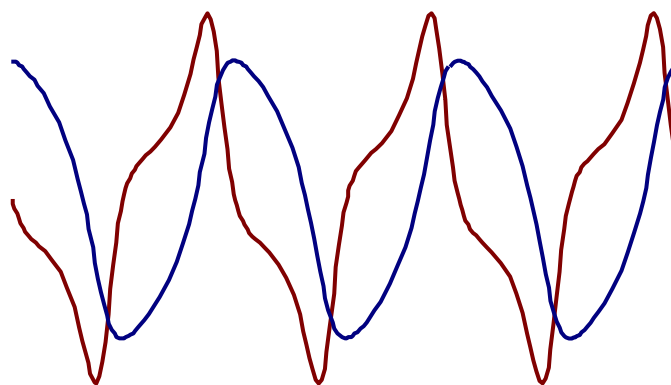


CONTROLO NÃO LINEAR



Gustavo Vitorino Monteiro da Silva

Professor Adjunto da EST Setúbal/IPS
Licenciado em Engenharia Electrotécnica
Mestre em Eng.^a Electrotécnica e de Computadores

Julho 2003

ao Dioguinho

PREFÁCIO

A obra do autor surge na sequência de um esforço continuado no sentido de enriquecer o já vasto número de publicações que tem vindo a apresentar nas áreas de Instrumentação e Medida e de Controlo e Processos, onde desenvolve a sua actividade como docente do Departamento de Sistemas e Informática da Escola Superior de Tecnologia de Setúbal do Instituto Politécnico de Setúbal.

Das obras já desenvolvidas são de realçar, para além das publicações de carácter pedagógico efectuadas no âmbito das disciplinas que tem vindo a leccionar, os livros de Instrumentação Industrial e Processamento Digital de Sinais que teve oportunidade de publicar em Junho de 1999 e Outubro de 2000, respectivamente.

Considero que o factor fundamental de motivação subjacente às publicações referidas e particularmente à nova publicação, agora apresentada, sobre Controlo Não Linear tem por base uma excepcional dedicação que o docente tem manifestado no apoio aos alunos e outros interessados nas matérias que tem leccionado.

Como nota de realce, nas publicações apresentadas, saliento ainda a capacidade que o autor tem demonstrado em aliar à sua experiência profissional o rigor técnico-científico na apresentação de temas cuja abordagem nem sempre é fácil. Para isso contribuem, de forma bastante positiva, os casos de aplicação prática que são sugeridos no decurso da apresentação dos conteúdos teóricos e das matérias apresentadas, bem como o número significativo dos problemas resolvidos e propostos em cada capítulo.

Por todos estes considerandos e em especial pelo esforço evidenciado no sentido de apoiar os alunos da EST Setúbal, em particular os do Curso de Automação, Controlo e Instrumentação, felicito o autor manifestando o meu reconhecimento e agradecimento pelo trabalho desenvolvido.

Setúbal, 26 de Julho de 2003

A handwritten signature in black ink, consisting of a large, stylized 'D' followed by a series of loops and a horizontal line extending to the right.

Dias Pereira

INTRODUÇÃO

Este livro foi desenvolvido a partir das lições por mim dadas na disciplina de Controlo Não Linear, da licenciatura em Engenharia de Automação Controlo e Instrumentação da Escola Superior de Tecnologia de Setúbal / IPS, nos anos lectivos de 1998/99 a 2002/03. Nessa cadeira, inserida no 2º semestre do 4º ano, procura-se:

- mostrar que muitos dos sistemas de interesse prático, em áreas muito diversas, devem ser modelados e tratados como sistemas não lineares.
- chamar a atenção para algumas das características próprias dos sistemas não lineares.
- compreender a teoria de Lyapunov em alguns casos simples.
- conhecer as técnicas de controlo não linear mais usuais.

Os alunos ao iniciarem o estudo desta disciplina deverão ter conhecimentos gerais de análise matemática que incluam funções trigonométricas e números complexos, cálculo diferencial e integral, variável complexa, séries de Fourier e transformada de Laplace, bem como conhecimentos de álgebra linear e geometria analítica. Deverão também ser conhecedores de funções reais de variável inteira, somatórios, séries numéricas e de potências. Os alunos deverão também ter conhecimentos gerais da Teoria dos Sinais e Sistemas, bem como os conceitos básicos do Controlo Linear de diagramas de Bode e de Nyquist, de função de transferência e estabilidade.

Como numa cadeira semestral não é possível abordar com um mínimo de profundidade as matérias referentes a sistemas e controlo não linear, optou-se por escrevê-las sob a forma de livro, em edição electrónica. Deste modo os alunos além de disporem de um texto de apoio às aulas, podem adquirir os seus conhecimentos sem necessidade imediata de recorrer a bibliografia estrangeira. Esta é no entanto fundamental para uma melhor compreensão e maior aprofundamento das matérias expostas, na medida em que cada autor tem o seu modo próprio de explicar e aborda de forma diferente os diversos assuntos.

Espero que este livro, para além de auxiliar os alunos das cadeiras de Controlo Não Linear das nossas Escolas e Universidades, possa também ajudar todos aqueles que estando interessados nestas matérias necessitem de um livro básico em Língua Portuguesa.

Quero ainda agradecer a todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para que este livro tomasse forma.

Lisboa, Julho de 2003



CONTEÚDO

	pág.
1. SISTEMAS NÃO LINEARES.....	1
1.1. INTRODUÇÃO	1
1.2. CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS	2
1.2.1. <i>Sistemas estáticos e dinâmicos</i>	3
1.2.2. <i>Sistemas relaxados e não relaxados</i>	4
1.2.3. <i>Sistemas de parâmetros distribuídos e de parâmetros concentrados</i>	4
1.2.4. <i>Sistemas causais e não causais</i>	4
1.2.5. <i>Sistemas variantes no tempo e invariantes no tempo</i>	4
1.2.6. <i>Sistemas contínuos e discretos</i>	4
1.2.7. <i>Sistemas determinísticos e estocásticos</i>	5
1.2.8. <i>Sistemas estáveis e instáveis</i>	5
1.2.9. <i>Sistemas lineares e não lineares</i>	5
1.3. COMPORTAMENTO DOS SISTEMAS NÃO LINEARES	5
1.3.1. <i>Dependência de amplitude da excitação</i>	6
1.3.2. <i>Tempo de escape finito</i>	7
1.3.3. <i>Pontos de equilíbrio múltiplos</i>	9
1.3.4. <i>Não unicidade da solução</i>	10
1.3.5. <i>Dependência crítica dos parâmetros</i>	10
1.3.6. <i>Bifurcações</i>	11
1.3.7. <i>Caos ou dependência crítica das condições iniciais</i>	12
1.3.8. <i>Ciclos limite ou oscilações</i>	12
1.3.9. <i>Existência de harmônicas e sub-harmônicas</i>	13
1.4. ESCRITA DAS EQUAÇÕES.....	13
1.4.1. <i>Sistemas mecânicos clássicos</i>	14
1.4.2. <i>Teorema do momento linear</i>	14
1.4.3. <i>Teorema do momento angular</i>	14
1.4.4. <i>Movimento linear</i>	15
1.4.5. <i>Movimento de rotação</i>	16
1.4.6. <i>Sistemas eléctricos</i>	16
1.4.7. <i>Sistemas Térmicos</i>	18
1.4.8. <i>Sistemas químicos</i>	21
1.5. MODELO DE ESTADO	22
1.5.1. <i>Modelo de estado, sistema contínuo</i>	22
1.5.2. <i>Modelo de estado discreto</i>	25
1.5.3. <i>Obtenção da trajectória</i>	26
1.5.4. <i>Pontos de equilíbrio</i>	28
1.5.5. <i>Trajectórias e estabilidade</i>	28
1.6. ALGUMAS NÃO LINEARIDADES CORRENTES	29
1.6.1. <i>Saturação</i>	29
1.6.2. <i>Zona Morta</i>	30
1.6.3. <i>Histerese</i>	31
1.6.4. <i>Folga</i>	33
1.6.5. <i>Atrito Estático</i>	35
1.6.6. <i>Característica liga/desliga ou “on/off”</i>	35
1.7. PROBLEMAS RESOLVIDOS	37
1.8. PROBLEMAS PROPOSTOS	41

2. SISTEMAS DE 2ª ORDEM	43
2.1. INTRODUÇÃO	43
2.2. ANÁLISE QUALITATIVA DOS SISTEMAS LINEARES	44
2.2.1. Valores próprios distintos ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)	45
2.2.2. Valores próprios iguais ($\lambda_1 = \lambda_2$)	47
2.3. CICLOS LIMITE	49
2.3.1. Classificação dos ciclos limite	49
2.3.2. Existência de ciclos limite	50
2.4. OBTENÇÃO DA TRAJECTÓRIA	52
2.4.1. Métodos analíticos	52
2.4.2. Métodos gráficos	56
2.5. PROBLEMAS RESOLVIDOS	59
2.6. PROBLEMAS PROPOSTOS	62
 3. FUNDAMENTOS DA TEORIA DE LYAPUNOV	 63
3.2. INTRODUÇÃO	63
3.3. PONTOS DE EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE	63
3.3.1. Sistemas autónomos em regime livre	63
3.3.2. Pontos de equilíbrio de sistemas autónomos	65
3.3.3. Estabilidade de pontos de equilíbrio	66
3.3.4. Estabilidade local e global	69
3.4. ESTABILIDADE PELA LINEARIZAÇÃO	70
3.4.1. Sistema linearizado	70
3.4.2. Método de Lyapunov da linearização	73
3.5. MÉTODO DIRECTO DE LYAPUNOV	76
3.5.1. Motivação	76
3.5.2. Funções positivas definidas	77
3.5.3. Função de Lyapunov	79
3.5.4. Teorema de Lyapunov (estabilidade local)	80
3.5.5. Teorema de Lyapunov (estabilidade global)	81
3.5.6. Teorema de Lyapunov (instabilidade)	82
3.6. FUNÇÃO DE LYAPUNOV DE SISTEMAS LINEARES	82
3.6.1. Formas quadráticas e matrizes positivas definidas	82
3.6.2. Função de Lyapunov para SLIT	84
3.7. FUNÇÃO DE LYAPUNOV DE SISTEMAS NÃO LINEARES	84
3.7.1. Métodos analíticos	84
3.7.2. Métodos baseados em conceitos físicos	88
3.8. CONJUNTOS INVARIANTES	88
3.8.1. Definição	88
3.8.2. Teorema local do conjunto invariante	88
3.8.3. Teorema global do conjunto invariante	89
3.9. ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO AUTÓNOMOS	91
3.9.1. Pontos de equilíbrio	91
3.9.2. Estabilidade de um ponto de equilíbrio	91
3.9.3. Método directo de Lyapunov	92
3.9.4. Teoremas de Lyapunov para sistemas não autónomos	93
3.9.5. Método directo de Lyapunov para sistemas lineares não autónomos	94
3.9.6. O método da linearização para sistemas não autónomos	95
3.9.7. Teoremas sobre instabilidade	96
3.10. EXISTÊNCIA DE FUNÇÕES DE LYAPUNOV	98
3.10.1. Teorema recíproco, ponto de equilíbrio estável	98
3.10.2. Teorema recíproco, estabilidade assintótica e uniforme	98
3.10.3. Teorema recíproco, estabilidade exponencial	98

3.11. ESTABILIDADE ABSOLUTA	99
3.11.1. Sistema linear com realimentação não linear.....	99
3.11.2. Critério de Popov	101
3.11.3. Critério do círculo.....	103
3.12. PROBLEMAS RESOLVIDOS	104
3.13. PROBLEMAS PROPOSTOS	105
4. MÉTODO DA FUNÇÃO DESCRITIVA	109
4.1. FUNÇÃO DESCRITIVA.....	109
4.2. FUNÇÃO DESCRITIVA DE NÃO LINEARIDADES CORRENTES.	110
4.3. ESTABILIDADE PELO MÉTODO DA FUNÇÃO DESCRITIVA.	111
4.4. PROBLEMAS RESOLVIDOS.....	114
4.5. PROBLEMAS PROPOSTOS.....	116
5. LINEARIZAÇÃO EXACTA POR REALIMENTAÇÃO	119
5.1. UMA PRIMEIRA ABORDAGEM	119
5.1.1. Exemplo de linearização e controlo por realimentação	120
5.1.2. Sistemas na forma companheira	122
5.1.3. Linearização entrada-estado.....	123
5.1.4. Linearização entrada-saída	125
5.1.5. A dinâmica interna	127
5.1.6. Dinâmica interna de sistemas lineares.....	129
5.1.7. A dinâmica zero.....	131
5.2. O FORMALISMO DA GEOMETRIA DIFERENCIAL	133
5.2.1. Conceitos e aplicações	133
5.2.1.1. Campo vectorial.....	133
5.2.1.2. Campo covectorial	133
5.2.1.3. Produto interno.....	133
5.2.1.4. Gradiente.....	133
5.2.1.5. Jacobiano	134
5.2.1.6. Derivada de Lie.....	134
5.2.1.7. Aplicações da derivada de Lie	135
5.2.1.8. Parêntesis de Lie	136
5.2.1.9. Propriedades do parêntesis de Lie	137
5.2.1.10. Difeomorfismos	138
5.2.2. Teorema de Frobenius.....	139
5.3. LINEARIZAÇÃO ENTRADA-ESTADO.....	141
5.3.1. Definição de linearização entrada-estado	141
5.3.2. Condições para efectuar a linearização entrada-estado	142
5.3.3. Algoritmo para realizar a linearização entrada-estado.....	143
5.4. LINEARIZAÇÃO ENTRADA-SAÍDA	146
5.4.1. Grau relativo bem definido	146
5.4.2. Grau relativo indefinido.....	147
5.5. PROBLEMAS RESOLVIDOS	148
5.6. PROBLEMAS PROPOSTOS	158
6. SISTEMAS DIFUSOS E REDES NEURONAIS.....	159
6.1. INTRODUÇÃO. CONTROLO INTELIGENTE	159
6.2. CONJUNTOS E LÓGICA DIFUSA	160
6.2.1. Introdução	160
6.2.2. Conjuntos e sistemas difusos.....	160
6.2.2.1. Definições	160
6.2.2.2. Propriedades fundamentais	163
6.2.3. Lógica difusa	164
6.2.3.1. Variáveis	164

6.2.3.2.	Operações.....	165
6.2.3.3.	Regras if-then.....	167
6.2.4.	<i>Regras de inferência</i>	168
6.2.5.	<i>Projecto de um controlador difuso</i>	170
6.2.6.	<i>Controlo difuso do satélite no Matlab</i>	174
6.3.	REDES NEURONAIS	177
6.3.1.	<i>Conceitos e definições</i>	177
6.3.1.1.	A rede multicamada	177
6.3.1.2.	A rede de base radial.....	180
6.3.2.	<i>A RNA como aproximador universal</i>	181
6.3.3.	<i>Estrutura de uma rede</i>	181
6.3.3.1.	Número de camadas	181
6.3.3.2.	Número de unidades.....	181
6.3.3.3.	Funções de activação	182
6.3.4.	<i>Obtenção dos parâmetros da rede</i>	183
6.3.4.1.	Funcional de custo	183
6.3.4.2.	Treino da rede	184
6.3.5.	<i>Identificação do Processo</i>	184
6.3.5.1.	Dados de entrada /saída.....	184
6.3.5.2.	Estrutura da entrada da rede.....	185
6.3.6.	<i>Controlo preditivo</i>	188
7.	EXEMPLOS DE SISTEMAS NÃO LINEARES	189
7.1.	PÊNDULO SIMPLES	189
7.2.	SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR.....	192
7.3.	OSCILADOR DE RESISTÊNCIA NEGATIVA.....	196
7.4.	MOVIMENTO DE DOIS CORPOS COM FORÇAS CENTRAIS	199
7.5.	INTERACÇÃO ENTRE ESPÉCIES ANIMAIS	201
7.6.	REACTOR QUÍMICO CONTINUAMENTE AGITADO	202
8.	CONSTANTES, FORMULÁRIOS E TABELAS	205
8.1.	CONSTANTES MATEMÁTICAS	205
8.2.	CONSTANTES FUNDAMENTAIS DA FÍSICA	205
8.3.	FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA	206
8.3.1	<i>Álgebra elementar</i>	206
8.3.2	<i>Logaritmos e exponenciais</i>	206
8.3.3	<i>Geometria</i>	206
8.3.4	<i>Limites</i>	206
8.3.5	<i>Séries</i>	207
8.3.6	<i>Trigonometria</i>	207
8.3.7	<i>Derivadas</i>	207
8.3.8	<i>Integrais indefinidos</i>	208
8.4.	TRANSFORMADA DE LAPLACE UNILATERAL	209
8.4.1	<i>Propriedades da TL</i>	209
8.4.2	<i>Tabelas de TL</i>	210
8.5.	FORMULÁRIO DE FÍSICA.....	211
8.5.1	<i>Mecânica dos sólidos</i>	211
8.5.2	<i>Mecânica dos fluidos</i>	211
8.5.3	<i>Electrotecnia</i>	211
	BIBLIOGRAFIA	213
	ÍNDICE	215

1. SISTEMAS NÃO LINEARES

1.1. Introdução

O objectivo destes textos é efectuar o estudo de sistemas não lineares e o modo de os controlar. Um **sistema** designa-se por **não linear** sempre que na sua constituição intervenha pelo menos um componente ou um sub-sistema não linear. Os sistemas não lineares não satisfazem o **princípio da sobreposição**, pelo que o seu comportamento depende da amplitude dos sinais que nele intervêm. Serão apenas estudados sistemas não lineares causais, quer sejam variantes ou invariantes no tempo, contínuos ou discretos.

Os métodos clássicos utilizados no estudo dos sistemas lineares, em particular a análise em frequência (lugar das raízes, diagramas de Bode e Nyquist) não são aplicáveis aos sistemas não lineares. Há assim necessidade de recorrer a outros métodos para proceder ao estudo destes sistemas, em particular da sua estabilidade, sendo de entre outros de destacar os métodos devidos a Lyapunov ⁽¹⁾

Entende-se por **controlo não linear** o conjunto de procedimentos destinados a fazer com que as variáveis de saída de um sistema não linear se aproximem de uma determinada referência e estabilizem numa vizinhança do seu valor. Como acontece no domínio linear, o controlo não linear utiliza **realimentação**, quer da saída quer do estado, para gerar um sinal de controlo que vai actuar sobre o processo. Por vezes a cadeia de realimentação é projectada não linear, ou para compensar as não linearidades do sistema que está a ser controlado, ou para melhorar certos aspectos do controlo.

Quando se pretende controlar sistemas não lineares utilizando os métodos do controlo linear, estes de um modo geral apenas permitem um bom desempenho dentro de uma pequena gama de operação do sistema. Fora dela, o desempenho será mau ou mesmo instável. Nestes casos torna-se necessário considerar o **sistema linearizado** em torno de determinados pontos de funcionamento usando parâmetros de controlo específicos para cada ponto (“gain schedule”) e ajustar os parâmetros automaticamente (**controlo adaptativo**), ou então utilizar uma cadeia de realimentação negativa que faça com que o sistema em cadeia fechada se comporte como linear (**linearização por realimentação**).

Nem sempre é possível linearizar o sistema em torno de um ponto de funcionamento, por exemplo quando o sistema contém atritos de Coulomb, folgas, zonas mortas, saturações, etc., não linearidades muito correntes em processos e sistemas reais. Para este tipo de não linearidades, chamadas **não linearidades duras**, é necessário usar determinadas técnicas de controlo específicas.

¹ Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, Matemático e Engenheiro Russo, 1857-1918.

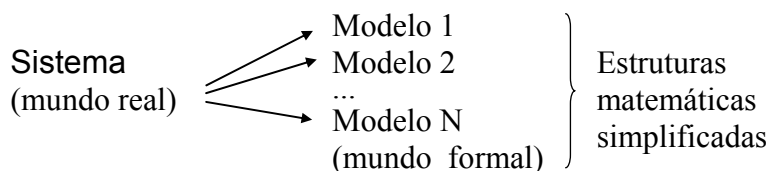
Normalmente, o projecto de sistemas não lineares, obriga a um contacto mais estreito com a física e a química associadas aos sistemas que irão ser controlados, de modo a permitir uma melhor compreensão dos fenómenos que se estão a passar; por vezes realizam-se modificações nos processos que introduzem melhorias significativas no controlo, tais como a mudança do local físico dos actuadores, do seu dimensionamento e inclusivamente poderá fazer-se uma nova escolha das variáveis manipuladas.

