1 Estudo da bibliografia

Este arquivo serve para fazer apontamentos acerca da bibliografia indicada/pesquisada.

1.1 Estudo do artigo [1]

.

A matriz de espalhamento complexa $\mathbf{S}$ é definida por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}.$$

Por facilidade usaremos o fato de ser um *reciprocal medium*, isto é, $S_{hv} = S_{vh}$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{vv} \\ S_{vh} \\ S_{hh} \end{bmatrix}.$$

De acordo com [2] a distribuíção gaussiana complexa multivariada pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de $\mathbf{S}$. Isto é chamado de *single-look PolSar data representation* e podemos definir o vetor de espalhamento por $S = [S_1, S_2, \ldots, S_p]^t$.

1.2 Estudo do artigo [2]

A variável randômica gaussiana complexa $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{iY}$ é uma variável randômica complexa cuja parte imaginária e complexa são distribuída de forma Gaussiana. E uma variável randômica gaussiana complexa $p-$variada $\xi^{'} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_p)$ é uma $p-$upla de variáveis randômica gaussiana complexas tal que o vetor de partes imaginárias e reais é $\eta^{'} = (X_1, Y_1, \ldots, X_p, Y_p)$.

A matriz de covariância definida positiva $2p \times 2p$ será:

$$\mathbf{\Sigma}_\eta = \begin{bmatrix} E(X_jX_k) & E(X_jY_k) \\ E(Y_jX_k) & E(Y_jY_k) \end{bmatrix}.$$

Tal que

$$\mathbf{\Sigma}_\eta = \begin{bmatrix} E(X_jX_k) & E(X_jY_k) \\ E(Y_jX_k) & E(Y_jY_k) \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\sigma_k^2 & \text{se} \quad j = k, \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha_{ik} & -\beta_{jk} \\ \beta_{jk} & \alpha_{ik} \end{bmatrix}\sigma_j\sigma_k & \text{se} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Onde $E(\cdot)$ denota o operador de valor esperado(esperança).

Podemos usar a matriz de covariância hermitiana complexa definida positiva usando a ξ variável randômica gaussiana complexa de dimensão $p \times p$

$$\Sigma_\xi = E(\xi\bar{\xi}^T) = ||E(Z_j\bar{Z}_k)|| = ||\sigma_{jk}||$$

onde

$$\sigma_{jk} = \begin{cases} \sigma_k^2 & \text{se} \quad j = k, \\ (\alpha_{jk} + i\beta_{jk})\sigma_j\sigma_k & \text{se} \quad j \neq k. \end{cases}$$

A função densidade de probabilidade (**pdf**) da distribuição gaussiana complexa $p-$variada é dada por

$$p(\xi) \quad = \quad \frac{1}{\pi^p|\Sigma_\xi|}\exp(-\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi) \tag{1}$$

Exemplo 1 - Seja a distribuição gaussian complexa univariada ($p = 1$). Sendo $\xi^T = z_1 = x_1 + iy_1$. E a "matriz"de covariância $\Sigma_\xi = \sigma_1^2$ com determinante $|\Sigma_\xi| = \sigma_1^2$ e "matriz inversa"$\Sigma_\xi^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2}$, Assim,

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi &= (x_i - iy_1)\frac{1}{\sigma_1^2}(x_1 + iy_1) \\
\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi &= (x_i - iy_1)(x_1 + iy_1)\frac{1}{\sigma_1^2} \\
\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi &= \frac{x_1^2+y_1^2}{\sigma_1^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

$$p(\xi) \quad = \quad \frac{1}{\pi\Sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{x_1^2+y_1^2}{\sigma_1^2}\right) \tag{3}$$

Exemplo 2 - Seja a distribuição gaussian complexa bivariada ($p = 2$). Sendo $\xi^T = (z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)^T$. E a matriz de covariância

$$\Sigma_\xi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ (\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

com determinante $|\Sigma_\xi| = (1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$ e matriz inversa

$$\Sigma_\xi^{-1} = \frac{1}{(1 - \sigma_{12}^2 - \beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_j\sigma_k & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi \quad = \quad [z_1, z_2]^H\Sigma_\xi^{-1}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi \quad = \quad [z_1, z_2]^H\frac{1}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi \quad = \quad \frac{1}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}[z_1, z_2]^H\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -(\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi \quad = \quad \frac{1}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}[z_1, z_2]^H\begin{bmatrix} \sigma_2^2 z_1 - (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 z_2 \\ -(\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2 z_1 + \sigma_1^2 z_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi \quad = \quad \frac{1}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\ \sigma_2^2\bar{z}_1 z_1 - (\alpha_{12} + i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2\bar{z}_1 z_2 - (\alpha_{12} - i\beta_{12})\sigma_1\sigma_2\bar{z}_2 z_1 + \sigma_1^2\bar{z}_2 z_2\ \right) \tag{8}$$

$$\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi \quad = \quad \frac{1}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\ \sigma_2^2|z_1|^2 + \sigma_1^2|z_2|^2 - 2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2\bar{z}_1 z_2\ \right) \tag{9}$$

$$\bar{\xi}^T\Sigma_\xi^{-1}\xi \quad = \quad \frac{\sigma_2^2|z_1|^2+\sigma_1^2|z_2|^2-2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2\bar{z}_1 z_2}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \tag{10}$$

Assim, a função densidade de probabilidade (**pdf**)

$$p(\xi) \quad = \quad \frac{1}{\pi^2(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\exp\left(-\frac{\sigma_2^2|z_1|^2+\sigma_1^2|z_2|^2-2\alpha_{12}\sigma_1\sigma_2\bar{z_1}z_2}{(1-\sigma_{12}^2-\beta_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\right) \tag{11}$$

Distribuição complexa de Wishart

A distribuição complexa de Wishart descrita no artigo [2], define agora uma amostra de n vetores com valores complexos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ então a matriz hermitiana de covariância é

$$\hat{\Sigma}_\xi \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\bar{\xi}_j^T. \tag{12}$$

A matriz $\hat{\Sigma}_\xi$ é uma "maximum likelihood"para Σ_ξ sendo uma estatística suficiente para a matriz hermitiana de covariância.

