

# Fusão de evidências na detecção de bordas em Imagens PolSAR

Anderson Adaime de Borba

EXAME DE QUALIFICAÇÃO APRESENTADO  
A  
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA  
DA  
UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa de Pós graduação em Engenharia Elétrica e Computação -  
PPGEEC

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Marengoni

Coorientador: Prof. Dr. Alejandro César Frery Orgambide

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, \*\*\*\*\* de \*\*\*\*



# Sumário

<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Fusão de evidências na detecção de bordas em Imagens PolSAR</b>	<b>1</b>
1.1 Modelagem estatística para dados PolSAR . . . . .	1
1.2 Detecção de bordas em imagens PolSAR . . . . .	3
1.3 Estimativa por Máxima verossimilhança ( <b>MLE</b> ) . . . . .	4
1.3.1 Função de verossimilhança . . . . .	5
1.3.2 Estimativa de máxima verossimilhança aplicada a distribuição Wishart . . . . .	5
1.4 Aplicação em imagens sintéticas . . . . .	7
1.4.1 Aplicação do método MLE para duas classes definidas . . . . .	8
1.5 Fusão de evidências de bordas . . . . .	11
1.6 Conclusão . . . . .	13
1.7 Objetivos . . . . .	13
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>15</b>



# Lista de Abreviaturas

<b>SAR</b>	Imagens obtidas com radar de abertura sintética
<b>PolSAR</b>	Imagens obtidas com radar de abertura sintética polarimétrica
<b>p.d.f</b>	Função densidade de probabilidade
<b>LoG</b>	Detector de borda usando o laplaciano da gaussiana
<b>MMQ</b>	Método dos quadrados mínimos
<b>MLE</b>	Método de estimativa de máxima verossimilhança
<b>GenSA</b>	Método Simulated annealing



# Lista de Símbolos

$L$	Número de visadas em uma imagem PolSAR
$\Sigma$	Matriz de covariância hermitiana e definida positiva
$E[\cdot]$	Valor esperado
$\Gamma$	Função Gamma
$\Gamma_m$	Função Gamma multivariada
$W(\Gamma, L)$	Distribuição Wishart





# Lista de Figuras

1.1	Decomposição de Pauli para a phantom proposta no artigo Nascimento <i>et al.</i> (2014).	7
1.2	Distribuição Wishart com dados simulados para o canal $I_{HH}$	8
1.3	Distribuição Wishart com dados simulados para o canal $I_{HH}$	8
1.4	Função $l(j)$ para o canal $I_{HH}$	9
1.5	Função $l(j)$ para o canal $I_{HV}$	9
1.6	Função $l(j)$ para o canal $I_{VV}$	9
1.7	Evidências de bordas para o canal $I_{HH}$	10
1.8	Evidências de bordas para o canal $I_{HV}$	10
1.9	Evidências de bordas para o canal $I_{VV}$	10
1.10	Probabilidade de detecção de borda estimada usando GenSA.	11
1.11	Fusão de evidências para os canais $(I_{h,h}, I_{h,v}, I_{v,v})$ .	12
1.12	Método dos quadrados mínimos aplicado a fusão de imagens.	12
1.13	Probabilidade de detecção de borda com fusão de evidências.	12
1.14	Valor absoluto da diferença entre o vetor estimado com o método de fusão de evidências e a borda real.	12



# Lista de Tabelas



# Capítulo 1

## Fusão de evidências na detecção de bordas em Imagens PolSAR

### 1.1 Modelagem estatística para dados PolSAR

Os sistemas SAR totalmente polarimétrico transmitem pulsos de micro-ondas polarizados ortogonalmente e medem componentes ortogonais do sinal recebido. Para cada pixel, a medida resulta em uma matriz de coeficientes de espalhamento. Esses coeficientes são números complexos que descrevem no sistema SAR a transformação do campo eletromagnético transmitido para o campo eletromagnético recebido.

A transformação pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \frac{e^{ikr}}{r} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h^t \\ E_v^t \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

onde  $k$  denota o número de onda,  $i$  é um número complexo e  $r$  é a distância entre o radar e o alvo. O campo eletromagnético com componentes  $E_i^j$ , o índice subscrito denota polarização horizontal ( $h$ ) ou vertical ( $v$ ) enquanto o índice sobrescrito indica a onda recebida ( $r$ ) ou transmitida ( $t$ ). Definindo  $S_{i,j}$  como os coeficientes de espalhamento complexo tal que o índice  $i$  e  $j$  são associados com o recebimento e transmissão das ondas, por exemplo, o coeficiente de espalhamento  $S_{hv}$  está associado a onda transmitida na direção vertical ( $v$ ) e recebida na direção horizontal ( $h$ ).

Sendo conhecido cada um dos coeficientes, a matriz de espalhamento complexa  $\mathbf{S}$  é definida por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

se o meio de propagação das ondas é recíproco, isto é, de uma maneira geral as propriedades de transmissão e recebimento de uma antena são idênticos, então usaremos o teorema da reciprocidade [Lee e Pottier \(2009\)](#) para definir a matriz de espalhamento como sendo hermitiana, ou seja, a igualdade dos termos complexos  $S_{hv} = S_{vh}$ . De acordo com o teorema da reciprocidade a matriz de espalhamento pode ser representada pelo vetor

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ \sqrt{2}S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Podemos definir uma generalização para a representação de dados PolSAR com visada simples como sendo o vetor de espalhamento com polarização  $m$ ,

$$\mathbf{s} = [S_1, S_2, \dots, S_m]^H,$$

onde  $H$  sobrescrito na representação vetorial significa o cálculo do número complexo conjugado e a

seguida transposição do vetor. Os valores  $S_j$  com  $j = 1, \dots, m$  representam variáveis randômicas complexas associadas com cada canal de polarização. De acordo com Goodman (1963) a distribuição gaussiana circular complexa multivariada com média zero pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de  $\mathbf{s}$ .

A função densidade de probabilidade (**pdf**) da distribuição gaussiana complexa  $m$ -variada é dada por

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^m |\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}|} \exp(-\mathbf{s}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{s}), \quad (1.4)$$

sendo  $|\cdot|$  o determinante de uma matriz ou o valor absoluto de um escalar, e  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}$  é a matriz de covariância associada a  $\mathbf{s}$  definida por

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E[S_1 \overline{S_1}] & E[S_1 \overline{S_2}] & \dots & E[S_1 \overline{S_m}] \\ E[S_2 \overline{S_1}] & E[S_2 \overline{S_2}] & \dots & E[S_2 \overline{S_m}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[S_m \overline{S_1}] & E[S_m \overline{S_2}] & \dots & E[S_m \overline{S_m}] \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

talque,  $E[\cdot]$  denota o valor esperado e  $\overline{\cdot}$  denota o conjugado complexo. A matriz de covariância é hermitiana positiva definida e contém todas as informações necessárias para caracterizar o retroespalhamento, podemos consultar mais informações em López-Martínez *et al.* (2005).

Nas imagens PolSAR será considerada três componentes para o vetor  $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^T$  e a multiplicação de  $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]$  pelo seu conjugado transposto  $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^H$ , isto é, a hermitiana do vetor,

$$\mathbf{s}\mathbf{s}^H = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} S_{hh} \overline{S_{hh}} & S_{hh} \overline{S_{vh}} & S_{hh} \overline{S_{vv}} \\ S_{vh} \overline{S_{hh}} & S_{vh} \overline{S_{vh}} & S_{vh} \overline{S_{vv}} \\ S_{vv} \overline{S_{hh}} & S_{vv} \overline{S_{vh}} & S_{vv} \overline{S_{vv}} \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

A matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}$  tem dimensão  $3 \times 3$ , e pode ser definida como sendo a matriz de covariância associada a  $\mathbf{s}$ .