1.2. Classificação dos Sistemas

De uma forma genérica chama-se **sistema** a um conjunto de elementos organizados de modo a constituírem um todo científico unitário ou um corpo doutrinal.

Com base nesta definição de carácter bastante genérico, existem sistemas em todas as áreas do conhecimento. Este estudo limitar-se-á a sistemas em que seja possível **quantificar** as variáveis e os parâmetros que os definem. Podem assim considerar-se **sistemas económicos**, em que se estuda a relação entre variáveis de interesse na economia, **sistemas físicos**, em que as variáveis serão grandezas de carácter físico, como por exemplo pressões e caudais, **sistemas químicos**, **sistemas geológicos**, **sistemas matemáticos**, etc. Por vezes um sistema pode ser **misto**, envolvendo ao mesmo tempo variáveis de diversas áreas, por exemplo económicas e físicas.

Ao efectuar-se o estudo do comportamento de um sistema torna-se quase sempre necessário construir um **modelo**. Este é uma representação do sistema em estudo, por meio de uma estrutura matemática. A modelização de um sistema pode ser mais ou menos elaborada, consoante a finalidade. Poderá haver mais do que um modelo, mais ou menos simplificado, para cada sistema.



A obtenção do ou dos modelos de um sistema pode ser feita de diversos modos:

- A partir do conhecimento dos fenómenos em causa (ex.: 2ª lei de Newton).
- A partir da observação das variáveis em jogo e da sua análise.
- Por processo misto.

Salvo algumas exceções, os sistemas que aqui vão ser considerados dispõem de pelo menos uma **variável de entrada**, eventualmente nenhuma, e pelo menos uma **variável de saída**, pelo que para estes casos se pode apresentar a seguinte definição:

Sistema é toda a entidade de carácter matemático, físico, químico ou outro tipo, quantificável, que recebe sinais, que os processa e os envia para o seu exterior.

Para uma definição matemática de sistema consultar o livro de E. Sontag, referido na bibliografia.

De uma forma compacta, é costume representar graficamente um sistema por meio de um rectângulo, no interior do qual se indica a propriedade que o caracteriza, representando os sinais de entrada ou *excitação* por u (ou por x , nos tratados de índole matemática), e os sinais de saída por y , como se indica na Fig. 1.1.

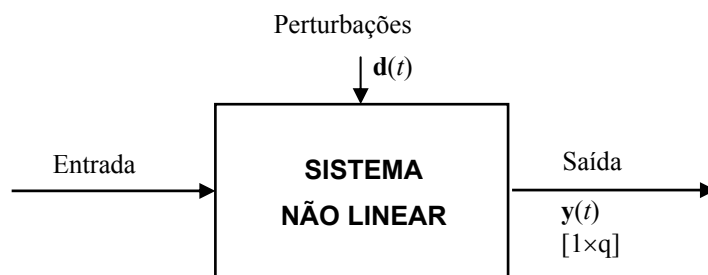


Fig. 1.1 – Representação gráfica compacta de um sistema

Em relação a um determinado sistema genérico observe-se o seguinte:

- As entradas $u(t)$ e as saídas $y(t)$ podem ser escalares ou vectores, podendo eventualmente não haver entradas,
- O valor das saídas depende da estrutura do sistema, caracterizada pelas variáveis de estado $x(t)$, das entradas $u(t)$, de perturbações adicionais $d(t)$, por vezes desconhecidas, e do próprio tempo t :

$$y(t) = T [x(t), u(t), d(t), t] \quad (1.1)$$

É costume efectuar a classificação dos sistemas de acordo com os seguintes critérios:

- Sistemas estáticos e dinâmicos,
- Sistemas relaxados e não relaxados,
- Sistemas de parâmetros distribuídos e de parâmetros concentrados,
- Sistemas causais e não causais,
- Sistemas variantes no tempo e invariantes no tempo,
- Sistemas contínuos e discretos,
- Sistemas determinísticos e estocásticos,
- Sistemas estáveis e instáveis,
- Sistemas lineares e não lineares, ...

1.2.1. Sistemas estáticos e dinâmicos

Um sistema designa-se *estático* se a sua saída $y(t)$, depender, quando muito, da entrada $u(t)$ no mesmo instante t . Caso $y(t)$ dependa de variações da entrada ou da saída, ou dos seus valores integrados, o sistema diz-se *dinâmico*. No sentido matemático, um sistema estático é uma *aplicação* de $u(t)$ em $y(t)$. Um sistema dinâmico, ao contrário de um sistema estático, possui *memória*, pelo facto da saída depender de valores tomados noutros instantes.

1.2.2. Sistemas relaxados e não relaxados

Um sistema diz-se *relaxado*, num determinado instante inicial, ou *em repouso*, se não tiver energia armazenada. Caso o sistema possua energia armazenada diz-se *não relaxado*. É comum dar-se como exemplo se um sistema não relaxado um circuito eléctrico contendo um condensador carregado.

1.2.3. Sistemas de parâmetros distribuídos e de parâmetros concentrados

Um sistema de *parâmetros distribuídos* é todo aquele em que pelo menos um dos seus parâmetros característicos depende de pelo menos uma coordenada espacial, de tal forma que essa dependência se reflecta nas características do sistema. É exemplo clássico de um sistema de parâmetros distribuídos uma linha de transmissão de sinais, quando o comprimento de onda destes sinais é inferior à ordem de grandeza do comprimento da linha. Pelo contrário, um circuito RLC que trabalhe com um sinal de 10 MHz, a que corresponde um comprimento de onda de 30 m, será um *sistema de parâmetros concentrados*.

1.2.4. Sistemas causais e não causais

Um sistema diz-se *causal* se a sua saída, num determinado instante, depender apenas das entradas presente e passadas, não dependendo das entradas futuras.

Os sistemas em *tempo real* são sempre causais. No entanto, sistemas que trabalhem com sinais gravados poderão ser não causais. Sistemas cujas entradas sejam variáveis que não sejam o tempo, poderão ser não causais: por exemplo a deformação de uma viga dependerá dos esforços à sua esquerda e à sua direita (coordenada x , equiparável a tempos negativos e positivos, respectivamente).

1.2.5. Sistemas variantes no tempo e invariantes no tempo

Um sistema diz-se *invariante no tempo* se as suas características não se modificarem com o decorrer do tempo. Para um sistema relaxado e causal o sistema será invariante no tempo se e só se, qualquer que seja $d > 0$,

$$\mathbf{y}(t) = T [\mathbf{u}(t)] \Leftrightarrow \mathbf{y}(t - d) = T [\mathbf{u}(t - d)] \quad (1.2)$$

1.2.6. Sistemas contínuos e discretos

Designa-se por *sistema contínuo* todo aquele que opera com sinais em tempo contínuo e por *sistema discreto* todo o sistema que opera com sinais em tempo discreto.

Muitas das propriedades dos sistemas discretos são semelhantes às dos sistemas contínuos; outras são fundamentalmente diferentes. Os sistemas do mundo macroscópico real, salvo algumas excepções, são contínuos. O processamento de sinais num computador é essencialmente discreto, pelo que é essencial dominar-se as propriedades de ambos os tipos de sistemas e saber efectuar a conversão de sistemas contínuos para discretos, e vice-versa.

1.2.7. Sistemas determinísticos e estocásticos

Um sistema diz-se *estocástico* sempre que processe variáveis aleatórias. No caso contrário o sistema diz-se *determinístico*. Repare-se que basta a existência de uma variável aleatória para que o sistema seja estocástico.

1.2.8. Sistemas estáveis e instáveis

Um sistema diz-se *estável* (estabilidade BIBO – Bounded Input, Bounded Output) se e só se, qualquer que seja a sua entrada limitada, a saída for limitada. Analiticamente pode escrever-se:

$$\forall t, \| \mathbf{u}(t) \| < M_u < \infty \Leftrightarrow \| \mathbf{y}(t) \| < M_y < \infty \quad (1.3)$$

Se existir pelo menos um valor de $\mathbf{u}(t)$ que torne a saída infinita, o sistema é instável. A determinação da estabilidade de um sistema é um dos tópicos mais importantes do controlo de sistemas, uma vez que nos problemas de Engenharia é essencial que os sistemas mantenham a saída dentro de determinados limites.

Como se verá adiante no capítulo 3, há outras formas de definir estabilidade de um sistema, que poderão conduzir a classificações diferentes: um oscilador não linear (sistema sem entrada, apenas com saída), que segundo as definições que se darão adiante é um sistema instável, de acordo com a definição que acaba de ser dada é estável, desde que a amplitude da sua oscilação seja limitada.

1.2.9. Sistemas lineares e não lineares

Ao contrário do que se passa com os sistemas lineares, que são caracterizados por possuírem uma propriedade comum, que é a de satisfazerem o princípio da sobreposição, os sistemas não lineares são os que ficam de fora, por não obedecerem a este princípio. A ausência de uma propriedade unificadora, que os caracterize sem ser por aquilo a que não obedecem, torna a sua sistematização mais difícil de fazer do que a dos sistemas lineares.

Um sistema linear é todo aquele que satisfaz o *princípio da sobreposição*, o que se traduz analiticamente do modo seguinte:

$$T[a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)] = a_1 T[u_1(t)] + a_2 T[u_2(t)] \quad (1.4)$$

As não linearidades podem ser *naturais* ou *artificiais*. As primeiras estão intimamente associadas aos sistemas, são inerentes a eles. Em muitos casos são indesejáveis. As segundas, são introduzidas intencionalmente, com o objectivo de poder controlar, ou mesmo de melhorar o comportamento dos sistemas.

1.3. Comportamento dos sistemas não lineares

A dinâmica dos sistemas não lineares é mais complexa do que a dos lineares, e é, de um modo geral, muito mais rica do que a destes: Há fenómenos que apenas acontecem nos sistemas não lineares, que não ocorrem nos lineares, como sejam

- Dependência da amplitude de excitação,
- Tempo de escape finito,
- Pontos de equilíbrio múltiplos,
- Não unicidade da solução,
- Dependência crítica dos parâmetros,
- Bifurcações,
- Caos ou dependência crítica das condições iniciais,
- Ciclos limite ou oscilações,
- Existência de harmónicas e de sub-harmónicas,

e que passam a exemplificar-se.

1.3.1. Dependência de amplitude da excitação

Seja por exemplo o modelo do movimento de um veículo submarino, de massa m actuado por uma força propulsora u . Designando por v a velocidade do veículo, a equação do movimento é representada por:

$$m\dot{v} + k|v|v = u \quad (1.5)$$

em que k é o coeficiente de atrito. Note-se que nesta expressão a força de atrito de arrastamento é proporcional, em módulo, ao quadrado da velocidade, tendo a direcção oposta a esta. Suponha-se $m = 1 \text{ kg}$ e $k = 1 \text{ kg m}^{-1}$ e aplique-se ao veículo uma força de 1.0 N durante 5 segundos. Este ficará sujeito a uma variação de velocidade, como se indica na Fig. 1.2. Repare-se que o tempo de estabelecimento é maior quando se retira a força propulsora do que quando esta é aplicada. Este fenómeno que não acontece nos sistemas lineares, onde os dois tempos são iguais, compreende-se bem se o sistema (1.5) for comparado com o sistema linear equivalente, com amortecimento $k|v|$ função da velocidade: Com velocidades próximas da unidade o amortecimento é maior do que quando as velocidades estão próxima de zero, o que justifica a assimetria.

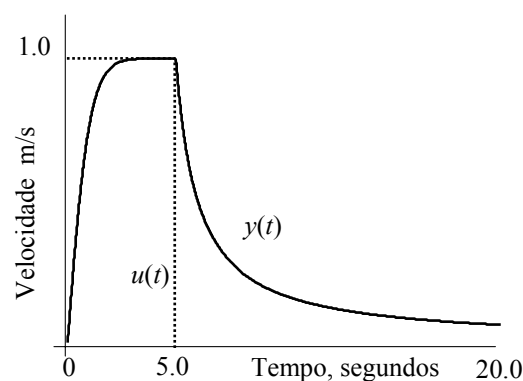


Fig. 1.2 – Resposta do veículo submarino, $u=1$

Aplique-se agora ao sistema uma força propulsora semelhante, mas de amplitude $u=10N$ (Fig. 1.3). A velocidade do veículo aumenta e tenderá a estabilizar em $3.2 m/s$ e não em $10 m/s$ como aconteceria se o sistema fosse linear. Também neste caso os tempos de estabelecimento a subir e a descer são diferentes. As velocidades de estabilização do sistema podem ser obtidas, para estes dois casos por

$$\begin{aligned} u = 1.0N : \quad \dot{v} = 0 &\Rightarrow 0 + |v_s|v_s = 1.0 \Rightarrow v_s = 1.0m/s \\ u = 10N : \quad \dot{v} = 0 &\Rightarrow 0 + |v_s|v_s = 10 \Rightarrow v_s = \sqrt{10} \approx 3.2m/s \end{aligned} \quad (1.6)$$

Este exemplo permite compreender como é que o comportamento de um sistema não linear pode depender da amplitude dos sinais em jogo.

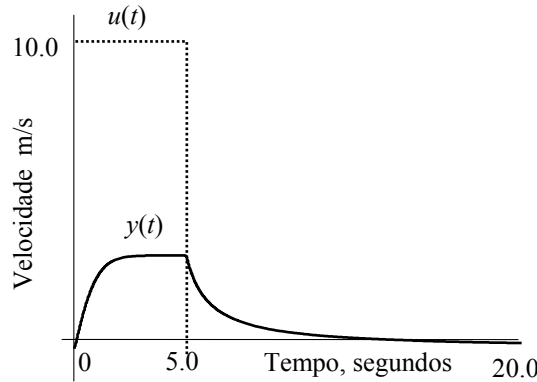


Fig. 1.3 – Resposta do veículo submarino, $u=10.0$

1.3.2. Tempo de escape finito

Num sistema linear instável, a resposta, por muito rapidamente que tenda para infinito, demora um tempo infinito a atingir este valor. Em contrapartida, alguns sistemas não lineares podem atingir o valor infinito num intervalo de tempo finito.

Considere-se o seguinte modelo de crescimento, com $a > 0$ e $c > 0$, em que a taxa de crescimento não é constante mas aumenta com $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = a\left(1 + \frac{x(t)}{c}\right)x(t) \quad (1.7)$$

A solução desta equação encontra-se representada na Fig. 1.4, para $t > 0$ $a = 0.5$ $c = 0.5$ e $x(0) = 0.5$. A solução atinge o valor infinito num intervalo de tempo finito. Diz-se que o sistema tem uma **singularidade na solução**, ou ainda, que apresenta um **tempo de escape finito**.

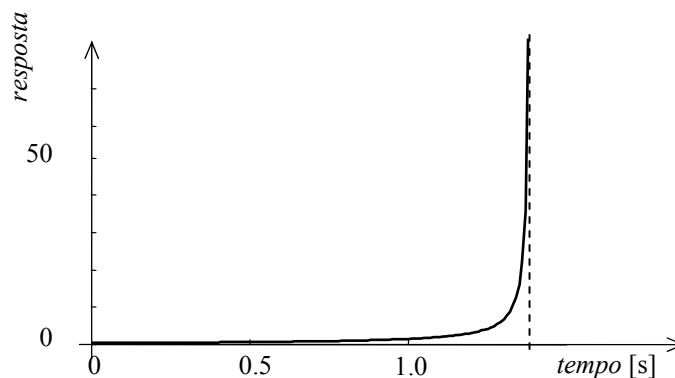


Fig. 1.4 – Tempo de escape finito

1.3.3. Pontos de equilíbrio múltiplos

Designam-se **pontos de equilíbrio** aqueles em que todo o estado que nele se inicia permanece inalterado: $x(t) = x_e$, ou seja, $\dot{x}_e = 0$.

Num sistema linear, definido pela equação de estado $\dot{x} = Ax$, tais pontos obtêm-se resolvendo a equação homogénea $Ax_e = 0$. Se a matriz do sistema, A , for regular, a solução desta equação é $x_e(t) = 0$, ou seja, o único ponto de equilíbrio é a origem. Tratando-se de sistemas não lineares, poderá haver outros pontos de equilíbrio, distintos da origem, como se mostra nos exemplos que se dão a seguir.

Um ponto de equilíbrio pode variar no tempo. Uma trajectória que se dirija para um ponto de equilíbrio deste tipo pode cruzar-se com ela própria.

Exemplo 1

Seja o sistema de 1ª ordem representado pela equação

$$\dot{x}(t) = [x(t) - 1]x(t) \quad (1.8)$$

Este sistema, variante de (1.7) com $a < 0$ e $c < 0$, admite como pontos de equilíbrio $x_{e1} = 0$ e $x_{e2} = 1$. A sua resposta tem um comportamento diferente, consoante seja iniciada na vizinhança do estado $x_e = 0$ ou $x_e = 1$, como se pode observar na Fig. 1.5.

Repare-se que o ponto de equilíbrio $x_e = 0$ é estável, ou seja, as trajectórias iniciadas na sua vizinhança não se afastam dele, enquanto que o ponto de equilíbrio $x_e = 1$ é instável.

Note-se a existência de uma singularidade na solução que se inicia em $x_e > 1$.

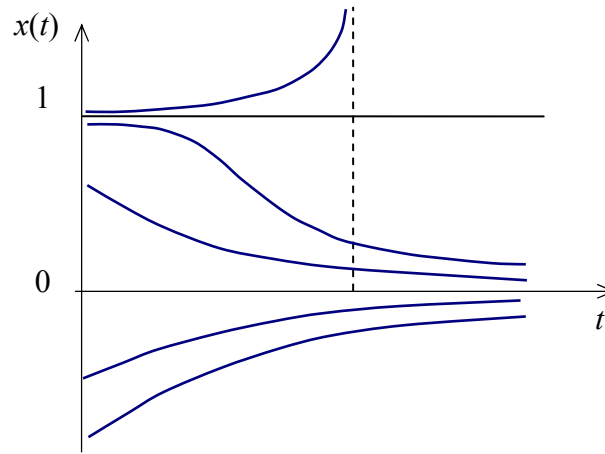


Fig. 1.5 – Resposta de um sistema não linear

Exemplo 2

Considere-se o movimento do pêndulo ligado a uma haste rígida, sem amortecimento, descrito pela equação diferencial

$$\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad (1.9)$$

A introdução das variáveis de estado $x_1 = \theta$ (posição angular) e $x_2 = \dot{\theta}$ (velocidade angular), conduz a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin x_1 \end{cases} \quad (1.10)$$

Os pontos de equilíbrio obtêm-se fazendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$, o que conduz a

$$\begin{cases} 0 = x_{2e} \\ 0 = -\frac{g}{\ell} \sin x_{1e} \end{cases} \quad (1.11)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.12)$$

Há pois uma infinidade de pontos de equilíbrio, dos quais são fisicamente distintos $x_{1e} = 0$ e $x_{1e} = \pi$, sendo o primeiro ponto de equilíbrio estável e o segundo instável. Um estudo detalhado do pêndulo é feito adiante na secção 7.2.

1.3.4. Não unicidade da solução

Seja agora o sistema não linear descrito pela equação de estado

$$\dot{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad (1.13)$$

Trata-se de uma equação de termos separáveis, que pode ser escrita na forma

$$x^{-\frac{1}{3}} \dot{x} = 1 \quad (1.14)$$

Esta equação admite as duas soluções seguintes:

$$x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} \quad e \quad x(t) = 0 \quad (1.15)$$

Seja agora o sistema de 1ª ordem descrito por uma equação de estado do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.16)$$

prova-se que é condição suficiente para que a solução de (1.16) seja única, que

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

seja contínua numa vizinhança de x_0 . O sistema (1.13) não satisfaz a esta condição em $x=0$.

1.3.5. Dependência crítica dos parâmetros

A estrutura das soluções de um sistema não linear pode ser fortemente dependente dos valores que possa tomar um parâmetro do sistema, como se exemplifica a seguir.

