



---

# CONTROLO NÃO LINEAR

SEBENTA

---

**Miguel Ayala Botto**

---

Prof. Associado, IST

Dezembro 2004

Instituto Superior Técnico  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Secção de Sistemas  
Av. Rovisco Pais, 1049-001, Lisboa  
Tel: 218 419 028 Fax: 21 841 80 97  
Email: AyalaBotto@ist.utl.pt



# Índice

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Análise de sistemas não lineares</b>                       | <b>2</b> |
| 2.1      | Introdução aos sistemas não lineares . . . . .                | 2        |
| 2.1.1    | Revisão das propriedades dos sistemas lineares . . . . .      | 2        |
| 2.1.2    | Características e exemplos de sistemas não lineares . . . . . | 3        |
| 2.2      | Análise via método da função de descrição . . . . .           | 9        |
| 2.2.1    | Funções de descrição de não linearidades típicas . . . . .    | 14       |
| 2.2.2    | Análise da existência de oscilações forçadas . . . . .        | 18       |
| 2.2.3    | Caracterização das oscilações forçadas . . . . .              | 19       |
| 2.3      | Análise por plano de fase . . . . .                           | 25       |
| 2.3.1    | Construção de trajectórias num plano de fase . . . . .        | 28       |
| 2.3.2    | Caracterização de pontos singulares . . . . .                 | 37       |
| 2.3.3    | Ciclos limite no plano de fase . . . . .                      | 46       |
| 2.3.4    | Análise de sistemas de controlo . . . . .                     | 57       |
| 2.4      | Estabilidade via método de Lyapunov . . . . .                 | 65       |
| 2.4.1    | Conceitos sobre estabilidade de Lyapunov . . . . .            | 65       |
| 2.4.2    | Primeiro método de Lyapunov . . . . .                         | 68       |
| 2.4.3    | Segundo método de Lyapunov . . . . .                          | 70       |
| 2.4.4    | Conjuntos invariantes . . . . .                               | 78       |
| 2.4.5    | Estabilidade de sistemas lineares . . . . .                   | 81       |
| 2.4.6    | Método de Krasovskii . . . . .                                | 84       |
| 2.4.7    | Método do gradiente variável . . . . .                        | 87       |

|   |            |
|---|------------|
| 2.4.8 Desigualdades matriciais lineares . . . . .                   | 89         |
| 2.5 Critério de Popov e critério do círculo . . . . .               | 91         |
| <b>3 Controlo de sistemas não lineares</b>                          | <b>102</b> |
| 3.1 Álgebra de Lie e geometria diferencial . . . . .                | 106        |
| 3.1.1 Definições na álgebra de Lie . . . . .                        | 106        |
| 3.1.2 Significado da álgebra de Lie nos sistemas lineares . . . . . | 110        |
| 3.2 Linearização por realimentação . . . . .                        | 115        |
| 3.2.1 Linearização por realimentação entrada-estado . . . . .       | 116        |
| 3.2.2 Condições para a LREE . . . . .                               | 119        |
| 3.2.3 Caso particular da LREE . . . . .                             | 121        |
| 3.2.4 Linearização por realimentação entrada-saída . . . . .        | 126        |
| 3.2.5 Análise da estabilidade interna . . . . .                     | 129        |
| 3.2.6 Dinâmica dos zeros . . . . .                                  | 133        |
| 3.2.7 Equivalência entre a LRES e a LREE . . . . .                  | 140        |
| 3.2.8 Grau relativo não definido . . . . .                          | 144        |
| 3.2.9 LRES de sistemas MIMO . . . . .                               | 148        |
| 3.3 Controlo por modo de deslizamento . . . . .                     | 157        |
| 3.3.1 Definição da superfície de deslizamento . . . . .             | 161        |
| 3.3.2 Modo de deslizamento . . . . .                                | 163        |
| 3.3.3 Dinâmica na superfície de deslizamento . . . . .              | 167        |
| 3.3.4 Convergência em tempo finito . . . . .                        | 169        |
| 3.3.5 Robustez a erros de modelação . . . . .                       | 171        |
| 3.3.6 <i>Chattering</i> na acção de controlo . . . . .              | 177        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>4 Introdução ao controlo robusto de sistemas lineares</b> | <b>184</b> |
| 4.1 Estabilidade robusta . . . . .                           | 185        |
| 4.1.1 Caracterização da incerteza em modelos . . . . .       | 185        |
| 4.1.2 Critério para a estabilidade robusta . . . . .         | 187        |
| 4.1.3 Teorema do ganho pequeno . . . . .                     | 189        |
| 4.1.4 Estabilidade robusta de sistemas MIMO . . . . .        | 195        |
| 4.2 Desempenho robusto . . . . .                             | 201        |
| 4.2.1 Critérios de desempenho . . . . .                      | 201        |
| 4.2.2 Moldagem do ganho . . . . .                            | 203        |
| 4.2.3 Exemplo . . . . .                                      | 206        |
| 4.2.4 Desempenho robusto de sistemas MIMO . . . . .          | 208        |



# 1 Introdução

## Disciplina:

Este documento é composto pelos acetatos apresentados nas aulas teóricas da disciplina “Controlo Não Linear”, do 5º ano da Licenciatura em Engenharia Mecânica, e do Mestrado em Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.

## Objectivos gerais:

Dotar o aluno de conhecimentos básicos, sensibilidade técnica, e domínio das ferramentas matemáticas necessárias para efectuar a análise e síntese de sistemas de controlo não lineares no domínio do tempo contínuo. É dado especial relevo à teoria de estabilidade de Lyapunov e a diferentes formas de análise e projecto de sistemas de controlo não lineares tais como, projecto via método da função de descrição, via critérios de Popov e do círculo, estratégias de controlo via linearização por realimentação e por modo de deslizamento. São introduzidos igualmente os conceitos de análise de estabilidade e de desempenho robusto de sistemas dinâmicos lineares.

## Referências:

Na apresentação dos assuntos tratados ao longo deste documento recorreu-se a exemplos e ilustrações retirados do seguinte conjunto de obras bibliográficas (ordem alfabética do 1º autor):

1. Stephen P. Banks, “Control systems engineering”, Prentice Hall, 1986.
2. Alan Chao, Michael Athans, “*Stability robustness of unstructured uncertainty for linear time invariant systems*”, In The Control Handbook, Editor William S. Levine, CRC - IEEE Press, Chap. 30, 1996.
3. A. Isidori, “*Nonlinear Control Systems: an introduction*”, Springer-Verlag, 1989.
4. D. W. Jordan, P. Smith, “*Nonlinear ordinary differential equations*”, Second Edition, Oxford University Press, 1987.
5. Hassan K. Khalil, “*Nonlinear Systems*”, Third Edition, Prentice Hall Inc., 2002.
6. Katsuhiko Ogata, “*Engenharia de Controle Moderno*”, Prentice-Hall, Brasil, 1970.
7. Stephem D. Patek, Michael Athans, “*MIMO frequency response analysis and the singular value decomposition*”, In The Control Handbook, Editor William S. Levine, CRC - IEEE Press, Chap. 29, 1996.
8. Shankar Sastry, “*Nonlinear systems: analysis, stability and control*”, Springer, 1999.
9. Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, “*Applied Nonlinear Control*”, Prentice-Hall, 1991.
10. Mark W. Spong, M. Vidyasagar, “*Robot dynamics and control*”, John Wiley and Sons, 1989.
11. John van de Vegte, “*Feedback control systems*”, Prentice-Hall International, 1990.

## 2 Análise de sistemas não lineares

**Objectivo:** motivação para estudar sistemas não lineares.

### 2.1 Introdução aos sistemas não lineares

**Perguntas:** Porquê estudar sistemas não lineares? Porque não aproveitamos a teoria (completa e desenvolvida) sobre análise e projecto de sistemas lineares que, na maior parte dos casos, até dá bons resultados? Porque é que não podemos sempre considerar: *sistema não linear*  $\approx$  *sistema linear*?

#### 2.1.1 Revisão das propriedades dos sistemas lineares

Seja o seguinte sistema LIT, com condição inicial  $x(0) = x_0$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad A \text{ é não singular} \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

**Propriedades:**

- A *estabilidade* é uma propriedade global do sistema.
    - Sistema estável se os *valores próprios* de  $A$  tiverem parte real negativa, independentemente das condições iniciais.
  - Verifica o *Princípio da Sobreposição*:
    - Se para uma entrada,  $u_1(t)$ , a saída for  $y_1(t)$ .
    - Se para uma entrada,  $u_2(t)$ , a saída for  $y_2(t)$ .
    - Então, para uma entrada,  $u_1(t) + u_2(t)$ , a saída será  $y_1(t) + y_2(t)$ .
    - O conhecimento da resposta impulsional é suficiente para conhecer o sistema:
- $$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau, \quad Y(s) = G(s)U(s)$$
- A resposta transitória do sistema pode ser decomposta em vários modos, e a sua solução determinada analiticamente.
  - Permite a *análise em frequência*:
    - Para entradas sinusoidais, a saída é sinusoidal e com a mesma frequência.

### 2.1.2 Características e exemplos de sistemas não lineares

Os sistemas não lineares possuem uma *dinâmica muito mais rica* que os sistemas lineares, exibindo comportamentos que nunca poderiam ser observados em sistemas lineares.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

#### Características e exemplos:

- *Múltiplos pontos de equilíbrio*: o estado do sistema pode convergir para diferentes pontos de equilíbrio, consoante o estado inicial do sistema! A estabilidade depende do estado inicial.

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x(t)^2, \quad \text{estado inicial: } x(0) = x_0$$

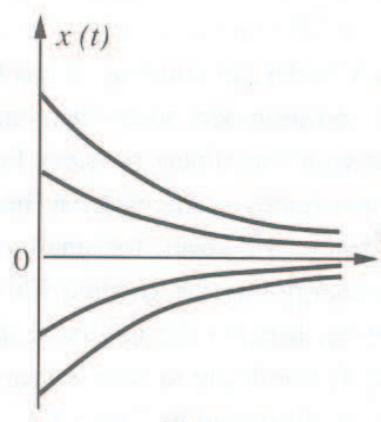
A linearização do sistema, resulta:

$$\dot{x}(t) = -x(t), \quad \text{onde: } x(t) = x_0 e^{-t}$$

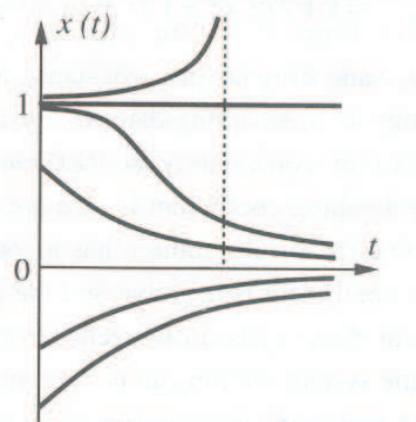
Não linearizando, a resposta do sistema é obtida através de:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + x(t)^2 \\ \frac{dx(t)}{-x(t) + x(t)^2} &= dt \\ x(t) &= \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}\end{aligned}$$

Donde se conclui que o sistema tem 2 pontos de equilíbrio,  $x = 0$  e  $x = 1$ , e dinâmicas qualitativamente distintas, dependendo do estado inicial!



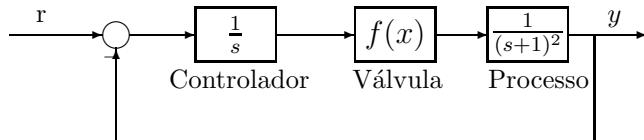
Sistema linearizado



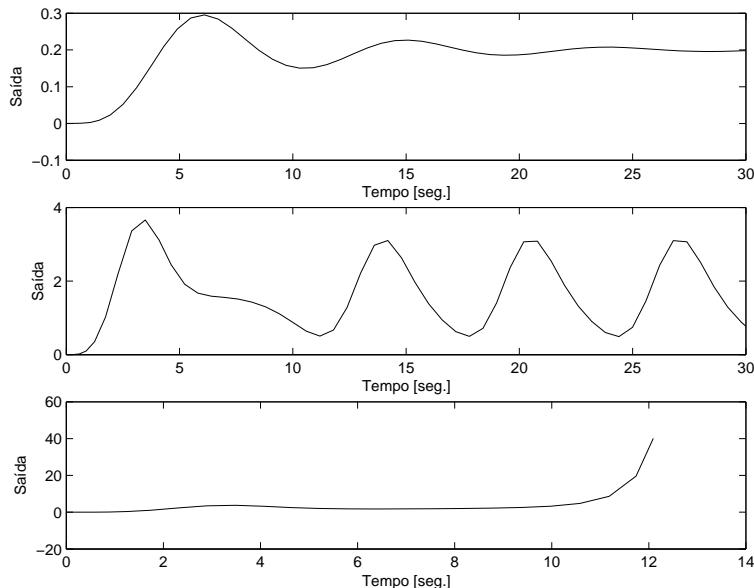
Sistema original

- *Dependência crítica dos parâmetros:* uma pequena diferença num parâmetro ou numa condição inicial pode originar um comportamento radicalmente diferente.

Seja o seguinte sistema de controlo com válvula de característica não linear,  $f(x) = x^2$ :



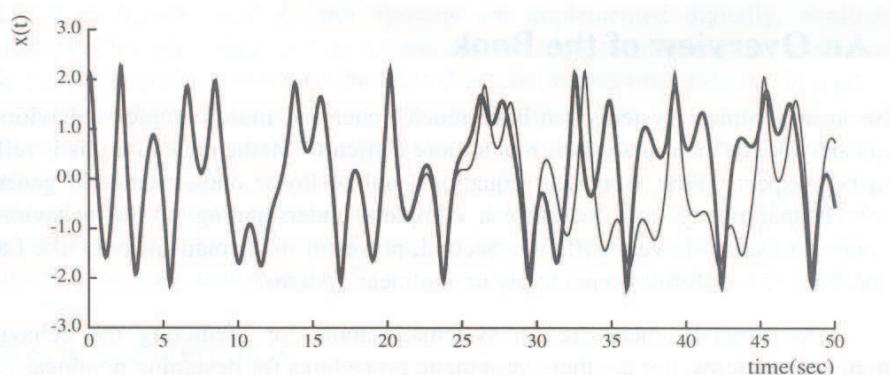
Degraus na referência de amplitudes diferentes,  $r = 0.2$ ,  $r = 1.68$  e  $r = 1.72$ , resulta:



Seja o seguinte sistema caótico:

$$\ddot{x}(t) + 0.1\dot{x}(t) + x(t)^5 = 6 \sin(t)$$

Para condições iniciais muito parecidas,  $(x(0), \dot{x}(0)) = (2, 3)$  e  $(2.01, 3.01)$ , o comportamento do sistema torna-se radicalmente diferente após alguns instantes de simulação:



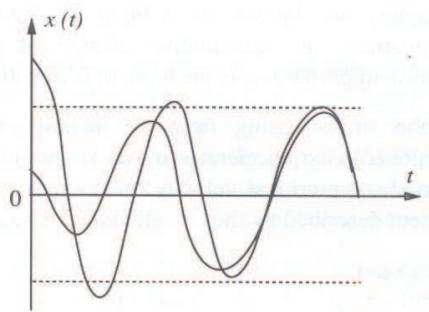
A predição do estado do sistema é muito sensível às condições iniciais!

- *Ciclos limite:* oscilações com amplitude e frequência fixas para entrada nula, e que se mantêm robustas a perturbações e independentes do estado inicial do sistema!

Seja a equação de Van der Pol, correspondente a um sistema massa-mola-amortecedor com amortecimento função da posição:

$$\ddot{x}(t) + 2(x(t)^2 - 1)\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

O sistema exibe uma oscilação permanente ou ciclo limite:



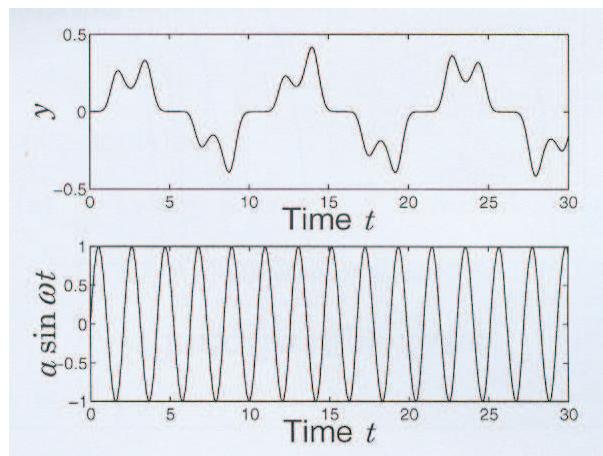
- Para  $x(t) > 1$ , o termo  $2(x(t)^2 - 1)\dot{x}(t)$  retira energia ao sistema  $\Rightarrow x(t)$  baixa.
- Para  $x(t) < -1$ , o termo  $2(x(t)^2 - 1)\dot{x}(t)$  fornece energia ao sistema  $\Rightarrow x(t)$  aumenta.

Este fenómeno nunca poderia acontecer num sistema linear! Porquê?

- *Oscilações não periódicas:* para uma excitação periódica o sistema poderá oscilar com uma frequência múltipla, ou submúltipla da frequência de entrada (harmónicas inferiores ou superiores)!

Considere a equação de Duffing (massa-mola não linear-amortecedor) com oscilação forçada:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) - y(t)^3 = a \sin(\omega t)$$

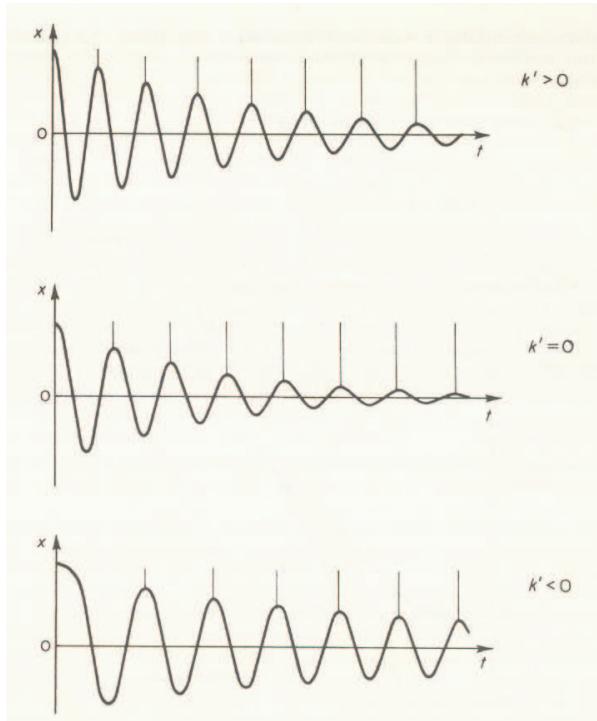


- *Múltiplos comportamentos:* singularidades e descontinuidades na solução originam fenómenos do tipo saltos de ressonância, bifurcações, comportamentos histeréticos, etc...

Considere a seguinte equação de Duffing (massa-mola não linear-amortecedor):

$$m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) + k'x(t)^3 = 0$$

O grau de não linearidade do sistema é caracterizado pela magnitude de  $k'$ : quando a amplitude decresce, a frequência de oscilação baixa ou sobe, consoante  $k' > 0$  ou  $k' < 0$ , respectivamente. Para  $k' = 0$  não se observa alteração da frequência de oscilação:



A simulação da equação para oscilações forçadas:

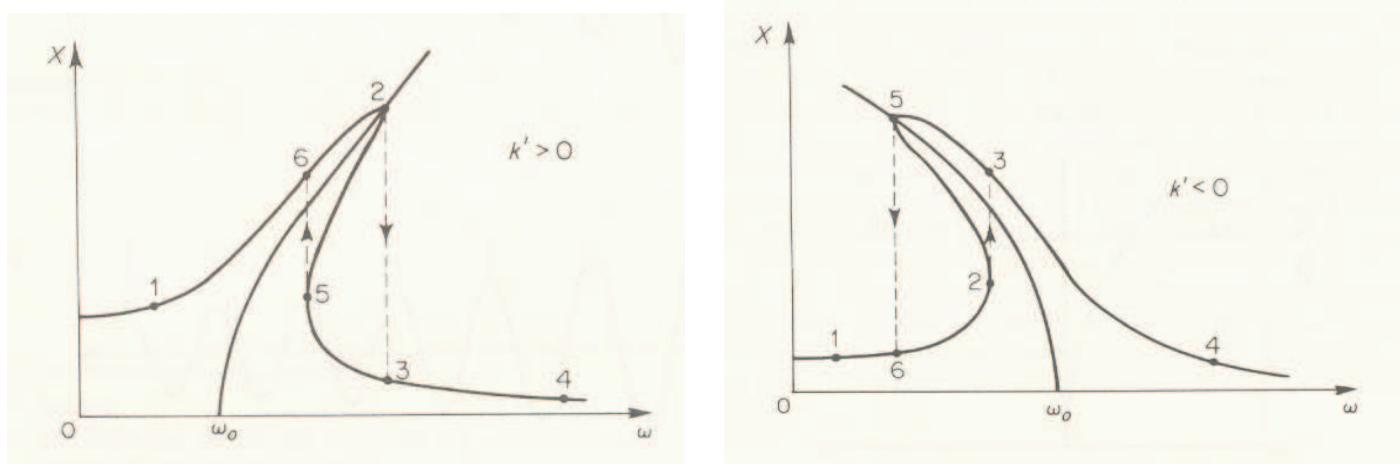
$$m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) + k'x(t)^3 = P \cos(\omega t)$$

origina:

- Respostas com múltiplos valores.
- Ressonâncias com saltos.
- Movimentos periódicos (oscilações sub-harmónicas e harmónicas superiores).

Experiência: estudar o efeito do parâmetro  $k'$  na seguinte situação:

- Manter amplitude da oscilação  $P$  constante.
- Variar lentamente a frequência da oscilação,  $\omega$ .
- Medir a amplitude da oscilação,  $X$ .



O fenómeno da *ressonância com saltos* é claramente visível!

Considere o modelo de Euler de uma viga encastrada:

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) - \mu x(t) + \lambda x(t) + x(t)^3 = 0$$

onde:

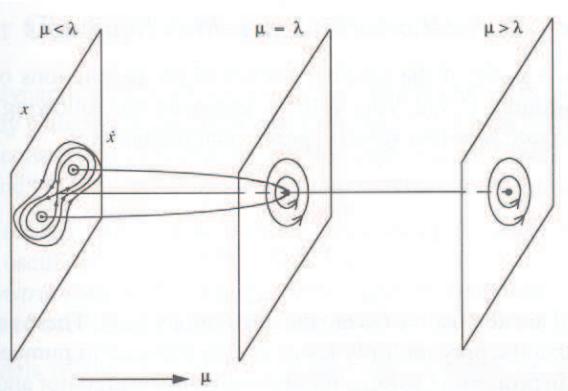
$x$  - deflecção da viga na direcção normal à direcção axial.

$\mu$  - força axial aplicada na extremidade da viga.

$\lambda x(t) + x(t)^3$  - força de recuperação (mola) da viga.

$d$  - amortecimento.

Consoante a intensidade da força axial aplicada,  $\mu$ , a viga oscila de maneira diferente quando puxada para um dos lados e depois largada (considerando  $d = 0$ ):

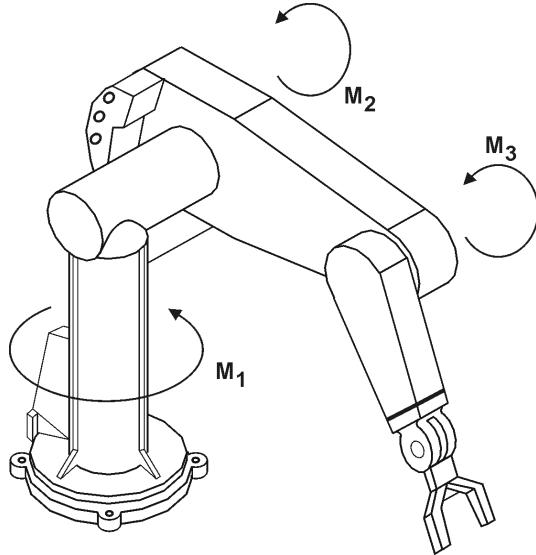


À transição do comportamento estrutural da viga dá-se o nome de *bifurcação*: alterações quantitativas nos parâmetros originam modificações qualitativas da resposta do sistema.

- *Comportamento caótico*: apesar da natureza determinística de um sistema, a sua resposta pode não ser caracterizada por nenhum estado de equilíbrio, oscilação periódica ou quasi-periódica, podendo mesmo apresentar características aleatórias!

**Conclusão:** em que situação se devem ter em conta as características não lineares dos sistemas?

- As não linearidades são inerentes aos sistemas físicos!
- Considerar a presença de não linearidades alarga a gama de operação dos sistemas (e.g., robôs).



$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) + K(\theta) = \tau$$

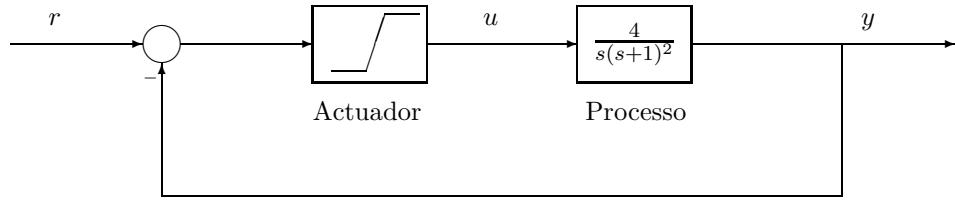
onde:

- $\theta$  - posições angulares das juntas  
 $M(\theta)\ddot{\theta}$  - matriz de inércia  
 $C(\theta, \dot{\theta})$  - forças de Coriolis, centrífugas  
 $K(\theta)$  - forças gravíticas  
 $\tau$  - binários aplicados nas juntas.

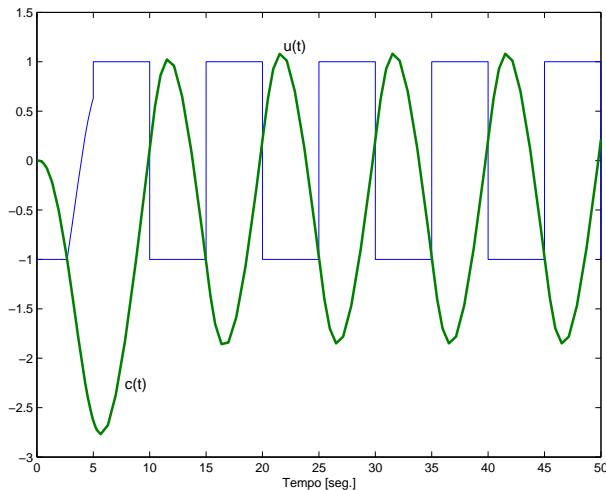
- Um bom controlo não linear é sempre melhor que um bom controlo linear!

## 2.2 Análise via método da função de descrição

**Exemplo motivador:** considere o seguinte sistema de controlo, onde o actuador contém uma saturação.

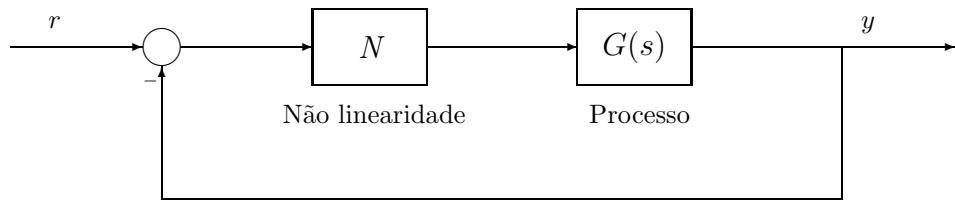


A saída do sistema apresenta uma oscilação estável:



**Pergunta:** será que poderíamos ter previsto esta oscilação, a sua frequência e a sua amplitude?

O *método da função de descrição* tem como objectivo a caracterização da oscilação permanente que se observa em certas situações num anel de controlo com a seguinte estrutura:



onde:

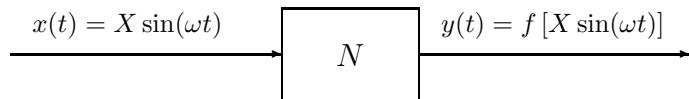
- $G(s)$  corresponde a um sistema LIT.
- $N$  corresponde a uma não linearidade.

### Ideia básica:

- Identificar o *tipo de não linearidade* presente no anel de controlo.
- Aproximar a não linearidade  $N$  pelo “equivalente linear”, i.e., a sua *função de descrição*.
- Usar técnicas no *domínio da frequência* para prever a oscilação da saída, e caracterizá-la em termos de amplitude e frequência.

### Hipóteses simplificativas:

1. Apenas um único elemento não linear.
2. O elemento não linear é invariante no tempo (não linearidade estática).
3. A não linearidade é ímpar.
4. A entrada da não linearidade é sinusoidal, de amplitude  $X$  e frequência  $\omega$ .



Através do desenvolvimento em série de Fourier, é possível admitir que a saída do bloco não linear é dada por:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \quad \begin{cases} n = 1 & , \text{ componente fundamental} \\ n > 1 & , \text{ harmónicas superiores} \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) d(\omega t) \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(n\omega t) d(\omega t) \\ Y_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n &= \arctan \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \end{aligned}$$

Desenvolvimento da solução:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

a partir das hipóteses simplificativas:

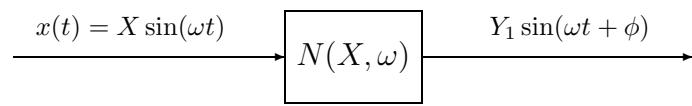
- $N$  é ímpar, logo como  $x(t)$  também é ímpar, resulta:

$$y(t) \text{ é ímpar} \Rightarrow a_0 = 0$$

- As harmónicas superiores são filtradas pelo processo (única forma de garantir 4.)

onde:

$$y(t) \simeq a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = Y_1 \sin(\omega t + \phi), \quad \begin{cases} Y_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \end{cases}$$



ou seja, a não linearidade passa a ser “vista” como um elemento linear, representado pela sua **função de descrição**:

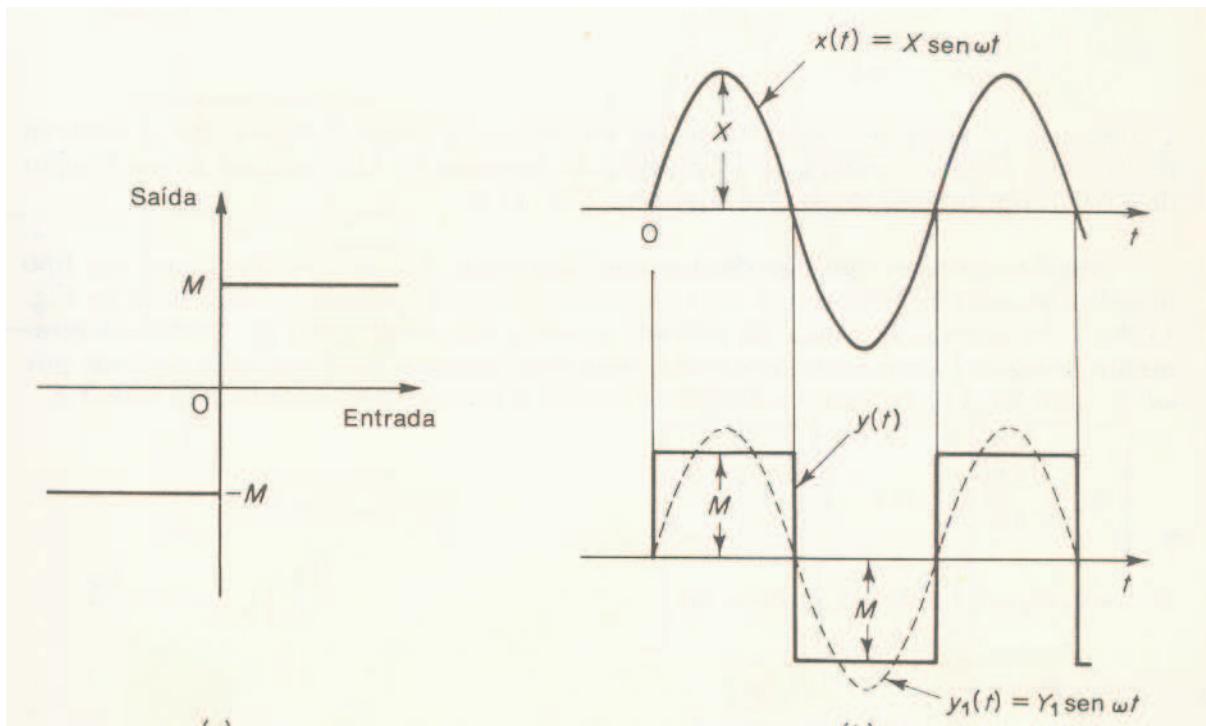
$$N(X, \omega) = \frac{Y_1 e^{j(\omega t + \phi)}}{X e^{j\omega t}} = \frac{b_1 + j a_1}{X}, \quad \begin{cases} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(\omega t) d(\omega t) \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t) \end{cases}$$

**Nota1:** se a não linearidade não tiver memória e for invariante no tempo, então  $N(X, \omega)$  é independente de  $\omega$ , ficando apenas descrita por  $N(X)$ .

**Nota2:** o termo  $a_1 \neq 0$  verifica-se exclusivamente para não linearidades com múltiplos valores, e.g., histerese ou *backlash*, caso contrário  $a_1 = 0$  donde  $N(X)$  toma apenas valores reais.

**Pergunta:** como saber qual a expressão matemática de  $N(X)$  para uma dada não linearidade?

**Exemplo:** determinar a função de descrição  $N(X)$  da não linearidade ON-OFF.



De acordo com a expressão geral:

$$N(X) = \frac{Y_1 e^{j(\omega t + \phi)}}{X e^{j\omega t}} = \frac{b_1 + j a_1}{X}$$

Desenvolvendo  $a_1$  e  $b_1$ :

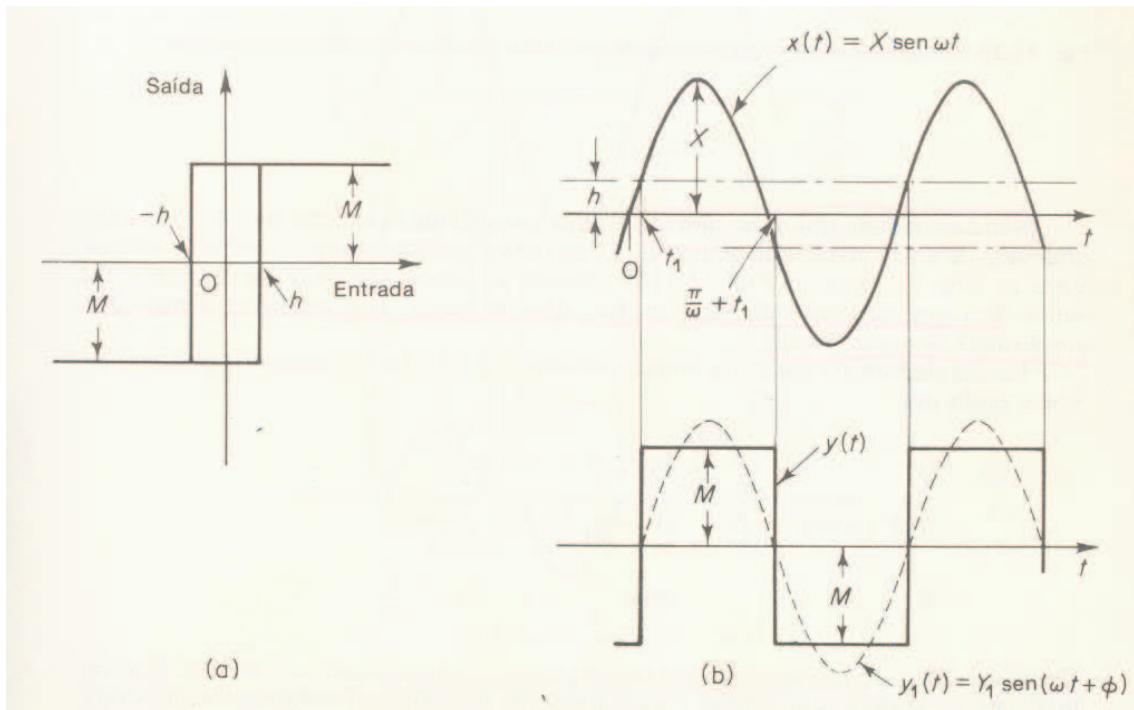
$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi M \cos(\omega t) d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} -M \cos(\omega t) d(\omega t) \right] = 0 \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \left[ \underbrace{\int_0^\pi M \sin(\omega t) d(\omega t)}_{2M} + \underbrace{\int_\pi^{2\pi} -M \sin(\omega t) d(\omega t)}_{2M} \right] = \frac{4M}{\pi} \end{aligned}$$

onde:

$$N(X) = \frac{\frac{4M}{\pi} + j0}{X} = \frac{4M}{\pi X}$$

com saída:  $y_1(t) = b_1 \sin(\omega t) = \frac{4M}{\pi} \sin(\omega t)$ .

**Exemplo:** determinar a função de descrição  $N(X)$  da não linearidade HISTERESE.



De acordo com a expressão geral:

$$N(X) = \frac{Y_1 e^{j(\omega t + \phi)}}{X e^{j\omega t}} = \frac{b_1 + j a_1}{X}$$

Desenvolvendo  $a_1$  e  $b_1$ :

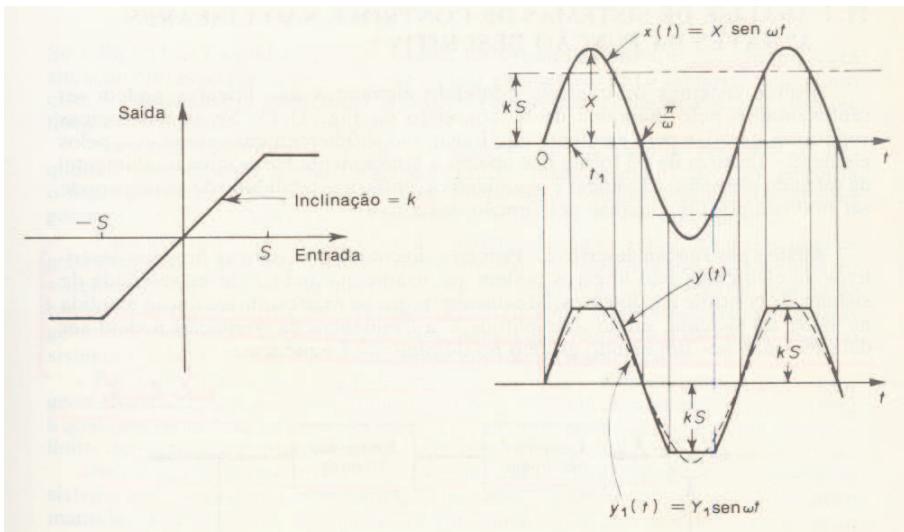
$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(\omega t) d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y(t) \cos(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^\alpha y(t) \cos(\omega t) d(\omega t) + \int_\alpha^\pi y(t) \cos(\omega t) d(\omega t) \right], \quad \text{para: } h = X \sin(\omega t_1) = X \sin(\alpha) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha -M \cos(\omega t) d(\omega t) + \frac{2}{\pi} \int_\alpha^\pi M \cos(\omega t) d(\omega t) = -\frac{2M}{\pi} \sin(\alpha) - \frac{2M}{\pi} \sin(\alpha) = -\frac{4M}{\pi} \sin(\alpha) \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha -M \sin(\omega t) d(\omega t) + \frac{2}{\pi} \int_\alpha^\pi M \sin(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{2M}{\pi} [\cos(\alpha) - 1] + \frac{2M}{\pi} [1 + \cos(\alpha)] = \frac{4M}{\pi} \cos(\alpha) \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} N(X) &= \frac{\frac{4M}{\pi} \cos(\alpha) - j \frac{4M}{\pi} \sin(\alpha)}{X} = \frac{4M}{\pi X} (\cos(\alpha) - j \sin(\alpha)) = \frac{4M}{\pi X} e^{j \arctan(-\tan(\alpha))} \\ N(X) &= \frac{4M}{\pi X} e^{-j\alpha} = \frac{4M}{\pi X} e^{-j \arcsin(\frac{h}{X})}, \quad \text{pois: } h = X \sin(\omega t_1) = X \sin(\alpha) \end{aligned}$$

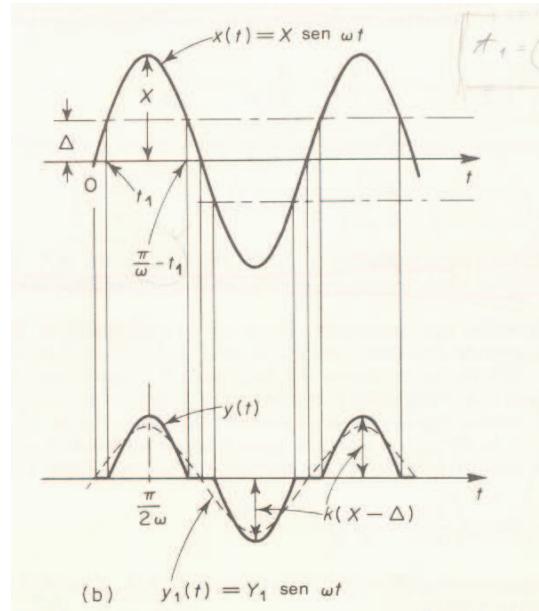
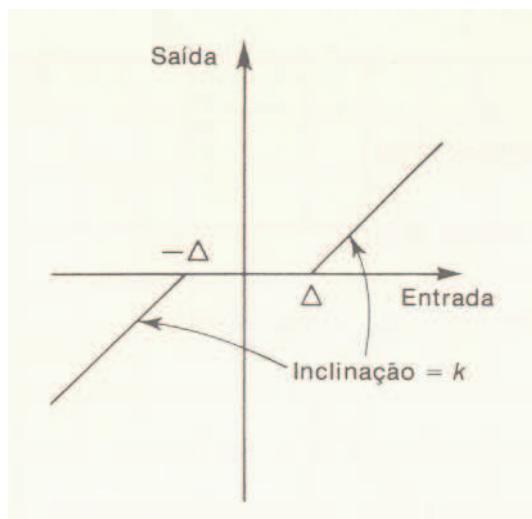
### 2.2.1 Funções de descrição de não linearidades típicas

#### SATURAÇÃO



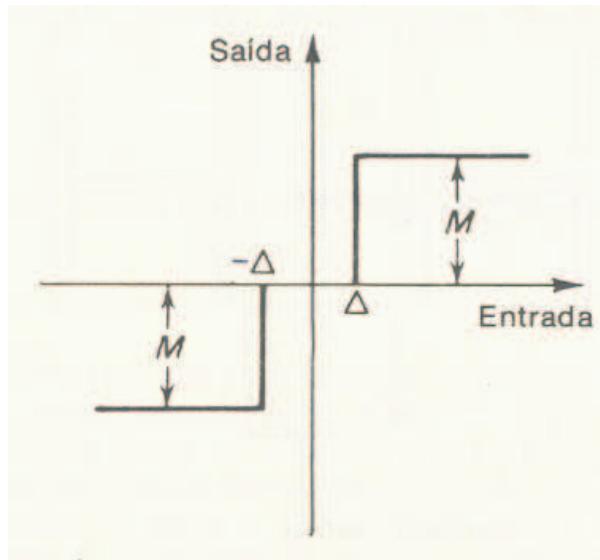
$$N(X) = \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{S}{X}\right) + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X}\right)^2} \right]$$

#### ZONA MORTA



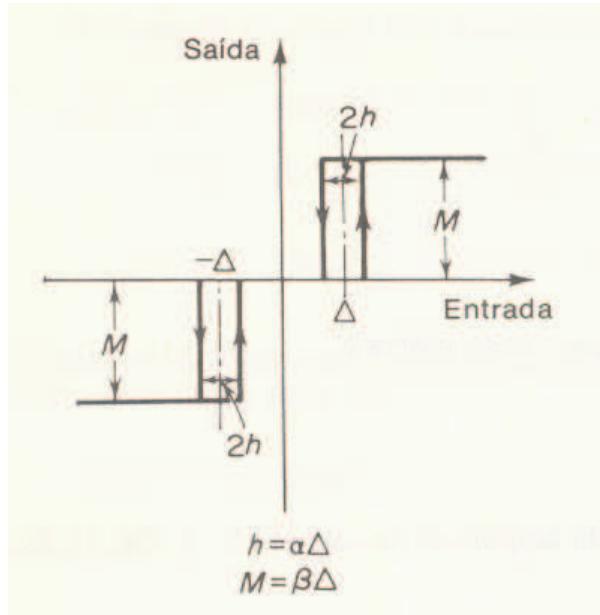
$$N(X) = k - \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{\Delta}{X}\right) + \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} \right] = k - N(X)_{\text{saturação}}$$

## SATURAÇÃO COM ZONA MORTA



$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

## HISTERESE COM ZONA MORTA

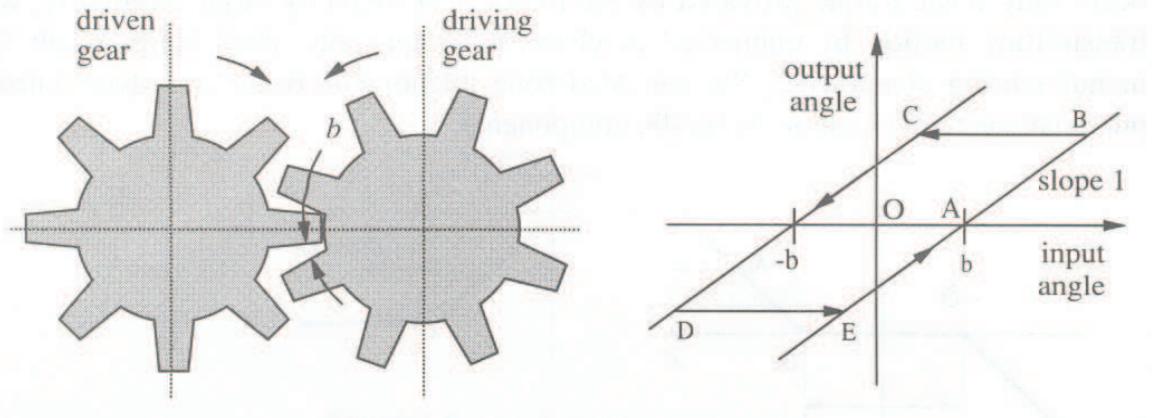


$$N(X) = \frac{4M \sin(\alpha)}{\pi X} e^{-j\phi}, \quad \text{com: } \begin{cases} \alpha &= 0.5 \left( \pi - \arcsin\left(\frac{c}{X}\right) - \arcsin\left(\frac{b}{X}\right) \right) \\ \phi &= \alpha + \arcsin\left(\frac{c}{X}\right) - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

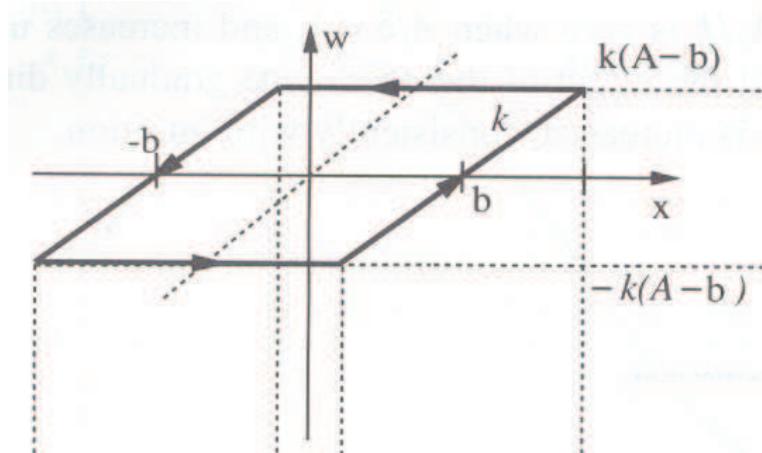
onde:  $b = \Delta - h$ , e  $c = \Delta + h$ .

## BACKLASH

Fenômeno típico observado em sistemas de engrenagens, devido às folgas existentes no acoplamento dos dentes:

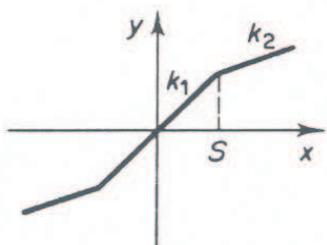


A função de descrição é dada por:



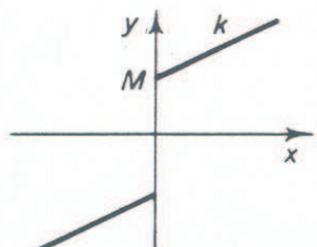
$$N(X) = \frac{b_1 + ja_1}{X}, \quad \text{com: } \begin{cases} a_1 = \frac{4kb}{\pi} \left( \frac{b}{X} - 1 \right) \\ b_1 = \frac{\pi k}{X} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2b}{X} - 1\right) - \left(\frac{2b}{X} - 1\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2b}{X} - 1\right)^2} \right] \end{cases}$$

## Outras não-linearidades ...

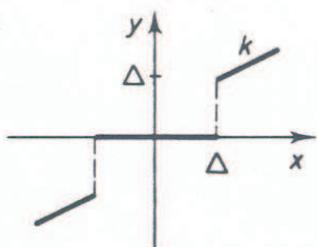


$$N = k_2 + \frac{2(k_1 - k_2)}{\pi} \left( \operatorname{sen}^{-1} \frac{S}{X} \right) + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \frac{S^2}{X^2}}$$

$(X \geq S)$



$$N = k + \frac{4M}{\pi X}$$

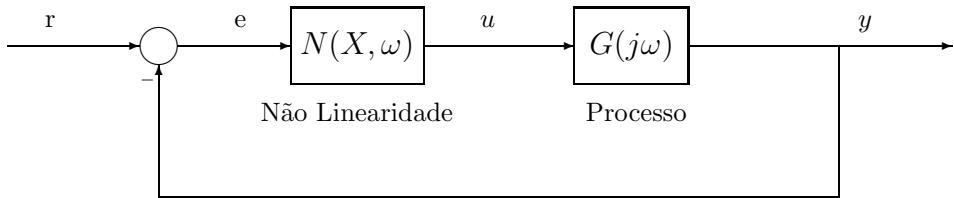


$$N = k - \frac{2k}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} \frac{\Delta}{X} + \frac{(4-2k)\Delta}{\pi X} \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{X^2}}$$

$(X \geq \Delta)$

### 2.2.2 Análise da existência de oscilações forçadas

**Questão inicial:** como saber se existirá, ou não, uma oscilação forçada no anel de controlo, quando a não linearidade é descrita pela sua função de descrição?



*Oscilação forçada (ou ciclo limite):* oscilação permanente na saída do anel de controlo, de amplitude e frequência fixas, observada mesmo que o sistema não esteja a ser excitado externamente.

- Existirá uma oscilação forçada em regime estacionário se  $y \neq 0$  para  $r = 0$ . Nestas condições:

$$\begin{aligned} y &= N(X, \omega)G(j\omega)e \\ y &= N(X, \omega)G(j\omega)(-y) \\ y + N(X, \omega)G(j\omega)y &= 0 \\ y(1 + N(X, \omega)G(j\omega)) &= 0 \end{aligned}$$

- Como, por hipótese,  $y \neq 0$ , para que exista uma oscilação forçada é necessário que:

$$1 + N(X, \omega)G(j\omega) = 0$$

ou seja, haverá oscilação forçada se a equação característica do anel fechado tiver solução!

- Interpretação gráfica:* haverá oscilação forçada se:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(X, \omega)}$$

ou seja, caso haja intersecção entre as curvas  $G(j\omega)$  e  $-1/N(X, \omega)$ .

**Conclusão:** a existência, ou não, de uma oscilação forçada (ou ciclo limite) num anel de controlo pode ser facilmente prevista através de uma *análise gráfica*, procurando a intersecção do gráfico polar de  $G(j\omega)$  com o gráfico de  $-1/N(X, \omega)$ .

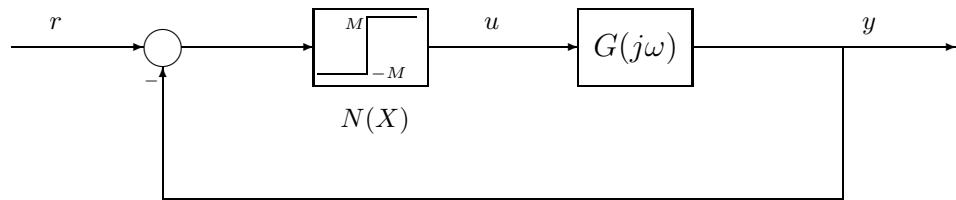
### 2.2.3 Caracterização das oscilações forçadas

Uma oscilação forçada (ou ciclo limite) é caracterizada por:

- Amplitude de oscilação.
- Frequência de oscilação.
- Estabilidade da oscilação.

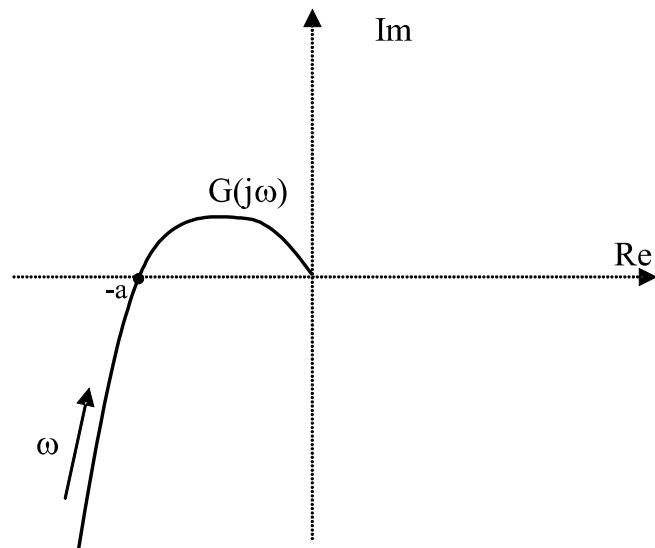
#### Determinação da amplitude e frequência de um ciclo limite

**Exemplo 1:** considerar um sistema de controlo com não linearidade ON-OFF:



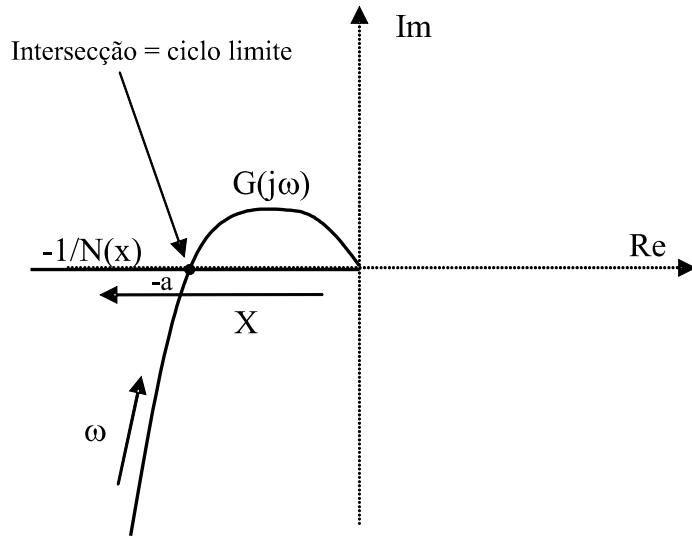
onde:

- $N(X) = \frac{4M}{\pi X}$ , sendo  $X$  a amplitude da sinusóide de entrada do elemento não linear.
- $G(j\omega)$  possui o seguinte gráfico polar:



ou seja, o gráfico polar cruza o eixo real negativo em  $-a$ .

Marcando no mesmo gráfico os pontos de  $-1/N(X)$ , para  $X \in ]0, +\infty[$ , resulta:

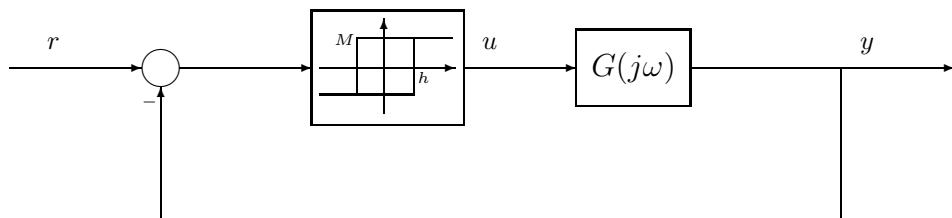


A amplitude ( $X_{cl}$ ) e frequência ( $\omega_{cl}$ ) do ciclo limite são determinados a partir de:

$$X_{cl} : -\frac{1}{N(X)} = -a \Leftrightarrow -\frac{\pi X}{4M} = -a \Leftrightarrow X_{cl} = \frac{4Ma}{\pi}$$

$\omega_{cl}$  : frequência de  $G(j\omega)$  lida sobre  $-1/N(X)$ , neste caso:  $\omega_{cl} = \omega_{cf}$  (freq. cruzamento fase)

**Exemplo 2:** considerar um sistema de controlo com não linearidade HISTERESE:



onde:

- $N(X) = \frac{4M}{\pi X} e^{-j \arcsin(\frac{h}{X})}$ .
- $G(j\omega)$  com gráfico polar idêntico ao do exemplo anterior.

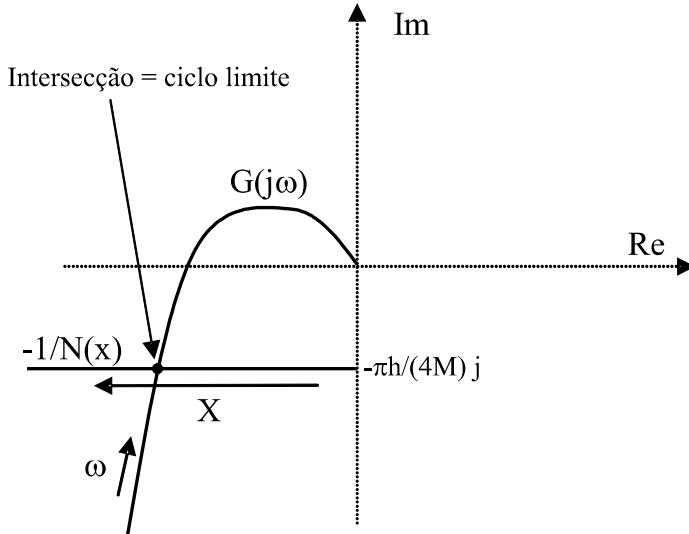
Desenvolvendo o termo  $-1/N(X)$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N(X)} &= -\frac{\pi X}{4M} e^{j \arcsin(\frac{h}{X})} = -\frac{\pi X}{4M} \left[ \cos \left( \arcsin \left( \frac{h}{X} \right) \right) + j \sin \left( \arcsin \left( \frac{h}{X} \right) \right) \right] \\ &= -\frac{\pi X}{4M} \left[ \cos \left( \arcsin \left( \frac{h}{X} \right) \right) + j \frac{h}{X} \right] \\ &= -\frac{\pi X}{4M} \cos \left( \arcsin \left( \frac{h}{X} \right) \right) - j \frac{\pi h}{4M} \end{aligned}$$

onde os limites são:

$$\begin{cases} \lim_{X \rightarrow h^+} -\frac{1}{N(X)} &= -j \frac{\pi h}{4M} \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{N(X)} &= -\infty - j \frac{\pi h}{4M} \end{cases}$$

Resultando:



A amplitude ( $X_{cl}$ ) e frequência ( $\omega_{cl}$ ) do ciclo limite são determinados a partir de:

$X_{cl}$  : valor da amplitude  $X$  medida sobre o gráfico de  $-\frac{1}{N(X)}$  no ponto de intersecção.

$\omega_{cl}$  : valor da frequência  $\omega$  medida sobre o gráfico de  $G(j\omega)$  no ponto de intersecção.

### Determinação da estabilidade de um ciclo limite

**Pergunta:** caso exista, como determinar a estabilidade de um ciclo limite?

**Ciclo limite estável:** para uma pequena variação da amplitude de oscilação do ciclo limite, a amplitude original é recuperada após terminar o regime transitório.

**Ciclo limite instável:** para uma pequena variação da amplitude de oscilação do ciclo limite, a amplitude original não mais é recuperada.

Vimos atrás que a existência de ciclo limite é garantida se a equação característica do anel fechado tiver solução:

$$\begin{aligned} 1 + N(X, \omega)G(j\omega) &= 0 \\ G(j\omega) &= -\frac{1}{N(X, \omega)} \end{aligned}$$

**Ideia básica:** concluir quanto à estabilidade do ciclo limite aplicando o **teorema da estabilidade de Nyquist**, admitindo que:

- O ponto crítico de estabilidade deixa de ser um ponto apenas, e passa a ser o conjunto de pontos no plano complexo definido por:

$$-\frac{1}{N(X, \omega)}$$

com  $X$  a variar entre os seus limites inferior e superior.

