




Article

Quantifying the Information Content of Intensity SAR Imagery for Edge Detection

Anderson Adaime Borba ^{1,3,†} , Alejandro C. Frery ^{2,†}  and Maurício Marengoni ^{3,†*} 

¹ IBMEC-SP, São Paulo, Brazil; anderson.borba@ibmec.edu.br

² Laboratório de Computação Científica e Análise Numérica, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Brazil; acfrery@laccan.ufal.br

³ Dept. Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, Brazil; mmarengoni@mackenzie.br

* Correspondence: mmarengoni@mackenzie.br

† These authors contributed equally to this work.

Version January 17, 2020 submitted to Remote Sens.

Abstract: This work studies cost-effective techniques for edge detection using intensity SAR data. The approach consists in using statistical models for obtaining evidences, and then fusing such evidences. We quantify the amount of information each combination of bands brings, and compute the computational cost of using each model.

Keywords: Synthetic Aperture Radar (SAR); Edge Detection; Information Fusion; Statistical Models.

0. How to Use this Template

1. Introduction

2. Modelagem estatística para dados PolSAR

Os sistemas SAR totalmente polarimétricos transmitem pulsos de micro-ondas polarizados ortogonalmente e medem componentes ortogonais do sinal recebido. Para cada pixel, a medida resulta em uma matriz de coeficientes de espalhamento. Esses coeficientes são números complexos que descrevem no sistema SAR a transformação do campo eletromagnético transmitido para o campo eletromagnético recebido.

A transformação pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \frac{e^{ikr}}{r} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_h^t \\ E_v^t \end{bmatrix}, \quad (1)$$

onde k denota o número de onda, i é um número complexo e r é a distância entre o radar e o alvo. O campo eletromagnético com componentes E_i^j , o índice subscrito denota polarização horizontal (h) ou vertical (v), enquanto o índice sobrescrito indica a onda recebida (r) ou transmitida (t). Definindo $S_{i,j}$ como os coeficientes de espalhamento complexo, tal que o índice i e j são associados com o recebimento com a transmissão das ondas, por exemplo, o coeficiente de espalhamento S_{hv} está associado a onda transmitida na direção vertical (v) e recebida na direção horizontal (h).

Sendo conhecido cada um dos coeficientes, a matriz de espalhamento complexa \mathbf{S} é definida por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

se o meio de propagação das ondas é recíproco, isto é, de uma maneira geral as propriedades de transmissão e recebimento de uma antena são idênticos, então usaremos o teorema da reciprocidade [?] para definir a matriz de espalhamento como sendo hermitiana, ou seja, a igualdade dos termos complexos $S_{hv} = S_{vh}$. De acordo com o teorema da reciprocidade a matriz de espalhamento pode ser representada pelo vetor

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ \sqrt{2}S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Podemos definir uma generalização para a representação de dados PolSAR com visada simples como sendo o vetor de espalhamento com polarização m ,

$$\mathbf{s} = [S_1, S_2, \dots, S_m]^H,$$

onde H sobrescrito na representação vetorial significa o cálculo do número complexo conjugado e a seguida transposição do vetor. Os valores S_j com $j = 1, \dots, m$ representam variáveis randômicas complexas associadas com cada canal de polarização. $[S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^T$ e a multiplicação de $\mathbf{s} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]$ pelo seu conjugado transposto $\mathbf{S} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^H$, isto é, a hermitiana do vetor,

$$\mathbf{s}\mathbf{s}^H = \begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{vh} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{vh} & S_{vv} \end{bmatrix}^H = [S_{ij}]_{i,j=h,v} \quad (4)$$

De acordo com [?] a distribuição gaussiana complexa multivariada pode modelar adequadamente o comportamento estatístico de \mathbf{S} . Isto é chamado de *single-look complex PolSAR data representation* e podemos definir o vetor de espalhamento por $\mathbf{S} = [S_{hh}, S_{vh}, S_{vv}]^H$.

Dados polarimétricos são usualmente sujeitos a um processo de várias visadas com o intuito de melhorar a razão entre o sinal e o seu ruído. Para esse fim, matrizes positivas definidas hermitianas estimadas são obtidas computando a média de L visadas independentes de uma mesma cena. Resultando na matriz de covariância amostral estimada \mathbf{Z} conforme [? ?]

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{s}_l \mathbf{s}_l^H, \quad (5)$$

onde \mathbf{s}_l com $l = 1, \dots, L$ é uma amostra de L vetores complexos distribuídos como \mathbf{S} , assim a matriz de covariância amostral associada a \mathbf{S}_l , com $l = 1, \dots, L$ denotam o espalhamento para cada visada L

3. Results

3.1. Função densidade de probabilidade univariada Γ e o método da máxima verossimilhança.

$$f_Z(z_i; \mu, L) = \frac{L^L z_i^{L-1}}{\mu^L \Gamma(L)} \exp\left(-L \frac{z_i}{\mu}\right). \quad (6)$$

Aplicando o logaritmo natural na função de probabilidade univariada Γ (6),

$$\begin{aligned} \ln f_Z(z_i; \mu, L) &= \ln \left(\frac{L^L z_i^{L-1}}{\mu^L \Gamma(L)} \exp\left(-L \frac{z_i}{\mu}\right) \right), \\ &= \ln \left(\frac{L^L z_i^{L-1}}{\mu^L \Gamma(L)} \right) + \ln \left(\exp\left(-L \frac{z_i}{\mu}\right) \right), \\ &= \ln \left(L^L z_i^{L-1} \right) - \ln \left(\mu^L \Gamma(L) \right) - \frac{L}{\mu} z_i \end{aligned}$$

encontramos a função

$$\ln f_Z(z_i; \mu, L) = L \ln L + (L - 1) \ln z_i - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{\mu} z_i. \quad (7)$$

Uma região da imagem PolSAR pode ser dividida na parte interna (I) e externa (E). Construímos uma faixa de dados que temos certeza da presença das regiões internas e externas. Definimos a faixa de dados $(z_1, \dots, z_j) = z_I$ e $(z_{j+1}, \dots, z_N) = z_E$. Para cada j que faz a indexação da faixa de dados vamos,

Estimar (μ_j, L_j) por $(\hat{\mu}_j, \hat{L}_j)(z_I)$ na parte interna da faixa de dados.