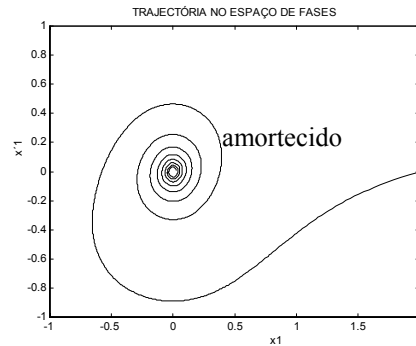
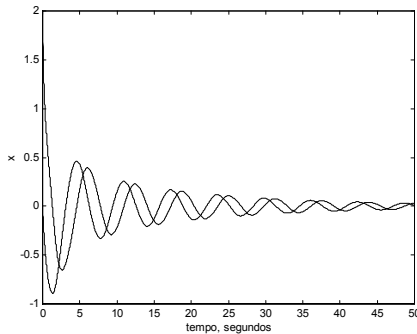
Considere-se o sistema descrito pelas equações de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad (1.17)$$

em que o parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$. Para μ próximo de zero o carácter das soluções é diferente consoante seja $\mu < 0$ ou $\mu > 0$.

Na Fig. 1.6 representam-se as soluções do sistema para dois valores diferentes de μ .

$$x_0 = [2; 0] \quad \mu = -0.1$$



$$x_0 = [2; 0] \quad \mu = +0.1$$

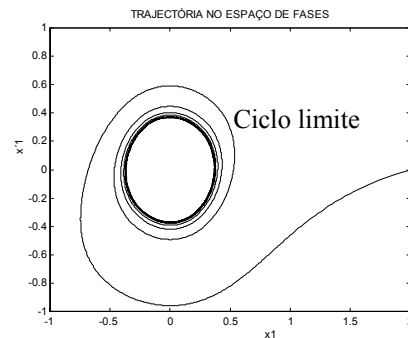
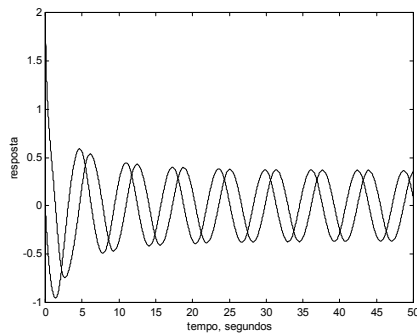


Fig. 1.6 – Dependência crítica dos parâmetros

1.3.6. Bifurcações

Designa-se por **bifurcação** uma dependência crítica nos parâmetros particular, como a exemplificada a seguir. Seja o sistema

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = 0 \quad (1.18)$$

A equação pode representar um sistema massa-mola em que a mola é dura (ver definição de mola dura adiante em 1.4.4 e em 7.3). O sistema (1.18) admite 3 pontos de equilíbrio:

$$x_e = 0, \quad x_e = \sqrt{\alpha}, \quad x_e = -\sqrt{\alpha}$$

Com α positivo o sistema é sempre estável; com α negativo torna-se instável, havendo uma mudança qualitativa no comportamento para $\alpha = 0$.

1.3.7. Caos ou dependência crítica das condições iniciais

Nos sistemas lineares estáveis, a pequenas variações nas condições iniciais correspondem pequenas variações na resposta. Tal porém não acontece nos sistemas não lineares, em que pode acontecer serem as soluções extremamente sensíveis a variações das condições iniciais, sendo a saída, a partir de certo valor de t , imprevisível. A este tipo de sistemas dá-se o nome de *sistemas caóticos* e ao fenómeno em si chama-se *caos*.

Seja o seguinte sistema não linear

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = 6\sin t \quad (1.19)$$

As respostas deste sistema, para condições iniciais, $x(0) = [2; 3]$ e $\dot{x}(0) = [2.01; 3.01]$, próximas, estão representadas na Fig. 1.7.

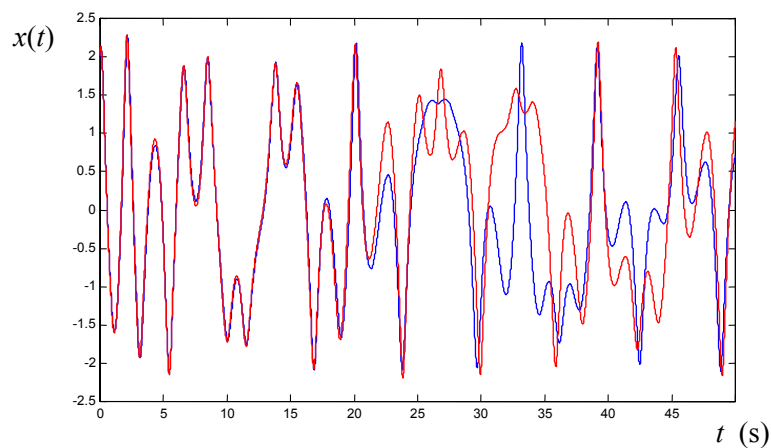


Fig. 1.7 – Dependência crítica das condições iniciais

1.3.8. Ciclos limite ou oscilações

Num sistema linear, invariante no tempo, para que se estabeleça uma oscilação de amplitude constante, é necessário que haja, nos sistemas contínuos, pelo menos um par de polos sobre o eixo imaginário. Mas esta condição não é robusta, sendo na prática impossível de conseguir, ficando os polos ligeiramente à esquerda ou à direita do eixo imaginário, o que conduz a uma oscilação amortecida ou crescente, respectivamente.

Há no entanto determinados sistemas, não lineares, que entram em oscilação, com amplitude e frequência constantes, independentemente do valor inicial do estado. Estas oscilações são designadas por *ciclos limite*.

Considere-se o sistema representado pela equação diferencial, conhecida por *equação de Van der Pol*:

$$m\ddot{x} + 2\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0 \quad (1.20)$$

Esta equação é equivalente à de um sistema massa-mola-amortecedor, em que o coeficiente de amortecimento $b = 2\varepsilon(x^2 - 1)$, depende da amplitude da oscilação. Para $x > 1$ o coeficiente de amortecimento é positivo estando o amortecedor a retirar energia ao sistema. Qualquer oscilação que exista com $x > 1$ será amortecida. Para $x < 1$ o coeficiente b é negativo, estando agora o amortecedor a fornecer energia ao sistema: toda a oscilação que exista com $x < 1$, será amplificada até que x atinge o valor 1. A partir daí, se x continuasse a aumentar, entrava-se no regime amortecido. Isto faz com que se estabeleça uma oscilação de amplitude $x = 1$.

Repare-se que o fenómeno é diferente do que acontece nos osciladores lineares, em que o sistema, para oscilar, tem que ser marginalmente estável. Aqui a amplitude das oscilações não depende de pequenas variações nos parâmetros do sistema. Também a amplitude de oscilação é independente das condições iniciais x_0 . Uma outra diferença para os sistemas lineares (marginalmente estáveis) é que a forma da oscilação não é necessariamente sinusoidal. Para saber mais detalhes sobre ciclos limite ver adiante a secção 2.3.

1.3.9. Existência de harmónicas e sub-harmónicas

Num sistema linear, uma excitação sinusoidal conduz a uma resposta também sinusoidal, com a mesma frequência. Num sistema não linear tal poderá não acontecer, podendo o estado (ou a saída) ser uma oscilação contendo frequências múltiplas e sub-múltiplas da frequência do sinal sinusoidal de excitação. Tais constituintes são designadas por *harmónicas* e *sub-harmónicas* da frequência do sinal de excitação.

1.4. Escrita das equações

Uma das formas correntes de hoje em dia representar um sistema é através do seu **modelo de estado**. Muitas vezes o modelo de estado é obtido a partir de uma ou várias equações diferenciais associadas ao sistema. Mas como é que se obtém essas equações diferenciais? A resposta é simples: a partir do conhecimento rigoroso da física/química do sistema; sabendo as suas características é possível escrever relações entre as suas variáveis.

Consideram-se a seguir alguns tipos genéricos de sistemas:

- Sistemas mecânicos clássicos,
- Sistemas eléctricos,
- Sistemas térmicos,
- Sistemas químicos.

1.4.1. Sistemas mecânicos clássicos

Nos sistemas mecânicos clássicos (ou newtonianos) a escrita das equações passa por:

- 1º Identificar o sistema em causa e o referencial em uso.
- 2º Identificar o tipo de movimento (linear, angular) e referenciar as variáveis em jogo, como sejam as posições, velocidades, aceleração, posições angulares, velocidades angulares, etc.
- 3º Identificar e referenciar todas as forças e momentos do jogo.
- 4º Relacionar as variáveis, utilizando os dois teoremas fundamentais da mecânica, o do movimento linear e o do movimento angular.

1.4.2. Teorema do momento linear

Para um sistema constituído por massas m_k localizadas por \mathbf{r}_k , com acelerações $\ddot{\mathbf{r}}_k$, sujeitas a forças exteriores \mathbf{f}_k^e , com momento linear associado a cada massa dado por $\mathbf{p}_k = m_k \dot{\mathbf{r}}_k$, o teorema do momento linear pode enunciar-se:

A derivada em ordem ao tempo do **momento linear** do sistema, \mathbf{P} , é igual à resultante das forças exteriores aplicadas ao sistema, \mathbf{F}^e

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^e \quad (1.21)$$

em que

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_k = \sum m_k \dot{\mathbf{r}}_k \quad e \quad \mathbf{F}^e = \sum \mathbf{f}_k^e \quad (1.22)$$

1.4.3. Teorema do momento angular

Este teorema tem uma forma semelhante ao anterior:

A derivada em ordem ao tempo do **momento angular** de um sistema em relação a um ponto O, é igual ao momento em relação a O das forças exteriores:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^e \quad (1.23)$$

com \mathbf{L} , momento angular, dado por

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k \quad e \quad \mathbf{N}^e = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_k^e \quad (1.24)$$

Por vezes é conveniente considerar a **energia do sistema**. Sem entrar com a energia externa ao sistema, há habitualmente a ter em conta a **energia cinética** associada ao facto das massas m_k se encontrarem em movimento com velocidade \mathbf{v}_k , e dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 \quad (1.25)$$

e a **energia potencial**, associada ao facto, associada ao facto das massas estarem a ser sujeitas a uma força, e consequentemente poderem mudar a sua posição e o seu estado de movimento. Para a força de atracção terrestre a energia potencial é dada por

$$U = g \sum m_k h_k \quad (1.26)$$

em que g representa a aceleração da gravidade e h_k a altura a que a massa m_k se encontra da posição de referência, ou seja, da altura a que se define a energia potencial zero.

Muitas vezes os sistemas mecânicos representam-se por um conjunto de elementos discretos concentrados como se indica a seguir. Esta representação facilita a escrita das equações, por fornecer relações pré-conhecidas entre estes os elementos.

1.4.4. Movimento linear

A massa, a mola e o amortecedor, são representados pelos símbolos da Fig. 1.8.

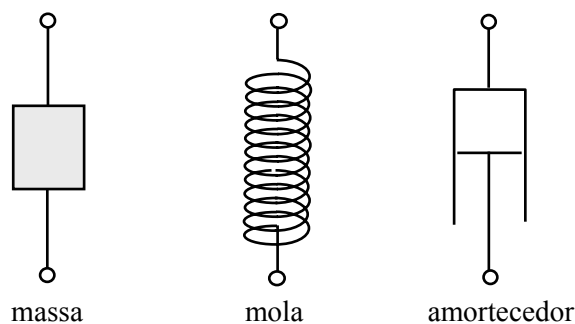


Fig. 1.8 – Representação da massa, da mola e do amortecedor

Para estes casos as expressões anteriores, representando por x a posição, dão origem a:

Massa: $m\ddot{x} = F^e \quad (1.27)$

Mola: $k_1 x + k_3 x^3 = F \quad (1.28)$

Amortecedor: $k_a x + k_b |\dot{x}| \dot{x} = F \quad (1.29)$

Para a mola convirá distinguir três casos:

$k_3 = 0 \rightarrow$ **mola linear**, $k_3 < 0 \rightarrow$ **mola macia** e $k_3 > 0 \rightarrow$ **mola dura**.

Para o amortecedor há dois casos distintos:

$k_b = 0 \rightarrow$ **atrito viscoso**, $k_a = 0$ e $k_b > 0 \rightarrow$ **atrito quadrático**.

1.4.5. Movimento de rotação

Os elementos discretos são os mesmos que os anteriores, apenas os parâmetros que os caracterizam são diferentes.

A massa em rotação é caracterizada pelo **momento de inércia** J , sendo a sua posição angular representada por θ e o binário de actuação por T :

$$\text{Massa em rotação:} \quad J\ddot{\theta} = T_j \quad (1.30)$$

$$\text{Mola em torção}^{(a)}: \quad k(\theta - \theta_0) = T_k \quad (1.31)$$

$$\text{Amortecedor rotativo}^{(a)}: \quad B\dot{\theta} = T_b \quad (1.32)$$

^(a) Apenas se indicam os termos lineares.

1.4.6. Sistemas eléctricos

A escrita das equações representativas de um sistema eléctrico passa pelo seguinte:

- 1º Identificar o sistema e os objectivos a alcançar;
- 2º Identificar os componentes em jogo: resistências, bobinas, condensadores, díodos, transístores, AMPOPs, etc.
- 3º Referenciar as tensões e correntes eléctricas em jogo.
- 5º Utilizar a lei dos nós e a lei das malhas para escrever as equações em jogo.
- 4º Relacionar as tensões e as correntes em cada componente [ver (1.33) a (1.35)].
- 6º Finalmente, o último passo consiste em eliminar, de entre as equações obtidas, as variáveis que não interessa apresentar, obtendo-se a equação diferencial do sistema, ou o modelo de estado, consoante o caminho que se siga.

Para uma resistência, caracterizada pelo seu valor óhmico R , tem-se

$$v(t) = R i(t) \quad (1.33)$$

para uma bobina, com coeficiente de autoindução L , verifica-se

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.34)$$

e para o condensador, caracterizado pela capacidade C ,

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (1.35)$$

De uma forma geral, R e C não dependem de i ou de v , o mesmo não acontecendo com as bobinas, se o núcleo for ferromagnético, em que $L = L(i)$, apresentando **saturação** e **histerese**.

Quando existe um **transformador** no circuito a relação entre as correntes e as tensões é, arbitrando os sentidos das tensões e correntes de forma a que energia seja positiva quando a entra no transformador:

$$\begin{cases} v_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + L_M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + L_M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases} \quad (1.36)$$

em que R_1 – resistência eléctrica do enrolamento 1,
 R_2 – resistência eléctrica do enrolamento 2,
 L_1 – coeficiente de auto-indução do enrolamento 1,
 L_2 – coeficiente de auto-indução do enrolamento 2,
 L_M – coeficiente de indução mútua.

Muitas vezes considera-se o **transformador ideal** (resistência dos enrolamentos nula, ligação magnética perfeita e coeficientes de indução infinitos), ficando neste caso, em que se representa por n_1 e n_2 o número de espiras dos enrolamentos,

$$\begin{cases} \frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{n_2}{n_1} \\ n_1 i_1(t) + n_2 i_2(t) = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

Repare-se que ao escrever as equações dos circuitos eléctricos para sistemas não lineares não se podem considerar os sinais alternados sinusoidais, uma vez que aparecem harmónicas. É preciso fazer intervir as relações entre valores instantâneos das tensões e das correntes.

Para outros componentes, a relação entre as tensões e as correntes dependerá da finalidade do modelo e da precisão exigida. Por exemplo, consoante os casos, um diodo poderá ser representado por:

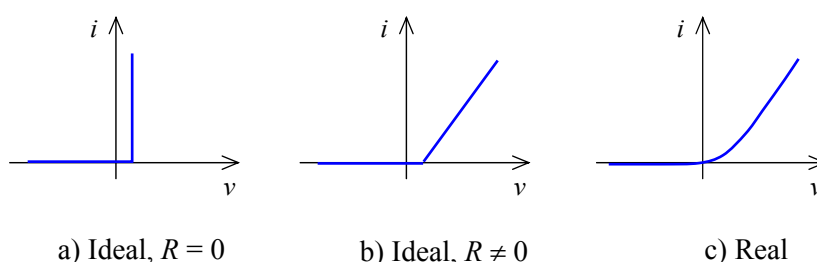


Fig. 1.9 – Características de um diodo

O díodo é um elemento essencialmente não linear. A relação entre a corrente i e a tensão v num díodo é dada por:

$$i = i_s \left(e^{\frac{q v}{K_B T}} - 1 \right) \quad (1.38)$$

em que

i_s – corrente inversa de saturação,
 T – temperatura absoluta a que se encontra a junção,
 q – carga eléctrica do electrão, $q = 1.602\,177 \times 10^{-19}$ C,
 K_B – constante de Boltzmann, $K_B = 1.380\,658 \times 10^{-23}$ J K⁻¹.

Quando um circuito contiver como elemento um **transístor de junção** (Fig. 1.10a), as relações entre as suas tensões e correntes podem ser representadas pelo **modelo de Ebers-Moll**, que se encontra representado graficamente na Fig. 1.10b.

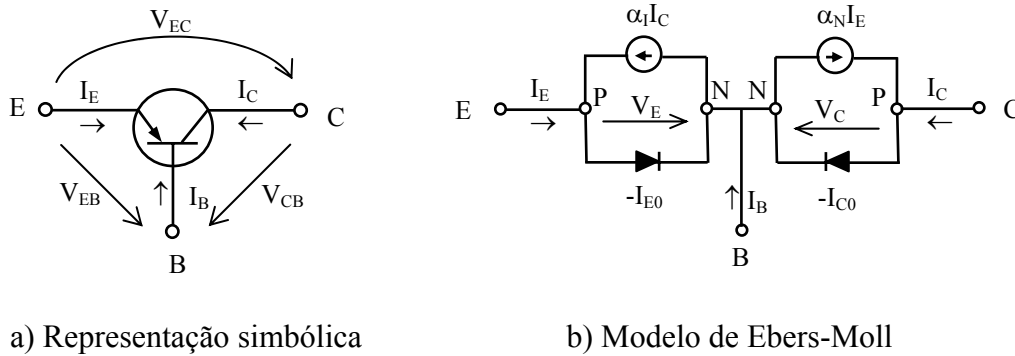


Fig. 1.10 – Transistor de junção pnp

Há mais alguns elementos eléctricos utilizados em controlo, como **amplificadores** (com regiões linear e não linear), **rectificadores** (de meia onda e de onda completa), **relés**, **tiristores**, etc.

1.4.7. Sistemas Térmicos

Há um determinado número de sistemas que põem em jogo grandezas termodinâmicas. Para o seu estudo convirá o conhecimento dos conceitos indicados a seguir.

a) **Calor específico.**

Chama-se **calor específico** de uma substância, C , à quantidade de energia que é necessário fornecer à massa unitária dessa substância para que a sua temperatura aumente de uma unidade:

$$dQ = m C dT \quad (1.39)$$

Q – quantidade de energia (ou calor) em jogo,
 m – massa do corpo,
 C – calor específico do corpo,
 T – temperatura.

O calor específico pode ser definido a pressão constante (designa-se por C_p) ou a volume constante (designa-se por C_v) e depende da temperatura.

b) *Calor latente*

Dá-se o nome de **calor latente** de uma substância, λ , à quantidade de energia que é necessário fornecer à massa unitária dessa substância para que haja uma mudança de **fase**, sem que haja variação de temperatura.

$$Q = m \lambda \quad (1.40)$$

O calor latente pode definir-se para a **fusão**, para a **vaporização** e para a **sublimação**.

A Fig. 1.11 mostra a relação entre a temperatura e a quantidade de calor fornecida a uma massa unitária de gelo/água/vapor, quando, a temperatura varia numa larga gama.