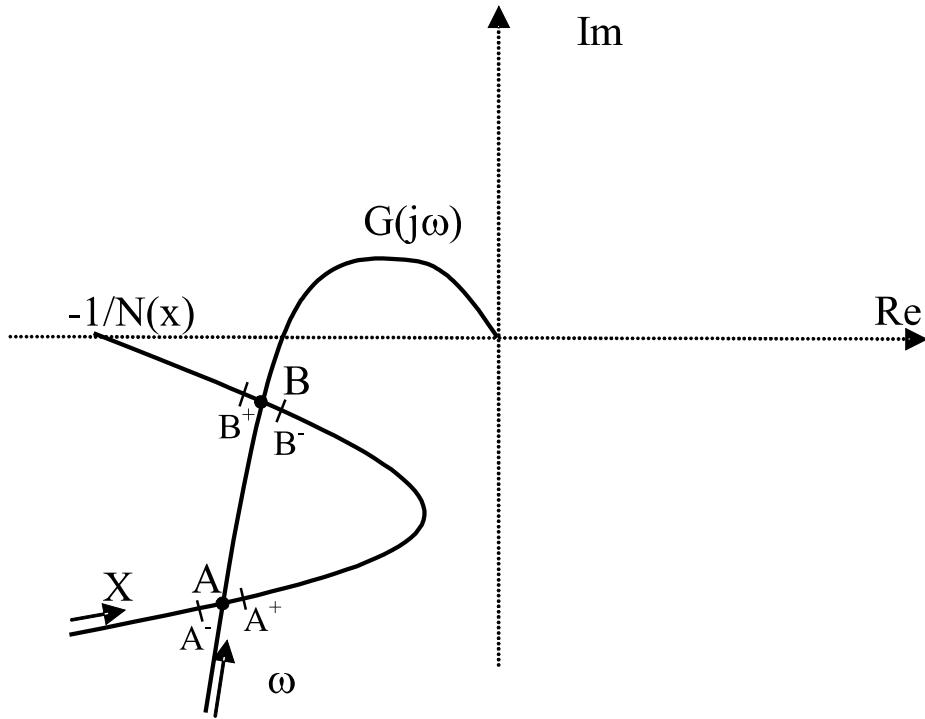
- Para uma sistema estável em anel aberto, o ciclo limite será estável sse não existirem envolvimentos de  $G(j\omega)$  dos pontos críticos de estabilidade  $-1/N(X, \omega)$ .

### Atenção:

*Não confundir estabilidade do ciclo limite com a estabilidade do anel fechado!*

*Um ciclo limite pode ser instável, e o anel fechado estável!*

**Exemplo:** considere a seguinte representação no plano complexo de  $G(j\omega)$  e de  $-1/N(X)$ :



Observam-se 2 ciclos limites:  $A$  e  $B$ .

**Estabilidade do ciclo limite A:** supondo que o sistema se encontra a oscilar no ciclo limite  $A$  e sofre uma perturbação na sua amplitude:

- Caso a amplitude da oscilação baixe ligeiramente, passamos para o ponto  $A^-$ :
  - Como o diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  não envolve o ponto  $A^-$ , o sistema em anel fechado é estável e portanto a amplitude de oscilação diminuirá.
  - Como o sentido da diminuição da amplitude  $X$  em  $A^-$  faz com que este ponto se afaste de  $A$ , o sistema não regressa ao ponto  $A$ , logo não recupera a oscilação original.
- Caso a amplitude da oscilação suba ligeiramente, passamos para o ponto  $A^+$ :
  - Como o diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  envolve o ponto  $A^+$ , o sistema em anel fechado é instável e portanto a amplitude de oscilação aumentará.
  - Como o sentido do aumento da amplitude  $X$  em  $A^+$  faz com que este ponto se afaste de  $A$ , o sistema não regressa ao ponto  $A$ , logo não recupera a oscilação original.

**Conclusão:** o ciclo limite em  $A$  é instável.

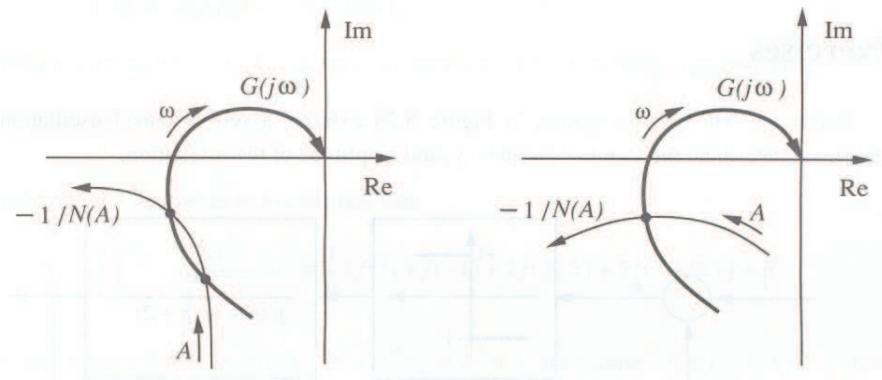
**Pergunta:** e em  $B$ ?

### Vantagens da análise por função de descrição:

- Extensão da análise em frequência de sistemas lineares.
- Lida com sistemas de qualquer ordem.
- Tira conclusões imediatas sobre a estabilidade do ciclo limite.
- Lida facilmente com não linearidades duras.

### Desvantagens da análise por função de descrição:

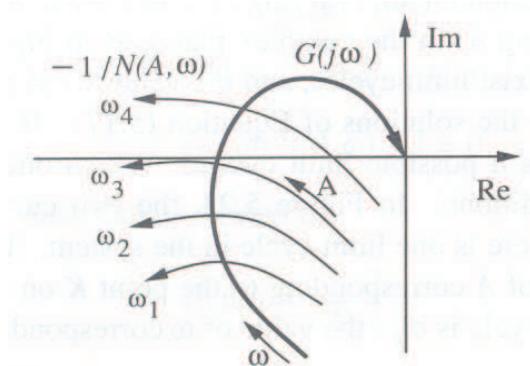
- Envolve uma aproximação.
- Difícil de lidar com múltiplas não linearidades.
- Em certas situações pode ser pouco fiel na previsão dos ciclos limite, não só em termos da sua existência ou não, mas também na estimativa da sua amplitude e frequência.



Previsão de c.l. errónea

Previsão de c.l. fiável

- Caso a função de descrição seja dependente da frequência,  $N(X, \omega)$ , a aplicação do método torna-se bastante mais complexa: será necessário avaliar uma família de curvas para diferentes valores de  $\omega$ !



## 2.3 Análise por plano de fase

Conceito introduzido por Jules Henry Poincaré (1854-1912), no seu trabalho sobre o estudo das órbitas planetárias, “*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*” publicado em 1892.

**Ideia básica:** resolver graficamente uma equação diferencial, através da visualização da evolução da sua solução para diferentes condições iniciais.

### Vantagens

- Interpretação gráfica da solução de equações diferenciais, e.g. as equações de estado de um sistema dinâmico.
- Aplicado a não linearidades duras.

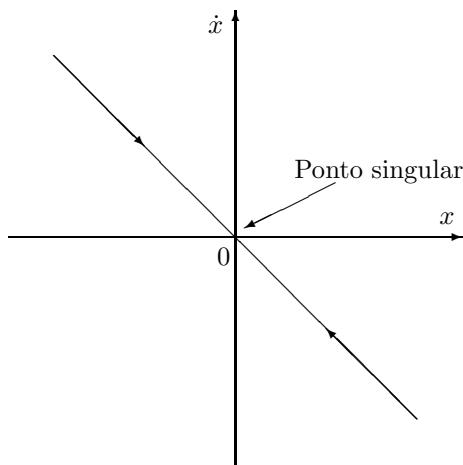
### Desvantagens

- Aplicável apenas a sistemas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordem ou, nos casos de ordem superior, desde que aproximáveis por dinâmicas de 2<sup>a</sup> ordem.

**Exemplo:** seja a seguinte equação diferencial linear de 1<sup>a</sup> ordem.

$$\begin{aligned}\dot{x} + x &= 0 \\ \dot{x} &= -x\end{aligned}$$

A representação gráfica desta última equação no plano,  $\dot{x} - x$ , resulta:



- O sistema tem um único ponto singular (ponto de equilíbrio):  $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- O sistema é sempre estável,  $\forall x(0)$ .

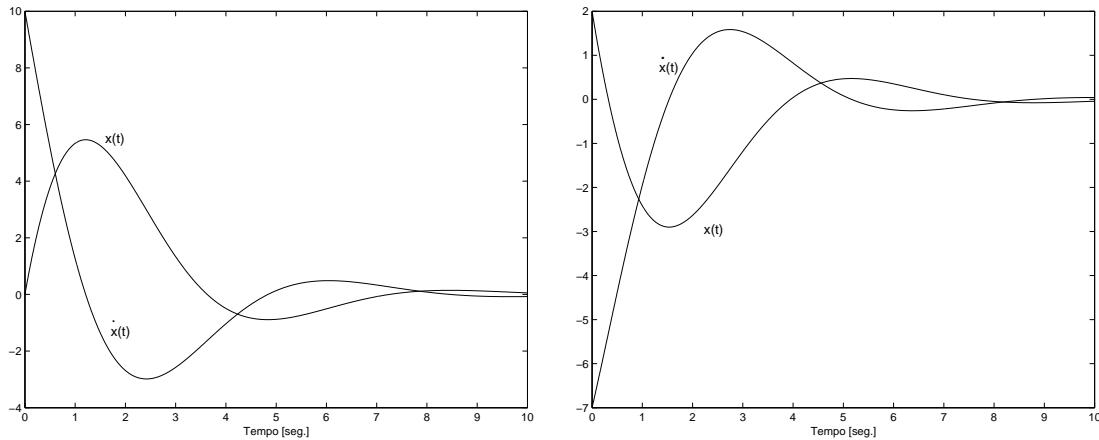
**Exemplo:** seja a seguinte equação diferencial linear de 2<sup>a</sup> ordem.

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

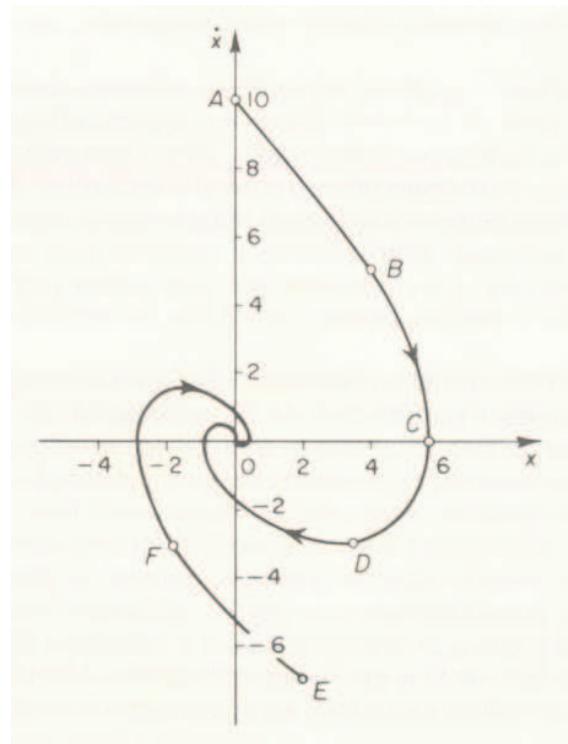
Considerando os estados iniciais:

- Caso 1:  $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 10)$
- Caso 2:  $(x_0, \dot{x}_0) = (2, -7)$

resultam as seguintes evoluções para os estados  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  do sistema:



A representação gráfica destas evoluções num único plano,  $\dot{x} - x$ , resulta:

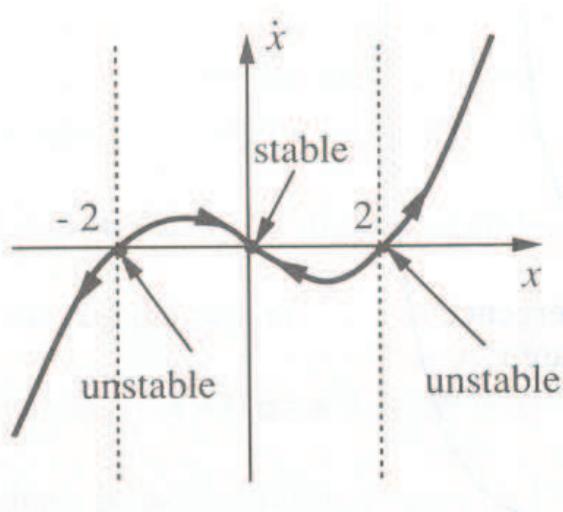


Trajectórias no plano de fase (ou plano de estados)  $\equiv$  Retrato de fase!

**Exemplo:** seja a seguinte equação diferencial não linear de 1<sup>a</sup> ordem.

$$\begin{aligned}\dot{x} + 4x - x^3 &= 0 \\ \dot{x} &= -4x + x^3\end{aligned}$$

A representação gráfica da equação no plano,  $\dot{x} - x$ , resulta na trajectória no plano de fase:



Os pontos singulares (ou de equilíbrio) são:

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow -4x + x^3 = 0 \Leftrightarrow x = \{-2, 0, 2\}$$

**Nota:**

- Quando a derivada de  $x$  é positiva,  $x$  aumenta.
- Quando a derivada de  $x$  é negativa,  $x$  diminui.
- Quando a derivada de  $x$  é nula, o seu valor mantém-se constante.

Os passos dados nos exemplos anteriores foram:

1. Determinou-se a solução da equação diferencial.
2. Simulou-se a evolução dos estados do sistema para uma condição inicial fixa.
3. Representou-se a evolução dos estados no plano  $x - \dot{x}$  (notação Matlab:  $plot(x, \dot{x})$ ).

**Questão:**

Como representar a evolução dos estados quando não se possui a solução analítica da equação diferencial?

### 2.3.1 Construção de trajectórias num plano de fase

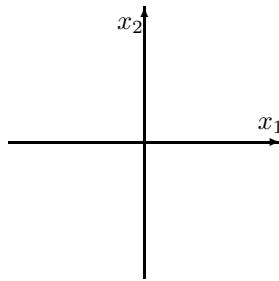
Quando não se tem a solução analítica da equação diferencial, ou não é útil considerá-la (e.g. nos sistemas lineares), recorre-se a um método que permite o traçado qualitativo das trajectórias no plano de fase, sem resolver explicitamente as equações de estado.

#### Método das isóclinas

Seja o sistema autónomo, com  $u(t)=0$ , de 2<sup>a</sup> ordem:

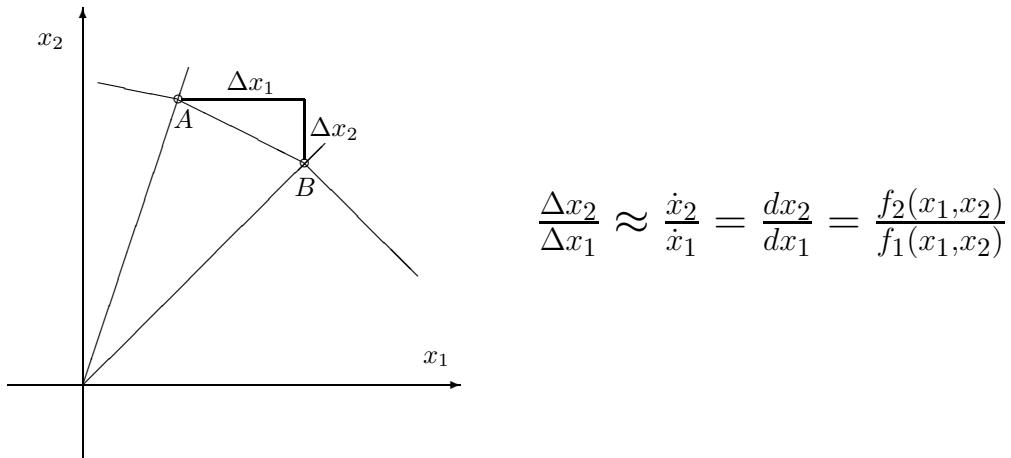
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Pretende-se representar a evolução de  $x_1$  e  $x_2$  ao longo do tempo, para diferentes condições iniciais, no plano cartesiano definido por:



Define-se **isóclina**: lugar geométrico de todos os pontos do plano de fase em que as trajectórias possuem a mesma inclinação,  $\alpha$ .

A **inclinação da tangente de uma trajectória** para um ponto genérico,  $(x_1, x_2)$ , é dada por:



Donde as **isóclinas** são definidas por  $\forall(x_1, x_2)$  tal que:  $\frac{dx_2}{dx_1} = \alpha$

### Regras para construção do plano de fase pelo método das isóclinas

- Determinar a expressão analítica genérica para a inclinação das tangentes:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \alpha$$

- Dar valores diferentes a  $\alpha \in ]-\infty, +\infty[$  e traçar as curvas isóclinas resultantes.
- Para cada isóclina, marcar pequenos segmentos de recta, paralelos entre si, indicando a inclinação da tangente da trajectória  $\alpha$  ao longo dessa isóclina.
- Escolher o estado inicial e traçar a trajectória do plano de fase, unindo os pequenos segmentos de recta entre si.

**Exemplo:** seja o seguinte sistema linear massa-mola:

$$\ddot{x} + x = 0$$

Considerando a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

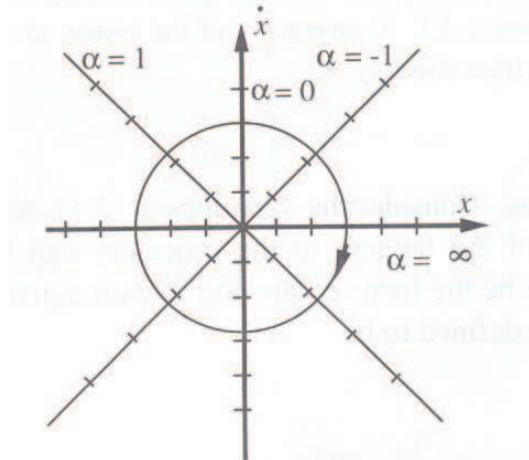
- Expressão analítica genérica para a inclinação das tangentes:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \frac{-x_1}{x_2}$$

- Curvas isóclinas (neste caso são rectas):

$$\frac{-x_1}{x_2} = \alpha \Leftrightarrow x_1 + \alpha x_2 = 0 \quad \begin{cases} \alpha = 0 & , \quad x_1 = 0 \\ \alpha = 1 & , \quad x_2 = -x_1 \\ \alpha = -1 & , \quad x_2 = x_1 \end{cases}$$

- Marcar cada isóclina com pequenos segmentos de recta (tangente  $\alpha$ ), escolher o estado inicial, e traçar a trajectória do plano de fase unindo os segmentos de recta entre si:



**Exemplo:** seja o seguinte sistema linear massa-mola-amortecedor:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

Considerando a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 \end{cases}$$

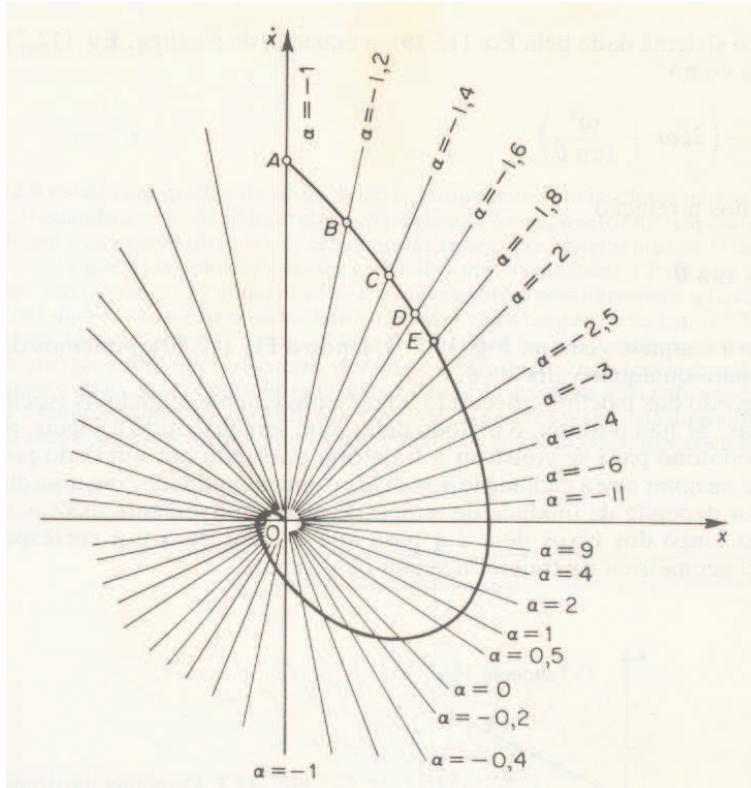
- Expressão analítica genérica para a inclinação das tangentes:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \frac{-x_2 - x_1}{x_2}$$

- Curvas isóclinas (neste caso são rectas):

$$\frac{-x_2 - x_1}{x_2} = \alpha \Leftrightarrow x_2(1 + \alpha) = -x_1 \quad \begin{cases} \alpha = 0 & , \quad x_2 = -x_1 \\ \alpha = 1 & , \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_1 \\ \alpha = -1 & , \quad x_1 = 0 \end{cases}$$

- Marcar cada isóclina com pequenos segmentos de recta (tangente  $\alpha$ ), escolher o estado inicial, e traçar a trajectória do plano de fase unindo os segmentos de recta entre si:



**Nota:** consegue-se uma boa precisão caso as isóclinas tenham intervalos entre  $5^\circ$  a  $10^\circ$ .

### Análise de simetria dos planos de fase

Seja o sistema autônomo de 2<sup>a</sup> ordem:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

Considerando a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f(x_1, x_2) \end{cases}$$

**Simetria em torno de  $x_1$ :**

$$\left[ \frac{dx_2}{dx_1} \right]_{x_2>0} = - \left[ \frac{dx_2}{dx_1} \right]_{x_2<0}$$

Desenvolvendo:

$$\left[ \frac{-f(x_1, x_2)}{x_2} \right]_{x_2>0} = - \left[ \frac{-f(x_1, x_2)}{x_2} \right]_{x_2<0} \Leftrightarrow \left[ \frac{-f(x_1, x_2)}{x_2} \right]_{x_2>0} = - \left[ \frac{f(x_1, -x_2)}{-x_2} \right]_{x_2>0}$$

logo, a simetria do plano de fase em relação a  $x_1$  verifica-se sempre que:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, -x_2)$$

**Simetria em torno de  $x_2$ :**

$$\left[ \frac{dx_2}{dx_1} \right]_{x_1>0} = - \left[ \frac{dx_2}{dx_1} \right]_{x_1<0}$$

Desenvolvendo:

$$\left[ \frac{-f(x_1, x_2)}{x_2} \right]_{x_1>0} = - \left[ \frac{-f(x_1, x_2)}{x_2} \right]_{x_1<0} \Leftrightarrow \left[ \frac{-f(x_1, x_2)}{x_2} \right]_{x_1>0} = - \left[ \frac{f(-x_1, x_2)}{x_2} \right]_{x_1>0}$$

logo, a simetria do plano de fase em relação a  $x_2$  verifica-se sempre que:

$$f(x_1, x_2) = -f(-x_1, x_2)$$

**Simetria em torno da origem:**

$$f(x_1, x_2) = -f(-x_1, -x_2)$$

**Exemplo:** seja o seguinte sistema linear por troços:

$$\ddot{x} + |\dot{x}| + x = 0$$

ou seja, a dinâmica do sistema depende do sinal de  $\dot{x}$ :

$$\text{Caso } \dot{x} > 0: \quad \ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

$$\text{Caso } \dot{x} < 0: \quad \ddot{x} - \dot{x} + x = 0$$

- Considerando a mudança de variáveis habitual,  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$ , temos as seguintes expressões analíticas para as isóclinas:

$$\text{Caso } \dot{x} > 0: \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 \end{cases}, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 - x_1}{x_2} = \alpha \Leftrightarrow x_2(1 + \alpha) = -x_1$$

$$\text{Caso } \dot{x} < 0: \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1 \end{cases}, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2} = \alpha \Leftrightarrow x_2(-1 + \alpha) = -x_1$$

- Para diferentes valores de  $\alpha$ :

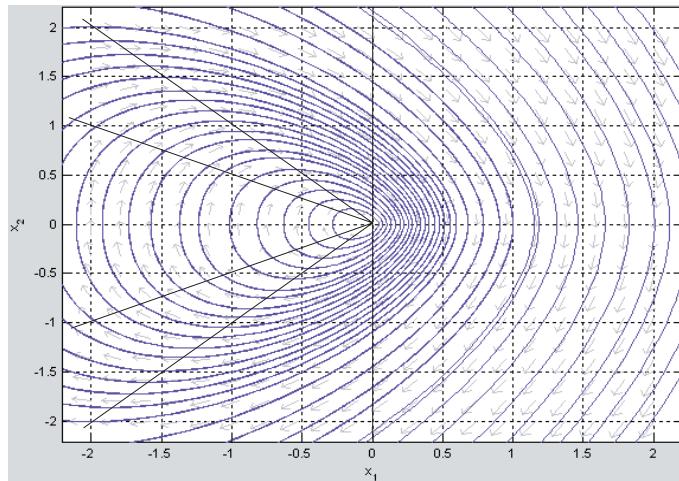
$$\text{Caso } \dot{x} > 0: \quad x_2(1 + \alpha) = -x_1 \quad \begin{cases} \alpha = 0, \quad x_2 = -x_1 \\ \alpha = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_1 \\ \alpha = -1, \quad x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Caso } \dot{x} < 0: \quad x_2(-1 + \alpha) = -x_1 \quad \begin{cases} \alpha = 0, \quad x_2 = x_1 \\ \alpha = 1, \quad x_1 = 0 \\ \alpha = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}x_1 \end{cases}$$

- Simetria do plano de fase:

$$f(x_1, x_2) = |x_2| + x_1 = f(x_1, -x_2)$$

Donde, **há simetria** das trajectórias no plano de fase em torno de  $x_1$ .



**Nota:** Sistema exibe movimento periódico: para  $\dot{x} > 0$  o sistema dissipava energia (meio ciclo de estabilização), para  $\dot{x} < 0$  o sistema fornecia energia (meio ciclo de instabilização).

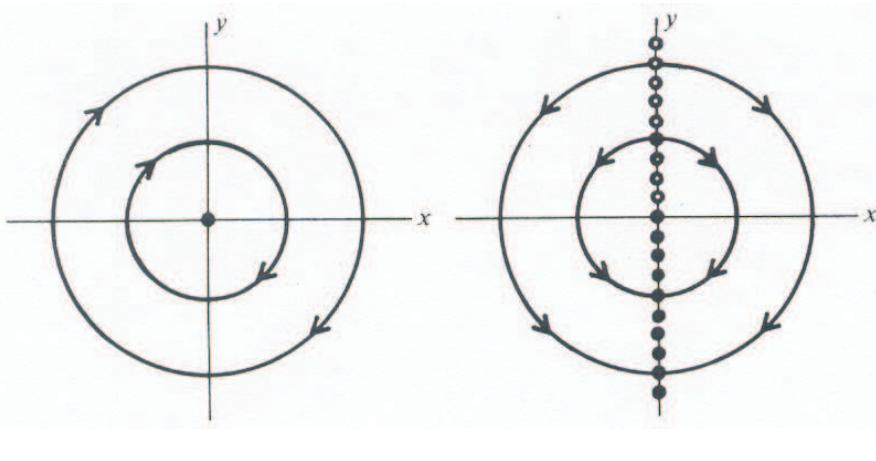
**Exemplo:** comparar o plano de fase resultante dos seguintes sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{Sistema I : } & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} & \text{Sistema II : } & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 \end{cases} \end{array}$$

- Determinação das isóclinas:

$$\text{Sistema I : } \frac{-x_1}{x_2} = \alpha \quad , \quad \text{Sistema II : } \frac{-x_1^2}{x_1 x_2} = \frac{-x_1}{x_2} = \alpha$$

- Embora com isóclinas iguais, as trajectórias no plano de fase são diferentes:



O sinal da derivada de  $x_1$  e  $x_2$  é diferente para cada sistema, consoante o quadrante:

**1º quadrante:** Neste caso,  $x_1 > 0$  e  $x_2 > 0$ , donde:

$$\text{Sistema I : } \begin{cases} \dot{x}_1 > 0 \\ \dot{x}_2 < 0 \end{cases}, \quad \text{Sistema II : } \begin{cases} \dot{x}_1 > 0 \\ \dot{x}_2 < 0 \end{cases}$$

**2º quadrante:** Neste caso,  $x_1 < 0$  e  $x_2 > 0$ , donde:

$$\text{Sistema I : } \begin{cases} \dot{x}_1 > 0 \\ \dot{x}_2 > 0 \end{cases}, \quad \text{Sistema II : } \begin{cases} \dot{x}_1 < 0 \\ \dot{x}_2 < 0 \end{cases}$$

**3º quadrante:** Neste caso,  $x_1 < 0$  e  $x_2 < 0$ , donde:

$$\text{Sistema I : } \begin{cases} \dot{x}_1 < 0 \\ \dot{x}_2 > 0 \end{cases}, \quad \text{Sistema II : } \begin{cases} \dot{x}_1 > 0 \\ \dot{x}_2 < 0 \end{cases}$$

**4º quadrante:** Neste caso,  $x_1 > 0$  e  $x_2 < 0$ , donde:

$$\text{Sistema I : } \begin{cases} \dot{x}_1 < 0 \\ \dot{x}_2 < 0 \end{cases}, \quad \text{Sistema II : } \begin{cases} \dot{x}_1 < 0 \\ \dot{x}_2 < 0 \end{cases}$$

**Exemplo:** oscilador de Van der Pol (sistema massa-mola-amortecedor, com coeficiente de dissipação dependente da posição, ou circuito RLC com resistência não linear):

$$\ddot{x} + 0.2(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

- Considerando a mudança de variáveis habitual:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{cases}$$

- Simetria do plano de fase em torno de:

$$x_1 : f(x_1, x_2) = 0.2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1 \neq f(x_1, -x_2) = -0.2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1$$

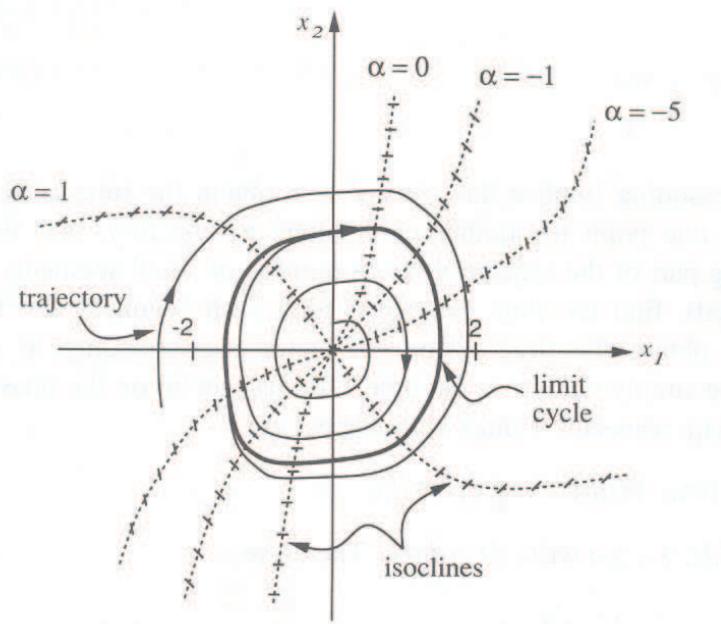
$$x_2 : f(x_1, x_2) = 0.2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1 \neq -f(-x_1, x_2) = -0.2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1$$

$$\text{Origem: } f(x_1, x_2) = 0.2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1 = -f(-x_1, -x_2) = 0.2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1$$

Donde, **há simetria** das trajectórias no plano de fase **em torno da origem**.

- A expressão das isóclinas para diferentes valores de  $\alpha$ :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-0.2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1}{x_2} = \alpha \Leftrightarrow 0.2(x_1^2 - 1)x_2 + x_1 + \alpha x_2 = 0$$



**Nota:** sabe-se que o sistema exibe um ciclo limite. No entanto, a sua detecção via método das isóclinas não é suficientemente esclarecedora! Veremos mais à frente como detectar ciclos limite no plano de fase...

### Informação temporal a partir de uma trajectória no plano de fase

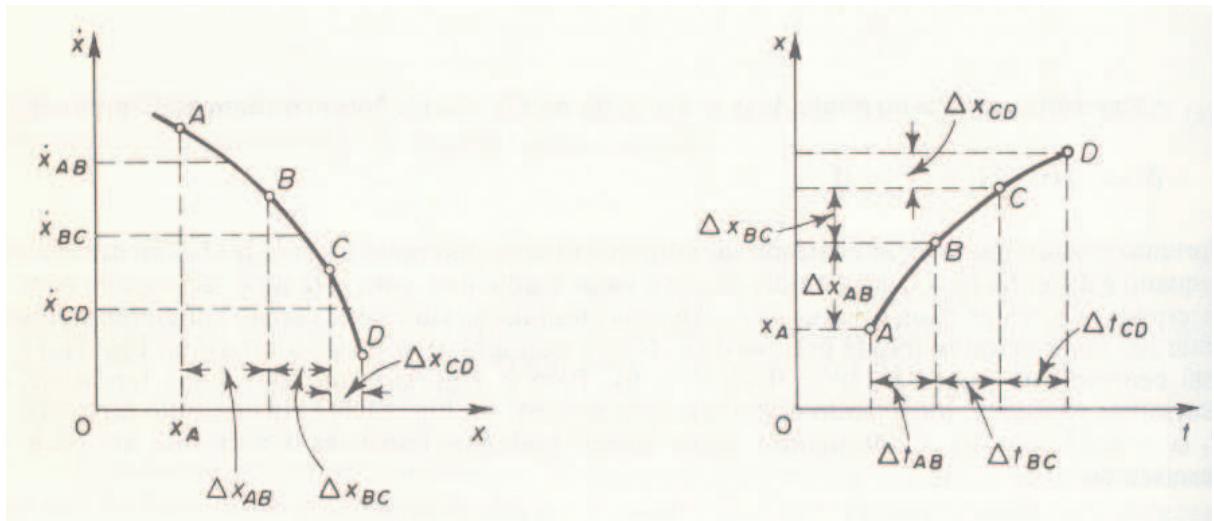
**Questão:** quanto tempo demora o sistema a evoluir entre 2 pontos distintos do plano de fase?

1. Usar a aproximação:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\dot{x}}$$

Donde, será válido considerar graficamente:

$$\Delta t_{\overline{AB}} \approx \frac{\Delta x_{\overline{AB}}}{\dot{x}_{\text{médio}}}$$



ou seja:  $t_{\overline{AD}} = \Delta t_{\overline{AB}} + \Delta t_{\overline{BC}} + \Delta t_{\overline{CD}}$

2. Usar a aproximação:

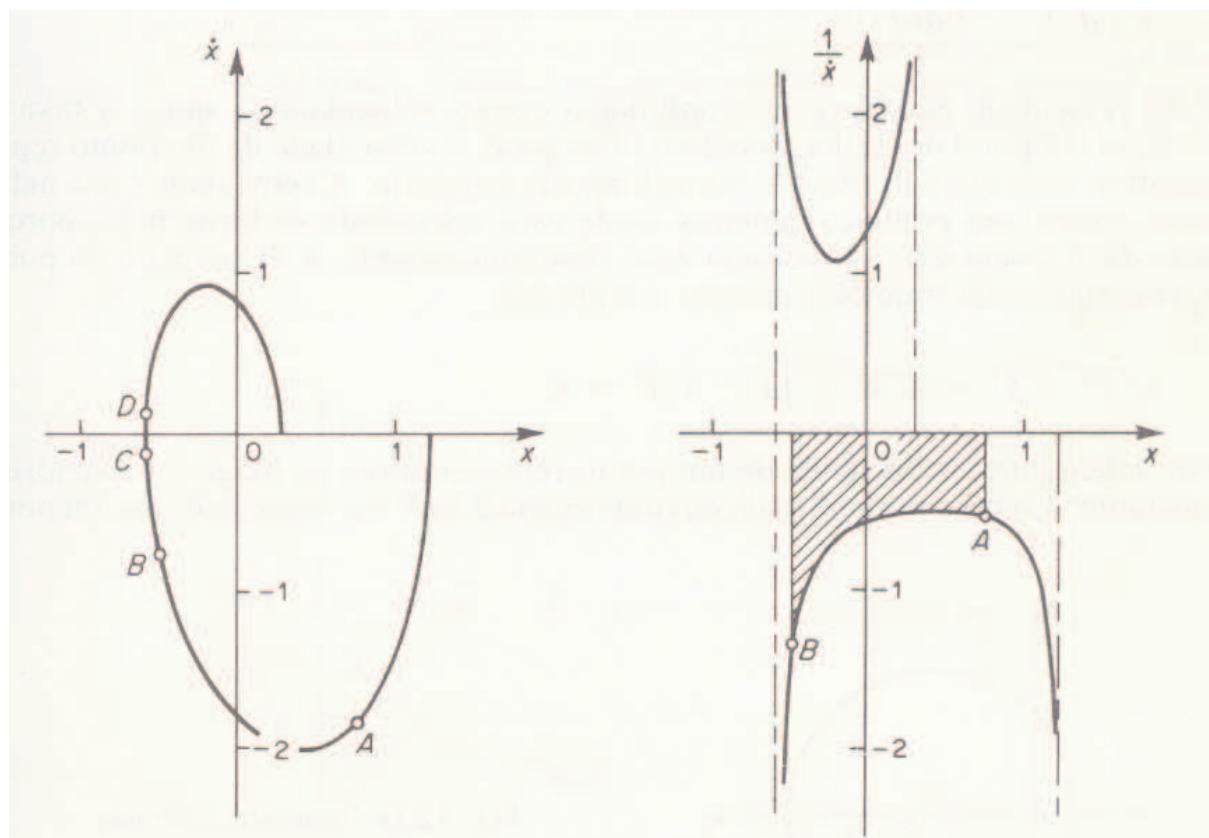
$$t = \int \left( \frac{1}{\dot{x}} dx \right)$$

Como:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow dt = \frac{1}{\dot{x}} dx$$

então, integrando ambos os membros:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\dot{x}} dx \rightarrow t_{AB} = \int_A^B \frac{1}{\dot{x}} dx$$



**Nota:** cálculo mais complexo que a opção anterior, embora mais exacto.

### 2.3.2 Caracterização de pontos singulares

No traçado qualitativo das trajectórias num plano de fase é especialmente importante a informação que se retira do andamento das trajectórias em torno dos pontos singulares (equilíbrio) do sistema.

#### Pontos singulares em sistemas lineares

Seja o sistema autónomo linear de 2<sup>a</sup> ordem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

cuja solução analítica é:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Caso a matriz  $A$  seja diagonalizável, então:

$$e^{At} = Ve^{\Lambda t}V^{-1} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

onde:

- $\lambda_1, \lambda_2$  são os valores próprios de  $A$ .
- $v_1, v_2$  são os vectores próprios de  $A$ .

Demonstra-se que a localização dos valores próprios,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , determinam as características da trajectória no plano de fase.

**Caso  $\text{Im}\{\lambda_i\} = 0$ :**

**Nó estável:**  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ .

**Nó instável:**  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .

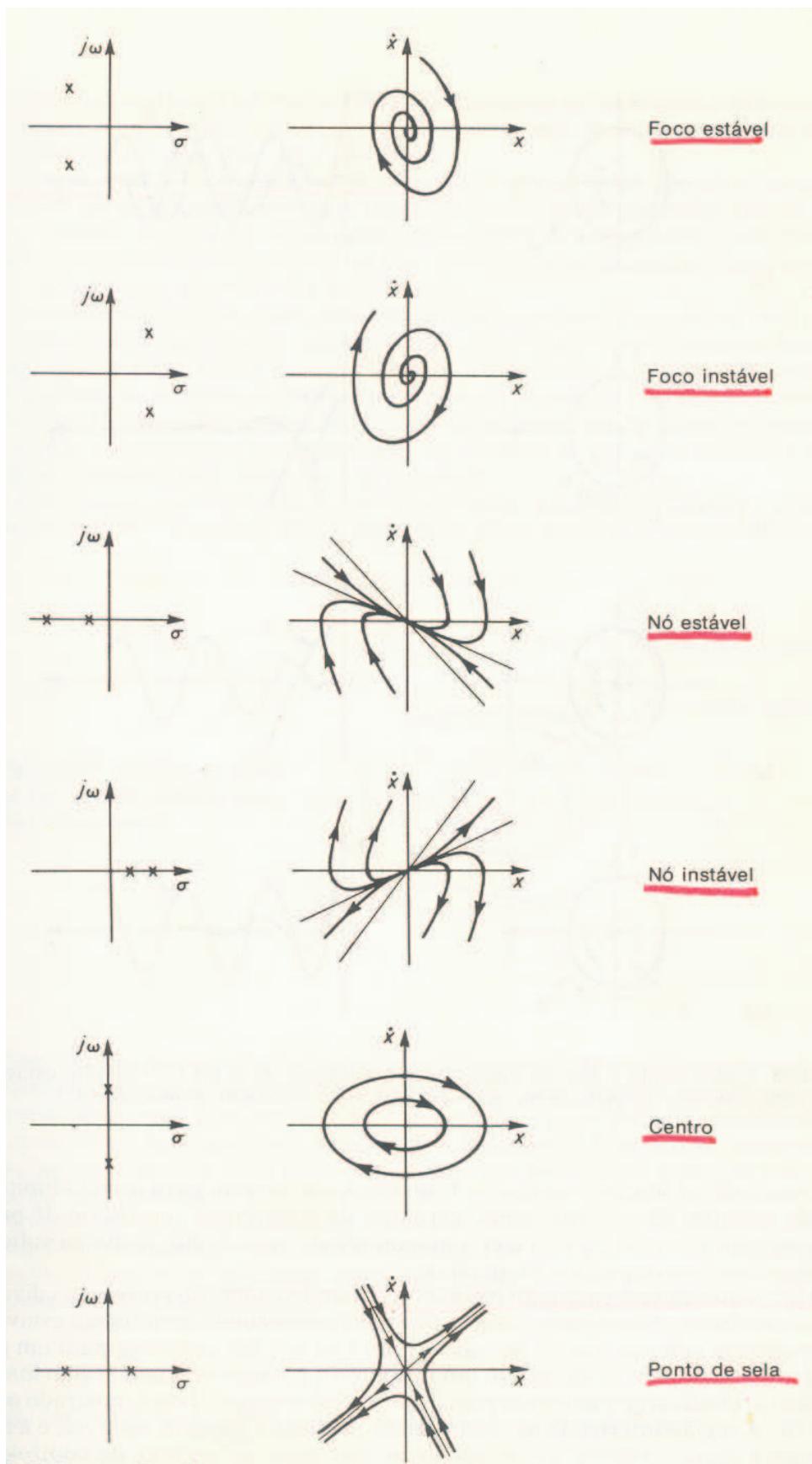
**Ponto sela:**  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

**Caso  $\text{Im}\{\lambda_i\} \neq 0$ :**

**Foco estável:**  $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$ .

**Foco instável:**  $\text{Re}\{\lambda_i\} > 0$ .

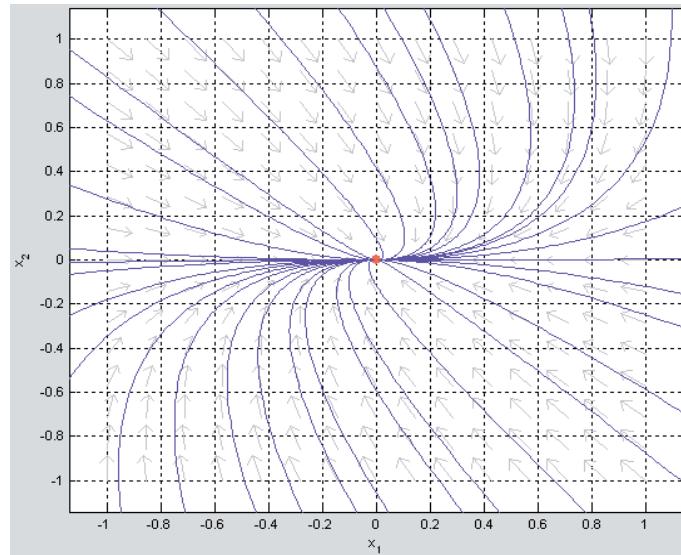
**Centro:**  $\text{Re}\{\lambda_i\} = 0$ .



**Exemplo:** seja o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

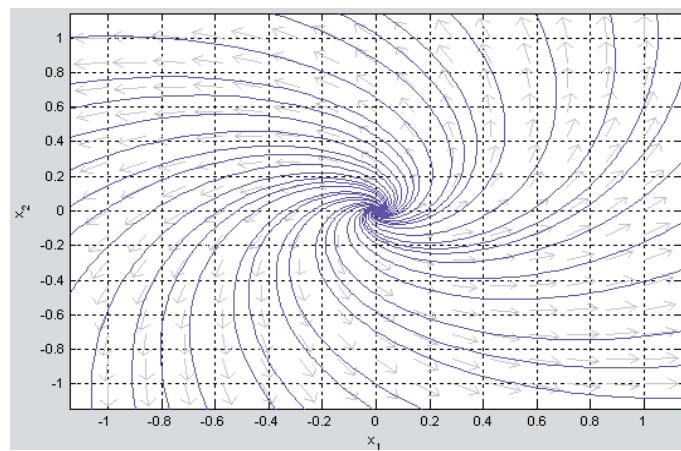
cujos valores próprios são:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ . O plano de fase corresponde a um **nó estável**.



**Exemplo:** seja o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são:  $\lambda_{1,2} = 1 \pm j$ . O plano de fase corresponde a um **foco instável**.



**Nota:** porque razão o sentido de rotação das trajectórias é o anti-horário, ao contrário do mostrado na figura da página anterior?

## Comportamento local de sistemas não lineares

**Ideia básica:** um sistema não linear comporta-se aproximadamente como um sistema linear perto das singularidades. Ou seja, a solução da equação linearizada em torno de uma singularidade deve corresponder aproximadamente ao comportamento do sistema não linear nesse ponto.

Seja o sistema autônomo não linear de 2<sup>a</sup> ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Supondo a origem um ponto singular, i.e.:

$$\begin{aligned}f_1(0, 0) &= 0 \\ f_2(0, 0) &= 0\end{aligned}$$

Expandindo  $f_1$  e  $f_2$  em série de Taylor na vizinhança da origem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 + g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 + g_2(x_1, x_2)\end{aligned}\quad \text{com: } \frac{g_i(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \longrightarrow 0$$

A linearização em torno da origem resulta no **sistema linear**:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &\approx ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &\approx cx_1 + dx_2\end{aligned}$$

cujo comportamento depende da localização dos valores próprios,  $\lambda_1, \lambda_2$ , da matriz jacobiana  $\nabla$ :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow |\nabla - \lambda I| = 0$$

**Exemplo:** seja o seguinte sistema não linear de 2<sup>a</sup> ordem:

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 = 0$$

Considerando a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.5x_2 - 2x_1 - x_1^2 \end{cases}$$

- Determinação dos pontos singulares do sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ -0.5x_2 - 2x_1 - x_1^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1^2 - 2x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1(x_1 + 2) = 0$$

Donde os **pontos singulares** são:  $(0, 0)$  e  $(-2, 0)$ .

- Linearização em torno de  $(0, 0)$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.5x_2 - 2x_1 - x_1^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 \approx -0.5x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

a que corresponde a equação dinâmica:

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x = 0$$

cujas raízes (valores próprios) são:

$$\lambda_{1,2} = -0.25 \pm 1.39j$$

ou seja, trata-se de um **foco estável**.

- Linearização em torno de  $(-2, 0)$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.5x_2 - 2x_1 - x_1^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 \approx -0.5x_2 - 2x_1 - [4 - 4(x_1 + 2)] \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 \approx -0.5x_2 + 2x_1 + 4 \end{cases}$$

a que corresponde a equação dinâmica:

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} - 2x - 4 = 0$$

Através da substituição de variável,  $y = x + 2$ , resulta a nova equação dinâmica:

$$\ddot{y} + 0.5\dot{y} - 2y = 0$$

cujas raízes (valores próprios) são:

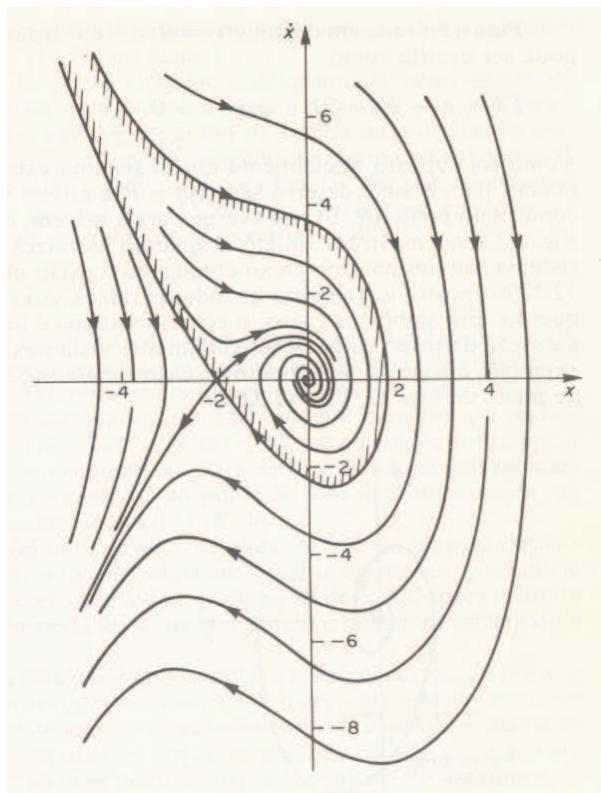
$$\lambda_1 = 1.19 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -1.69$$

ou seja, trata-se de um **ponto sela**. Este resultado poderia ser também confirmado através do cálculo dos valores próprios da matriz jacobiana:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(-2,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - 2x_1 & -0.5 \end{bmatrix}_{(-2,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são:  $|\nabla - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 - 1.19)(\lambda_2 + 1.69) = 0$ .

- As trajectórias no plano de fase ...



### Notas:

- A tangente à trajectória nos pontos singulares  $(-2, 0)$  e  $(0, 0)$  é indefinida, e.g.:

$$\left[ \frac{dx_2}{dx_1} \right]_{(-2,0)} = \left[ \frac{-0.5x_2 - 2x_1 - x_1^2}{x_2} \right]_{(-2,0)} = \frac{0}{0}$$

Isto significa que as trajectórias que passam pelos pontos de equilíbrio poderão ter qualquer inclinação.

- A tangente à trajectória sobre o eixo das abcissas (excluindo os pontos singulares) é sempre infinita:

$$\left[ \frac{dx_2}{dx_1} \right]_{(\forall x_1, 0)} = \left[ \frac{-0.5x_2 - 2x_1 - x_1^2}{x_2} \right]_{(\forall x_1, 0)} = \infty$$

Isto significa que as trajectórias são sempre perpendiculares a  $x_1$  quando  $x_2 = 0$  (exetuando sobre os pontos de equilíbrio).

**Questão:** será que a equivalência entre o comportamento não linear e linearizado se verifica sempre para qualquer ponto singular? Vamos ver no próximo exemplo que nem sempre é assim...

**Exemplo:** sejam os seguintes sistemas não lineares:

$$\text{Sistema I : } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

$$\text{Sistema II : } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

- Ambos os sistemas têm como ponto singular:  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ .

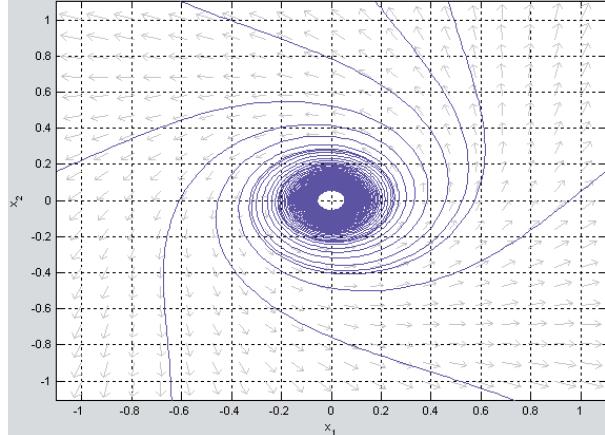
- A linearização em torno da origem, resulta nas mesmas equações:

$$\text{Sistema I : } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$\text{Sistema II : } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

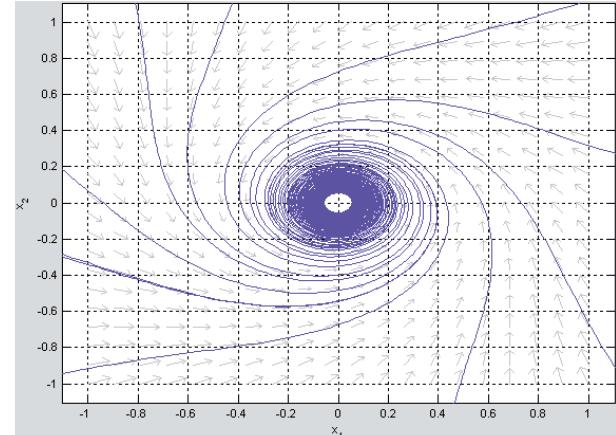
a que correspondem os valores próprios:  $\lambda_{1,2} = \pm j$  (**Centro**)

- No entanto, os sistemas exibem comportamentos radicalmente diferentes em torno da origem:



Sistema I

(INSTÁVEL)



Sistema II

(ESTÁVEL)

**Conclusão:** quando os valores próprios da matriz do sistema linearizado correspondem a imaginários puros (centro) não é possível concluir quanto à estabilidade do sistema não linear em torno do ponto singular.

### Procedimento para o traçado de trajectórias no plano de fase

1. Marcar no plano de fase o(s) ponto(s) singular(es) (ou de equilíbrio) do sistema,  $\dot{x} = 0$ .
2. Linearizar o sistema em torno do(s) ponto(s) singular(es), e verificar o comportamento das trajectórias em torno desse(s) ponto(s) (foco, nó, centro, ponto sela, estável ou instável).
3. Determinar o sentido do andamento das trajectórias a partir da análise do sinal das derivadas  $\dot{x}_1$  e  $\dot{x}_2$  para vários pontos do plano de fase.
4. Tentar encontrar possíveis ciclos limite.
5. Aplicar o método das isóclinas e traçar o esboço qualitativo das trajectórias de estado, tendo em conta as informações anteriores.

**Exemplo:** seja o seguinte sistema não linear de 2<sup>a</sup> ordem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 - x_1 x_2 \end{cases}$$

- Determinação dos pontos singulares:

$$x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad x_1 x_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, x_2) = (1, 1) \quad \text{ou} \quad (x_1, x_2) = (-1, -1)$$

- A linearização em torno dos 2 pontos singulares, resulta nas seguintes matrizes jacobianas:

$$\text{Ponto singular } (1, 1): \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

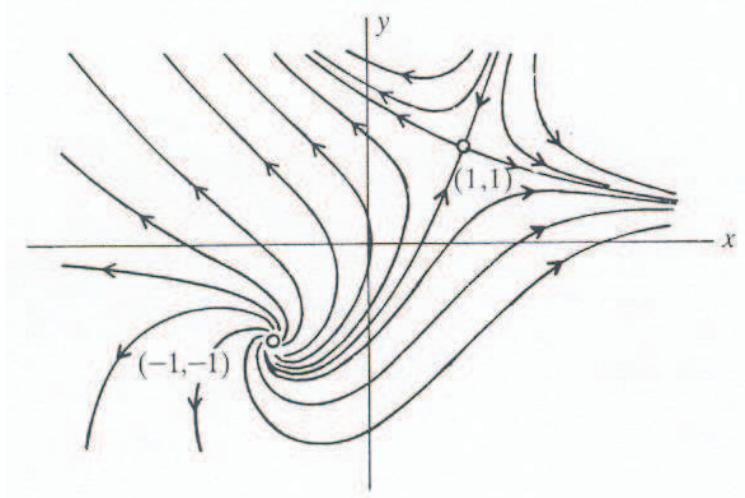
$$\text{Ponto singular } (-1, -1): \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(-1,-1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}_{(-1,-1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Os valores próprios resultantes são:

$$\text{Ponto singular } (1, 1) : \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Ponto sela.}$$

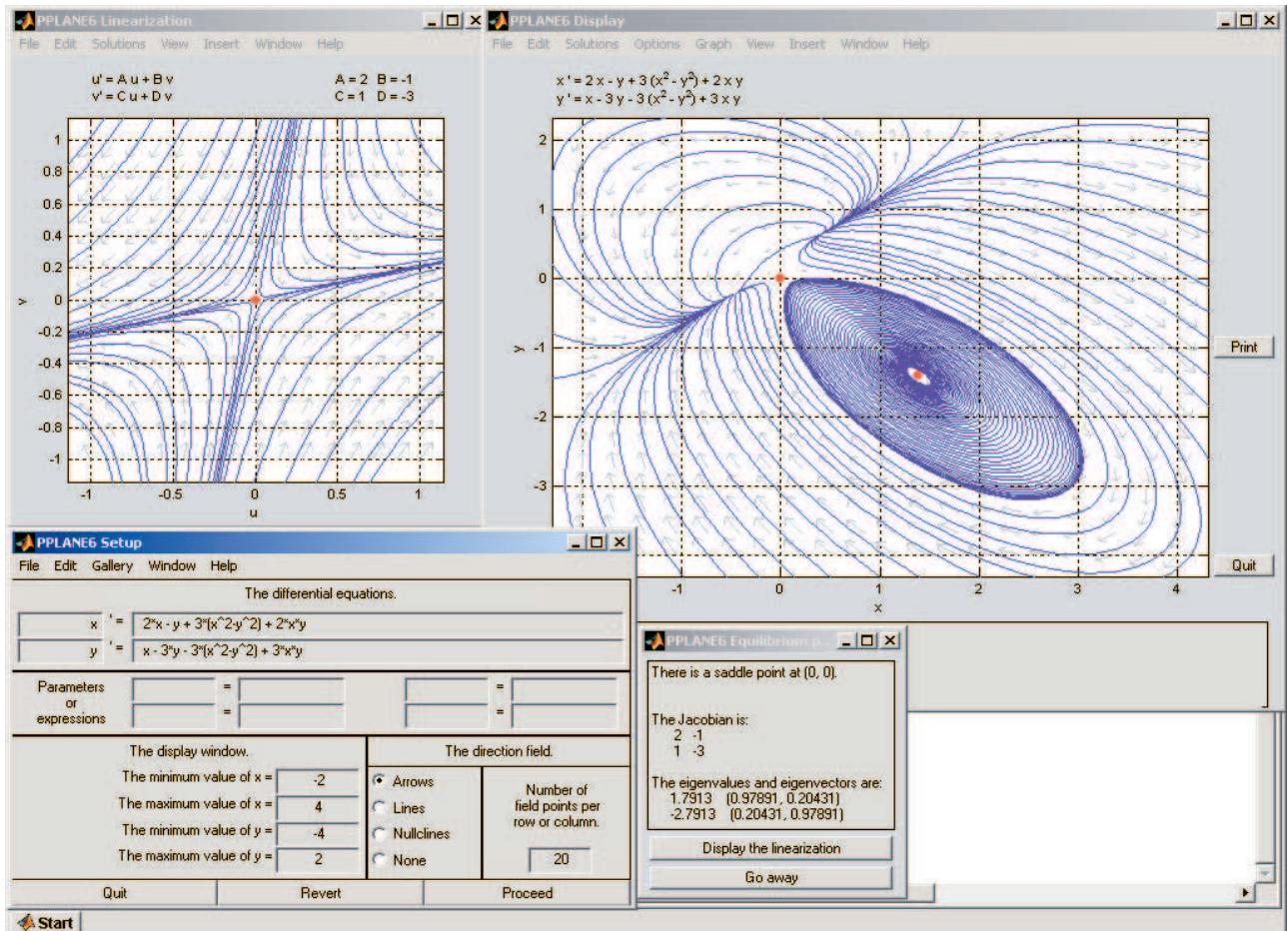
$$\text{Ponto singular } (-1, -1) : \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm j \quad \Rightarrow \quad \textbf{Foco instável.}$$

- As trajectórias de estado comportam-se da seguinte maneira...



## Ferramenta computacional

Na página da cadeira está disponível um programa em Matlab para o desenho de trajectórias no plano de fase de sistemas de 2<sup>a</sup> ordem.



### 2.3.3 Ciclos limite no plano de fase

*Oscilações:* um sistema oscila quando possui uma solução periódica não-trivial da forma (excluem-se todas as soluções constantes, e.g., pontos de equilíbrio):

$$x(t+T) = x(t), \quad \forall t \geq 0, \quad T > 0$$

**Exemplo:** seja o seguinte sistema massa-mola:

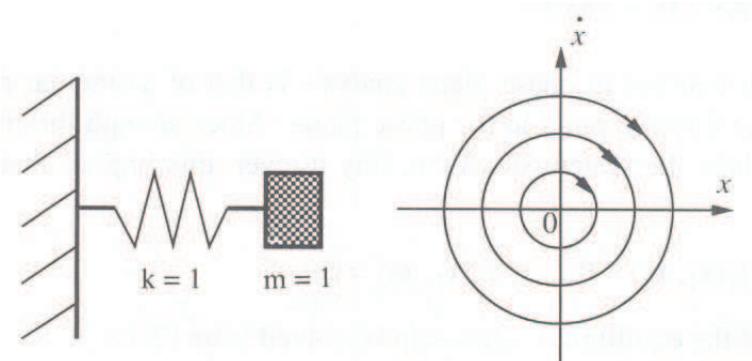
$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0$$

Se considerarmos no instante inicial a massa em repouso em  $x(0) = x_0$ , a solução da equação diferencial é:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos t \\ \dot{x}(t) &= -x_0 \sin t \end{aligned}$$

onde, a equação das trajectórias é:

$$\dot{x}^2(t) + x^2(t) = x_0^2$$



**Propriedades:**

- A oscilação não é estruturalmente estável: sistema não é robusto a perturbações.
- A amplitude da oscilação em regime estacionário depende do estado inicial,  $x_0$ .