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}} = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \begin{bmatrix} E[S_{hh} \overline{S_{hh}}] & E[S_{hh} \overline{S_{vh}}] & E[S_{hh} \overline{S_{vv}}] \\ E[S_{vh} \overline{S_{hh}}] & E[S_{vh} \overline{S_{vh}}] & E[S_{vh} \overline{S_{vv}}] \\ E[S_{vv} \overline{S_{hh}}] & E[S_{vv} \overline{S_{vh}}] & E[S_{vv} \overline{S_{vv}}] \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Dados polarimétricos são usualmente sujeitos a um processo de várias visadas com o intuito de melhorar a razão entre o sinal e o seu ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas estimadas são obtidas computando a média de  $L$  visadas independentes de uma mesma cena. Resultando na matriz de covariância amostral estimada  $\mathbf{Z}$  conforme Goodman (1963) e Anfinson *et al.* (2009)

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H, \quad (1.8)$$

onde  $\mathbf{s}_i$  com  $i = 1, \dots, L$  é uma amostra de  $L$  vetores complexos distribuídos como  $\mathbf{s}$ , assim a matriz de covariância amostral associada a  $\mathbf{s}_i$ , com  $i = 1, \dots, L$  denotam o espalhamento para cada visada  $L$  seguindo uma distribuição complexas de Wishart.

Sendo agora  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}$  e  $L$  parâmetros conhecidos a função densidade de probabilidade da distribuição Wishart por

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}, L) = \frac{L^m |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{Z})), \quad (1.9)$$

onde,  $\operatorname{tr}(\cdot)$  é o operador traço de uma matriz,  $\Gamma_m(L)$  é uma função Gamma multivariada definida por

$$\Gamma_m(L) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L-i) \quad (1.10)$$

e  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gamma. Podemos afirmar que  $\mathbf{Z}$  é distribuído como uma distribuição Wishart

denotando por  $\mathbf{Z} \sim W(\mathbf{\Sigma}_s, L)$  e satisfazendo  $E[\mathbf{Z}] = \mathbf{\Sigma}_s$ . Sem perda de generalidade para o texto vamos usar o símbolo  $\mathbf{\Sigma}$  em detrimento a  $\mathbf{\Sigma}_s$  para representar a matriz de covariância associada a  $\mathbf{s}$ .

Seja a função densidade de probabilidade da distribuição complexa Wishart (1.9) na qual vamos aplicar o logaritmo natural e suas propriedades com o intuito de reescrever a função na forma adequada para aplicar o método de estimativa de máxima verossimilhança. Assim,

$$\begin{aligned}
\ln f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \mathbf{\Sigma}, L) &= \ln \left( \frac{L^m |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\mathbf{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)} \exp(-L \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z})) \right), \\
\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \mathbf{\Sigma}, L)) &= \ln \left( \frac{L^m |\mathbf{Z}|^{L-m}}{|\mathbf{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)} \right) + \ln(\exp(-L \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}))), \\
\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \mathbf{\Sigma}, L)) &= \ln(L^m |\mathbf{Z}|^{L-m}) - \ln(|\mathbf{\Sigma}|^L \Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\
\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \mathbf{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + (L - m) \ln(|\mathbf{Z}|) - \ln(|\mathbf{\Sigma}|^L) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\
\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \mathbf{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\mathbf{\Sigma}|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

lembrando que a função Gamma multivariada é definida na equação (1.10) então, podemos rescrever a equação da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \mathbf{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\mathbf{\Sigma}|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\
\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \mathbf{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\mathbf{\Sigma}|) \\
&\quad - \ln \left( \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L - i) \right) - L \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\
\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \mathbf{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\mathbf{\Sigma}|) \\
&\quad - \ln \left( \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \right) - \ln \left( \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(L - i) \right) - L \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}), \\
\ln(f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}; \mathbf{\Sigma}, L)) &= mL \ln L + L \ln(|\mathbf{Z}|) - m \ln(|\mathbf{Z}|) - L \ln(|\mathbf{\Sigma}|) \\
&\quad - \frac{1}{2}m(m-1) \ln(\pi) - \sum_{i=0}^{m-1} \ln(\Gamma(L - i)) - L \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}),
\end{aligned} \tag{1.12}$$

equação equivalente pode ser encontrada em Frery *et al.* (2011).

## 1.2 Detecção de bordas em imagens PolSAR

Na literatura encontramos uma grande oferta de métodos clássicos para detectar bordas, por exemplo Sobel, Canny, Laplaciano da gaussiana(LoG) e LoG piramidal. Os métodos clássicos de detecção de bordas são construídos assumindo que o ruído é aditivo, tornando esses métodos ineficientes para aplicação em imagens PolSAR, entretanto, nas imagens PolSAR o ruído é multiplicativo.

Na corrente seção conceitos baseados nos artigos Nascimento *et al.* (2014) e Gambini *et al.* (2006) serão introduzidos e proporemos modificações para os métodos de detecção de borda em imagens PolSAR com múltiplas visadas. A ideia principal é detectar o ponto de transição em uma faixa tão fina quanto possível entre duas regiões da imagem. O ponto de transição é definido como uma evidência de borda. Os ruídos neste tipo de imagens são do tipo *speckle*, os mesmos tem natureza multiplicativa tornando a detecção de bordas em imagens SAR uma tarefa desafiadora.

Podemos indicar que o problema de detecção de bordas, pode ser resumido em três importantes aspectos:

1. o procedimento para detecção,
2. a determinação de uma posição mais acurada da posição da borda, e
3. a especificação de tamanho para uma janela (pode ser uma janela quadrada ou em uma faixa de dados).

O tamanho da janela pode influenciar em alguns aspectos como por exemplo, uma janela pequena pode não conter informações para identificar a presença de bordas, ou janelas maiores podem obter informações para mais de uma borda. Assim o tamanho de janela ideal é aquele que contém as informações para detecção de uma borda. Vamos assumir que há uma borda na janela fornecida pela seleção inicial, quando forem realizados os testes computacionais.

Em linhas gerais seguiremos as seguintes afirmações

1. tentar encontrar finas faixas de dados, idealmente do tamanho de um pixel,
2. será usado o método de máxima verossimilhança, e
3. de que maneira a detecção trabalha em diferentes canais da imagem PolSAR.

De uma maneira geral, a ideia se baseia em encontrar um ponto de transição em uma faixa de dados o qual é considerado uma estimativa de posicionamento da borda, isto é, uma evidência de borda. A evidência de borda é encontrada em um processo de otimização.

As metodologias de detecção de bordas ocorrem em diversos estágios, abaixo enumeramos os estágios

1. identificar o centroide de uma região de interesse (ROI) de maneira automática, semiautomática ou manual,
2. construir raios do centroide para fora da área de interesse,
3. coletar dados em um vizinhança em torno dos raios,
4. detectar pontos na faixa de dados os quais fornecem evidências de mudanças de propriedades estatística, ou seja, uma transição que define uma evidência de borda, e
5. definir o contorno usando um método de interpolação entre os pontos de transição, por exemplo as B-Splines, ou o método do quadrado mínimos **MMQ**.