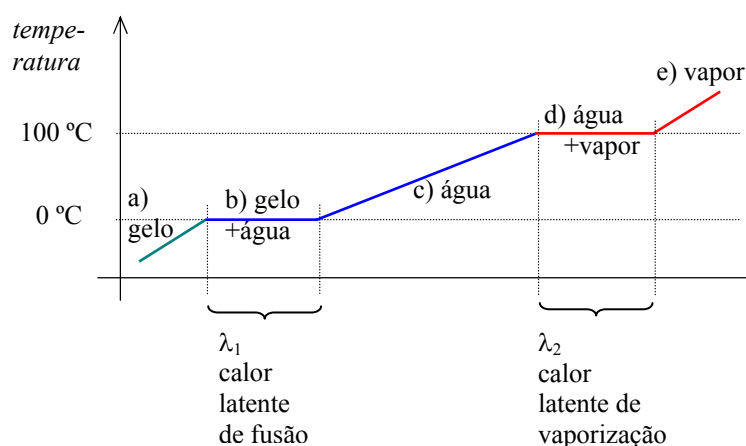


Fig. 1.11 – Calor específico e calor latente

Partindo de uma determinada massa de gelo (zona *a*) da figura), à medida que a esta se fornece energia térmica a sua temperatura vai subindo, de forma proporcional ao acréscimo de energia fornecida, sendo a relação de proporcionalidade por unidade de massa igual ao calor específico do gelo. À temperatura de 0 °C começa a dar-se a fusão do gelo. É a zona *b*). Se esta for lenta e a mistura água / gelo homogénea, para que a fusão se complete, é necessário fornecer à massa m uma quantidade de energia $m\lambda_1$. A temperatura não varia durante a fusão. Quando todo o gelo está fundido, a água começa de novo a aquecer (zona *c*)). A temperatura sobe à medida que se fornece calor, até se atingir a temperatura de 100 °C, em que a água entra em ebulição (zona *d*) da figura). Para efectuar a sua vaporização completa, é necessário fornecer-lhe uma quantidade de calor igual a $m\lambda_2$.

Durante a vaporização a temperatura mantém-se constante. O vapor existente nesta fase designa-se por vapor saturado. Quando toda a água se encontra vaporizada, o fornecimento de mais calor conduz a uma nova elevação de temperatura, proporcional ao acréscimo de calor, sendo a relação de proporcionalidade o calor específico do vapor. A este vapor dá-se o nome de vapor sobre-aquecido.

Retirando agora energia térmica ao sistema a temperatura diminui, seguindo um andamento muito próximo do indicado, embora ligeiramente acima, isto é, o sistema apresenta **histerese**.

c) **Gás perfeito.**

Designa-se por **gás perfeito** todo aquele em que as variáveis termodinâmicas pressão, p , volume, v , e temperatura, T , estão relacionadas pela expressão

$$pv = nRT \quad (1.41)$$

em que n é o número de moles do gás e $R = 8.314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$ uma constante universal, constante dos gases.

Muitas vezes não é possível representar o gás pela expressão acima, utilizando-se então outras expressões mais adequadas a cada caso.

d) **Esquema eléctrico equivalente**

Por vezes, para representar determinados fenómenos físicos ou químicos utilizam-se os chamados esquemas eléctricos equivalentes.

Considere-se por exemplo um meio material através do qual se está a efectuar uma determinada transferência de calor por condução. Sejam Σ_A e Σ_B duas superfícies às temperaturas T_A e T_B respectivamente, como se indica na Fig. 1.12, e admita-se $T_A > T_B$

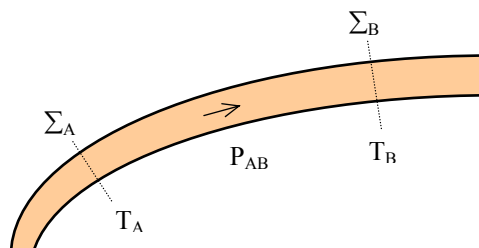


Fig. 1.12 – Transferência de calor entre duas superfícies isotérmicas

A quantidade de calor transmitida, na unidade de tempo, da superfície Σ_A para a superfície Σ_B , é dada por

$$P_{AB} = G_{\theta_{AB}} (T_A - T_B) \quad (1.42)$$

em que o parâmetro $G_{\theta_{AB}}$ é designado por **condutância térmica** do material, entre as superfícies Σ_A e Σ_B . Exprime-se em $W/^\circ C$.

A expressão (1.42) tem o nome de **lei de ohm térmica**, por ser semelhante à lei de ohm da electrotecnia. Aqui as temperaturas equivalem às tensões eléctricas e as potências térmicas às correntes. Esta expressão pode ser escrita sob a forma

$$(T_A - T_B) = R_{\theta_{AB}} P_{AB} \quad (1.43)$$

Ao parâmetro $R_{\theta_{AB}} = 1/G_{\theta_{AB}}$ dá-se o nome de **resistência térmica** do material e exprime-se em $^{\circ}\text{C}/\text{W}$. As equações (1.42) e (1.43) podem representar-se graficamente pelo esquema da Fig. 1.13.

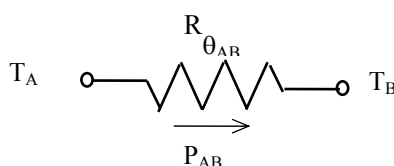


Fig. 1.13 – Representação de uma resistência térmica.

1.4.8. Sistemas químicos

Normalmente um sistema químico contém dois ou mais produtos que postos em presença reagem entre si, originando novos produtos, com absorção ou libertação de energia térmica. Para se obterem as equações representativas de um processo químico recorre-se normalmente ao **balanço de massa** e ao **balanço de energia**.

Quase sempre as velocidades de reacção dependem da temperatura e da pressão, que correntemente são variáveis manipuladas. Acontece que de um modo geral as reacções são **reversíveis**, sendo necessário jogar com vários parâmetros para, por exemplo, maximizar a concentração de um determinado reagente. Quando as reacções são exotérmicas, é necessário tomar as devidas precauções para retirar o excesso de calor produzido; quando são endotérmicas, há necessidade de fornecer energia ao sistema, a fim de garantir que a temperatura necessária ao desenvolvimento das reacções se mantenha.

De uma forma genérica o balanço de massas num reactor químico, expresso pela **equação de conservação de massa**, escreve-se:

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = \sum_k m_k^i - \sum_k m_k^o \quad (1.44)$$

em que

m_k^i – massa de cada produto que entra no reactor, por unidade de tempo,

m_k^o – massa de cada produto que sai, por unidade de tempo,

V – volume da mistura no reactor,

ρ – massa volúmica da mistura.

A **equação do balanço de energia** é quase sempre mais complexa que a anterior, uma vez que envolve a energia associada às massas que entram e saem, a energia recebida ou perdida por convecção e por radiação, e a energia produzida pela própria reacção:

$$\begin{pmatrix} \text{Variação} \\ \text{da energia} \\ \text{acumulada} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Energia que} \\ \text{entra com} \\ \text{os produtos} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{que sai com} \\ \text{os produtos} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{desenvolvida} \\ \text{na reacção} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{trocada com} \\ \text{o exterior} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

1.5. Modelo de estado

De entre os diversas formas analíticas de representar um sistema linear ou não linear, contínuo ou discreto, salientam-se a **descrição entrada-saída** e o **modelo de estado**.

A descrição entrada-saída é mais cómoda de utilizar quando se trata de sistemas lineares, em que pode recorrer-se aos **domínios transformados** s ou z e utilizar as ferramentas dos sistemas lineares. Tem, o inconveniente de nada revelar sobre a **estrutura interna do sistema** nem sobre a evolução das variáveis internas. Isto, para os sistemas lineares não é tão grave como para os não lineares, pois naqueles as variáveis internas não se podem tornar infinitas sem que tal comportamento seja observado na saída. Nos sistemas não lineares, pelo contrário, uma ou mais variáveis internas podem **divergir para infinito** sem que tal seja observado na saída. Por esta razão, e pelo facto de não se dispôr do conceito de função de transferência, associada à descrição entrada-saída, é mais corrente utilizar-se a representação por meio de modelo de estado.

Embora seja possível obter o modelo de estado de um sistema a partir da sua equação diferencial, que afinal não é mais do que uma representação entrada/saída, tal procedimento não revela os modos internos do sistema. Daí que o modelo de estado deva ser obtido directamente a partir das considerações que levam à escrita das equações do sistema.

1.5.1. Modelo de estado, sistema contínuo

Chama-se **estado** de um sistema a um conjunto de variáveis $x_i(t)$ que, juntamente com as variáveis de entrada $u_j(t)$, e a partir de um valor inicial $x_i(t_0)$, definem completamente o comportamento desse sistema, utilizando um sistema de equações diferenciais escalares de 1ª ordem do tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \\ \dot{x}_2(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \end{cases} \quad (1.46)$$

com

$$\begin{cases} x_1(0)=x_{10} \\ x_2(0)=x_{20} \\ \dots \\ x_n(0)=x_{n0} \end{cases} \quad (1.47)$$

As variáveis $x_i(t)$, designam-se por **variáveis de estado**. Dá-se o nome de **ordem do sistema** ao número mínimo de variáveis suficientes para definir o sistema.

Nem sempre as variáveis de saída de um sistema $y_j(t)$, coincidirão com as variáveis de estado. De uma forma genérica existirá a relação

$$\begin{cases} y_1(t)=h_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \\ y_2(t)=h_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \\ \dots \\ y_q(t)=h_q[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \end{cases} \quad (1.48)$$

As equações (1.46) a (1.48) podem escrever-se de uma forma mais compacta. Introduzindo os conceitos de **vector de estado**, **vector de entrada** e **vector de saída** respectivamente definidos por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_q(t) \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

e os vectores

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \\ f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \\ \dots \\ f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

e

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} h_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \\ h_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \\ \dots \\ h_q[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t] \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

podem escrever-se as seguintes **equações vectoriais**, designadas por **modelo de estado do sistema**.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] & \text{a)} \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] & \text{(1.52 b)} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 & \text{c)} \end{cases}$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_x \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbf{D}_u \subset \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_y \subset \mathbb{R}^q$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

A equação (1.52)a designa-se por **equação de estado** do sistema, a equação (1.52 b) por **equação de saída** e a equação (1.52 c) representa o **valor inicial do estado** (condições iniciais).

O sistema representado deste modo diz-se **de uma única variável** se tiver uma única variável escalar de entrada e uma única variável escalar de saída, ou seja, as dimensões de $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são iguais a 1×1 ($p=1, q=1$). Na literatura anglo-saxónica estes sistemas designam-se por sistemas SISO (Single Intput, Single Output). O sistema designa-se **multivariável** se tiver mais do que uma variável de entrada ou mais do que uma variável de saída, ou seja, nas dimensões de $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$, iguais respectivamente a $p \times 1$ e $q \times 1$, é $p > 1$ ou $q > 1$. São os chamados sistemas MIMO (Multiple Intput, Multiple Output).

Se não dispuser de nenhuma variável de entrada, ou se o valor desta for identicamente nulo, o sistema diz-se **não forçado** ou **em regime livre**. Para um sistema em regime livre tem-se a equação de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] \quad (1.53)$$

Sempre que as funções \mathbf{f} e \mathbf{h} de um sistema em regime livre não dependam **explicitamente** do tempo o sistema diz-se **autónomo**. Para um sistema invariante no tempo o modelo de estado escreve-se:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1.54)$$

Para um sistema autónomo em regime livre tem-se

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t)] \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1.55)$$

As equações (1.52) podem representar-se graficamente, como se indica na Fig. 1.14.

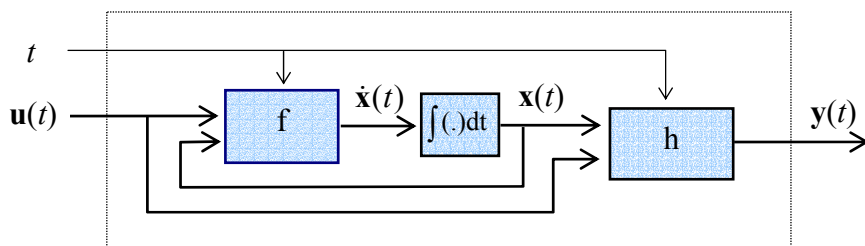


Fig. 1.14 – Modelo de estado de um sistema não linear contínuo

1.5.2. Modelo de estado discreto

Para sistemas discreto, os conceitos são semelhantes aos apresentados para os sistemas contínuos, com a particularidade de em vez da variável tempo contínuo $t \in \mathbb{R}^+$ se ter o **tempo discreto** $k \in \mathbb{Z}^+$; em vez de uma equação diferencial vectorial de 1ª ordem existe uma **equação às diferenças**, vectorial, também de 1ª ordem. O modelo de estado assume assim a forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] & \text{a)} \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] & \text{b)} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 & \text{c)} \end{cases} \quad (1.56)$$

que se encontra esquematizado na Fig. 1.15, e em que q^{-1} representa o **operador atraso**, definido por

$$q^{-1}[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}(k-1) \quad (1.57)$$

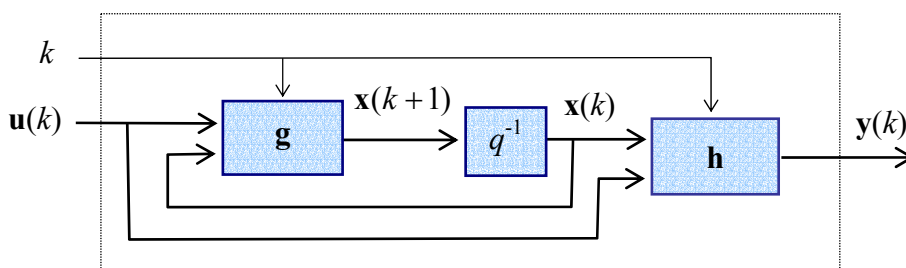


Fig. 1.15 – Modelo de estado de um sistema não linear discreto

1.5.3. Obtenção da trajectória

1.5.3.1. Métodos numéricos

A obtenção da trajectória de um sistema utilizando métodos numéricos, não é mais do que a obtenção da solução do sistema e sua representação gráfica. Quer se trate de sistema contínuos ou discretos, há toda a vantagem em representar o sistema por meio do seu modelo de estado. Com efeito este tem a vantagem de efectuar a representação sob a forma de uma **equação *n*-vectorial de 1ª ordem**, cuja solução pode ser obtida de forma recursiva. Para a obtenção da solução convirá distinguir o caso dos sistema discretos e o dos sistema contínuos. Os primeiros são mais fáceis de processar do que os últimos, que têm que ser previamente discretizados para que se possa obter a solução.

1.5.3.1.1 Sistemas discretos

Considere-se o sistema discreto representado pelo modelo de estado (1.56). Para efectuar a integração numérica deste sistema deve proceder-se do seguinte modo:

- Definir o valor das condições iniciais.
- Obter a entrada inicial $\mathbf{u}(0)$. As entradas seguintes poderão ser definidas durante a execução do algoritmo ou poderão ser pré-definidas aqui neste ponto.
- A partir de um ciclo “for”, ou outro equivalente, calcular o estado no instante posterior, $x(k+1)$, e a saída no instante corrente $y(k)$.

Exemplo 3

Obter a solução numérica do sistema discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.9x_2(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) - 0.1x_2(k) \end{cases} \text{ sujeito às condições iniciais } \begin{cases} x_1(0) = 0.2 \\ x_2(0) = 0.8 \end{cases}$$

Resolução

Vai utilizar-se o Matlab. Como neste programa os índices dos vectores não podem ser negativos nem nulos, as condições iniciais deverão escrever-se $x_1(1)=0.2$ e $x_2(1)=0.8$.

Este sistema encontra-se em regime livre pelo que $u(k)=0$, para todo o k ($k \geq 1$). O sistema é invariante no tempo. Um programa para obter a solução será

```
x1(1)=0.2; x2(1)=0.8; % Condições iniciais
N=100; % Número de instantes discretos a considerar
for k=1:N-1, % Início do ciclo, com N-1 iterações
    x1(k+1)=0.9*x2(k);
    x2(k+1)=-x1(k)-0.1*x2(k);
end % Fim do ciclo
plot([x1' x2'])
```

Note-se que na primeira iteração, em que $k=1$, se calculam os valores de $x_1(2)$ e $x_2(2)$ a partir das condições iniciais $x_1(1)$ e $x_2(1)$. Apenas se efectuam $N-1$ iterações porque se deseja N valores do vector de estado. A última iteração calcula o estado no instante 100 ($k=99$, $k+1=100$). A última instrução, `plot`, permite a representação gráfica do estado em função do tempo discreto, k .

Todos os sistemas representados por um modelo de estado discreto podem ter a solução obtida por numericamente por este método, mesmo que sejam variantes no tempo ou sujeitos a uma entrada $u(k)$.

1.5.3.1.2 Sistemas contínuos

Seja um sistema contínuo representado pelo modelo de estado (1.52). Uma das formas de integrar numericamente este sistema, ou seja, de obter $x(t)$ e $y(t)$, passa por discretizá-lo previamente e a seguir obter a solução do sistema discretizado. Tal no entanto não é necessário efectuar, uma vez que os programas de computador dispõem já de algoritmos que fazem eles mesmos a discretização. A maior parte dos programas exige que a descrição do sistema esteja feita sob a forma de modelo de estado, ou seja de uma equação n-vectorial de 1ª ordem. Se a descrição do sistema estiver feita sob a forma de uma equação diferencial é necessário efectuar a mudança de representação para um modelo de estado.

Exemplo 4

Vai dar-se um exemplo em que se utiliza o Matlab para integrar o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2 + x_1 x_3 \\ \dot{x}_2(t) = x_1 + x_2 x_3 \\ \dot{x}_3(t) = -x_3 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{cases} \quad \text{sujeito às condições iniciais} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0.5 \\ x_2(0) = -2.0 \\ x_3(0) = 0.1 \end{cases}$$

Resolução

O sistema dado deverá ser codificado num ficheiro, que será chamado “numerico_sist”: O ficheiro começa com uma função, com o mesmo nome, para se poder efectuar a passagem de parâmetros.

```
function xdot=numerico_sist(t,x)
xdot=zeros(3,1); % Valor inicial da derivada do estado
xdot(1)=-x(2)+x(1)*x(3);
xdot(2)=x(1)+x(2)*x(3);
xdot(3)=-x(3)-x(1)^2+x(3)^2;
```

Um 2º ficheiro, que é o que se deve correr, indica os intervalos de tempo, as condições iniciais e o método de integração: a instrução ode45 é um dos algoritmos existentes.

```
t0=0; % Instante inicial
tf=50; % Instante final, em segundos
dt=0.1; % Intervalo de tempo para obtenção de valores
tpo=t0:dt:tf; % Vector contendo a variável tempo
x0=[0.5; -2.0; 0.1]; % Valor inicial do estado.
[t,x]=ode45('numerico_sist',tpo,x0); % Esta instrução
% integra o sistema definido no ficheiro "numerico_sist"
% acima referido, durante o tempo "tpo" e sujeito às
% condições iniciais "x0" dadas. Devolve o vector tempo
% t e o estado x calculado nos mesmos instantes.
plot(t,x); % Representação do estado em função do tempo
```

O Matlab dispõe de outros algoritmos para integrar sistemas além do ode45, nomeadamente ode23, ode113, ode15s e ode23s. Estes dois últimos devem ser utilizados se o sistema contiver variações muito rápidas comparadas com os intervalos de tempo para os quais se pretende conhecer a solução.

1.5.4. Pontos de equilíbrio.

Os conceitos aqui apresentados são válidos quer para sistemas contínuos quer para sistemas discretos. Apenas serão referidos a um ou outro tipo quando houver dúvidas na interpretação. Chamam-se *pontos de equilíbrio* de um sistema aos valores do estado tais que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad (\text{sistemas contínuos}) \quad (1.58)$$

ou $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) \quad (\text{sistemas discretos}) \quad (1.59)$

Um sistema não excitado ($\mathbf{u}=0$), que inicie a sua trajectória num estado inicial \mathbf{x}_0 coincidente com um ponto de equilíbrio, permanece indefinidamente nesse valor do estado. Considere-se um sistema não excitado. A definição dada implica que os pontos de equilíbrio de um sistema contínuo devem satisfazer a equação:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.60)$$

A resolução desta equação vectorial permite determinar os pontos de equilíbrio. Para um sistema contínuo linear e autónomo, descrito pela equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (1.61)$$

os pontos de equilíbrio obtêm-se calculando as raízes da equação

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = 0 \quad (1.62)$$

Se a matriz \mathbf{A} for *regular*, a equação (1.62) admite uma única solução, $\mathbf{x}(t) = 0$. Se a matriz for *singular* há um número infinito de pontos de equilíbrio, que formam um hiperplano que passa pelo ponto $\mathbf{x}(t) = 0$.