Estimar (μ_j, L_j) por $(\hat{\mu}_j, \hat{L}_j)(z_E)$ na parte externa da faixa de dados.

Assim

$$\begin{aligned} \ell(\mu, L) &= \ln \left(\prod_{k=1}^j f_Z(z_k; \mu, L) \prod_{k=j+1}^N f_Z(z_k; \mu, L) \right) \\ \ell(\mu, L) &= \sum_{k=1}^j \ln(f_Z(z_k; \mu, L)) + \sum_{k=j+1}^N \ln(f_Z(z_k; \mu, L)) \end{aligned} \quad (8)$$

Usando a equação (7) teremos

$$\begin{aligned} \ell(\mu, L) &= \sum_{k=1}^j \left[L \ln L + (L - 1) \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{\mu} z_k \right] \\ &+ \sum_{k=j+1}^N \left[L \ln L + (L - 1) \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{\mu} z_k \right] \\ \ell(\mu, L) &= jL \ln L + (L - 1) \sum_{k=1}^j \ln z_k - jL \ln \mu - j \ln \Gamma(L) - \frac{L}{\mu} \sum_{k=1}^j z_k \\ &= (N - j)L \ln L + (L - 1) \sum_{k=j+1}^N \ln z_k - (N - j)L \ln \mu - (N - j) \ln \Gamma(L) - \frac{L}{\mu} \sum_{k=j+1}^N z_k \end{aligned}$$

assim, equivalentemente

$$\begin{aligned} \ell(\mu, L) &= j \left[L \ln L + \frac{(L-1)}{j} \sum_{k=1}^j \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{j\mu} \sum_{k=1}^j z_k \right] \\ &= (N - j) \left[L \ln L + \frac{(L-1)}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{(N-j)\mu} \sum_{k=j+1}^N z_k \right] \end{aligned}$$

resultando na equação

$$\ell(\mu, L) = j\ell_1(\mu, L) + (N - j)\ell_2(\mu, L)$$

definindo

$$\begin{aligned} \ell_1(\mu, L) &= L \ln L + \frac{(L-1)}{j} \sum_{k=1}^j \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{j\mu} \sum_{k=1}^j z_k \\ \ell_2(\mu, L) &= L \ln L + \frac{(L-1)}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln z_k - L \ln \mu - \ln \Gamma(L) - \frac{L}{(N-j)\mu} \sum_{k=j+1}^N z_k \end{aligned} \quad (9)$$

O método de otimização *BFGS* (Ref.[1]) foi usado para estimar os parâmetros em cada faixa de dados. O pacote *maxLik* (Ref.[2]) contém a implementação do método e foi usado na implementação.

Para cada j são estimados os parâmetros usando as equações de $\ell_1(\mu, L)$ e $\ell_2(\mu, L)$. Os parâmetros $(\hat{\mu}_I, \hat{L}_I)$ e $(\hat{\mu}_E, \hat{L}_E)$ foram estimados usando o pacote *maxLik*, que pode ser lido com mais detalhes em [2], aplicado nas funções (9).

$$\begin{aligned} \ell(\hat{\mu}_I, \hat{L}_I, \hat{\mu}_E, \hat{L}_E, j) &= j \left[\hat{L}_I \ln \hat{L}_I - \hat{L}_I \ln \hat{\mu}_I - \ln \Gamma(\hat{L}_I) \right. \\ &+ \frac{(\hat{L}_I - 1)}{j} \sum_{k=1}^j \ln z_i - \frac{\hat{L}_I}{j\hat{\mu}_I} \sum_{k=1}^j z_i \left. \right] \\ &+ (N - j) \left[\hat{L}_E \ln \hat{L}_E - \hat{L}_E \ln \hat{\mu}_E - \ln \Gamma(\hat{L}_E) \right. \\ &+ \frac{(\hat{L}_E - 1)}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln z_i - \frac{\hat{L}_E}{(N-j)\hat{\mu}_E} \sum_{k=j+1}^N z_i \left. \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Para estimar o parâmetro j foi usado o método *GenSA Generalized Simulated Annealing* (Ref.[3]).

3.2. Função densidades de probabilidade razão de intensidades univariada e o método de máxima verossimilhança

A razão de intensidade e amplitude entre S_{hh} , S_{vv} , e S_{vv} são importantes no estudo de radares polarimétricos. A *PDF's* razão de intensidade e amplitude normalizada será mostrada agora.