Considerando $A = ||A_{jkR} + iAjkI|| = n\hat{\Sigma}_\xi$ chamaremos a matriz A de distribuição complexa de Wishart. A função densidade de probabilidade de A é

$$p_W(A) \quad = \quad \frac{|A|^{n-p}}{I(\Sigma_\xi)}\exp(-tr(\Sigma_\xi^{-1}A)), \tag{13}$$

onde

$$I(\Sigma_\xi) \quad = \quad \pi^{\frac{1}{2}p(p-1)}\Gamma(n)\ldots\Gamma(n-p+1)|\Sigma_\xi|^n, \tag{14}$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gamma.

1.3 Estudo do artigo [3]

Para começar a entender os resultados do artigo [3] é descrito abaixo o exemplo 1 sobre medida craniana de rãs:

Sendo (x_1) o comprimento craniano e (x_2) a amplitude craniana, uma amostra de $n = 35$ rãs femeas maduras conduziu a seguinte estatística:

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 22.860 \\ 24.397 \end{bmatrix} \mathbf{S_1} = \begin{bmatrix} 17.178 & 19.710 \\ 19.710 & 23.710 \end{bmatrix}.$$

e similar medidas para uma amostra $m = 14$ rãs machos,

$$\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 21.821 \\ 22.843 \end{bmatrix} \mathbf{S_2} = \begin{bmatrix} 17.159 & 17.731 \\ 17.731 & 19.273 \end{bmatrix}.$$

onde $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ são estimadores de máxima varossimilhança da matriz de covariância.

Para auxiliar foi criado dois programas em matlab chamados "salicruex1a.m"e "salicru1ex1b.m"armazenado em (meu micro):

"$/home/aborba/MEGAsync/mack/alejandro/gitufalmackbackup/doclatex/$"

(a) Sendo:

$$\mathbf{S} = \frac{n\mathbf{S_1} + m\mathbf{S_2}}{n+m} = \begin{bmatrix} 17.173 & 19.145 \\ 19.145 & 22.442 \end{bmatrix}.$$

tal que sua matriz inversa é:

$$\mathbf{S^{-1}} = \begin{bmatrix} 1.18958 & -1.01482 \\ -1.01482. & 0.91028 \end{bmatrix}.$$

A expressão (r,s)-divergência obtida de (h,ϕ)-divergência sobre certas condições pode ser escrita:

$$\begin{aligned} D_r^s((\mu_1,\Sigma_1),(\mu_2,\Sigma_2)) &= \frac{1}{(s-1)}\left[\exp\left(\frac{r(s-1)}{2}(\mu_1-\mu_2)^T[r\Sigma_2+(1-r)\Sigma_1]^{-1}(\mu_1-\mu_2)\right)\right. \\ &\cdot \left.\frac{|r\Sigma_2+(1-r)\Sigma_1|^{\frac{(1-s)}{2(r-1)}}}{|\Sigma_1|^{\frac{s-1}{2}}|\Sigma_2|^{\frac{(1-s)r}{2(r-1)}}}-1\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Assim calculando

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{2nm}{r(n+m)}D_r^s((\mathbf{x_1},\mathbf{S}),(\mathbf{x_2},\mathbf{S})) \\ T_4 &= 40(0.052663) \\ T_4 &= 2.10653 \end{aligned} \tag{16}$$

(b) Será usado o corolário $2b$ do artigo [3] assim a estatística que vamos calcular será:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{2nm}{r(n+m)}D_r^s((\mathbf{x_1},\mathbf{S_1}),(\mathbf{x_2},\mathbf{S_2})) \\ T_3 &= 4.76047 \end{aligned} \tag{17}$$

Tendo um valor diferente do artigo, investigando onde pode estar a discrepância encontramos o seguinte valor para,

$$(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})^T[r\mathbf{S_2}+(\mathbf{1}-\mathbf{r})\mathbf{S_1}]^{-1}(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}) = 0.22724 \tag{18}$$

enquanto o artigo encontrou 0.06970 para o mesmo passo, até o momento não sei explicar a diferença.

Referências

[1] J. S. Lee, K. W. Hoppel, S. A. Mango, and A. R. Miller. Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(5):1017–1028, September 1994.

[2] N. R. Goodman. The distribution of the determinant of a complex wishart distributed matrix. *Ann. Math. Statist.*, 34(1):178–180, 03 1963.

[3] M. Salicru, D. Morales, M.L. Menendez, and L. Pardo. On the applications of divergence type measures in testing statistical hypotheses. *Journal of Multivariate Analysis*, 51(2):372 – 391, 1994.