Um ponto de equilíbrio diz-se *estável* se após qualquer pequena perturbação o estado não se afastar da vizinhança do ponto de equilíbrio. Os conceitos sobre a estabilidade de pontos de equilíbrio serão apresentados adiante no Cap. 3.

1.5.5. Trajectórias e estabilidade

Designa-se por $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ a solução da equação de estado (1.52) que tem início no instante $t = t_0$ com as condições iniciais $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$.

No espaço n -dimensional $\mathbf{D}_x \subset \mathbb{R}^n$, entre os instantes t_0 e t , a solução $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$ irá descrever uma curva, chamada *trajectória* ou *órbita* do sistema.

A cada valor inicial \mathbf{x}_0 está associada uma ou mais órbitas, consoante o sistema admita uma ou mais soluções. No caso do sistema ser linear, a unicidade da solução da equação de estado implica que a um determinado \mathbf{x}_0 corresponde uma e uma só órbita. A trajectória depende das condições iniciais (\mathbf{x}_0, t_0) . Uma trajectória diz-se *estável* se e só se

$$\forall t_0, \varepsilon > 0 \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0 : \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_1, t_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.63)$$

1.6. Algumas não linearidades correntes

As não linearidades que a seguir se apresentam aparecem com muita frequência, quer por se tratar de **não linearidades naturais** existentes sistemas reais, quer por serem intencionalmente introduzidas nos sistemas de controlo com o fim de melhorar o seu desempenho. Nesta secção serão apenas considerados sistemas com uma única variável de entrada e uma única variável de saída.

1.6.1. Saturação

Muitos sistemas físicos exibem uma característica estática do tipo indicado na Fig. 1.16. Nesta característica, que não será necessariamente simétrica em relação à origem, para valores elevados de $|u|$ tem-se $\Delta y/\Delta u \approx 0$, sendo pois a saída limitada. Diz-se que existe **saturação**, ou que a saída se encontra saturada.

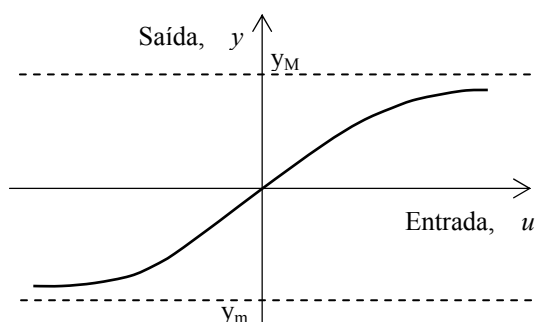


Fig. 1.16 – Característica da saturação.

A saturação ideal, representada na Fig. 1.17, é descrita analiticamente do modo

$$y = \begin{cases} y_m & , & u < u_m \\ k u + c & , & u_m \leq u \leq u_M \\ y_M & , & u > u_M \end{cases} \quad (1.64)$$

em que $y_m = y(u_m)$ e $y_M = y(u_M)$. Qualquer dos valores y_m ou y_M pode ser positivo ou negativo, com a condição $y_m < y_M$. Um dos valores, y_m ou y_M poderá ser infinito (em módulo), mas apenas um deles.

A saturação aqui apresentada é muito corrente em dispositivos de controlo industrial. Por exemplo, a relação entre o sinal de comando e a abertura de uma válvula é do tipo indicado, com a gama de saída compreendida entre 0 e 100 %. É também corrente introduzir-se na saída do controlador da válvula um módulo ou algoritmo que produza a saturação com a finalidade, de não forçar a válvula para fora da gama.

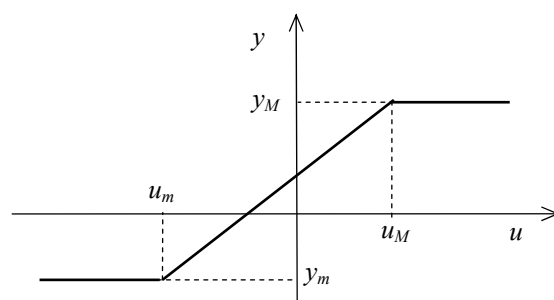


Fig. 1.17 – Característica da saturação ideal.

Um outro domínio em que aparece a característica saturação é a relação entre os campos magnéticos B e H , ou, em máquinas eléctricas, entre a corrente eléctrica e o campo magnético por ela criado. Neste caso a curva de saturação aparece normalmente associada a uma outra não linearidade também muito comum, a histerese, que se descreve adiante.

Em matemática define-se a **função saturação**, $sat(.)$, por

$$sat(x) = \begin{cases} -1 & , & x < -1 \\ x & , & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & , & x > 1 \end{cases} \quad (1.65)$$

1.6.2. Zona Morta

A **zona morta** é uma não linearidade cuja característica, representada nas Fig. 1.18a e Fig. 1.18b, pode ser de dois tipos, designados por tipo I e tipo II.

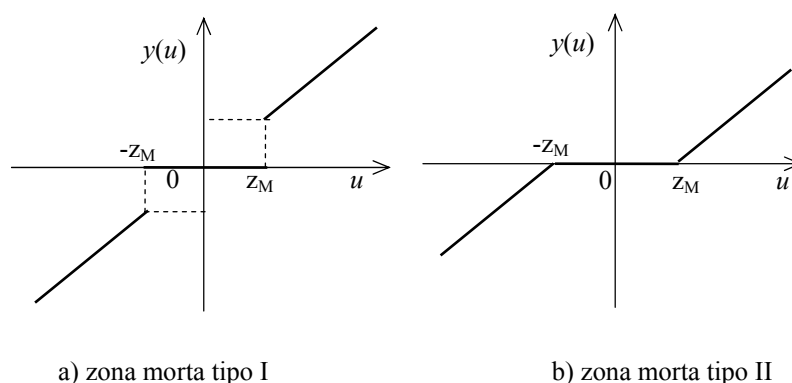


Fig. 1.18 – Características da zona morta.

Muitas vezes a zona morta é utilizada intencionalmente em sistemas de controlo para enviar um sinal nulo do controlador para o actuador, quando a saída daquele é pequena. Com este procedimento pode-se aumentar o tempo de vida de determinado tipo de equipamentos mecânicos.

A relação entre y e u pode escrever-se, para os dois tipos de zona morta,

$$\text{Zona morta tipo I} \quad y = \begin{cases} 0, & |u| \leq z_M \\ u, & |u| > z_M \end{cases} \quad (1.66)$$

$$\text{Zona morta tipo II} \quad y = \begin{cases} u + z_M, & u < -z_M \\ 0, & -z_M \leq u \leq z_M \\ u - z_M, & u > z_M \end{cases} \quad (1.67)$$

1.6.3. Histerese

A **histerese** é uma não linearidade cuja descrição analítica é um pouco mais complicada do que as anteriores, uma vez que faz intervir a **história do sinal** de entrada.

A Fig. 1.19 apresenta uma característica entrada-saída com histerese, admitindo que a entrada varia de $-u_M$ a $+u_M$.

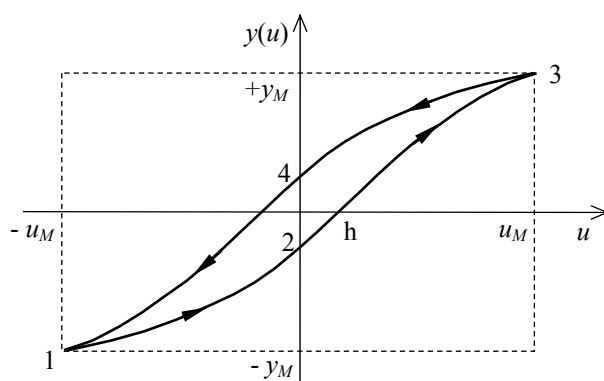


Fig. 1.19 – Característica da histerese, em torno de $u=0$.

Supondo que a entrada u é sinusoidal de amplitude u_M , quando u varia de $-u_M$ a $+u_M$ (ramo crescente de u), y varia de $-y_M$ a $+y_M$ seguindo a curva 1, 2, 3. Quando u diminui, de $+u_M$ a $-u_M$, y varia de $+y_M$ a $-y_M$ seguindo o ramo 3, 4, 1.

A dificuldade na definição matemática da histerese é que esta depende da amplitude do sinal de entrada e do ponto de funcionamento. Assim, se para um sistema que exhibe a curva de histerese da Fig. 1.19 a função $u(t)$ diminuir de amplitude no momento em que se encontrava no ponto P , a curva de histerese muda, tomando o aspecto indicado na Fig. 1.20.

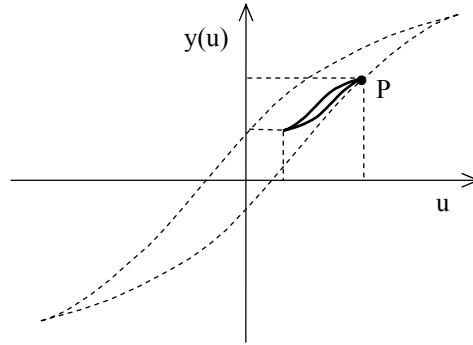


Fig. 1.20 – Característica da histerese, em torno de P.

De uma forma simplista é costume representar a histerese em torno de $u = 0$ associada à saturação, como indicado no diagrama ideal da Fig. 1.21, onde se admite que a amplitude de u é igual a $|u_M|$.

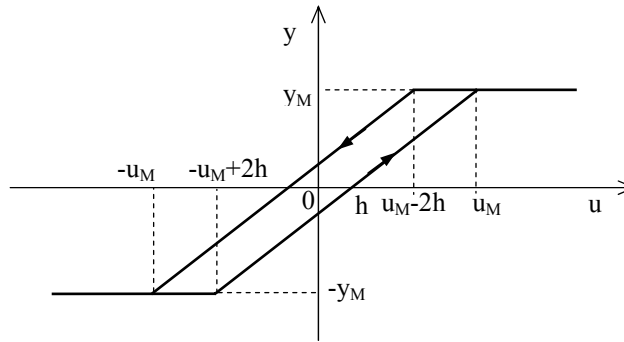


Fig. 1.21 – Característica ideal da histerese com saturação.

É a seguinte a expressão analítica da ***histerese ideal***:

$$\text{ramo crescente:} \quad y = \begin{cases} -y_M, & u < -u_M + 2h \\ u - h, & -u_M + 2h \leq u \leq u_M \\ y_M, & u > u_M \end{cases} \quad (1.68)$$

$$\text{ramo decrescente:} \quad y = \begin{cases} y_M, & u > u_M - 2h \\ u + h, & -u_M \leq u \leq u_M - 2h \\ -y_M, & u < -u_M \end{cases} \quad (1.69)$$

1.6.4. Folga

Este tipo de não linearidade, designada em Inglês por *backlash*, deve o seu nome ao facto de ser muito comum em sistemas mecânicos em que os elementos não se ajustam perfeitamente, isto é, sistemas com folgas mecânicas. Um destes sistemas em que a folga é vulgar é o desmultiplicador de velocidade com rodas dentadas apresentado na Fig. 1.22 (ver também a 1ª figura do Probl. 1.2).

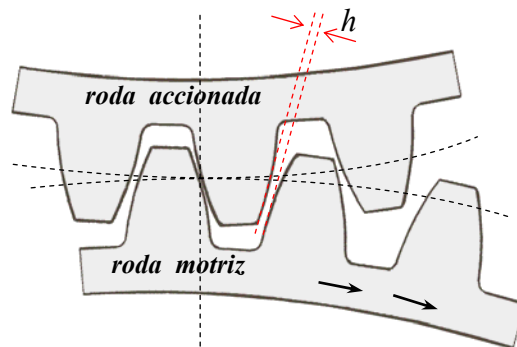


Fig. 1.22 – Sistema de rodas dentadas com folga

Como para o caso da histerese, a descrição analítica da *folga* a partir da característica $y(u)$ torna-se difícil de efectuar, uma vez que depende da história de u e da sua amplitude.

Na Fig. 1.23 faz-se uma representação gráfica da característica entrada-saída de um sistema com folga. Esta está condicionada à evolução de u .

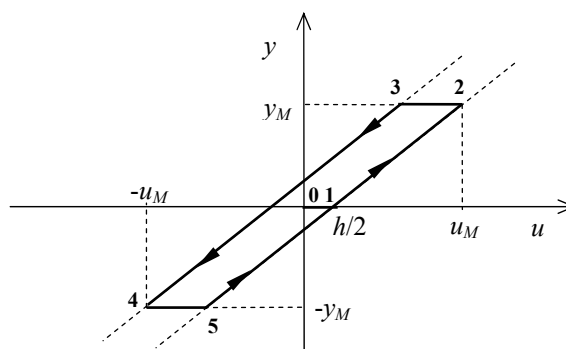


Fig. 1.23 – Característica entrada-saída de um sistema com folga.

Admita-se que o sinal de entrada no sistema com folga é alternado sinusoidal de amplitude u_M . Admita-se ainda que este sinal tem início no instante t_0 como sinal crescente e que no instante inicial a folga se encontra meio vencida. Enquanto a amplitude de u cresce de 0 a $h/2$ vai-se vencer a restante folga e consequentemente a saída y é nula. É a transição 0→1 indicada na figura. Continuando u a crescer, o valor de y vai acompanhar o de u , atrasado de $h/2$, ou, como estamos a admitir ganho 1 (inclinação a 45°), diminuído de $h/2$. É a transição 1→2 indicada na figura.

Convém aqui frisar a diferença entre a histerese e a folga. A histerese é acompanhada de saturação, enquanto na folga a saturação não existe. A folga só se vai manifestar quando u **mudar de sentido**, independentemente da sua amplitude.

O sinal de entrada aumentou até ao seu valor máximo u_M e vai começar a diminuir, de uma forma monótona. Os primeiros instantes da diminuição do sinal de entrada vão ser para compensar a folga, e portanto a saída não varia. Mais concretamente, enquanto u diminui de u_M até $u_M - h$ a amplitude de y mantém-se constante e igual a y_M . É a transição 2→3 da figura. Continuando u a diminuir, o valor de saída irá diminuir, seguindo o ramo 3→4, atingindo-se o ponto 4 quando a amplitude do sinal tiver o seu valor mínimo - u_M . Aqui o sinal de u muda de sentido e, como na transição 2→3, a nova transição 4→5 é destinada a vencer a folga. A resposta y segue agora o ramo 5→1→2, não se voltando ao ponto 0.

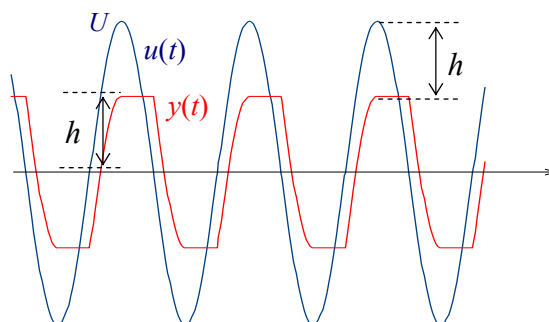
Note-se que na característica da folga são possíveis quaisquer pontos entre as rectas paralelas representadas a traço interrompido, que enquadram o losango apresentado, desde que haja mudança no sentido de u . Repare-se ainda que se a amplitude u_M do sinal de entrada for inferior a $h/2$ a saída y é sempre nula.

Indica-se a seguir a expressão analítica da folga.

$$y = \begin{cases} 0 & 0 \leq u \leq h/2 & 1^\circ \text{ ramo ascendente (inicial)} \\ u - h/2 & h/2 < u < u_M & 1^\circ \text{ ramo ascendente de } u \\ y_M & u_M - h \leq u \leq u_M & 1^\circ \text{ ramo descendente} \\ u + h/2 & -u_M < u < u_M - h & 2^\circ \text{ ramo descendente} \\ -y_M & -u_M \leq u \leq -u_M + h & 2^\circ \text{ ramo ascendente} \\ u - h/2 & -u_M + h < u < u_M & 3^\circ \text{ ramo ascendente} \end{cases} \quad (1.70)$$

Na Fig. 1.24 representa-se a evolução temporal do sinal de entrada, u , e do sinal de saída, y , de um sistema com folga, admitindo a entrada sinusoidal. Repare-se no atraso introduzido e no patamar no sinal de saída.

A folga aparece também em sistemas mecânicos accionados por correntes, sendo notória quando estas não se encontram suficientemente tensas.

Fig. 1.24 – Sinais de entrada e de saída num sistema com folga h .

1.6.5. Atrito Estático

Este tipo de não linearidade, se bem que originário da mecânica, aparece também em dispositivos electro-mecânicos e electrónicos.

A sua descrição elementar pode ser associada ao fenómeno bem conhecido de que para arrastar uma caixa que se encontra em repouso sobre o chão é necessário efectuar uma força maior enquanto esta está em repouso, sendo depois suficiente para manter o movimento, uma força de valor inferior. A expressão analítica que representa a relação entre a força aplicada ao sistema e a sua posição, x , pode escrever-se de uma forma ideal

$$y = \begin{cases} 0, & \dot{x} \neq 0 \\ kF & \dot{x} = 0 \end{cases} \quad (1.71)$$

em que \dot{x} representa a velocidade do corpo pertencente ao sistema com esta característica.

1.6.6. Característica liga/desliga ou “on/off”

Este tipo de não linearidade, representado na Fig. 1.25 tem como descrição analítica:

$$y = \begin{cases} -M, & u < 0 \\ \text{não definido} & u = 0 \\ M & u > 0 \end{cases} \quad (1.72)$$

Em matemática define-se a função **liga/desliga**, $\text{sgn}(x)$, por

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & u < 0 \\ 0, & u = 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases} \quad (1.73)$$

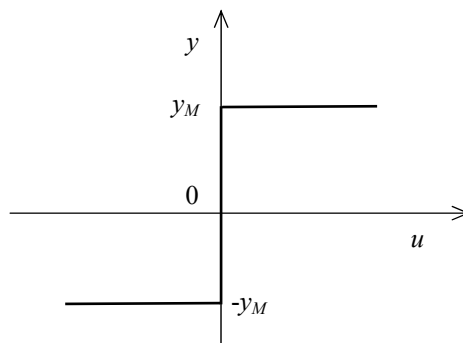


Fig. 1.25 – Característica tipo liga-desliga.

Esta característica é muito utilizada em controladores do tipo **liga/desliga**. Assim, para controlar a temperatura de uma sala que perde calor, utilizando um aquecedor eléctrico, é comum utilizar um controlador que

liga, se a temperatura da sala for menor do que a temperatura desejada,
desliga, se a temperatura for maior do que a temperatura desejada.

A fim de evitar que o contactor que permite o fornecimento de energia ao aquecedor esteja continuamente a actuar é costume associar este tipo de não linearidade à histerese, de forma a ter-se a característica indicada na Fig. 1.26.

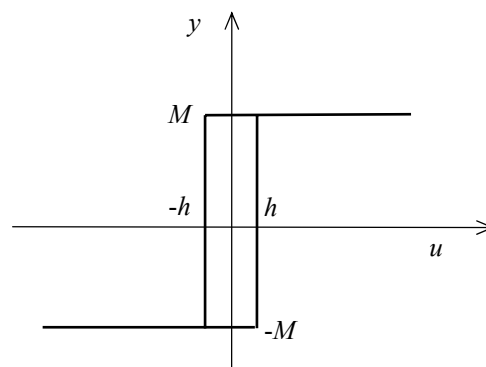


Fig. 1.26 – Característica tipo liga-desliga, com histerese.

A Fig. 1.27 representa o resultado do **controlo de temperatura** de uma sala utilizando um aquecedor eléctrico e um **controlador liga-desliga** com histerese.

Note-se que quanto menor for a zona morta menor é o erro obtido no controlo da temperatura. No entanto este erro pequeno é conseguido à custa de ligar e desligar mais vezes o aquecedor, o que pode diminuir o seu tempo de vida, bem como o do respectivo contactor. Na prática há pois que escolher uma solução de compromisso.