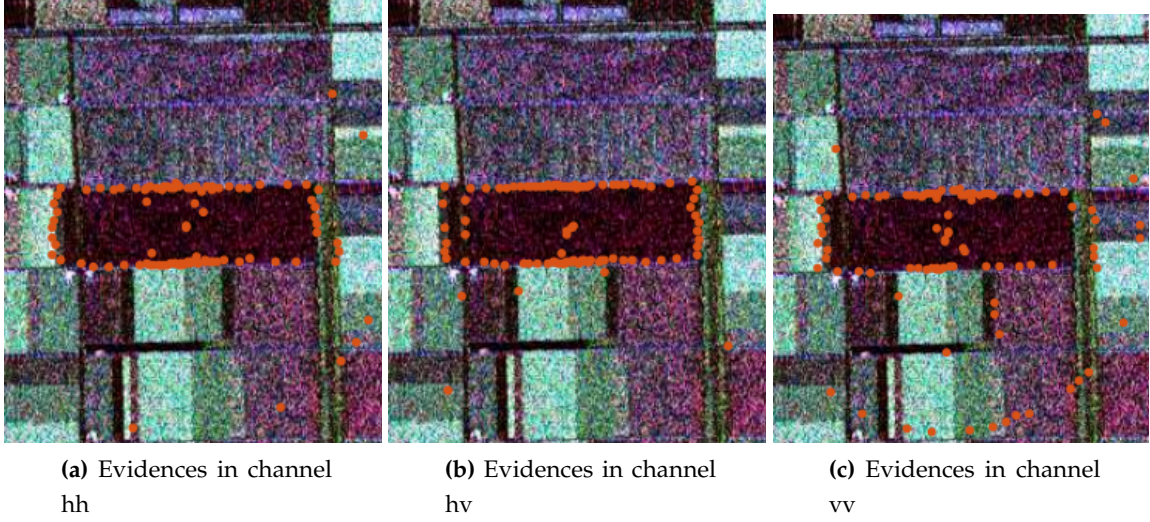


Figure 1. Edges evidences

$$\mu = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|S_i(k)|^2}{\sum_{hh}}}{\sum_{k=1}^n \frac{|S_j(k)|^2}{\sum_{vv}}} = \frac{\sum_{k=1}^n |S_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^n |S_j(k)|^2} \quad (11)$$

Onde $\tau = \frac{\sum_{hh}}{\sum_{vv}}$ quando é considerado a função de probabilidade aplicada nos canais (hh) e (vv).
A PDF razão intensidade *multlook* normalizada é mostrada no apêndice (C) do artigo [4].

$$p^{(L)}(\mu) = \frac{\Gamma(2L)(1 - |\rho_c|^2)^L(1 + \mu)\mu^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L) [(1 + \mu)^2 - 4|\rho_c|^2\mu]^{\frac{2L+1}{2}}} \quad (12)$$

Se considerarmos $w = \tau\mu$ e a distribuição (12) teremos,

$$p^{(L)}(w; \tau, L, \rho) = \frac{\tau^L \Gamma(2L)(1 - |\rho_c|^2)^L(\tau + w)w^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L) [(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho_c|^2w]^{\frac{2L+1}{2}}} \quad (13)$$

$$\ln p^{(L)}(w; \tau, L, \rho) = \ln \left(\frac{\tau^L \Gamma(2L)(1 - |\rho_c|^2)^L(\tau + w)w^{L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L) [(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho_c|^2w]^{\frac{2L+1}{2}}} \right)$$

$$\begin{aligned} \ln p^{(L)}(\mu) &= \ln(\tau^L \Gamma(2L)(1 - |\rho_c|^2)^L(1 + w)w^{L-1}) \\ &\quad - \ln \left(\Gamma(L)\Gamma(L) [(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho_c|^2w]^{\frac{2L+1}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln p^{(L)}(\mu) &= \ln \tau^L + \ln \Gamma(2L) + \ln(1 - |\rho_c|^2)^L + \ln(\tau + w) + \ln w^{L-1} \\ &\quad - \left(\ln \Gamma(L) + \ln \Gamma(L) + \ln [(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho_c|^2w]^{\frac{2L+1}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln p^{(L)}(\mu) &= L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho_c|^2) + \ln(\tau + w) + (L - 1) \ln w \\ &\quad - 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L+1}{2} \ln [(\tau + w)^2 - 4\tau|\rho_c|^2w] \end{aligned} \quad (14)$$

Uma região da imagem PolSAR pode ser dividida na parte interna (I) e externa (E). Construímos uma faixa de dados que temos certeza da presença das regiões internas e externas. Definimos a faixa de dados $(z_1, \dots, z_j) = z_I$ e $(z_{j+1}, \dots, z_N) = z_E$. Para cada j que faz a indexação da faixa de dados vamos,

Estimar (τ_j, L_j, ρ) por $(\hat{\tau}_j, \hat{L}_j, \hat{\rho}_j)(z_I)$ na parte interna da faixa de dados.

Estimar (τ_j, L_j, ρ) por $(\hat{\tau}_j, \hat{L}_j, \hat{\rho}_j)(z_E)$ na parte externa da faixa de dados.

Assim

$$\begin{aligned}\ell(\tau, \mu, L) &= \ln \left(\prod_{k=1}^j p^L(z_k; \mu, L, \rho) \prod_{k=j+1}^N p^L(z_k; \mu, L, \rho) \right) \\ \ell(\tau, \mu, L) &= \sum_{k=1}^j \ln(p^L(z_k; \mu, L, \rho)) + \sum_{k=j+1}^N \ln(p^L(z_k; \mu, L, \rho))\end{aligned}\quad (15)$$

