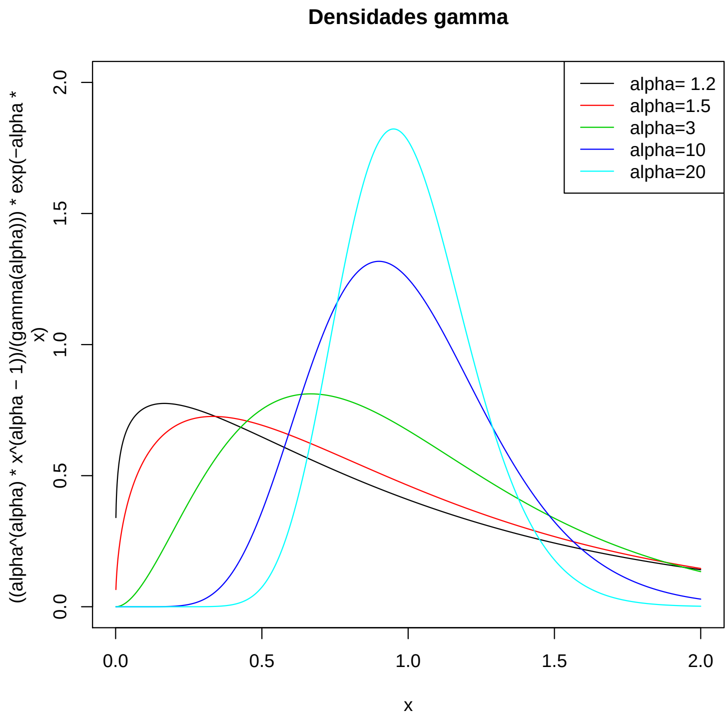

Figura 5: Densidades gamma unitária (32) para $\alpha > 0$ e $|\alpha| \in (1.2, 1.5, 3, 10, 20)$, referência [5] .

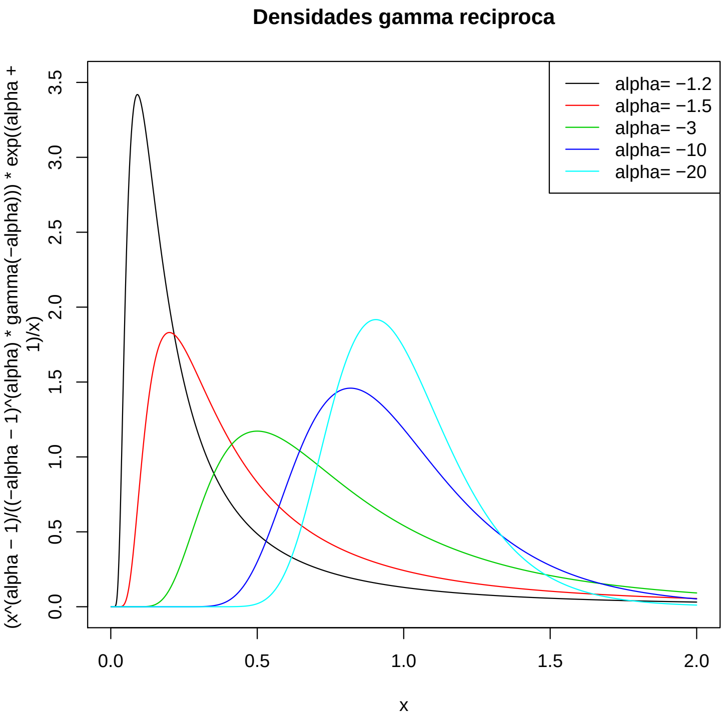

Figura 6: Densidades gamma unitária reciproca (33) para $\alpha < 0$ e $|\alpha| \in (1.2, 1.5, 3, 10, 20)$, referência [5] .