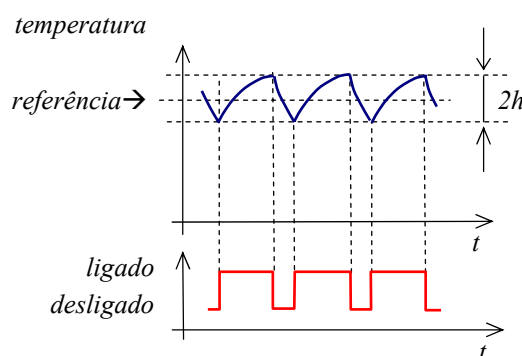


Fig. 1.27 – Controlo liga-desliga, da temperatura de uma sala.

1.7. Problemas resolvidos

Probl. 1.1

Classifique, no que respeita à linearidade/não linearidade, os sistemas descritos pela seguintes equações (t –contínuo, n –discreto):

- | | |
|--|--|
| a) $\dot{y}(t) + 0.1 y(t) = 0.5x^2(t)$ | b) $\dot{y}(t) + 0.1 y(t) = 0.5x(t-2)$ |
| c) $\dot{y}(t) + t y(t) = 0.5x(t)$ | d) $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$ |
| e) $\dot{y}(t) + y(t) = x(t^2)$ | f) $y(t) = 1 + \int_0^t x(\tau) d\tau$ |
| g) $y(n) + 0.2 y(n-1) = x(n)$ | h) $y(n+1) + e^{-j\pi n} y(n) = x(n)$ |

Resolução:

Um sistema linear é todo aquele que satisfaz o princípio da sobreposição:

$$x_1 \rightarrow y_1, x_2 \rightarrow y_2 \Leftrightarrow x = a_1 x_1 + a_2 x_2 \rightarrow y = a_1 y_1 + a_2 y_2$$

- a) Representando o sistema de forma mais abreviada: $\dot{y} + 0.1 y = 0.5x^2$.

Excitado por x_1 origina y_1 tal que $\dot{y}_1 + 0.1 y_1 = 0.5x_1^2$ (1)

Excitado por x_2 origina y_2 tal que $\dot{y}_2 + 0.1 y_2 = 0.5x_2^2$ (2)

Multiplicando a eq.(1) por a_1 , a eq. (2) por a_2 e somando obtém-se

$$\dot{y} + 0.1 y = 0.5(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2) \quad (3)$$

No entanto o sistema excitado por $a_1 x_1 + a_2 x_2$ origina y tal que

$\dot{y} + 0.1 y = 0.5(a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 = 0.5a_1^2 x_1^2 + 0.5a_2^2 x_2^2 + a_1 a_2 x_1 x_2$. Mas esta quantidade é diferente da obtida em (3). Logo o sistema não é linear.

Como critério prático não será necessário utilizar a definição para verificar se o sistema é linear ou não: basta verificar, para que seja não linear, a existência de potências (diferentes de 1), produtos de variáveis de entrada, de saída ou de estado, exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas, etc. Derivadas e integrais são lineares. Adição de constantes originam não linearidades. Um tempo de atraso não implica não linearidade. Utilizando este critério, a presença do termo quadrático $0.5x^2$ indica a não linearidade do sistema.

b) $\dot{y}(t) + 0.1 y(t) = 0.5x(t-2)$. Usando o critério prático que se acaba de expor, constata-se que apenas aparece um atraso. Logo o sistema é linear.

c) $\dot{y}(t) + t y(t) = 0.5x(t)$. O critério exposto não refere o produto pela variável tempo, pelo que se vai utilizar a definição:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 + t y_1 = 0.5x_1 \quad (\times a_1) \\ \dot{y}_2 + t y_2 = 0.5x_2 \quad (\times a_2) \end{array} \right. \\ \hline (a_1 \dot{y}_1 + a_2 \dot{y}_2) + t(a_1 y_1 + a_2 y_2) = 0.5(a_1 x_1 + a_2 x_2) \end{array}$$

Logo, o sistema é linear.

d) $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$. Pelo critério prático apresentado em a) o sistema é linear.

e) $\dot{y}(t) + y(t) = x(t^2)$. Pelo critério prático não há produtos de variáveis de entrada, de saída ou de estado. Mas a variável tempo aparece ao quadrado. Para verificar sobre a linearidade aplique-se a definição:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) + y_1(t) = x_1(t^2) \quad (\times a_1) \\ \dot{y}_2(t) + y_2(t) = x_2(t^2) \quad (\times a_2) \end{array} \right. \\ \hline [a_1 \dot{y}_1(t) + a_2 \dot{y}_2(t)] + [a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)] = [a_1 x_1(t^2) + a_2 x_2(t^2)] \end{array}$$

Logo, o sistema é linear.

f) $y(t) = 1 + \int_0^t x(\tau) d\tau$. Uma vez que há a adição de uma constante a uma variável (ou ao seu integral ou à sua derivada), o sistema é não linear.

g) $y(n) + 0.2y(n-1) = x(n)$. Trata-se de um sistema discreto. Apenas as variáveis são tomadas em instantes distintos ($n, n-1$). Logo o sistema é linear.

h) $y(n+1) + e^{-j\pi n} y(n) = x(n)$. Este problema é análogo ao da alínea c), para o caso discreto. Deixa-se a cargo do leitor utilizar a definição para mostrar que o sistema é linear.

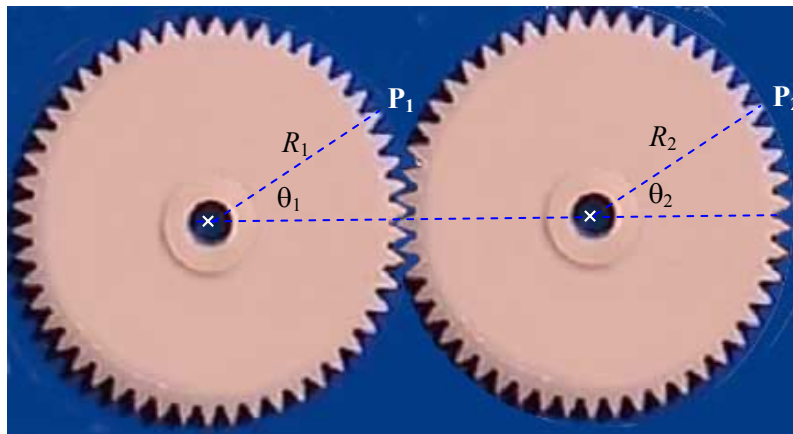
Probl. 1.2

Considere um sistema mecânico constituído por duas rodas dentadas iguais com $3,0^\circ$ de folga. A roda motriz descreve um movimento alternado em rampa (sinal triangular) com a frequência de 0.125 Hz e a amplitude compreendida entre -30° e $+30^\circ$. Designe por θ_1 a posição da roda motriz e por θ_2 a da roda accionada. Admita que no instante inicial $\theta_1=0$ e que a folga se encontra meio vencida.

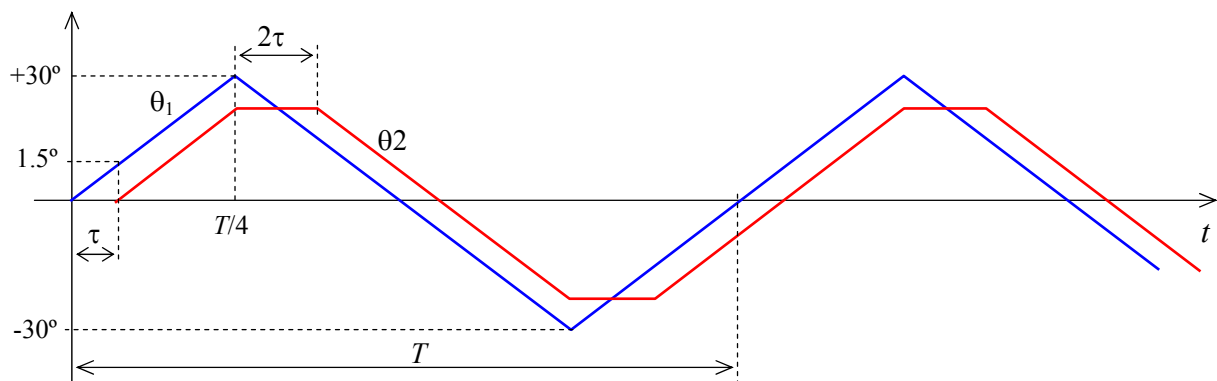
- Escreva as expressões analíticas que representam, nos primeiros 6 segundos, a posição das duas rodas em função do tempo.
- Faça uma representação que mostre a característica $\theta_2(\theta_1)$. Sobre os gráficos represente os valores numéricos correspondentes ao seu problema.
- Qual o atraso, em graus, introduzido por este sistema, e qual a sua não linearidade?

Resolução:

Desenhando as rodas dentadas e as variáveis de posição θ_1 e θ_2 (figura seguinte)



$\theta_1 = \theta_1(t)$, $\theta_2 = \theta_2(t)$, folga $= \alpha$. Na figura as condições iniciais são $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 0$. Supondo $R_1 = R_2$ pode fazer-se a seguinte representação gráfica:



Cálculo de τ : $T = \frac{1}{0.125} \text{s} = 8 \text{s}$. À amplitude de 30° corresponde $T/4 = 2 \text{s}$. Como τ

corresponde a um deslocamento angular de $1,5^\circ$ (ver figura), tem-se

$$\frac{\tau}{T/4} = \frac{1.5}{30} \rightarrow \tau = 0.1 \text{s}.$$

a) Expressão analítica de $\theta_1(t)$ e de $\theta_2(t)$ nos primeiros 6 segundos = $3T/4$ (ver figura):

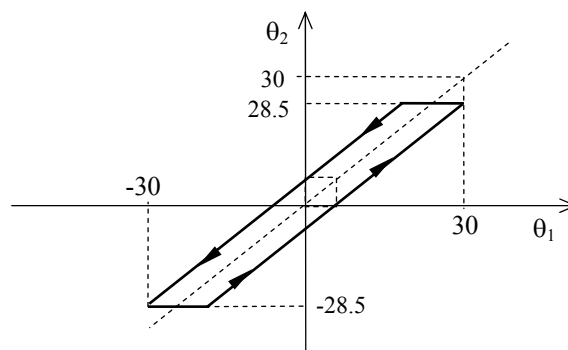
$$\theta_1(t) = \begin{cases} tk & 0 \leq t < T/4 \\ -k(t - T/2) & T/4 \leq t < 3T/4 \end{cases}$$

$$\text{Para } t=T/4 \text{ é } \theta_1=30^\circ \rightarrow k=15^\circ/\text{s e portanto } \theta_1(t) = \begin{cases} 15t & 0 \leq t < 2\text{s} \\ -15(t-4) & 2 \leq t < 6\text{s} \end{cases}$$

A expressão analítica de $\theta_2(t)$ é análoga à de $\theta_1(t)$, com inclinações semelhantes, apenas é preciso tomar em consideração os patamares. Observando a figura pode concluir-se:

$$\theta_2(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 0.1\text{s} \\ 15(t-1) & 0.1 \leq t \leq 2\text{s} \\ 28.5 & 2 \leq t \leq 2.2\text{s} \\ -15(t-4) & 2.2 \leq t \leq 6\text{s} \\ -28.5 & 6 \leq t \leq 6.2\text{s} \end{cases}$$

b) Característica entrada-saída, $\theta_2(\theta_1)$



c) Atraso e não linearidade

O atraso introduzido corresponde a metade da folga: $\tau=0.1 \text{s}$

$$\text{Não linearidade: } NL\% = \frac{\text{desvio}}{\text{curso}} \times 100\% = \frac{1.5}{60} \times 100\% = 2.5\%.$$

Nota: o desvio é o desvio da característica em relação à recta que melhor a aproxima, que na figura se encontra representada a traço interrompido e passando pela origem.

1.8. Problemas propostos

Probl. 1.3

A evolução de uma população é descrita pelo seguinte modelo:

$$\dot{x}(t) = a\left(1 + \frac{x(t)}{c}\right)x(t)$$

em que a e c são constantes positivas.

- Determine analiticamente $x(t)$. Considere $x(0) = x_0 \neq 0$.
- Calcule o tempo de escape do sistema.
- Com o auxílio do MatLab, fazendo $a = 0.5$, $c = 0.5$ e $x_0 = 0.5$, obtenha a solução da equação dada para $0 < t < 10$ s. Utilize a função “ode45”. Faça um gráfico da solução $x(t)$ obtida em a) e compare com o resultado obtido.

Probl. 1.4

Considere a equação seguinte, que representa de uma forma muito simples a velocidade de um veículo subaquático.

$$m\dot{v} + k|v|v = u$$

- Obtenha a solução, para $u = 1$ N, para velocidades positivas e negativas; $v(0)=0$.
- Idem, para $u = 10$ N. Compare os resultados e comente.

Probl. 1.5

Considere um pêndulo simples, ligado por meio de uma haste rígida, sem amortecimento.

- Obtenha um modelo que o represente.
- Determine os seus pontos de equilíbrio, indicando qual a sua estabilidade.
- Em que condições é que o sistema pode ser considerado linear?

Probl. 1.6

Muitos dos sistemas físicos não lineares podem ser descritos por uma equação diferencial de ordem n do tipo

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = f\left[t, y(t), \dot{y}(t), \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, u(t)\right]$$

onde $y(t)$ e $u(t)$ são a saída e a entrada do sistema (escalares).

- Obtenha um modelo de estado para este modelo.
- Indique como determinaria os pontos de equilíbrio.

Sugestão: Utilize como variáveis de estado $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$

Probl. 1.7

Obtenha um modelo de estado para o sistema físico não linear descrito pela equação

$$y^{(n)}(t) = f_1[t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t)] - f_2[t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-2)}(t)]\dot{u}(t)$$

onde $y(t)$ e $u(t)$ são a saída e a entrada do sistema (escalares).

Sugestão: Utilize como variáveis de estado $x_n = y^{(n-1)} - f_2(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-2)})u$

Probl. 1.8

Determine os pontos de equilíbrio dos seguintes sistemas:

a)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 0.2x_1^3 - x_2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.1x_1 - 2x_2 - 0.8x_1^2 - 0.1x_1^3 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2) \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Probl. 1.9

Considere um reservatório para água controlado por um controlador “liga/desliga” com histerese. O reservatório tem um diâmetro de 5 m e uma capacidade de 200 m³. O “set-point” do controlador é de 80 % da altura máxima e a histerese é de 10 cm. Os consumidores debitam uma média de 100 l/s e a alimentação do reservatório, onde se encontra a válvula de controlo, fornece um caudal de 200 l/s. Nestas condições faça uma representação gráfica, completada com valores numéricos, em que se indique

- a) A evolução do nível do tanque.
- b) O caudal de alimentação e a respectiva abertura da válvula.

Probl. 1.10

Considere o sistema discreto representado pela seguinte equação às diferenças:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_2(n) + u(n) \\ x_2(n+1) = 0.3x_1(n) + 0.6\sin[x_2(n)] \end{cases}$$

- a) Obtenha uma representação entrada/saída do sistema, considerando $y(n) = x_2(n)$.
- b) Através da definição, conclua sobre a linearidade do sistema.

2. SISTEMAS DE 2ª ORDEM

2.1. Introdução

Num sistema de 2ª ordem o vector de estado contém apenas duas componentes. Se estes sistemas forem autónomos e sem entradas exteriores, o estudo do vector de estado, que residirá num plano, o **plano de estado**, permite obter uma compreensão global, do comportamento do sistema.

Designem-se as duas componentes da variável de estado por x_1 e x_2 . De uma forma geral $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$. Um sistema deste tipo que admita representação por meio de um modelo de estado, será descrito pelo sistema de **equações de estado escalares**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1[x_1(t), x_2(t)] \\ \dot{x}_2(t) = f_2[x_1(t), x_2(t)] \end{cases} \quad (2.1)$$

com $t \in \mathbb{R}^+$ e f_1 e f_2 funções suaves de x_1 e de x_2 ⁽¹⁾. As equações acima, juntamente com as condições iniciais

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad (2.2)$$

definem a evolução do estado do sistema, ou seja, o seu comportamento.

Embora possa parecer que o estudo desta classe de sistemas é pouco genérica, a sua importância advém de nela estarem representados os regimes livres dos sistemas de 2ª ordem de uma variável de entrada e uma variável de saída, muito comuns na descrição de sistemas físicos.

Designa-se por **órbita** a trajectória de $x(t)$ no espaço das variáveis de estado. Uma vez que o sistema (2.1) utiliza uma variável de estado com apenas duas componentes, que por simplicidade são designadas por **variáveis de estado**, a órbita

$$g(x_1, x_2) = 0 \quad (2.3)$$

é uma **órbita plana**. A sua representação existe e é única.

Ao conjunto de todas as órbitas (mesmo no caso em que há mais de duas variáveis de estado) dá-se o nome de **retrato de fase** do sistema; ao espaço onde as órbitas se encontram definidas chama-se **espaço de fases**.

No caso dos sistemas em estudo, em que a órbita é plana, o espaço de fases é designado por **plano de fases** ou **plano de estado**.

¹ Designa-se **suave** toda a função diferenciável até à ordem que for necessária para os cálculos. Se a função for diferenciável até à ordem p designa-se por função de classe C^p e se for indefinidamente diferenciável designa-se por função de classe C^∞ .

Em sistemas de ordem superior à 2ª não é possível efectuar uma representação gráfica de todo o retrato de fase; o que correntemente se faz é representar as órbitas mais significativas, em número suficiente para se poder concluir, por simples observação, como é que qualquer outra órbita se comportará. A esta representação chama-se **esboço do retrato de fase**. Para se efectuar o esboço do retrato de fase podem utilizar-se métodos analíticos, métodos gráficos ou então métodos numéricos, com o auxílio de um computador. Os métodos que a seguir serão descritos aplicam-se também a sistemas com mais de duas variáveis de estado, embora a complexidade da representação gráfica daí resultante seja elevada. Também se aplicam a sistemas de 1ª ordem, com uma entrada e uma saída, ficando neste caso o retrato de fase reduzido a uma **curva**.

2.2. Análise qualitativa dos sistemas lineares

Considere-se um sistema linear de 2ª ordem, representado pelas equações de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1x_1(t) + b_1x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_2x_1(t) + b_2x_2(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{a)} \\ (2.4) \\ \text{b)} \end{matrix}$$

com $t \in \mathbb{R}^+$ e $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ e constantes. As equações acima, juntamente com as condições iniciais (2.2) definem o comportamento do sistema, ou seja a evolução do seu estado.

(2.4) Para facilitar a obtenção da solução deste sistema faça-se a transformação desta representação numa equação diferencial de 2ª ordem. Derivando (2.4 a), substituindo no resultado \dot{x}_2 dado por (2.4 b), reagrupando, dando novos nomes simplificados às constantes e fazendo $x_1(t) = x(t)$, obtém-se

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x} + cx(t) = 0 \quad (2.5)$$

Para obter a solução desta equação é necessário em primeiro lugar obter as soluções da **equação característica** correspondente,

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2.6)$$

que são

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (2.7)$$

sendo a solução de (2.5) dada por

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{se } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (2.8)$$

ou por

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 t e^{\lambda_1 t} \quad \text{se } \lambda_1 = \lambda_2 \quad (2.9)$$

Os valores das constantes k_1 e k_2 podem ser obtidos a partir das condições iniciais e das equações (2.8)/(2.9) e suas derivadas, fazendo nelas $t = 0$.

Chama-se a atenção para o facto de as raízes do polinómio característico serem os **valores próprios** da matriz **A** do sistema linear (2.4). Consoante os valores que λ_1 e λ_2 possam ter, assim a evolução das soluções. São de salientar os casos analisados a seguir.

2.2.1. Valores próprios distintos ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

2.2.1.1. Nó estável e nó instável

Se λ_1 e λ_2 forem ambos reais e negativos, ou seja se estiverem localizados sobre o eixo real no semiplano complexo esquerdo, as soluções convergem para a origem, que é um ponto de equilíbrio estável. A trajectória no espaço de fases (x, \dot{x}) é a indicada na Fig. 2.1. Diz-se que se trata de um **nó** (ou **nodo**) **estável**. Repare-se nas duas assintotas v_1 e v_2 . A sua inclinação depende da localização de λ_1 e λ_2 . Junto da origem as trajectórias aproximam-se da assintota menos inclinada, enquanto que longe da origem se tornam paralelas à menos inclinada.