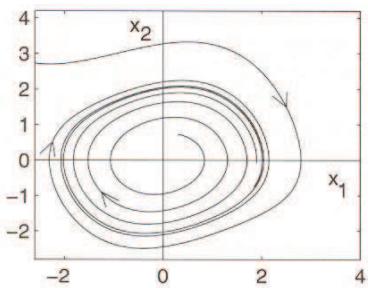


**Nota:** estas duas propriedades poderão não existir num sistema não linear. A uma oscilação permanente, *robusta e independente das condições iniciais*, dá-se o nome de: **ciclo limite**.

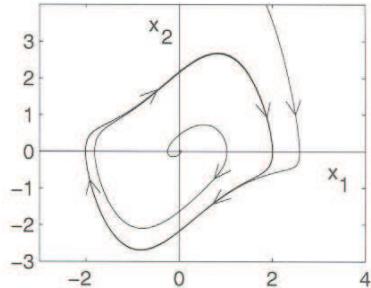
**Exemplo:** seja a equação de Van der Pol, com parâmetro  $\epsilon = \{0.2, 1.0, 5.0\}$ :

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{cases}$$

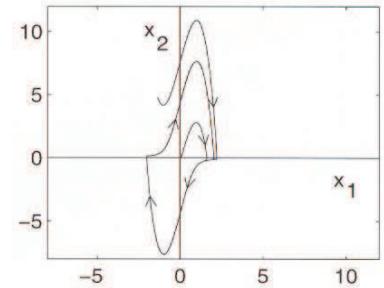
O sistema exibe um ciclo limite, tanto mais distorcido quanto maior for o valor de  $\epsilon$ :



$$\epsilon = 0.2$$



$$\epsilon = 1.0$$



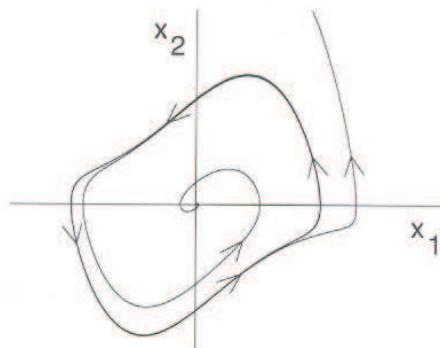
$$\epsilon = 5.0$$

### Propriedades:

- O sistema só exibe uma única órbita periódica e isolada: **ciclo limite**.
- As características da oscilação não dependem do estado inicial do sistema.
- A oscilação é robusta a perturbações: qualquer trajectória na vizinhança do ciclo limite, tende para o ciclo limite quando  $t \rightarrow \infty$ : **ciclo limite estável**.

Caso a equação de Van der Pol seja escrita inversamente no tempo:

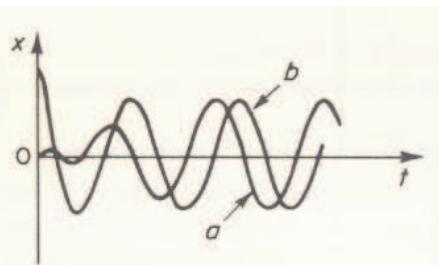
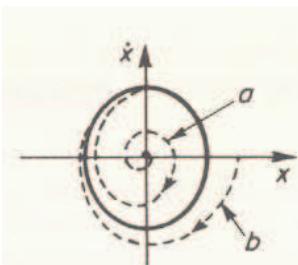
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - \epsilon(1 - x_1^2)x_2, \quad \epsilon = 1.0 \end{cases}$$



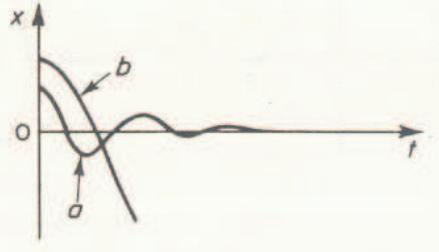
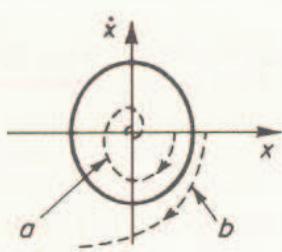
O sistema apresenta um **ciclo limite instável**!

**Características dos ciclos limite:**

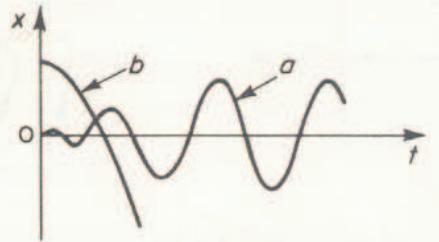
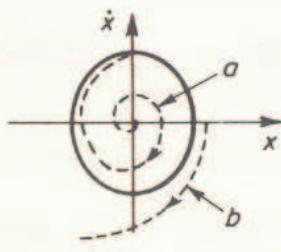
Estável



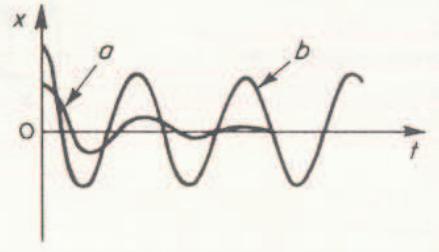
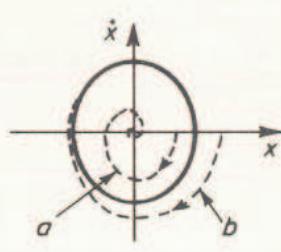
Instável



Semi-estável



Semi-estável



A caracterização do ciclo limite depende do comportamento das trajectórias na sua vizinhança.

**Questão:** como detectar a existência (ou não) de um ciclo limite? Como detectar a presença (ou não) de uma órbita periódica num sistema de 2<sup>a</sup> ordem?

- Teorema de Poincaré-Bendixson.
- Critério de Bendixson.
- Teorema de Poincaré (índice).

Considere-se o seguinte sistema autónomo de 2<sup>a</sup> ordem não linear, continuamente diferenciável:

$$\dot{x} = f(x)$$

Como saber se o sistema exibirá, ou não, um ciclo limite?

### Teorema de Poincaré-Bendixson

*Considere o sistema de 2<sup>a</sup> ordem,  $\dot{x} = f(x)$ , com  $f(x)$  continuamente diferenciável. Considere  $M$  um subconjunto limitado e fechado do plano de fase tal que:*

- *$M$  não contém nenhum ponto de equilíbrio, ou no máximo contém apenas um único ponto de equilíbrio tal que a matriz jacobiana,  $\nabla = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]$ , nesse ponto possui valores próprios com parte real positiva (foco instável, ou nó instável).*
- *Qualquer trajectória que comece em  $M$  mantém-se em  $M$  para todos os instantes futuros.*

*Então,  $M$  contém uma órbita periódica (ciclo limite) do sistema.*

**Ideia básica:** as trajectórias limitadas tendem, das duas uma, ou para um ponto de equilíbrio ou, caso este não exista ou esteja nas condições do teorema, para uma órbita periódica.

### Aplicação prática do teorema de Poincaré-Bendixson:

1. Definir uma curva fechada  $V(x) = c > 0$ , com  $V(x)$  continuamente diferenciável, numa região do plano de fase envolvendo um ponto de equilíbrio nas condições do teorema. Então:
  - O campo vectorial  $f(x)$  num ponto  $x$  dessa curva apontará para dentro da região delimitada por  $M = \{V(x) \leq c\}$ , sse o produto interno de  $f(x)$  com  $\nabla V(x)$  for negativo:

$$f(x) \cdot \nabla V(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)f_1(x) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)f_2(x) < 0$$

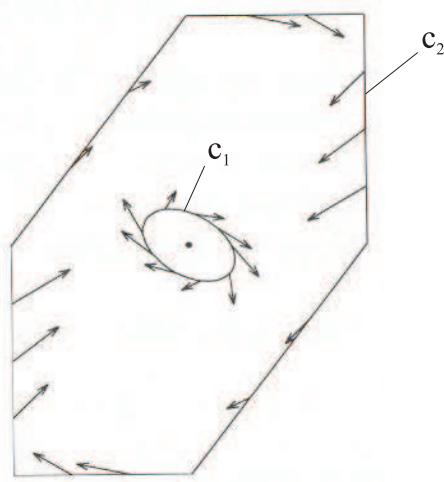
1. Se a desigualdade anterior for válida, o sistema exibirá uma órbita periódica em  $M$ . No limite, caso  $f(x) \cdot \nabla V(x) = 0$ , a trajectória mantém-se sobre  $V(x) = c$ .
2. Definir uma região anelar,  $M = \{W(x) \geq c_1 \text{ e } V(x) \leq c_2\}$ , para  $c_1, c_2 > 0$ , numa determinada região do plano de fase onde não existam pontos de equilíbrio.

- As trajectórias ficam retidas em  $M$ , sse:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot \nabla V(x) &< 0, \quad \text{em: } V(x) = c_2 \\ f(x) \cdot \nabla W(x) &> 0, \quad \text{em: } W(x) = c_1 \end{aligned}$$

- Se as desigualdades anteriores forem válidas, o sistema exibirá uma órbita periódica em  $M$ .

Explicação gráfica da ideia do teorema de Poincaré-Bendixson.



**Exemplo:** seja de novo o sistema massa-mola:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

- Defina-se a região anelar (caso particular  $V(x) = W(x)$ ):

$$M = \{c_1 \leq V(x) \leq c_2\}, \quad \text{com: } V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

- O conjunto  $M$  é fechado, limitado, e não inclui nenhum ponto de equilíbrio (a origem não está incluída).
- As trajectórias do sistema mantém-se em  $M$ , pois:

$$f(x) \cdot \nabla V(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) f_1(x) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) f_2(x) = 2x_1(x_2) + 2x_2(-x_1) = 0, \quad \forall x \in M$$

- Pelo teorema de Poincaré-Bendixson, o sistema exibe uma órbita periódica em  $M$ .

**Nota:** o teorema de Poincaré-Bendixson assegura a existência de uma órbita periódica, mas não a sua unicidade!

**Exemplo:** seja o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2 - x_2^2)x_2 \end{cases}$$

- Linearização em torno do ponto singular,  $(0, 0)$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x_1x_2 & -3x_2^2 - x_1^2 + 1 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

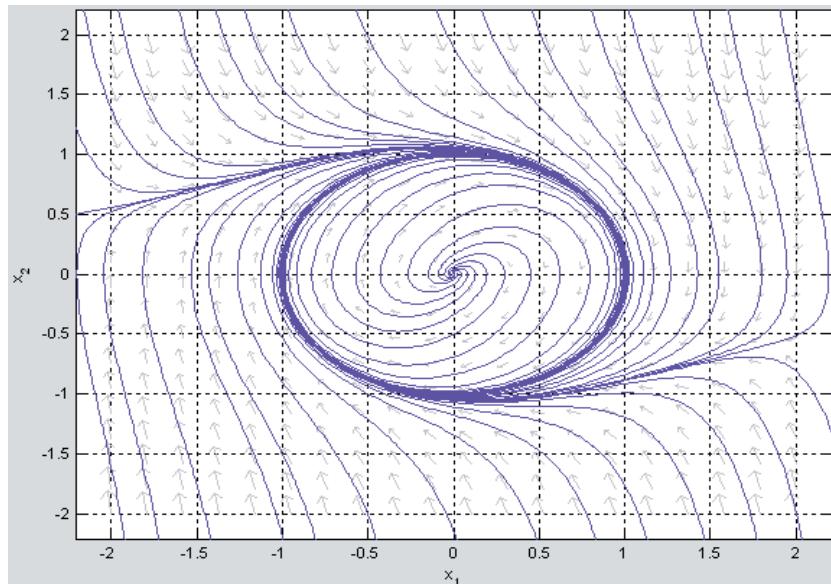
- Os valores próprios resultantes são:  $+\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$ . Ou seja, trata-se de um **foco instável**.
- Defina-se a região delimitada por,  $M = \{V(x) \leq c\}$ , com  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ , e  $c > 0$ , envolvendo o ponto de equilíbrio instável. As trajectórias ficam retidas em  $M$ , sse:

$$f(x) \cdot \nabla V(x) < 0$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot \nabla V(x) &= x_2 \cdot 2x_1 + [-x_1 - (x_1^2 + x_2^2 - 1)x_2] \cdot 2x_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ &= -2x_2^2(x_1^2 + x_2^2 - 1) < 0 \quad , \quad \text{sse: } x_1^2 + x_2^2 > 1 \end{aligned}$$

**Conclusão:** as trajectórias do sistema mantém-se no interior da região  $M$ , concêntrica com a origem, desde que o seu raio seja superior a  $c = 1$ . Como a origem é um ponto de equilíbrio instável, é facilmente concluído pelo teorema de Poincaré-Bendixson que o sistema tem um **ciclo limite estável** em  $M$ .



**Exemplo:** seja o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

- Linearização em torno do ponto singular,  $(0, 0)$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + x_2^2 - 1 & -1 + 2x_1x_2 \\ 1 + 2x_1x_2 & x_1^2 + 3x_2^2 - 1 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

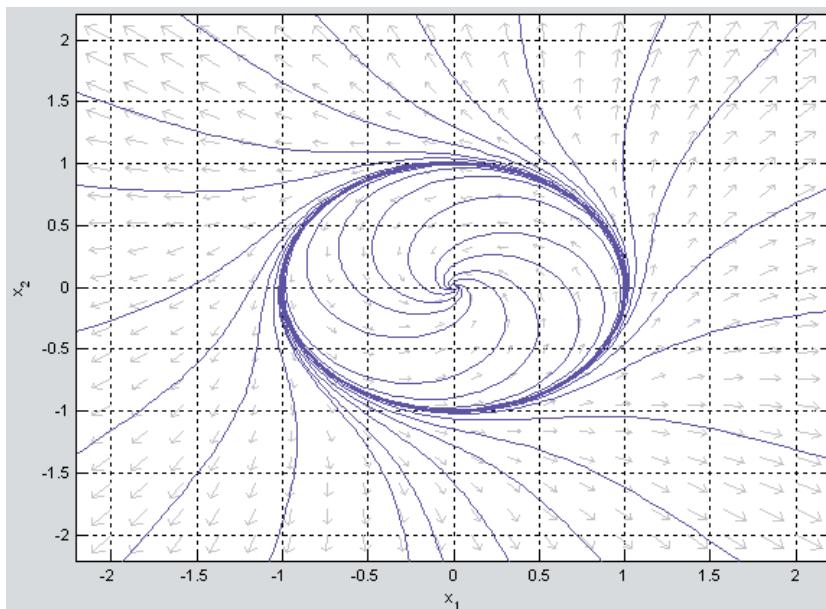
- Os valores próprios resultantes são:  $-1 \pm j$ . Ou seja, trata-se de um **foco estável**.
- Defina-se a região anelar delimitada por,  $M = \{W(x) \geq c_1 \text{ e } V(x) \leq c_2\}$ , com  $W(x) = x_1^2 + x_2^2$ ,  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ , com  $c_1, c_2 > 0$ . As trajectórias ficam retidas em  $M$ , sse:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot \nabla V(x) &< 0, \quad \text{em: } V(x) = c_2 \\ f(x) \cdot \nabla W(x) &> 0, \quad \text{em: } W(x) = c_1 \end{aligned}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot \nabla V(x) &= 2x_1(-x_2 + x_1^3 + x_1x_2^2 - x_1) + 2x_2(x_1 + x_1^2x_2 + x_2^3 - x_2) \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2) < 0, \quad \text{sse: } x_1^2 + x_2^2 < 1 \end{aligned}$$

**Conclusão:** Caso  $c_1 = 0.5$ , então  $f(x) \cdot \nabla W(x) < 0$ , i.e., as trajectórias saem de  $M$  em  $V(x) = c_1$  em direcção à origem. Caso  $c_2 = 2$ , então  $f(x) \cdot \nabla V(x) > 0$ , i.e., as trajectórias saem de  $M$  em  $V(x) = c_2$  afastando-se da origem. Como para  $c_1 = c_2 = 1$ , tanto  $f(x) \cdot \nabla W(x) = 0$  como  $f(x) \cdot \nabla V(x) = 0$ , o sistema deverá possuir um **ciclo limite instável** em torno de  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .



### Critério de Bendixson

Se numa região  $\Omega$  simplesmente ligada (sem “buracos”) do plano de fase, a expressão:

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

não for idêntica a zero, e não trocar de sinal, então o sistema original,  $\dot{x} = f(x)$ , não terá nenhuma órbita periódica na região  $\Omega$ .

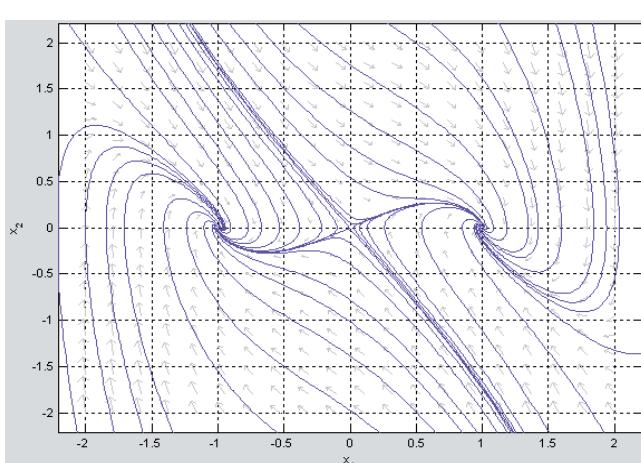
**Exemplo:** seja o seguinte sistema de 2<sup>a</sup> ordem não linear:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 + bx_2 - x_1^2x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

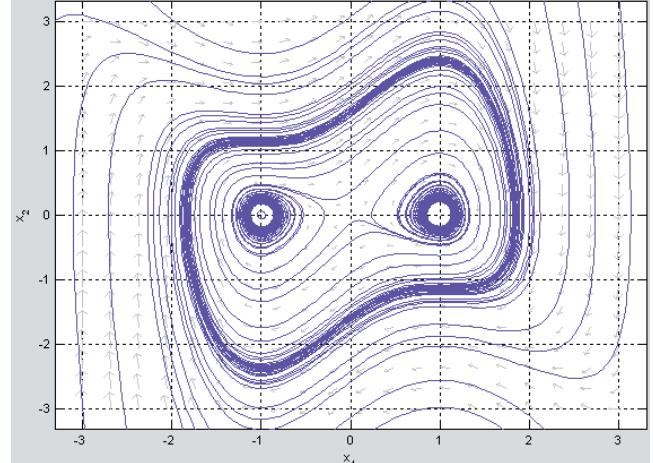
- Considere-se  $\Omega$  como sendo todo o plano de fase.
- Desenvolvendo:

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = b - x_1^2$$

- De acordo com o critério de Bendixson, não haverá órbitas periódicas se  $b < 0$ .



Com  $b = -1$



Com  $b = 1$

**Conclusão:** para  $b \geq 0$  o critério de Bendixson não é conclusivo! Embora neste caso se verifique a existência de ciclo limite para  $b > 0$ , notar que o critério de Bendixson serve apenas para eliminar a hipótese de existência de uma órbita periódica.

## Teorema de Poincaré

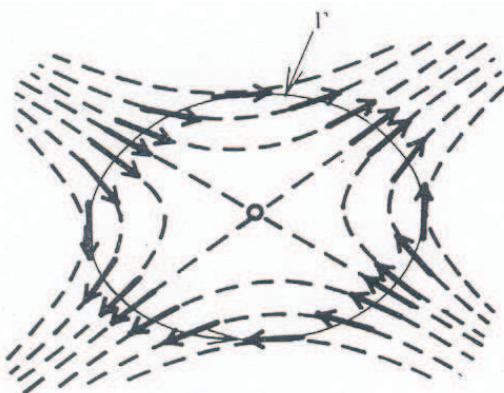
O teorema de Poincaré baseia-se na determinação do *índice de um ponto de equilíbrio*, também conhecido por *Teorema do índice*. É aplicável a sistemas autónomos de 2<sup>a</sup> ordem não lineares, continuamente diferenciáveis:

$$\dot{x} = f(x)$$

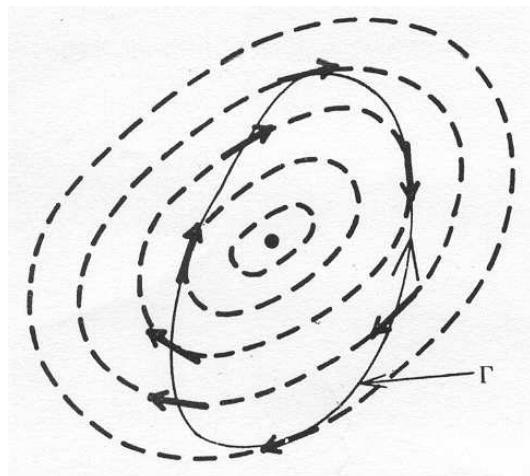
### Obtenção do índice dos pontos de equilíbrio:

- Traçar uma curva fechada,  $\Gamma$ , num plano de fase, sem passar sobre nenhum ponto de equilíbrio.
- Considerar um ponto  $p \in \Gamma$ , e a direcção do campo vectorial  $f(x)$  nesse ponto.
- Deslocar o ponto  $p$  ao longo de  $\Gamma$  no sentido anti-horário, e ir marcando a direcção do campo vectorial  $f(x)$  ao longo de uma volta completa.
- A direcção do campo vectorial  $f(x)$  irá rodar continuamente, atingindo a direcção inicial na posição original, tendo rodado entretanto no sentido anti-horário um ângulo correspondente a  $2\pi k$ , para  $k$  inteiro.
- O inteiro  $k$  é designado por *índice da curva fechada*  $\Gamma$ . Se a curva fechada incluir um ponto de equilíbrio, então  $k$  é designado por *índice do ponto de equilíbrio*.
- Demonstra-se que:
  - O índice de um nó, foco, ou centro é +1.
  - O índice de um ponto sela é -1.
  - O índice de uma curva fechada que não inclua nenhum ponto de equilíbrio é 0.
  - O índice de uma curva fechada é igual à soma dos índices dos pontos de equilíbrio por ela envolvidos.

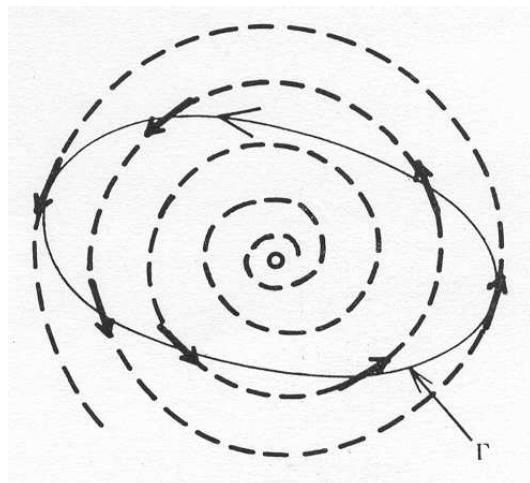
**Exemplo:** o índice de um ponto sela é -1:



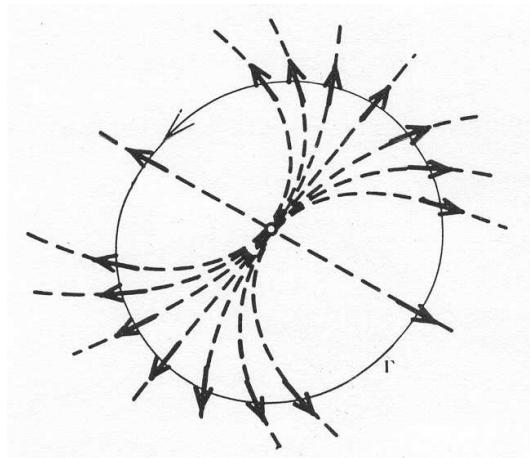
**Exemplo:** o índice de um centro é +1:



**Exemplo:** o índice de um foco é +1:



**Exemplo:** o índice de um nó é +1:



**Teorema do índice:** Seja um sistema autônomo de 2<sup>a</sup> ordem. A condição necessária (mas não suficiente) para a existência de um ciclo limite é que a soma dos índices dos pontos de equilíbrio envolvidos pelo ciclo limite seja 1.

ou,

**Teorema de Poincaré:** Seja um sistema autônomo de 2<sup>a</sup> ordem. A condição necessária (mas não suficiente) para a existência de um ciclo limite é que se verifique a seguinte condição:

$$N = S + 1$$

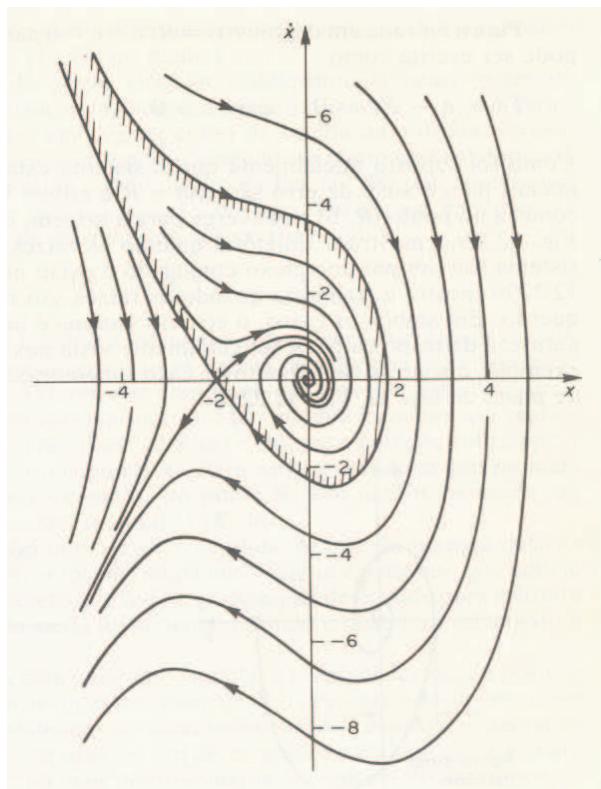
onde  $N$  corresponde ao número de nós, centros ou focos envolvidos pelo ciclo limite, e  $S$  ao número de pontos sela envolvidos pelo ciclo limite.

**Exemplo:** revisitamos o sistema não linear de 2<sup>a</sup> ordem:

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 = 0$$

cujas linearizações em torno dos pontos de equilíbrio resultam:

- (0, 0) : foco estável
- (-2, 0) : ponto sela



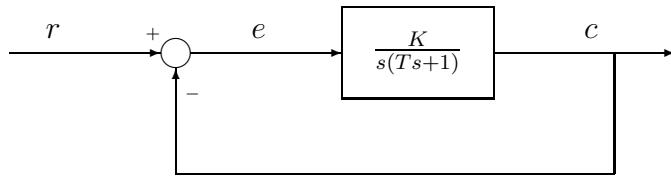
Os teoremas de Poincaré e do índice confirmam apenas a não existência de ciclo limite em torno do ponto sela, ou dos dois pontos de equilíbrio. Contudo, nada garantem relativamente à existência (ou não) de ciclo limite envolvendo o foco estável!

### 2.3.4 Análise de sistemas de controlo

A análise por plano de fase é útil na avaliação do desempenho de sistemas de controlo lineares, e não lineares, de 2<sup>a</sup> ordem.

#### Sistemas de controlo linear

Seja o seguinte sistema de controlo linear:



A equação dinâmica da evolução do erro,  $E(s)$ , em função da referência,  $R(s)$ , é dada por:

$$\begin{aligned} E(s) = R(s) - \frac{K}{s(Ts+1)}E(s) &\Leftrightarrow E(s) \left[ 1 + \frac{K}{s(Ts+1)} \right] = R(s) \\ &\Leftrightarrow T.E(s)s^2 + E(s)s + K.E(s) = T.R(s)s^2 + R(s)s \end{aligned}$$

Aplicando as propriedades da transformada de Laplace inversa (recordar...):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\dot{x}(t)] &= sX(s) - x(0) \\ \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] &= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \end{aligned}$$

resulta a equação dinâmica de 2<sup>a</sup> ordem:

$$T\ddot{e}(t) + \dot{e}(t) + Ke(t) = T\ddot{r}(t) + \dot{r}(t)$$

**Objectivo:** representar no plano de fase ( $e, \dot{e}$ ) a evolução da trajectória correspondente à equação dinâmica resultante, conhecida a referência do sistema de controlo e as condições iniciais do sistema:

$$\begin{cases} x_1(t) = e(t) \\ x_2(t) = \dot{e}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{T}x_2(t) - \frac{K}{T}x_1(t) + \ddot{r}(t) + \frac{1}{T}\dot{r}(t) \end{cases}$$

onde:

- Entrada em degrau:  $\ddot{r}(t) = 0$  e  $\dot{r}(t) = 0$ .
- Entrada em rampa:  $\ddot{r}(t) = 0$  e  $\dot{r}(t) = V$ , sendo  $V$  o declive da rampa.

### Entrada em degrau

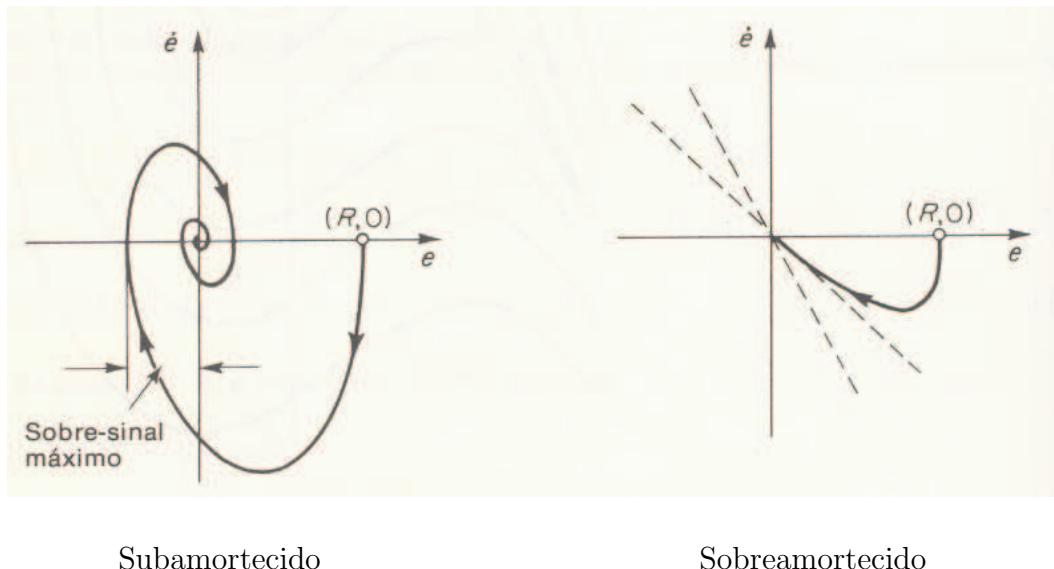
A equação dinâmica do sistema, para um degrau de amplitude  $R$ :

$$T\ddot{e}(t) + \dot{e}(t) + Ke(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{T}x_2(t) - \frac{K}{T}x_1(t) \end{cases}$$

Admitindo que o sistema está em repouso no instante inicial em que é actuado:

$$\begin{aligned} e(0) &= x_1(0) = R \\ \dot{e}(0) &= x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

A evolução da trajectória vai depender dos valores próprios do sistema (função dos parâmetros  $K$  e  $T$ ):



### Entrada em rampa

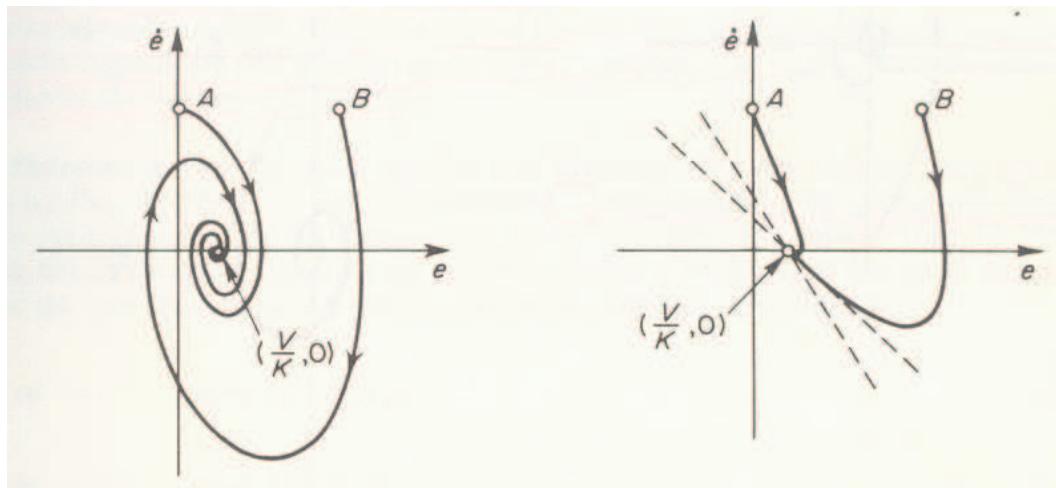
A equação dinâmica do sistema, para uma rampa de declive  $V$ :

$$T\ddot{e}(t) + \dot{e}(t) + Ke(t) = V \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{T}x_2(t) - \frac{K}{T}x_1(t) + \frac{V}{T} \end{cases}$$

Admitindo que o sistema está em repouso no instante inicial em que é actuado:

$$\begin{aligned} e(0) &= x_1(0) = 0 \quad \text{ou} \quad R \\ \dot{e}(0) &= x_2(0) = V \end{aligned}$$

A evolução da trajectória vai depender dos valores próprios do sistema (parâmetros  $K$  e  $T$ ):

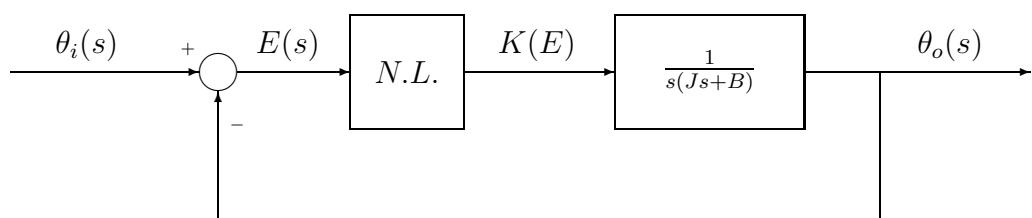


Subamortecido

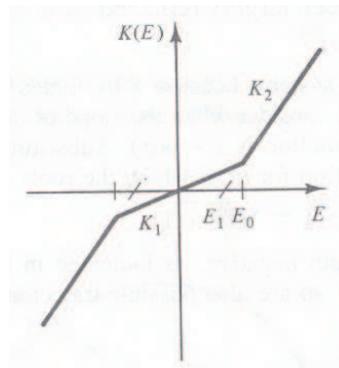
Sobreamortecido

**Nota:** o sistema exibe um erro estático de velocidade de  $V/K$ . Este valor poderia ter sido obtido através da determinação do ponto de equilíbrio do sistema!

**Exemplo:** seja o seguinte sistema de controlo de um motor eléctrico, com ganho “piecewise-linear”:



onde a não linearidade do actuador tem a seguinte característica:



Considerando um degrau unitário na referência,  $\theta_i$ , pretende-se determinar a evolução das trajectórias de estado do sistema correspondentes ao termo  $e(t)$ . A função de transferência  $E(s)/\theta_i(s)$  vem dada por:

$$\frac{E(s)}{\theta_i(s)} = \frac{Js^2 + Bs}{Js^2 + Bs + K(E)}$$

onde, a equação dinâmica correspondente é:

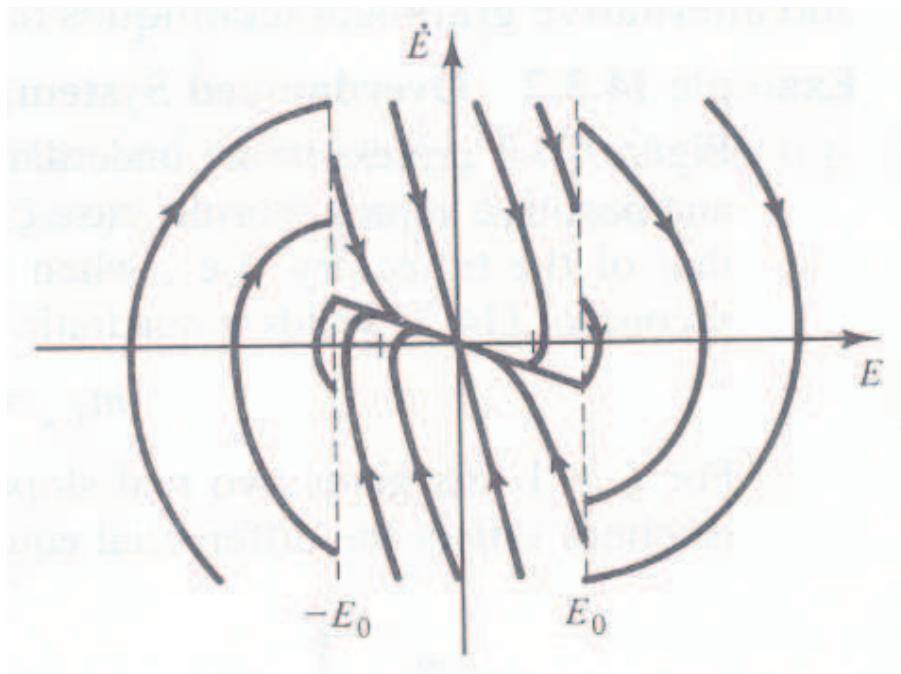
$$J\ddot{E} + B\dot{E} + K(E)E = J\ddot{\theta}_i + B\dot{\theta}_i$$

Como a entrada é um degrau unitário,  $\dot{\theta}_i = 0$ , e  $\ddot{\theta}_i = 0$ , vem:

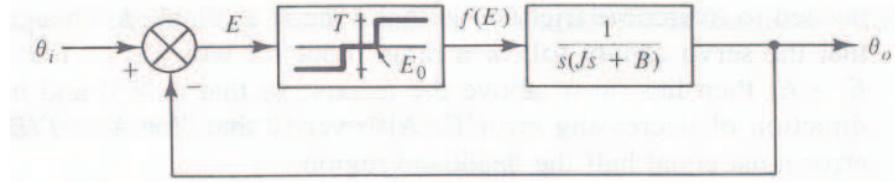
$$J\ddot{E} + B\dot{E}(t) + K(E)E = 0, \quad \text{com: } K(E) = \begin{cases} K_1 & , -E_0 \leq E \leq E_0 \\ K_2 & , E_0 < E < -E_0 \end{cases}$$

Representando no plano de fase definido por  $(E, \dot{E})$ , e admitindo que:

- Para  $-E_0 \leq E \leq E_0$  o sistema é **sobreamortecido (nó estável)**.
- Para  $E_0 < E < -E_0$  o sistema é **subamortecido (foco estável)**.



**Exemplo:** seja um sistema de controlo com actuador não linear:



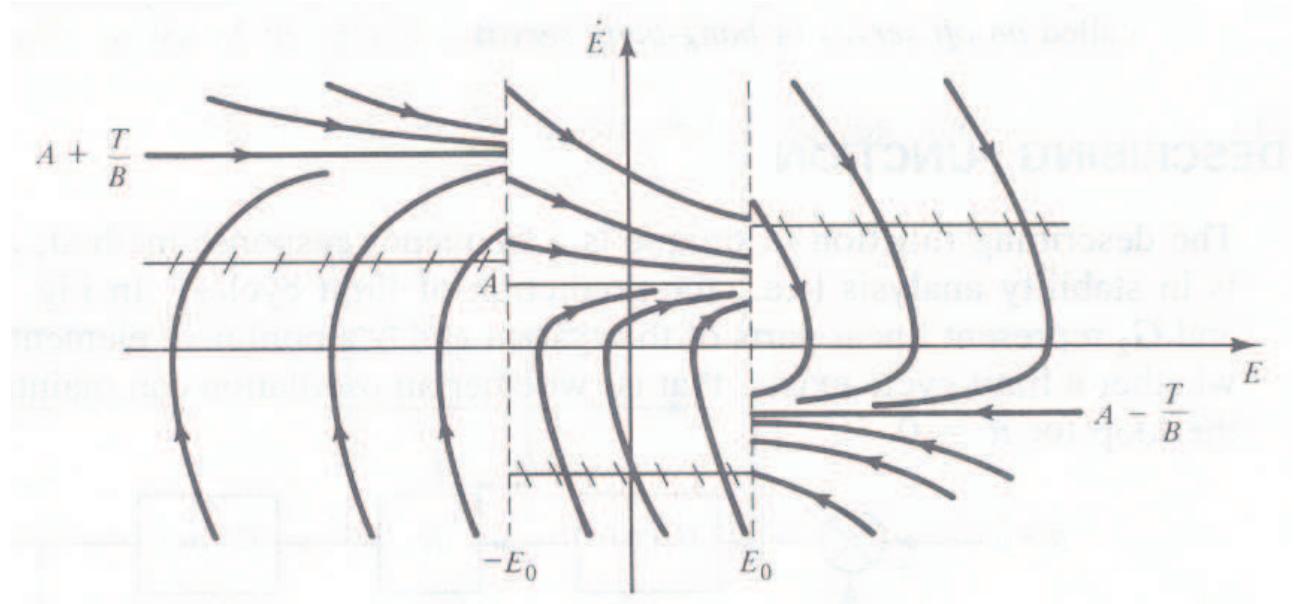
$$f(E) = \begin{cases} 0 & , -E_0 \leq E \leq E_0 \\ T & , E > E_0 \\ -T & , E < -E_0 \end{cases}$$

Considerando uma entrada em rampa de declive  $A$ , i.e.,  $\dot{\theta}_i = A$ , e  $\ddot{\theta}_i = 0$ , resulta:

$$J\ddot{E} + B\dot{E} + f(E) - BA = 0$$

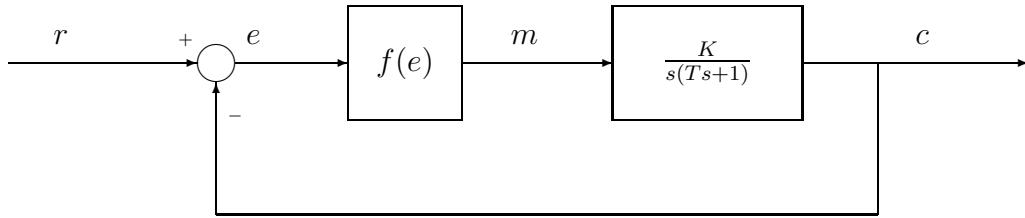
Através das isóclinas (rectas horizontais pois só dependem de  $\dot{E}$ ):

$$\frac{d\dot{E}}{dE} = \frac{-B\dot{E} - f(E) + BA}{J\dot{E}} = \begin{cases} \frac{-B(\dot{E}-A)}{J\dot{E}} & (\dot{E} = A, \alpha = 0) , -E_0 \leq E \leq E_0 \\ \frac{-B(\dot{E}-A+\frac{T}{B})}{J\dot{E}} & (\dot{E} = A - \frac{T}{B}, \alpha = 0) , E > E_0 \\ \frac{-B(\dot{E}-A-\frac{T}{B})}{J\dot{E}} & (\dot{E} = A + \frac{T}{B}, \alpha = 0) , E < -E_0 \end{cases}$$

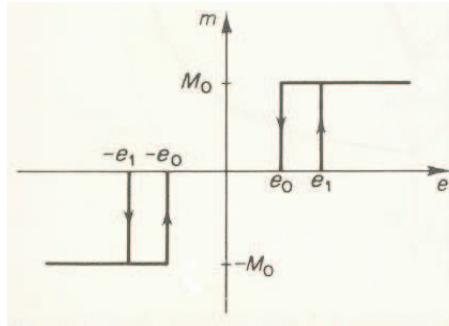


**Nota:** se  $A \geq \frac{T}{B}$ , então  $(A - \frac{T}{B}) \geq 0$ , donde para o caso  $E > E_0$  o motor não seguiria a rampa pois para  $\alpha = 0$  teríamos  $\dot{E} > 0$ .

**Exemplo:** seja o seguinte sistema de controlo com actuador não linear:



onde a não linearidade do actuador tem a seguinte característica:



com  $T = 1$ ,  $K = 4$ ,  $e_0 = 0.1$ ,  $e_1 = 0.2$ ,  $M = 0.2$ , sendo a entrada um degrau unitário. Pretende-se verificar pelo traçado das trajectórias no plano de fase  $(e, \dot{e})$  se o sistema irá exibir, ou não, um ciclo limite. A equação dinâmica do sistema:

$$T\ddot{e} + \dot{e} + K.f(e) = 0$$

consoante o estado do sistema, toma valores diferentes:

1. Para  $\dot{e} > 0$

- (a)  $e > e_1$ ,  $f(e) = M \rightarrow T\ddot{e} + \dot{e} + K.M = 0$
- (b)  $e_1 > e > -e_0$ ,  $f(e) = 0 \rightarrow T\ddot{e} + \dot{e} = 0$
- (c)  $e < -e_0$ ,  $f(e) = -M \rightarrow T\ddot{e} + \dot{e} - K.M = 0$

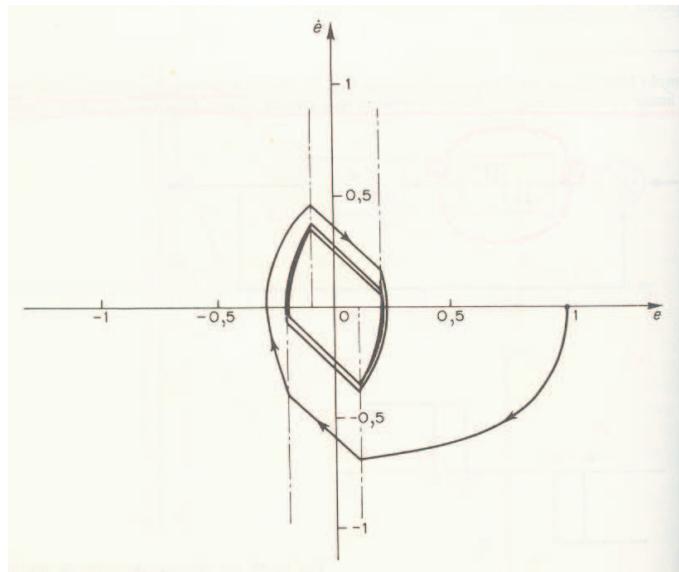
2. Para  $\dot{e} < 0$

- (a)  $e > e_0$ ,  $f(e) = M \rightarrow T\ddot{e} + \dot{e} + K.M = 0$
- (b)  $e_0 > e > -e_1$ ,  $f(e) = 0 \rightarrow T\ddot{e} + \dot{e} = 0$
- (c)  $e < -e_1$ ,  $f(e) = -M \rightarrow T\ddot{e} + \dot{e} - K.M = 0$

Resultam 3 tipos de isóclinas:

- $f(e) = M \rightarrow \frac{d\dot{e}}{de} = \alpha \Leftrightarrow \frac{-\dot{e} - K.M}{T\ddot{e}} = \alpha \Leftrightarrow \dot{e} = \frac{-K.M}{\alpha+1} = \frac{-0.8}{\alpha+1}$
- $f(e) = 0 \rightarrow \frac{d\dot{e}}{de} = \alpha \Leftrightarrow \frac{\dot{e}}{T\ddot{e}} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{T} = -1$
- $f(e) = -M \rightarrow \frac{d\dot{e}}{de} = \alpha \Leftrightarrow \frac{-\dot{e} + K.M}{T\ddot{e}} = \alpha \Leftrightarrow \dot{e} = \frac{K.M}{\alpha+1} = \frac{0.8}{\alpha+1}$

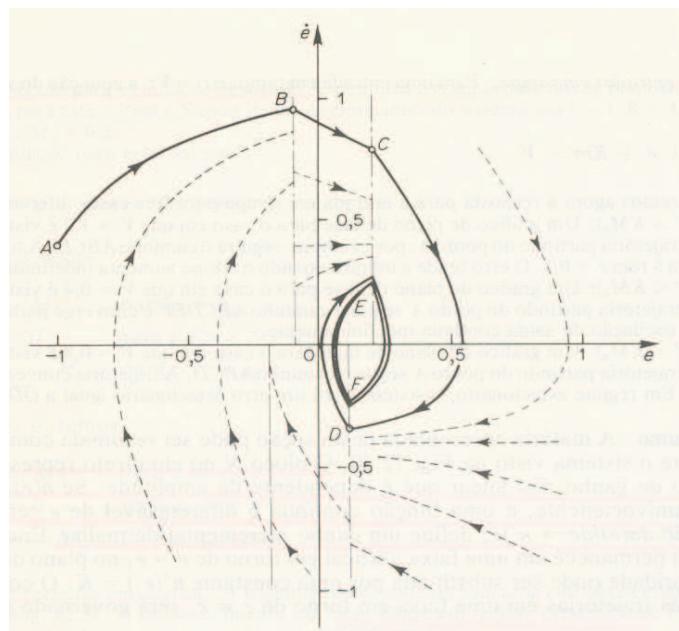
Trajectória do sistema para uma entrada em degrau unitário.



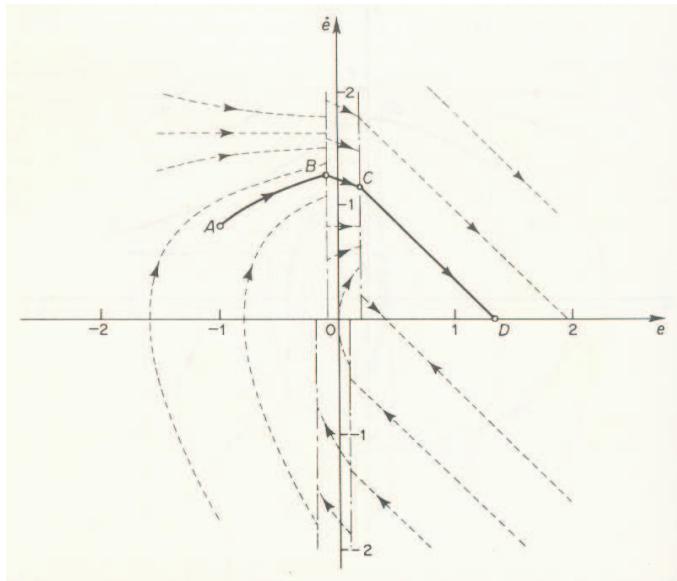
**Nota:** o sistema exibe um ciclo limite! Este resultado já era esperado (ver método da função de descrição).

Para uma entrada em rampa,  $r(t) = Vt$ , com amplitudes diferentes, resultam comportamentos radicalmente diferentes:

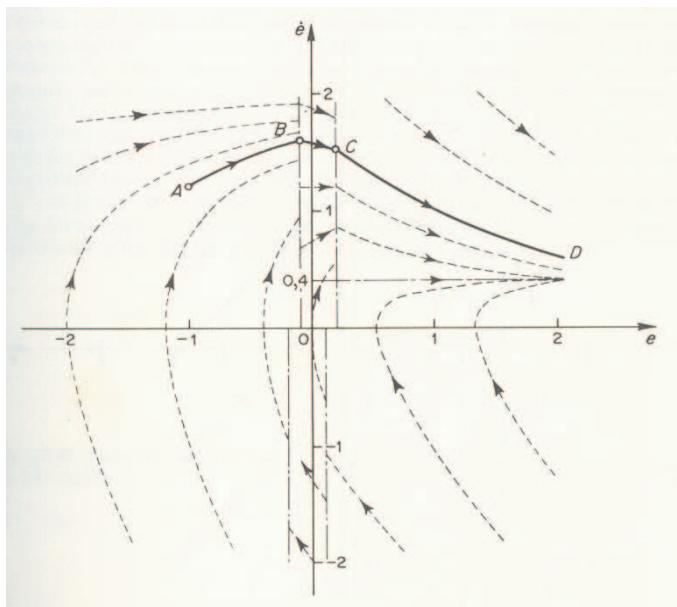
#### Caso 1: $V = 0,4$



A trajectória partindo do ponto  $A$ , por exemplo, segue o caminho  $ABCDEF$ , convergindo para um ciclo limite.

**Caso 2:  $V = 0.8$** 


A trajectória partindo do ponto  $A$ , por exemplo, segue o caminho  $ABCD$ , convergindo para o ponto  $D$ , ou seja o sistema apresenta um erro estacionário de velocidade constante e igual a  $\frac{\overline{OD}}{OD}$ .

**Caso 3:  $V = 1.2$** 


A trajectória partindo do ponto  $A$ , por exemplo, segue o caminho  $ABCD$ , sendo assimptótica à recta  $\dot{e} = 0.4$ , ou seja, o erro de seguimento à rampa tende para infinito!

## 2.4 Estabilidade via método de Lyapunov

**Objectivo:** analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares através da aplicação do método de estabilidade de Lyapunov.

**Alexandr Mihailovich Lyapunov (1857-1918):** cientista russo que apresentou na sua tese de doutoramento (1892), “*O problema geral da estabilidade do movimento*” (reditado recentemente pelo *International Journal of Control*, **55**, 3, 775–784, 1992), os dois métodos que constituem ainda hoje a base para o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares. Apesar de ter sido traduzida para francês em 1908 (por pressão de Poincaré), só em 1960, por intermédio dos cientistas franceses, Lur'e, La Salle e Lefschetz, é que a sua obra foi finalmente tomada em consideração pela comunidade de controlo.

**Importância do método de Lyapunov:** poder concluir-se acerca da estabilidade de um sistema dinâmico sem ter que resolver a equação diferencial, bastando para isso encontrar uma função de energia para o sistema (função de Lyapunov). Claro está que o problema principal passa a ser encontrar essa função de Lyapunov!

### 2.4.1 Conceitos sobre estabilidade de Lyapunov

Seja o seguinte sistema dinâmico autónomo não linear:

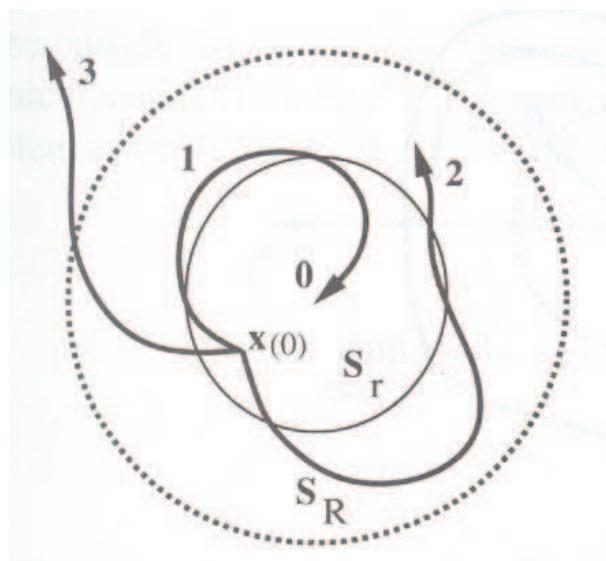
$$\dot{x}(t) = f(x)$$

**Estado de equilíbrio :** um estado  $x^*$  é um estado de equilíbrio (ou ponto de equilíbrio) do sistema se, quando  $x(t) = x^*$ , o estado mantém-se em  $x^*$  para todos os valores de tempo futuros:

$$0 = f(x^*)$$

**Estado de equilíbrio estável :** o estado de equilíbrio  $x=0$  é estável no sentido de Lyapunov se, para qualquer  $R > 0$ , for possível encontrar um  $r > 0$  tal que se  $\|x(0)\| < r$ , então  $\|x(t)\| < R$  para  $t \geq 0$ .

**Estado de equilíbrio instável :** o estado de equilíbrio  $x=0$  é instável no sentido de Lyapunov se existir pelo menos um  $R > 0$ , tal que para um  $r > 0$  que verifique  $\|x(0)\| < r$ , existir um instante  $t$  a partir do qual  $\|x(t)\| > R$ .

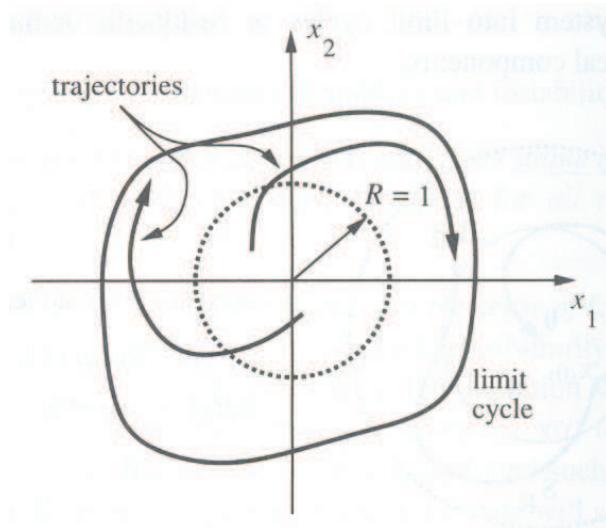


**Legenda:** (1) e (2) correspondem a trajectórias estáveis no sentido de Lyapunov, ao passo que (3) corresponde a um trajectória instável no sentido de Lyapunov.

**Exemplo:** seja o oscilador de Van der Pol:

$$\ddot{x} + 0.2(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{cases}$$

Como caracterizar o ponto de equilíbrio do sistema,  $(0,0)$ , à luz da estabilidade de Lyapunov?

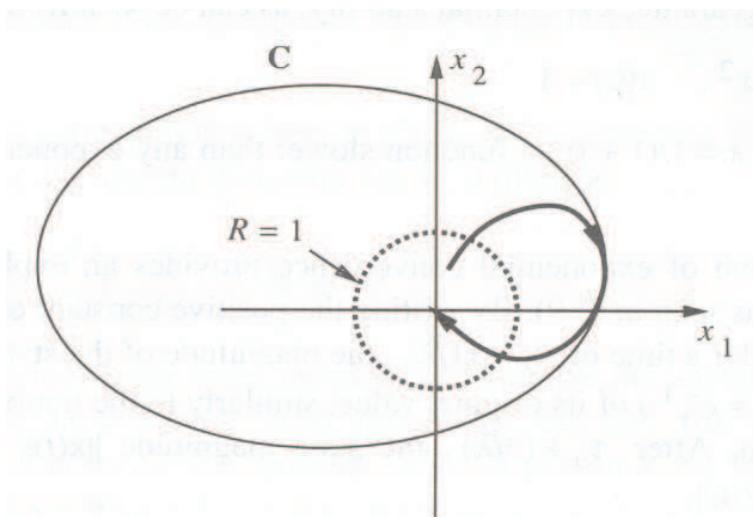


**Nota:** embora as trajectórias se mantenham dentro do ciclo limite, o ponto de equilíbrio é **instável no sentido de Lyapunov!** Instabilidade não significa  $x(t) \rightarrow \infty$ , ao contrário do que acontece nos sistemas lineares. No entanto, se  $R$  englobasse o ciclo limite diríamos que o estado de equilíbrio é **estável no sentido de Lyapunov**.

**Estabilidade assimptótica :** o estado de equilíbrio  $x=0$  é assimptoticamente estável sse:

1. For estável no sentido de Lyapunov.
2. Existir um  $r > 0$ , tal que para  $\|x(0)\| < r$  implica que  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Exemplo:** convergência para o estado de equilíbrio não implica estabilidade:



**Estado marginalmente estável :** o estado de equilíbrio  $x=0$  é marginalmente estável se for estável no sentido de Lyapunov, mas não assimptoticamente estável.

**Estabilidade assimptótica global :** o estado de equilíbrio  $x=0$  é globalmente assimptoticamente estável, se for assimptoticamente estável no sentido de Lyapunov para qualquer estado inicial.

**Estabilidade exponencial :** o estado de equilíbrio  $x=0$  é exponencialmente estável se existirem dois números estritamente positivos,  $\alpha$  e  $\lambda$ , tal que:

$$\forall t \geq 0 \quad : \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}$$

numa bola em torno da origem.

**Estabilidade exponencial global :** o estado de equilíbrio  $x=0$  é globalmente exponencialmente estável, se for exponencialmente estável para qualquer estado inicial.

### 2.4.2 Primeiro método de Lyapunov

**Ideia básica:** concluir acerca da estabilidade local de um sistema não linear através da análise de estabilidade do sistema linear resultante da aproximação linear em torno do ponto de equilíbrio. Também designado por **método de linearização de Lyapunov**.

Seja o seguinte sistema não linear, autónomo, de ordem  $n$ :

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \quad \text{ponto de equilíbrio } 0.$$

Linearizando em torno do ponto de equilíbrio:

$$\dot{x} = \underbrace{f(0)}_{=0} + \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]_{x=0} (x - 0) + o(x)$$

desprezando os termos de ordem superior:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=0}$$

### Método de Linearização de Lyapunov

- Se o sistema linearizado for *estritamente estável*, i.e.

$$\forall_i, \quad \operatorname{Re}(\lambda_i[A]) < 0$$

então o ponto de equilíbrio do sistema não linear é **assimptoticamente estável**.

- Se o sistema linearizado for *instável*, i.e.

$$\exists_i, \quad \operatorname{Re}(\lambda_i[A]) > 0$$

então o ponto de equilíbrio do sistema não linear é **instável**.