Usando a equação (7) teremos

$$\begin{aligned}\ell(\tau, L) &= \sum_{k=1}^j [L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho_c|^2) + \ln(\tau + w_k) + (L-1) \ln w_k - 2 \ln \Gamma(L) \\ &\quad - \frac{2L+1}{2} \ln[(\tau + w_k)^2 - 4|\rho_c|^2 w_k]] \\ &+ \sum_{k=j+1}^N [L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho_c|^2) + \ln(\tau + w_k) + (L-1) \ln w_k - 2 \ln \Gamma(L) \\ &\quad - \frac{2L+1}{2} \ln[(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho_c|^2 w_k]] \\ \ell(\tau, L) &= jL \ln \tau + j \ln \Gamma(2L) + jL \ln(1 - |\rho_c|^2) + \sum_{k=1}^j \ln(\tau + w_k) + (L-1) \sum_{k=1}^j \ln w_k \\ &\quad - 2j \ln \Gamma(L) - \frac{2L+1}{2} \sum_{k=1}^j \ln[(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho_c|^2 w_k] \\ &+ (N-j)L \ln \tau + (N-j) \ln \Gamma(2L) + (N-j)L \ln(1 - |\rho_c|^2) + \sum_{k=j+1}^N \ln(\tau + w_k) + (L-1) \sum_{k=j+1}^N \ln w_k \\ &\quad - 2(N-j) \ln \Gamma(L) - \frac{2L+1}{2} \sum_{k=j+1}^N \ln[(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho_c|^2 w_k]\end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}\ell(\tau, L) &= j \left[L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho_c|^2) + \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln(\tau + w_k) + \frac{(L-1)}{j} \sum_{k=1}^j \ln w_k \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L+1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln[(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho_c|^2 w_k] \right] \\ &+ (N-j) \left[L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho_c|^2) + \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln(\tau + w_k) + \frac{L-1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln w_k \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln \Gamma(L) - \frac{2L+1}{2(N-j)} \sum_{k=j+1}^N \ln[(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho_c|^2 w_k] \right]\end{aligned}$$

resultando na equação

$$\ell(\tau; L, \rho) = j\ell_1(\mu; L, \rho) + (N-j)\ell_2(\mu; L, \rho)$$

definindo

$$\begin{aligned}\ell_1(\tau; L, \rho) &= L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho_c|^2) + \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln(\tau + w_k) + \frac{(L-1)}{j} \sum_{k=1}^j \ln w_k - 2 \ln \Gamma(L) \\ &\quad - \frac{2L+1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln[(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho_c|^2 w_k] \\ \ell_2(\tau; L, \rho) &= L \ln \tau + \ln \Gamma(2L) + L \ln(1 - |\rho_c|^2) + \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln(\tau + w_k) + \frac{(L-1)}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln w_k - 2 \ln \Gamma(L) \\ &\quad - \frac{2L+1}{2(N-j)} \sum_{k=j+1}^N \ln[(\tau + w_k)^2 - 4\tau|\rho_c|^2 w_k]\end{aligned}\quad (16)$$

O método de otimização *BFGS* (Ref.[1]) foi usado para estimar os parâmetros em cada faixa de dados. O pacote *maxLik* (Ref.[2]) contém a implementação do método e foi usado na implementação.

Para cada j são estimados os parâmetros usando as equações de $\ell_1(\mu, L)$ e $\ell_2(\mu, L)$. Os parâmetros $(\hat{L}_I, \hat{\rho}_I)$ e $(\hat{L}_E, \hat{\rho}_E)$ foram estimados usando o pacote *maxLik*, que pode ser lido com mais detalhes em [2], aplicado nas funções (27).

$$\begin{aligned}\ell(\mu; \hat{\tau}_I, \hat{L}_I, \hat{\rho}_I, \hat{\tau}_E, \hat{L}_E, \hat{\rho}_E) &= j \left[L_I \ln \hat{\tau}_I + \ln \Gamma(2\hat{L}_I) + \hat{L}_I \ln(1 - |\hat{\rho}_{cI}|^2) + \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln(\hat{\tau}_I + w_k) + \frac{(\hat{L}_I-1)}{j} \sum_{k=1}^j \ln w_k \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln \Gamma(\hat{L}_I) - \frac{2\hat{L}_I+1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln[(\hat{\tau}_I + w_k)^2 - 4\hat{\tau}_I|\hat{\rho}_{cI}|^2 w_k] \right] \\ &+ (N-j) \left[\ln \Gamma(2\hat{L}_E) + \hat{L}_E \ln(1 - |\hat{\rho}_{cE}|^2) + \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln(\hat{\tau} + w_k) + \frac{(\hat{L}_E-1)}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln w_k \right. \\ &\quad \left. - 2 \ln \Gamma(\hat{L}_E) - \frac{2\hat{L}_E+1}{2(N-j)} \sum_{k=j+1}^N \ln[(\hat{\tau} + w_k)^2 - 4\hat{\tau}|\hat{\rho}_c|^2 w_k] \right]\end{aligned}$$

Para estimar o parâmetro j foi usado o método *GenSA Generalized Simulated Annealing* (Ref.[3]).

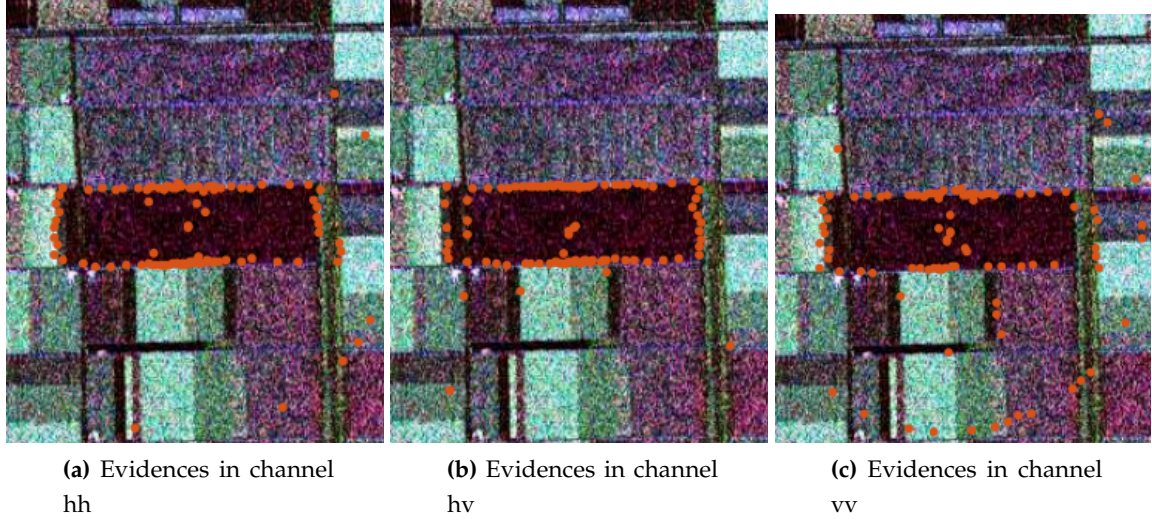


Figure 2. Edges evidences

3.3. Distribuição univariada da magnitude do produto

A magnitude do produto \mathbf{S}_i e \mathbf{S}_j é uma importante medida para as imagem SAR polarimétrica. Definimos a magnitude normalizada por