Inicialmente, escolhemos uma região de interesse (ROI)  $\mathbf{R}$  com centroide  $\mathbf{C}$  e traçamos raios iniciando em  $\mathbf{C}$  e indo até um ponto de controle  $\mathbf{P}_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, \mathbf{S}$ , este pontos de controle estão fora da região  $\mathbf{R}$ . Teremos  $\mathbf{S}$  raios resultantes representados por  $\mathbf{s}^{(i)} = \overline{\mathbf{C}\mathbf{P}_i}$  com ângulos  $\epsilon_i = \angle(\mathbf{s}^{(i)}, \mathbf{s}^{(i+1)})$ .

Os raios serão convertido sobre pixel usando o algoritmo *Bresenham's midpoint line algorithm*, esse algoritmo fornece uma fina representação digital para os raios. Portanto em cada raio vamos assumir que os dados seguem uma distribuição complexa Wishart com sua respectiva função de distribuição dado por (1.9), denotada por  $W(\Sigma, L)$ .

A faixa de dados coletada no  $i$ -ésimo raio  $\mathbf{s}^{(i)}$ , com  $i$  variando em  $i = 1, 2, \dots, S$ , contém  $N^{(i)}$  pixels. Para cada pixel  $k$  em uma dada faixa  $i$ , a mesma pode ser descrita pelo resultado da matriz  $Z_k^{(i)}$  sendo está uma distribuição de Wishart, portanto podemos representar cada pixel como uma distribuição,

$$\begin{cases} Z_k^{(i)} \sim W(\Sigma_A^{(i)}, L_A^{(i)}), & \text{para } k = 1, \dots, j^{(i)} \\ Z_k^{(i)} \sim W(\Sigma_B^{(i)}, L_B^{(i)}), & \text{para } k = j^{(i)} + 1, \dots, N^{(i)} \end{cases} \quad (1.13)$$

Podemos definir cada faixa composta de dois tipos de amostras, e cada tipo obedece uma lei de Wishart complexa com diferentes parâmetros. Vamos assumir que o número de visadas é constante para todas a faixas. A ideia principal é encontrar uma evidência de borda  $j^{(i)}$  em cada faixa ao longo do raio  $\mathbf{s}^{(i)}$ , a evidência de borda ou ponto de transição representa um pixel de transição entre as duas amostras. O modelo proposto em (1.13) assume que existe uma transição ocorrendo ao longo da faixa  $\mathbf{s}^{(i)}$ . Sem perda de generalidade na continuidade do trabalho será omitido o índice  $(i)$  focando nossa análise em uma única faixa.

### 1.3 Estimativa por Máxima verossimilhança (MLE)

O conceito de verossimilhança é importante em estatística descrevendo de maneira precisa as informações sobre os parâmetros do modelo estatístico que representa os dados observados. De maneira geral, a estimativa por máxima verossimilhança (**MLE**) é um método que tendo um conjunto de dados e um modelo estatístico estima os valores dos parâmetros do modelo estatísticos com intuito de maximizar uma função de probabilidade dos dados.



### 1.3.1 Função de verossimilhança

Suponha  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  um vetor randômico distribuído de acordo com a **p.d.f** função densidade de probabilidade  $f(\mathbf{x}, \theta)$  com parâmetros  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)^T$  no espaço dos parâmetros  $\Theta$ . Definimos a **função de verossimilhança** cuja amostra é

$$L(\theta; \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \quad (1.14)$$

e a função logarítmica de verossimilhança a qual podemos chamar de **função de log-verossimilhança** é a soma

$$l(\theta; \mathbf{X}) = \ln(L(\theta; \mathbf{X})) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i; \theta)). \quad (1.15)$$

Podemos definir o método da **estimativa de máxima verossimilhança (MLE)** de  $\theta$  como sendo o vetor  $\hat{\theta}$  tal que  $L(\hat{\theta}; \mathbf{x}) \geq L(\theta; \mathbf{x})$  para todo  $\theta$  no espaço dos parâmetros  $\Theta$ . De maneira simplificada a **estimativa de máxima verossimilhança** pode ser escrita por

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x}), \quad (1.16)$$

ou de maneira similar

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta; \mathbf{x}). \quad (1.17)$$

### 1.3.2 Estimativa de máxima verossimilhança aplicada a distribuição Wishart

Nesta seção vamos usar o método de máxima verossimilhança aplicado na distribuição Wishart. Suponha  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_N)^T$  um vetor randômico distribuído de acordo com a **p.d.f** função densidade de probabilidade (1.9) com parâmetros  $\Sigma = \{\Sigma_A, \Sigma_B\}$  e  $L$ .

A **função de verossimilhança** da amostra descrita por (1.13) é dada pela equação produtório das funções de densidade respectivamente associadas a cada amostra

$$L(j) = \prod_{k=1}^j f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_A, L) \prod_{k=j+1}^N f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_B, L), \quad (1.18)$$

onde  $\mathbf{Z}'_k$  é uma possível aproximação da matriz randômica descrita em (1.13).

Usando a equação (1.12) e propriedades de logaritmos natural teremos para cada termo do produtório (1.18) uma **função de log-verossimilhança**. Assim, encontramos uma função dependente de  $j$

$$l(j) = \ln(L(j)) = \sum_{k=1}^j \ln \left( f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_A, L) \right) + \sum_{k=j+1}^N \ln \left( f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}'_k; \Sigma_B, L) \right). \quad (1.19)$$

Neste momento, podemos realizar manipulações algébricas na função distribuição em cada termo do somatório conforme (1.12) e substituir nas duas parcelas da equação (1.19) levando em conside-

ração que as duas amostras são diferentes, desta forma

$$\begin{aligned}
l(j) &= \sum_{k=1}^j \left[ mL \ln(L) + (L-m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_A|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
&+ \sum_{k=j+1}^N \left[ mL \ln(L) + (L-m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_B|) - \ln(\Gamma_m(L)) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
l(j) &= \sum_{k=1}^N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - \sum_{k=1}^j \left[ L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_A|) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
&+ \sum_{k=1}^N \left[ (L-m) \ln(|\mathbf{Z}'_k|) \right] - \sum_{k=j+1}^N \left[ L \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_B|) - L \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[ j \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_A|) + \sum_{k=1}^j \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[ (N-j) \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_B|) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_A|) + (N-j) \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_B|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[ \sum_{k=1}^j \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right].
\end{aligned}$$

Aproximação para  $\Sigma$  pode ser encontrada usando o estimador de máxima verossimilhança denotado por  $\hat{\Sigma}$  de acordo com a referência Goodman (1963). A equação (1.20) representa duas aproximações para a matriz de covariância  $\Sigma$  que dependem da posição  $j$

$$\hat{\Sigma}_I(j) = \begin{cases} j^{-1} \sum_{k=1}^j \mathbf{Z}_k & \text{se } I = A, \\ (N-j)^{-1} \sum_{k=j+1}^N \mathbf{Z}_k & \text{se } I = B. \end{cases} \quad (1.20)$$