- Se o sistema linearizado for *marginalmente estável*, i.e.

$$\exists_i, \quad \operatorname{Re}(\lambda_i[A]) = 0$$

então o ponto de equilíbrio do sistema não linear pode ser assimptoticamente estável, marginalmente estável, ou instável.

**Exemplo:** Seja o sistema não linear de 2<sup>a</sup> ordem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 + x_1 \cos x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2 + (x_1 + 1)x_1 + x_1 \sin x_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

A linearização em torno do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ , desprezando os termos de ordem superior:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \approx f_1(x_1, x_2)|_{(0,0)} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{(0,0)}(x_1 - 0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{(0,0)}(x_2 - 0) \\ \dot{x}_2 \approx f_2(x_1, x_2)|_{(0,0)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{(0,0)}(x_1 - 0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{(0,0)}(x_2 - 0) \end{cases}$$

Desenvolvendo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (0 - 0 \cdot \cos 0) + (\cos x_2)_{(0,0)} \cdot x_1 + (2x_2 - x_1 \sin x_2)_{(0,0)} \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = (0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \sin 0) + (2x_1 + 1 + \sin x_2)_{(0,0)} \cdot x_1 + (1 + x_1 \cos x_2)_{(0,0)} \cdot x_2 \\ \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}, \quad |\lambda I - A| = 0, \quad \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = 1$$

**Conclusão:** o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  é **instável**!

**Exemplo:** Seja o sistema não linear de 1<sup>a</sup> ordem, com  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\dot{x} = ax + bx^5, \quad \text{Ponto de equilíbrio: } x = 0.$$

A linearização em torno de  $x = 0$  resulta:

$$\dot{x} = ax$$

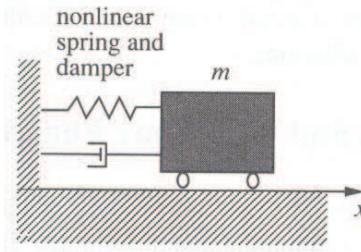
Donde:

- Caso  $a < 0$  : sistema é **assimptoticamente estável**.
- Caso  $a > 0$  : sistema é **instável**.
- Caso  $a = 0$  : **nada se conclui**. O 1º método de Lyapunov não é conclusivo!

### 2.4.3 Segundo método de Lyapunov

**Ideia básica:** a estabilidade de um sistema não linear depende da forma como o sistema dissipá energia. Se, para entrada nula, a dissipação de energia do sistema for contínua, então o sistema atinge um ponto de equilíbrio. Por não recorrer à linearização do sistema, este método é também designado por **método directo de Lyapunov**.

**Exemplo motivador:** seja o seguinte sistema mecânico não linear, massa-mola-amortecedor:



$$m\ddot{x} + b\dot{x}|x| + k_0x + k_1x^3 = 0$$

A energia total do sistema,  $V(\mathbf{x})$  (com  $\mathbf{x} = [x \ \dot{x}]^T$ ), é dada por:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} \\ V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_{x=0}^x (k_0x + k_1x^3) dx \\ V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4 \end{aligned}$$

**Conclusão 1:** a energia do sistema é sempre positiva, anulando-se apenas quando  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ .

Por outro lado, a variação no tempo da energia total do sistema, resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x} \quad \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \dot{x}} \right] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} k_0x + k_1x^3 & m\dot{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = (k_0x + k_1x^3)\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= (k_0x + k_1x^3)\dot{x} + m\dot{x} \left( -\frac{b}{m}\dot{x}|x| - \frac{k_0x + k_1x^3}{m} \right) \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= -b|\dot{x}|^3 \end{aligned}$$

**Conclusão 2:** a taxa de dissipação de energia do sistema é sempre negativa, anulando-se quando a velocidade é nula, i.e., para  $\dot{x} = 0$ .

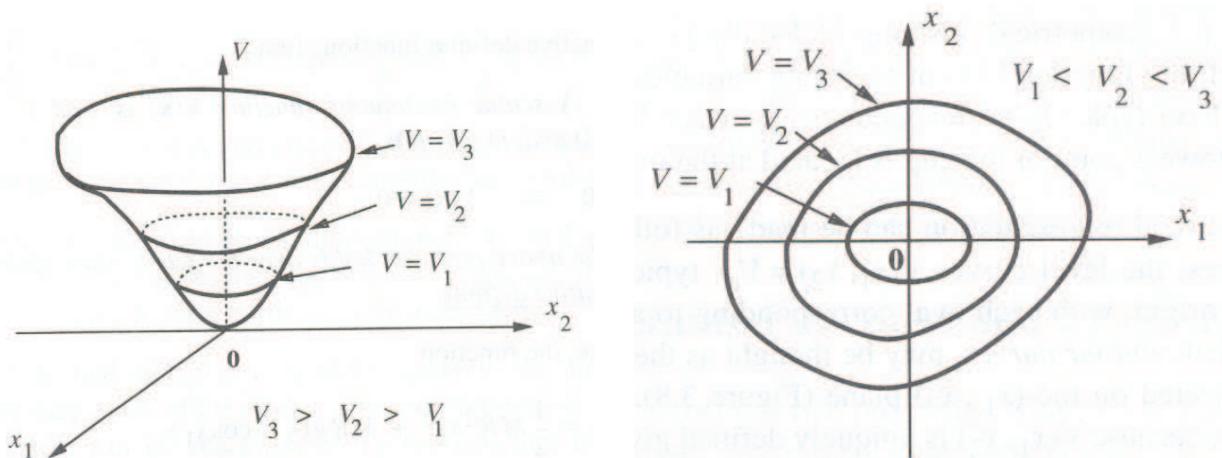
**Questão:** como encontrar um função de energia para o sistema?

**Função definida positiva :** uma função escalar  $V(\mathbf{x})$  diz-se *localmente definida positiva* se  $V(\mathbf{x}_0) = 0$  e, numa bola  $\mathcal{B}_{R_0}$  de raio  $R_0$ :

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0$$

Se  $V(\mathbf{x}_0) = 0$  e esta propriedade for válida em todo o espaço de estados, então  $V(\mathbf{x})$  diz-se *globalmente definida positiva*.

**Exemplo:** caso particular de  $V(\mathbf{x})$ , com  $\mathbf{x}_0 = 0$



**Nota:** esta função definida positiva representa uma “distância” à origem.

### Definições:

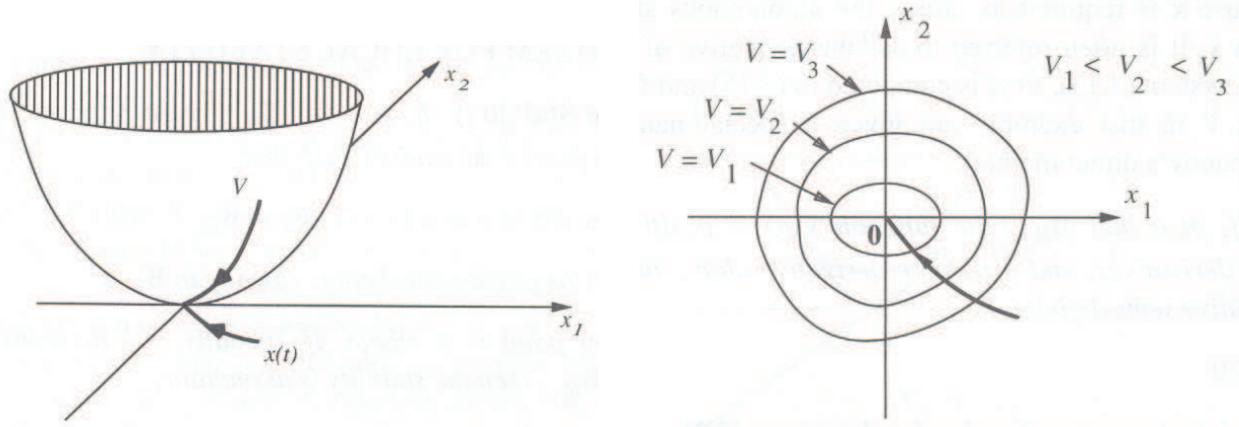
- Função  $V(\mathbf{x})$  é **definida positiva** se:  $V(0) = 0$ , e  $V(\mathbf{x}) > 0$  para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ .
- Função  $V(\mathbf{x})$  é **semi-definida positiva** se:  $V(0) = 0$ , e  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ .
- Função  $V(\mathbf{x})$  é **definida negativa** se:  $-V(\mathbf{x})$  for definida positiva.
- Função  $V(\mathbf{x})$  é **semi-definida negativa** se:  $-V(\mathbf{x})$  for semi-definida positiva.

### Exemplos:

1.  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$  ...é definida positiva.
2.  $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2$  ...é semi-definida positiva.
3.  $V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$  ...é definida negativa.
4.  $V(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_2^2$  ...é indefinida!
5.  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}$  ...é definida positiva.

**Função de Lyapunov :**  $V(\mathbf{x})$  é uma função de Lyapunov se, numa bola  $\mathcal{B}_{R_0}$  de raio  $R_0$ ,  $V(\mathbf{x})$  for definida positiva com derivadas parciais contínuas, e se a sua derivada ao longo de qualquer trajectória de estado do sistema for semi-definida negativa, i.e.,

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$$



**Interpretação:** à medida que o estado do sistema avança ao longo de uma trajectória qualquer, de  $x(0), x(1), \dots, x(N)$ , os valores correspondentes em  $V(\mathbf{x})$  vão decrescendo:  $V_0 > V_1 > \dots > V_N$ .

### \*\* Teorema da estabilidade local de Lyapunov \*\*

Se, numa bola  $\mathcal{B}_{R_0}$  de raio  $R_0$ , existir uma função escalar  $V(\mathbf{x})$  de primeiras derivadas parciais contínuas, tal que:

- $V(\mathbf{x})$  é definida positiva (localmente em  $\mathcal{B}_{R_0}$ ).
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  é semi-definida negativa (localmente em  $\mathcal{B}_{R_0}$ ).

então o ponto de equilíbrio,  $\mathbf{x}=0$ , é **estável** no sentido de Lyapunov.

Se  $\dot{V}(\mathbf{x})$  for definida negativa localmente em  $\mathcal{B}_{R_0}$ , i.e., se:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{V}(\mathbf{x}) < 0$$

então o ponto de equilíbrio,  $\mathbf{x}=0$ , é **assimptoticamente estável** no sentido de Lyapunov (localmente em  $\mathcal{B}_{R_0}$ ).

**Exemplo:** estudar a estabilidade do sistema em torno do ponto de equilíbrio, à luz do 2º método de Lyapunov.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) \end{cases}$$

- Ponto de equilíbrio do sistema:  $(x_1, x_2) = (0, 0)$
- Admitir a seguinte função de Lyapunov para o sistema:

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

- A sua derivada em torno da trajectória de estado é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cc} 2x_1 & 2x_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) \end{array} \right] \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2 - 2)(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

**Conclusão:** como  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  para  $x_1^2 + x_2^2 < 2$ , então:

$\dot{V}(\mathbf{x})$  é *definida negativa* localmente na bola bidimensional  $\mathcal{B}_2$

onde, a origem  $(0, 0)$  é **assimptoticamente estável** (localmente em  $\mathcal{B}_2$ ).

### \*\* Teorema da estabilidade global de Lyapunov \*\*

Se existir uma função escalar  $V(\mathbf{x})$  de primeiras derivadas parciais contínuas, tal que:

- $V(\mathbf{x})$  é definida positiva,  $\forall \mathbf{x}$ .
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  é definida negativa,  $\forall \mathbf{x}$ .
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  quando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ,  $\forall \mathbf{x}$ .

então o ponto de equilíbrio,  $\mathbf{x}=0$ , é **globalmente assimptoticamente estável** no sentido de Lyapunov.

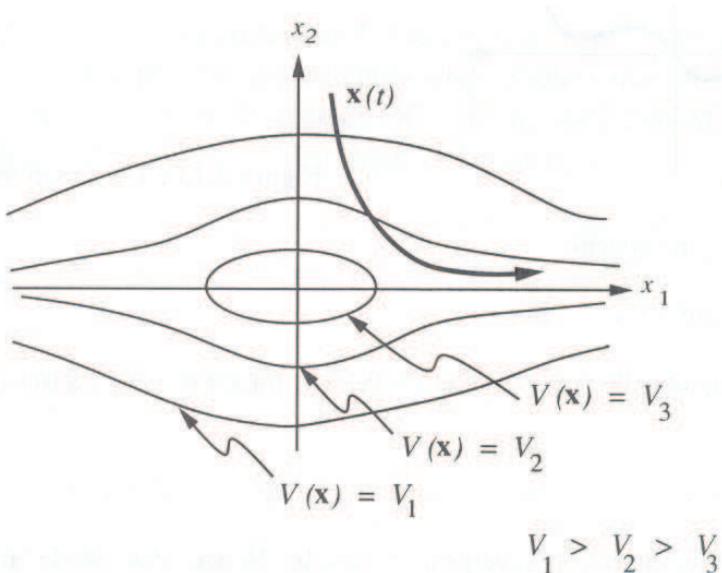
**Questão:** no exemplo apresentado nesta página, como caracteriza a estabilidade do ponto de equilíbrio?

**Interpretação gráfica da condição:**  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  quando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$

Seja a seguinte função definida positiva:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

No entanto, por se tratar de uma superfície cujas curvas de contorno não são fechadas, pode resultar a seguinte situação:



onde, apesar de se verificar que à medida que o estado do sistema avança ao longo da trajectória  $\mathbf{x}(t)$  os valores correspondentes a  $V(\mathbf{x})$  irem diminuindo,  $V_1 > V_2 > V_3 > \dots$ , tal não significa que o estado esteja a tender para a origem!

### \*\* Teorema da instabilidade de Lyapunov \*\*

Se, numa bola  $\mathcal{B}_{R_0}$  de raio  $R_0$ , existir uma função escalar  $V(\mathbf{x})$  de primeiras derivadas parciais contínuas, tal que:

- $V(\mathbf{x})$  é definida positiva (localmente em  $\mathcal{B}_{R_0}$ ).
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  é definida positiva (localmente em  $\mathcal{B}_{R_0}$ ).

então o ponto de equilíbrio,  $\mathbf{x}=0$ , é **instável** no sentido de Lyapunov.

**Exemplo:** analisar e concluir quanto à estabilidade dos seguintes sistemas:

$$\text{Sistema I : } \begin{cases} \dot{x} = y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad \text{Sistema II : } \begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

- Pontos de equilíbrio dos 2 sistemas:  $(0, 0)$ .
- Aplicação do 1º método de Lyapunov: linearização em torno de  $(0, 0)$ .

$$\text{Sistema I : } \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \text{Sistema II : } \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Donde resultam os mesmos valores próprios:  $\lambda_{1,2} = \pm j$ .

**Conclusão:** ambos os sistemas se comportam como *centros* em torno da origem, donde o 1º método de Lyapunov é **inconclusivo**: a origem pode ser assimptoticamente estável, marginalmente estável, ou instável!

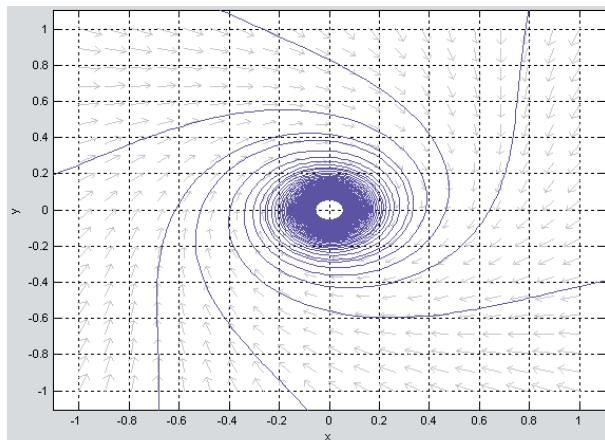
- Aplicação do 2º método de Lyapunov, considerando a seguinte função definida positiva:

$$V(\mathbf{x}) = x^2 + y^2, \quad \text{com: } \mathbf{x} = [x \ y]^T$$

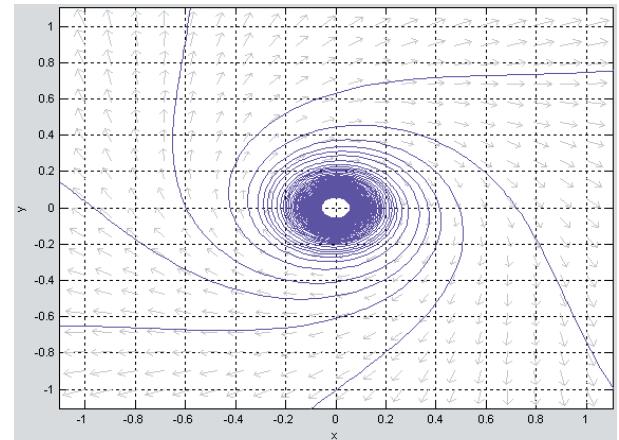
- A determinação da derivada  $\dot{V}(\mathbf{x}) = dV(\mathbf{x})/dt$  para cada um dos sistemas, resulta em:

$$\text{Sistema I : } \dot{V}(\mathbf{x}) = -2(x^2 + y^2)^2 < 0 \quad \text{Sistema II : } \dot{V}(\mathbf{x}) = 2(x^2 + y^2)^2 > 0$$

**Conclusão:** pelo 2º método de Lyapunov foi possível concluir que o Sistema I é **globalmente assimptoticamente estável**, e que o Sistema II é **instável**.

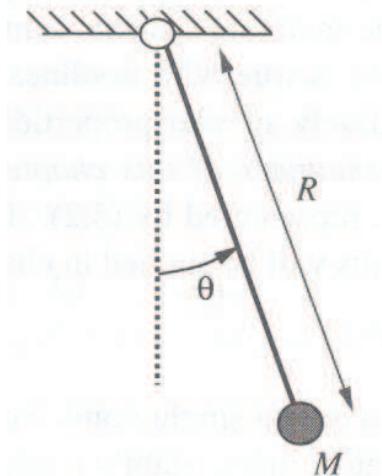


Sistema I



Sistema II

**Exemplo:** analisar a estabilidade do pêndulo com amortecimento viscoso.



$$MR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + MgR \sin \theta = 0$$

Com  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ , resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{MR^2}x_2 - \frac{g}{R} \sin x_1 \end{cases}$$

Pontos de equilíbrio:  $(x_1, x_2) = (k\pi, 0)$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots$

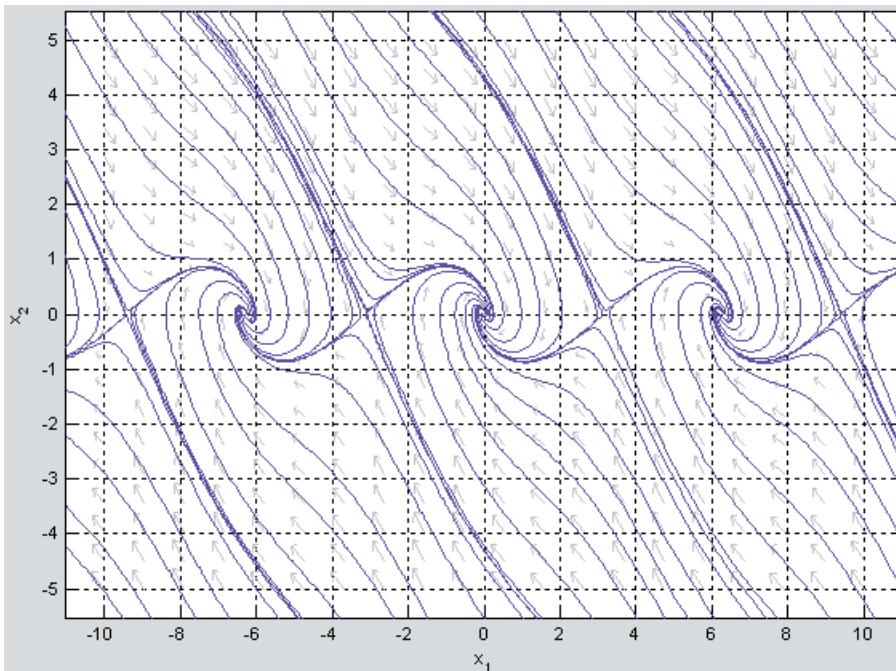
Considerar, sem perda de generalidade,  $b=1$ , e  $R = \sqrt{1/M} = g$ .

- Aplicação do 1º método de Lyapunov: linearização em torno dos pontos de equilíbrio.

$$\nabla = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}_{(k\pi, 0)}$$

cujos valores próprios são:  $|\nabla - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda + \cos(k\pi) = 0$ , resultando 2 comportamentos distintos:

- Para  $x_1 = 2k\pi$  :  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ , **foco estável**.
- Para  $x_1 = (2k+1)\pi$  :  $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ , **ponto sela instável**



- Aplicar o segundo método de Lyapunov, considerando a seguinte função de energia definida positiva:

$$V(\mathbf{x}) = (1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2} > 0$$

- Determinar a derivada  $dV(\mathbf{x})/dt$ :

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = -x_2^2 \leq 0$$

**Conclusão:** a origem,  $(0, 0)$ , é apenas **estável no sentido de Lyapunov**, pois:

- $V(\mathbf{x})$  é uma função definida positiva.
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  é semi-definida negativa.

Mas... nós sabemos que o pêndulo com atrito é um sistema assintoticamente estável!

- Aplicar o segundo método de Lyapunov, considerando agora uma nova função de energia definida positiva:

$$V(\mathbf{x}) = 2(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 > 0$$

- Determinar a derivada  $dV(\mathbf{x})/dt$ :

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = -(x_2^2 + x_1 \sin x_1) < 0$$

**Conclusão:** a origem,  $(0, 0)$ , é **globalmente assintoticamente estável**, pois:

- $V(\mathbf{x})$  é uma função definida positiva,  $\forall \mathbf{x}$ .
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  é definida negativa,  $\forall \mathbf{x}$ .
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , quando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ,  $\forall \mathbf{x}$ .

**Conclusão:** as condições do Teorema de Lyapunov são apenas suficientes! A falha de uma função de Lyapunov candidata em demonstrar a estabilidade, ou a estabilidade assintótica, não significa que o ponto de equilíbrio não seja estável, ou não seja assintoticamente estável! Apenas significa que, com aquela função de Lyapunov, não foi possível caracterizar a estabilidade do ponto de equilíbrio.

### Questões:

1. Como verificar se o sistema é efectivamente assintoticamente estável, quando  $\dot{V}$  é apenas semi-definida negativa?
2. Como encontrar uma função de Lyapunov para um dado sistema?

#### 2.4.4 Conjuntos invariantes

**Objectivo:** a teoria dos conjuntos invariantes vai permitir concluir sobre a *estabilidade assíntotica* em situações onde a derivada da função de Lyapunov,  $\dot{V}(\mathbf{x})$ , é *semi-definida negativa*.

**Definição:** um conjunto  $G$  é um **conjunto invariante** de um sistema dinâmico se qualquer trajectória que comece em  $G$ , continua em  $G$  para todos os instantes futuros.

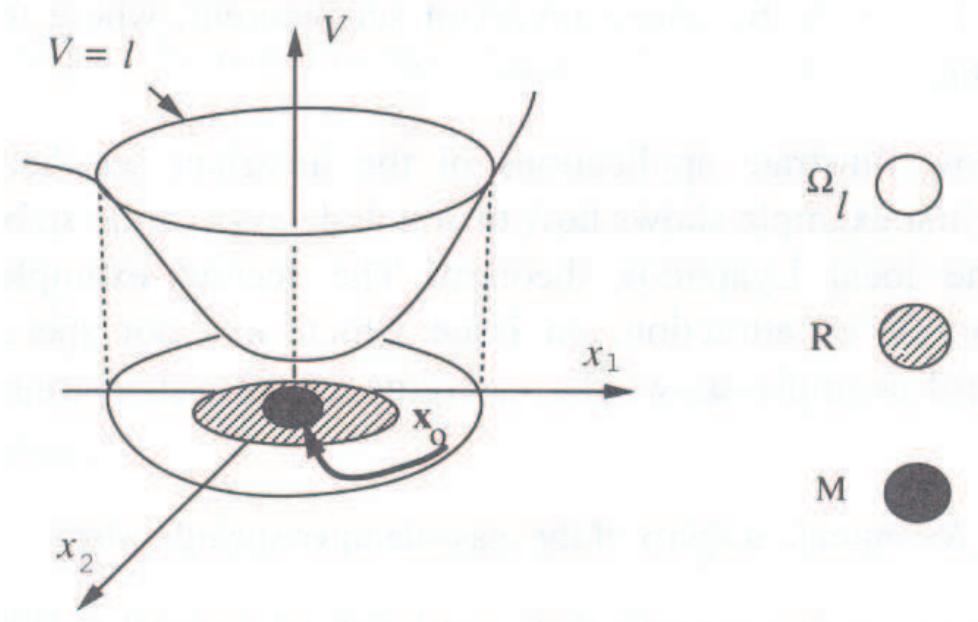
*Ex: domínio de atracção de um ponto de equilíbrio, ponto de equilíbrio, ciclo limite (estável ou instável), todo o espaço de estados!*

#### \*\* Teorema do conjunto invariante local (Teorema de LaSalle) \*\*

Considere um sistema autónomo,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , com  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  contínua e de primeiras derivadas parciais contínuas, e seja  $V(\mathbf{x})$  uma função escalar de primeiras derivadas parciais contínuas. Suponha que:

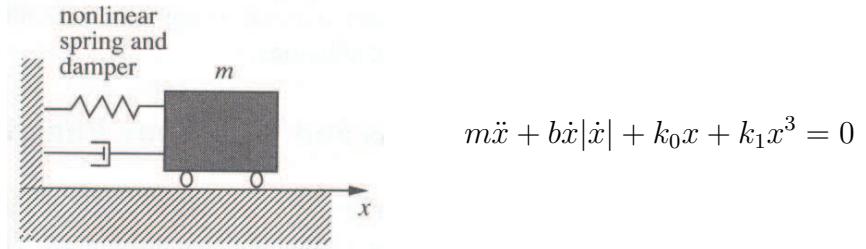
- Para  $l > 0$ , a região  $\Omega_l$  definida por  $V(\mathbf{x}) < l$  é limitada.
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_l$

Seja  $R$  o conjunto dos pontos em  $\Omega_l$  onde  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ , e  $M$  o maior conjunto invariante de  $R$ . Então, qualquer solução  $x(t)$  iniciada em  $\Omega_l$  tende para  $M$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ .



**Nota:** tudo se resume na determinação de  $M$ , i.e., o maior conjunto invariante de  $R$ .

**Exemplo:** revisitando o sistema mecânico não linear, massa-mola-amortecedor:



A energia total do sistema,  $V(\mathbf{x})$ , e sua derivada,  $\dot{V}(\mathbf{x})$ , são:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4 > 0$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -b|\dot{x}|^3 \leq 0, \quad \forall x$$

**Questão:** será o sistema assimptoticamente estável, apesar de  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ ?

Pelo Teorema do conjunto invariante local, temos:

- **Conjunto R:**  $\dot{x} = 0$ , i.e., trajectória sobre o eixo horizontal no plano  $(x, \dot{x})$ .
- **Conjunto invariante M:** qualquer trajectória que comece em  $M$ , deverá manter-se em  $M$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Assumir que o ponto  $(x, \dot{x}) = (x_*, 0)$  pertence ao conjunto invariante  $M$ . Então, a aceleração do sistema nesse ponto deverá ser nula, única forma de garantir que o estado do sistema permanece em  $(x_*, 0)$ !

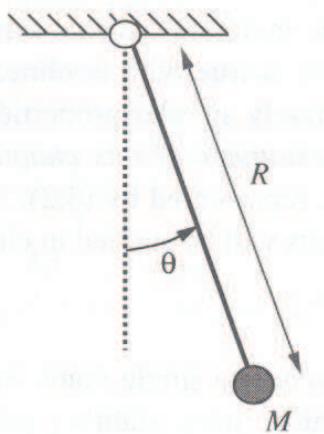
Vamos confirmar se assim é, ou não:

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x}|\dot{x}| - \frac{k_0}{m}x - \frac{k_1}{m}x^3 = -\frac{k_0}{m}x_* - \frac{k_1}{m}x_*^3 \neq 0$$

### Conclusões:

1. Como a aceleração,  $\ddot{x} \neq 0$ , a posição  $x$  e a velocidade  $\dot{x}$  vão alterar-se, o que significa que o estado sai de  $M$ , ou seja  $(x_*, 0)$  não é um conjunto invariante.
2. É fácil concluir que o maior conjunto invariante de  $R$  corresponde apenas à origem  $(0, 0)$ , donde:  $M = (0, 0)$ .
3. Pelo teorema do conjunto invariante local, o sistema é **assimptoticamente estável**, apesar de  $\dot{V}(\mathbf{x})$  ser semi-definida negativa.

**Exemplo:** revisitando o pêndulo com amortecimento viscoso.



$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin \theta = 0$$

Com  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ , resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - \sin x_1 \end{cases}$$

Pontos de equilíbrio:  $(x_1, x_2) = (k\pi, 0)$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots$

- Função de Lyapunov candidata:

$$V(\mathbf{x}) = (1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2} > 0$$

- Derivada  $dV(\mathbf{x})/dt$ :

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_2^2 \leq 0$$

- Conjunto R:**  $x_2 = 0$ , i.e., trajectória sobre o eixo horizontal no plano  $(x, \dot{x})$ .

É fácil de perceber que, a não ser que  $x_1 = 0$ , o sistema não se mantém em  $R$ :

$$x_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0 \Rightarrow \sin x_1(t) = 0$$

onde, no segmento  $-\pi < x_1 < \pi$  da linha  $x_2 = 0$ , o sistema mantém a condição  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  apenas na origem,  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , ou seja, o conjunto invariante  $M$  do sistema corresponde à origem do espaço de estados: o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  é **assimptoticamente estável**.

### Estabilidade assimptótica com conjuntos invariantes

Considere um sistema autónomo,  $\dot{x} = f(x)$ , com  $f(x)$  contínua e de primeiras derivadas parciais contínuas, e seja  $V(\mathbf{x})$  uma função escalar de primeiras derivadas parciais contínuas. Considere que numa vizinhança  $\Omega$  da origem:

- $V(\mathbf{x})$  é localmente definida positiva.
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  é semi-definida negativa.
- O conjunto  $R$  definido para  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  contém apenas a trajectória trivial de  $\dot{x} = f(x)$ , i.e.,  $x = 0$ .

Então, a origem é **assimptoticamente estável**. Para além disso, a maior região  $\Omega_l$  dentro de  $\Omega$  definida por  $V(\mathbf{x}) < l$ , corresponde ao domínio de atracção da origem.

**Questão:** como encontrar uma função de Lyapunov para um dado sistema?

### 2.4.5 Estabilidade de sistemas lineares

Seja o seguinte sistema linear autónomo, de ordem  $n$ , com  $A$  não singular:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 = 0$$

Considere-se a seguinte função de Lyapunov candidata para o sistema (forma quadrática):

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$$

onde  $P$  é uma matriz simétrica definida positiva, i.e., para  $\mathbf{x} \neq 0$  temos que  $\mathbf{x}^T P \mathbf{x} > 0$ .

A derivada de  $V(\mathbf{x})$  em ordem ao tempo vem dada por:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T P \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P A \mathbf{x}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (A^T P + P A) \mathbf{x}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}, \quad \text{com: } Q = -(A^T P + P A) \equiv \text{Equação de Lyapunov}$$

**Conclusão:** para que a função  $V(\mathbf{x})$  seja decrescente ao longo da trajectória de estado do sistema (sistema assimptoticamente estável), a **matriz  $Q$  deverá ser definida positiva!**

### Teorema de Sylvester

Se  $P$  for uma matriz simétrica, a condição necessária e suficiente para que  $P$  seja definida positiva é que os determinantes de todos os seus menores principais sejam positivos, ou, do mesmo modo, que o menor dos seus valores próprios seja positivo,  $\min \{\lambda_i(P)\} > 0$ . Uma matriz simétrica definida positiva é sempre invertível.

Seja  $P = [p_{ij}]$  uma matriz simétrica. Então,  $P$  será definida positiva sse:

$$p_{11} > 0 \quad \wedge \quad \left| \begin{array}{cc} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{array} \right| > 0 \quad \wedge \quad \dots \quad \wedge \quad \left| \begin{array}{cccc} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{array} \right| > 0$$

**Exemplo:** confirmar que,  $V(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$ , é definida positiva.

**Exemplo:** analisar a estabilidade do seguinte sistema LIT pelo método de Lyapunov.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Admitir a seguinte função de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}, \quad \text{com: } P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} > 0$$

onde  $P$  é uma matriz definida positiva. A matriz  $Q$  será assim dada por:

$$\begin{aligned} Q &= -(A^T P + PA) = -\left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ Q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

Donde, o sistema é **assimptoticamente estável**, pois:

- $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$  é definida positiva.
- $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$  é definida negativa.

**Nota:** caso a escolha de  $P$  tivesse sido:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

Neste caso:

$$\begin{aligned} Q &= -(A^T P + PA) = -\left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ Q &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como  $Q$  não é definida positiva, **nada se conclui quanto à estabilidade do sistema!**

**Teorema:** a condição necessária e suficiente para que o sistema linear e invariante no tempo,  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , seja assíntoticamente estável é que, para uma dada matriz simétrica definida positiva,  $Q$ , a matriz  $P$  solução única da equação de Lyapunov seja simétrica definida positiva.

### Metodologia:

1. Escolher uma matriz  $Q$  que seja definida positiva.
2. Obter a matriz  $P$  solução da equação de Lyapunov:

$$Q = -(A^T P + PA)$$

3. Verificar se  $P$  é definida positiva, e concluir quanto à estabilidade do sistema.

**Exemplo:** analisar a estabilidade do seguinte sistema pelo método de Lyapunov.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Admitir a seguinte matriz simétrica definida positiva  $Q$ :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

onde  $P$  é retirada a partir do desenvolvimento da equação de Lyapunov:

$$\begin{aligned} Q &= -(A^T P + PA) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= - \left( \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Fazendo,  $p_{12} = p_{21}$ , resulta:

$$\begin{cases} p_{11} = \frac{5}{16} \\ p_{12} = p_{21} = \frac{1}{16} \\ p_{22} = \frac{1}{16} \end{cases}$$

Donde o sistema é **assimptoticamente estável**, e a função:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}, \quad \text{com: } P = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma função de Lyapunov para o sistema.

**Questão:** como encontrar uma função de Lyapunov para um **sistema não linear**?

**Teorema da estabilidade:** *Se a origem de  $\dot{x} = f(x, t)$  for estável, então existe uma função definida positiva para o sistema,  $V(x)$ , com derivada não positiva.*

**Teorema da estabilidade assimptótica:** *Se a origem de  $\dot{x} = f(x, t)$  for assimptoticamente estável, então existe uma função definida positiva para o sistema,  $V(x)$ , com derivada negativa.*

#### 2.4.6 Método de Krasovskii

Seja o seguinte sistema autónomo não linear, com  $f(\mathbf{x})$  contínua e de primeiras derivadas parciais contínuas:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

Krasovskii sugere que a escolha da função de Lyapunov para o sistema seja:

$$V(\mathbf{x}) = f^T(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$$

#### \*\* Teorema de Krasovskii \*\*

Considere o seguinte sistema autónomo,  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ , com  $f(\mathbf{x})$  contínua e de primeiras derivadas parciais contínuas, com ponto de equilíbrio na origem. Seja  $A(\mathbf{x})$  a matriz jacobiana do sistema, definida por:

$$A(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

Se a matriz,  $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + A^T(\mathbf{x})$ , for definida negativa numa vizinhança  $\Omega$  do ponto de equilíbrio, então o ponto de equilíbrio é *assimptoticamente estável*. Neste caso, uma função de Lyapunov para o sistema será:

$$V(\mathbf{x}) = f^T(\mathbf{x}).f(\mathbf{x})$$

Se  $\Omega$  corresponder ao espaço de estados total e, para além disto, se  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  quando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , então o ponto de equilíbrio é *globalmente assimptoticamente estável*.

**Exemplo:** aplicar o método de Krasovskii e concluir quanto à estabilidade do sistema não linear.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{cases}, \quad \text{Ponto de equilíbrio: } (0, 0)$$

1. Determinação de  $A(x)$  e  $A^T(x)$ , com  $x = [x_1 \ x_2]^T$ :

$$A(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix}, \quad A^T(x) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

2. Determinação de  $F(x)$ :

$$F(x) = A(x) + A^T(x) = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12x_2^2 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Teorema de Sylvester comprova-se que  $-F(x)$  é definida positiva:

$$-F(x) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 + 12x_2^2 \end{bmatrix} > 0 \quad \forall x_2$$

onde se conclui que  $F(x)$  é definida negativa, e portanto o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

3. Através da função de Lyapunov dada por:

$$\begin{aligned} V(x) &= f^T(x).f(x) = \begin{bmatrix} -6x_1 + 2x_2 & 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{bmatrix} \\ V(x) &= (-6x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2 \end{aligned}$$

é possível demonstrar que a origem é **assimptoticamente estável** (globalmente, pois  $V(x) \rightarrow \infty$ , quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ ).

**Desvantagens do método de Krasovskii:**

- Frequentemente as matrizes jacobianas não satisfazem a condição de  $F = A + A^T$  ser definida negativa.
- Para sistemas de ordem elevada pode ser difícil provar que  $F$  é definida negativa, para todo o  $x$ .

**\*\* Teorema de Krasovskii generalizado \*\***

Considere o seguinte sistema autónomo,  $\dot{x} = f(x)$ , com  $f(x)$  contínua e de primeiras derivadas parciais contínuas, com ponto de equilíbrio na origem, e seja  $A(x)$  a matriz jacobiana do sistema. Uma condição suficiente para que a origem seja *assimptoticamente estável* é que existam duas matrizes positivas definidas,  $P$  e  $Q$ , tal que para  $\forall x \neq 0$ :

$$F(x) = A^T(x)P + PA(x) + Q$$

seja semi-definida negativa numa vizinhança  $\Omega$  da origem. Neste caso, a função:

$$V(x) = f^T(x).P.f(x)$$

é uma função de Lyapunov do sistema. Se a região  $\Omega$  corresponder ao espaço de estados total e, para além disto, se  $V(x) \rightarrow \infty$  quando  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ , então o ponto de equilíbrio é *globalmente assimptoticamente estável*.

### 2.4.7 Método do gradiente variável

**Ideia básica:**

- Se existe uma função de Lyapunov,  $V(\mathbf{x})$ , capaz de demonstrar a estabilidade de um dado sistema, então essa função tem um gradiente único,  $\dot{V}(\mathbf{x})$ , ou  $\nabla V(\mathbf{x})$ .
- Se considerarmos uma forma específica para  $\nabla V(\mathbf{x})$ , podemos determinar  $V(\mathbf{x})$  através do operador integral.

Dado o sistema autônomo não linear de ordem  $n$ , com  $f(\mathbf{x})$  contínua e de primeiras derivadas parciais contínuas:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \text{com : } \mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]^T$$

1. Considerar o gradiente da função de Lyapunov (indeterminada de momento) dado por:

$$\nabla V_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x})x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2. Escolher os coeficientes  $a_{ij}(\mathbf{x})$  tais que satisfaçam as equações de Curl:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \nabla V_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \nabla V_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \nabla V_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \nabla V_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \text{simétrica}$$

3. Calcular  $\dot{V}(\mathbf{x})$  de acordo com:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot f(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \nabla V_1(\mathbf{x}) & \dots & \nabla V_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

4. Se  $\dot{V}(\mathbf{x})$  for definida negativa, ou semi-definida negativa, calcular  $V(\mathbf{x})$  integrando  $\dot{V}(\mathbf{x})$ , ou  $\nabla V(\mathbf{x})$ , de acordo com:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1, 0, \dots, 0) dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, x_2, \dots, 0) dx_2 + \dots \\ &\quad \dots + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \end{aligned}$$

5. Se  $V(\mathbf{x})$  for definida positiva, concluir quanto à estabilidade (tendo em conta  $\dot{V}(\mathbf{x})$ ).

**Exemplo:** aplicar o método do gradiente variável e concluir quanto à estabilidade do sistema não linear.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_1x_2^2 \end{cases}$$

1. Definir o gradiente da função de Lyapunov, com  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$ :

$$\begin{cases} \nabla_1(\mathbf{x}) = a_{11}(\mathbf{x})x_1 + a_{12}(\mathbf{x})x_2 \\ \nabla_2(\mathbf{x}) = a_{21}(\mathbf{x})x_1 + a_{22}(\mathbf{x})x_2 \end{cases}$$

2. Obter os coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  e  $a_{22}$  por forma a que a matriz  $F(\mathbf{x})$  seja simétrica:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \nabla V_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial a_{11}(\mathbf{x})}{\partial x_2}x_1 + a_{12}(\mathbf{x}) + \frac{\partial a_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_2}x_2 \\ a_{21}(\mathbf{x}) + \frac{\partial a_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial a_{22}(\mathbf{x})}{\partial x_1}x_2 & \frac{\partial \nabla V_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Por exemplo, admitir:  $a_{12}(\mathbf{x}) = a_{21}(\mathbf{x}) = 0$ , e  $a_{11}(\mathbf{x}) = a_{22}(\mathbf{x}) = 1$ . Neste caso, vem:

$$\begin{cases} \nabla V_1(\mathbf{x}) = x_1 \\ \nabla V_2(\mathbf{x}) = x_2 \end{cases}$$

3. Calcular  $\dot{V}(\mathbf{x})$ :

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = [\nabla V_1(\mathbf{x}) \ \nabla V_2(\mathbf{x})] \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2] \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1(-2x_1) + x_2(-2x_2 + 2x_1x_2^2) = -2x_1^2 - 2x_2^2(1 - x_1x_2)$$

A função  $\dot{V}(\mathbf{x})$  é *localmente definida negativa*, para  $(1 - x_1x_2) > 0$ .

4. Calcular  $V(\mathbf{x})$  integrando  $\nabla V(\mathbf{x})$ :

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1, 0) dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}, \quad \text{definida positiva.}$$

**Conclusão:** como  $\dot{V}(\mathbf{x})$  é definida negativa, e  $V(\mathbf{x})$  é definida positiva, o sistema é **assimptoticamente estável** em torno da origem, desde que  $(1 - x_1x_2) > 0$ .

#### 2.4.8 Desigualdades matriciais lineares

Desigualdade matricial linear  $\equiv$  LMI (*Linear Matrix Inequality*)

**Objectivo:** demonstrar como a determinação de uma função de Lyapunov para um sistema linear pode ser obtida a partir da solução de uma LMI.

A aplicação de LMI em controlo é vastíssima: estabilidade robusta de sistemas com incerteza, controlo LQG,  $H_\infty$ , controlo estocástico, controlo neuronal e fuzzy, etc...

**Definição:** uma LMI na variável  $x$  é definida do seguinte modo:

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_m F_m > 0$$

onde:

- $x \in R^m$  : variável.
- $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$ , com  $i = 0, \dots, m$  : matrizes conhecidas.

**Problema:** a análise de estabilidade de um dado sistema linear,  $\dot{x} = Ax$ , pelo método de Lyapunov, resume-se a encontrar a matriz  $P$  que verifique a seguinte condição:

$$A^T P + PA < 0, \quad \text{para: } P > 0$$

Sem o saber, Lyapunov em 1890 formulava a 1ª LMI através da equação de Lyapunov!

**Demonstração:** a equação de Lyapunov pode-se considerar uma LMI.

Considere-se, sem perda de generalidade:

$$A \in R^{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

e  $P$  simétrica, dada por:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Então, do desenvolvimento da equação de Lyapunov,  $A^T P + PA < 0$ , resulta:

$$A^T \left( p_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + p_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + p_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \left( p_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + p_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + p_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) A < 0$$

agrupando para os mesmos coeficientes de  $P$ :

$$\begin{aligned} p_{11} \left( A^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A \right) + p_{12} \left( A^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A \right) + \\ + p_{22} \left( A^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \right) < 0 \end{aligned}$$

que é equivalente a:

$$p_{11}F_1 + p_{12}F_2 + p_{22}F_3 < 0$$

$$-p_{11}F_1 - p_{12}F_2 - p_{22}F_3 > 0$$

Se,  $x_1 = -p_{11}$ ,  $x_2 = -p_{12}$  e  $x_3 = -p_{22}$ , então a equação de Lyapunov resulta no LMI em  $x$ :

$$x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3 > 0$$

**Solução do LMI:** a determinação de  $x \in R^m$  tal que o LMI se verifique é um problema de *optimização convexa* que pode ser resolvido de forma eficiente se for equacionado da seguinte forma:

$$\min_x c^T x, \quad \text{sujeito a: } x_1F_1 + x_2F_2 + \dots + x_mF_m > 0$$

Trata-se de um problema de programação semi-definida (*semi-definite programming* ou SDP), ou programação linear com restrições, para os quais existem potentes algoritmos (ver “LMI toolbox” do Matlab).

### Notas:

- $x_i$  podem tomar valores positivos ou negativos (representam os parâmetros de  $P$ ).
- Ao minimizar  $c^T x$ , procura-se os menores valores possíveis para os coeficientes de  $P$ , que resultem numa função de Lyapunov:  $V(x) = x^T P x$ , com  $P > 0$ .
- Demonstra-se que um conjunto de vários LMI,  $F_1(x) > 0, \dots, F_l(x) > 0$ , é o mesmo que um único LMI obtido através da junção de todas as matrizes  $F_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, l$  numa única matriz diagonal por blocos. Este resultado permite estender a teoria de estabilidade de Lyapunov a sistemas lineares variantes no tempo, e não lineares linearizados por troços!

## 2.5 Critério de Popov e critério do círculo

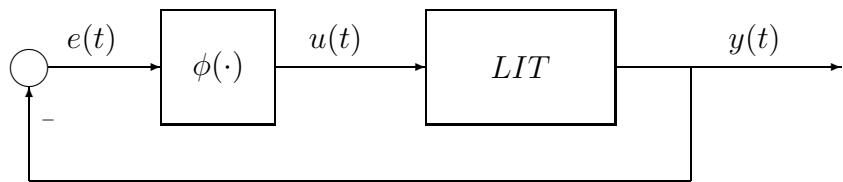
### Conjectura de Aizerman

Em 1949 o cientista russo M. A. Aizerman publicou o trabalho “*On a problem concerning the stability in the large of a dynamical system*”, na revista *Uspekhi Mat. Nauk* 4, pags. 187-188, onde apresentou a designada *conjectura de Aizerman*:

*Dado o sistema LIT:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

*integrado no anel de controlo com não linearidade  $\phi(\cdot)$ :*



*onde:*

- $A, B, C$  é mínima ( $\{A, B\}$  e  $\{A, C\}$  são completamente controlável e observável, respect.).
- Os valores próprios de  $A$  são estritamente estáveis (exclui eixo imaginário).
- $\phi(\cdot)$  pertence ao sector  $[k_1, k_2]$  definido por:

$$k_1 \leq \frac{\phi(e)}{e} \leq k_2, \quad \text{com: } k_2 \geq k_1 \geq 0$$

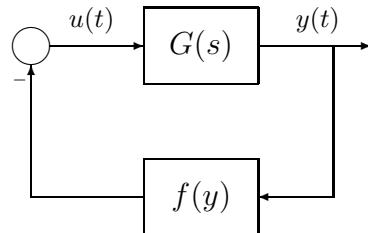
*Então, se a matriz  $[A - BC^T K]$  for estável para todos os valores de  $K \in [k_1, k_2]$ , o anel de controlo é globalmente assintoticamente estável.*

**Nota:** a conjectura de Aizerman é **FALSA!!!** O efeito das harmónicas superiores, desprezadas por Aizerman, pode levar o sistema à instabilidade! Vários “contra-exemplos” que confirmam a falsidade da conjectura de Aizerman podem ser encontrados na literatura.

**Efeito prático:** estudo exaustivo por parte da comunidade de controlo da estabilidade absoluta (assimptótica) de sistemas de controlo com esta configuração, dão origem aos critérios de Popov e do círculo: **condições suficientes para a estabilidade absoluta.**

**Contra-exemplo:** seja o seguinte sistema de controlo, com não linearidade no sensor de leitura:

(“Control systems engineering”, Stephen P. Banks, Prentice Hall, 1986)

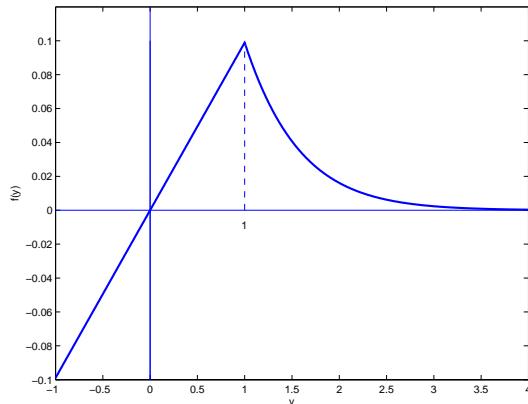


onde  $G(s)$  é um sistema LIT:

$$G(s) : \begin{cases} \ddot{x} + u = 0 \\ y = \dot{x} + x \end{cases}$$

com não linearidade  $f(y)$  dada por:

$$u(t) = f(y) = \begin{cases} \frac{y}{e(1+e)} & , \quad y \leq 1 \\ \frac{e^{-y}}{1+e^y} & , \quad y > 1 \end{cases}$$



Claramente, a não linearidade está definida em:

$$0 < \frac{f(y)}{y} \leq \frac{1}{e(1+e)}$$

De acordo com a conjectura de Aizerman, o sistema de controlo é sempre estável pois no sector da não linearidade se verifica ser sempre estável para todos os valores de  $k$ :

$$\ddot{x} + ky = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + k(\dot{x} + x) = 0, \quad \text{com: } 0 < k \leq \frac{1}{e(1+e)}$$

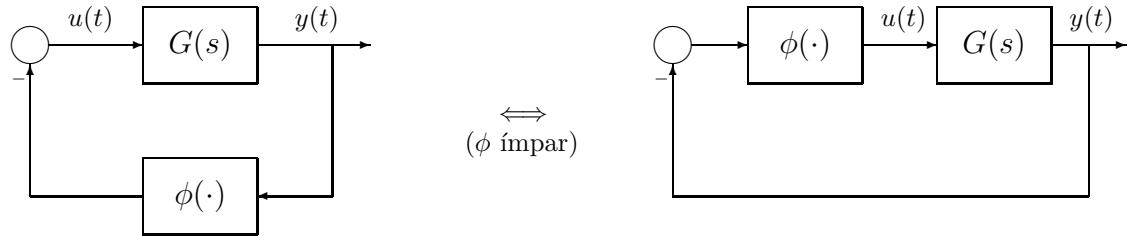
No entanto, caso  $\dot{x} + x > 1$ , ou  $y > 1$ , o sistema de controlo instabiliza:

$$\ddot{x} + \frac{e^{-y}}{1+e^y} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{e^{-(\dot{x}+x)}}{1+e^{\dot{x}+x}} = 0 \quad , \quad \equiv \quad \text{Instável!}$$

**Conclusão:** a conjectura de Aizerman é falsa!

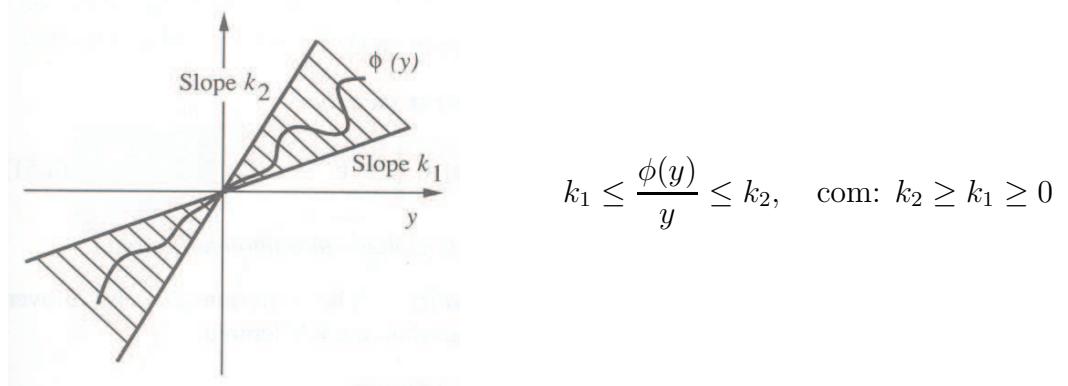
### Critério de Popov

- Aplicado a sistemas de controlo descritos por:



onde:

- Sistema  $G(s)$  é linear, invariante no tempo, estritamente próprio, e estritamente estável (ou Hurwitz, i.e.,  $\forall i \operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ ).
- A não linearidade  $\phi(\cdot)$  é invariante no tempo, ímpar, sem memória (saída única para cada entrada), e definida no sector  $K \in [k_1, k_2]$ :



- Estabelece a **condição suficiente** para a estabilidade assintótica do sistema de controlo, i.e., garante a existência de uma função de Lyapunov para o sistema. Caso esta condição não se verifique, nada se conclui quanto à estabilidade!
- Não se baseia em aproximações (como no método da função de descrição), embora não permita identificar ciclos limite.
- Permite uma interpretação gráfica da estabilidade do sistema, para o caso SISO.

### \*\* Critério de Popov \*\*

*Para qualquer condição inicial, a saída do sistema de controlo é limitada e tende para 0 quando  $t \rightarrow \infty$ , se existir um número real  $q$ , e um  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeno, tal que:*

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)G(j\omega)] + \frac{1}{K} \geq \delta > 0, \quad \forall \omega \geq 0$$

## Interpretação gráfica do critério de Popov

Defina-se:

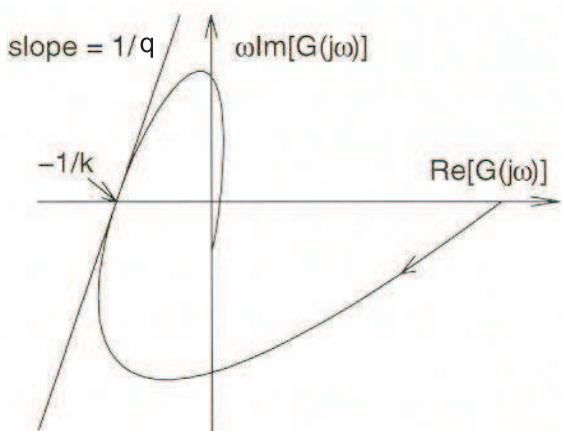
- $G(j\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega)]$
- $G^*(j\omega) = \underbrace{\operatorname{Re}[G(j\omega)]}_{X(j\omega)} + j \underbrace{\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)]}_{Y(j\omega)} = X(j\omega) + j Y(j\omega)$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}[(1 + j\omega q)G(j\omega)] + \frac{1}{K} &\geq \delta > 0 \\
 \operatorname{Re}[G(j\omega) + j\omega q G(j\omega)] + \frac{1}{K} &\geq \delta > 0 \\
 \operatorname{Re}\{\operatorname{Re}[G(j\omega)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega)] + j\omega q \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j\omega q j \operatorname{Im}[G(j\omega)]\} + \frac{1}{K} &\geq \delta > 0 \\
 \underbrace{\operatorname{Re}[G(j\omega)]}_{=X(j\omega)} + \underbrace{\operatorname{Re}[j \operatorname{Im}[G(j\omega)]]}_{=0} + \underbrace{\operatorname{Re}[j\omega q \operatorname{Re}[G(j\omega)]]}_{=0} - \underbrace{\operatorname{Re}[q\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)]]}_{=q Y(j\omega)} + \frac{1}{K} &\geq \delta > 0 \\
 X(j\omega) - qY(j\omega) + \frac{1}{K} &\geq \delta > 0
 \end{aligned}$$

Se representarmos o gráfico de  $\operatorname{Re}[G(j\omega)]$  versus  $\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)]$ , ou  $X(j\omega)$  versus  $Y(j\omega)$ , então a condição anterior é satisfeita caso a curva de  $G^*(j\omega)$  se situe à direita da linha que intercepta o ponto  $-\frac{1}{K} + j0$  com uma inclinação de  $\frac{1}{q}$ , i.e., caso  $G^*(j\omega)$  se situe à direita da **linha de Popov** ( $\delta = 0$ ):

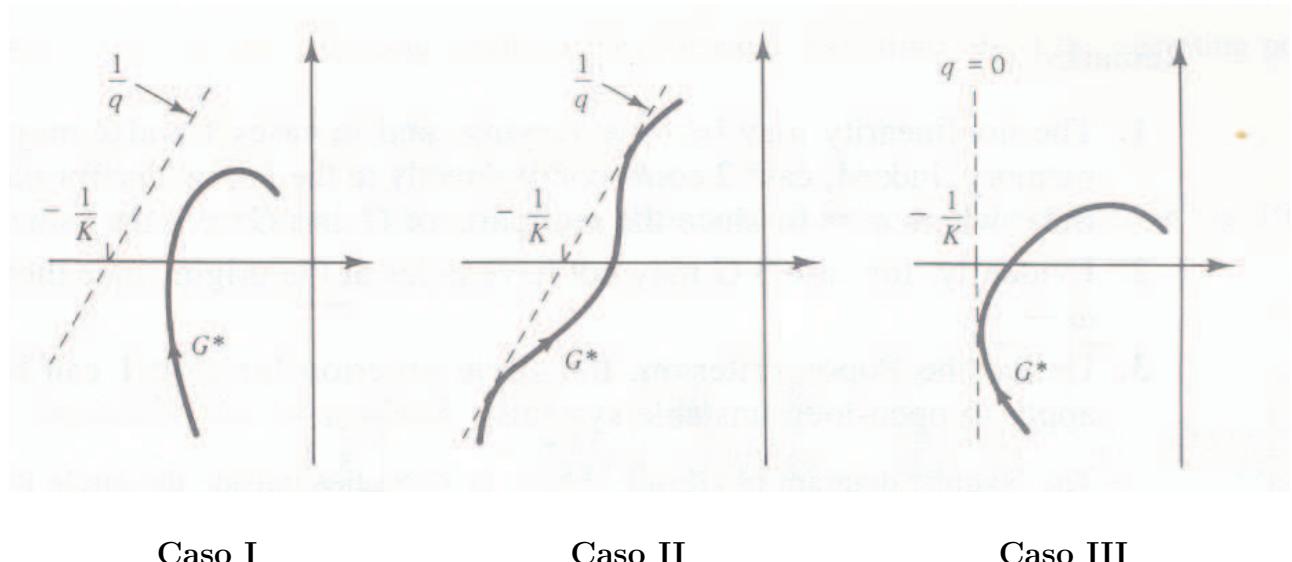
$$Y(j\omega) = \frac{X(j\omega) + \frac{1}{K}}{q} \quad \text{ou,} \quad Y(j\omega) = \frac{1}{q}X(j\omega) + \frac{1}{qK}$$



Para um  $K$  fixo, existe algum  $q$  que garanta que  $G^*(j\omega)$  fique totalmente à direita da linha de Popov?

O critério de Popov permite encontrar o sector onde “vive” a não linearidade que garante a estabilidade assimptótica do sistema.

### Análise gráfica do critério de Popov



Caso I

Caso II

Caso III

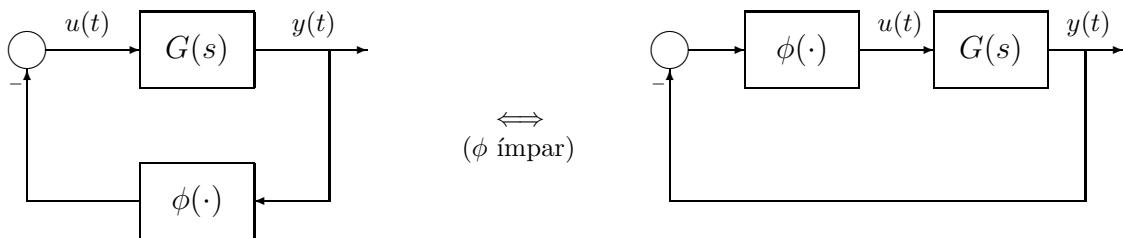
- **Caso I:** a não linearidade poderá existir no sector  $[0, k_2]$ , com  $k_2$  correspondente ao valor de  $G^*(j\omega)$  cuja fase é  $-180^\circ$ .
- **Caso II:** a não linearidade só poderá existir no sector  $[0, K]$ , caso contrário a estabilidade assintótica não é garantida pois a linha de Popov cruzaria o gráfico de  $G^*(j\omega)$ : caso  $k_2 > K$ , o sistema de controlo poderá ser estável ou instável!
- **Caso III:** ainda é possível aumentar o limite superior do sector onde “vive” a não linearidade, desde que se baixe o declive da linha de Popov.

### Desvantagens do critério de Popov:

1. O sistema deverá ser estritamente estável: não se aplica a sistemas com pólos no eixo imaginário, ou instáveis.
2. A não linearidade não poderá ser variante no tempo ou com memória: exclui, e.g., a histerese!
3. É necessário representar graficamente a resposta em frequência do sistema modificado,  $G^*(j\omega)$ .

## Critério do círculo

- Aplicados a sistemas de controlo descritos por:



- Estabelece a **condição suficiente** para a estabilidade assintótica do sistema de controlo, i.e., garante a existência de uma função de Lyapunov para o sistema. Caso esta condição não se verifique, nada se conclui quanto à estabilidade!
- Não se baseia em aproximações (como no método da função de descrição), embora não permita identificar ciclos limite.
- Corresponde a uma generalização do teorema de estabilidade de Nyquist (embora apenas como *condição suficiente* de estabilidade) baseando-se no diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$ .