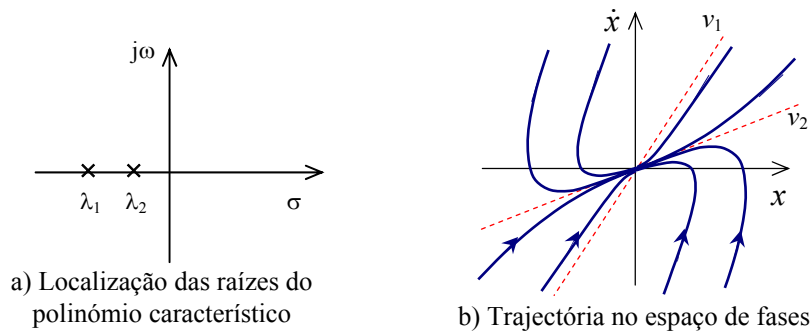


Fig. 2.1 – Nó estável

Se λ_1 e λ_2 forem ambos reais e positivos, ou seja se estiverem localizados sobre o eixo real no semiplano complexo direito, as soluções divergem da origem, que é um ponto de equilíbrio instável. A trajectória no espaço de fases (x, \dot{x}) é a indicada na Fig. 2.2. Diz-se que se trata de um **nó instável**.

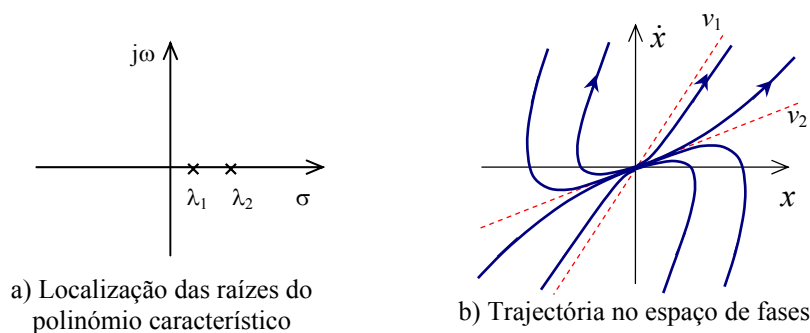


Fig. 2.2 – Nó instável

2.2.1.2. Ponto de sela

Se λ_1 e λ_2 forem ambos reais e de sinais contrários, as soluções no espaço de fases têm o andamento indicado na Fig. 2.3, a que se chama **ponto de sela**. Repare-se que há algumas soluções que começam por se aproximar da origem, mas que acabam por se afastar. A origem é um ponto de equilíbrio instável.

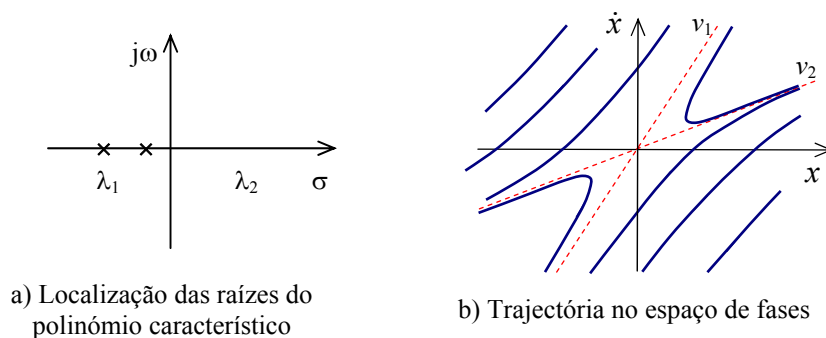


Fig. 2.3 – Ponto de sela

2.2.1.3. Foco estável e foco instável

Se λ_1 for complexo, λ_2 também é complexo e conjugado de λ_1 , como se pode observar por (2.7), para o caso de b e c serem reais. As soluções têm um andamento oscilatório, como se pode provar a partir de (2.8)/(2.9) fazendo $\lambda = \sigma + j\omega$. Se a parte real de λ_1 (igual à de λ_2) for negativa, as soluções convergem para a origem, de uma forma oscilatória. A origem é um ponto de equilíbrio estável, designado por **nó estável** ou **foco estável**. A trajectória no espaço de fases é a indicada na Fig. 2.4.

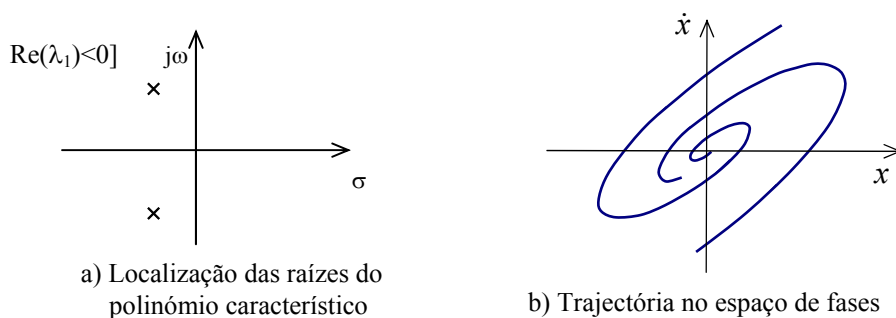


Fig. 2.4 – Foco estável

Se a parte real de λ_1 for positiva as soluções divergem da origem de uma forma oscilatória. A trajectória no espaço de fases é indicada na Fig. 2.5. A origem é um ponto de equilíbrio instável, designado por **nó instável** ou **foco instável**.

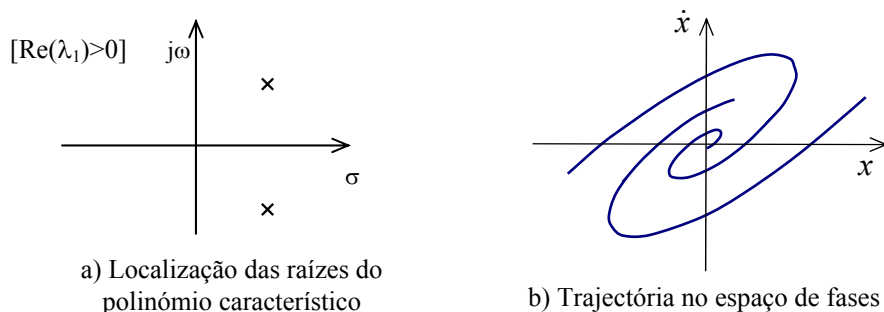


Fig. 2.5 – Foco instável

2.2.1.4. Centro

Se λ_1 e λ_2 forem complexos conjugados com a parte real nula, as soluções são oscilatórias, sem amortecimento ou expansão. As soluções mantêm a amplitude constante, não convergindo para a origem nem se afastando delas como se observa pela órbita da Fig. 2.6. A origem é um ponto de equilíbrio criticamente estável, designado por **centro**.

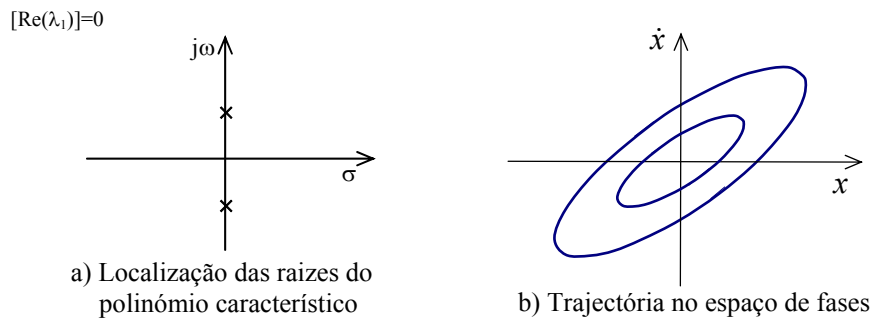


Fig. 2.6 – Centro

2.2.1.5. Um dos valores próprios nulo

Se um dos valores próprios for nulo, as soluções degeneram em rectas (Fig. 2.7).

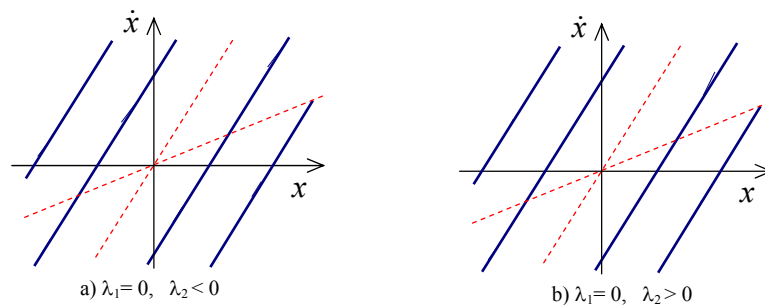


Fig. 2.7 – Um valor próprio nulo

2.2.2. Valores próprios iguais ($\lambda_1=\lambda_2$)

Quando os valores próprios são iguais eles são necessariamente reais. As soluções obtêm-se a partir da equação (2.9). Podem surgir os casos a seguir indicados.

2.2.2.1. Valor próprio duplo diferente de zero

Se o valor próprio for negativo as trajectórias convergem para a origem. A forma das trajectórias depende dos valores das constantes k_1 e k_2 em (2.9)b). Se for $k_1=0$ e $k_2\neq 0$ as órbitas são as representadas na Fig. 2.8^a, para $\lambda<0$. Se se tiver $k_1\neq 0$ e $k_2=0$ as trajectórias no espaço de fases são as da Fig. 2.8b, para $\lambda<0$. A origem é estável.

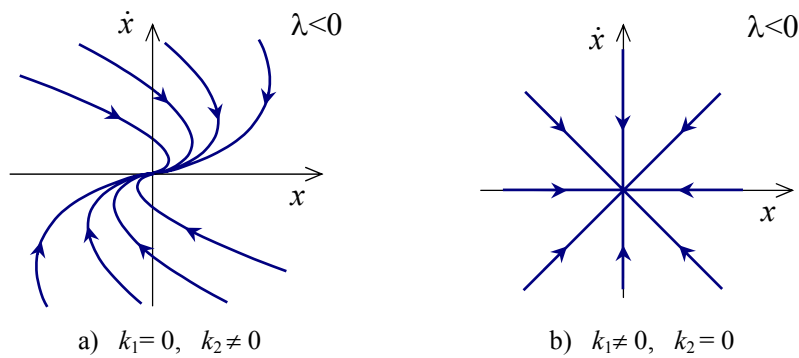


Fig. 2.8 – Valor próprio duplo não nulo, negativo

Se o valor próprio for positivo as trajectórias divergem da origem. A forma das trajectórias continua a depender dos valores de k_1 e k_2 (Fig. 2.9). A origem é instável.

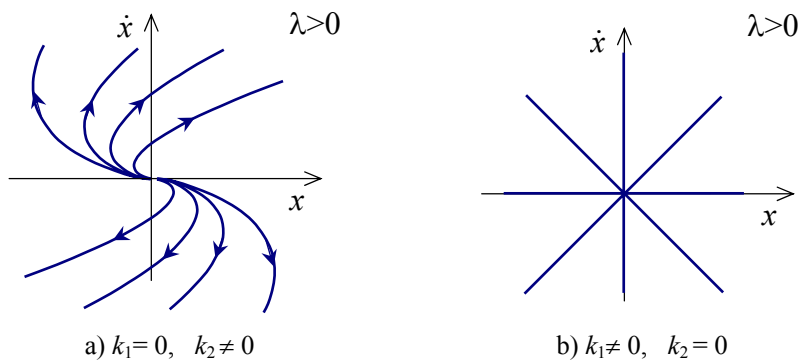


Fig. 2.9 – Valor próprio duplo não nulo, positivo

2.2.2.2. Valor próprio duplo nulo

Se o valor próprio for duplo e nulo, as trajectórias são paralelas a uma recta que passa pela origem (Fig. 2.10).

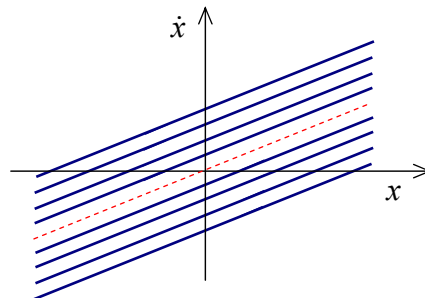


Fig. 2.10 – Valor próprio duplo nulo

2.3. Ciclos limite

Chamam-se **ciclos limite** às oscilações que se podem estabelecer, com amplitude frequência e forma bem definidas, sem que o sistema esteja sujeito a qualquer solicitação externa. Estas oscilações, **auto-excitadas** a partir do ruído ou de pequenas perturbações, são, como se disse na secção 1.3.8, uma característica de alguns sistemas não lineares, e nunca podem aparecer em sistemas lineares.

Num sistema de 2ª ordem um ciclo limite define, no plano de estado, uma **curva fechada** que divide o plano de estado em duas regiões: uma região interior ao ciclo limite e uma outra exterior ao ciclo limite.

2.3.1. Classificação dos ciclos limite

Consoante o comportamento das trajectórias que se iniciem próximo do ciclo limite, assim a sua classificação. Podem ter-se ciclos limite estáveis, instáveis ou semi-estáveis.

2.3.1.1. Ciclo limite estável

Um ciclo limite é **estável** quando é uma curva fechada para a qual tendem as diversas trajectórias que se iniciam numa determinada região (**região de atracção** do ciclo limite). As trajectórias podem iniciar-se dentro ou fora do ciclo limite, ou então sobre este, como se indica na Fig. 2.11a). Repare-se na **diferença entre ciclo limite e trajectória fechada**, por exemplo a trajectória da Fig. 2.6, correspondente a um sistema massa mola sem amortecimento. Nesta última, a trajectória depende das condições iniciais: para diversas condições iniciais assim se terão diferentes trajectórias. Com um ciclo limite tal não acontece: quaisquer que sejam as condições iniciais as trajectórias iniciadas numa determinada região de atracção vão tender sempre para o mesmo ciclo limite.

2.3.1.2. Ciclo limite instável

Um ciclo limite é **instável** quando qualquer trajectória que se inicie na sua vizinhança se afasta dele – ver Fig. 2.11b). Apenas as trajectórias que sobre ele se iniciam nele permanecem. No entanto, mesmo estas, devido à existência de ruído ou de pequenas perturbações, acabam por “descolar” do ciclo limite e divergir dele.

2.3.1.3. Ciclo limite semi-estável

Um ciclo limite é **semi-estável** quando qualquer trajectória que se inicie na sua vizinhança se comporta de modo diferente, como estável ou como instável, consoante se inicie no interior ou no exterior do ciclo limite. No exemplo da Fig. 2.11c) as trajectórias que se iniciam no exterior do ciclo limite tendem para ele, e as que se iniciam no seu interior divergem dele. Claro que devido à existência de ruído ou de pequenas perturbações mais tarde ou mais cedo, no caso da Fig. 2.11c), uma trajectória que se inicie no exterior de um ciclo limite deste tipo acaba por “atravessar” o ciclo para o seu interior e afastar-se dele. Um ciclo limite semi-estável pode ser **estável interno** ou **estável externo**.

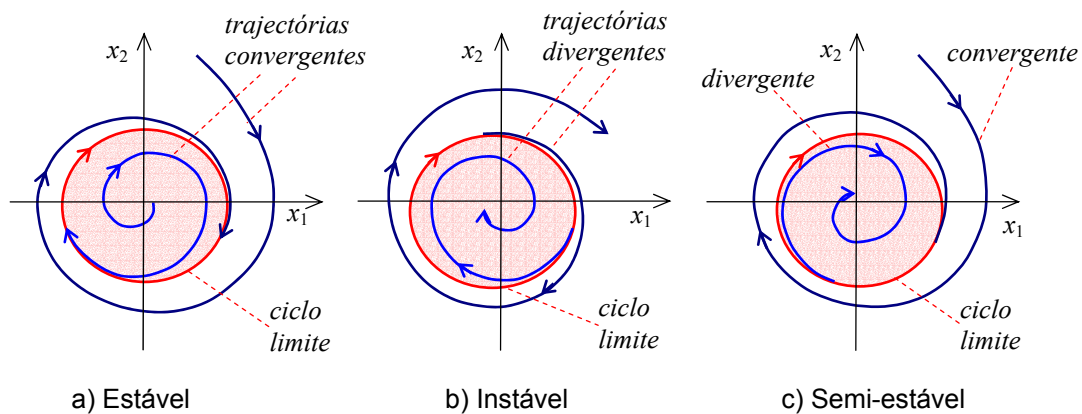


Fig. 2.11 – Tipos de ciclos limite

2.3.2. Existência de ciclos limite

Os teoremas que se seguem estabelecem as **condições de existência** de ciclos limite, a partir do conhecimento dos pontos de equilíbrio e do seu tipo.

Seja o sistema não linear autónomo representado por (2.1), com as condições iniciais (2.2). São válidos os seguintes teoremas:

2.3.2.1. Teorema de Poincaré⁽²⁾

Considerem-se os pontos de equilíbrio do sistema numa determinada região Ω do espaço de fases e designe-se por

- N – o número de nós, centros ou focos interiores a Ω ,
- S – o número de pontos de sela.

É condição necessária para a existência de um ciclo limite que

$$N = S + 1 \quad (2.10)$$

A demonstração pode ser encontrada em [3–Isidori].

Como **corolário** deste teorema tem-se se $S = 0$, $N = 1$, ou seja, um ciclo limite envolve necessariamente pelo menos um ponto de equilíbrio.

2.3.2.2. Teorema de Poincaré-Bendixon

Se uma trajectória do sistema não linear autónomo de 2ª ordem, representado por (2.1) permanecer no interior de uma região Ω do espaço de estados, finita, então verifica-se um dos três casos seguintes:

- A trajectória tende para um ponto de equilíbrio estável,
- A trajectória tende para um ciclo limite estável,
- A trajectória é um ciclo limite.

² Henri Poincaré, Matemático francês, 1854-1912

2.3.2.3. Teorema de Bendixon

Seja o sistema não linear autónomo de 2ª ordem, representado por (2.1). Represente-se o sistema na forma vectorial, mais compacta,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] \quad (2.11)$$

O teorema de Bendixon afirma o seguinte: É condição necessária para a existência de um ciclo limite, numa região Ω do plano de fase, que

$$\text{div } \mathbf{f} \triangleq \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (2.12)$$

não amortença e que mude de sinal. (a definição de $\text{div } \mathbf{f}$ está na sub-secção seguinte)

Demonstração: Para qualquer trajectória do sistema tem-se

$$f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0 \quad (2.13)$$

Nestas condições, integrando (2.13) ao longo de uma curva fechada L que coincida com o ciclo limite deverá ser

$$\int_L (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = 0 \quad (2.14)$$

Mas pelo teorema de Stokes é, representando por S a área delimitada pelo ciclo limite,

$$\int_L (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.15)$$

(Considere-se, para o efeito $\mathbf{F} = (-f_2, f_1, 0)$ e calcule-se $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ e $\text{rot} \mathbf{F}$). Para que o integral de superfície seja nulo é necessário que o integrando, se for diferente de zero e não amortecido mude de sinal. (O integrando é $\text{div } \mathbf{f}$). Se o integrando for amortecendo a trajectória tende para o ponto de equilíbrio zero e não haverá ciclo limite, a oscilação é amortecida. Se o integrando for nulo, nem sequer há oscilação.

2.3.2.4. Nota sobre alguns operadores vectoriais

Um **campo vectorial** $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é representado por um vector coluna de comprimento n e componentes $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$, ..., $f_n(\mathbf{x})$, em que \mathbf{x} representa a variável de estado (vector coluna).

Considere-se o vector simbólico ∇ , designado por *del* ou *nabla*:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (2.16)$$

Define-se **gradiente** de uma função escalar $h(\mathbf{x})$,

$$\text{grad } h(\mathbf{x}) \equiv \nabla h(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) \quad (2.17)$$

O gradiente define-se para um **campo escalar** e é um **campo covectorial** (vector linha).

Define-se **divergência** de um campo vectorial $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, por

$$\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \quad (2.18)$$

A divergência define-se para um campo vectorial e é um campo escalar.

2.4. Obtenção da trajectória

2.4.1. Métodos analíticos

Os métodos analíticos são utilizados para a obtenção das trajectórias no plano de fases quando a solução analítica da equação de estado é relativamente fácil de obter. A essência do método consiste em obter a solução explícita do sistema (2.1) em função do tempo,

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases} \quad (2.19)$$

e em seguida eliminar a variável t entre as equações obtidas, ficando-se com uma relação do tipo (2.3).