Usando a equação (1.20) podemos substituir na equação acima e continuar a manipulação algébrica

$$\begin{aligned}
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_A|) + (N-j) \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_B|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[ \sum_{k=1}^j \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_A^{-1} \mathbf{Z}'_k) + \sum_{k=j+1}^N \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_B^{-1} \mathbf{Z}'_k) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_A|) + (N-j) \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_B|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[ \text{tr} \left( \sum_{k=1}^j \boldsymbol{\Sigma}_A^{-1} \mathbf{Z}'_k \right) + \text{tr} \left( \sum_{k=j+1}^N \boldsymbol{\Sigma}_B^{-1} \mathbf{Z}'_k \right) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_A|) + (N-j) \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_B|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L \left[ \text{tr} \left( \boldsymbol{\Sigma}_A^{-1} \sum_{k=1}^j \mathbf{Z}'_k \right) + \text{tr} \left( \boldsymbol{\Sigma}_B^{-1} \sum_{k=j+1}^N \mathbf{Z}'_k \right) \right], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_A|) + (N-j) \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_B|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - L [mj + (N-j)m], \\
l(j) &= N [mL \ln(L) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_A|) + (N-j) \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_B|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|) - LNm, \\
l(j) &= N [-mL(1 - \ln(L)) - \ln(\Gamma_m(L))] - L [j \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_A|) + (N-j) \ln(|\boldsymbol{\Sigma}_B|)], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|),
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
l(j) &= N [-mL(1 - \ln(L)) - \ln(\Gamma_m(L))] - L \left[ j \ln(|\hat{\Sigma}_A(j)|) + (N-j) \ln(|\hat{\Sigma}_B(j)|) \right], \\
&+ (L-m) \sum_{k=1}^N \ln(|\mathbf{Z}'_k|).
\end{aligned} \quad (1.21)$$

O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{j}_{ML}$  é uma evidência de borda por representar uma aproximação da transição de região e pode ser calculado pelo método de maximização

$$\hat{j}_{ML} = \arg \max_j l(j). \quad (1.22)$$

## 1.4 Aplicação em imagens sintéticas

A metodologia (**MLE**) desenvolvida na seção anterior será aplicada em uma imagem sintética baseada no artigo [Gomez et al. \(2017\)](#) as quais são chamadas de *Phantons*. As figuras desta seção serão geradas com auxílio dos códigos na linguagem Matlab, os programas foram disponibilizados pelos autores do artigo e estão localizados em

<http://www.ctim.es/polsar/>.

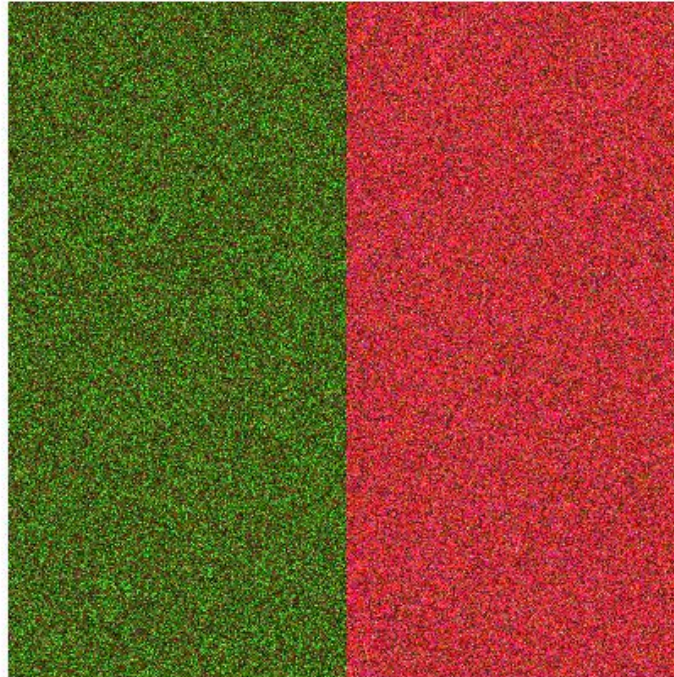
Inicialmente vamos gerar uma imagem sintética de dimensão  $400 \times 400$  com duas amostras ou duas classes para validar as ideias do método (**MLE**), desta maneira, vamos descrever como geramos a figura (1.1).

As imagens sintéticas em geral tem o intuito de auxiliar no estudo de diferentes métodos para tratamento de imagens. As imagens sintéticas construídas nesta seção terão a tarefa de estudar como ocorre a transição entre duas amostras, ou seja, detectar evidências de bordas.

A imagem PolSAR simulada usa a combinação de matrizes de covariância  $\{\Sigma_k\}_{k=1\dots 2}$  extraídas de uma imagem PolSAR real, com auxílio da distribuição complexa de Wishart  $W_G(\Sigma, L)$ , adicionalmente, na presente seção os experimentos apresentados usam número de visadas  $L = 4$ .

Para cada par de matrizes de covariância  $\Sigma_{k_1}$ ,  $\Sigma_{k_2}$  (com  $k_2 > k_1$ ) será gerado uma imagem PolSAR  $P_{k_1, k_2, \beta}$  da seguinte maneira, em cada pixel branco da imagem sintética será agregado a amostra proveniente de  $W_G(\Sigma_{k_1}, L)$  e de cada pixel preto da imagem sintética será agregado a amostra proveniente de  $W_G(\Sigma_{k_2}, L)$ . Se necessário podemos fazer mistura de duas amostras tomando a combinação linear  $W_G(\beta\Sigma_{k_1} + (1 - \beta)\Sigma_{k_2}, L)$  com  $\beta \in [0, 1]$ .

O parâmetro  $\beta$  é usado para ponderar as informações entre as matrizes de covariância  $\Sigma_{k_1}$  e  $\Sigma_{k_2}$ , modelando a mistura de classes em imagens PolSAR. Quando  $\beta = 0$  não há mistura e o problema consiste em escolher entre amostras puras de  $\Sigma_{k_1}$  e  $\Sigma_{k_2}$ . Se o parâmetro  $\beta$  se aproxima de 1, teremos uma aproximação com a matriz de covariância  $\Sigma_{k_1}$ , assim teremos maior dificuldade de escolher classes.



**Figura 1.1:** Decomposição de Pauli para a phantom proposta no artigo [Nascimento et al. \(2014\)](#).

A decomposição de Pauli foi usada na imagem mostrada na figura (1.1), sendo que a mesma usa três canais da imagem  $\mathbf{I}$  que são  $\mathbf{I}_{hh}$ ,  $\mathbf{I}_{vh}$  e  $\mathbf{I}_{vv}$ .

#### 1.4.1 Aplicação do método MLE para duas classes definidas

As informações sobre a imagem PolSAR podem ser obtidas de forma relativa pelos dados polarimétricos com respeito a um canal de dados, com intuito de resolver o problema de detecção bordas. Assumindo que o número de visadas  $L$  e a matriz de covariância  $\Sigma$  são parâmetros na distribuição de Wishart podemos descrever a distribuição gamma em cada canal com densidade dada por

$$f_{Z_i}(Z_i; \frac{L}{\sigma_i^2}, L) = \frac{L^L Z_i^{L-1}}{\sigma_i^{2L} \Gamma(L)} \exp(-L \frac{Z_i}{\sigma_i^2}), \quad (1.23)$$

sendo  $i \in \{HH, VH, VV\}$ ,  $\sigma_i^2$  a entrada  $(i, i)$  da matriz  $\Sigma$  e  $Z_i$  a entrada  $(i, i)$  da matriz randômica  $\mathbf{Z}$ . Podemos verificar essa expressão em Frery *et al.* (2014), Nascimento *et al.* (2014) e Hagedorn *et al.* (2006).