### \*\* Critério do círculo \*\*

Seja  $\{A, B, C, D\}$  a realização mínima de um sistema LIT,  $G(s)$ , completamente controlável e observável, integrado no anel de controlo com não linearidade dada por  $\phi(\cdot) \in [k_1, k_2]$ . O sistema de controlo é absolutamente estável (origem é globalmente assimptoticamente estável) sse:

- $\phi \in [k_1, \infty]$  e  $G(s)/[1 + k_1G(s)]$  é estritamente real positiva, ou
- $\phi \in [k_1, k_2]$ , com  $k_2 - k_1 = k > 0$ , e  $[1 + k_2G(s)]/[1 + k_1G(s)]$  é estritamente real positiva.

**Definição:** uma função  $G(s)$  é **estritamente real positiva** (*strictly positive real (SPR)*) sse:

1.  $\operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0$ ,  $\forall \omega \in [-\infty, +\infty]$  i.e., o diagrama de Nyquist situa-se todo no 1º e 4º quadrantes.
2.  $G(s)$  for estritamente estável (ou Hurwitz, i.e.,  $\forall i \operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ ).

## Interpretação gráfica do critério do círculo

**Caso 1:**  $\phi \in [\alpha, \beta]$ , com  $\beta > \alpha > 0$

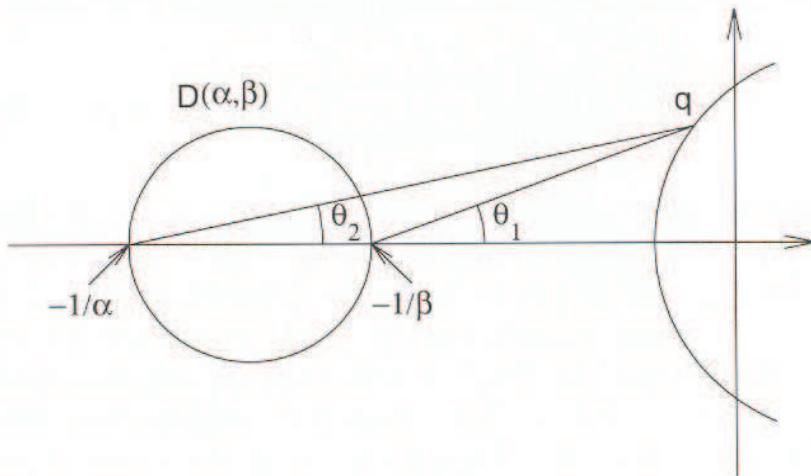
1. Significado gráfico de:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{1 + \beta G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)} \right] > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, +\infty]$$

Multiplicando por  $\alpha/\beta > 0$ , resulta a expressão equivalente:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)} \right] > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, +\infty]$$

O numerador e denominador correspondem às linhas que ligam  $q$  (um ponto no diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$ ) a  $-(1/\beta) + j0$  e  $-(1/\alpha) + j0$ , respectivamente:



Por outro lado, a parte real da razão entre dois números complexos é positiva se o ângulo entre os dois números for menor que  $\pi/2$ , i.e.,  $|\theta_1 - \theta_2| < \pi/2$ . Esta condição implica que o ponto  $q$  esteja sempre fora do círculo definido por  $D(\alpha, \beta)$ .

**Conclusão 1:** o diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  não deverá entrar no círculo definido por  $D(\alpha, \beta)$ .

2.  $[1 + \beta G(s)]/[1 + \alpha G(s)]$  é Hurwitz se  $G(s)/[1 + \alpha G(s)]$  for Hurwitz.

**Conclusão 2:** o diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  não deverá intersectar o ponto  $-(1/\alpha) + j0$  e deverá envolvê-lo  $m$  vezes no sentido anti-horário, sendo  $m$  o número de pólos instáveis de  $G(s)$ . Juntando com a **Conclusão 1**,  $G(j\omega)$  deverá envolver  $D(\alpha, \beta)$   $m$  vezes!

**Caso 2:**  $\phi \in [\alpha, \beta]$ , com  $\beta > 0$  e  $\alpha = 0$

1. Significado gráfico de:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{1 + \beta G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)} \right] > 0, \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}[1 + \beta G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, +\infty]$$

ou seja:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] > -\frac{1}{\beta}, \quad \forall \omega \in [-\infty, +\infty]$$

**Conclusão 1:** o diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  deverá estar à direita da linha recta vertical definida por  $\operatorname{Re}[s] > -1/\beta$ .

2.  $1 + \beta G(s)$  é Hurwitz se  $G(s)$  for Hurwitz.

**Conclusão 2:** o sistema  $G(s)$  deverá ter todos os pólos com parte real negativa.

**Caso 3:**  $\phi \in [\alpha, \beta]$ , com  $\alpha < 0 < \beta$

1. Significado gráfico de:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{1 + \beta G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)} \right] > 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, +\infty]$$

Multiplicando por  $\alpha/\beta < 0$ , resulta a expressão equivalente:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)} \right] < 0, \quad \forall \omega \in [-\infty, +\infty]$$

**Conclusão 1:** o diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  deverá estar todo no interior do círculo definido por  $D(\alpha, \beta)$ .

2.  $[1 + \beta G(s)]/[1 + \alpha G(s)]$  é Hurwitz se  $G(s)/[1 + \alpha G(s)]$  for Hurwitz.

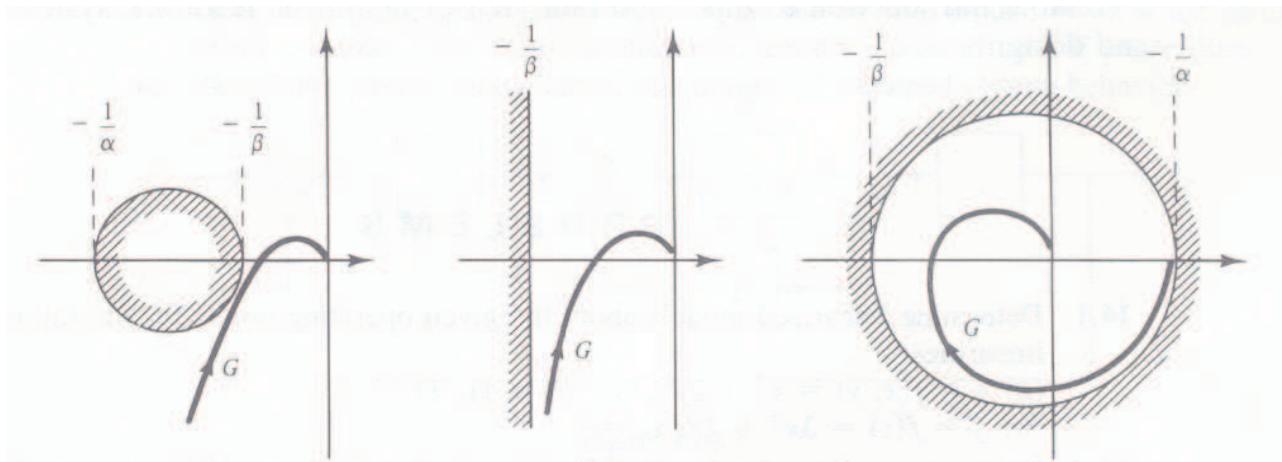
**Conclusão 2:** como o diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  não envolve o ponto  $-(1/\alpha) + j0$  (pois está todo no interior do círculo  $D(\alpha, \beta)$ ), para que  $G(s)/[1 + \alpha G(s)]$  seja Hurwitz  $G(s)$  também terá que o ser, i.e., deverá ter todos os pólos com parte real negativa.

### \*\* Critério do círculo \*\*

Seja  $\{A, B, C, D\}$  a realização mínima de um sistema LIT,  $G(s)$ , completamente controlável e observável, integrado no anel de controlo com não linearidade dada por  $\phi(\cdot) \in [\alpha, \beta]$ . O sistema de controlo é absolutamente estável (origem é globalmente assintoticamente estável) se uma das seguintes condições se verificar:

- Caso  $0 < \alpha < \beta$ , o diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  não entra no círculo definido por  $D(\alpha, \beta)$  e envolve-o  $m$  vezes no sentido anti-horário, sendo  $m$  o número de pólos instáveis de  $G(s)$ .
- Caso  $0 = \alpha < \beta$ ,  $G(s)$  é Hurwitz e o diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  permanece sempre à direita da recta vertical definida por  $\text{Re}[s] > -1/\beta$ .
- Caso  $\alpha < 0 < \beta$ ,  $G(s)$  é Hurwitz e o diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  está todo no interior do círculo definido por  $D(\alpha, \beta)$ .

Se a condição no sector se verificar apenas num sub-sector  $[a, b]$  do intervalo  $[\alpha, \beta]$ , então caso a condição posterior seja verificada, o sistema é absolutamente estável com domínio finito.



$0 < \alpha < \beta$   
(Caso 1)

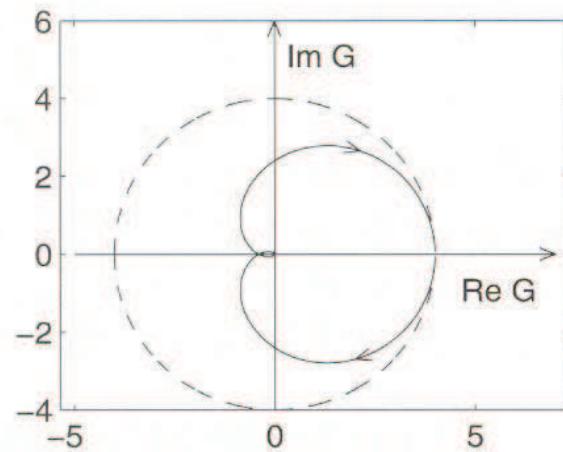
$0 = \alpha < \beta$   
(Caso 2)

$\alpha < 0 < \beta$   
(Caso 3)

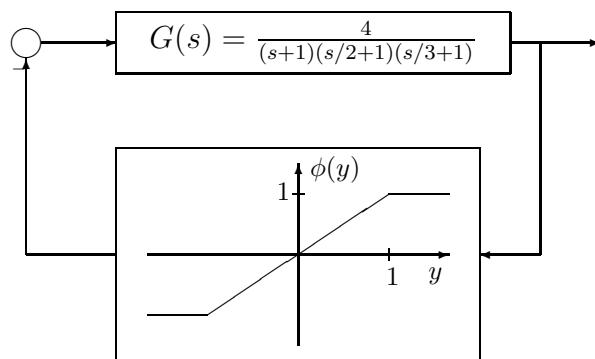
**Exemplo:** encontrar o sector da não-linearidade por forma a garantir a estabilidade do anel de controlo para o sistema:

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{3}s+1)}$$

- Como  $G(s)$  é Hurwitz, podemos admitir que  $\alpha < 0$ , e assim aplicar o 3º caso do critério do círculo:



- Por forma a aumentar a gama de estabilidade do sistema, convém escolher o círculo o mais “apertado” possível do diagrama de Nyquist, o que pode significar que o seu centro não coincide com a origem.
- Caso  $\alpha = 0$ , então pela aplicação do 2º caso do critério do círculo o diagrama de Nyquist deverá ficar à direita da recta  $\text{Re}[s] > -0.857$ , donde o sistema é absolutamente estável para uma não linearidade no sector:  $[0, 1.166]$ . Por exemplo, para a saturação:

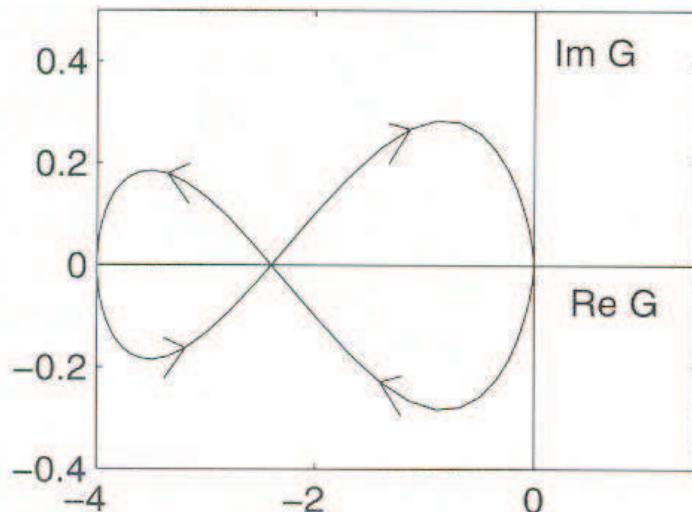


**Nota:** a saturação é definida no intervalo:  $[0, 1] \subset [0, 1.166]$ .

**Exemplo:** encontrar o sector da não-linearidade por forma a garantir a estabilidade do anel de controlo para o sistema:

$$G(s) = \frac{4}{(s-1)(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{3}s+1)}$$

- Como  $G(s)$  não é Hurwitz, temos de aplicar o 1º caso do critério do círculo:
  - A não linearidade deverá estar no sector:  $0 < \alpha < \beta$ .
  - O diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$  não deverá entrar no círculo definido por  $D(\alpha, \beta)$  e deverá envolvê-lo 1 vez no sentido anti-horário.
- O diagrama de Nyquist de  $G(s)$  é o seguinte:



Donde, para garantir a estabilidade assimptótica do sistema, os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  devem ser escolhidos por forma ao círculo  $D(\alpha, \beta)$  estar todo dentro do lobo esquerdo da figura.

Por exemplo, considerando o centro do disco sensivelmente a meio do lobo esquerdo, ponto  $-3.2 + j0$ , a distância mínima à curva de Nyquist é de 0.1688, donde o sistema é absolutamente estável para uma não linearidade no sector:

$$\phi \in [\alpha, \beta] = [0.2969, 0.3298].$$

### 3 Controlo de sistemas não lineares

**Objectivo do controlo:** dado um sistema a controlar e um conjunto de especificações sobre o comportamento desejado, construir uma lei de controlo por realimentação que faça com que o sistema em anel fechado se comporte como o desejado.

#### Tipos de controlo:

- Regulação (estabilização): *temperatura, altitude de um avião, posição de um robô, etc...*).
- Seguimento (“tracking”): *seguimento de trajectória (avião, robô, etc...)*.

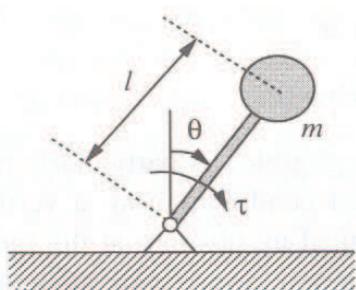
#### Problema da estabilização assimptótica

Dado um sistema dinâmico não linear:

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

determinar uma lei de controlo  $u$  tal que, para qualquer estado inicial na região  $\Omega$ ,  $x$  tenda para zero à medida que  $t \rightarrow \infty$ . Caso  $\Omega$  seja pequeno, o controlo poderá ser considerado linear.

**Exemplo:** pêndulo invertido com base fixa.



- Dinâmica:  $J\ddot{\theta} - mgl \sin(\theta) = \tau$ .
- Objectivo:  $\theta(0) = 60^\circ \longrightarrow \theta = 0^\circ$ .
- Lei de controlo:  $\tau = -K_d\dot{\theta} - K_p\theta - mgl \sin(\theta)$ .
- Anel fechado:  $J\ddot{\theta} + K_d\dot{\theta} + K_p\theta = 0$ , assintoticamente estável para  $K_d, K_p > 0$ .

**Nota:** se a base fosse móvel, o problema de estabilização seria muito mais complexo!

### Problema do seguimento assimptótico

Dado um sistema dinâmico não linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, t) \end{cases}$$

e uma trajectória de saída desejada,  $y_d$ , determinar uma lei de controlo  $u$  tal que, para qualquer estado inicial na região  $\Omega$ , o erro de seguimento  $y(t) - y_d(t)$  tende para zero, garantindo simultaneamente que a evolução de todos os estados  $x$  se mantém limitada.

**Exemplo:** seja o seguinte sistema de fase não-mínima:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = -\dot{u} + u$$

Pretende-se seguir a referência:  $y_d$  (conhecidos  $\dot{y}_d$  e  $\ddot{y}_d$ ),  $\forall t \geq 0$ .

Admitindo um seguimento perfeito, i.e., que:

$$y = y_d, \quad \dot{y} = \dot{y}_d, \quad \ddot{y} = \ddot{y}_d$$

temos que:

$$\ddot{y}_d + 2\dot{y}_d + 2y_d = -\dot{u} + u$$

Aplicando a transformada de Laplace (condições iniciais nulas):

$$[s^2 + 2s + 2]Y_d(s) = [-s + 1]U(s)$$

onde, a lei de controlo resultante é:

$$U(s) = \frac{-(s^2 + 2s + 2)}{s - 1}Y_d$$

**Nota:** o seguimento perfeito implica a implementação de uma lei de controlo *instável*, pelo que não é possível realizar sempre que o sistema seja de fase não-mínima (zeros no SPD).

### Relação entre estabilização e seguimento

Um problema de seguimento  $\equiv$  problema de estabilização, caso se pretenda projectar um controlador para o sistema:

$$\ddot{y} + f(\dot{y}, y, u) = 0$$

por forma a que:  $e(t) = y(t) - y_d(t) \rightarrow 0$ . Passamos a ter um problema de estabilização assimptótica dado por:

$$\ddot{e} + \ddot{y}_d + f(\dot{e}, e, \dot{y}_d, y_d, u) = 0 \Leftrightarrow \ddot{e} + f(\dot{e}, e, \ddot{y}_d\dot{y}_d, y_d, u) = 0$$

O contrário também é válido: um problema de estabilização  $\equiv$  problema de seguimento, quando a trajectória desejada é uma constante!

**Especificações de desempenho:** como descrever as especificações de desempenho para o sistema controlado?

- Sistemas lineares: especificações quantitativas (domínio de tempo, e frequência). ✓
- Sistemas não lineares: especificações qualitativas!

Aspectos a ter em conta no projecto de um controlador não linear...

### Estabilidade

- Garantida para o modelo nominal.
- Região de estabilidade bem definida (local, global).
- Região de convergência.

### Precisão e velocidade de resposta

- Projectadas para uma trajectória típica na região de interesse, a precisão no seguimento deve ser o mais possível independente da trajectória.

### Robustez

- Sensibilidade para efeitos não considerados no projecto do controlador: perturbações à entrada e saída, erros nos sensores de medida, erros de modelação (paramétricos e não paramétricos), etc...

### Custo

- Número e tipo de actuadores, sensores, computadores, etc...

**Regra geral:** compromisso entre,

- Custo/desempenho.
- Estabilidade/robustez.
- Estabilidade/desempenho.

## Métodos disponíveis para controlo de sistemas não lineares

**Regra:** não há um método geral para o projecto de controladores não lineares!

**Tentativa-erro:** utiliza ferramentas de análise para projecto de controladores simples. Por exemplo: método da função de descrição, plano de fase, análise de Lyapunov, critério de Popov, critério do círculo, etc...

**Controlo adaptativo:** sistemas lineares variantes no tempo, ou não lineares com dinâmica linearizável.

**Gain-scheduling:** Originalmente desenvolvido para o controlo de vôo, baseia-se no projecto de um controlador linear para cada modelo LIT aproximado da dinâmica do sistema em vários pontos de funcionamento. O controlador pode ser projectado com base em:  $K = k(x)$ , ou  $K = k(\text{op})$ . Problema do “hard-switching”.

**Linearização por realimentação:** Transformar o modelo do sistema não linear original num modelo linear mais simples, e posteriormente aplicar técnicas de controlo linear. Mesmo que o sistema seja linearizável por realimentação, não está garantida a robustez a perturbações ou erros de modelação.

**Modo de deslizamento:** Na maioria dos casos, o projecto do controlador é feito com base num modelo nominal do processo a controlar. O controlo por modo de deslizamento pode ser considerado um controlo por linearização robusto na medida em que considera a possibilidade de o modelo nominal não corresponder ao sistema que se pretende controlar.

**Outros...** Controlo neuronal, controlo fuzzy, controlo neuro-fuzzy, controlo híbrido, etc...

No resto da matéria, vamos apresentar:

- Controlo por linearização por realimentação.
- Controlo por modo de deslizamento.

mas, antes disso, apresentaremos os conceitos matemáticos algébricos que consubstanciam estes métodos.

### 3.1 Álgebra de Lie e geometria diferencial

**Álgebra de Lie:** desenvolvida por Marius Sophus Lie (1842–1899), matemático norueguês, é uma álgebra onde a multiplicação satisfaz propriedades semelhantes à operação de matrizes (“brackets operations”):  $[A, B] = AB - BA$ , onde as operações no termo da direita correspondem à multiplicação e subtração ordinária de matrizes.

| Sistemas Lineares      | Sistemas Não Lineares           |
|------------------------|---------------------------------|
| Álgebra matricial      | Álgebra de Lie                  |
| Operações com matrizes | Operador de Lie, e Lie brackets |

#### 3.1.1 Definições na álgebra de Lie

- $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(x)$  é um campo vectorial em  $\mathbb{R}^n$ .
- Um campo vectorial é suave (“smooth”), se for infinitamente continuamente diferenciável.
- Gradiente de uma função escalar,  $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\nabla h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \end{array} \right]$$

- Jacobiano de um campo vectorial,  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{array} \right]$$

- Dado um campo vectorial  $f(x)$ , e uma função escalar  $h(x)$ , define-se a “derivada da função  $h(x)$  segundo a direção do campo vectorial  $f(x)$ ”, como sendo o escalar dado por:

$$L_f h(x) = \nabla h(x) \cdot f(x)$$

lendo-se: **derivada Lie de  $h(x)$  em relação a  $f(x)$** .

Desenvolvendo:

$$L_f h(x) = \nabla h(x) \cdot f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(h(x)) - h(x)}{\delta} = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i}$$

onde se define o **operador de Lie de 1ª ordem**:

$$L_f = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

### Propriedades do operador de Lie

Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  campos vectoriais, e  $h(x)$  e  $t(x)$  campos escalares.

$$\begin{aligned} L_f(h + t) &= L_f h + L_f t \\ L_f(ht) &= h L_f t + t L_f h \\ L_{f+g} &= L_f + L_g \\ L_{hf} &= h L_f \end{aligned}$$

- Uso repetido do operador Lie:

$$L_f^0 h = h$$

$$L_f^1 h = L_f(L_f^0 h) = L_f h = \nabla h \cdot f$$

$$L_f^2 h = L_f(L_f^1 h) = \nabla(L_f h) \cdot f$$

⋮

$$L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h) = \nabla(L_f^{i-1} h) \cdot f$$

- A derivada Lie de  $h(x)$  na direcção do campo vectorial  $f(x)$ , e depois na direcção do campo vectorial  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} L_g(L_f h(x)) &= \sum_{j=1}^n g_j(x) \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n g_j(x) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n g_j(x) \left[ \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \right] \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[ g_j(x) f_i(x) \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j} + g_j(x) \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \right]}_{\text{operador de 2ª ordem}} = L_{gf} h(x) \end{aligned}$$

Donde:

$$\underbrace{L_f(L_g h(x))}_{=L_{fg} h(x)} \neq \underbrace{L_g(L_f h(x))}_{=L_{gf} h(x)}, \quad \text{tal como na álgebra linear, a multiplicação não é comutativa!}$$

- Identidade de Jacobi na álgebra de Lie:

$$L_{fg} - L_{gf} = L_{[f,g]} \quad , \quad \text{onde: } L_{fg} = L_f L_g$$

- Lie bracket, ou produto Lie:

$$[f, g] = L_f g - L_g f = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g \quad , \quad \text{Lie bracket de } f \text{ e } g.$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} [f, g] &= \sum_{j=1}^n f_j(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n g_j(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \\ [f, g] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Uso recursivo do Lie bracket:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f^1 g &= [f, g] \\ ad_f^2 g &= ad_f^1(ad_f^1 g) = [f, ad_f g] = [f, [f, g]] \\ ad_f^3 g &= ad_f^1(ad_f^2 g) = [f, [f, [f, g]]] \\ &\vdots \\ ad_f^i g &= [f, ad_f^{i-1} g] \end{aligned}$$

- Propriedades do Lie bracket (considerando  $c_1$  e  $c_2$  números reais):

$$\text{anti-simetria} : [f, g] = -[g, f]$$

$$\text{linearidade} : \begin{cases} [f, c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 [f, g_1] + c_2 [f, g_2] \\ [c_1 f_1 + c_2 f_2, g] = c_1 [f_1, g] + c_2 [f_2, g] \end{cases}$$

$$\text{Identidade de Jacobi} : [[f_1, f_2], f_3] + [[f_2, f_3], f_1] + [[f_3, f_1], f_2] = 0$$

$$L_{ad_f^2 g} h = L_{[f, [f, g]]} h = L_f^2 L_g h - 2L_f L_g L_f h + L_g L_f^2 h$$

**Exercício:** demonstrar a identidade de Jacobi,  $L_{ad_f g} h = L_{fg} h - L_{gf} h$ , e a identidade de Jacobi recursiva,  $L_{ad_f^2 g} h = L_f^2 L_g h - 2L_f L_g L_f h + L_g L_f^2 h$ .

**Exemplo:** seja o seguinte sistema não linear.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \Leftrightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 + \sin x_1 \\ -x_2 \cos x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2x_1) \end{bmatrix} u$$

Determinar,  $[f, g]$  e  $[g, f]$ , e verificar a propriedade de simetria.

$$\begin{aligned} [f, g] &= ad_f^1 g = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 \sin(2x_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 + \sin x_1 \\ -x_2 \cos x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 + \cos x_1 & 1 \\ x_2 \sin x_1 & -\cos x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2x_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \sin(2x_1)(-2x_1 + x_2 + \sin x_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(2x_1) \\ -\cos x_1 \cos(2x_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos(2x_1) \\ \cos x_1 \cos(2x_1) - 2 \sin(2x_1)(-2x_1 + x_2 + \sin x_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [g, f] &= ad_g^1 f = \nabla f \cdot g - \nabla g \cdot f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 + \cos x_1 & 1 \\ x_2 \sin x_1 & -\cos x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2x_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 \sin(2x_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 + \sin x_1 \\ -x_2 \cos x_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2x_1) \\ -\cos x_1 \cos(2x_1) + 2 \sin(2x_1)(-2x_1 + x_2 + \sin x_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde se prova que:

$$[f, g] = -[g, f]$$

### 3.1.2 Significado da álgebra de Lie nos sistemas lineares

Seja o seguinte sistema SISO não linear:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

onde  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  são campos vectoriais. Supondo o caso particular em que:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & Ax \\ g(x) & = & b \\ h(x) & = & cx \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

o desenvolvimento da derivada de Lie de  $h(x)$  em ordem a  $f(x)$ , resulta em:

$$\begin{aligned} L_f^0 h(x) &= h(x) = cx \\ L_f^1 h(x) &= \nabla h(x).f(x) = c.Ax \\ L_f^2 h(x) &= \nabla(L_f^1 h(x)).f(x) = cA.Ax = cA^2x \\ &\vdots \\ L_f^i h(x) &= cA^i x \end{aligned}$$

donde, os respectivos gradientes em ordem a  $x$ ,  $\partial/\partial x$ , originam:

$$\left[ \begin{array}{c} cx \\ cAx \\ cA^2x \\ \vdots \\ cA^ix \\ \vdots \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{c} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^i \\ \vdots \end{array} \right] \equiv \text{Matriz de observabilidade do sistema linear.}$$

**Definição de observabilidade:** um sistema dinâmico é observável se for possível determinar o estado inicial do sistema em  $t_0$ ,  $x(t_0)$ , através do conhecimento da evolução da saída,  $y(t)$ , num intervalo de tempo finito  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

**Sistema linear observável:**

$$\text{rank} \begin{bmatrix} c & cA & \cdots & cA^{n-1} \end{bmatrix}^T = n$$

**Sistema não linear observável (em torno de  $x_0$ ):**

$$\text{rank} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} h(x) & L_f h(x) & \cdots & L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}_{x_0}^T = n$$

Considere-se agora o desenvolvimento dos Lie brackets entre  $f(x)$  e  $g(x)$ :

$$\begin{aligned}
 ad_f^0 g(x) &= g(x) = b \\
 ad_f^1 g(x) &= [f, g] = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n g_j(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0.Ax - A.b = -bA \\
 ad_f^2 g(x) &= [f, [f, g]] = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial [f, g]}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n [f, g] \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0.Ax - A.(-bA) = bA^2 \\
 &\vdots \\
 ad_f^i g(x) &= [f, ad_f^{i-1} g] = (-1)^i A^i b
 \end{aligned}$$

onde, o vector dado por:

$$\left[ \begin{array}{c} ad_f^0 g(x) \\ -ad_f^1 g(x) \\ ad_f^2 g(x) \\ -ad_f^3 g(x) \\ \vdots \\ (-1)^{i-1} ad_f^{i-1} g(x) \\ \vdots \end{array} \right]^T \longrightarrow \left[ \begin{array}{c} b \\ Ab \\ A^2b \\ A^3b \\ \vdots \\ A^{i-1}b \\ \vdots \end{array} \right]^T \equiv \text{Matriz de controlabilidade do sistema linear.}$$

**Definição de controlabilidade:** O sistema é controlável se for possível transferir o estado inicial do sistema em  $t_0$ ,  $x(t_0)$ , para um qualquer estado final em  $t_1$ ,  $x(t_1)$ , por meio de uma acção de controlo finita num tempo finito  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

**Sistema linear controlável:**

$$\text{rank} \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$$

**Sistema não linear controlável (em torno de  $x_0$ ):**

$$\text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & -ad_f^1 g(x) & ad_f^2 g(x) & \cdots & (-1)^{n-1} ad_f^{n-1} g(x) \end{bmatrix}_{x_0} = n$$

ou,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & -[f, g] & [f, [f, g]] & \cdots & (-1)^{n-1} [f, ad_f^{n-2} g(x)] \end{bmatrix}_{x_0} = n$$

**Exemplo:** analisar a controlabilidade do sistema não linear em torno de  $(0, 0)$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2 \end{cases}$$

1. Linearizando em torno de  $(0, 0)$ , resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Como se constata, o estado  $x_2$  do **sistema linearizado não é controlável**:

$$\text{rank} [b \ A b] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

2. Considerando o sistema não linear:

$$\text{rank} [g(x) - [f, g]] = ? , \quad \text{onde: } f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_1^3 - x_2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

desenvolvendo:

$$[f, g] = \nabla g(x).f(x) - \nabla f(x).g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3x_1^2 \end{bmatrix}$$

A característica da matriz de controlabilidade é dada por:

$$\text{rank} [g(x) - [f, g]] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3x_1^2 \end{bmatrix} = 2, \quad \text{sse } x_1 \neq 0$$

Nestas condições, o **sistema não linear é controlável**.

**Conclusão:** é possível encontrar uma acção de controlo finita que transporte o sistema em tempo finito do estado inicial  $(0, 0)$  para um estado qualquer  $(x_1, x_2)$ , desde que  $x_1$  não se anule.

A linearização pode resultar na perda das propriedades do sistema!

**Grau relativo:** o grau relativo,  $r$ , de um sistema corresponde à menor ordem da derivada de  $y$  que depende explicitamente de  $u$ .

Seja o seguinte sistema linear SISO de ordem  $n$ , com grau relativo  $r$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

Derivando  $y$ ,  $r$  vezes, obtém-se:

$$\begin{aligned} y &= cx \\ \frac{dy}{dt} &= cAx + \underbrace{cb}_{=0} u = cAx \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= cA^2x + \underbrace{cAb}_{=0} u = cA^2x \\ &\vdots \\ \frac{d^r y}{dt^r} &= cA^r x + \underbrace{cA^{r-1}b}_{\neq 0} u \end{aligned}$$

**Definição:** o grau relativo de um sistema linear SISO é definido como o menor inteiro  $r$  para o qual  $cA^{r-1}b \neq 0$ . Isto significa que  $r = 1$  se  $cb \neq 0$ ,  $r = 2$  se  $cb = 0$  e  $cAb \neq 0$ ,  $r = 3$  se  $cb = cAb = 0$  e  $cA^2b \neq 0$ , etc... Sendo assim, o grau relativo do sistema verifica sempre a condição:  $1 < r \leq n$ .

Seja o seguinte sistema não linear SISO de ordem  $n$ , com grau relativo  $r$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

Derivando  $y$ ,  $r$  vezes, obtém-se:

$$\begin{aligned} y &= h(x) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x)u = L_f h(x) + \underbrace{L_g h(x)}_{=0} u = L_f h(x) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= L_f^2 h(x) + \underbrace{L_g L_f h(x)}_{=0} u = L_f^2 h(x) \\ &\vdots \\ \frac{d^r y}{dt^r} &= L_f^r h(x) + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h(x)}_{\neq 0} u \end{aligned}$$

**Definição:** o grau relativo de um sistema não linear SISO é definido como o menor inteiro  $r$  para o qual  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ . Isto significa que  $r = 1$  se  $L_g h(x) \neq 0$ ,  $r = 2$  se  $L_g h(x) = 0$  e  $L_g L_f h(x) \neq 0$ ,  $r = 3$  se  $L_g h(x) = L_g L_f h(x) = 0$  e  $L_g L_f^2 h(x) \neq 0$ , etc... Sendo assim, o grau relativo do sistema verifica sempre a condição:  $1 < r \leq n$ .

Considere de novo o sistema linear SISO de ordem  $n$ , estritamente próprio ( $d = 0$ ):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

A representação em função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = c[sI - A]^{-1}b = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

A expansão da função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_1}{s} + \frac{\beta_2}{s^2} + \frac{\beta_3}{s^3} + \dots + \frac{\beta_n}{s^n}$$

onde, para  $j = 0, \dots, n$ :

$$\beta_j = b_{n-j} - \sum_{i=0}^{j-1} \beta_i a_{n-j+i}, \quad \text{Parâmetros de Markov do sistema.}$$

Por outro lado, é fácil verificar que este resultado é equivalente a:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = c[sI - A]^{-1}b = \frac{cb}{s} + \frac{cAb}{s^2} + \frac{cA^2b}{s^3} + \dots + \frac{cA^{n-1}b}{s^n}$$

onde:

$$cb, cAb, cA^2b, \dots, cA^{n-1}b \quad \text{Parâmetros de Markov do sistema.}$$

**Definição:** o grau relativo de um sistema linear,  $r$ , corresponde à diferença entre a ordem do denominador e do numerador da função de transferência do sistema.

**Exemplo:** seja o seguinte sistema linear de 3<sup>a</sup> ordem,  $n = 3$ :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{cb}{s} + \frac{cAb}{s^2} + \frac{cA^2b}{s^3} = \frac{cbs^2 + cAbs + cA^2b}{s^3}$$

Três casos podem ocorrer:

- Sistema sem zeros:  $cb = 0, cAb = 0, cA^2b \neq 0 \Rightarrow$  Grau relativo:  $r = 3 - 0 = 3$
- Sistema com 1 zero:  $cb = 0, cAb \neq 0, cA^2b \neq 0 \Rightarrow$  Grau relativo:  $r = 3 - 1 = 2$
- Sistema com 2 zeros:  $cb \neq 0, cAb \neq 0, cA^2b \neq 0 \Rightarrow$  Grau relativo:  $r = 3 - 2 = 1$

**Observação:** um sistema não linear é de *fase mínima* quando o grau relativo é igual à ordem do sistema, i.e.,  $r = n$ . Porquê?

### 3.2 Linearização por realimentação

O objectivo de qualquer linearização é retirar um modelo linear equivalente em redor de um ponto de funcionamento.

**Ideia básica:** transformar algebricamente, por realimentação do estado, a dinâmica não linear de um sistema numa dinâmica linear, por forma a posteriormente se poder aplicar técnicas de controlo linear.

**Vantagens:**

- Linearização global, independente da trajectória.
- Preserva a dinâmica do sistema.
- Linearização exacta.
- Mais robusta que a linearização por expansão em série de Taylor.

**Desvantagens:**

- Característica *afim* (linear na entrada) dos sistemas.
- Sistemas de fase mínima.
- Completa observabilidade dos estados.
- Modelo exacto.
- Difícil análise de robustez (controlo por modo de deslizamento).

Vamos considerar o caso de sistemas contínuos:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y = h(x) \end{cases}$$

onde:

- $f, g_1, \dots, g_m$  e  $h(x) = (h_1, \dots, h_p)$ , são funções infinitamente continuamente diferenciáveis.
- $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $y \in \mathbb{R}^p$ .

1. Linearização por realimentação entrada–estado (LREE)

2. Linearização por realimentação entrada–saída (LRES)

### 3.2.1 Linearização por realimentação entrada-estado

**Exemplo motivador:** seja o seguinte sistema não linear. (“Robot dynamics and control”, Spong & Vidyasagar, John Wiley and Sons, Inc., 1989)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a \sin x_2, & a \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + u \end{cases}$$

**Nota:** tal como está representado, a entrada  $u$  não afecta a primeira equação de estado, logo  $u$  não poderá cancelar o termo não linear, ‘ $\sin x_2$ ’. Uma forma expedita de tornar este problema, é aplicar uma **transformação de coordenadas** ao sistema representando-o na **forma canónica do controlador (forma canónica controlável)**.

Admitir como novas variáveis de estado:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = a \sin x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = a \cos x_2 \cdot (-x_1^2 + u) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -ax_1^2 \cos x_2 + a \cos x_2 \cdot u \end{cases}$$

Na nova representação de estado, as não linearidades encontram-se todas na única equação de estado que contém a entrada  $u$ !

Assim, a lei de controlo dada por:

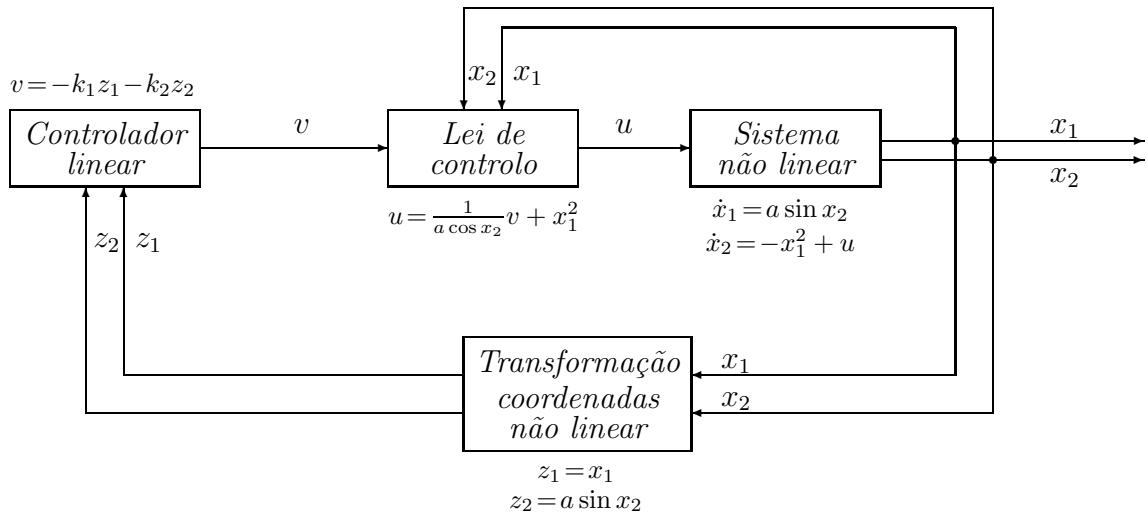
$$u = \frac{1}{a \cos x_2} (ax_1^2 \cos x_2 + v) = \frac{1}{a \cos x_2} v + x_1^2, \quad -\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$$

resulta:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{cases}$$

sendo  $v$  a nova entrada externa do sistema. Caso,  $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$ , com  $k_1, k_2 > 0$ , tem-se o seguinte sistema estável LIT:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -k_1 z_1 - k_2 z_2 \end{cases}, \quad \text{Polinómio característico: } s^2 + k_2 s + k_1 = 0$$

**Notas:**

- O resultado, embora válido para uma grande região do espaço de estados, não é global, pois  $\forall x_1, -\pi/2 < x_2 < \pi/2$ .
- A linearização da relação entrada–estado é obtida através de uma transformação de coordenadas e de uma transformação da entrada dependente por realimentação do estado do sistema: daí a designação, **linearização por realimentação**.
- Caso  $(z_1, z_2)$  não tenha significado físico, ou estes estados não possam ser medidos directamente, terão que ser deduzidos a partir de  $(x_1, x_2)$ , ou de outras variáveis do sistema.
- Se houver incerteza no valor do parâmetro  $a$ , esta irá reflectir-se no cálculo dos novos estados  $(z_1, z_2)$ , e na lei de realimentação.
- Na prática, após a determinação da transformação de coordenadas não linear que transforma o sistema para a sua forma canónica controlável, o projecto da entrada  $v$  não é mais do que um *controlo por colocação de pólos*.
- A extensão desta ideia para sistemas não lineares genéricos (afins) vai permitir responder às seguintes questões:
  - Qual (ou quais) a classe de sistemas não lineares que pode ser transformado por realimentação num sistema linear?
  - Como encontrar a transformação de coordenadas que permite representar o sistema na sua forma canónica do controlador?

**Definição:** considere o sistema SISO não linear afim,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Seja  $\mathcal{N}(x_0)$  a vizinhança de um ponto de equilíbrio de  $f$ , i.e.,  $f(x_0) = 0$ , com  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . O sistema é **linearizável por realimentação na sua relação entrada-estado** (LRES), em torno de  $x_0$ , se existir:

1. uma **transformação de coordenadas** no espaço de estados, definida por  $z = \Phi(x)$ , com  $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , “smooth” e invertível  $\forall x \in \mathcal{N}(x_0)$ ,
2. uma **lei de realimentação de estado**,  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , onde  $v$  é uma entrada de referência externa,  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  são funções algébricas escalares do vector de estado, com  $\beta(x) \neq 0 \forall x \in \mathcal{N}(x_0)$ , tal que o sistema resultante da transformação por realimentação, com  $x = \Phi^{-1}(z)$ ,

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} [f(x) + g(x)\alpha(x)] + \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} [g(x)\beta(x)] v$$

seja o **sistema linear invariante no tempo**, dado por:

$$\dot{z} = Az + Bv$$

para quaisquer  $A$  e  $B$ .

Caso a transformação de coordenadas,  $z = \Phi(x)$ , for tal que a equação de estado do sistema resultante fique representada na **forma canónica do controlador**:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & & A(z) & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(z) \end{bmatrix} u$$

onde  $A(z)$  e  $B(z)$  são funções não lineares no vector de estado  $z$ , então, uma aplicação directa da lei de realimentação de estado dada por:

$$u = \alpha(z) + \beta(z)v$$

$$u = \frac{v - A(z) - \eta_1 z_1 - \eta_2 z_2 - \cdots - \eta_n z_n}{B(z)}$$

onde  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  são parâmetros ajustáveis, resulta no sistema LIT com o seguinte **polinómio característico**:

$$s^n + \eta_n s^{n-1} + \cdots + \eta_3 s^2 + \eta_2 s + \eta_1 = 0$$

**Questão:**

- Como encontrar a transformação de coordenadas,  $z = \Phi(x)$ , que aplicada ao sistema o transforme para a sua **forma canónica do controlador**? Como obter esta transformação de coordenadas?

**3.2.2 Condições para a LREE**

Se um campo escalar  $q(x)$  satisfizer as seguintes relações:

$$\begin{aligned} L_g q(x) &= 0 \\ L_{ad_f^1 g} q(x) &= 0 \\ &\vdots \\ L_{ad_f^{n-2} g} q(x) &= 0 \\ L_{ad_f^{n-1} g} q(x) &\neq 0 \end{aligned}$$

então a transformação de coordenadas,  $\Phi(x)$ , definida por:

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} q(x) \\ L_f q(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

é invertível e transforma,  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , para a sua forma canónica do controlador, com:

$$A(z) = [L_f^n q(x)]_{x=\Phi^{-1}(z)}$$

$$B(z) = [L_g L_f^{n-1} q(x)]_{x=\Phi^{-1}(z)}$$

**Questão:** como garantir a existência de  $q(x)$ , para um sistema particular,  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ?

Um campo escalar,  $q(x)$ , que satisfaça as condições atrás indicadas existe, sse o sistema,  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , verificar as seguintes condições em  $\mathcal{N}(x_0)$ :

**1. Condição de controlabilidade:**

$$\text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1 g(x) & \cdots & ad_f^{n-1} g(x) \end{bmatrix} = n$$

O sistema deverá ser controlável.

**2. Condição de involutividade:**

$$\text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1 g(x) & \cdots & ad_f^{n-2} g(x) & [ad_f^{i-1} g(x), ad_f^{j-1} g(x)] \end{bmatrix} = n-1, \quad i, j \leq n-1$$

ou, o seguinte conjunto é involutivo:

$$\begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1 g(x) & \cdots & ad_f^{n-2} g(x) \end{bmatrix}$$

### Explicação da condição de involutividade

Dois campos vectoriais,  $f(x)$  e  $g(x)$  dizem-se involutivos sse o Lie bracket  $[f(x), g(x)]$  puder ser expresso como uma combinação linear de  $f(x)$  e  $g(x)$ :

$$[f(x), g(x)] = \alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)g(x)$$

com  $\alpha_1(x)$  e  $\alpha_2(x)$  campos escalares  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Geometricamente,  $f(x)$  e  $g(x)$  deverão estar no mesmo plano do Lie bracket  $[f(x), g(x)]$ .

**Teorema de Frobenius:** seja  $\{X_1, \dots, X_n\}$  um conjunto de campos vectoriais linearmente independentes em cada ponto. Este conjunto é completamente integrável sse for involutivo.

Se os vectores  $f(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]$  e  $g(x) = [g_1(x), \dots, g_n(x)]$  forem **completamente integráveis**, garantem a existência (condição necessária e suficiente) de um campo escalar  $h(x)$ , solução da seguinte classe especial de equações diferenciais às derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} f_2(x) + \cdots + \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} f_n(x) &= 0 \\ \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} g_1(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} g_2(x) + \cdots + \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} g_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

**Exemplo:** verificar se existe solução  $h(x)$  para o seguinte sistema de equações diferenciais às derivadas parciais:

$$\begin{cases} 4x_3 \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} = 0 \\ -x_1 \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} + (x_3^2 - 3x_2) \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} + 2x_3 \frac{\partial h(x)}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

**Nota:** não se pretende determinar  $h(x)$ , mas simplesmente verificar se ele existe, ou não!

Campos vectoriais associados (notação da página anterior):

- $f(x) = [4x_3 \quad -1 \quad 0]^T$
- $g(x) = [-x_1 \quad x_3^2 - 3x_2 \quad 2x_3]^T$
- Determinação do Lie bracket:

$$[f(x), g(x)] = \nabla g(x).f(x) - \nabla f(x).g(x) = \begin{bmatrix} -12x_3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Condição de involutividade:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} f(x) & g(x) & [f(x), g(x)] \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 4x_3 & -x_1 & -12x_3 \\ -1 & x_3^2 - 3x_2 & 3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

**Conclusão:** os vectores  $f(x)$  e  $g(x)$  são involutivos, logo existe um campo escalar  $h(x)$  solução do sistema de equações diferenciais.

### 3.2.3 Caso particular da LREE

Caso se verifique a condição de controlabilidade e também que,

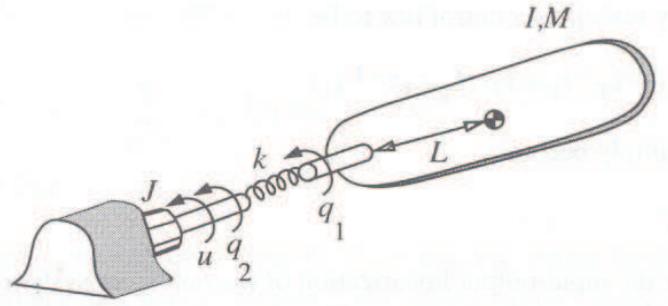
$$[ad_f^{i-1}g(x), ad_f^{j-1}g(x)] = [ ] , \quad i, j \leq n-1 , \quad \forall x \in \mathcal{N}(x_0)$$

então basta uma transformação de coordenadas,  $z = \Phi(x)$ , para transformar o sistema,  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , directamente para uma **representação linear da sua forma canónica do controlador**, i.e., com  $A(z)$  e  $B(z)$  linearmente dependentes do estado  $z$ . Neste caso, a lei de realimentação serve imediatamente para recolocar os pólos do anel fechado nas posições desejadas.

**Nota:** este caso verifica-se sempre que  $n = 2$  e  $\text{rank}[g(x) \ ad_f g(x)] = 2$ , pois a condição de involutividade é automaticamente verificada:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & [ad_f^0 g(x), ad_f^0 g(x)] \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & [g(x), g(x)] \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} g(x) \end{bmatrix} = 1 \quad \checkmark$$

**Exemplo:** considere o seguinte braço robótico de uma junta flexível a trabalhar no plano vertical, e as correspondentes equações dinâmicas. ("Applied nonlinear control", Slotine & Li, Prentice Hall, 1991)



$$I\ddot{q}_1 + MgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u$$

**Nota:** as não linearidades da 1<sup>a</sup> equação poderão ser canceladas por realimentação através da entrada  $u$ , caso seja possível representar o sistema na forma canónica do controlador.

### Linearização por realimentação entrada-estado:

- Representação de estado do sistema:

$$x = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2]^T, \quad \text{Vector de estado}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad \text{com:} \quad & \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{bmatrix} \\ g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \end{array} \right. \end{aligned}$$

- Verificação da condição de controlabilidade:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1 g(x) & ad_f^2 g(x) & ad_f^3 g(x) \end{bmatrix} = ?$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{bmatrix} = 4 \quad \checkmark$$

- Verificação da condição de involutividade:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1 g(x) & ad_f^2 g(x) & [ad_f^{i-1} g(x), ad_f^{j-1} g(x)] \end{bmatrix} = ?, \quad i, j \leq 3$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1 g(x) & ad_f^2 g(x) \end{bmatrix} = 3 \quad \checkmark$$

**Conclusão:** o sistema pode ser linearizado por realimentação entrada-estado!

- Determinação da **transformação de coordenadas**:  $z = \Phi(x)$ .

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} q(x) \\ L_f q(x) \\ L_f^2 q(x) \\ L_f^3 q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

onde  $q(x)$  deverá satisfazer as seguintes relações:

$$L_g q(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla q(x).g(x) = 0$$

$$L_{ad_f^1 g} q(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla q(x).ad_f g(x) = 0$$

$$L_{ad_f^2 g} q(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla q(x).ad_f^2 g(x) = 0$$

$$L_{ad_f^3 g} q(x) \neq 0 \Leftrightarrow \nabla q(x).ad_f^3 g(x) \neq 0$$

expandindo:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial q(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_4} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = 0 & \Leftrightarrow \frac{\partial q(x)}{\partial x_4} \cdot \frac{1}{J} = 0 \\ \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial q(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_4} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 & \Leftrightarrow -\frac{\partial q(x)}{\partial x_3} \cdot \frac{1}{J} = 0 \\ \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial q(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_4} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{IJ} \\ 0 \\ -\frac{k}{J^2} \end{bmatrix} = 0 & \Leftrightarrow \frac{\partial q(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{k}{IJ} - \frac{\partial q(x)}{\partial x_4} \cdot \frac{k}{J^2} = 0 \\ \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial q(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial q(x)}{\partial x_4} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{k}{IJ} \\ 0 \\ \frac{k}{J^2} \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 & \Leftrightarrow -\frac{\partial q(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{k}{IJ} + \frac{\partial q(x)}{\partial x_3} \cdot \frac{k}{J^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Solução possível:  $q(x) = x_1$ .

Donde resulta a seguinte transformação de coordenadas:

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} q(x) \\ L_f q(x) \\ L_f^2 q(x) \\ L_f^3 q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ -\frac{MgL}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{k}{I}(x_2 - x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

onde, por ser invertível, a transformada  $\Phi$  inversa resulta nas seguintes relações:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 \\ x_3 = z_1 + \frac{I}{k} (z_3 + \frac{MgL}{I} \sin z_1) \\ x_4 = z_2 + \frac{I}{k} (z_4 + \frac{MgL}{I} z_2 \cos z_1) \end{cases}$$

- A representação do sistema na forma canónica do controlador origina:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & L_f^4 q(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L_g L_f^3 q(x) \end{bmatrix} u, \quad x = \Phi^{-1}(z)$$

onde:

$$\begin{aligned} L_f^4 q(x) &= L_f(L_f^3 q(x)) = \nabla L_f^3 q(x).f(x) \\ &= \left[ \frac{MgL}{I} x_2 \sin x_1 \quad -\frac{MgL}{I} \cos x_1 - \frac{k}{I} \quad 0 \quad \frac{k}{I} \right] \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \end{bmatrix} \\ &= \frac{MgL}{I} \sin x_1 \left( x_2^2 + \frac{MgL}{I} \cos x_1 + \frac{k}{I} \right) + \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \left( \frac{k}{I} + \frac{MgL}{I} \cos x_1 + \frac{k}{J} \right) \end{aligned}$$

e,

$$L_g L_f^3 q(x) = \nabla(L_f^3 q(x)).g(x) = \left[ \frac{MgL}{I} x_2 \sin x_1 \quad -\frac{MgL}{I} \cos x_1 - \frac{k}{I} \quad 0 \quad \frac{k}{I} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \frac{k}{IJ}$$

- A lei de controlo por realimentação será então dada por:

$$u = \frac{v - L_f^4 q(x)}{L_g L_f^3 q(x)}, \quad x = \Phi^{-1}(z)$$

- Resulta o seguinte sistema linearizado por realimentação entrada-estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & L_f^4 q(x) & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L_g L_f^3 q(x) \end{bmatrix} \left( \frac{v - L_f^4 q(x)}{L_g L_f^3 q(x)} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ v \end{bmatrix}$$

que corresponde a um integrador quádruplo (considerando condições iniciais nulas):

$$\ddot{\ddot{z}}_1 = v \Leftrightarrow s^4 Z_1 = V \Leftrightarrow \frac{Z_1}{V} = \frac{1}{s^4}$$

Caso se pretenda uma determinada dinâmica para o anel fechado:

$$u = \frac{v - L_f^4 q(x) - \eta_1 z_1 - \eta_2 z_2 - \eta_3 z_3 - \eta_4 z_4}{L_g L_f^3 q(x)}, \quad \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 > 0$$

resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 & -\eta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

cuja equação característica é:

$$s^4 + \eta_4 s^3 + \eta_3 s^2 + \eta_2 s + \eta_1 = 0$$

**Conclusão:** o sistema seguirá a nova referência  $v$  com a dinâmica definida pela equação característica. Por exemplo, caso seja possível exprimir a trajectória desejada em termos da primeira componente de estado linearizada,  $z_1$ , pode-se projectar um controlador que garanta um erro de seguimento nulo:

$$e_{z_1} = z_1 - z_{d1}, \quad \text{erro de seguimento para a trajectória desejada, } z_{d1}.$$

então, a lei de controlo (conhecidos  $\dot{z}_{d1}, \ddot{z}_{d1}, \ddot{\ddot{z}}_{d1}, \ddot{\ddot{\ddot{z}}}_{d1}$ ):

$$u = \frac{\ddot{\ddot{\ddot{z}}}_{d1} - L_f^4 q(x) - \eta_1 e_{z_1} - \eta_2 \dot{e}_{z_1} - \eta_3 \ddot{e}_{z_1} - \eta_4 \ddot{\dot{e}}_{z_1}}{L_g L_f^3 q(x)}, \quad \eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$$

resulta num erro de seguimento com dinâmica exponencialmente estável e dada por:

$$\ddot{\dot{e}}_{z_1} + \eta_4 \ddot{e}_{z_1} + \eta_3 \ddot{e}_{z_1} + \eta_2 \dot{e}_{z_1} + \eta_1 e_{z_1} = 0$$

### 3.2.4 Linearização por realimentação entrada-saída

Seja o seguinte sistema SISO não linear de ordem  $n$ , afim na entrada:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

**Objectivo:** encontrar uma lei de realimentação dos estados do sistema que transforme a relação não linear entre  $u$  e  $y$ , numa relação linear entre uma nova entrada externa  $v$  e  $y$ . A acção de controlo  $u$ , deverá garantir que a saída do sistema,  $y$ , siga uma determinada referência  $y_d$ , conhecidos  $\dot{y}_d, \ddot{y}_d, \dots$ , garantindo simultaneamente a convergência dos estados do sistema, i.e., a estabilidade interna do sistema: **problema de “tracking”**.

**Dificuldade:** a saída do sistema,  $y$ , está apenas *indirectamente* relacionada com  $u$ , através de  $x$ , e de uma forma não linear!

**Ideia básica:** a Linearização por Realimentação (da relação) Entrada-Saída (LRES) tem como ponto de partida a obtenção de uma relação simples entre  $y$  e  $u$ . Uma forma possível de o fazer consiste em derivar  $y$  o número de vezes necessárias até aparecer explicitamente o termo  $u$ . Isto corresponde à determinação do **grau relativo** do sistema.

**Exemplo motivador:** seja o seguinte sistema não linear. (“Applied nonlinear control”, Slotine & Li, Prentice Hall, 1991)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1^2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Derivando a saída até aparecer a entrada:

$$y = x_1$$

$$\dot{y} = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 \cos x_2 + \dot{x}_2 x_3 + (x_2 + 1)\dot{x}_3 = (x_1^5 + x_3) \cos x_2 + (x_1^5 + x_3)x_3 + (x_2 + 1)(x_1^2 + u)$$

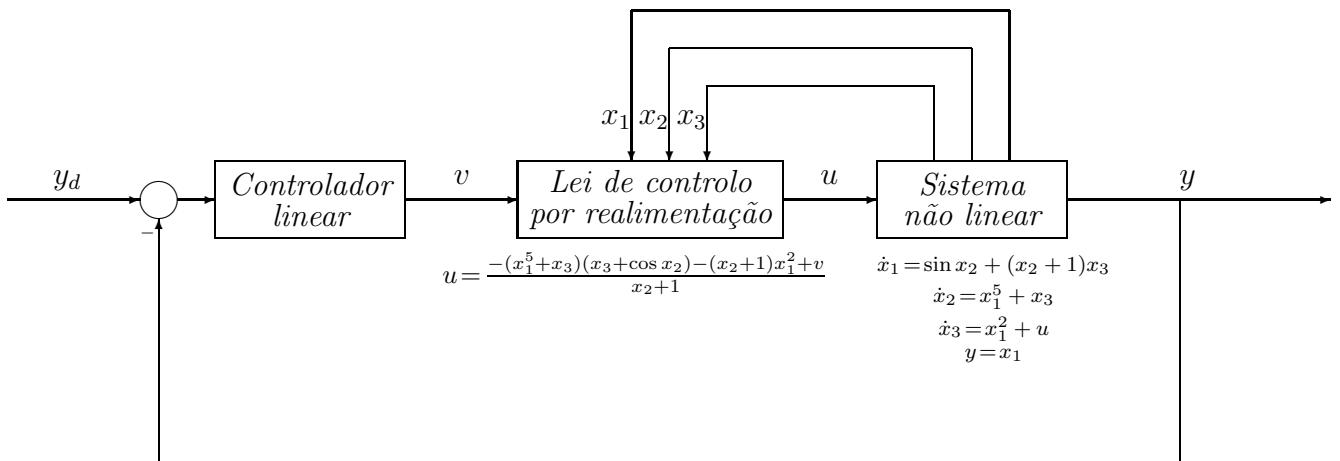
$$= (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2) + (x_2 + 1)x_1^2 + \underbrace{(x_2 + 1)}_{\neq 0, x_2 \neq -1} u , \quad \text{grau relativo: } r=2, x_2 \neq -1$$

Donde, tendo a relação explícita entre  $\ddot{y}$  e  $u$ , é possível aplicar a **lei de controlo por realimentação** dada por:

$$u = \frac{-(x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2) - (x_2 + 1)x_1^2 + v}{x_2 + 1} , \quad x_2 \neq -1$$

transformando o sistema original num sistema linear cuja relação dinâmica entre a saída  $y$  e a nova entrada externa,  $v$ , corresponde a um duplo integrador:

$$\ddot{y} = v \Leftrightarrow s^2 Y = V \Leftrightarrow \frac{Y}{V} = \frac{1}{s^2}$$



### Notas:

- A linearização da relação entrada-saída é obtida apenas através de uma transformação da entrada dependente por realimentação do estado do sistema: daí a designação, **linearização por realimentação**.
- É necessário ter acesso aos estados do sistema para poder aplicar a LRES.
- O sistema original de 3<sup>a</sup> ordem originou um duplo integrador, o que significa que a nova entrada externa  $v$  apenas afecta 2 estados do sistema: **um dos estados não é observável** a partir da saída  $y$ . Que influência terá a dinâmica desse estado no anel de controlo? O que acontece se a dinâmica do estado não observável for instável?
- Como aplicar a LRES quando  $x_2 = -1$ ? Como aplicar a LRES nos casos em que o grau relativo não está bem definido?

