Генераторный способ измерения ёмкости и индуктивности

Заключается в измерении частоты параллельного колебательного контура (КК), состоящего из индуктивности L и ёмкости C, при параллельном подключении к нему измеряемой ёмкости C_X (последовательном подключении индуктивности L_X).

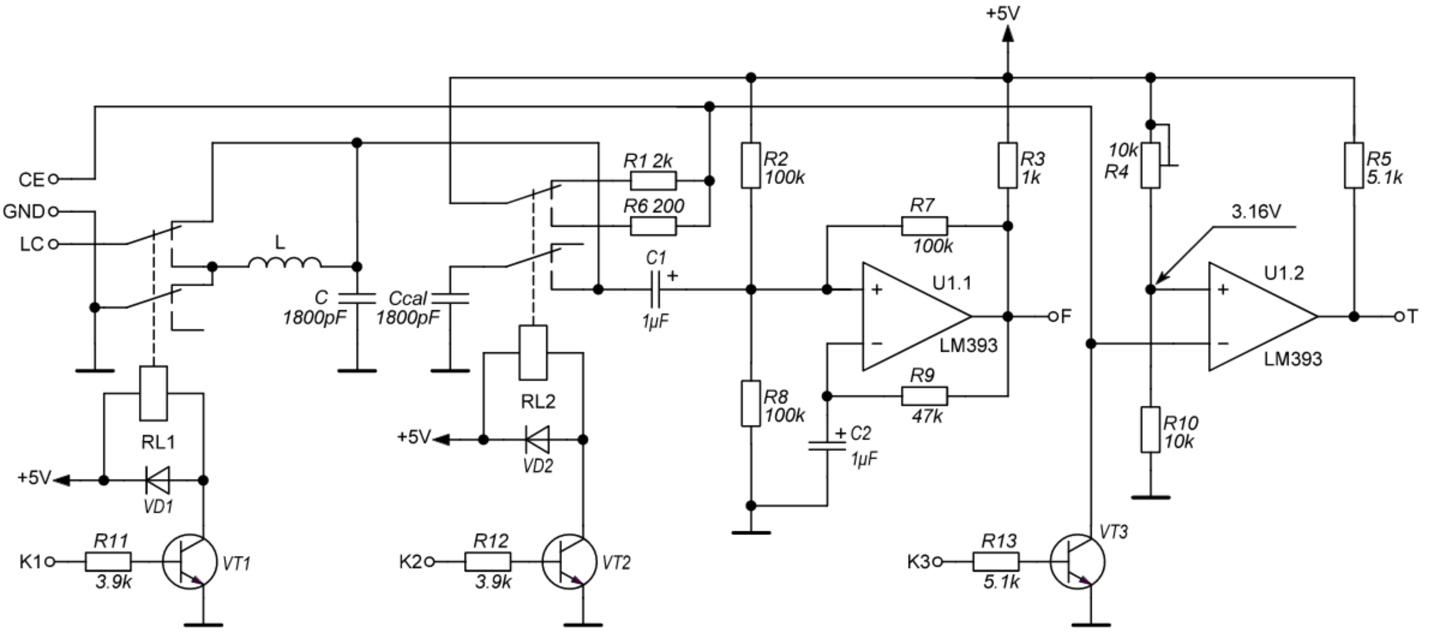

Рисунок 1. схема измерительной части LC-метра.

Измерение ёмкости

Запишем систему уравнений для трёх, измеряемых частот:

$$\begin{cases} \omega_1^{-2} = LC; \\ \omega_2^{-2} = L(C + C_\mathrm{cal}); \\ \omega_3^{-2} = L(C + C_\mathrm{X}); \end{cases} \tag{1}$$

где $\omega_n = 2\pi f_n$ - измеряемые частоты КК. f_1 – частота исходного КК, f_2 – частота КК с параллельно подключенным калибровочным конденсатором – C_cal, f_3 – частота КК с параллельно подключенным измеряемым конденсатором – C_X. После следующих преобразований системы (1):

$$\begin{cases} \omega_2^{-2} = LC + LC_\mathrm{cal} = \omega_1^{-2} + LC_\mathrm{cal}; \\ \omega_3^{-2} = LC + LC_\mathrm{X} = \omega_1^{-2} + LC_\mathrm{X}; \end{cases} \qquad \begin{cases} L = \dfrac{\omega_2^{-2} - \omega_1^{-2}}{C_\mathrm{cal}}; \\ \omega_3^{-2} = \omega_1^{-2} + LC_\mathrm{X} = \omega_1^{-2} + \dfrac{C_\mathrm{X}}{C_\mathrm{cal}}(\omega_2^{-2} - \omega_1^{-2}); \end{cases}$$