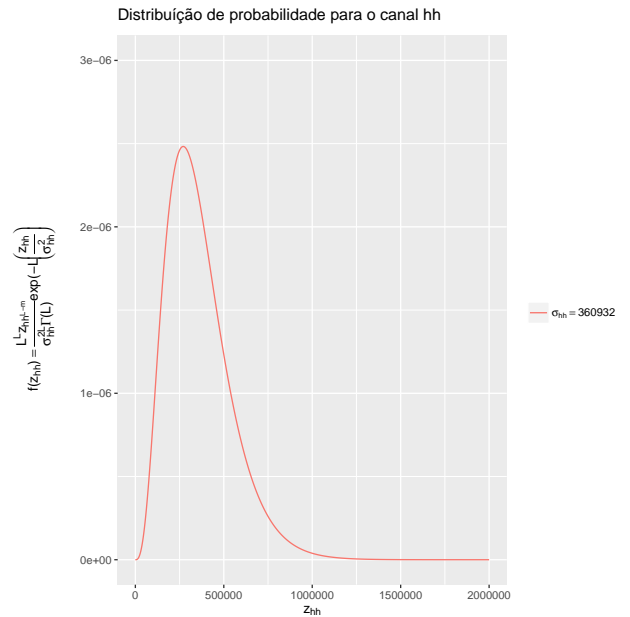
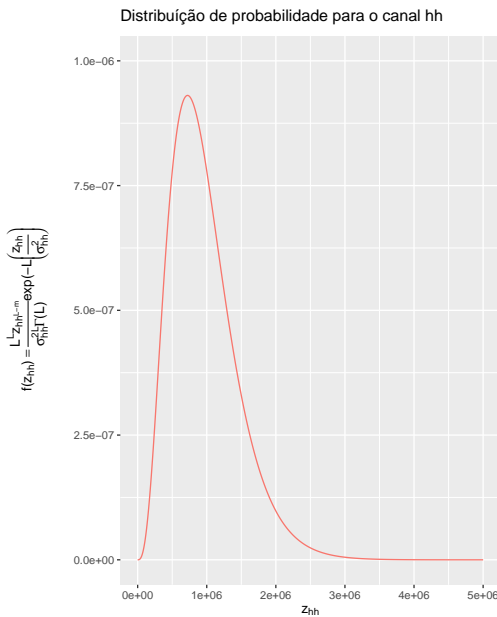
O primeiro teste numérico será realizado com  $\Sigma_u$  e  $\Sigma_f$  definidas por

$$\Sigma_u = \begin{bmatrix} 962892 & 19171 - 3579i & -154638 + 191388i \\ 0.1917 + 0.0359i & 56707 & -5798 + 16812i \\ -154638 - 191388i & -5798 - 16812i & 472251 \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

$$\Sigma_f = \begin{bmatrix} 360932 & 11050 + 3759i & 63896 + 1581i \\ 0.1105 - 0.0376i & 98960 & 6593 + 6868i \\ 63896 - 1581i & 6593 - 6868i & 208843 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

onde os subscritos  $u$  e  $f$  definem respectivamente área urbana e floresta extraídas de uma imagem real, podemos encontrar essas informações nos artigos Frery *et al.* (2012) e Nascimento *et al.* (2014).

De acordo com a função densidade de probabilidade (1.23) e usando o canal ( $hh$ ) nas ambas matrizes de covariância com  $L = 4$  podemos gerar as figuras (1.2) e (1.3) com a representação gráfica da função de densidade para os respectivos elementos  $u$  e  $f$  da matriz de covariância, neste caso,  $\sigma_{hh} = 962892$  e  $\sigma_{hh} = 360932$ .



**Figura 1.2:** Distribuição Wishart com dados simulados para o canal  $I_{HH}$

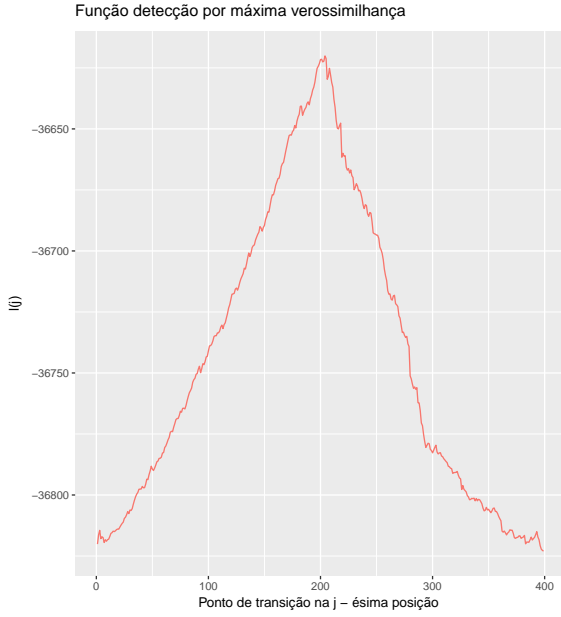
**Figura 1.3:** Distribuição Wishart com dados simulados para o canal  $I_{HH}$

A figura (1.1) foi gerada com auxílio das distribuições Wishart descritas nas equações (1.13)

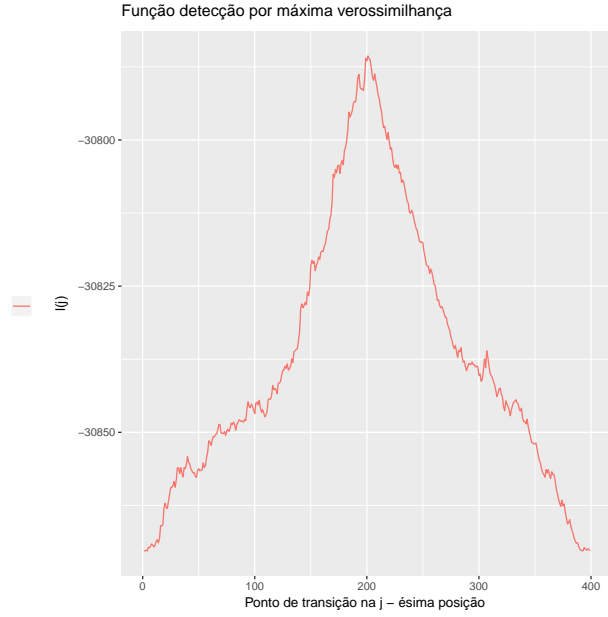
para  $L = 4$  e matrizes de covariância com  $\Sigma_u$  e  $\Sigma_f$  definidos em (1.24) e (1.25).

A imagem de fato é construída com 400 linhas distribuídas em duas bandas separadas verticalmente em torno do pixel 200, lembrando que a imagem tem dimensão  $400 \times 400$ . Cada linha tem duas amostras diferentes geradas com os parâmetros  $\Sigma_u$  e  $\Sigma_f$  respectivamente e ainda  $L = 4$  para as duas amostras.