$$\xi = \frac{\left| \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{S}_i(k) \mathbf{S}_j^H(k) \right|}{\sqrt{E[|\mathbf{S}_i|^2]E[|\mathbf{S}_j|^2]}} = \frac{g}{h}. \quad (17)$$

onde é definido por $g = |\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j^H|$ e $h = \sqrt{E[|\mathbf{S}_i|^2]E[|\mathbf{S}_j|^2]}$.

$$f(\xi) = \frac{4L^{L+1}\xi^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0\left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2}\right) K_{L-1}\left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2}\right). \quad (18)$$

$$\ln f(\xi) = \ln\left(\frac{4L^{L+1}\xi^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)} I_0\left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2}\right) K_{L-1}\left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2}\right)\right).$$

$$\ln f(\xi) = \ln\left(\frac{4L^{L+1}\xi^L}{\Gamma(L)(1-|\rho|^2)}\right) + \ln I_0\left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2}\right) + \ln K_{L-1}\left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2}\right).$$

$$\ln f(\xi) = \ln(4L^{L+1}\xi^L) - \ln(\Gamma(L)(1-|\rho|^2)) + \ln I_0\left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2}\right) + \ln K_{L-1}\left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2}\right).$$

$$\ln f(\xi) = \ln(4) + \ln L^{L+1} + \ln \xi^L - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) + \ln I_0\left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2}\right) + \ln K_{L-1}\left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2}\right).$$

$$\ln f(\xi) = \ln(4) + (L+1)\ln L + L\ln \xi - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho|^2) + \ln I_0\left(\frac{2|\rho|L\xi}{1-|\rho|^2}\right) + \ln K_{L-1}\left(\frac{2L\xi}{1-|\rho|^2}\right). \quad (19)$$

Uma região da imagem PolSAR pode ser dividida na parte interna (I) e externa (E). Construímos uma faixa de dados que temos certeza da presença das regiões internas e externas. Definimos a faixa de dados $(z_1, \dots, z_j) = z_I$ e $(z_{j+1}, \dots, z_N) = z_E$. Para cada j que faz a indexação da faixa de dados vamos,

Estimar (L_j, ρ) por $(\hat{L}_j, \hat{\rho}_j)(z_I)$ na parte interna da faixa de dados.

Estimar (L_j, ρ) por $(\hat{L}_j, \hat{\rho}_j)(z_E)$ na parte externa da faixa de dados.

Assim

$$\begin{aligned}\ell(\mu, L) &= \ln \left(\prod_{k=1}^j p^L(\xi_k; L, \rho) \prod_{k=j+1}^N p^L(\xi_k; L, \rho) \right) \\ \ell(\mu, L) &= \sum_{k=1}^j \ln(p^L(\xi_k; L, \rho)) + \sum_{k=j+1}^N \ln(p^L(\xi_k; L, \rho))\end{aligned}\quad (20)$$

Usando a equação (19) teremos

$$\begin{aligned}\ell(L, \rho) &= \sum_{k=1}^j \left[\ln(4) + (L+1) \ln L + L \ln \xi_k - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) \right] \\ &+ \sum_{k=j+1}^N \left[\ln(4) + (L+1) \ln L + L \ln \xi_k - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) + \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) + \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) \right] \\ \ell(L, \rho) &= j \ln(4) + j(L+1) \ln L + L \sum_{k=1}^j \ln \xi_k - j \ln \Gamma(L) - j \ln(1 - |\rho|^2) \\ &+ \sum_{k=1}^j \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) + \sum_{k=1}^j \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) \\ &+ (N-j) \ln(4) + (N-j)(L+1) \ln L + L \sum_{k=j+1}^N \ln \xi_k - (N-j) \ln \Gamma(L) - (N-j) \ln(1 - |\rho|^2) \\ &+ \sum_{k=j+1}^N \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) + \sum_{k=j+1}^N \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right)\end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}\ell(L, \rho) &= j \left[\ln(4) + (L+1) \ln L + \frac{L}{j} \sum_{k=1}^j \ln \xi_k - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) + \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) \right] \\ &+ (N-j) \left[\ln(4) + (L+1) \ln L + \frac{L}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln \xi_k - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) + \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) \right]\end{aligned}$$