$$\frac{C_\mathrm{X}}{C_\mathrm{cal}}(\omega_2^{-2} - \omega_1^{-2}) = \omega_3^{-2} - \omega_1^{-2}; \quad \frac{C_\mathrm{X}}{C_\mathrm{cal}} = \frac{\omega_3^{-2} - \omega_1^{-2}}{\omega_2^{-2} - \omega_1^{-2}} = \frac{\dfrac{\omega_3^{-2}}{\omega_1^{-2}} - 1}{\dfrac{\omega_2^{-2}}{\omega_1^{-2}} - 1} = \frac{\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_3}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1}; \quad C_\mathrm{X} = \frac{\left(\dfrac{2\pi f_1}{2\pi f_3}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{2\pi f_1}{2\pi f_2}\right)^2 - 1} \cdot C_\mathrm{cal};$$

получаем формулу для вычисления C_X через измеренные частоты: f_1, f_2, f_3 и значение ёмкости калибровочного конденсатора C_cal, которые считаются известным:

$$C_\mathrm{X} = \frac{\left(\dfrac{f_1}{f_3}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1} \cdot C_\mathrm{cal}; \tag{2}$$

Измерение индуктивности

Получим формулу для вычисления измеряемой индуктивности L_X. Запишем систему уравнений для трёх, измеряемых частот:

$$\begin{cases} \omega_1^{-2} = LC; \\ \omega_2^{-2} = L(C + C_\mathrm{cal}); \\ \omega_3^{-2} = (L + L_\mathrm{X})C; \end{cases} \tag{3}$$

где f_3 – частота КК с последовательно подключенной измеряемой индуктивностью – L_X. После следующих преобразований системы (3):

$$\begin{cases} L = \dfrac{\omega_1^{-2}}{C}; \\ \omega_2^{-2} = \dfrac{\omega_1^{-2}}{C}(C + C_\mathrm{cal}); \\ \omega_3^{-2} = \left(\dfrac{\omega_1^{-2}}{C} + L_\mathrm{X}\right) C; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2^{-2} - \omega_1^{-2} = \dfrac{\omega_1^{-2}}{C} \cdot C_\mathrm{cal}; \\ \omega_3^{-2} - \omega_1^{-2} = L_\mathrm{X} C; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\omega_2^{-2}}{\omega_1^{-2}} - 1 = \dfrac{C_\mathrm{cal}}{C}; \\ \dfrac{\omega_3^{-2}}{\omega_1^{-2}} - 1 = L_\mathrm{X} \dfrac{C}{\omega_1^{-2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{C_\mathrm{cal}}{C} = \dfrac{\omega_2^{-2}}{\omega_1^{-2}} - 1; \\ L_\mathrm{X} = \left(\dfrac{\omega_3^{-2}}{\omega_1^{-2}} - 1\right) \dfrac{\omega_1^{-2}}{C}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{C} = \left[\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1\right] \dfrac{1}{C_\mathrm{cal}}; \\ L_\mathrm{X} = \left[\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_3}\right)^2 - 1\right] \dfrac{1}{\omega_1^2 C}; \end{cases}$$

$$L_\mathrm{X} = \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)^2 - 1\right] \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1\right] \frac{1}{\omega_1^2 C_\mathrm{cal}};$$

имеем формулу для вычисления индуктивности L_X:

$$L_\mathrm{X} = \left[\left(\frac{f_1}{f_3}\right)^2 - 1\right] \left[\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1\right] \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 C_\mathrm{cal}}; \tag{4}$$

Калибровка

Калибровка измерительного контура заключается в предварительном измерении частот f_1 и f_2. Откуда с помощью следующих преобразований двух первых уравнений системы (1):

$$\begin{cases} \omega_1^{-2} = LC; \\ \omega_2^{-2} = L(C + C_\mathrm{cal}); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = \dfrac{\omega_1^{-2}}{C}; \\ \dfrac{\omega_2^{-2}}{L} = C + C_\mathrm{cal}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = \dfrac{\omega_1^{-2}}{C}; \\ C\dfrac{\omega_2^{-2}}{\omega_1^{-2}} = C + C_\mathrm{cal}; \end{cases} \quad C\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1\right) = C_\mathrm{cal};$$