**Definição:** considere o sistema genérico SISO não linear de ordem  $n$  e afim na entrada,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

Seja  $\mathcal{N}(x_0)$  a vizinhança de um ponto de equilíbrio de  $f$ , i.e.,  $f(x_0) = 0$ , com  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Considere que o sistema tem grau relativo  $r$ . Então existe sempre uma **lei de realimentação de estado** da forma:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

onde  $v$  é uma entrada externa,  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  são funções algébricas escalares do vector de estado, com  $\beta(x) \neq 0 \forall x \in \mathcal{N}(x_0)$ , que torna o **sistema em anel fechado linear** na relação entre  $v$  e  $y$ . Nomeadamente, caso a lei de realimentação seja:

$$u = \frac{v - L_f^r h(x) - \gamma_1 L_f^{r-1} h(x) - \gamma_2 L_f^{r-2} h(x) - \cdots - \gamma_{r-1} L_f h(x) - \gamma_r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

com  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  parâmetros escalares ajustáveis, então o comportamento do sistema LIT em anel fechado será dado pela seguinte equação:

$$\frac{Y}{V} = \frac{1}{s^r + \gamma_1 s^{r-1} + \gamma_2 s^{r-2} + \cdots + \gamma_{r-1} s + \gamma_r}$$

### Questões:

- Que garantias temos de o anel fechado ser internamente estável? As novas equações de estado resultantes de:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)[\alpha(x) + \beta(x)v]$$

- Equações de estado normalmente não lineares, e difíceis de linearizar através de uma simples transformação de coordenadas.
- Apesar de um comportamento entrada-saída estável, **alguns estados poderão instabilizar, invalidando a LRES**. Como detectar se a dinâmica destes estados é estável ou instável?

- O termo do denominador da lei de realimentação,  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0, \forall x$ , i.e., o **grau relativo deverá estar bem definido**. E se isto não acontecer, poder-se-á aplicar na mesma a LRES?

### 3.2.5 Análise da estabilidade interna

**Definição:** seja o sistema,  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ,  $y = h(x)$ , com grau relativo  $r$  em  $x_0$ . Admita a seguinte transformação de coordenadas,  $\Phi(x)$ , definida por:

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{r-1} \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-2} h(x) \\ L_f^{r-1} h(x) \\ \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} r \text{ equações} \\ n-r \text{ equações} \end{array} \right.$$

onde as últimas  $n-r$  equações satisfazem,  $L_g \phi_i(x) = 0$ ,  $r+1 \leq i \leq n$ ,  $\forall x \in \mathcal{N}(x_0)$ , tal que  $\Phi(x)$  seja invertível em  $\mathcal{N}(x_0)$ . Então  $\Phi(x)$  transforma o sistema original para a **forma de Byrnes-Isidori** ou **forma normal** dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} = \xi_r \\ \dot{\xi}_r = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u = b(\xi) + a(\xi)u \\ \dot{\xi}_{r+1} = F_{r+1}(\xi) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = F_n(\xi) \\ y = \xi_1 \end{array} \right.$$

onde  $x = \Phi^{-1}(\xi)$ ,  $\xi_0 = \Phi(x_0)$ , e se assume que  $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ ,  $\forall x$ .

**Demonstração:**

Seja a transformação de coordenadas,  $\Phi(x)$ , dada por:

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{r-1} \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-2} h(x) \\ L_f^{r-1} h(x) \\ \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo as expressões da sua derivada temporal:

$$\dot{\xi} = \frac{d\Phi(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

onde resulta para as primeiras  $r$  equações:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{dh(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dh(x)}{dx} [f(x) + g(x)u] = L_f h(x) + L_g h(x)u = L_f h(x) = \xi_2 \quad \checkmark$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{dL_f h(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dL_f h(x)}{dx} [f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u = L_f^2 h(x) = \xi_3 \quad \checkmark$$

$\vdots$

$$\dot{\xi}_{r-1} = \frac{dL_f^{r-2} h(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dL_f^{r-2} h(x)}{dx} [f(x) + g(x)u] = L_f^{r-1} h(x) = \xi_r \quad \checkmark$$

$$\dot{\xi}_r = \frac{dL_f^{r-1} h(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dL_f^{r-1} h(x)}{dx} [f(x) + g(x)u] = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u = b(\xi) + a(\xi)u \quad \checkmark$$

e para as últimas  $n - r$  equações resulta a expressão genérica para  $r+1 \leq i \leq n$ :

$$\dot{\xi}_i = \frac{d\phi_i(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\phi_i(x)}{dx} [f(x) + g(x)u] = L_f \phi_i(x) + L_g \phi_i(x)u = L_f \phi_i(x)$$

$$\dot{\xi}_i = L_f \phi_i (\Phi^{-1}(\xi)) = F_i(\xi) \quad \checkmark \quad \text{pois por definição: } L_g \phi_i(x) = 0$$

**Conclusão:** a transformação  $\xi = \Phi(x)$  permite representar o sistema na **forma normal**.

Estando o sistema representado na forma normal:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\xi}_1 & = & \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 & = & \xi_3 \\ \vdots & & \\ \dot{\xi}_{r-1} & = & \xi_r \\ \dot{\xi}_r & = & b(\xi) + a(\xi)u \\ \dot{\xi}_{r+1} & = & F_{r+1}(\xi) \\ \vdots & & \\ \dot{\xi}_n & = & F_n(\xi) \\ y & = & \xi_1 \end{array} \right.$$

é fácil de perceber que se aplicarmos a **lei de realimentação**:

$$u = \frac{1}{a(\xi)} [v - b(\xi)] \quad \text{ou,} \quad u = \frac{1}{a(\xi)} [v - b(\xi) - \gamma_1 \xi_r - \gamma_2 \xi_{r-1} - \cdots - \gamma_r \xi_1]$$

as  $r$  primeiras equações serão afectadas, ficando o sistema em anel fechado representado por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\xi}_1 & = & \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 & = & \xi_3 \\ \vdots & & \\ \dot{\xi}_{r-1} & = & \xi_r \\ \dot{\xi}_r & = & v \\ \dot{\xi}_{r+1} & = & F_{r+1}(\xi) \\ \vdots & & \\ \dot{\xi}_n & = & F_n(\xi) \\ y & = & \xi_1 \end{array} \right. \quad \text{ou,} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\xi}_1 & = & \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 & = & \xi_3 \\ \vdots & & \\ \dot{\xi}_{r-1} & = & \xi_r \\ \dot{\xi}_r & = & -\gamma_1 \xi_r - \gamma_2 \xi_{r-1} - \cdots - \gamma_r \xi_1 + v \\ \dot{\xi}_{r+1} & = & F_{r+1}(\xi) \\ \vdots & & \\ \dot{\xi}_n & = & F_n(\xi) \\ y & = & \xi_1 \end{array} \right.$$

### Notas:

- A lei de realimentação afecta apenas a dinâmica dos  $r$  primeiros estados:  $\xi_1, \dots, \xi_r$ . As últimas  $n-r$  equações de estado,  $\dot{\xi}_i = F_i(\xi)$  com  $r+1 \leq i \leq n$ , não são afectadas pela lei de realimentação: **linearização por realimentação parcial**.
- Caso  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  sejam escolhidos de forma apropriada, garante-se a estabilidade assintótica das primeiras  $r$  equações de estado do sistema, i.e., os estados  $\xi_1, \dots, \xi_r$  tendem assintoticamente para zero e, por conseguinte, a saída  $y \rightarrow 0$ .
- A **estabilidade interna** do sistema pode ser analisada a partir da evolução dos restantes  $n-r$  estados, i.e., o sistema será internamente estável caso  $\dot{\xi}_i = F_i(\xi)$  com  $r+1 \leq i \leq n$  corresponda a um sistema assintoticamente estável.

**Exemplo:** representar o seguinte sistema não linear na forma normal.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_1x_2 + \sin x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2x_2} \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_3$$

1. Determinação do **grau relativo**  $r$  do sistema:

$$\begin{aligned} y &= x_3 \\ \dot{y} &= 2x_2 \\ \ddot{y} &= 2\dot{x}_2 = 2(2x_1x_2 + \sin x_2) + u \end{aligned}$$

O sistema tem grau relativo  $r=2$ , pois  $L_g h(x) = 0$  e  $L_g L_f h(x) = 1$ .

2. Determinação da **transformação de coordenadas**:

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \phi_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 2x_2 \\ \phi_3(x) \end{bmatrix}, \quad \phi_3(x) : L_g \phi_3(x) = 0$$

Desenvolvendo:

$$L_g \phi_3(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2x_2} \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x_1} e^{2x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x_2} = 0$$

Uma solução possível para esta equação pode ser:

$$\phi_3(x) = 1 + x_1 - e^{2x_2}$$

resultando na transformação invertível:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ 2x_2 \\ 1 + x_1 - e^{2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_3 - 1 + e^{\xi_2} \\ \xi_2/2 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3. Representação na **forma normal**:

$$\dot{\xi} = \frac{d\Phi(x)}{dx} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2e^{2x_2} & 0 \end{bmatrix} \dot{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = 2(-1 + \xi_3 + e^{\xi_2})\xi_2 + 2 \sin(\xi_2/2) + u \\ \dot{\xi}_3 = (1 - \xi_3 - e^{\xi_2})(1 + 2\xi_2 e^{\xi_2}) - 2 \sin(\xi_2/2) e^{\xi_2} \end{cases}$$

**Questão:** como analisar a estabilidade da última equação:  $\dot{\xi}_3 = \dots ?$

### 3.2.6 Dinâmica dos zeros

Considere a seguinte representação mínima de um sistema LIT,  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$ , dada por:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [b_3 \ b_2 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

cuja função de transferência é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}, \quad \text{zero em: } s = -\frac{b_3}{b_2}$$

**Objectivo:** demonstrar que a estabilidade interna de um sistema linear depende da localização dos seus zeros.

- Derivar a saída até aparecer a entrada:

$$\begin{aligned}y &= b_3 x_1 + b_2 x_2 \\ \dot{y} &= b_3 \dot{x}_1 + b_2 \dot{x}_2 = b_3 x_2 + b_2 x_3 \\ \ddot{y} &= b_3 \dot{x}_2 + b_2(-a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + u) = b_3 x_3 + b_2(-a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3) + b_2 u\end{aligned}$$

O **grau relativo** do sistema é,  $r=2$  (*diferença entre número de pólos e zeros*). ✓

- Encontrar a transformação de coordenadas que transforma o sistema para a **forma normal** ( $h(x) = Cx$ ,  $f(x) = Ax$ ,  $g(x) = B$ ):

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \phi_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 x_1 + b_2 x_2 \\ b_3 x_2 + b_2 x_3 \\ \phi_3(x) \end{bmatrix}, \quad \phi_3(x) : L_g \phi_3(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x_3} = 0$$

Donde, adoptando  $\phi_3(x) = x_1$  tem-se a transformação  $\Phi(x)$  invertível dada por:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 x_1 + b_2 x_2 \\ b_3 x_2 + b_2 x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \frac{1}{b_2} \xi_1 - \frac{b_3}{b_2} \xi_3 \\ \frac{1}{b_2} \xi_2 - \frac{b_3}{b_2} \left( \frac{1}{b_2} \xi_1 - \frac{b_3}{b_2} \xi_3 \right) \end{bmatrix}$$

- A representação na **forma normal**:

$$\dot{\xi} = \frac{d\Phi(x)}{dx} \dot{x} = \begin{bmatrix} b_3 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + u \end{bmatrix}, \quad x = \Phi^{-1}(\xi)$$

ou seja, nas novas coordenadas:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = b(\xi) + b_2 u, \quad \text{com: } b(\xi) = b_3 x_3 + b_2(-a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3) \Big|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} \\ \dot{\xi}_3 = \frac{1}{b_2} \xi_1 - \frac{b_3}{b_2} \xi_3 \end{cases}$$

4. Caso se escolha  $v$  apropriado, a **lei de controlo**:

$$u = \frac{-b(\xi) + v}{b_2}$$

garante que a relação entrada externa,  $v$ , e saída,  $y$ , é limitada. Como  $y = \xi_1$ :

$$\begin{array}{ccc} y \rightarrow 0 & , & \dot{y} \rightarrow 0 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \xi_1 \rightarrow 0 & , & \dot{\xi}_1 = \xi_2 \rightarrow 0 \end{array} \quad , \quad \dots$$

então a estabilidade da dinâmica interna do sistema dependerá apenas da seguinte equação:

$$\dot{\xi}_3 = -\frac{b_3}{b_2} \xi_3$$

**Conclusões:**

- Caso  $b_3/b_2 > 0$ , a **dinâmica interna do sistema é estável**: zero no SPE, **sistema de fase mínima**.
- Caso  $b_3/b_2 < 0$ , a **dinâmica interna do sistema é instável**: zero no SPD, **sistema de fase não-mínima**.

### A ESTABILIDADE DOS ZEROS NOS SISTEMAS LINEARES

$$\Downarrow$$

### ESTABILIDADE GLOBAL DA DINÂMICA INTERNA

**Questão:** e para os sistemas não lineares, será que se pode concluir o mesmo? Como determinar a **dinâmica dos zeros** de um sistema não linear?

**Definição:** a **dinâmica dos zeros** (“zero dynamics”) de um sistema não linear define-se como sendo a dinâmica interna do sistema quando a sua saída é mantida a zero pela entrada.

Relembrando o sistema não linear genérico representado na **forma normal**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} = \xi_r \\ \dot{\xi}_r = b(\xi) + a(\xi)u \\ \vdots \\ \dot{\xi}_i = F_i(\xi) \\ \vdots \\ y = \xi_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} = \xi_r \\ \dot{\xi}_r = b(\xi) + a(\xi)u \\ \vdots \\ \dot{\xi}_i = F_i(\xi_1, \dots, \xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n) , \quad r+1 \leq i \leq n \\ \vdots \\ y = \xi_1 \end{array} \right.$$

A dinâmica dos zeros do sistema é obtida admitindo que  $u$  é tal que:

$$\begin{array}{ccccccc} y \rightarrow 0 & , & \dot{y} \rightarrow 0 & , & \ddot{y} \rightarrow 0 & , & \cdots , & y^{(r-1)} \rightarrow 0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \xi_1 \rightarrow 0 & , & \dot{\xi}_1 = \xi_2 \rightarrow 0 & , & \dot{\xi}_2 = \xi_3 \rightarrow 0 & , & \cdots , & \xi_r \rightarrow 0 \end{array}$$

onde, a estabilidade da **dinâmica dos zeros** é avaliada a partir das últimas  $n-r$  equações de estado simplificadas, e dadas por:

$$\dot{\xi}_i = F_i(0, \dots, 0, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n) , \quad r+1 \leq i \leq n$$

### Conclusões:

- O cálculo da dinâmica dos zeros é uma forma simplificada de analisar o problema da estabilidade da dinâmica interna do sistema, pois permite reduzir a dimensão do problema da análise de estabilidade de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ .
- Caso o sistema autónomo definido por  $\dot{\xi}_i = F_i(0, \dots, 0, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$  seja **assimptoticamente estável**, a dinâmica interna do sistema é localmente assimptoticamente estável sendo **possível aplicar a LRES**: sistema diz-se **localmente de fase mínima**.
- Caso o sistema autónomo definido por  $\dot{\xi}_i = F_i(0, \dots, 0, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$  seja **instável**, a dinâmica interna do sistema é instável, o que **invalida a LRES**: sistema diz-se **de fase não-mínima**.
- A dinâmica dos zeros é uma propriedade intrínseca dos sistemas, não podendo ser alterada pela escolha das entradas. Portanto, não é obrigatório que o sistema esteja na forma normal para se poder concluir quanto à estabilidade da dinâmica dos zeros.

**Exemplo:** voltando ao exemplo anterior:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = 2(-1 + \xi_3 + e^{\xi_2}) + 2 \sin(\xi_2/2) + u \\ \dot{\xi}_3 = (1 - \xi_3 - e^{\xi_2})(1 + 2\xi_2 e^{\xi_2}) - 2 \sin(\xi_2/2) e^{\xi_2} \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

**Questão:** como analisar a estabilidade da última equação:  $\dot{\xi}_3 = \dots$  ?

Através do cálculo da dinâmica dos zeros tem-se que esta equação, para  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_2 = 0$ , resulta:

$$\dot{\xi}_3 = F_3(0, 0, \xi_3) = -\xi_3 \quad \checkmark \quad \text{assimptoticamente estável.}$$

**Conclusão:** o sistema pode ser linearizado por realimentação da sua relação entrada-saída.

## LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DA RELAÇÃO ENTRADA-SAÍDA

Para o sistema genérico SISO não linear afim,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

Os 3 passos a ter em conta na LRES são:

1. Derivar a saída  $y$  até aparecer  $u$ .
2. Escolher a acção de controlo  $u$  que cancela as não linearidades e garante a dinâmica pretendida para o anel fechado.
3. Analisar a estabilidade da dinâmica interna do sistema via *dinâmica dos zeros*, e concluir quanto à viabilidade da LRES. Esta análise fica facilitada caso se consiga representar o sistema na forma normal.

**Exemplo:** verifique se é possível aplicar a LRES ao seguinte sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_4$$

1. Determinação do **grau relativo**  $r$  do sistema:

$$\begin{aligned} y &= x_4 \\ \dot{y} &= x_1^2 + x_2 \\ \ddot{y} &= 2x_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2x_1(x_1x_2 - x_1^3) + x_1 + (2 + 2x_3)u \end{aligned}$$

O sistema tem grau relativo  $r=2$ , desde que  $x_3 \neq -1$ .

2. Determinação da **transformação de coordenadas**:

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1^2 + x_2 \\ \phi_3(x) \\ \phi_4(x) \end{bmatrix}, \quad \phi_i(x) : L_g \phi_i(x) = 0, \quad i = 3, 4$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} L_g \phi_3(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x_2} (2 + 2x_3) + \frac{\partial \phi_3(x)}{\partial x_3} = 0 \\ L_g \phi_4(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \phi_4(x)}{\partial x_2} (2 + 2x_3) + \frac{\partial \phi_4(x)}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

Vamos admitir, propositadamente, uma escolha para  $\phi_3(x)$  que não verifica a respectiva equação às derivadas parciais:

$$\phi_3(x) = x_3, \quad \phi_4(x) = x_1$$

**Nota:** a escolha de  $\phi_3(x)$  não é inocente. Note que, caso se tenha optado por uma escolha aparentemente mais evidente, e.g.,  $\phi_3(x) = x_1$  ou  $\phi_3(x) = x_4$ , isso iria resultar numa transformação de coordenadas não invertível!

A transformação resultante é invertível:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1^2 + x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi^{-1}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_4 \\ \xi_2 - \xi_4^2 \\ \xi_3 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

3. Representação do sistema original nas novas coordenadas:

$$\dot{\xi} = \frac{d\Phi(x)}{dx} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = 2\xi_4[\xi_4(\xi_2 - \xi_4^2) - \xi_4^3] + \xi_4 + 2(1 + \xi_3)u \\ \dot{\xi}_3 = -\xi_3 + u \\ \dot{\xi}_4 = -2\xi_4^3 + \xi_2\xi_4 \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

**Nota:** o “preço a pagar” por não termos encontrado uma representação do sistema na forma normal, é a presença do termo  $u$  numa das últimas  $n-r$  equações de estado.

4. Verificação da **estabilidade interna** do sistema.

Para a lei de controlo que estabiliza as  $r$  primeiras equações do sistema:

$$u = \frac{v - 2\xi_4[\xi_4(\xi_2 - \xi_4^2) - \xi_4^3] - \xi_4 - \gamma_1\xi_2 - \gamma_2\xi_1}{2(1 + \xi_3)}, \quad \text{e.g. com: } \{\gamma_1, \gamma_2\} = \{2, 1\}$$

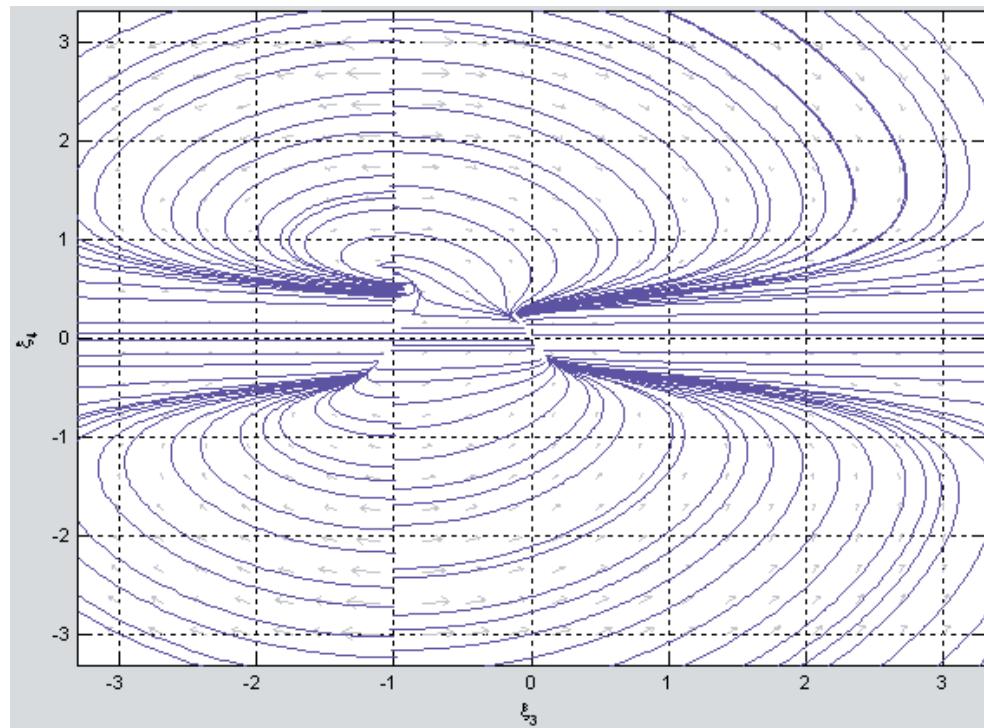
resulta a seguinte dinâmica para o anel fechado:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -\gamma_1\xi_2 - \gamma_2\xi_1 + v \\ \dot{\xi}_3 = -\xi_3 + \frac{v - 2\xi_4[\xi_4(\xi_2 - \xi_4^2) - \xi_4^3] - \xi_4 - \gamma_1\xi_2 - \gamma_2\xi_1}{2(1 + \xi_3)} \\ \dot{\xi}_4 = -2\xi_4^3 + \xi_2\xi_4 \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

A dinâmica interna do sistema quando  $y, \dot{y} \rightarrow 0$ , i.e.,  $\xi_1, \xi_2 \rightarrow 0$ , é determinada através da análise de estabilidade das seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_3 = -\xi_3 + \frac{v+4\xi_4^4-\xi_4}{2(1+\xi_3)} \\ \dot{\xi}_4 = -2\xi_4^3 \end{cases}$$

Recorrendo ao diagrama do plano de fase (para  $v = 0$ ):



**Nota:** é possível verificar o mesmo tipo de comportamento para qualquer valor estacionário de  $v$ .

**Conclusão:** a evolução dos estados  $\xi_3$  e  $\xi_4$  do sistema é assimptoticamente estável, donde a dinâmica interna do sistema é localmente assimptoticamente estável, sendo portanto possível aplicar a LRES.

### 3.2.7 Equivalência entre a LRES e a LREE

**Teorema:** seja o seguinte sistema não linear de ordem  $n$ , com ponto de equilíbrio  $x_0$ :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Se existir uma função  $h(x)$  que possua grau relativo  $r=n$ , na vizinhança de  $x_0$ , então verificam-se as seguintes condições:

- $\text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1g(x) & \cdots & ad_f^{n-1}g(x) \end{bmatrix} = n$
- $\begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1g(x) & \cdots & ad_f^{n-2}g(x) \end{bmatrix}$  é involutivo.

ou seja, o sistema pode ser completamente linearizado por realimentação entrada-estado.

**Nota:** a LRES é assim um caso particular da LREE. Quando  $h(x)$  é tal que  $r=n$ , a representação do sistema na **forma normal coincide com a forma canónica do controlador**:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\xi}_1 & = & \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 & = & \xi_3 \\ \vdots & & \\ \dot{\xi}_{n-1} & = & \xi_n \\ \dot{\xi}_n & = & b(\xi) + a(\xi)u \\ y & = & \xi_1 \end{array} \right.$$

onde a escolha de uma lei de realimentação apropriada,  $u$ , garante a estabilidade interna de todos os estados do sistema: **LRES  $\equiv$  LREE**, i.e., **seguimento  $\equiv$  regulação**.

#### Demonstração:

Para uma sistema com grau relativo  $r=n$ , verificam-se as seguintes condições em torno de  $x_0$ :

- $L_g h(x) = L_g L_f h(x) = \cdots = L_g L_f^{n-2} h(x) = 0$
- $L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0$

Vai-se demonstrar que a 1<sup>a</sup> condição corresponde exactamente a considerar:

- $\begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1g(x) & \cdots & ad_f^{n-2}g(x) \end{bmatrix}$  é involutivo.

A demonstração vai começar por demonstrar que:

$$L_g L_f^k h(x) = 0 \Leftrightarrow L_{ad_f^k g} h(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

Desenvolvimento para  $k = 0, 1, \dots, n-2$ :

$$\begin{aligned} L_g h(x) = 0 &\Leftrightarrow L_{ad_f^0 g} h(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow L_g h(x) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_g L_f h(x) = 0 &\Leftrightarrow L_{ad_f g} h(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow L_f L_g h(x) - L_g L_f h(x) = 0, \quad \text{identidade de Jacobi} \\ &\Leftrightarrow -L_g L_f h(x) = 0, \quad \text{pois: } L_g h(x) = 0, \text{ da condição anterior} \\ &\Leftrightarrow L_g L_f h(x) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_g L_f^2 h(x) = 0 &\Leftrightarrow L_{ad_f^2 g} h(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow L_f^2 L_g h(x) - 2L_f L_g L_f h(x) + L_g L_f^2 h(x) = 0, \quad \text{identidade de Jacobi} \\ &\Leftrightarrow L_g L_f^2 h(x) = 0, \quad \checkmark \quad \text{pois: } L_g h(x) = 0, L_g L_f h(x) = 0 \text{ das condições anteriores} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$L_g h(x) = L_{ad_f g} h(x) = \dots = L_{ad_f^{n-2} g} h(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla h(x) \cdot [g \ ad_f g \ \dots \ ad_f^{n-2} g] = 0$$

onde:

- Pelo teorema de Frobenius, se existir um  $h(x)$  que verifique a expressão anterior, então é porque o conjunto de vectores,  $[g \ ad_f g \ \dots \ ad_f^{n-2} g]$  é **involutivo**.
- Para além disso, os vectores  $[g \ ad_f g \ \dots \ ad_f^{n-2} g \ ad_f^{n-1} g]$  são linearmente independentes em  $x_0$ , pois o sistema é de **estado totalmente controlável**.
- A escolha do campo escalar  $q(x) = h(x)$  na LREE resulta numa transformação de coordenadas  $z = \Phi(x)$  invertível que transforma o sistema para a **forma canónica do controlador**.
- a escolha da variável de saída de um sistema torna-se assim muito importante para a garantia da estabilidade interna do anel de controlo na LRES: por vezes a escolha de variáveis de saída fictícias permitem resolver o problema, e.g., no controlo de braços robóticos flexíveis.

**Exemplo:** verificar para o seguinte sistema que a LRES é equivalente à LREE.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_3$$

1. Determinação do **grau relativo**  $r$  do sistema:

$$\begin{aligned} y &= h(x) = x_3 \\ \dot{y} &= L_g h(x) + L_g h(x)u = x_1 - x_2 \\ \ddot{y} &= L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^2 \\ \dddot{y} &= L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x)u = -\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 x_2 = -2x_2(x_1 + x_2^2) - (1 + 2x_2)e^{x_2}u \end{aligned}$$

O sistema tem grau relativo  $r=3$ , para  $x_2 \neq -1/2$ .

2. Determinação da **transformação de coordenadas** invertível:

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

3. Representação na **forma normal**:

$$\dot{\xi} = \frac{d\Phi(x)}{dx} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2x_2 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2^2 \\ -2x_2(x_1 + x_2^2) - (1 + 2x_2)e^{x_2}u \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b(\xi) & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a(\xi) \end{bmatrix} u$$

$$y = \xi_1$$

com:

- $b(\xi) = L_f^3 h(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(\xi)}$

- $a(\xi) = L_g L_f^2 h(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(\xi)}$

4. A aplicação da **lei de realimentação**:

$$u = \frac{v - b(\xi) - \gamma_3\xi_1 - \gamma_2\xi_2 - \gamma_1\xi_3}{a(\xi)}$$

resulta na seguinte dinâmica para o sistema em anel fechado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\gamma_3 & -\gamma_2 & -\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$y = \xi_1$$

cuja equação característica é:  $s^3 + \gamma_1 s^2 + \gamma_2 s + \gamma_3 = 0$

5. O sistema verifica as seguintes condições da LREE:

- $\text{rank} [ g(x) \ ad_f^1 g(x) \ ad_f^2 g(x) ] = 3 \quad \checkmark$
- $[ g(x) \ ad_f^1 g(x) ]$  é involutivo.  $\quad \checkmark$

6. A determinação da **transformação de coordenadas**:  $z = \Phi(x)$ .

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} q(x) \\ L_f q(x) \\ L_f^2 q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

onde  $q(x)$  deverá satisfazer as seguintes relações:

$$\begin{aligned} L_g q(x) = 0 &\Leftrightarrow \nabla q(x).g(x) = 0 \\ L_{ad_f^1 g} q(x) = 0 &\Leftrightarrow \nabla q(x).ad_f g(x) = 0 \\ L_{ad_f^2 g} q(x) \neq 0 &\Leftrightarrow \nabla q(x).ad_f^2 g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

permite representar o sistema na forma canónica do controlador, caso  $q(x) = h(x) = x_3$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ L_f^3 h(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_g L_f^2 h(x) \end{bmatrix} u, \quad x = \Phi^{-1}(z)$$

**Conclusão:** a LRES e a LREE são equivalentes.

### 3.2.8 Grau relativo não definido

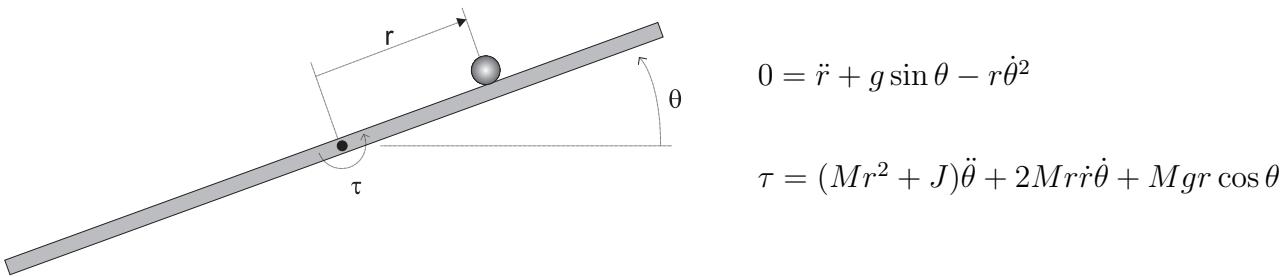
**Pergunta:** a LRES pressupõe que o **grau relativo esteja bem definido**, i.e., que o termo:

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0, \quad \forall x$$

Como aplicar a LRES nas situações em que é impossível garantir esta desigualdade? Nota que, ter o grau relativo indefinido é uma característica típica e única dos sistemas não lineares!

**Resposta:** não há um método geral de resolução deste problema que dê uma resposta genérica: é necessário efectuar uma análise caso-a-caso, tendo em conta as especificidades físicas do sistema.

**Exemplo:** considere o sistema “bola na barra”. (“Nonlinear systems”, Shankar Sastry, Springer Verlag, 1999)



Modelo dinâmico, considerando uma nova entrada  $u$  definida a partir de  $\tau$ :

$$\tau = 2Mr\dot{r}\dot{\theta} + Mgr \cos \theta + (Mr^2 + J)u \quad \Rightarrow \quad u = \ddot{\theta}$$

resulta a seguinte representação de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1x_4^2 - g \sin x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

com:  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [r \ \dot{r} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$ , e  $g$  o termo gravítico.

### Linearização por realimentação entrada-estado:

- Verificação da **condição de controlabilidade** na vizinhança de  $x = 0$ :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1g(x) & ad_f^2g(x) & ad_f^3g(x) \end{bmatrix} = ?$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2x_1x_4 & 4x_2x_4 + g \cos x_3 \\ 0 & -2x_1x_4 & -2x_2x_4 - g \cos x_3 & -4x_1x_4^3 + 3gx_4 \cos x_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 \quad \checkmark$$

- Verificação da **condição de involutividade** na vizinhança de  $x = 0$ :

$$\text{rank} \begin{bmatrix} g(x) & ad_f^1g(x) & ad_f^2g(x) & [ad_f^{i-1}g(x), ad_f^{j-1}g(x)] \end{bmatrix} = ?, \quad i, j \leq 3$$

basta ver que:

$$[g \ ad_f^2g] = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para concluir que este vector é linearmente independente de qualquer uma das 3 primeiras colunas da matriz de controlabilidade, pelo que **não é possível aplicar a LREE ao sistema bola na barra**.

### Linearização por realimentação entrada-saída:

Determinação do **grau relativo**  $r$  do sistema:

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_2 \\ \ddot{y} &= x_1x_4^2 - g \sin x_3 \\ \dddot{y} &= \dot{x}_1x_4^2 + 2x_1x_4\dot{x}_4 - g\dot{x}_3 \cos x_3 = x_2x_4^2 - gx_4 \cos x_3 + 2x_1x_4u \end{aligned}$$

O sistema tem grau relativo  $r=3$ , sse  $2x_1x_4 \neq 0$ , ou seja, quando:  $r \neq 0 \wedge \dot{\theta} \neq 0$

**Problema:** sempre que  $r=0$  ou  $\dot{\theta}=0$  o **grau relativo não está definido!**

**Aproximação 1:** na determinação do grau relativo, considerar  $x_1x_4^2 \approx 0$ .

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_2 \\ \ddot{y} &= \underbrace{x_1x_4^2 - g \sin x_3}_{\approx 0} \\ \ddot{y} &= -gx_4 \cos x_3 \\ y^{(4)} &= -g\dot{x}_4 \cos x_3 + gx_4\dot{x}_3 \sin x_3 = gx_4^2 \sin x_3 - g \cos x_3 \cdot u \end{aligned}$$

O sistema tem **grau relativo bem definido**,  $r=4$ , se:

- $x_3 = \theta \neq \pm\pi/2$ . Isto é sempre válido!
- Desde que,  $x_1x_4^2 = r\dot{\theta}^2 \approx 0$

**Aproximação 2:** por modificação do vector  $g(x)$ .

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_2 \\ \ddot{y} &= x_1x_4^2 - g \sin x_3 \\ \ddot{y} &= x_2x_4^2 - gx_4 \cos x_3 + \underbrace{2x_1x_4 \cdot u}_{\approx 0} \\ y^{(4)} &= x_1x_4^4 + (-g \cos x_3 + 2x_2x_4)u \end{aligned}$$

O sistema tem **grau relativo bem definido**,  $r=4$ , se:

- $-g \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \neq 0$ . Isto é sempre válido!
- Desde que,  $2x_1x_4u \approx 0$ , o que pressupõe considerar um vector de entrada modificado:

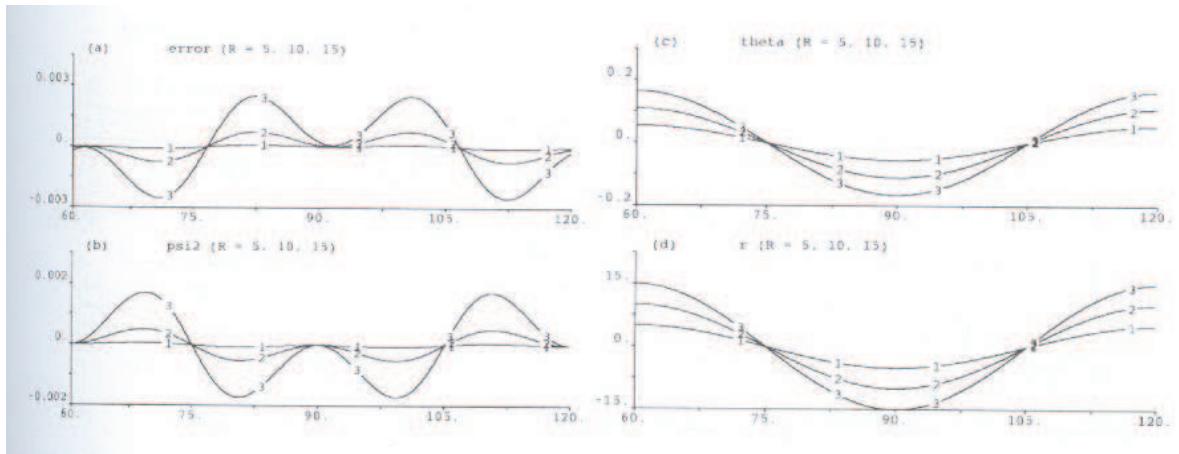
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2gx_1x_4 \cos x_3 - 4x_1x_2x_4^2}{g(g \cos^2 x_3 - 2x_2x_4 \cos x_3 - x_1x_4^2 \sin x_3)} \\ \frac{x_1x_4^2 \sin x_3}{g \cos^2 x_3 - 2x_2x_4 \cos x_3 - x_1x_4^2 \sin x_3} \end{bmatrix}}_{\Delta g(x)}$$

onde  $\Delta g(x)$  é pequeno para  $x_4 = \dot{\theta}$  pequeno.

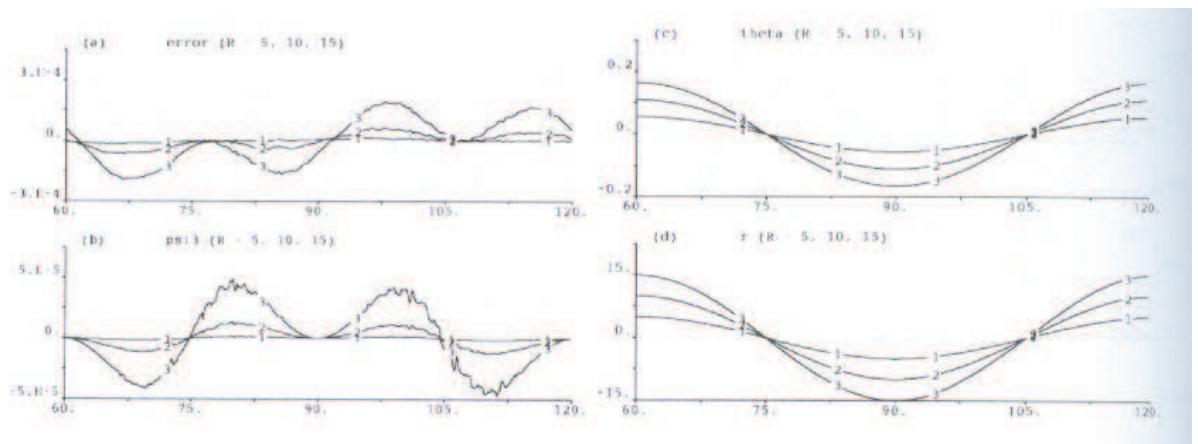
### Resultados de simulação:

- Trajectória desejada:  $y_d = R \cos \pi t / 30$ , com  $R = \{5, 10, 15\}$ .

**1<sup>a</sup> aproximação:** evolução do termo  $x_1 x_4^2$



**2<sup>a</sup> aproximação:** evolução do termo  $2x_1x_4u$



### 3.2.9 LRES de sistemas MIMO

Considere-se o seguinte sistema MIMO quadrado ( $m$ -entradas e  $m$ -saídas) não linear e afim, com ponto de equilíbrio em  $x_0$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases}$$

**Definição:** o sistema possui **grau relativo**,  $r = r_1 + \dots + r_m$ , em  $x_0$ , sse:

1.  $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$ , para  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $k \leq r_i - 1$ .
2. Para qualquer  $x \in \mathcal{N}(x_0)$ , a seguinte matriz  $[m \times m]$ :

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

for não singular em  $x = x_0$  (pelo menos 1 elemento de cada linha é diferente de zero).

**Nota:** o grau relativo de cada saída,  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , é obtido derivando cada uma das  $m$  saídas até aparecer na expressão uma das  $m$  entradas:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix}}_{E(x)} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

com:

- $y_1^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}$
- $r_1, \dots, r_m$ , grau relativo de cada saída.
- $E(x)$  é designada a **matriz de desacoplamento**.

**Definição:** considere o sistema genérico MIMO quadrado não linear afim,

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_1 &= h_1(x) \\ \vdots \\ y_m &= h_m(x) \end{cases}$$

Seja  $\mathcal{N}(x_0)$  a vizinhança de um ponto de equilíbrio de  $f$ , i.e.,  $f(x_0) = 0$ , com  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . O problema do **desacoplamento** do sistema (entrada-saída) tem solução através de uma lei de realimentação de estado, sse a matriz de desacoplamento verificar:

$$\text{rank}[E(x)] = m, \quad \forall x \in \mathcal{N}(x_0)$$

Neste caso, garante-se uma relação independente e única entre cada par entrada-saída do sistema através de uma **lei de realimentação de estado** da forma:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

onde  $v$  é o vector  $m$ -dimensional das entradas externas,  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  são funções algébricas escalares do vector de estado, com  $\beta(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}(x_0)$ . Caso a lei de realimentação seja:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = -[E(x)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} + [E(x)]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

resulta o seguinte **sistema MIMO linear e desacoplado**:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

Da escolha apropriada de  $v$  resulta a dinâmica linear pretendida para cada par  $(v_i, y_i)$ .

**Questão:** como analisar a estabilidade interna do sistema, quando  $r \leq n$ ?

Seja o sistema MIMO quadrado ( $m \times m$ ) não linear e afim, com grau relativo  $r$  em  $x_0$  dado por:

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_m \leq n$$

**Definição:** Admita a seguinte transformação de coordenadas,  $\Phi(x)$ , definida por:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m-1} h_m(x) \\ \phi_i(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^1 \\ \vdots \\ \xi_{r_1}^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_{r_2}^2 \\ \vdots \\ \xi_1^m \\ \vdots \\ \xi_{r_m}^m \\ \xi_i \end{bmatrix}$$

onde  $L_{g_j} \phi_i(x) = 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ , e  $r+1 \leq i \leq n$ , tal que  $\Phi(x)$  seja invertível em  $\mathcal{N}(x_0)$ . Então  $\Phi(x)$  transforma o sistema original para a **forma de Byrnes-Isidori** ou **forma normal**.

No caso em que não for possível obter,  $\phi_i(x)$  tal que  $L_{g_j} \phi_i(x) = 0$ , mas  $\Phi(x)$  seja contudo invertível, então resulta a seguinte representação de estado do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\xi}_1^k & = & \xi_2^k \\ \dot{\xi}_2^k & = & \xi_3^k \\ & \vdots & \\ \dot{\xi}_{r_k-1}^k & = & \xi_{r_k}^k \\ \dot{\xi}_{r_k}^k & = & L_f^{r_k} h_k(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_k-1} h_k(x) u_j \\ & \vdots & \\ \dot{\xi}_i & = & q_i(\xi) + \sum_{j=1}^m p_j(\xi) u_j \rightarrow \text{dinâmica dos zeros: } \xi = (\xi_1^k, \dots, \xi_{r_k}^k, \xi_i) = (0, \dots, 0, \xi_i). \\ & \vdots & \\ y_k & = & \xi_1^k \end{array} \right.$$

com  $k = 1, \dots, m$ , e  $x = \Phi^{-1}(\xi)$  e  $\xi_0 = \Phi(x_0)$ .

**Exemplo:** aplicar a LRES ao seguinte sistema MIMO  $2 \times 2$  de 3<sup>a</sup> ordem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 x_3^2 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1. Determinação do **grau relativo** do sistema:

- Saída  $y_1$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x) = x_1 \\ \dot{y}_1 &= L_f h_1(x) = x_2 \\ \ddot{y}_1 &= L_f^2 h_1(x) + L_{g_1} L_f h_1(x).u_1 + L_{g_2} L_f h_1(x).u_2 = -x_1 x_3^2 + 1.u_1 + 2.u_2 \end{aligned}$$

O grau relativo para a saída  $y_1$  é,  $r_1 = 2$ .

- Saída  $y_2$ :

$$\begin{aligned} y_2 &= h_2(x) = x_3 \\ \dot{y}_2 &= L_f h_2(x) = -x_1^3 + 2.u_1 \end{aligned}$$

O grau relativo para a saída  $y_2$  é,  $r_2 = 1$ .

Donde, o **grau relativo do sistema** é:  $r = r_1 + r_2 = 3 \equiv n$ .

2. Transformação de coordenadas,  $\xi = \Phi(x)$ , invertível:

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ L_f h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \xi_1^2 \end{bmatrix} \quad !!$$

onde resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1^1 = \xi_2^1 \\ \dot{\xi}_2^1 = -\xi_1^1(\xi_1^2)^2 + u_1 + 2u_2 \\ \dot{\xi}_1^2 = (-\xi_1^1)^3 + 2u_1 \\ y_1 = \xi_1^1 \\ y_2 = \xi_1^2 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3^2 + u_1 + 2u_2 \\ \dot{x}_3 = -x_1^3 + 2u_1 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{array} \right.$$

3. A representação em termos matriciais:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 x_3^2 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

permite encontrar a **lei de realimentação**:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left( -\begin{bmatrix} -x_1 x_3^2 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right)$$

que resulta no desacoplamento total do sistema:

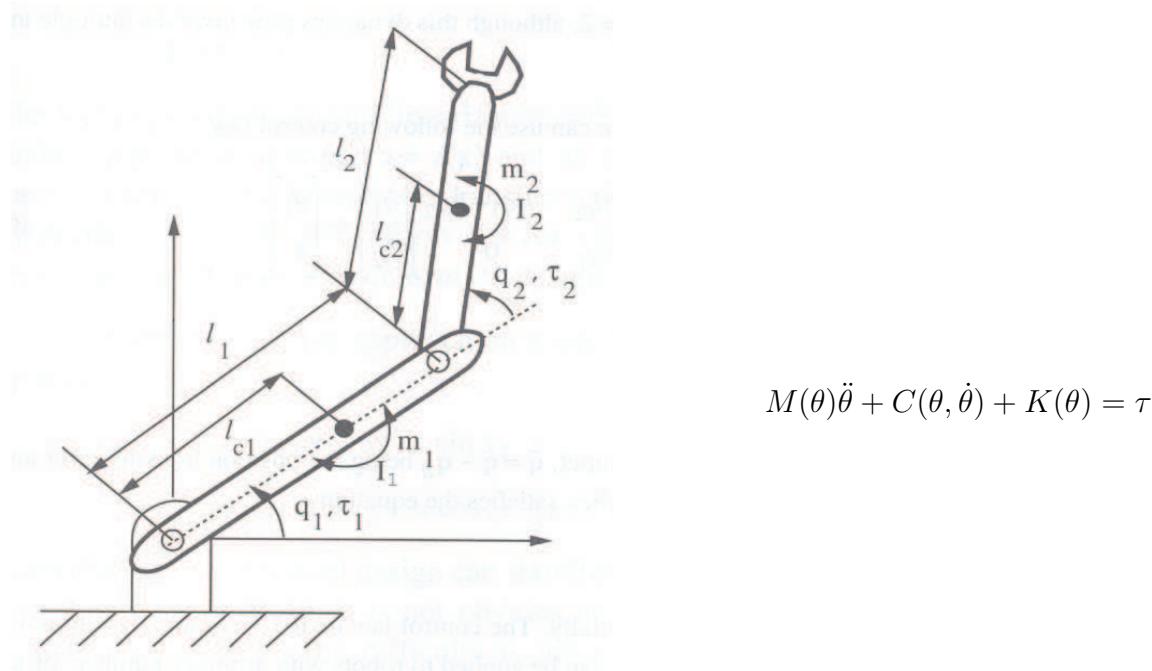
$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

4. A escolha adequada de  $v_1$  e  $v_2$  irá resultar em dinâmicas lineares independentes para cada uma das saídas do sistema.

### Notas finais:

- Tal como no caso SISO, quando o grau relativo do sistema  $r = n$ , o problema da estabilidade interna do sistema fica apenas dependente da escolha apropriada da entrada externa do sistema: LREE  $\equiv$  LRES, i.e., o problema de regulação e de seguimento são o mesmo.
- Caso  $r < n$ , a mesma noção de dinâmica dos zeros vista para o caso SISO pode ser aplicada ao sistema MIMO. O sistema dir-se-á *localmente de fase mínima* caso a dinâmica dos zeros seja assintoticamente estável.
- As condições necessárias e suficientes para o sistema ser LREE são equivalentes às vistas para o caso SISO (controlabilidade e involutividade), embora a sua complexidade matemática aumente consideravelmente.
- Os métodos de linearização por realimentação não garantem a robustez da solução caso existam incertezas paramétricas no modelo, ou perturbações.

**Exemplo:** considere as equações dinâmicas de um robô rígido com 2 elos (4<sup>a</sup> ordem).



- $\theta = [q_1 \quad q_2]^T$  - posições angulares das juntas.
- $M(\theta)\ddot{\theta}$  - matriz de inércia.
- $C(\theta, \dot{\theta})$  - forças de Coriolis, centrífugas.
- $K(\theta)$  - forças gravíticas.
- $\tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$  - binários aplicados nas juntas.

**Objectivo:** determinar as acções de controlo  $\tau$  que garantam seguimento perfeito de uma trajectória angular independente em cada junta:

$$\begin{aligned} \text{Erro nas posições angulares} &: \tilde{\theta} = \theta - \theta_d \rightarrow 0 \\ \text{Erro nas velocidades angulares} &: \dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d \rightarrow 0 \\ \text{Erro nas acelerações angulares} &: \ddot{\tilde{\theta}} = \ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sendo  $\theta_d, \dot{\theta}_d, \ddot{\theta}_d$  os vectores com a posição, velocidade e aceleração angulares desejadas em cada junta, respectivamente.

**Solução:** aplicar a LRES considerando  $\theta = [q_1 \quad q_2]^T$  como saída do sistema, e  $\tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$  como entrada.

1. Determinação do **grau relativo** do robô:

$$\ddot{\theta} = -M(\theta)^{-1} [C(\theta, \dot{\theta}) + K(\theta)] + M(\theta)^{-1} \tau$$

Donde o grau relativo é:  $r = r_1 + r_2 = 2 + 2 = 4$ . O sistema pode ser totalmente linearizado por realimentação, pois  $r=n$ .

A **matriz de desacoplamento** corresponde a  $M(\theta)^{-1}$ . A matriz de inércias  $M(\theta)$  é sempre não singular (matriz positiva definida), donde é sempre invertível.

2. Determinação da **lei de realimentação**:

$$\tau = M(\theta)v + C(\theta, \dot{\theta}) + K(\theta)$$

resulta na seguinte dinâmica para o anel fechado:

$$\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v$$

3. Imposição de um comportamento linear. Adoptando:

$$v = \ddot{\theta}_d - 2\lambda\dot{\tilde{\theta}} - \lambda^2\tilde{\theta}$$

com  $\lambda > 0$ , resulta numa dinâmica linear para cada junta (pólo real duplo em  $-\lambda$ ), onde o erro de seguimento satisfaz a seguinte equação:

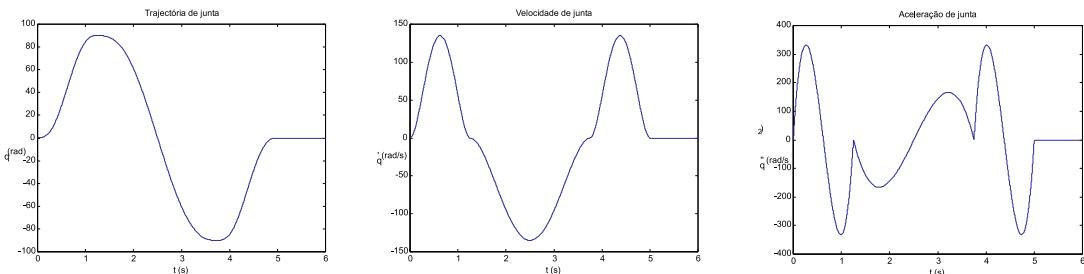
$$\ddot{\tilde{\theta}} + 2\lambda\dot{\tilde{\theta}} + \lambda^2\tilde{\theta} = 0$$

O erro de seguimento em cada junta converge exponencialmente para zero!

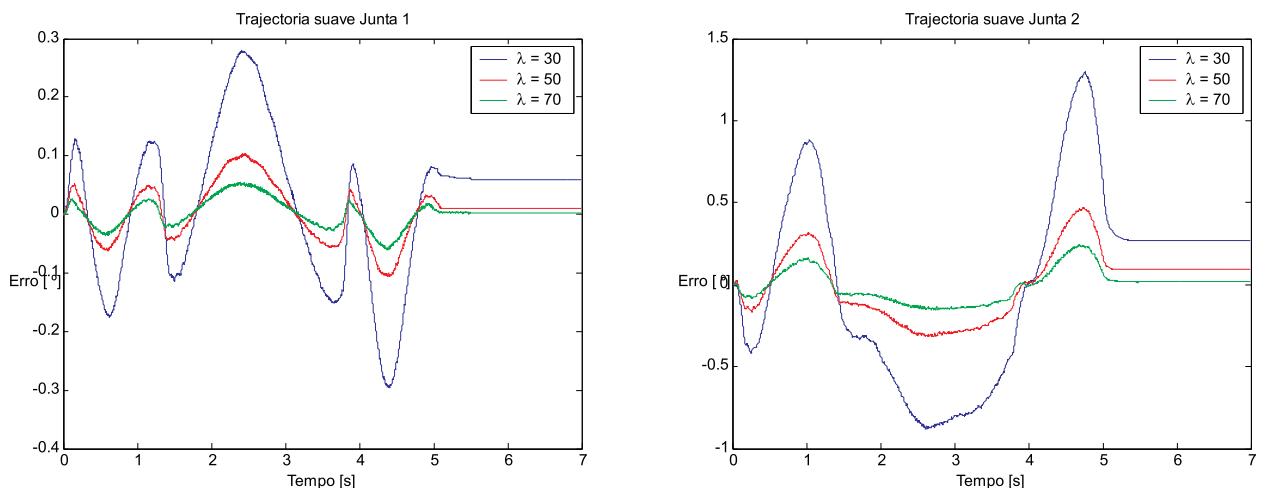
**Exemplo:** resultados práticos da aplicação da LRES ao robô rígido, tipo SCARA, existente no laboratório de robótica do pavilhão de Engenharia Mecânica III. (Trabalho de fim de curso LEM, “Linearização por realimentação para controlo de robô flexível”, José Rodrigues, Instituto Superior Técnico, 2001)



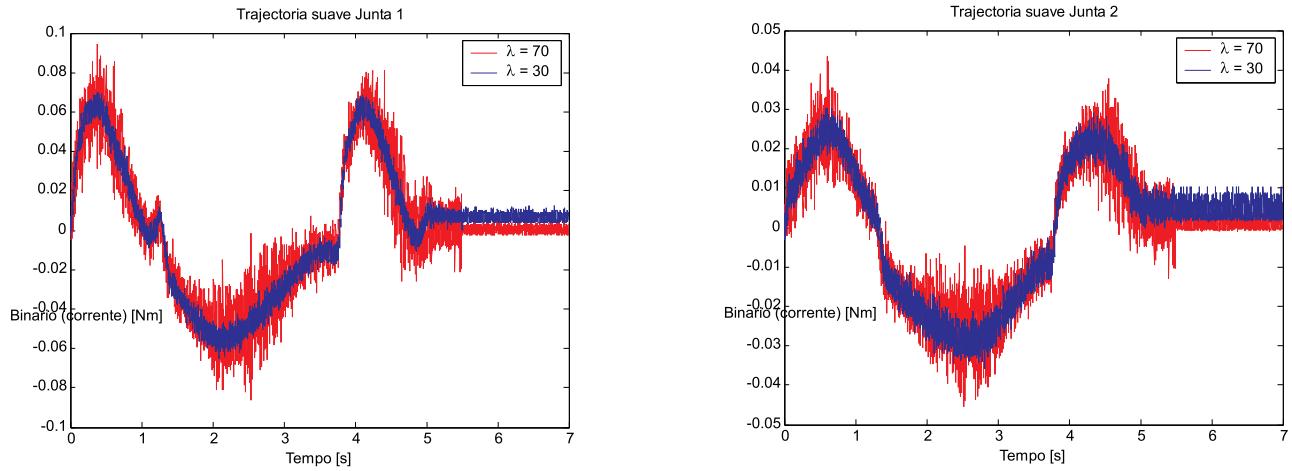
**Trajectória desejada:** perfil idêntico para cada junta, sem gravidade a actuar.



**Resultados experimentais:** erro em posição angular nas juntas 1 e 2, para diferentes  $\lambda$ .



**Resultados experimentais:** acção de controlo nas juntas 1 e 2, para diferentes  $\lambda$ .



**Nota:** bem visível o fenómeno do “chattering” nas acções de controlo.

### 3.3 Controlo por modo de deslizamento

**Perspectiva histórica:** o “*controlador que veio do frio*”... o conceito de “*sliding mode control*” foi originalmente desenvolvido pelo investigador soviético Vadim I. Utkin no início dos anos 70, mas só mais tarde trazido para o Ocidente através da tradução da sua obra “*Sliding modes in control and optimization*”, Springer Verlag, 1992. Neste momento, Vadim Utkin é professor no Department of Electrical Engineering da Ohio State University, EUA (<http://www.ece.osu.edu/~utkin/>).

**Controlo por modo de deslizamento:** é um caso particular de “*variable structure control*”, ou controlo de estrutura variável, que consiste num sistema composto por um conjunto de leis de controlo por realimentação e uma lei de decisão (condição lógica, ou “*switching rule*”) que permite mudar a lei de controlo de forma abrupta.

**Ideia básica:** projectar uma lei de controlo de estrutura variável que restrinja a evolução dos estados do sistema para uma determinada dinâmica pretendida, normalmente denominada por superfície de comutação (“*switching surface*”) ou superfície de deslizamento “*sliding surface*”.

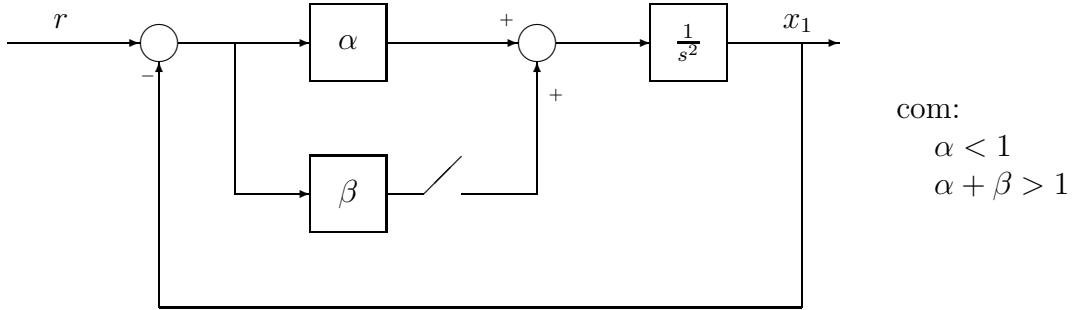
**As principais vantagens do controlo por modo de deslizamento são:**

- Vocacionado para lidar com incertezas, erros de modelação e perturbações.
- O comportamento dinâmico do sistema é simplificado para a dinâmica definida pela superfície de deslizamento: é *mais fácil controlar um sistema de 1<sup>a</sup> ordem (mesmo que seja não linear e com incertezas) do que um sistema de ordem superior!*
- Possibilidade de especificar o desempenho pretendido para o anel fechado através da definição da dinâmica da superfície de deslizamento.

**A principal desvantagem do controlo por modo de deslizamento:**

- A elevada frequência de comutação da lei de controlo provoca a excitação de modos dinâmicos não modelados, aumentando os erros de modelação. Pode, inclusivamente, provocar a instabilidade do sistema!

**Exemplo:** controlo de estrutura variável. (“Robot dynamics and control”, Spong & Vidyasagar, John Wiley and Sons, Inc., 1989)



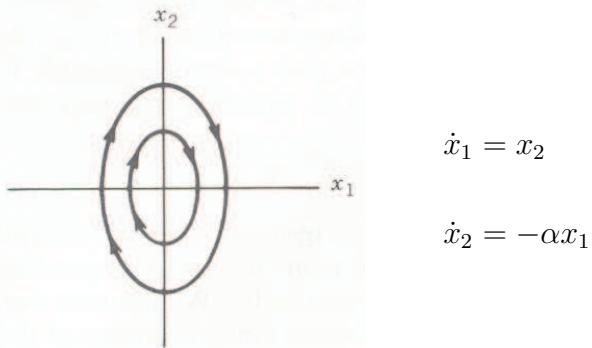
As equações do anel fechado são:

$$\text{Interruptor aberto} : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha(r - x_1) \end{cases}$$

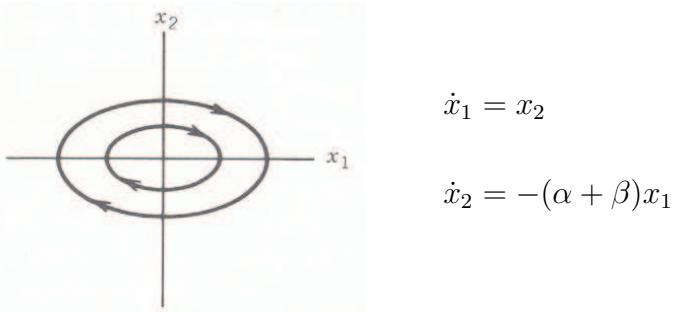
$$\text{Interruptor fechado} : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (\alpha + \beta)(r - x_1) \end{cases}$$

Assumindo um **problema de regulação**,  $r = 0$ , temos duas situações:

**Caso I :** Interruptor aberto.



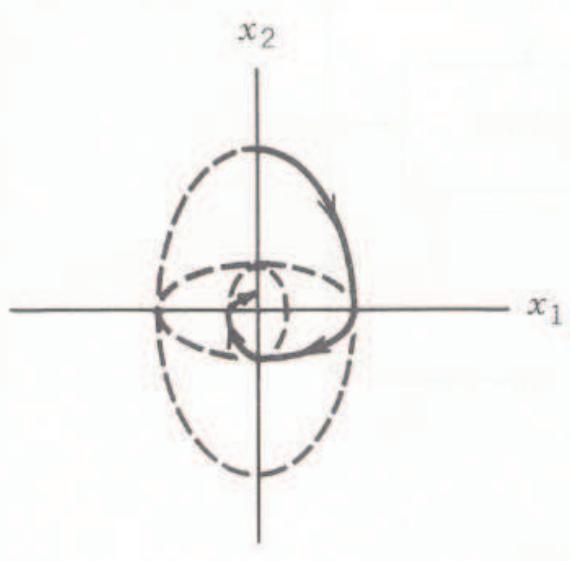
**Caso II :** Interruptor fechado.