resultando na equação

$$\ell(\tau; L, \rho) = j\ell_1(\mu; L, \rho) + (N-j)\ell_2(\mu; L, \rho)$$

definindo

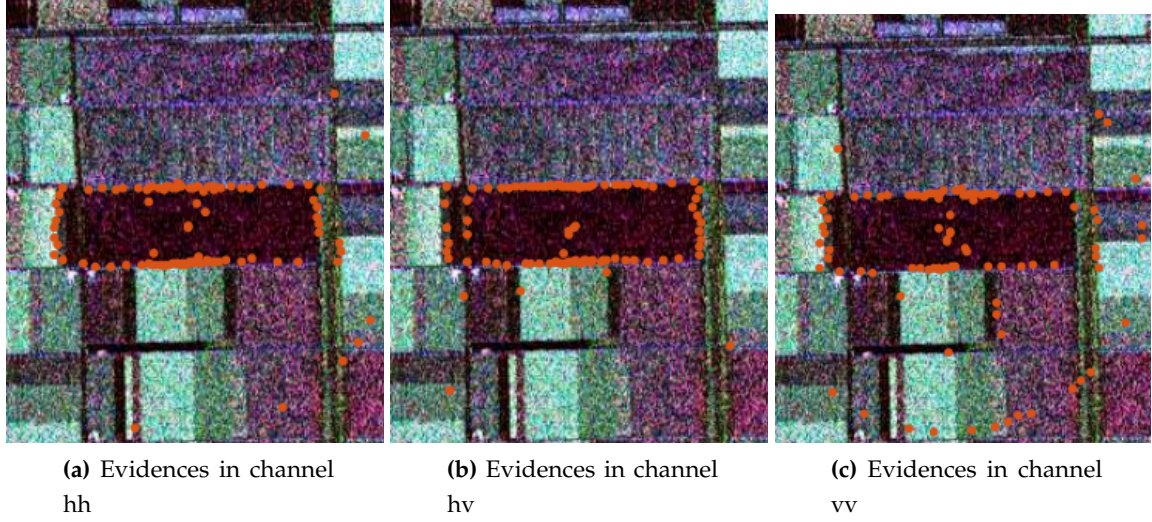
$$\begin{aligned}\ell_1(\tau; L, \rho) &= \ln(4) + (L+1) \ln L + \frac{L}{j} \sum_{k=1}^j \ln \xi_k - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) \\ &+ \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) + \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) \\ \ell_2(\tau; L, \rho) &= \ln(4) + (L+1) \ln L + \frac{L}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln \xi_k - \ln \Gamma(L) - \ln(1 - |\rho|^2) \\ &+ \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln I_0 \left(\frac{2|\rho|L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right) + \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln K_{L-1} \left(\frac{2L\xi_k}{1-|\rho|^2} \right)\end{aligned}\quad (21)$$

70 O método de otimização *BFGS* (Ref.[1]) foi usado para estimar os parâmetros em cada faixa de
71 dados. O pacote *maxLik* (Ref.[2]) contém a implementação do método e foi usado na implementação.

Para cada j são estimados os parâmetros usando as equações de $\ell_1(\mu, L)$ e $\ell_2(\mu, L)$. Os parâmetros $(\hat{L}_I, \hat{\rho}_I)$ e $(\hat{L}_E, \hat{\rho}_E)$ foram estimados usando o pacote *maxLik*, que pode ser lido com mais detalhes em [2], aplicado nas funções (27).

$$\begin{aligned}\ell(\xi; \hat{L}_I, \hat{L}_E, \hat{\rho}_I, \hat{\rho}_E) &= j \left[\ln(4) + (\hat{L}_I + 1) \ln \hat{L}_I + \frac{\hat{L}_I}{j} \sum_{k=1}^j \ln \xi_k - \ln \Gamma(\hat{L}_I) - \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln I_0 \left(\frac{2|\hat{\rho}_I|\hat{L}_I\xi_k}{1-|\hat{\rho}_I|^2} \right) + \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln K_{\hat{L}_I-1} \left(\frac{2\hat{L}_I\xi_k}{1-|\hat{\rho}_I|^2} \right) \right] \\ &+ (N-j) \left[\ln(4) + (\hat{L}_E + 1) \ln \hat{L}_E + \frac{\hat{L}_E}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln \xi_k - \ln \Gamma(\hat{L}_E) - \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln I_0 \left(\frac{2|\hat{\rho}_E|\hat{L}_E\xi_k}{1-|\hat{\rho}_E|^2} \right) + \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln K_{\hat{L}_E-1} \left(\frac{2\hat{L}_E\xi_k}{1-|\hat{\rho}_E|^2} \right) \right]\end{aligned}$$

72 Para estimar o parâmetro j foi usado o método *GenSA Generalized Simulated Annealing* (Ref.[3]).

**Figure 3.** Edges evidences

3.4. Distribuição bivariada produto de intensidades - Lee

A *PDF* conjunta retorna de dois canais correlacionados dos radares polarimétricos e interferométricos são importantes. As *PDF*'s conjuntas conduzem a derivação da intensidade e amplitude razão *PDF*'s. Da equação (??) temos que as intensidades *multilook* sejam

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L |S_i(k)|^2 = \frac{B_1 \Sigma_{11}}{L} \\ R_2 &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L |S_j(k)|^2 = \frac{B_2 \Sigma_{22}}{L} \end{aligned} \quad (22)$$

Integrando a equação (??) em relação a η e ψ . A *PDF* é

$$p(B_1, B_2) = \frac{(B_1 B_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp\left(-\frac{B_1+B_2}{1-|\rho_c|^2}\right)}{\Gamma(L)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{L-1}} I_{L-1}\left(2\sqrt{B_1 B_2} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \quad (23)$$

$$p(B_1, B_2) = \frac{L^{L+1} (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp\left(-\frac{L(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}})}{1-|\rho_c|^2}\right)}{(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{L-1}} I_{L-1}\left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \quad (24)$$