получим формулу для вычисления ёмкости C:

$$C = \frac{C_\mathrm{cal}}{\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1} \cdot C_\mathrm{cal}; \tag{5}$$

а также после следующих преобразований:

$$\begin{cases} \omega_1^{-2} = LC; \\ \omega_2^{-2} = L(C + C_\mathrm{cal}); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \dfrac{\omega_1^{-2}}{L}; \\ L = \dfrac{\omega_2^{-2}}{C + C_\mathrm{cal}}; \end{cases} \quad L = \frac{\omega_2^{-2}}{\dfrac{\omega_1^{-2}}{L} + C_\mathrm{cal}}; \quad \frac{\omega_1^{-2}}{L} + C_\mathrm{cal} = \frac{\omega_2^{-2}}{L};$$

$$\frac{\omega_2^{-2}-\omega_1^{-2}}{L}=C_{\text{cal}};\quad L=\frac{\omega_2^{-2}-\omega_1^{-2}}{C_{\text{cal}}}=\frac{1}{C_{\text{cal}}}\left(\frac{1}{\omega_2^2}-\frac{1}{\omega_1^2}\right)=\frac{1}{C_{\text{cal}}}\cdot\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2}=\frac{\dfrac{\omega_1^2}{\omega_2^2}-1}{\omega_1^2}\cdot\frac{1}{C_{\text{cal}}};$$

получаем формулу для вычисления индуктивности L:

$$L=\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2-1\right]\frac{1}{\omega_1^2C_{\text{cal}}}=\left[\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2-1\right]\frac{1}{4\pi^2f_1^2C_{\text{cal}}};\tag{6}$$

Сравнивая (2) с (5) и (4) с (6) легко видеть, что обе пары формул отличаются множителем:

$$\left(\frac{f_1}{f_3}\right)^2-1$$

то есть после калибровки для C_{X} и L_{X} справедливы следующие формулы:

$$\begin{cases}C_{\text{X}}=\left[\left(\dfrac{f_1}{f_3}\right)^2-1\right]C;\\ L_{\text{X}}=\left[\left(\dfrac{f_1}{f_3}\right)^2-1\right]L;\end{cases}\tag{7}$$

Измерение ёмкости электролитических конденсаторов через постоянную времени

Измеряемый конденсатор C_E заряжается через известное сопротивление R по закону:

$$U_C(t)=U_0\left[1-\exp\left(-\frac{t}{RC_E}\right)\right];\tag{8}$$

где $U_C(t)$ – напряжение на конденсаторе C_E, U_0 – напряжение источника питания. Измеряя время t, за которое измеряемый конденсатор зарядится от 0 до напряжения $U_0/2$, можно вычислить ёмкость C_E:

$$\frac{1}{2}U_0=U_0\left[1-\exp\left(-\frac{t}{RC_E}\right)\right];$$

$$\frac{1}{2}=1-\exp\left(-\frac{t}{RC_E}\right);$$

$$-\frac{1}{2}=-\exp\left(-\frac{t}{RC_E}\right);$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{t}{RC_E};$$

$$-\ln(2)=-\frac{t}{RC_E};$$

$$\ln(2)=\frac{t}{RC_E};$$

$$C_E=\frac{t}{R\ln(2)}\approx\frac{t}{0.693R};\tag{9}$$

Если настроить комапаратор на напряжение:

$$U_{\text{REF}}=\left(1-\frac{1}{e}\right)U_0,$$

то формула (9) упроститься до:

$$C_E=\frac{t}{R};\tag{10}$$

Измерение временных интервалов, а равно и частоты с помощью микроконтроллера
Пусть имеется два таймера: TMR1 — таймер-счётчик и TMR2 — таймер. Таймер TMR1 – тактируется измеряемой частотой f и хранит в своём счётном регистре T_1 количество импульсов, поступивших на его тактовый вход. Таймер TMR2 – отсчитывает интервалы времени и содержит в своём счётном регистре T_2 число пропорциональное времени между его включением и остановкой. Интервал времени вычислется по формуле:

$$\Delta T = \frac{k}{f_{\mathrm{CLK}}} \cdot T_2, \tag{11}$$

где k — коэффициент предделителя таймера, f_{CLK} — частота тактирования таймера. Таймер TMR2 отсчитывает интервалы времени ΔT в течении которых таймер TMR1 считает импульсы измеряемого сигнала. Частота вычисляется как:

$$f = \frac{T_1}{\Delta T} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{f_{\mathrm{CLK}}}{k}. \tag{12}$$