Supor a seguinte **lei de comutação**:

- Interruptor aberto, caso:  $x_1 x_2 \geq 0$ .
- Interruptor fechado, caso:  $x_1 x_2 < 0$ .

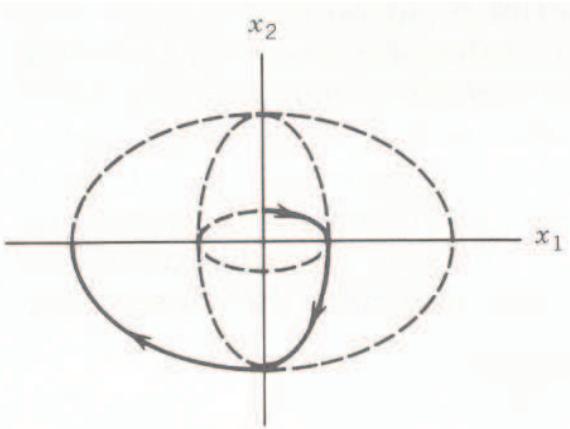
O resultado será um sistema de controlo **assimptoticamente estável**:



No entanto, caso a **lei de comutação** fosse:

- Interruptor aberto, caso:  $x_1 x_2 < 0$ .
- Interruptor fechado, caso:  $x_1 x_2 \geq 0$ .

O resultado seria um sistema de controlo **instável**:

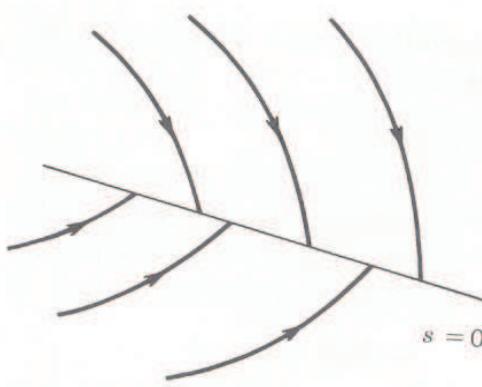


**Conclusão:** a lei de comutação pode impor uma dinâmica ao anel fechado completamente inesperada.

**Controlo por modo de deslizamento:** projectar uma entrada de controlo tal que as trajectórias de estado do sistema convirjam para uma superfície plana no espaço de estados. Esta superfície (hipersuperfície) designa-se por:

- Superfície de deslizamento  $\equiv$  “*sliding surface*”, ou
- Superfície de comutação  $\equiv$  “*switching surface*”

**Nota:** a superfície de deslizamento deve comportar-se como uma “armadilha” para as trajectórias de estado do sistema:



Logo que o sistema seja “atraído” para a superfície de deslizamento, a sua dinâmica torna-se idêntica à dinâmica definida pelas equações desta superfície.

⇓

O anel fechado será robusto a perturbações!

Os **3 passos** necessários para o **projecto de um controlador por modo de deslizamento**:

1. **Definir a superfície de deslizamento** com a dinâmica pretendida:

$$s(x, t) = 0 \quad \text{variável } t - \text{ problema de seguimento.}$$

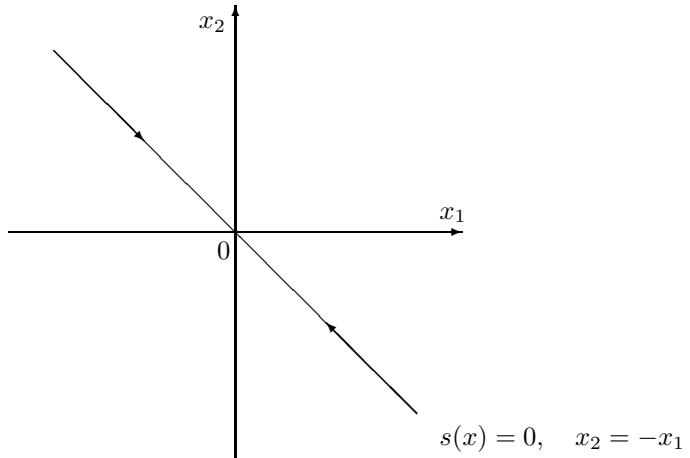
2. Garantir que os estados do sistema vão ser atraídos para aquela superfície de deslizamento (em tempo finito): garantia de um **modo de deslizamento** ou **regime de escorregamento**, ou “*sliding mode*”.

3. Garantir que os **estados do sistema se mantêm na superfície de deslizamento**:

- Que acção tipo “*switching logic*” usar?
- Robustez a erros de modelação, perturbações, etc...

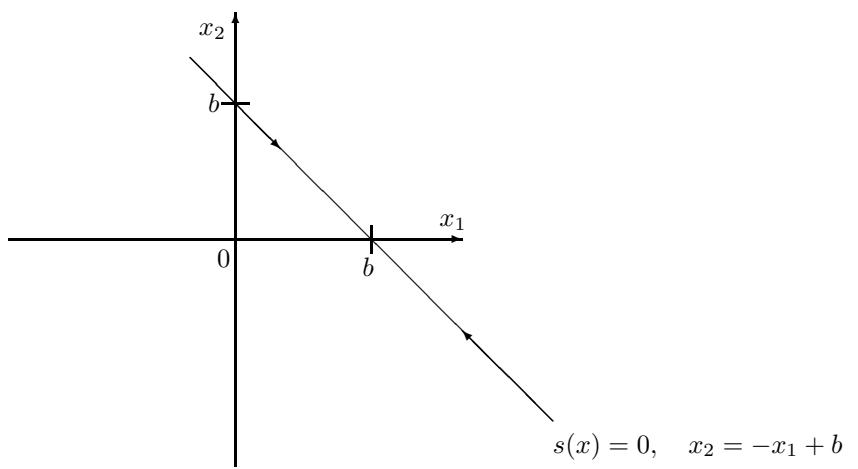
### 3.3.1 Definição da superfície de deslizamento

**Exemplo:**  $s(x) = x_1 + x_2$



**Nota:** se as trajectórias de estado forem atraídas para esta superfície de deslizamento, o sistema tenderá assintoticamente para o ponto de equilíbrio:  $(x_1 = 0; x_2 = 0)$ .

**Exemplo:**  $s(x) = x_1 + x_2 - b$ , com  $b \in \mathbb{R}$ .

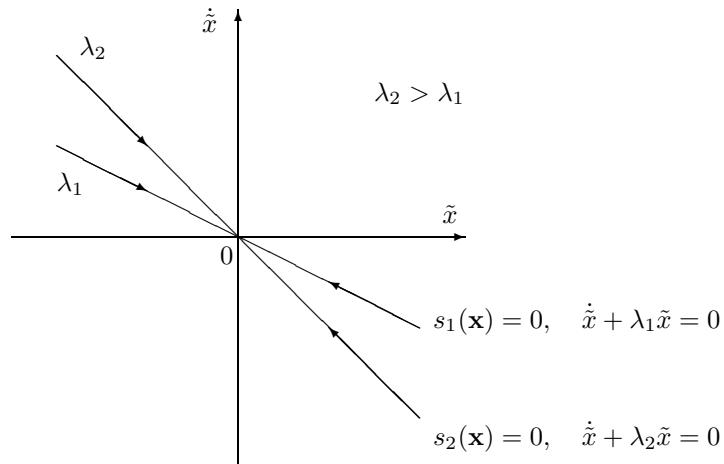


**Nota:** superfície de deslizamento em problema de seguimento caso  $b$  varie no tempo.

Um problema de seguimento é assim transformado num problema de regulação (mais fácil de resolver!).

**Exemplo:**  $s(\mathbf{x}) = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}$ , com  $\mathbf{x} = [x \quad \dot{x}]^T$  e  $\lambda > 0$ :

- $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}_d$
- $\tilde{x} = x - x_d$



**Nota:** ao definir a superfície de deslizamento em função do erro de seguimento, garante-se seguimento assintótico da trajectória desejada num problema de seguimento.

**Exemplo:** superfície de deslizamento proposta por Slotine & Li:

$$s(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}$$

correspondente a uma sequência de filtros de 1<sup>a</sup> ordem com pólo em  $-\lambda$ , onde:

- $n$  - ordem do sistema.
- $\lambda > 0$  - largura de banda do erro.
- $\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad \dots \quad x^{(n-1)}]^T$ .
- $\tilde{x} = x - x_d$ .

Aplicando a transformada de Laplace, é fácil concluir que:

Para  $n = 2$ , resulta:  $s(\mathbf{x}) = \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}$ .

Para  $n = 3$ , resulta:  $s(\mathbf{x}) = \ddot{\tilde{x}} + 2\lambda\dot{\tilde{x}} + \lambda^2\tilde{x}$ . Como representar graficamente esta superfície?

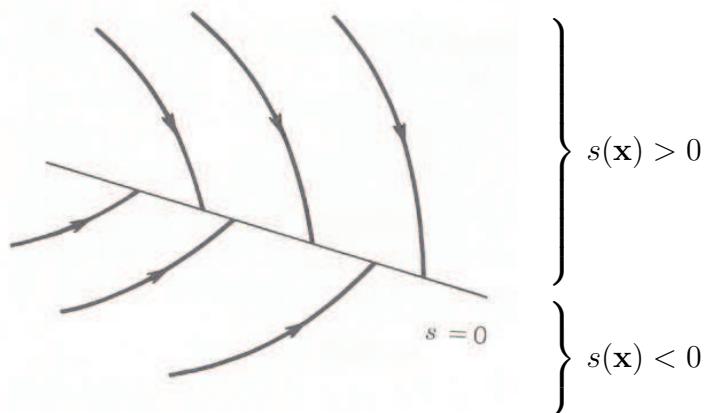
### 3.3.2 Modo de deslizamento

**Questão:** como garantir que as trajectórias do sistema são atraídas para a superfície de deslizamento?

**Resposta:** para garantir que os estados do sistema vão ser atraídos para uma superfície de deslizamento, é necessário que:

- $s(\mathbf{x})$  seja um conjunto invariante.
- a convergência dos estados se faça em tempo finito.

Sejam as seguintes trajectórias do sistema em torno de uma superfície de deslizamento:



O sistema de controlo autónomo<sup>1</sup>, com estrutura variável, é dado genericamente por:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \begin{cases} f^+(\mathbf{x}) & , \quad s(\mathbf{x}) > 0 \\ f^-(\mathbf{x}) & , \quad s(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

onde na descontinuidade se tem:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^-} f(\mathbf{x}) &= f^-(\mathbf{x}) \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} f(\mathbf{x}) &= f^+(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Segundo Filippov, para os estados serem atraídos para a superfície de deslizamento é necessário verificarem-se as seguintes condições:

1.  $\lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} > 0$
2.  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} < 0$

---

<sup>1</sup>**Abuso de notação:** utiliza-se a mesma designação  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  para representar um sistema  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u)$ , ou mesmo  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u$ , sempre que  $u = k(\mathbf{x})$ .

### Demonstração das condições de Filippov:

Sabendo que:

$$\frac{ds(\mathbf{x})}{dt} = \frac{ds(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{ds}{d\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

temos as seguintes condições de Filippov:

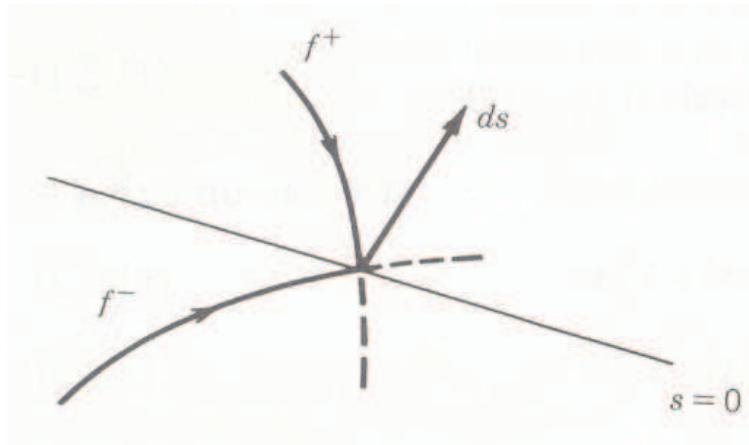
$$1. \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{ds(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} f^-(\mathbf{x}) > 0$$

$$2. \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ds(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} f^+(\mathbf{x}) < 0$$

ou seja, para que  $s(\mathbf{x})$  seja uma superfície de deslizamento que atraia os estados do sistema, é necessário verificarem-se as seguintes condições:

1. Produto interno de  $\frac{ds(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$  com  $f^-(\mathbf{x})$  terá que ser  $> 0$

2. Produto interno de  $\frac{ds(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$  com  $f^+(\mathbf{x})$  terá que ser  $< 0$



Nestas circunstâncias, mostra-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} > 0 \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s(\mathbf{x}) \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} < 0 , \text{ pois: } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{s \rightarrow 0^-} s(\mathbf{x}) \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} < 0 \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} s(\mathbf{x}) \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} < 0 \end{array} \right.$$

A conclusão anterior:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s(\mathbf{x}) \frac{ds(\mathbf{x})}{dt} < 0 \Leftrightarrow s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) < 0$$

**Conclusão:**  $s(\mathbf{x})$  é uma superfície de deslizamento para a qual os estados do sistema convergem assintoticamente, se:

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}s^2(\mathbf{x}) > 0 & \text{i.e., é positiva definida.} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) < 0 & \text{i.e., é negativa definida.} \end{cases}$$

**Exemplo:** seja o seguinte sistema não linear,

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 - u = 0$$

supor que a acção de controlo é uma combinação linear dos estados do sistema:

$$u = k_1x + k_2\dot{x}$$

e que a superfície de deslizamento é dada por:

$$s(\mathbf{x}) = s_1x + s_2\dot{x}, \quad \text{com: } s_1, s_2 > 0, \text{ e } \mathbf{x} = [x \ \dot{x}]^T$$

Que relações devem existir entre os parâmetros  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $s_1$  e  $s_2$  que garantam que o sistema atinge a superfície de deslizamento  $s(\mathbf{x})$ ?

**Resolução:**

1. Verificar que  $V(\mathbf{x})$  é positiva definida.

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}s^2(\mathbf{x}) > 0 \quad \checkmark \quad \text{pois: } V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T P \mathbf{x}, \quad P = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_1 s_2 \\ s_1 s_2 & s_2^2 \end{bmatrix} > 0$$

2. Assegurar que  $\dot{V}(\mathbf{x})$  é negativa definida:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) < 0 \quad ?$$

Desenvolvimento:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})(s_1\dot{x} + s_2\ddot{x}) = s(\mathbf{x})s_1\dot{x} + s(\mathbf{x})s_2(-0.5\dot{x} - 2x - x^2 + u)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})s_1\dot{x} - 0.5s(\mathbf{x})s_2\dot{x} - 2s(\mathbf{x})s_2x - s(\mathbf{x})s_2x^2 + s(\mathbf{x})s_2u$$

com  $u = k_1x + k_2\dot{x}$ , resulta:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})s_1\dot{x} - 0.5s(\mathbf{x})s_2\dot{x} - 2s(\mathbf{x})s_2x - s(\mathbf{x})s_2x^2 + s(\mathbf{x})s_2k_1x + s(\mathbf{x})s_2k_2\dot{x}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \underbrace{s(\mathbf{x})x[-2s_2 - s_2x + s_2k_1]}_{=A} + \underbrace{s(\mathbf{x})\dot{x}[s_1 - 0.5s_2 + s_2k_2]}_{=B}$$

donde:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s(\mathbf{x})x > 0 \wedge -2 - x + k_1 < 0 \Leftrightarrow k_1 < x + 2 \\ s(\mathbf{x})x < 0 \wedge -2 - x + k_1 > 0 \Leftrightarrow k_1 > x + 2 \end{cases} \\ B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s(\mathbf{x})\dot{x} > 0 \wedge s_1 - 0.5s_2 + s_2k_2 < 0 \Leftrightarrow k_2 < 0.5 - \frac{s_1}{s_2} \\ s(\mathbf{x})\dot{x} < 0 \wedge s_1 - 0.5s_2 + s_2k_2 > 0 \Leftrightarrow k_2 > 0.5 - \frac{s_1}{s_2} \end{cases} \end{cases}$$

**Teste:** caso  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 1$  e o estado do sistema seja  $x_0 = (4, 1)$ :

$$\begin{cases} s(\mathbf{x})x = (x + \dot{x})x = 5.4 = 20 > 0 \Rightarrow k_1 < x + 2 = 4 + 2 = 6 \\ s(\mathbf{x})\dot{x} = (x + \dot{x})\dot{x} = 5.1 = 5 > 0 \Rightarrow k_2 < 0.5 - 1 = -0.5 \end{cases}$$

onde a acção de controlo poderá ser neste ponto dada por:

$$u = 5x - \dot{x}$$

considerando, por exemplo  $k_1 = 5$  e  $k_2 = -1$ .

### 3.3.3 Dinâmica na superfície de deslizamento

Vimos atrás que o sistema de controlo com estrutura variável é dado genericamente por:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \begin{cases} f^+(\mathbf{x}) & , \quad s(\mathbf{x}) > 0 \\ f^-(\mathbf{x}) & , \quad s(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

ou seja, existe uma descontinuidade para  $s(\mathbf{x}) = 0$ .

**Questão:** como garantir que as trajectórias do sistema se mantêm sobre a superfície de deslizamento? Que acção de controlo devemos aplicar no momento em que o estado do sistema atinge  $s(\mathbf{x}) = 0$ ?

#### Método do controlo equivalente

A acção de controlo que garanta que os estados do sistema se mantêm na superfície de deslizamento deverá verificar:

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = 0$$

Desenvolvendo para o caso de uma sistema afim na entrada:

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \frac{ds(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u$$

vem:

$$\frac{ds(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u] = 0$$

$$L_f s(\mathbf{x}) + L_g s(\mathbf{x})u = 0$$

$$u = \frac{-L_f s(\mathbf{x})}{L_g s(\mathbf{x})}$$

**Conclusão:** quando o sistema atinge a superfície de deslizamento, a acção de controlo deverá ser alterada para a acção de controlo dada pela expressão anterior. Denomina-se *acção de controlo equivalente*:

$$u_{eq} = \frac{-L_f s(\mathbf{x})}{L_g s(\mathbf{x})} \Rightarrow \dot{s}(\mathbf{x}) = 0$$

**Exemplo:** calcular a acção de controlo equivalente para o exemplo anterior.

$$\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 - u = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -0.5\dot{x} - 2x - x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

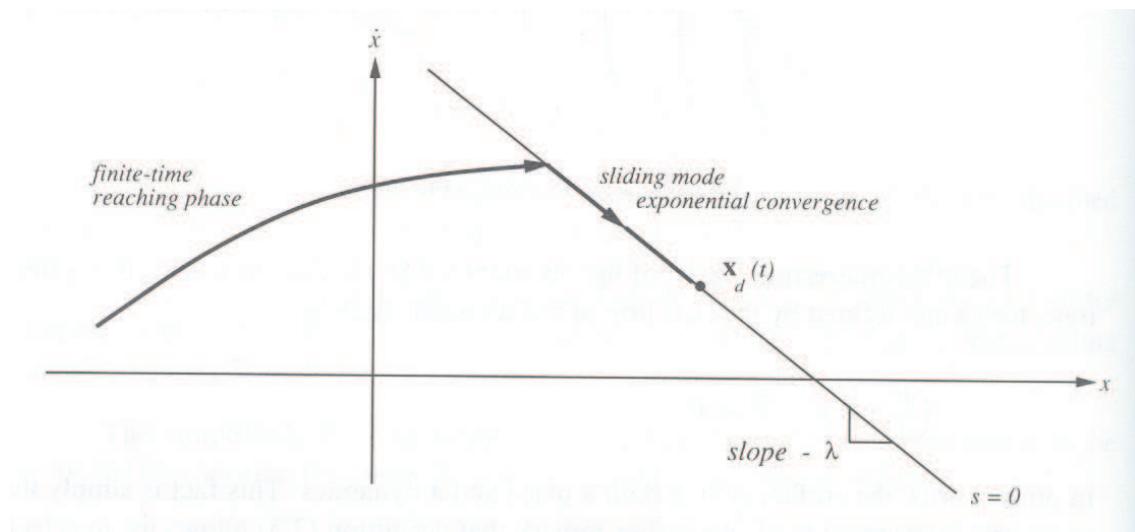
onde:

$$\begin{aligned} L_f s(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -0.5\dot{x} - 2x - x^2 \end{bmatrix} = s_1\dot{x} - 0.5s_2\dot{x} - 2s_2x - s_2x^2 \\ L_g s(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s_2 \end{aligned}$$

ou seja, quando as trajectórias atingem a superfície de deslizamento, a lei de controlo deverá ser alterada para:

$$u_{eq} = \frac{-L_f s(\mathbf{x})}{L_g s(\mathbf{x})} = -\frac{s_1}{s_2} \dot{x} + 0.5\dot{x} + 2x + x^2 = -0.5\dot{x} + 2x + x^2$$

Interpretação gráfica do controlo por modo de deslizamento considerando uma superfície de deslizamento de 1ª ordem:



**Conclusão:** com a aplicação da acção de controlo  $u_{eq}$ , a dinâmica do anel fechado coincide com a dinâmica da superfície de deslizamento.

## Problemas...

- Como garantir que as trajectórias de estado convergem para a superfície de deslizamento em **tempo finito**? Notar que:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$$

apenas garante a convergência para a superfície de deslizamento, nada diz quanto ao tempo que demora a lá chegar!

- Como garantir que a trajectória de estado se mantém o mais possível sobre a superfície de deslizamento, apesar de:

- erros de modelação.
- perturbações.
- imperfeições (atraso) no mecanismo de “switching”.

### 3.3.4 Convergência em tempo finito

Demonstra-se (Slotine & Li) que para superfícies de deslizamento da forma:

$$s(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}$$

o tempo que as trajectórias de estado levam a convergir para a superfície de deslizamento é finito e dado por:

$$t_f \leq \frac{|s(t_0)|}{\eta}, \quad \eta > 0$$

caso a função de Lyapunov seja tal que:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) \leq -\eta|s(\mathbf{x})|$$

**Nota:** esta expressão garante que a derivada  $\dot{V}(\mathbf{x})$  é sempre negativa e superior (em módulo) a  $\eta|s(\mathbf{x})|$ , ou seja, quanto mais afastado estiver o estado do sistema da superfície de deslizamento, maior é a velocidade de aproximação das trajectórias de estado a essa superfície.

**Exemplo:** calcular a acção de controlo a aplicar ao sistema do exemplo anterior, por forma a garantir que  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\eta|s(\mathbf{x})|$ , com  $\eta > 0$ .

**Solução:** adicionar uma nova componente à acção de controlo:

$$u = k_1x + k_2\dot{x} + u_N$$

onde  $u_N$  deverá ser projectada por forma a garantir que  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\eta|s(\mathbf{x})|$ .

Repetindo o desenvolvimento para a nova acção de controlo:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})s_1\dot{x} - 0.5s(\mathbf{x})s_2\dot{x} - 2s(\mathbf{x})s_2x - s(\mathbf{x})s_2x^2 + s(\mathbf{x})s_2u$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})s_1\dot{x} - 0.5s(\mathbf{x})s_2\dot{x} - 2s(\mathbf{x})s_2x - s(\mathbf{x})s_2x^2 + s(\mathbf{x})s_2k_1x + s(\mathbf{x})s_2k_2\dot{x} + s(\mathbf{x})s_2u_N$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \underbrace{s(\mathbf{x})x[-2s_2 - s_2x + s_2k_1]}_{=A} + \underbrace{s(\mathbf{x})\dot{x}[s_1 - 0.5s_2 + s_2k_2]}_{=B} + \underbrace{s(\mathbf{x})s_2u_N}_{=C}$$

onde:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < -\eta|s(\mathbf{x})| \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s(\mathbf{x})x > 0 \wedge -2 - x + k_1 < 0 \Leftrightarrow k_1 < x + 2 \\ s(\mathbf{x})x < 0 \wedge -2 - x + k_1 > 0 \Leftrightarrow k_1 > x + 2 \end{cases} \\ B < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s(\mathbf{x})\dot{x} > 0 \wedge s_1 - 0.5s_2 + s_2k_2 < 0 \Leftrightarrow k_2 < 0.5 - \frac{s_1}{s_2} \\ s(\mathbf{x})\dot{x} < 0 \wedge s_1 - 0.5s_2 + s_2k_2 > 0 \Leftrightarrow k_2 > 0.5 - \frac{s_1}{s_2} \end{cases} \\ C = s(\mathbf{x})s_2u_N = -\eta|s(\mathbf{x})|, \quad u_N = ? \end{cases}$$

Sugestão:

$$u_N = -\frac{\eta}{s_2} \text{sign}(s(\mathbf{x})), \quad \eta > 0, \quad \text{sign}(s(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & s(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -1, & s(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

Verificação:

$$C = s(\mathbf{x})s_2 \left[ -\frac{\eta}{s_2} \text{sign}(s(\mathbf{x})) \right] = -\eta s(\mathbf{x}) \text{sign}(s(\mathbf{x})) = -\eta|s(\mathbf{x})| \quad \checkmark$$

**Conclusão:** a acção de controlo  $u = k_1x + k_2\dot{x} - \frac{\eta}{s_2} \text{sign}(s(\mathbf{x}))$  com os parâmetros  $k_1$  e  $k_2$  retirados das desigualdades anteriores, garante  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\eta|s(\mathbf{x})|$ , ou seja, um tempo finito de aproximação à superfície de deslizamento.

### 3.3.5 Robustez a erros de modelação

**Questão:** como garantir a robustez do controlo por modo de deslizamento a erros de modelação, perturbações e imperfeições no mecanismo de comutação, quando a trajectória do sistema atinge a superfície de deslizamento?

Os erros de modelação podem ser provenientes das seguintes incertezas no modelo:

- *Incertezas paramétricas:* variações nos parâmetros, perturbações, etc...
- *Incertezas não-paramétricas:* dinâmicas não modeladas.

**Condição de “matching”:** as incertezas no modelo afectam o sistema na mesma gama do espaço de entrada.

Seja o sistema com incertezas dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = [f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x})] + [g(\mathbf{x}) + \Delta g(\mathbf{x})] u + d(\mathbf{x})$$

Assume-se que é possível agrupar todas as incertezas num único termo  $\Delta(\mathbf{x})$ , resultando:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + \Delta(\mathbf{x})$$

A condição de “matching” pressupõe o seguinte:

$$\Delta(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\bar{\Delta}(\mathbf{x}), \quad \text{onde: } \|\bar{\Delta}(\mathbf{x})\| \leq \rho, \quad \rho > 0$$

onde:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + g(\mathbf{x})\bar{\Delta}(\mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})[u + \bar{\Delta}(\mathbf{x})]$$

**Questão:** fará sentido considerar a condição de “matching”? Que vantagens traz?

**Resposta:** sim, em muitas situações é possível representar as incertezas através desta condição. A condição de “matching” permite simplificar o problema da análise da estabilidade robusta.

### Revisitando a linearização por realimentação...

Admita que o sistema é representado, após transformação de coordenadas, na forma canónica do controlador:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = b(\xi) + a(\xi)u \end{array} \right.$$

A aplicação da lei de controlo:

$$u = a(\xi)^{-1} [-b(\xi) + v] = \alpha(\xi) + \beta(\xi)v$$

resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = v \end{array} \right.$$

No entanto, devido a erros de modelação, será admissível considerar:

$$u = \hat{a}(\xi)^{-1} [-\hat{b}(\xi) + v] = \hat{\alpha}(\xi) + \hat{\beta}(\xi)v$$

onde, por simples manipulação algébrica da última equação de estado (deixando cair o  $\xi$ ):

$$\dot{\xi}_n = v = \beta^{-1}(u - \alpha) = \beta^{-1}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}v - \alpha) = \beta^{-1}(\hat{\alpha} - \alpha) + \beta^{-1}\hat{\beta}v$$

$$\dot{\xi}_n = v + \underbrace{(\beta^{-1}\hat{\beta} - 1)v + \beta^{-1}(\hat{\alpha} - \alpha)}_{\eta(\xi, v)} = v + \eta(\xi, v)$$

Ficando a nova representação de estado dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} \\ \dot{\xi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta(\xi, v) \end{bmatrix}$$

**Conclusão:** as incertezas afectam o sistema na mesma gama do espaço de entrada!

Seja o seguinte sistema com incertezas que verificam a condição de “matching”:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + g(\mathbf{x})\bar{\Delta}(\mathbf{x}), \quad \text{onde: } \|\bar{\Delta}(\mathbf{x})\| \leq \rho, \quad \rho > 0$$

considerar uma superfície de deslizamento  $s(\mathbf{x})$  tal que:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}s^2(\mathbf{x}) > 0$$

**Questão:** qual a acção de controlo a aplicar ao sistema por forma a garantir que este se mantém sobre a superfície de deslizamento, apesar das incertezas no modelo?

**Resposta:** é necessário que  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ , no pior caso possível das incertezas.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \frac{ds(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u + g(\mathbf{x})\bar{\Delta}(\mathbf{x})] \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= s(\mathbf{x}) [L_f s(\mathbf{x}) + L_g s(\mathbf{x})u + L_g s(\mathbf{x})\bar{\Delta}(\mathbf{x})]\end{aligned}$$

Fazendo:

$$u = u_{eq} + u_N = \frac{-L_f s(\mathbf{x})}{L_g s(\mathbf{x})} + u_N$$

resulta:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) [L_g s(\mathbf{x})u_N + L_g s(\mathbf{x})\bar{\Delta}]$$

admitindo, sem perda de generalidade,  $L_g s(\mathbf{x}) = 1$ , vem:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})u_N + s(\mathbf{x})\bar{\Delta}(\mathbf{x})$$

onde, o termo  $u_N$  poderá ser, por exemplo:

$$u_N = -\rho \cdot \text{sign}(s(\mathbf{x}))$$

pois assim:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\rho|s(\mathbf{x})| + s(\mathbf{x})\bar{\Delta} \leq 0, \quad \text{pois: } \|\bar{\Delta}\| \leq \rho$$

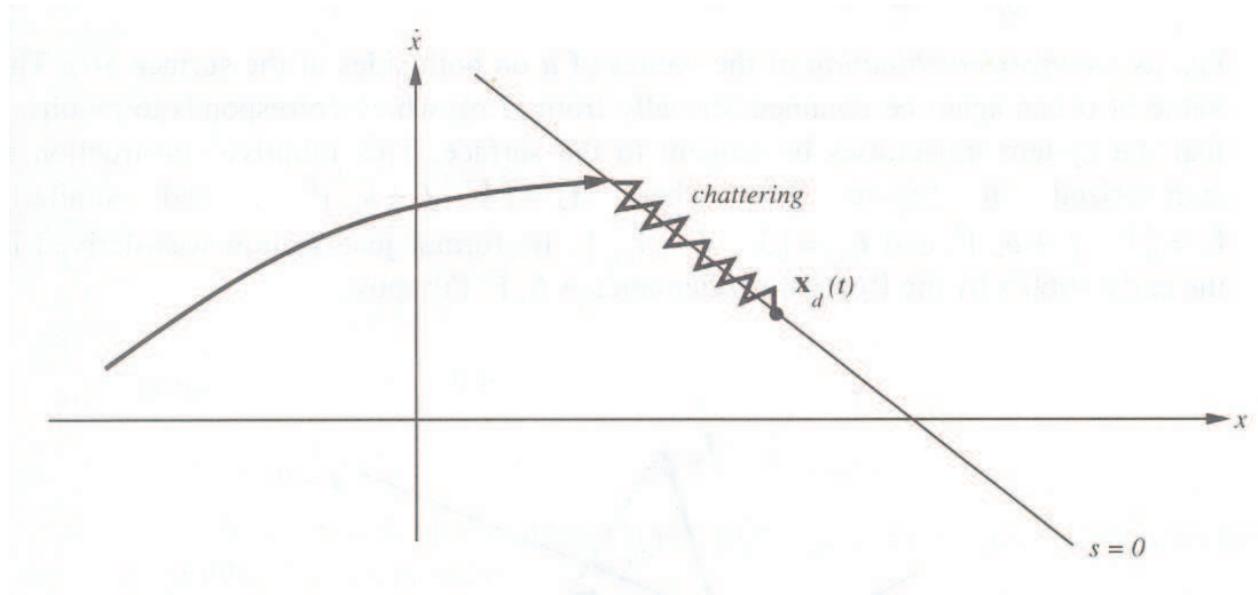
### Implicações do termo $u_N$

O termo adicional  $u_N$ , definido por:

$$u_N = -\rho \cdot \text{sign}(s(\mathbf{x}))$$

provoca:

- uma descontinuidade na lei de controlo.
- aparecimento do fenómeno típico designado por “*chattering*”, devido ao facto de a transição não ser imediata (inércia do mecanismo de transição, imprecisão no cálculo de  $s(\mathbf{x})$ , etc...).



**Nota:** mais à frente iremos ver uma forma de atenuar o efeito nocivo do *chattering*.

**Outra hipótese para  $u_N$ :**

$$u_N = -\frac{\rho}{s(\mathbf{x})} |s(\mathbf{x})|, \quad \rho > 0$$

**Exemplo:** seja o seguinte sistema com incerteza no termo  $f$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + u, \quad \mathbf{x} = [x \quad \dot{x}]^T$$

com:

- $\hat{f}(\mathbf{x}) = -1.5\dot{x}^2 \cos 3x$
- $|f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})| = |\Delta(\mathbf{x})| \leq \rho \equiv 0.5\dot{x}^2 |\cos 3x| : -2.0\dot{x}^2 \cos 3x \leq f(\mathbf{x}) \leq -1.0\dot{x}^2 \cos 3x$

1. Demonstrar que se trata de um sistema que verifica a condição de “matching”.

Representando em espaço de estados o **modelo nominal**:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -1.5x_2^2 \cos 3x_1 + u \end{cases}$$

por outro lado, a representação do **modelo com incerteza**:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -1.5x_2^2 \cos 3x_1 + u + \Delta(\mathbf{x}) = -1.5x_2^2 \cos 3x_1 + 1.(u + \Delta(\mathbf{x})) \end{cases} \quad \checkmark$$

2. Determinar a acção de controlo equivalente,  $u_{eq}$ , que garante que os estados do sistema se mantêm sobre a seguinte superfície de deslizamento, considerando o caso nominal:

$$s(\mathbf{x}) = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}, \quad \dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}_d, \quad \tilde{x} = x - x_d, \quad \lambda > 0$$

No caso nominal, temos que:

$$\begin{aligned} \dot{s}(\mathbf{x}) = 0 &\Leftrightarrow \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow f(\mathbf{x}) + u - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow u_{eq} = -f(\mathbf{x}) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}} \end{aligned}$$

3. Verificar que as trajectórias de estado são atraídas para a superfície de deslizamento, apesar da incerteza, caso  $u = u_{eq} + u_N$ , com  $u_N$  dado por:

$$u_N = -\rho \cdot \text{sign}(s(\mathbf{x})), \quad \text{com: } \rho = 0.5\dot{x}^2 |\cos 3x|$$

Resolução:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \dot{s}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) + u + \Delta(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}})$$

Substituindo,  $u = u_{eq} + u_N$ , com  $u_{eq}$  calculado atrás, vem:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= s(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) + u_{eq} + u_N + \Delta(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}}) \\ &= s(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) + \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} + u_N + \Delta(\mathbf{x}) - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}}) \\ &= s(\mathbf{x})(u_N + \Delta(\mathbf{x})) \\ &= s(\mathbf{x})(-\rho.\text{sign}(s(\mathbf{x})) + \Delta(\mathbf{x})) = -\rho|s(\mathbf{x})| + s(\mathbf{x})\Delta(\mathbf{x})\end{aligned}$$

onde se conclui que:  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ , pois  $|\Delta(\mathbf{x})| \leq \rho$ .

Para garantir que  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\eta|s(\mathbf{x})|$ , deveríamos usar antes:

$$u_N = -(\rho + \eta)\text{sign}(s(\mathbf{x})), \quad \text{com: } \rho = 0.5\dot{x}^2|\cos 3x|$$

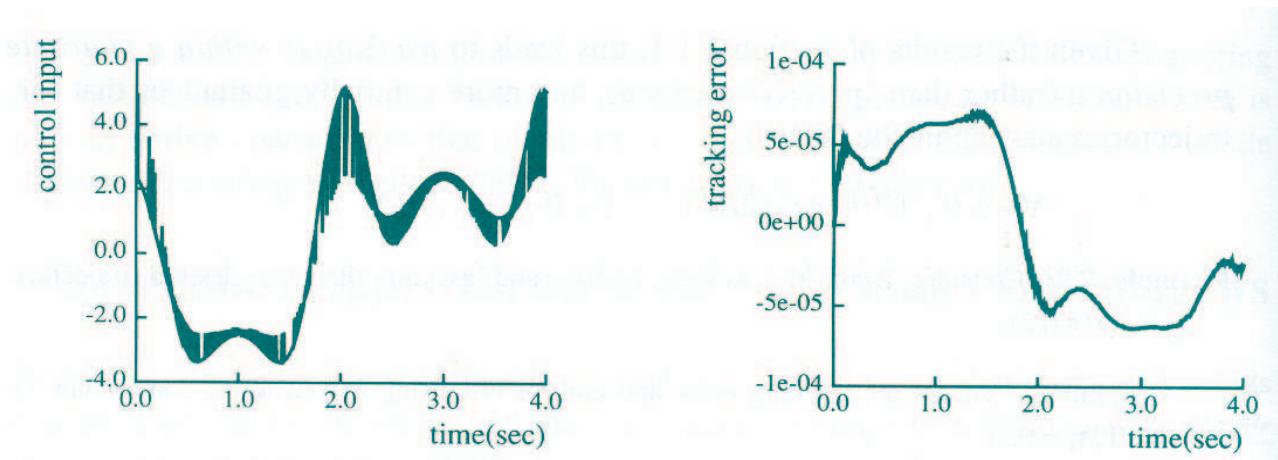
Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= s(\mathbf{x})(u_N + \Delta(\mathbf{x})) \\ &= s(\mathbf{x})(-\rho.\text{sign}(s(\mathbf{x})) - \eta.\text{sign}(s(\mathbf{x})) + \Delta(\mathbf{x})) \\ &= \underbrace{-\rho|s(\mathbf{x})| + s(\mathbf{x})\Delta(\mathbf{x})}_{\leq 0} - \eta|s(\mathbf{x})|\end{aligned}$$

onde:  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\eta|s(\mathbf{x})|$ .

**Simulação:** para  $\lambda = 20$ ,  $\eta = 0.1$  e  $x_d = \sin \pi/2t$ , vem:

$$u = 1.5\dot{x}^2 \cos 3x + \ddot{x}_d - 20\dot{\tilde{x}} - (0.5\dot{x}^2|\cos 3x| + 0.1).\text{sign}(\dot{\tilde{x}} + 20\dot{x})$$



**Nota:** é visível o efeito do *chattering* na acção de controlo.

### 3.3.6 Chattering na acção de controlo

Devido a imperfeições no mecanismo de comutação, atrasos, erros de modelação, etc..., a acção de controlo aplicada ao sistema sobre a superfície de deslizamento:

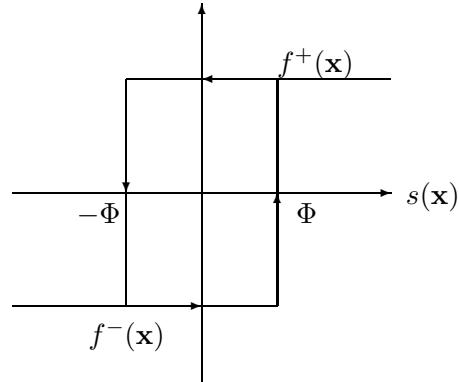
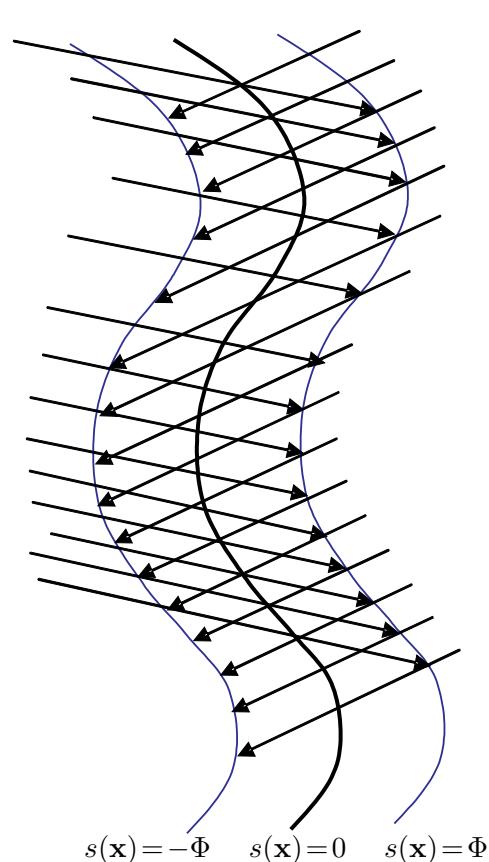
$$u = u_{eq} + u_N$$

origina o aparecimento do fenómeno do *chattering*.

**Consequências:** excitação de modos de alta frequência, provavelmente não modelados.

**Questão:** como atenuar este efeito garantindo simultaneamente a estabilidade do sistema?

**Solução:** considerar a comutação como uma acção de controlo tipo histerese.



$\Phi$  - camada fronteira.

Quando  $\Phi$  diminui, o *chattering* aumenta.

Quando  $\Phi$  aumenta, o *chattering* diminui.

**Desvantagem:** a acção de controlo em  $|s(x)| \leq \Phi$  terá que ser aproximada de  $u = u_{eq} + u_N$ , o que implica uma evolução aproximada das trajectórias de estado na superfície de deslizamento.

### Aproximação da acção de controlo

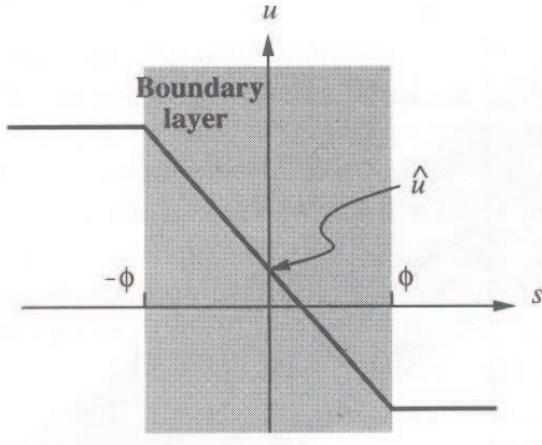
Normalmente considera-se  $u_N$  approximado por  $u'_N$ :

$$u = u_{eq} + u'_N, \quad u'_N = -\alpha \cdot \text{sat} \left( \frac{s(\mathbf{x})}{\Phi} \right), \quad \alpha > 0$$

onde:

$$\text{sat} \left( \frac{s(\mathbf{x})}{\Phi} \right) = \begin{cases} \frac{s(\mathbf{x})}{\Phi} & , \quad |s(\mathbf{x})| \leq \Phi \\ \text{sign} \left( \frac{s(\mathbf{x})}{\Phi} \right) & , \quad s(\mathbf{x}) < -\Phi \vee s(\mathbf{x}) > \Phi \end{cases}$$

Em termos gráficos:



**Nota:** o novo termo  $u'_N$  não afecta a característica da superfície de deslizamento em atrair os estados do sistema.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \cdot u'_N$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= s(\mathbf{x}) \cdot \left[ -\alpha \cdot \text{sat} \left( \frac{s(\mathbf{x})}{\Phi} \right) \right] \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= \begin{cases} -\frac{\alpha}{\Phi} s^2(\mathbf{x}) < 0 & , \quad |s(\mathbf{x})| \leq \Phi, \text{ e } \alpha, \Phi > 0 \\ -\alpha \cdot s(\mathbf{x}) \cdot \text{sign} \left( \frac{s(\mathbf{x})}{\Phi} \right) & = \begin{cases} -\alpha \cdot s(\mathbf{x}) \cdot 1 = -\alpha \cdot s(\mathbf{x}) < 0 & , \quad s(\mathbf{x}) \geq 0, \text{ e } \alpha, \Phi > 0 \\ -\alpha \cdot s(\mathbf{x}) \cdot (-1) = \alpha \cdot s(\mathbf{x}) < 0 & , \quad s(\mathbf{x}) < 0, \text{ e } \alpha, \Phi > 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \checkmark$$

Demonstra-se em Slotine & Li que para a superfície de deslizamento definida por:

$$s(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x} \quad , \quad \tilde{x} = x - x_d$$

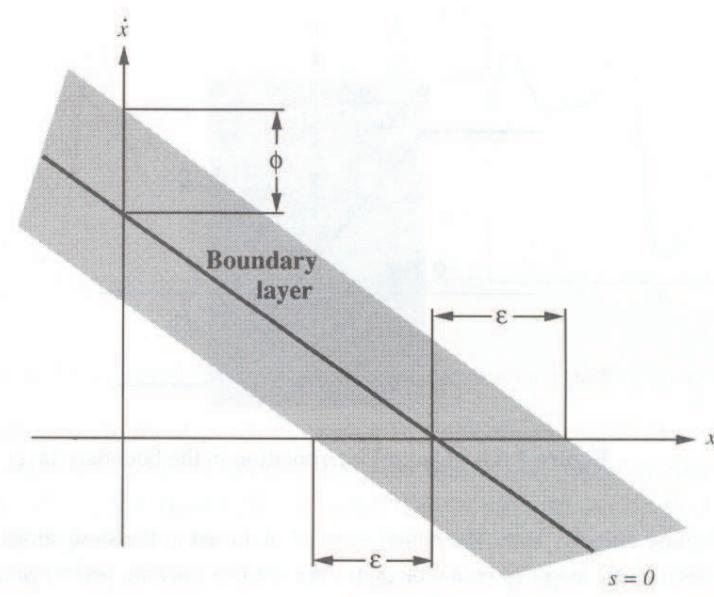
a **precisão do seguimento** é dada pelo factor:

$$\varepsilon = \frac{\Phi}{\lambda^{n-1}}$$

sendo que, para qualquer trajectória que se inicie no interior da camada fronteira para  $t = 0$ , i.e.,  $B(t) = \{\mathbf{x}(t) : |s(\mathbf{x})| \leq \Phi\}$ , se verifica  $\forall t > 0$ :

$$|\tilde{x}^{(i)}(t)| \leq (2\lambda)^i \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

**Exemplo:** considerando  $n = 2$ .



- Precisão:  $\varepsilon = \frac{\Phi}{\lambda}$ .
- $|x - x_d| \leq 2\lambda\varepsilon = 2\Phi$

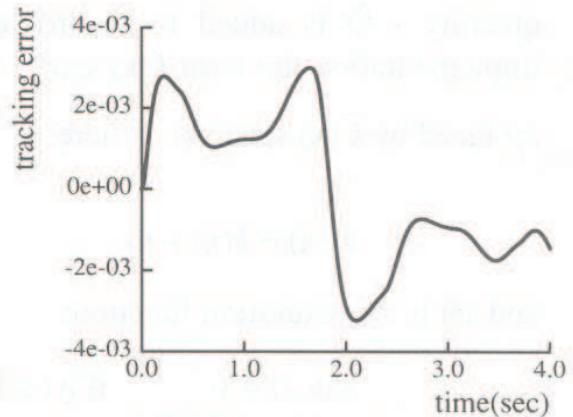
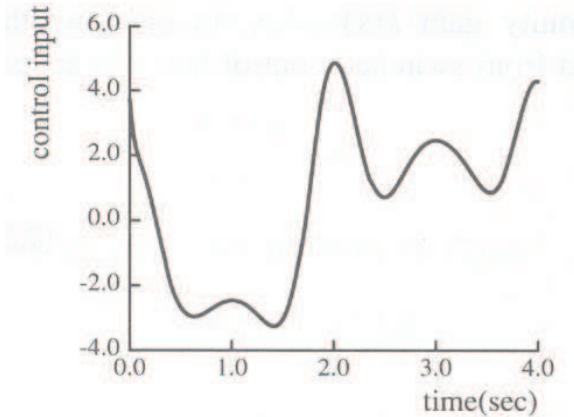
**Nota final:** é possível projectar a camada fronteira variante no tempo.

**Continuação do exemplo:** eliminar o efeito do *chattering* na acção de controlo através da implementação de uma lei de controlo aproximada em torno da superfície de deslizamento, dada por:

$$u = u_{eq} + u'_N, \quad u'_N = -(\rho + \eta) \cdot \text{sat} \left( \frac{s(\mathbf{x})}{\Phi} \right), \quad \text{com: } \Phi = 0.1$$

**Simulação:** para  $\lambda = 20$ ,  $\eta = 0.1$  e  $x_d = \sin \pi/2t$ , vem:

$$u = 1.5\dot{x}^2 \cos 3x + \ddot{x}_d - 20\dot{\tilde{x}} - (0.5\dot{x}^2 |\cos 3x| + 0.1) \cdot \text{sat} \left( \frac{\dot{\tilde{x}} + 20\tilde{x}}{0.1} \right)$$



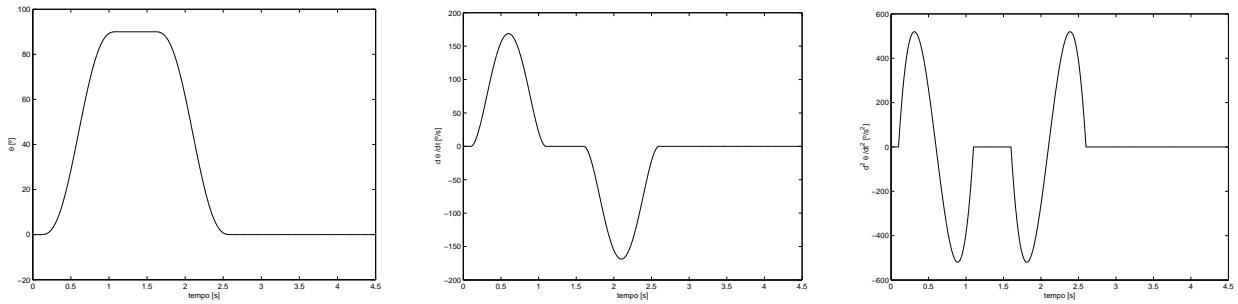
**Nota:** a eliminação do *chattering* na acção de controlo teve como contrapartida a diminuição da precisão no seguimento.

**Exemplo:** resultados práticos da aplicação do controlo por modo de deslizamento ao robô flexível, tipo SCARA, existente no laboratório de robótica do pavilhão de Eng. Mecânica III.

(Tese de Mestrado Engenharia Mecânica, “Controlo por modo de deslizamento de um robô flexível”, João Nabais, Instituto Superior Técnico, 2002)



**Trajectória desejada:** perfil da junta correspondente ao elo flexível, sem gravidade a actuar.



**Definição das superfícies de deslizamento:** uma para cada variável a controlar: erro de posição angular,  $\theta_e = \theta - \theta_d$ , e deslocamento lateral da extremidade,  $\chi_{1L}\eta_1$ .

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\theta_e + \dot{\theta}_e + C_2 \int \theta_e dt \\ C_3\chi_{1L}\eta_1 + \chi_{1L}\dot{\eta}_1 \end{bmatrix}$$

**Condições de deslizamento:**  $\dot{V}_i = s_i \dot{s}_i \leq 0$  para  $i = 1, 2$ .

$$s_1 \dot{s}_1 = s_1 \left[ K_1\tau + K_2\eta_1 - K_3\dot{\theta}_d - K_3\dot{\theta}_e - \ddot{\theta}_d + C_1 s_1 - (C_1^2 - C_2)\theta_e - C_1 C_2 \int \theta_e dt \right] \leq 0$$

$$s_2 \dot{s}_2 = s_2 \chi_{1L} \left[ -K_4\tau + K_5\dot{\theta}_e + K_5\dot{\theta}_d + \frac{C_3}{\chi_{1L}} s_2 - (C_3^2 + K_6 - \dot{C}_3)\eta_1 \right] \leq 0$$

**Lei de controlo:**

$$\tau = \psi_1 \dot{\theta}_e + \psi_2 \theta_e + \psi_3 \int \theta_e dt + \psi_4 \ddot{\theta}_d + \psi_5 \dot{\theta}_d + \psi_6 s_1 + \psi_7 s_2 + \psi_8 \eta_1$$

## Determinação dos ganhos do controlador

**Caso 1:**  $s_1 s_2 \leq 0$ .

| X                  | $X \cdot s_1 > 0, X \cdot s_2 < 0$   | $X \cdot s_1 < 0, X \cdot s_2 > 0$   |
|--------------------|--|--|
| $\dot{\theta}_e$   | $\psi_1 < \frac{K_5}{K_4}$   | $\psi_1 > \frac{K_3}{K_1}$   |
| $\theta_e$         | $\psi_2 < \min \left\{ \frac{C_1^2 - C_2}{K_1}, 0 \right\}$                            | $\psi_2 > \max \left\{ \frac{C_1^2 - C_2}{K_1}, 0 \right\}$                            |
| $\int \theta_e dt$ | $\psi_3 < 0$   | $\psi_3 > \frac{C_1 C_2}{K_1}$   |
| $\ddot{\theta}_d$  | $\psi_4 < 0$   | $\psi_4 > \frac{1}{K_1}$   |
| $\dot{\theta}_d$   | $\psi_5 < \frac{K_5}{K_4}$   | $\psi_5 > \frac{K_3}{K_1}$   |
| $s_1$              | $\psi_6 < -\frac{C_1}{K_1}$  | não existe   |
| $s_2$              | não existe   | $\psi_7 > \frac{C_3}{\chi_{1L} K_4}$   |
| $\eta_1$           | $\psi_8 < \min \left\{ -\frac{K_2}{K_1}, \frac{\dot{C}_3 - K_6 - C_3^2}{K_4} \right\}$ | $\psi_8 > \max \left\{ -\frac{K_2}{K_1}, \frac{\dot{C}_3 - K_6 - C_3^2}{K_4} \right\}$ |

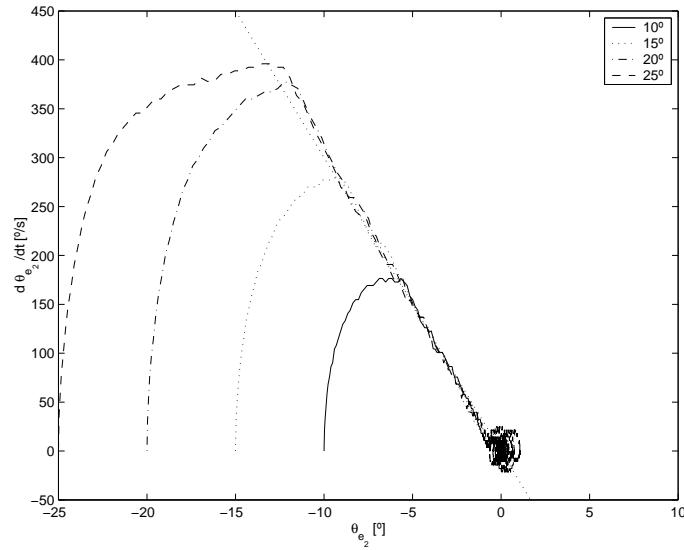
**Caso 2:**  $s_1 s_2 > 0$  e  $\eta_1 \dot{\eta}_1 < 0$ . Igual ao **Caso 1** mas com  $C_3$  actualizado de acordo com:

| $s_1 > 0$ e $\eta_1 > 0$             | $s_1 > 0$ e $\eta_1 < 0$             | $s_1 < 0$ e $\eta_1 > 0$             | $s_1 < 0$ e $\eta_1 < 0$             |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $C_3 < -\frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1}$ | $C_3 > -\frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1}$ | $C_3 > -\frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1}$ | $C_3 < -\frac{\dot{\eta}_1}{\eta_1}$ |

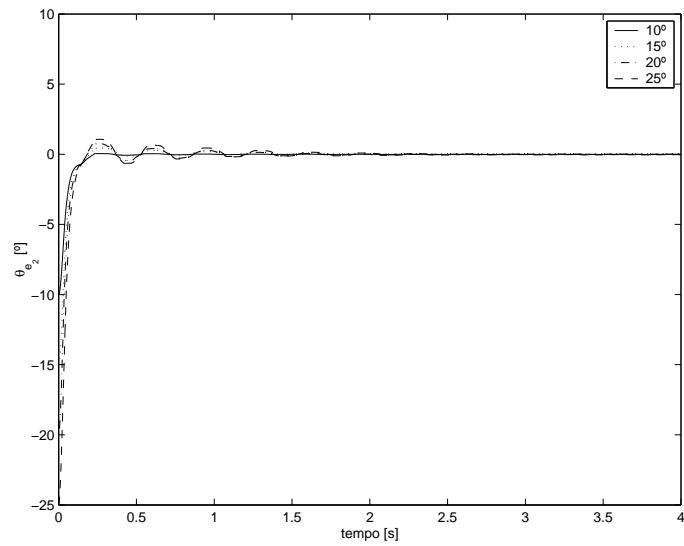
**Caso 3:**  $s_1 s_2 > 0$  e  $\eta_1 \dot{\eta}_1 > 0$ .

| X                  | $X \cdot s_1 > 0$                  | $X \cdot s_1 < 0$                  |
|--------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| $\dot{\theta}_e$   | $\psi_1 < \frac{K_3}{K_1}$         | $\psi_1 > \frac{K_3}{K_1}$         |
| $\theta_e$         | $\psi_2 < \frac{C_1^2 - C_2}{K_1}$ | $\psi_2 > \frac{C_1^2 - C_2}{K_1}$ |
| $\int \theta_e dt$ | $\psi_3 < \frac{C_1 C_2}{K_1}$     | $\psi_3 > \frac{C_1 C_2}{K_1}$     |
| $\ddot{\theta}_d$  | $\psi_4 < \frac{1}{K_1}$           | $\psi_4 > \frac{1}{K_1}$           |
| $\dot{\theta}_d$   | $\psi_5 < \frac{K_3}{K_1}$         | $\psi_5 > \frac{K_3}{K_1}$         |
| $s_1$              | $\psi_6 < -\frac{C_1}{K_1}$        | não existe                         |
| $s_2$              | não existe                         | $\psi_7 = 0$                       |
| $\eta_1$           | $\psi_8 < -\frac{K_2}{K_1}$        | $\psi_8 > -\frac{K_2}{K_1}$        |

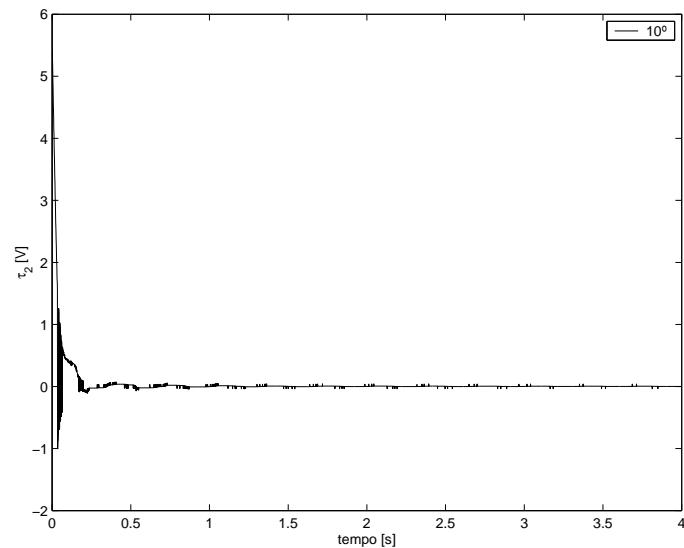
Evolução da trajectória no plano de fase:



Evolução temporal correspondente:



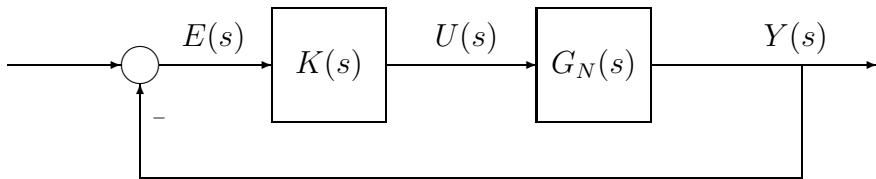
Acção de controlo:



## 4 Introdução ao controlo robusto de sistemas lineares

**Objectivo:** o problema do controlo robusto consiste na determinação de um controlador  $K(s)$  que, embora projectado para o modelo nominal do sistema, seja capaz de garantir a estabilidade e as especificações de desempenho para o sistema real.