Aplicando o logaritmo natural na equação em ambos os lados da (24)

$$\begin{aligned} \ln p(B_1, B_2) &= \ln \left(\frac{L^{L+1} (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp\left(-\frac{L(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}})}{1-|\rho_c|^2}\right)}{(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{L-1}} I_{L-1}\left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \right) \\ \ln p(B_1, B_2) &= \ln \left(\frac{L^{L+1} (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp\left(-\frac{L(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}})}{1-|\rho_c|^2}\right)}{(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L)(1-|\rho_c|^2)|\rho_c|^{L-1}} \right) + \ln I_{L-1}\left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln p(B_1, B_2) &= \ln \left(L^{L+1} (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} \exp \left(-\frac{L(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}})}{1-|\rho_c|^2} \right) \right) \\
&+ \ln \left((\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L) (1-|\rho_c|^2) |\rho_c|^{L-1} \right) \\
&+ \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \\
\ln p(B_1, B_2) &= \ln \left(L^{L+1} (R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} \right) + \ln \exp \left(-\frac{L(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}})}{1-|\rho_c|^2} \right) \\
&- \ln \left((\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} \Gamma(L) (1-|\rho_c|^2) |\rho_c|^{L-1} \right) \\
&+ \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \\
\ln p(B_1, B_2) &= \ln L^{L+1} + \ln(R_1 R_2)^{\frac{L-1}{2}} - \frac{L(\frac{R_1}{\Sigma_{11}} + \frac{R_2}{\Sigma_{22}})}{1-|\rho_c|^2} \\
&- \ln(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{\frac{L+1}{2}} - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho_c|^2) - \ln |\rho_c|^{L-1} \\
&+ \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \\
\ln p(B_1, B_2) &= (L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \ln(R_1 R_2) - \frac{LR_1}{\Sigma_{11}(1-|\rho_c|^2)} - \frac{LR_2}{\Sigma_{22}(1-|\rho_c|^2)} \\
&- \frac{L+1}{2} \ln(\Sigma_{11} \Sigma_{22}) - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho_c|^2) - (L-1) \ln |\rho_c| \\
&+ \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \\
\ln p(B_1, B_2) &= (L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \ln R_1 + \frac{L-1}{2} \ln R_2 - \frac{LR_1}{\Sigma_{11}(1-|\rho_c|^2)} - \frac{LR_2}{\Sigma_{22}(1-|\rho_c|^2)} \\
&- \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho_c|^2) - (L-1) \ln |\rho_c| \\
&+ \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \tag{25}
\end{aligned}$$

Uma região da imagem PolSAR pode ser dividida na parte interna (I) e externa (E). Construímos uma faixa de dados que temos certeza da presença das regiões internas e externas. Definimos a faixa de dados $(z_1, \dots, z_j) = z_I$ e $(z_{j+1}, \dots, z_N) = z_E$. Para cada j que faz a indexação da faixa de dados vamos,

Estimar (L_j, ρ) por $(\hat{L}_j, \hat{\rho}_j)(z_I)$ na parte interna da faixa de dados.

Estimar (L_j, ρ) por $(\hat{L}_j, \hat{\rho}_j)(z_E)$ na parte externa da faixa de dados.

Assim

$$\begin{aligned}
\ell(L, \rho) &= \ln \left(\prod_{k=1}^j p^L(R_1, R_2; L, \rho) \prod_{k=j+1}^N p^L(R_1, R_2; L, \rho) \right) \\
\ell(L, \rho) &= \sum_{k=1}^j \ln(p^L(R_1, R_2; L, \rho)) + \sum_{k=j+1}^N \ln(p^L(R_1, R_2; L, \rho)) \tag{26}
\end{aligned}$$

Usando a equação (25) teremos

$$\begin{aligned}
\ell(L, \rho) &= \sum_{k=1}^j \left[(L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \ln R_1 + \frac{L-1}{2} \ln R_2 - \frac{LR_1}{\Sigma_{11}(1-|\rho_c|^2)} - \frac{LR_2}{\Sigma_{22}(1-|\rho_c|^2)} \right. \\
&\quad - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho_c|^2) - (L-1) \ln |\rho_c| \\
&\quad + \left. \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \right] \\
&\quad + \sum_{k=j+1}^N \left[(L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \ln R_1 + \frac{L-1}{2} \ln R_2 - \frac{LR_1}{\Sigma_{11}(1-|\rho_c|^2)} - \frac{LR_2}{\Sigma_{22}(1-|\rho_c|^2)} \right. \\
&\quad - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho_c|^2) - (L-1) \ln |\rho_c| \\
&\quad + \left. \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \right] \\
\ell(L, \rho) &= j(L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \sum_{k=1}^j \ln R_1 + \frac{L-1}{2} \sum_{k=1}^j \ln R_2 \\
&\quad - \frac{L}{\Sigma_{11}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=1}^j R_1 - \frac{L}{\Sigma_{22}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=1}^j R_2 \\
&\quad - j \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - j \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - j \ln \Gamma(L) - j \ln(1-|\rho_c|^2) - j(L-1) \ln |\rho_c| \\
&\quad + \sum_{k=1}^j \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \\
&\quad + (N-j)(L+1) \ln L + \frac{L-1}{2} \sum_{k=j+1}^N \ln R_1 \\
&\quad + \frac{L-1}{2} \sum_{k=j+1}^N \ln R_2 - \frac{L}{\Sigma_{11}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=j+1}^N R_1 - \frac{L}{\Sigma_{22}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=j+1}^N R_2 \\
&\quad - (N-j) \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - (N-j) \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - (N-j) \ln \Gamma(L) - (N-j) \ln(1-|\rho_c|^2) - (N-j)(L-1) \ln |\rho_c| \\
&\quad + \sum_{k=j+1}^N \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right)
\end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\ell(L, \rho) &= j \left[(L+1) \ln L + \frac{L-1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln R_1 + \frac{L-1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln R_2 \right. \\
&\quad - \frac{L}{j \Sigma_{11}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=1}^j R_1 - \frac{L}{j \Sigma_{22}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=1}^j R_2 \\
&\quad - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho_c|^2) - (L-1) \ln |\rho_c| \\
&\quad + \left. \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \right] \\
&\quad + (N-j) \left[(L+1) \ln L + \frac{L-1}{2(N-j)} \sum_{k=j+1}^N \ln R_1 \right. \\
&\quad + \frac{L-1}{2(N-j)} \sum_{k=j+1}^N \ln R_2 - \frac{L}{(N-j) \Sigma_{11}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=j+1}^N R_1 - \frac{L}{(N-j) \Sigma_{22}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=j+1}^N R_2 \\
&\quad - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho_c|^2) - (L-1) \ln |\rho_c| \\
&\quad + \left. \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