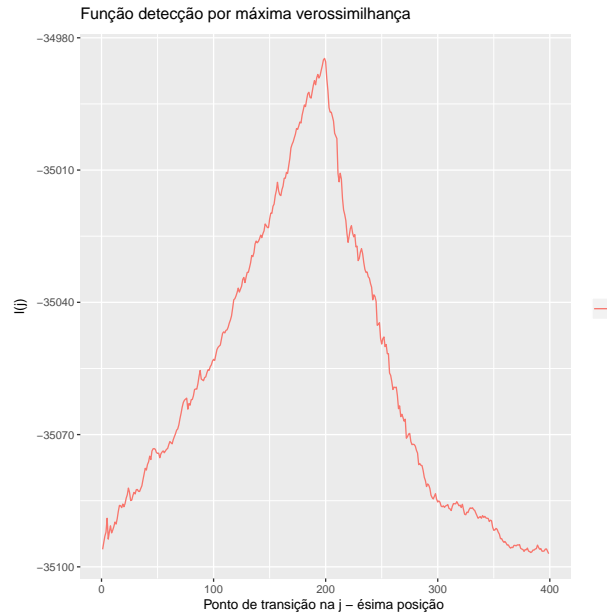
O valor 200 é fixado horizontalmente para termos uma linha contendo as duas amostras, para essa linha é calculado  $l(j)$  conforme equação (1.21) que deve ser aplicada nos canais  $\mathbf{I}_{hh}$ ,  $\mathbf{I}_{vh}$  e  $\mathbf{I}_{vv}$ .



**Figura 1.4:** Função  $l(j)$  para o canal  $I_{HH}$



**Figura 1.5:** Função  $l(j)$  para o canal  $I_{HV}$



**Figura 1.6:** Função  $l(j)$  para o canal  $I_{VV}$

Podemos notar que, se as funções não são deriváveis em muitos pontos, então podemos afirmar que métodos de otimização que necessitam o cálculo da derivada terão funcionamento comprometido, resolvemos esse problema usando o método Simulated Annealing Generalizado (GenSA) que podemos encontrar na referência [Yang Xiang et al. \(2013\)](#).

O método GenSA mostrou-se competitivo com os métodos empregados no artigo [Nascimento et al.](#)

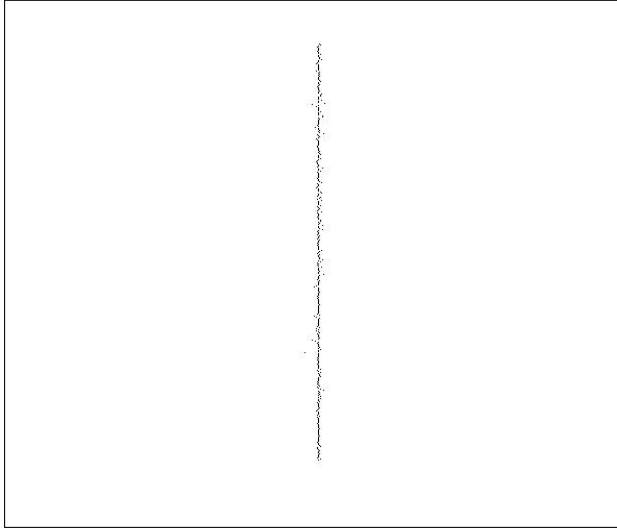
(2014), para testar a acurácia do GenSA e fazer a comparação com os métodos aplicado no artigo, vamos usar a métrica usada no artigo Nascimento *et al.* (2014) e proposta na referência Frery *et al.* (2012).

O erro foi calculado gerando 400 replicações da distribuição Wishart com duas amostras como acima gerando uma função  $l(j)$  para cada replicação. Aplicando o GenSA para cada uma das  $l(j)$  temos as evidências de bordas ou pontos de transição. O ponto de borda é 200 por construção para todas as replicações, então o erro para cada replicação é o valor absoluto da diferença entre o ponto e borda e o valor estimado pelo método GenSA, portanto

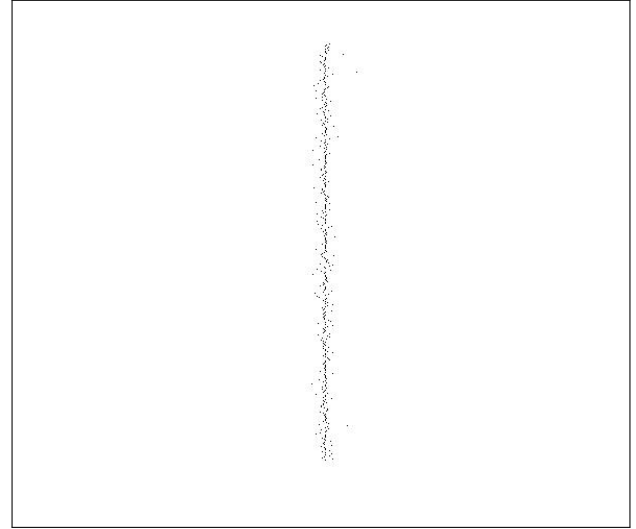
$$E(r) = |200 - \hat{j}(r)|, \quad 1 \leq r \leq 400, \quad (1.26)$$

onde,  $\hat{j}(r)$  é o resultado da maximização de  $l(j)$  pelo método GenSA na replicação  $r$ .

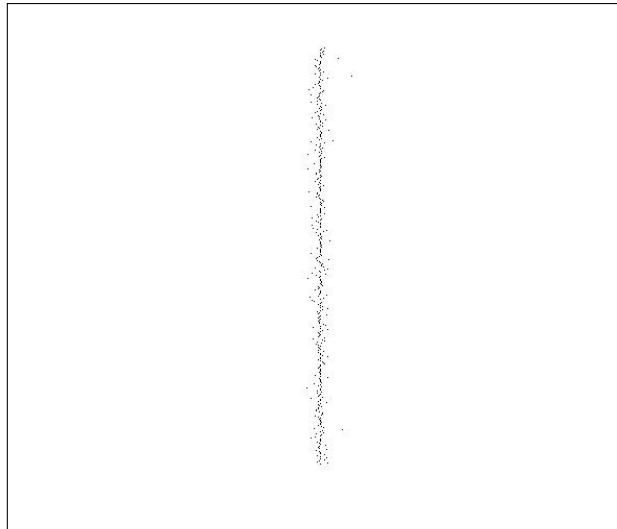
Usaremos frequências relativas para estimar a probabilidade de ter um erro menor que um número de pixels. Denotando por  $H(k)$  o número de replicações para qual o erro é menor que  $k$  pixels, então calculamos uma estimativa desta probabilidade por  $f(k) = \frac{H(k)}{400}$ . Nos testes realizados nesta seção variamos  $k$  entre 1 e 10. O algoritmo está descrito em detalhes na referência Frery *et al.* (2012).