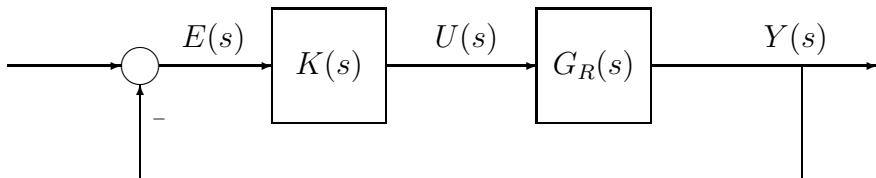
**Anel de controlo nominal:**



Admitindo um **erro de modelação** dado genericamente por:

$$\Delta G(s) = G_R(s) - G_N(s) \neq 0$$

**Anel de controlo real:**



**Questão:** admitindo que o anel de controlo nominal é estável e com desempenho pretendido, como projectar  $K(s)$  tal que garanta simultaneamente:

- Estabilidade robusta do anel fechado para o sistema real.
- Desempenho robusto do anel fechado para o sistema real.

## 4.1 Estabilidade robusta

**Questão:** como garantir que o controlador que projectámos para o modelo nominal é capaz de estabilizar o sistema real? O controlador projectado para o sistema nominal deverá estabilizar uma *família de modelos*, e não apenas o nominal.

**Questão:** como caracterizar, ou descrever matematicamente, as incertezas do modelo?

### 4.1.1 Caracterização da incerteza em modelos

Podem-se considerar dois tipos de incertezas nos modelos:

- **Incertezas paramétricas:** erros na atribuição de valores aos parâmetros do sistema, quer sejam parâmetros com significado físico (elasticidade, factor de amortecimento, atrito), ou sem significado físico (coeficientes da função de transferência, valor de um pólo). Também se designam por **incertezas estruturadas**.

Exemplo:

$$G_N(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \text{com: } \xi \in [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$$

- **Incertezas não paramétricas:** mais conservadora, erros provenientes de se terem desprezado no modelo nominal dinâmicas de ordem superior (zeros de fase mínima e não mínima, ou pólos estáveis), atraso de transporte, etc... Também se designam por **incertezas não estruturadas** e são particularmente fáceis de se adaptar a uma análise em frequência.

Podem ser classificadas em:

- **Incertezas não estruturadas aditivas:**

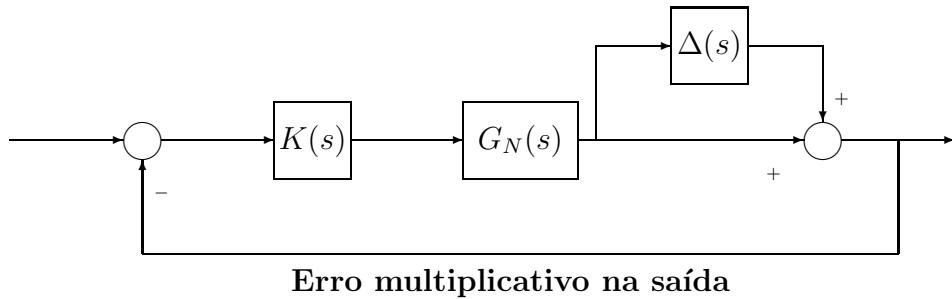
$$G_R(s) = G_N(s) + \Delta_a(s)$$

onde  $\Delta_a(s)$  corresponde a uma função de transferência sem pólos instáveis, admitindo-se conhecido apenas um seu majorante:

$$|\Delta_a(j\omega)| \leq \gamma(\omega)$$

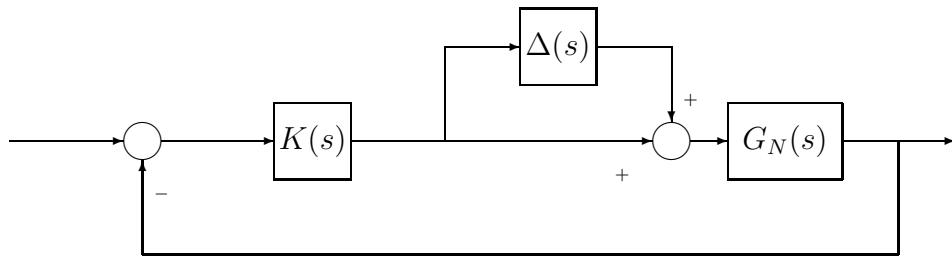
- Incertezas não estruturadas multiplicativas:

$$G_R(s) = [1 + \Delta(s)] G_N(s) = G_N(s) + \Delta(s)G_N(s)$$



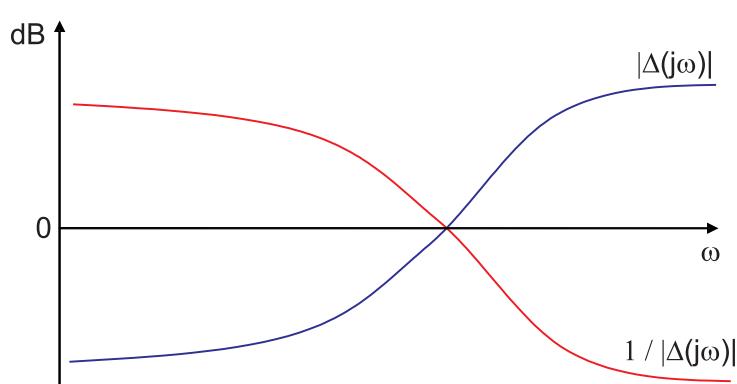
que no caso SISO é equivalente a:

$$G_R(s) = G_N(s) [1 + \Delta(s)] = G_N(s) + G_N(s)\Delta(s)$$



onde a incerteza  $\Delta(s)$  está “normalizada” pelo modelo nominal, admitindo-se conhecido apenas um seu majorante:

$$|\Delta(j\omega)| \leq \gamma(\omega)$$

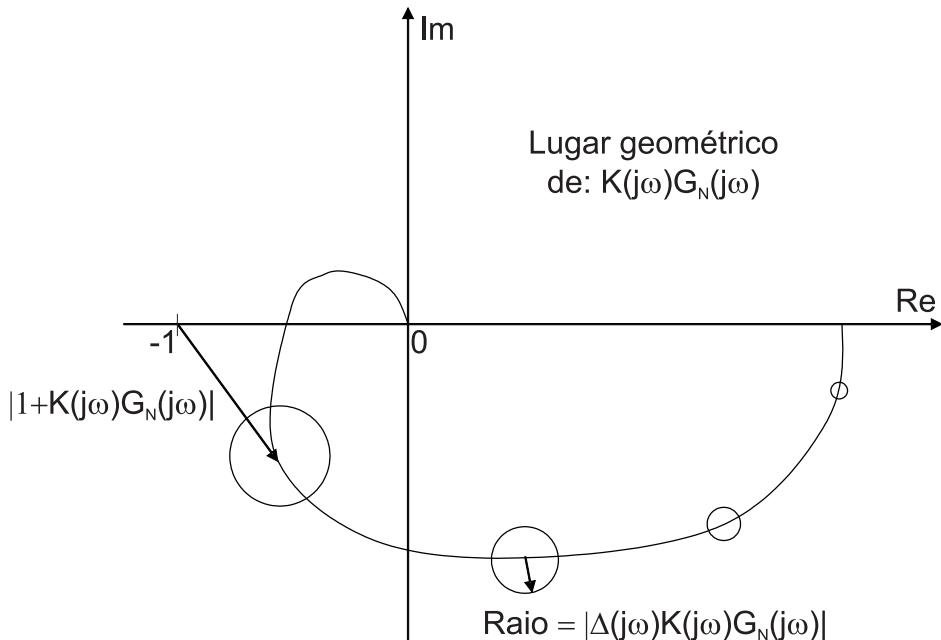


**Nota:** assume-se completa ignorância da fase.

#### 4.1.2 Critério para a estabilidade robusta

**Extensão do critério de estabilidade de Nyquist:** caso  $K(j\omega)$  estabilize o modelo nominal,  $G_N(j\omega)$ , então também deverá estabilizar o sistema real,  $G_R(j\omega)$ , o que significa que o número de voltas em torno do ponto crítico de estabilidade,  $-1$ , deverá ser igual em ambos os casos.

**Exemplo:** supondo o sistema nominal estável.



**Estabilidade robusta:** garantida sempre que o disco que reflecte a incerteza do modelo não tocar no ponto crítico de estabilidade,  $(-1, 0)$ ,  $\forall \omega$ , ou seja:

$$|\Delta(j\omega)K(j\omega)G_N(j\omega)| < |1 + K(j\omega)G_N(j\omega)|, \quad \forall \omega$$

ou, para  $L(j\omega) = K(j\omega)G_N(j\omega)$ :

$$|\Delta(j\omega)L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \quad \forall \omega$$

$$|\Delta(j\omega)| < \left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega \quad \text{com: } T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)}$$

**Nota:** este critério de estabilidade designa-se por *critério de estabilidade de Doyle* e é apenas uma condição suficiente para a estabilidade.

### Implicação da condição de estabilidade robusta

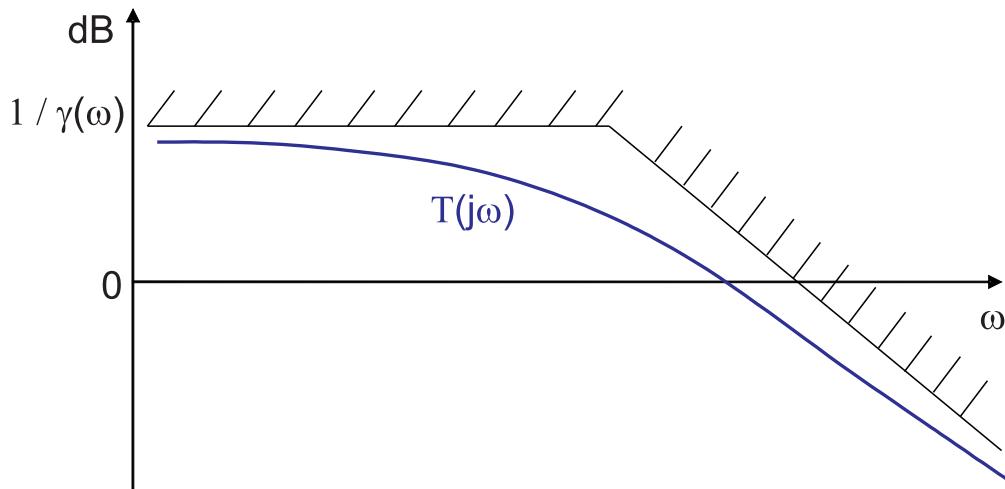
A condição de estabilidade robusta:

$$|T(j\omega)| < \left| \frac{1}{\Delta(j\omega)} \right|$$

sabendo-se conhecido o majorante  $|\Delta(j\omega)| \leq \gamma(\omega)$ , pode ser escrita na forma:

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{\gamma(\omega)}$$

ou seja, em termos gráficos:



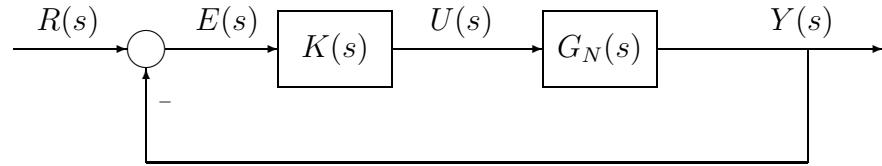
onde:

$$T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} = \frac{K(j\omega)G_N(j\omega)}{1 + K(j\omega)G_N(j\omega)} , \quad \text{F.T. anel fechado}$$

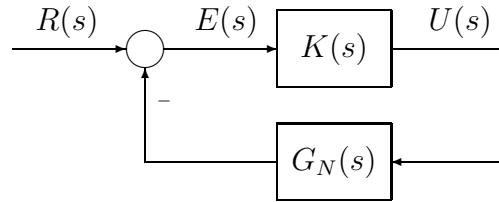
**Conclusão:** a condição de estabilidade robusta impõe uma restrição à largura de banda do anel fechado, ou seja, à rapidez de resposta do sistema controlado.

### 4.1.3 Teorema do ganho pequeno

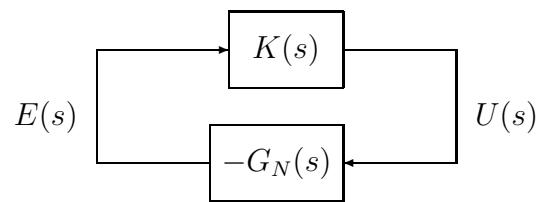
Seja o seguinte sistema de controlo por realimentação SISO sem incertezas:



o diagrama de blocos pode ser visto da seguinte forma para:



ou ainda, considerando  $R(s)=0$ :



**Teorema do ganho pequeno:** a condição suficiente de estabilidade do sistema em anel fechado é dada por:

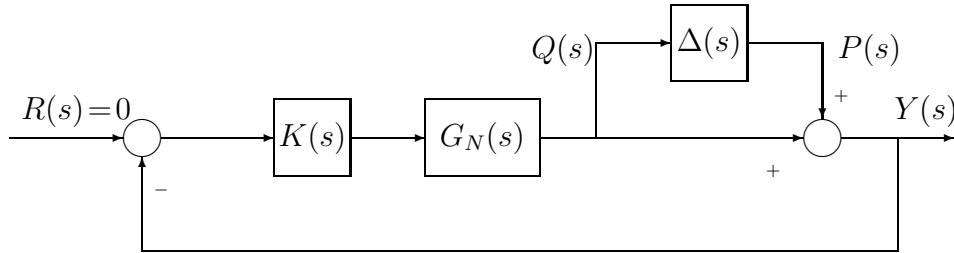
$$|K(j\omega)| \cdot |G_N(j\omega)| < 1 , \quad \forall \omega$$

ou,

$$|L(j\omega)| < 1$$

pois:  $|L(j\omega)| < |K(j\omega)| \cdot |G_N(j\omega)|$ .

Seja o seguinte sistema SISO com erro multiplicativo na saída:



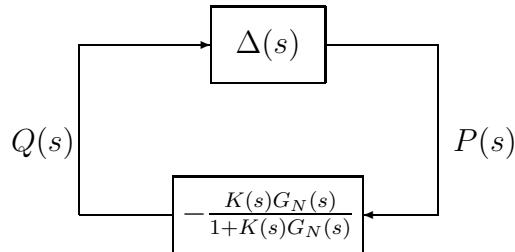
Desenvolvendo as equações do diagrama de blocos:

$$\begin{cases} Y(s) = P(s) + K(s)G_N(s)[-Y(s)] \\ Q(s) = K(s)G_N(s)[-Y(s)] \end{cases} \quad \begin{cases} P(s) = [1 + K(s)G_N(s)]Y(s) \\ Q(s) = -K(s)G_N(s)Y(s) \end{cases}$$

onde:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{-K(s)G_N(s)}{1 + K(s)G_N(s)}$$

ou seja, o sistema poderá ser representado pelo seguinte diagrama de blocos equivalente:



### Modelo de Perturbação Básico

**Teorema do ganho pequeno:** a condição suficiente de estabilidade robusta do sistema em anel fechado é dada por:

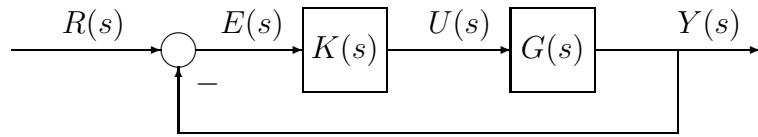
$$|\Delta(j\omega)| \cdot \left| \frac{K(j\omega)G_N(j\omega)}{1 + K(j\omega)G_N(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega$$

$$|\Delta(j\omega)K(j\omega)G_N(j\omega)| < |1 + K(j\omega)G_N(j\omega)|$$

ou seja, é equivalente ao *critério de estabilidade de Doyle*:

$$|\Delta(j\omega)| < \left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega \quad \text{com: } T(j\omega) = \frac{K(j\omega)G_N(j\omega)}{1 + K(j\omega)G_N(j\omega)}$$

**Exemplo:** considere o seguinte sistema de controlo por realimentação SISO sem incertezas.



- $K(s) = k$ , para valores  $k > 0$ .
- $G(s) = \frac{1}{1+s\theta}$ , tomando  $\theta$  apenas valores positivos.

1. Aplicar o **critério de estabilidade de Nyquist** e concluir quanto à estabilidade do sistema em função do parâmetro  $k > 0$ .

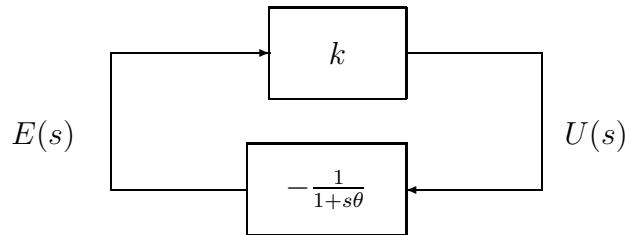
$$L(s) = K(s)G(s) = k \frac{1}{1 + s\theta}$$

É fácil de constatar que o anel fechado é estável para:

$$\text{Gama de estabilidade } \forall k > 0: \quad k \in ]0, +\infty[$$

2. Aplicar o **teorema do ganho pequeno** e concluir quanto à estabilidade do sistema em função do parâmetro  $k > 0$ .

O sistema pode ser representado na forma:



onde a condição suficiente de estabilidade do anel fechado é:

$$|K(s)| \cdot |G(s)| < 1 \Leftrightarrow |k| \cdot \left| -\frac{1}{1 + s\theta} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{k}{1 + s\theta} \right| < 1$$

Desenvolvendo...

$$\left| \frac{k}{1+s\theta} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2\theta^2}} < 1 \Leftrightarrow k < \sqrt{1+\omega^2\theta^2}$$

o valor mínimo para o termo da direita é encontrado para  $\omega = 0$ , logo o anel fechado é estável para:

$$\text{Gama de estabilidade } \forall k > 0: \quad k \in ]0, 1[$$

**Conclusão:** o teorema do ganho pequeno é mais conservador que o critério de estabilidade de Nyquist.

3. Suponha agora que o sistema inicial  $G(s)$  tinha associado uma incerteza paramétrica em  $\theta$ , dada por:  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ , onde  $\theta_0 > 0$  corresponde ao seu valor nominal, e  $\Delta\theta$  à sua perturbação. Determinar a gama de variação admissível para  $\Delta\theta$  que garanta a estabilidade do sistema de controlo, independentemente do valor que o parâmetro  $k > 0$  possa tomar.

É fácil de verificar que para a nova função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s(\theta_0 + \Delta\theta)}$$

a gama de estabilidade do anel fechado em função do parâmetro  $k$  é determinada a partir da equação característica:

$$s(\theta_0 + \Delta\theta) + k + 1 = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{\theta_0 + \Delta\theta} - \frac{k}{\theta_0 + \Delta\theta}$$

onde, para que o pólo seja sempre estável é necessário garantir que:

$$\theta_0 + \Delta\theta > 0 \Leftrightarrow \Delta\theta > -\theta_0$$

A incerteza paramétrica deverá estar limitada à seguinte gama:

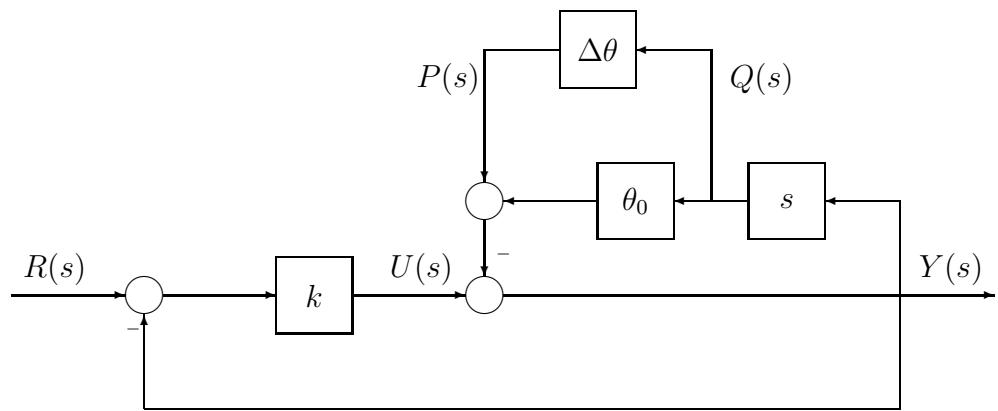
$$\Delta\theta \in ]-\theta_0, +\infty[$$

4. Aplicar o **teorema do ganho pequeno** e concluir quanto à gama de variação admissível para  $\Delta\theta$  que garanta a estabilidade do sistema de controlo, independentemente do valor que o parâmetro  $k > 0$  possa tomar.

Por manipulação algébrica é fácil constatar que:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s(\theta_0 + \Delta\theta)} \Leftrightarrow Y(s) = U(s) - \Delta\theta s Y(s) - \theta_0 s Y(s)$$

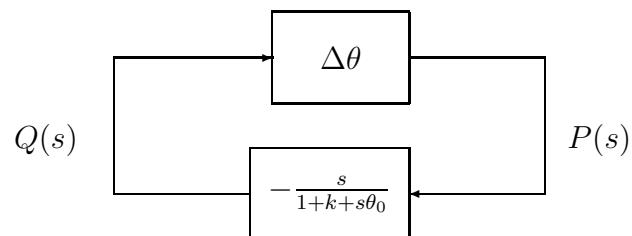
onde, é possível representar o sistema através do seguinte diagrama de blocos:



Desenvolvendo o diagrama de blocos por forma a obter  $\frac{Q(s)}{P(s)}$ , resulta:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{-s}{1 + k + s\theta_0}$$

onde o sistema pode ser representado na forma:



onde a condição suficiente de estabilidade do anel fechado é:

$$|\Delta\theta| \cdot \left| -\frac{s}{1 + k + s\theta_0} \right| < 1 \Leftrightarrow |\Delta\theta| \cdot \frac{\omega}{\sqrt{(1+k)^2 + \theta_0^2 \omega^2}} < 1$$

Desenvolvendo para  $\omega = 0, \dots, +\infty$ , considerando  $M(j\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{(1+k)^2 + \theta_0^2 \omega^2}}$ , temos:

$$\begin{aligned}\omega = 0 & : M(j\omega) = 0 \\ \omega = \frac{1}{\theta_0} & : M(j\omega) = \frac{1/\theta_0}{\sqrt{(1+k)^2 + 1}} \\ \omega = \frac{10}{\theta_0} & : M(j\omega) = \frac{10/\theta_0}{\sqrt{(1+k)^2 + 100}} \\ \omega = \frac{100}{\theta_0} & : M(j\omega) = \frac{100/\theta_0}{\sqrt{(1+k)^2 + 10000}} \approx \frac{100/\theta_0}{\sqrt{10000}} = \frac{100/\theta_0}{100} = \frac{1}{\theta_0} \\ & \vdots\end{aligned}$$

onde, como o valor máximo de  $M(j\omega)$  é  $1/\theta_0$ , a incerteza paramétrica deverá estar limitada à seguinte gama:

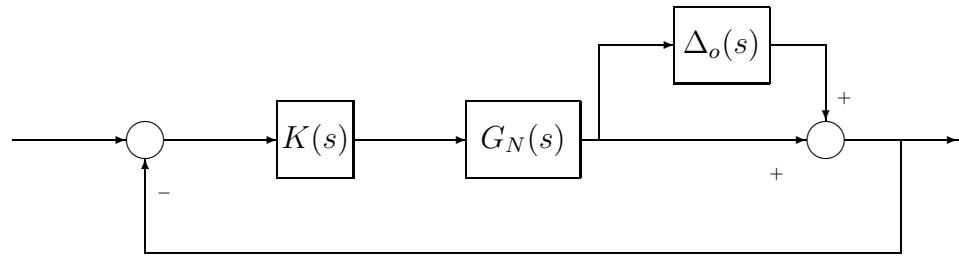
$$|\Delta\theta| \cdot \frac{1}{\theta_0} < 1 \Leftrightarrow |\Delta\theta| < \theta_0 \Leftrightarrow \Delta\theta \in ]-\theta_0, +\theta_0[$$

para se garantir a estabilidade do anel fechado de acordo com o teorema do ganho pequeno.

**Conclusão:** o teorema do ganho pequeno é mais conservador!

#### 4.1.4 Estabilidade robusta de sistemas MIMO

Considere um sistema MIMO com **erro multiplicativo na saída**:

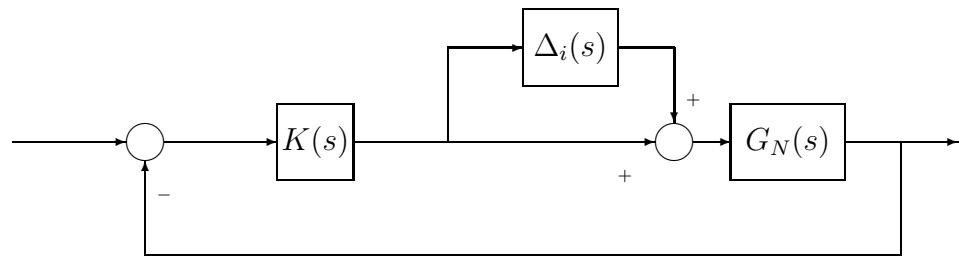


- $G_N(s)$  - matriz de transferência nominal.
- $G_R(s)$  - matriz de transferência real.
- $\Delta_o(s)$  - matriz de transferência do erro multiplicativo na saída.

Neste caso:

$$G_R(s) = [I + \Delta_o(s)] G_N(s)$$

Considere um sistema MIMO com **erro multiplicativo na entrada**:



Neste caso:

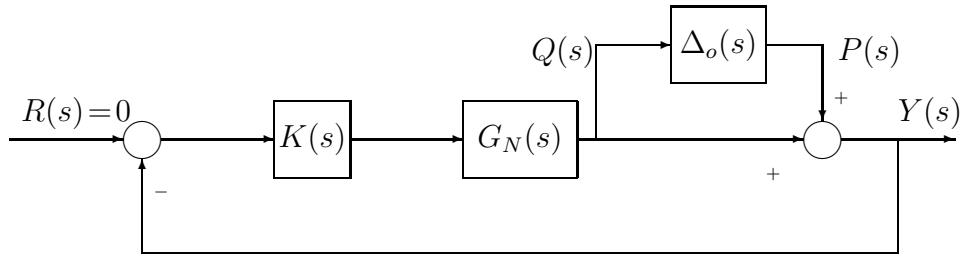
$$G_R(s) = G_N(s) [I + \Delta_i(s)]$$

**Nota:** a matriz de transferência do erro é diferente consoante se considera o erro multiplicativo na entrada ou na saída, pois para que:

$$[I + \Delta_o(s)] G_N(s) = G_N(s) [I + \Delta_i(s)]$$

necessariamente  $\Delta_o \neq \Delta_i$ , ao contrário do que aconteceria caso o sistema fosse SISO.

**Análise de estabilidade robusta:** considere um sistema MIMO com erro multiplicativo na saída.



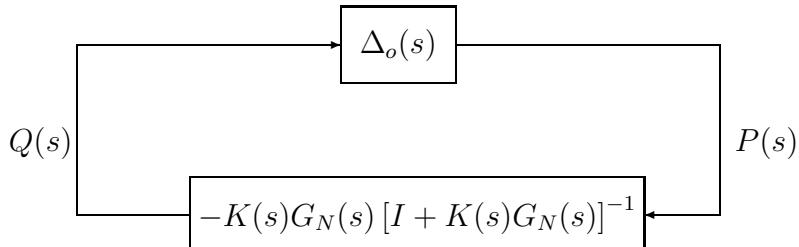
Desenvolvendo as equações do diagrama de blocos:

$$\begin{cases} Y(s) = P(s) + K(s)G_N(s)[-Y(s)] \\ Q(s) = K(s)G_N(s)[-Y(s)] \end{cases} \quad \begin{cases} P(s) = [I + K(s)G_N(s)]Y(s) \\ Q(s) = -K(s)G_N(s)Y(s) \end{cases}$$

onde:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = -K(s)G_N(s)[I + K(s)G_N(s)]^{-1}$$

ou seja, o sistema poderá ser representado pelo seguinte diagrama de blocos equivalente:



Modelo de Perturbação Básico

**Teorema do ganho pequeno:** a condição suficiente de estabilidade robusta do sistema em anel fechado é dada por:

$$|\Delta_o(j\omega)| \cdot |K(j\omega)G_N(j\omega)[I + K(j\omega)G_N(j\omega)]^{-1}| < 1, \quad \forall\omega$$

ou, para erro multiplicativo na entrada:

$$|\Delta_i(j\omega)| \cdot |[I + K(j\omega)G_N(j\omega)]^{-1} K(j\omega)G_N(j\omega)| < 1, \quad \forall\omega$$

**Questão:** como quantificar a magnitude de uma matriz complexa?

**Resposta:** associando a *norma de uma matriz* aos seus *valores singulares*.

A **norma Euclidiana** de um vector complexo,  $x = a + jb$ , de dimensão  $n \times 1$ , é dada por:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^H \cdot x} = \sqrt{(a - jb)^T(a + jb)} = \sqrt{a^T a + b^T b} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)}$$

onde  $x^H$  corresponde à Hermitiana transposta de  $x$ . Este conceito pode ser estendido para matrizes.

**Definição de Hermitiana transposta:** corresponde à generalização da transposta de uma matriz. A Hermitiana transposta de uma matriz  $M$ ,  $m \times n$ , com valores complexos, é dada por:

$$(M^H)_{i,j} = m_{ji}^*$$

A *Hermitiana de uma matriz complexa* é a transposta da matriz complexa conjugada:

$$M = A + jB \longrightarrow M^H = A^T - jB^T$$

**Notas:**

- Se  $M = M^H$ , então  $M$  é uma matriz simétrica Hermitiana.
- Os valores próprios de  $M^H \cdot M$  e de  $M \cdot M^H$  são iguais entre si, reais e positivos ou iguais a zero, embora possa acontecer que  $M^H \cdot M \neq M \cdot M^H$ .

**Exemplo:**

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1+j \\ -j & 2+j \end{bmatrix} \quad \text{onde,} \quad M^H = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1-j & 2-j \end{bmatrix}$$

Os produtos  $M^H \cdot M$  e  $M \cdot M^H$  resultam em matrizes diferentes:

$$M^H \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 3j \\ -3j & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e,} \quad M \cdot M^H = \begin{bmatrix} 3 & 3+2j \\ 3-2j & 6 \end{bmatrix}$$

embora os valores próprios de  $M^H \cdot M$  e de  $M \cdot M^H$  sejam iguais:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - M^H \cdot M) = 0 &\Leftrightarrow \lambda_1 = 8.4051 \quad \vee \quad \lambda_2 = 0.5949 \\ \det(\lambda I - M \cdot M^H) = 0 &\Leftrightarrow \lambda_1 = 8.4051 \quad \vee \quad \lambda_2 = 0.5949 \end{aligned}$$

**Valores singulares:** seja  $M$  uma matriz complexa  $m \times n$ . Os valores singulares de  $M$  são os escalares positivos definidos por:

$$\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(M^H \cdot M)} = \sqrt{\lambda_i(M \cdot M^H)} > 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

onde resultará:

$$\begin{array}{ccccccccc} \sigma_1(M) & \geq & \sigma_2(M) & \geq & \cdots & \geq & \sigma_n(M) & > & 0 \\ \parallel & & & & & & \parallel & & \\ \sigma_{\max}(M) & & & & & & \sigma_{\min}(M) & & \end{array}$$

A **norma espectral** de uma matriz  $M$ , de dimensão  $m \times n$ , é dada por:

$$\|M\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Mx\|_2$$

**Notas:**

- Imaginar o vector  $x$  a rodar na superfície da hiperesfera unitária  $\mathbb{C}^n$ , gerando o vector  $Mx \in \mathbb{C}^m$ .
- O tamanho de  $Mx$ , i.e, a sua norma Euclidiana, vai depender da direcção de  $x$ .
- Ao valor máximo de  $Mx$ , encontrado para uma determinada direcção  $x$ , designa-se por **norma espectral de M ou valor singular máximo de M**.
- Se considerarmos  $x$  unitário temos:
  - **A magnitude de M é grande**, se:  $\min \|M\|_2 = \sigma_{\min}(M) \gg 1$ .
  - **A magnitude de M é pequena**, se:  $\max \|M\|_2 = \sigma_{\max}(M) \ll 1$ .

**Propriedades dos valores singulares:**

$$\sigma_{\max}(M) = \frac{1}{\sigma_{\min}(M^{-1})}$$

$$\sigma_{\min}(M) = \frac{1}{\sigma_{\max}(M^{-1})}$$

$$\sigma_{\max}(M_1 + M_2) \leq \sigma_{\max}(M_1) + \sigma_{\max}(M_2)$$

$$\sigma_{\max}(M_1 \cdot M_2) \leq \sigma_{\max}(M_1) \cdot \sigma_{\max}(M_2)$$

**Nota:** o comando “*svd*” em Matlab permite obter a decomposição em valores singulares de uma matriz:  $\text{svd}(M) = U \cdot S \cdot V^H$ , onde  $S$  é uma matriz diagonal contendo os valores singulares de  $M$  por ordem decrescente.

Recuperando a condição suficiente de estabilidade robusta obtida através do **teorema do ganho pequeno**:

**Erro multiplicativo na saída:**

$$|\Delta_o(j\omega)| \cdot |K(j\omega)G_N(j\omega) [I + K(j\omega)G_N(j\omega)]^{-1}| < 1 , \quad \forall \omega$$

$\Updownarrow$

$$\sigma_{\max} (K(j\omega)G_N(j\omega) [I + K(j\omega)G_N(j\omega)]^{-1}) < \frac{1}{\sigma_{\max}(\Delta_o(j\omega))} , \quad \forall \omega$$

$\Updownarrow$

$$\sigma_{\max} (T_{N_o}(j\omega)) < \frac{1}{\sigma_{\max}(\Delta_o(j\omega))} , \quad \forall \omega$$

com:  $T_{N_o}(j\omega) = K(j\omega)G_N(j\omega) [I + K(j\omega)G_N(j\omega)]^{-1}$ .

**Erro multiplicativo na entrada:**

$$|\Delta_i(j\omega)| \cdot |[I + K(j\omega)G_N(j\omega)]^{-1} K(j\omega)G_N(j\omega)| < 1 , \quad \forall \omega$$

$\Updownarrow$

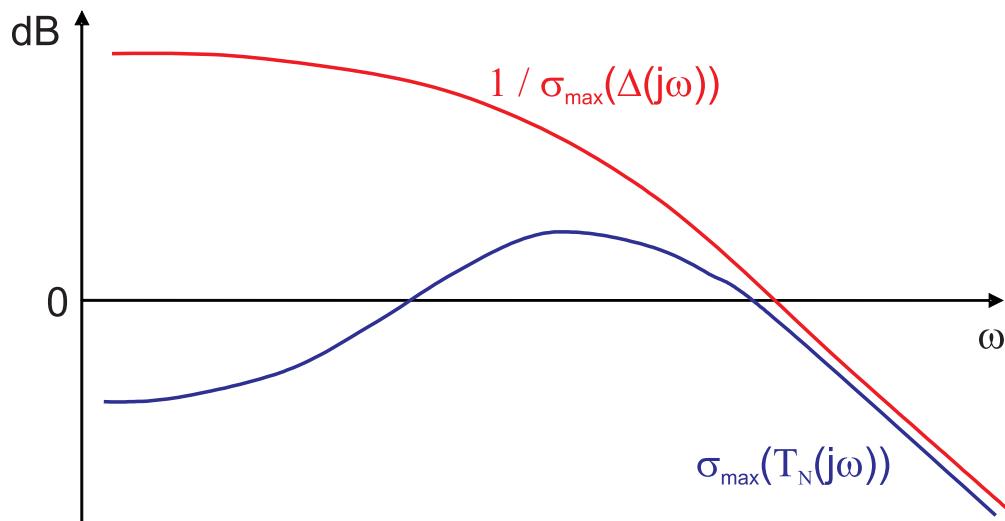
$$\sigma_{\max} ([I + K(j\omega)G_N(j\omega)]^{-1} K(j\omega)G_N(j\omega)) < \frac{1}{\sigma_{\max}(\Delta_i(j\omega))} , \quad \forall \omega$$

$\Updownarrow$

$$\sigma_{\max} (T_{N_i}(j\omega)) < \frac{1}{\sigma_{\max}(\Delta_i(j\omega))} , \quad \forall \omega$$

com:  $T_{N_i}(j\omega) = [I + K(j\omega)G_N(j\omega)]^{-1} K(j\omega)G_N(j\omega)$ .

Em termos gráficos:



**Nota:** tal como no caso SISO, a condição suficiente de estabilidade robusta impõe uma restrição à largura de banda do anel fechado, ou seja, à rapidez de resposta do sistema controlado.

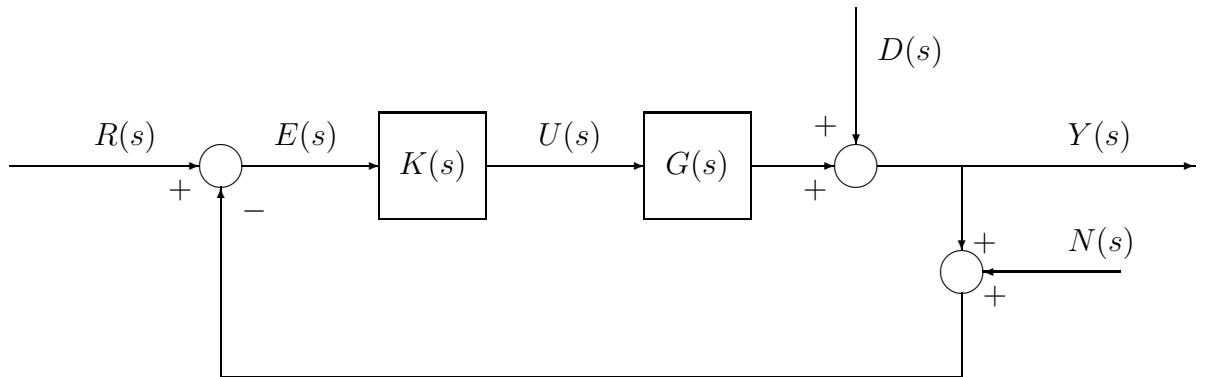
## 4.2 Desempenho robusto

**Questão:** como projectar  $K(s)$  por forma a assegurar a estabilidade robusta do sistema e, simultaneamente, um bom desempenho? Entende-se por *bom desempenho*:

- Bom seguimento a sinais de referência.
- Boa rejeição de perturbações à saída.
- Boa rejeição de ruído.

### 4.2.1 Critérios de desempenho

Seja o seguinte sistema genérico de controlo por realimentação SISO:



- $R(s)$ : sinal de referência (normalmente nas baixas frequências: banda  $\omega \in \Omega_r = [0, \omega_r]$ ).
- $U(s)$ : entrada do sistema.
- $Y(s)$ : saída do sistema.
- $E(s)$ : erro de seguimento.
- $D(s)$ : perturbação (normalmente nas baixas frequências:  $\omega \in \Omega_d = [0, \omega_d]$ ).
- $N(s)$ : ruído de leitura (normalmente nas altas frequências:  $\omega \in \Omega_n = [\omega_n, +\infty]$ ).
- $K(s)$ : função de transferência do controlador.
- $G(s)$ : função de transferência do processo.

Desenvolvendo o diagrama de blocos, resulta:

$$Y(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}R(s) + \frac{1}{1 + K(s)G(s)}D(s) - \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}N(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)}}_{=T(s)} R(s) + \underbrace{\frac{1}{1+K(s)G(s)}}_{=S(s)} D(s) - \underbrace{\frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)}}_{=T(s)} N(s)$$

**Definições:**

- **Matriz de sensibilidade complementar:**

$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

- **Matriz de sensibilidade:**

$$S(s) = \frac{1}{1+K(s)G(s)} = \frac{1}{1+L(s)}$$

- **Consequência:**

$$T(s) + S(s) = 1$$

**Bons critérios de desempenho:**

1. Bom seguimento a sinais de referência:  $Y(s) \approx R(s)$ .

$$T(s) \approx 1 \quad , \quad \text{nas baixas frequências: banda } \omega \in \Omega_r = [0 \ , \ \omega_r]$$

2. Boa rejeição de perturbações à saída:  $Y(s)/D(s) \approx 0$ .

$$S(s) \approx 0 \quad , \quad \text{nas baixas frequências: banda } \omega \in \Omega_d = [0 \ , \ \omega_d]$$

3. Boa rejeição de ruído:  $Y(s)/N(s) \approx 0$ .

$$T(s) \approx 0 \quad , \quad \text{nas altas frequências: banda } \omega \in \Omega_n = [\omega_n \ , \ +\infty]$$

#### 4.2.2 Moldagem do ganho

**Questão:** como projectar  $K(s)$  por forma a compatibilizar estes resultados tendo em conta a restrição:  $T(s) + S(s) = 1$ ? Serão estes resultados incompatíveis com a condição de estabilidade robusta?

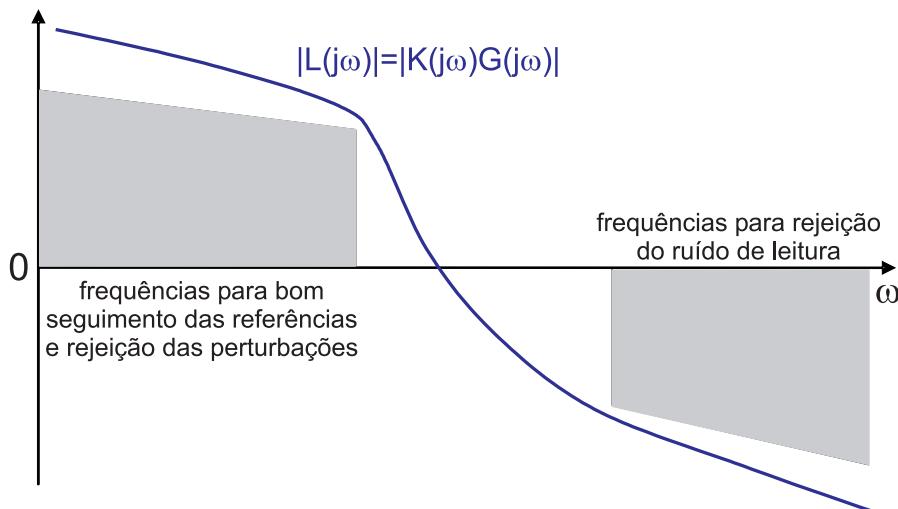
$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} : \begin{cases} T(s) \approx 1 \Rightarrow |L(s)| \gg 1 \\ T(s) \approx 0 \Rightarrow |L(s)| \ll 1 \end{cases}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} : \begin{cases} S(s) \approx 1 \Rightarrow |L(s)| \ll 1 \\ S(s) \approx 0 \Rightarrow |L(s)| \gg 1 \end{cases}$$

**Conclusão:** o controlador  $K(s)$  deverá ser projectado por forma a que  $L(s) = K(s)G(s)$  garanta as especificações de desempenho pretendidas, ou seja,  $K(s)$  deverá ser moldado por forma a que:

- **Baixas frequências:**  $T(s) \approx 1$ ,  $S(s) \approx 0 \Rightarrow |L(s)| \gg 1$
- **Altas frequências:**  $T(s) \approx 0$ ,  $S(s) \approx 1 \Rightarrow |L(s)| \ll 1$

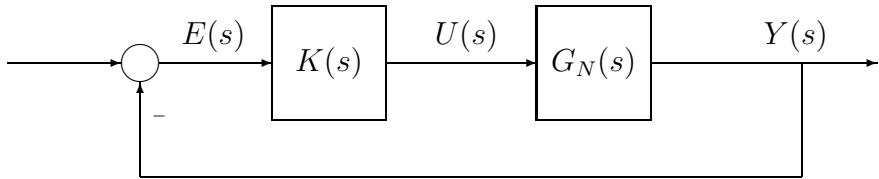
As técnicas de moldagem do ganho  $K(j\omega)$ , designadas por “loop shaping”, deverão garantir aproximadamente o seguinte comportamento em frequência para  $L(j\omega)$ :



**Nota:** este comportamento, aparentemente, não entra em conflito com a condição de estabilidade robusta imposta a  $T(j\omega)$ . Concorda com esta afirmação?

### Conflito entre $T(s)$ e $S(s)$

Considere-se o seguinte sistema:



onde, para o caso nominal:

$$\begin{aligned} L_0(s) &= K(s)G_N(s) \\ T_0(s) &= \frac{L_0(s)}{1 + L_0(s)} \\ S_0(s) &= \frac{1}{1 + L_0(s)} \end{aligned}$$

**Questão:** que impacto terá nos valores nominais de  $T_0(s)$  e  $S_0(s)$  uma perturbação no sistema que provoque uma alteração do valor nominal de  $L_0(s)$  para  $L(s)$ ? Como tornar  $T_0(s)$  e  $S_0(s)$  robustos a perturbações de  $L_0(s)$ ?

$$L_0(s) \longrightarrow L(s) \Rightarrow \begin{cases} T_0(s) \rightarrow T(s) \\ S_0(s) \rightarrow S(s) \end{cases}$$

#### Desenvolvimento:

- Análise de robustez de  $S_0(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{S_0 - S}{S} &= \frac{\frac{1}{1+L_0} - \frac{1}{1+L}}{\frac{1}{1+L}} = \frac{\frac{L-L_0}{(1+L)(1+L_0)}}{\frac{1}{1+L}} = \frac{L - L_0}{1 + L_0} = \frac{L}{1 + L_0} - \frac{L_0}{1 + L_0} \\ &= \frac{L}{L_0} \left( \frac{L_0}{1 + L_0} \right) - \frac{L_0}{1 + L_0} = \frac{L}{T_0} T_0 - T_0 = T_0 \left( \frac{L}{L_0} - 1 \right) = T_0 \left( \frac{L - L_0}{L_0} \right) \end{aligned}$$

**Conclusão:** quanto menor for  $T_0$  menor será o efeito da alteração de  $L_0 \rightarrow L$ , i.e., mais robusto será  $S_0$  a perturbações em  $L_0$ .

- Análise de robustez de  $T_0(s)$ :

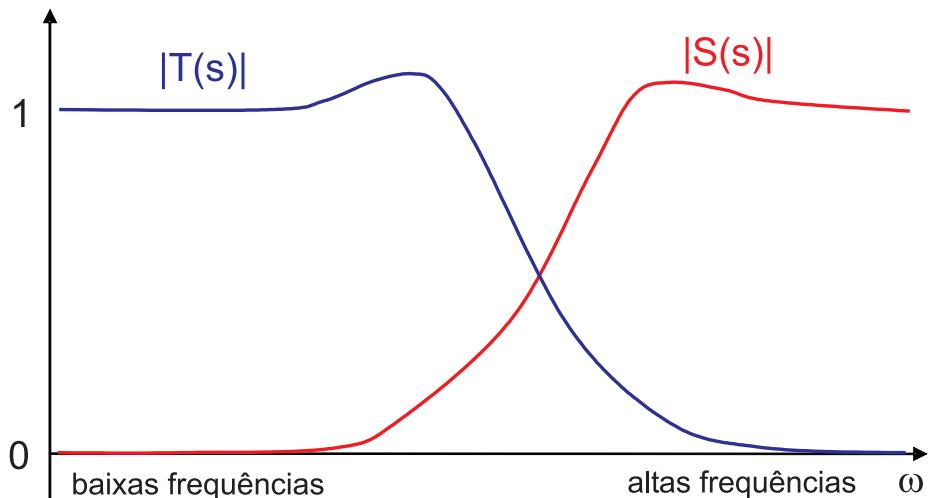
$$\begin{aligned}\frac{T - T_0}{T} &= \frac{\frac{L}{1+L} - \frac{L_0}{1+L_0}}{\frac{L}{1+L}} = \frac{\frac{L-L_0}{(1+L)(1+L_0)}}{\frac{L}{1+L}} = \frac{L - L_0}{L(1 + L_0)} = \frac{1}{1 + L_0} - \frac{L_0}{L} \left( \frac{1}{1 + L_0} \right) \\ &= S_0 - \frac{L_0}{L} S_0 = S_0 \left( 1 - \frac{L_0}{L} \right) = S_0 \left( \frac{L - L_0}{L_0} \right)\end{aligned}$$

**Conclusão:** quanto menor for  $S_0$  menor será o efeito da alteração de  $L_0 \rightarrow L$ , i.e., mais robusto será  $T_0$  a perturbações em  $L_0$ .

Apesar destas conclusões, devido à restrição:

$$T(s) + S(s) = 1$$

$T(s)$  e  $S(s)$  nunca poderão ter simultaneamente valores baixos. Isto significa que deverão ser pequenos em gamas de frequências diferentes:



### Notas:

1.  $T(s) + S(s) = 1$ , mas  $|T(s)| + |S(s)|$  pode ser  $\neq 1$ .
2. Os problemas de robustez, nomeadamente de estabilidade robusta, colocam-se apenas na gama de frequências intermédia.

### 4.2.3 Exemplo

Determinar uma localização aproximada para a curva  $L(j\omega)$  tendo em conta as seguintes especificações do sistema:

- **Estabilidade robusta:**

$$|T(j\omega)| \leq \frac{1}{\gamma(\omega)} , \quad \omega \in \Omega_s = [\omega_s , +\infty]$$

- **Seguimento de sinais de referência:**

$$|S(j\omega)| \leq \epsilon_r , \quad \omega \in \Omega_r = [0 , \omega_r]$$

- **Rejeição de perturbações à saída:**

$$|S(j\omega)| \leq \epsilon_d , \quad \omega \in \Omega_d = [0 , \omega_d]$$

- **Rejeição de ruído:**

$$|T(j\omega)| \leq \epsilon_n , \quad \omega \in \Omega_n = [\omega_n , +\infty]$$

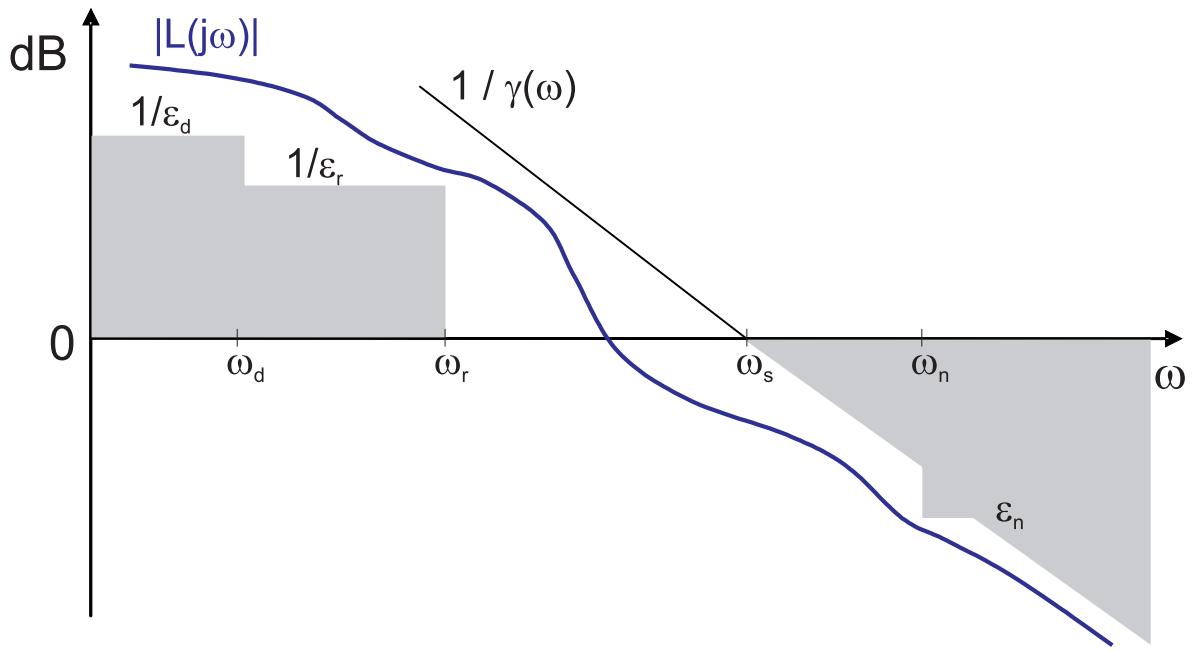
As especificações anteriores podem ser todas expressas em termos de  $L(j\omega)$ , admitindo que:

- **Baixas frequências:**  $|L(j\omega)| \gg 1 \Rightarrow |S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+L(j\omega)} \right| \approx \frac{1}{|L(j\omega)|}$
- **Altas frequências:**  $|L(j\omega)| \ll 1 \Rightarrow |T(j\omega)| = \left| \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| = \left| \frac{1}{\frac{1}{L(j\omega)}+1} \right| \approx \left| \frac{1}{\frac{1}{L(j\omega)}} \right| = |L(j\omega)|$

resultando:

- **Estabilidade robusta:**  $|L(j\omega)| \leq \frac{1}{\gamma(\omega)}$ , para  $\omega \in \Omega_s = [\omega_s , +\infty]$
- **Seguimento de sinais de referência:**  $|L(j\omega)| \geq \frac{1}{\epsilon_r}$ , para  $\omega \in \Omega_r = [0 , \omega_r]$
- **Rejeição de perturbações à saída:**  $|L(j\omega)| \geq \frac{1}{\epsilon_d}$ , para  $\omega \in \Omega_d = [0 , \omega_d]$
- **Rejeição de ruído:**  $|L(j\omega)| \leq \epsilon_n$ , para  $\Omega_n = [\omega_n , +\infty]$

Em termos gráficos:



- **Estabilidade robusta:**  $|L(j\omega)| \leq \frac{1}{\gamma(\omega)}$ , para  $\omega \in \Omega_s = [\omega_s, +\infty]$
- **Seguimento de sinais de referência:**  $|L(j\omega)| \geq \frac{1}{\epsilon_r}$ , para  $\omega \in \Omega_r = [0, \omega_r]$
- **Rejeição de perturbações à saída:**  $|L(j\omega)| \geq \frac{1}{\epsilon_d}$ , para  $\omega \in \Omega_d = [0, \omega_d]$
- **Rejeição de ruído:**  $|L(j\omega)| \leq \epsilon_n$ , para  $\Omega_n = [\omega_n, +\infty]$

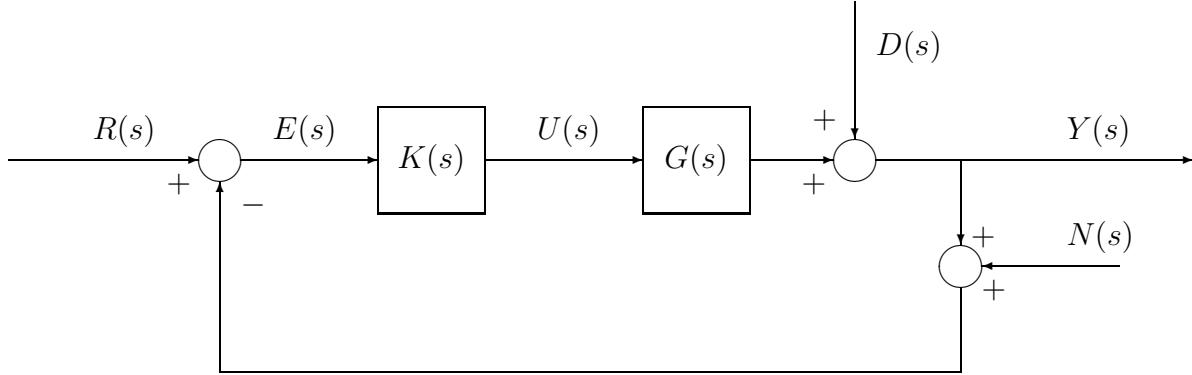
**Nota:** é necessário um especial cuidado nas frequências intermédias para se garantir a estabilidade do sistema. O sistema está próximo da instabilidade quando:

$$|L(j\omega)| \approx 1 \wedge \arg[L(j\omega)] \approx -180^\circ \Leftrightarrow L(j\omega) \approx -1 \Rightarrow \begin{cases} S(j\omega) &= \frac{1}{1+L(j\omega)} \rightarrow +\infty \\ T(j\omega) &= \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Nesta situação só uma fase favorável de  $L(j\omega)$  poderá assegurar o não envolvimento do ponto crítico de estabilidade.

#### 4.2.4 Desempenho robusto de sistemas MIMO

Seja o seguinte sistema genérico de controlo por realimentação MIMO:



- $R(s)$ : sinal de referência (normalmente nas baixas frequências: banda  $\omega \in \Omega_r = [0, \omega_r]$ ).
- $U(s)$ : entrada do sistema.
- $Y(s)$ : saída do sistema.
- $E(s)$ : erro de seguimento.
- $D(s)$ : perturbação (normalmente nas baixas frequências:  $\omega \in \Omega_d = [0, \omega_d]$ ).
- $N(s)$ : ruído de leitura (normalmente nas altas frequências:  $\omega \in \Omega_n = [\omega_n, +\infty]$ ).
- $K(s)$ : matriz de transferência do controlador.
- $G(s)$ : matriz de transferência do processo.

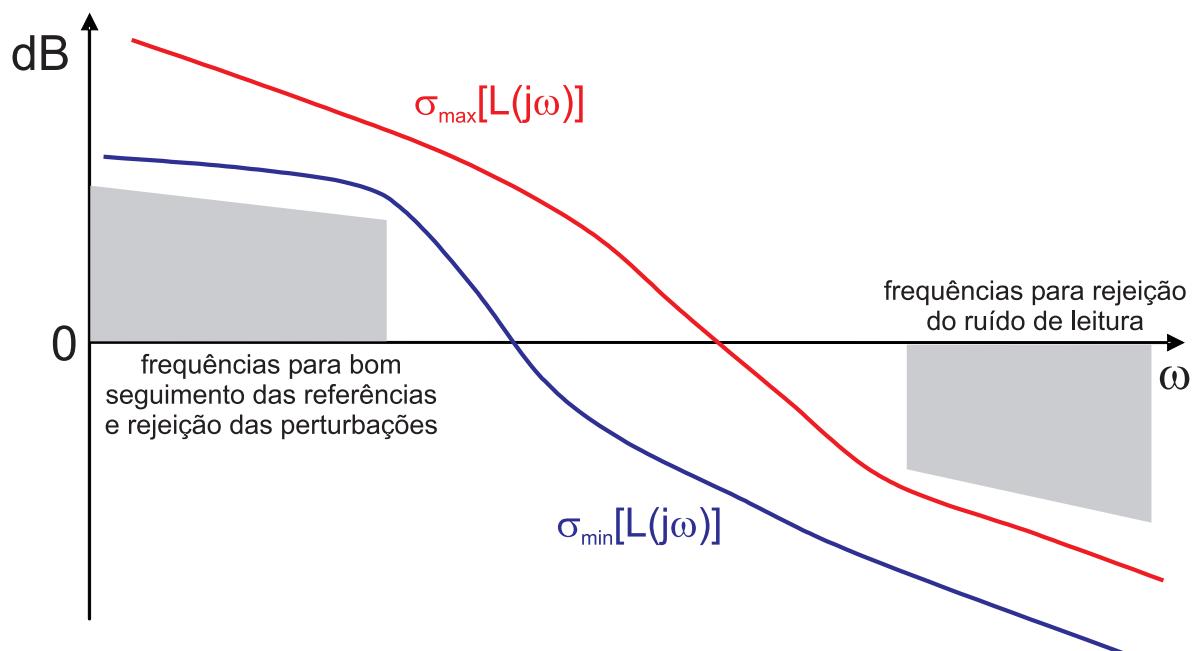
Desenvolvendo o diagrama de blocos, resulta:

$$Y(s) = \underbrace{[I + K(s)G(s)]^{-1}K(s)G(s)}_{=T(s)}R(s) + \underbrace{[I + K(s)G(s)]^{-1}}_{=S(s)}D(s) - \underbrace{[I + K(s)G(s)]^{-1}K(s)G(s)}_{=T(s)}N(s)$$

onde, para  $L(s) = K(s)G(s)$ :

- **Seguimento de sinais de referência:**  $|L(j\omega)| \gg 1 \Leftrightarrow \sigma_{\min}[L(j\omega)] \gg 1, \omega \in \Omega_r$
- **Rejeição de perturbações à saída:**  $|L(j\omega)| \gg 1 \Leftrightarrow \sigma_{\min}[L(j\omega)] \gg 1, \omega \in \Omega_d$
- **Rejeição de ruído:**  $|L(j\omega)| \ll 1 \Leftrightarrow \sigma_{\max}[L(j\omega)] \ll 1, \omega \in \Omega_n$

Em termos gráficos:



**Nota:** para garantir simultaneamente a estabilidade robusta e o desempenho robusto é necessário adicionar a condição de estabilidade robusta que impõe uma restrição à largura de banda do sistema em anel fechado (ver página 200).