resultando na equação

$$\ell(\tau; L, \rho) = j\ell_1(\mu; L, \rho) + (N-j)\ell_2(\mu; L, \rho)$$

definindo

$$\begin{aligned}
\ell_1(\tau; L, \rho) &= (L+1) \ln L + \frac{L-1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln R_1 + \frac{L-1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln R_2 \\
&\quad - \frac{L}{j \Sigma_{11}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=1}^j R_1 - \frac{L}{j \Sigma_{22}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=1}^j R_2 \\
&\quad - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho_c|^2) - (L-1) \ln |\rho_c| \\
&\quad + \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right) \\
\ell_2(\tau; L, \rho) &= (L+1) \ln L + \frac{L-1}{2(N-j)} \sum_{k=j+1}^N \ln R_1 \\
&\quad + \frac{L-1}{2(N-j)} \sum_{k=j+1}^N \ln R_2 - \frac{L}{(N-j) \Sigma_{11}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=j+1}^N R_1 - \frac{L}{(N-j) \Sigma_{22}(1-|\rho_c|^2)} \sum_{k=j+1}^N R_2 \\
&\quad - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{L+1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(L) - \ln(1-|\rho_c|^2) - (L-1) \ln |\rho_c| \\
&\quad + \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \ln I_{L-1} \left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1-|\rho_c|^2} \right)
\end{aligned} \tag{27}$$

85 O método de otimização *BFGS* (Ref.[1]) foi usado para estimar os parâmetros em cada faixa de
86 dados. O pacote *maxLik* (Ref.[2]) contém a implementação do método e foi usado na implementação.

Para cada j são estimados os parâmetros usando as equações de $\ell_1(\mu, L)$ e $\ell_2(\mu, L)$. Os parâmetros $(\hat{L}_I, \hat{\rho}_I)$ e $(\hat{L}_E, \hat{\rho}_E)$ foram estimados usando o pacote *maxLik*, que pode ser lido com mais detalhes em [2], aplicado nas funções (27).

$$\begin{aligned} \ell(R_1, R_2; \hat{L}_I, \hat{L}_E, \hat{\rho}_I, \hat{\rho}_E) = & j \left[(\hat{L}_I + 1) \ln \hat{L}_I + \frac{\hat{L}_I - 1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln R_1 + \frac{\hat{L}_I - 1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln R_2 \right. \\ & - \frac{\hat{L}_I}{j \Sigma_{11}(1 - |\hat{\rho}_I|^2)} \sum_{k=1}^j R_1 - \frac{\hat{L}_I}{j \Sigma_{22}(1 - |\hat{\rho}_I|^2)} \sum_{k=1}^j R_2 \\ & - \frac{\hat{L}_I + 1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{\hat{L}_I + 1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(\hat{L}_I) - \ln(1 - |\hat{\rho}_I|^2) - (\hat{L}_I - 1) \ln |\hat{\rho}_I| \\ & + \left. \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln I_{\hat{L}_I - 1} \left(2\hat{L}_I \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\hat{\rho}_I|}{1 - |\hat{\rho}_I|^2} \right) \right] \\ & + (N - j) \left[(\hat{L}_E + 1) \ln \hat{L}_E + \frac{\hat{L}_E - 1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln R_1 + \frac{\hat{L}_E - 1}{2j} \sum_{k=1}^j \ln R_2 \right. \\ & - \frac{\hat{L}_E}{j \Sigma_{11}(1 - |\hat{\rho}_E|^2)} \sum_{k=1}^j R_1 - \frac{\hat{L}_E}{j \Sigma_{22}(1 - |\hat{\rho}_E|^2)} \sum_{k=1}^j R_2 \\ & - \frac{\hat{L}_E + 1}{2} \ln \Sigma_{11} - \frac{\hat{L}_E + 1}{2} \ln \Sigma_{22} - \ln \Gamma(\hat{L}_E) - \ln(1 - |\hat{\rho}_E|^2) - (\hat{L}_E - 1) \ln |\hat{\rho}_E| \\ & + \left. \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \ln I_{\hat{L}_E - 1} \left(2\hat{L}_E \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\hat{\rho}_E|}{1 - |\hat{\rho}_E|^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Para estimar o parâmetro j foi usado o método *GenSA Generalized Simulated Annealing* (Ref.[3]).

References

1. Jorge Nocedal and Stephen J. Wright, Numerical Optimization . **Springer, 2006**, New York, NY, USA.
2. Arne Henningsen and Ott Toomet. *maxLik: A package for maximum likelihood estimation in R*, Computational Statistics **2011**, vol 26, 03, 443-448.
3. Yang Xiang and Sylvain Gubian and Brian Suomela and Julia Hoeng. Generalized Simulated Annealing for Efficient Global Optimization: the GenSA Package for R. The R Journal Volume 5/1, June 2013, <https://journal.r-project.org/archive/2013/RJ-2013-002/index.html>.
4. Lee, J. S. and Hoppel, K. W. and Mango, S. A. and Miller, A. R. Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric SAR imagery. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1017-1028, Vol 32, 1994.

Sample Availability: Samples of the compounds are available from the authors.

© 2020 by the authors. Submitted to *Remote Sens.* for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).