**Figura 1.7:** Evidências de bordas para o canal  $I_{HH}$



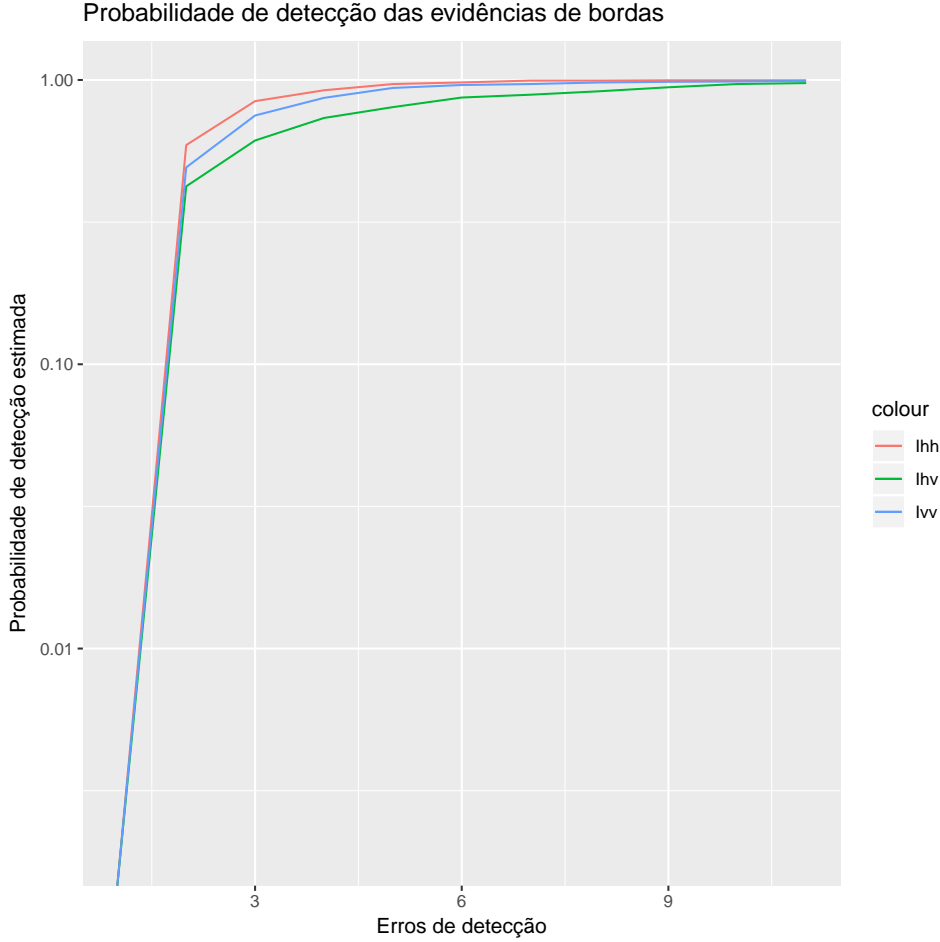
**Figura 1.8:** Evidências de bordas para o canal  $I_{HV}$



**Figura 1.9:** Evidências de bordas para o canal  $I_{VV}$

A figure (1.10) mostra as probabilidades para a detecção de bordas quando aplicado o método GenSA nos canais  $I_{hh}$ ,  $I_{vh}$  e  $I_{vv}$  da imagem mostrada na figura (1.1). As 400 replicações para cada

canal e sua respectiva evidência de borda estão mostradas nas figuras (1.7),(1.8) e (1.9).



**Figura 1.10:** Probabilidade de detecção de borda estimada usando GenSA.

## 1.5 Fusão de evidências de bordas

Nesta seção vamos mostrar como realizamos a fusão de evidências de bordas, a referência adotada foi Mitchell (2010) que mostra várias técnicas de fusão de imagens.

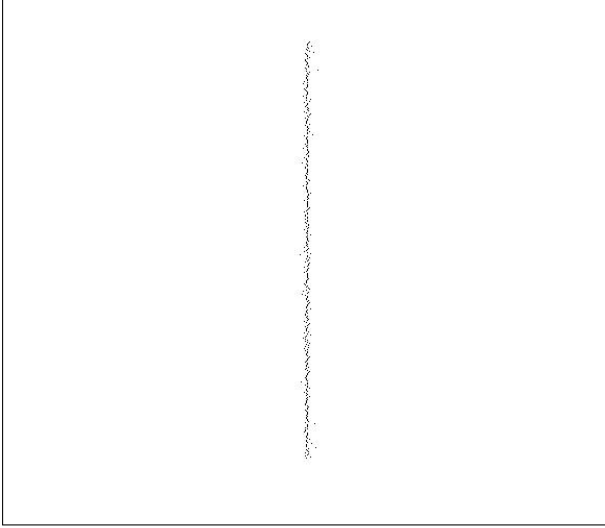
Sejam  $I_k(m, n)$ , com  $k = 1, 2, \dots, K$  imagens provenientes da detecção de bordas usando o GenSA com dimensões  $m \times n$ , podemos definir a estratégia de fusão de evidências da seguinte forma, seja  $k = \{hh, vh, vv\}$ , para cada linhas das imagens nos canais  $I_k$  no qual retorna o pixel evidência de borda, os mesmos serão armazenados em um vetor denotado  $ev_k$  com dimensão  $m$ , assim a fusão de evidências  $F_m^{ev}$  é realizada como média dos vetores evidências de bordas.

$$F_m^{ev} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K ev_k \quad (1.27)$$

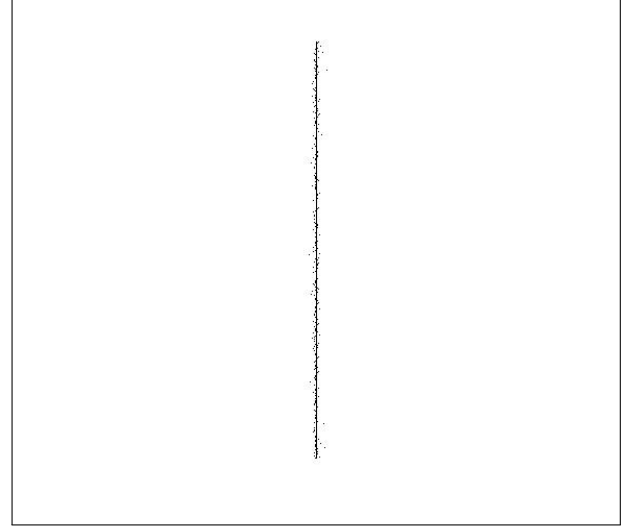
O resultado da técnica de fusão de evidências é mostrado na figura (1.11).

Com o intuito de melhorar a detecção de borda propomos aplicar o método de quadrados mínimos (MMQ) nos dados da fusão de evidências, realizando esta aplicação temos o resultado do método dos quadrados mínimos junto com os pontos de fusão de evidências mostrados na figura (1.12). Observando a figura podemos notar um bom desempenho da aplicação do método dos quadrados mínimos na fusão de evidências. Para confirmar a observação vamos calcular a frequência relativa deste método, a qual mostra a probabilidade de detecção de borda estimada como na figura (1.10). A figura (1.13) mostra a frequência relativa para a fusão de evidências juntamente com a frequência relativa de detecção de bordas nos respectivos canais. O gráfico foi construído para





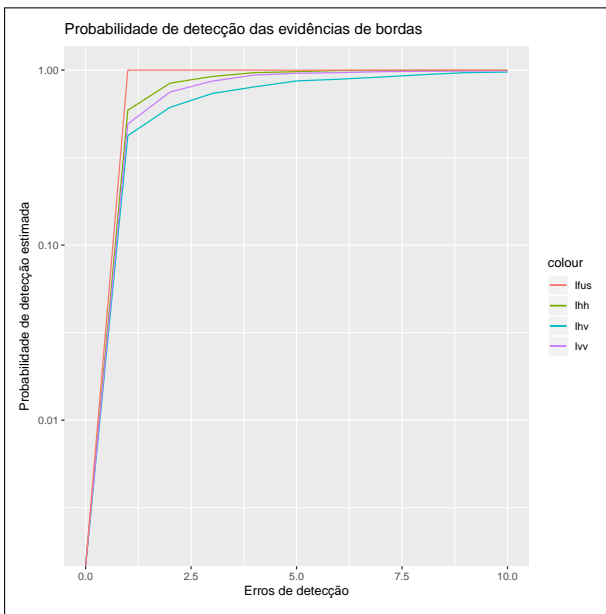
**Figura 1.11:** Fusão de evidências para os canais  $(I_{h,h}, I_{h,v}, I_{v,v})$ .



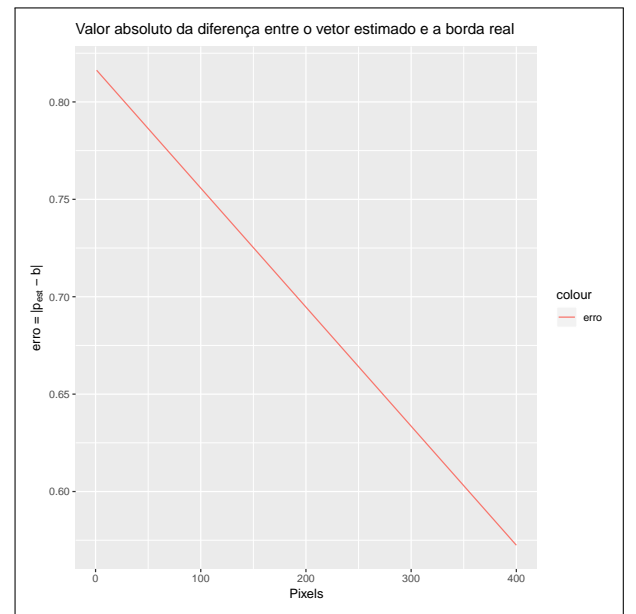
**Figura 1.12:** Método dos quadrados mínimos aplicado a fusão de imagens.

notarmos o bom desempenho do método de fusão e posterior aplicação do método dos quadrados mínimos. Desta forma podemos ver que a probabilidade de detecção para o método propostos alcança melhores resultados em relação as detecções em cada canal.

Definindo o vetor  $P_{est}$  como sendo o vetor de tamanho 400 tal que suas componentes são as bordas estimadas pelo método de fusão e posterior aplicação do métodos dos quadrados mínimos e o vetor  $b$  com o valor de borda definido por 200. O gráfico da figura (1.14) mostra o  $erro = |P_{est} - b|$  para cada pixel que o método foi aplicado, e o máximo atingido do erro foi  $erro = 0.8162$ , isto é a acurácia do método é menor que um pixel, confirmando o resultado mostrado na figura (1.13).



**Figura 1.13:** Probabilidade de detecção de borda com fusão de evidências.



**Figura 1.14:** Valor absoluto da diferença entre o vetor estimado com o método de fusão de evidências e a borda real.



## 1.6 Conclusão

A ideia proposta de usar o GenSA para estimar as evidências de bordas juntamente com os métodos de fusão de evidências e quadrados mínimos (**MMQ**) teve um desempenho superior a detecção de bordas somente nos respectivos canais, como mostrou a figura (1.13), (1.14). Podemos concluir que para a imagem simulada o método possui uma acurácia satisfatório para a detecção de bordas.

## 1.7 Objetivos

Os próximos objetivos serão enumerados em ordem de importância, isto é, o objetivo será descrito de maior ordem de importância para menor ordem de importância.

- 1- Aplicar o método em uma imagem real para analisar o seu desempenho e fidedignidade da borda encontrada.
- 2- Propor e analisar outras técnicas de fusão de evidências.
- 3- Propor e analisar outras técnicas de regressão ou classificação como por exemplo Support Vector Machine (*SVM*), ou Randon Forest (*RF*) em comparação com o método de quadrados mínimos usado neste texto.
- 4- Aplicar um filtro tipo borrador na função  $l(j)$  com intuito de melhorar sua suavidade facilitando o cálculo do gradiente e consequentemente comparar métodos clássicos de otimização com a aplicação do método GenSA proposto neste trabalho.



# Referências Bibliográficas

- Anfinsen et al.(2009)** Stian Normann Anfinsen, Anthony P Doulgeris e Torbjørn Eltoft. Estimation of the equivalent number of looks in polarimetric synthetic aperture radar imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 47(11):3795–3809. Citado na pág. 2
- Frery et al.(2011)** Alejandro C Frery, Abraao DC Nascimento e Renato J Cintra. Information theory and image understanding: An application to polarimetric SAR imagery. *Chilean Journal of Statistics*, 2(2):81–100. Citado na pág. 3
- Frery et al.(2014)** Alejandro C Frery, Abraao DC Nascimento e Renato J Cintra. Analytic expressions for stochastic distances between relaxed complex wishart distributions. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 52(2):1213–1226. Citado na pág. 8
- Frery et al.(2012)** Alejandro César Frery, Julio Jacobo-Berlles, Juliana Gambini e Marta Mejail. Polarimetric SAR image segmentation with b-splines and a new statistical model. *CoRR*, abs/1207.3944. Citado na pág. 8, 10
- Gambini et al.(2006)** J. Gambini, M. Mejail, J. Jacobo-Berlles e A. C. Frery. Feature extraction in speckled imagery using dynamic B-spline deformable contours under the G0 model. *International Journal of Remote Sensing*, 27(22):5037–5059. doi: 10.1080/01431160600702616. Citado na pág. 3
- Gomez et al.(2017)** Luis Gomez, Luis Alvarez, Luis Mazorra e Alejandro C Frery. Fully polsar image classification using machine learning techniques and reaction-diffusion systems. *Neurocomputing*, 255:52–60. Citado na pág. 7
- Goodman(1963)** N. R. Goodman. The distribution of the determinant of a complex wishart distributed matrix. *Ann. Math. Statist.*, 34(1):178–180. doi: 10.1214/aoms/1177704251. URL <http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177704251>. Citado na pág. 2, 6
- Hagedorn et al.(2006)** M. Hagedorn, P.J. Smith, P.J. Bones, R.P. Millane e D. Pairman. A trivariate chi-squared distribution derived from the complex wishart distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 97(3):655 – 674. ISSN 0047-259X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2005.05.014>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0047259X05000795>. Citado na pág. 8
- Lee e Pottier(2009)** Jong-Sen Lee e Eric Pottier. *Polarimetric radar imaging: from basics to applications*. CRC press. Citado na pág. 1
- López-Martínez et al.(2005)** Carlos López-Martínez, Xavier Fàbregas e Eric Pottier. Multidimensional speckle noise model. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2005(20):180956. ISSN 1687-6180. doi: 10.1155/ASP.2005.3259. URL <https://doi.org/10.1155/ASP.2005.3259>. Citado na pág. 2
- Mitchell(2010)** H.B. Mitchell. *Image Fusion: Theories, Techniques and Applications*. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 9783642112164. URL <https://books.google.com.br/books?id=D7DXAX6eH2oC>. Citado na pág. 11

- Nascimento et al.(2014)** Abraão Nascimento, Michelle Horta, Alejandro Frery e Renato Cintra. Comparing edge detection methods based on stochastic entropies and distances for polsar imagery. *Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 7(2):648–663. Citado na pág. ix, 3, 7, 8, 9, 10
- Yang Xiang et al.(2013)** Yang Xiang, Sylvain Gubian, Brian Suomela e Julia Hoeng. Generalized simulated annealing for efficient global optimization: the GenSA package for R. *The R Journal Volume 5/1, June 2013*. URL <https://journal.r-project.org/archive/2013/RJ-2013-002/index.html>. Citado na pág. 9