Exemplo 2.1 – Sistema linear massa-mola

Seja um sistema mecânico constituído por uma massa ligada a uma mola, como indicado na Fig. 2.12. Este sistema é um caso particular daquele que é apresentado adiante no Cap.7; aqui a mola é linear e não há atrito.

O corpo pode deslocar-se apenas segundo a direcção x . Com o sistema em repouso o corpo encontra-se na posição $x=0$ e a resultante das forças que sobre ela actuam é nula. A força exterior que sobre ele actua, resultante da deformação da mola, tem o valor

$$f = -kx \quad (2.20)$$

Desloque-se o bloco para a posição x_0 e a seguir liberte-se o mesmo. Este tenderá a voltar para a posição inicial.

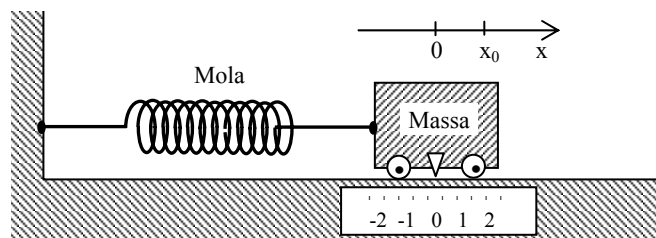


Fig. 2.12 – Sistema massa-mola

De acordo com a 2ª lei de Newton a massa ficará sujeita a uma aceleração \ddot{x} tal que

$$f = m\ddot{x} \quad (2.21)$$

Combinando (2.20) com (2.21) obtém-se

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.22)$$

que admite como solução

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.23)$$

com
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.24)$$

Tomando para variáveis de estado x e \dot{x} tem-se

$$\dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad (2.25)$$

Eliminando t entre (2.23) e (2.25) obtém-se

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} = x_0^2 \quad (2.26)$$

que é a equação de uma elipse. A Fig. 2.13 representa estas elipses para diversos valores de x_0 para $m = 1$ kg e $k = 10$ N/m, ou seja, representa o retrato de fase.

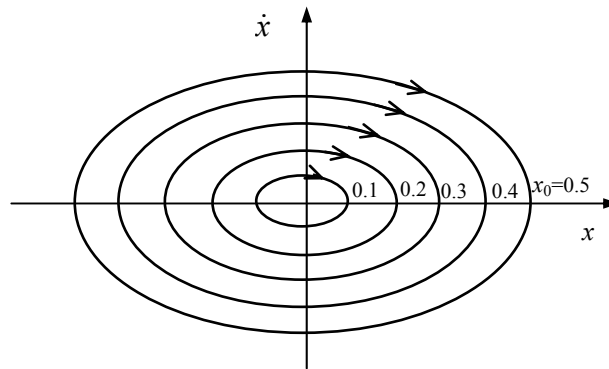


Fig. 2.13 – Trajectórias no espaço de fases – sistema massa/mola

Exemplo 2.2 – Sistema não linear de 2ª ordem

Seja o sistema não linear de 2ª ordem

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 = 0 \quad (2.27)$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = C$. Tomando para variáveis de estado $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ pode escrever-se

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^2 \end{cases} \quad (2.28)$$

com $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = C$. A partir de (2.28) obtém-se

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{1}{x_2} \quad (2.29)$$

que integrada conduz a

$$x_2 = Ce^{-x_1} \quad (2.30)$$

e que se encontra representada na Fig. 2.14 para diversos valores de C . Repare-se na convergência exponencial para zero quando $C > 0$ e na divergência exponencial quando $C < 0$.

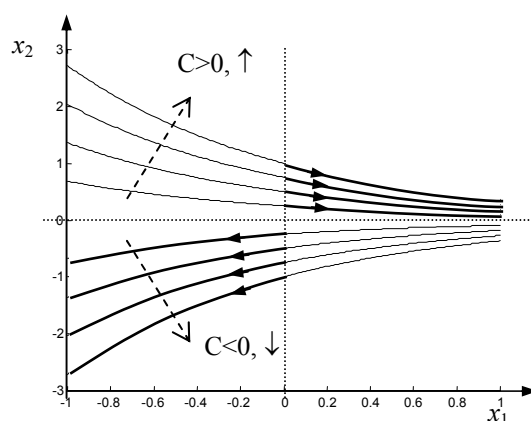


Fig. 2.14 – Trajectórias no espaço de fases

Exemplo 2.3 – Controlo de um satélite.

Neste modelo, muito simplista, pretende-se controlar a posição angular θ de um satélite, obrigando-o a rodar em torno de um eixo por meio de um par de propulsores, como indicado na Fig. 2.15.

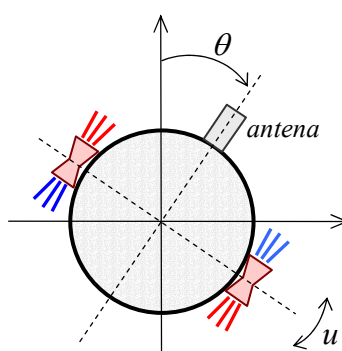


Fig. 2.15 – Esquema do satélite

Os propulsores podem fornecer um **binário** u de amplitude U constante, que pode ser positivo ou negativo, consoante o sentido dos jactos. O objectivo do controlo é manter a antena num determinado ângulo de referência θ_R , através de uma manipulação conveniente dos propulsores. O satélite pode ser considerado como um corpo rígido que se move em torno do seu centro de massas. Designando por J o momento de inércia do satélite em torno do seu centro de gravidade, θ a posição angular da antena e por u o binário propulsor, as equações do movimento permitem escrever

$$J\ddot{\theta} = u \quad (2.31)$$

O binário dos propulsores depende do erro θ por meio da expressão

$$u(t) = \begin{cases} -U & \theta > 0 \\ +U & \theta < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Na Fig. 2.16, a seguir, encontra-se representada a cadeia da controlo deste satélite.

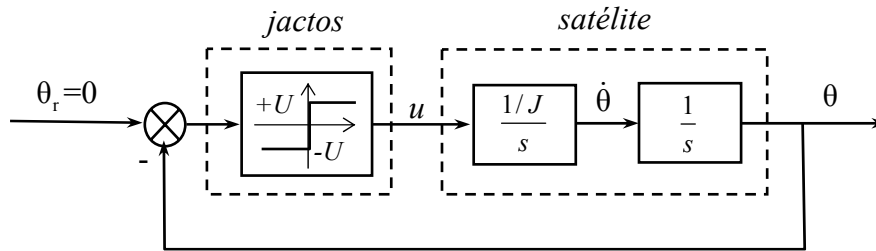


Fig. 2.16 – Controlo do satélite

Para a construção do esboço do retrato de fase consideram-se separadamente os casos em que o erro θ é positivo e negativo.

Erro negativo: Neste caso o binário propulsor é positivo e toma o valor $+U$. A expressão (2.31) escreve-se

$$J\ddot{\theta} = U \quad (2.33)$$

que admite como solução no plano de fase $(\theta, \dot{\theta})$

$$J\dot{\theta}^2 = 2U\theta + C \quad (2.34)$$

onde C é uma constante que depende das condições iniciais.

A equação (2.34) representa um conjunto de parábolas com o foco sobre o eixo θ e concavidade voltada para a direita, como se indica na Fig. 2.17, semiplano esquerdo.

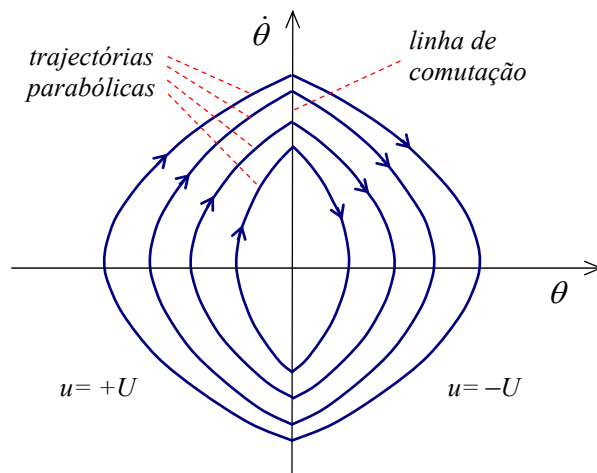


Fig. 2.17 – Retrato de fase do satélite

Erro positivo: De um modo análogo ao anterior obtém-se

$$J\dot{\theta}^2 = -2U\theta + C \quad (2.35)$$

que é um conjunto de parábolas com o foco sobre o eixo θ e concavidade para a esquerda.

O retrato de fase completo obtém-se juntando os dois diagramas anteriores. A comutação entre os diagramas faz-se exactamente sobre o eixo dos $\dot{\theta}$, que corresponde à mudança de sinal do erro. Repare-se que partindo de um estado inicial qualquer o satélite irá oscilar em torno da posição de referência. A convergência da oscilação para zero poderá ser feita com a introdução de realimentação da velocidade angular.

Há um grande número de sistemas que podem ser descritos por uma equação diferencial de 2ª ordem do tipo

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (2.36)$$

Para representá-los no espaço de estados efectuem-se as substituições

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases} \quad (2.37)$$

ficando-se com a equação de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.38)$$

Foi o estudo deste tipo de sistemas que contribuiu para o desenvolvimento da representação no plano de fase.

2.4.2. Métodos gráficos

Os métodos gráficos tiveram um grande desenvolvimento quando não se dispunha de meios eficazes para obter a solução da equação de estado de um sistema. Entende-se por meios eficazes os que actualmente se utilizam, baseados em **métodos numéricos**, disponíveis para **computador**, e que permitem a obtenção da solução da equação de estado para um sistema de ordem n .

Os métodos gráficos permitem apenas e de uma forma simples a obtenção do esboço do retrato de fase aproximado de sistemas com uma equação de estado com dimensão $n=2$, mas mais genéricas do que (2.38), do tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.39)$$

Os métodos gráficos dispensam a resolução analítica da equação acima. De entre os diversos métodos gráficos têm uma certa importância o **método das isoclínicas** e o **método delta**. Estudar-se-á apenas o primeiro.

O sistema (2.39) pode escrever-se na forma

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (2.40)$$

O primeiro membro de (2.40) representa a inclinação da trajectória no plano (x_1, x_2) . Dá-se o nome de **isoclínica** ao conjunto de pontos do plano (x_1, x_2) tais que $dx_1/dx_2 = \alpha = \text{constante}$. A isoclínica α é pois constituída pelo conjunto de pontos com igual declive α . Traçando as isoclínicas correspondentes a diversos valores de α obtém-se o campo de direcções das tangentes às trajectórias, o que permite determinar, de um modo aproximado, as próprias trajectórias. O método pode ser mais bem compreendido por meio de um exemplo.

Exemplo 2.4 – Sistema de 2ª ordem com amortecimento.

Considere-se um sistema linear de 2ª ordem descrito pela equação:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = 0 \quad (2.41)$$

Efectuando as mudanças de variável $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ obtém-se o modelo de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\xi\omega x_2 - \omega^2 x_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.42) \\ \text{a)} \\ \text{b)} \end{matrix}$$

Dividindo (2.42b) por (2.42a) obtém-se:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -2\xi\omega - \omega^2 \frac{x_1}{x_2} \quad (2.43)$$

e fazendo $\frac{dx_2}{dx_1} = \alpha$ (isoclínica α), obtém-se a equação de uma recta, no plano (x_1, x_2) .

$$x_2 = -\frac{\omega^2}{2\xi\omega + \alpha} x_1 \quad (2.44)$$

Particularizando para os valores de $\omega = 1$ e $\xi = 0.5$ vem,

$$x_2 = -\frac{1}{1 + \alpha} x_1 \quad (2.45)$$

À equação (2.45) correspondem, para diversos valores de α , as isoclínicas que se representam na Fig. 2.18. Para a obtenção das trajectórias procede-se do seguinte modo:

1. Parte-se do valor (x_1, x_2) correspondente às condições iniciais $x_1(0)$ e $x_2(0)$. No exemplo da figura admite-se $x_1(0) = 0$, e $x_2(0) = 1$, a que corresponde o ponto A .
2. A inclinação da trajectória é dada pela média aritmética das inclinações associadas às isoclínicas vizinhas. Assim, a inclinação do troço de trajectória situado entre as isoclínicas $\alpha = -1$ e $\alpha = -1.2$ é aproximadamente $(-1 - 1.2)/2 = -1.1$. O ponto B é determinado pela intersecção da recta que parte de A com inclinação -1.1 , com a isoclínica $\alpha = -1.2$. O segmento \overline{AB} constitui assim um troço aproximado da trajectória.

3. De um modo análogo ao anterior se obtêm os troços \overline{BC} e seguintes, obtendo-se a curva A B C D E ... O.

Este método de construção pode levar à acumulação de erros, nomeadamente no caso de sistemas não lineares em que as trajectórias tenham inclinações que podem variar muito rapidamente.

O método das isoclínicas é de utilização fácil sempre que as isoclínicas são rectas. Quando tal não acontece poderá ser mais conveniente a utilização de um outro método gráfico, o método delta, que permite obter as trajectórias por meio da sequência de arcos circulares cujos centros se situam ao longo do eixo dos x .

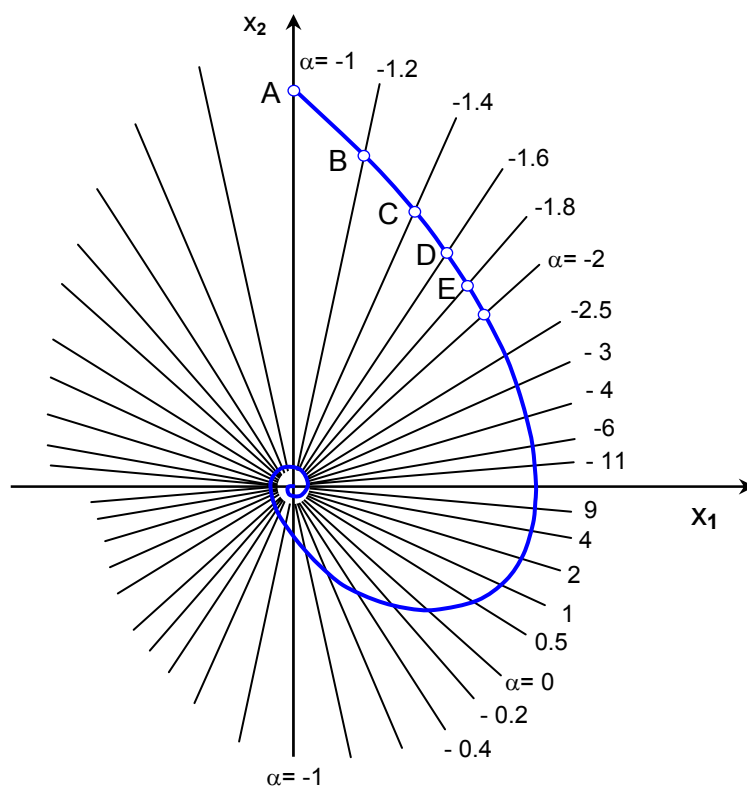


Fig. 2.18 – Traçado da trajectória pelo método das isoclínicas

2.5. Problemas resolvidos

Probl. 2.1

Considere o sistema massa-mola-amortecedor, descrito pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

em que m representa a massa do corpo, b o coeficiente de amortecimento, k a constante da mola e x a posição da massa.

- Obtenha um modelo de estado para o sistema.
- Determine os seus pontos de equilíbrio.
- No caso em que não há amortecimento determine analiticamente a trajectória descrita pelas variáveis de estado, partindo das condições iniciais $x_0=0.2$ m e $\dot{x}_0=0$ m/s.
- Faça a representação da trajectória sobre o plano de fase. Existe alguma diferença entre esta trajectória e um ciclo limite?
- Para um sistema não linear com pontos de equilíbrio semelhantes aos obtidos, conclua sobre a existência de um ciclo limite, com o auxílio dos teoremas de Poincaré e de Bendixon.

Resolução:

- $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$. Efectuando as mudanças de variável $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$ obtém-se a equação de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 \end{cases}$$

O modelo de estado ficaria completo com a equação de saída $y = C^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(eventualmente $y=x_1$) e com as condições iniciais $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$, que de momento não são dadas.

$$\text{b) Pontos de equilíbrio: } \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Este resultado era de esperar, pois tratando-se de um sistema linear o único ponto de equilíbrio é a origem do espaço de estados.

- Não havendo amortecimento é $b=0$, ficando a equação diferencial do sistema reduzida a $m\ddot{x} + kx = 0$. A equação característica é $\lambda^2 + k/m = 0$, que admite como soluções $\lambda = \pm j\sqrt{k/m}$. Uma vez que m e k são positivos, há dois pólos sobre o eixo imaginário. Uma vez que os pólos são distintos a solução $x(t)$ é dada por (2.8):

$$x(t) = k_1 e^{j\omega_n t} + k_2 e^{-j\omega_n t} = k_1 e^{j\sqrt{k/m}t} + k_2 e^{-j\sqrt{k/m}t}$$

Note-se que $\sqrt{k/m}$ tem as dimensões do inverso do tempo. Fazendo $\sqrt{k/m} = \omega_0$ e atendendo à fórmula de Euler, $e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$, resulta

$$x(t) = (k_1 + k_2) \cos(\omega_0 t) + j(k_1 - k_2) \sin(\omega_0 t)$$

As constantes k_1 e k_2 obtêm-se a partir das condições iniciais. Como estas fazem intervir $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, derive-se $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = -\omega_0(k_1 + k_2) \sin(\omega_0 t) + j\omega_0(k_1 - k_2) \cos(\omega_0 t) \text{ . Para } t=0 \text{ será}$$

$$x(0) = (k_1 + k_2) \text{ e } \dot{x}(0) = j\omega_0(k_1 - k_2) \text{ . Para as condições iniciais dadas fica}$$

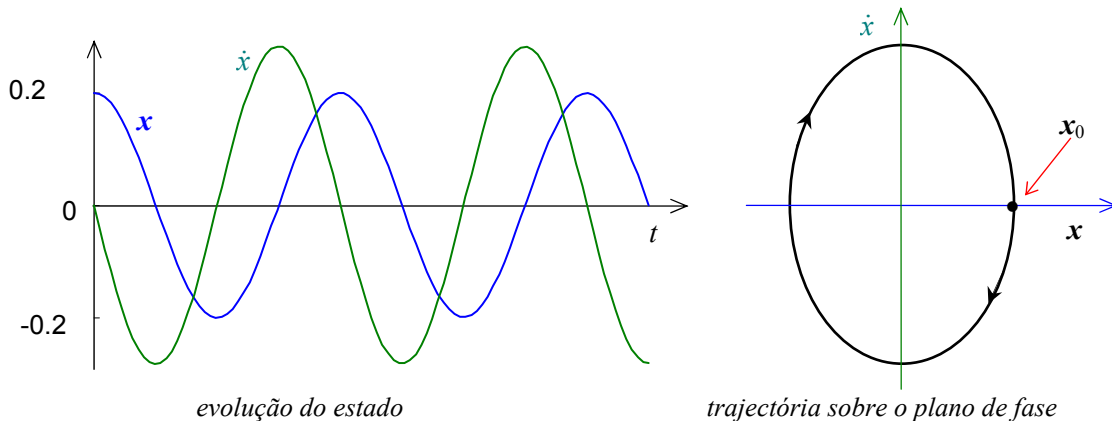
$$k_1 + k_2 = 0.2 \text{ e } j\omega_0(k_1 - k_2) = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = 0.1 \text{ . Finalmente fica}$$

$$\begin{cases} x(t) = 0.2 \cos(\omega_0 t) \\ \dot{x}(t) = -0.2 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

Eliminando t entre estas duas equações obtêm-se a equação da trajectória:

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} = (0.2)^2$$

- d) A trajectória obtida representa uma elipse, de eixos 0.2 e $0.2\omega_0$. Repare-se que os eixos da elipse dependem das condições iniciais. Nas figuras representa-se a evolução do estado e o plano de fase.



Existe uma grande diferença entre esta trajectória e um ciclo limite. Embora esta trajectória seja fechada e se repita sobre ela própria, o seu tamanho depende das condições iniciais, enquanto que num ciclo limite a forma deste é independente das condições iniciais: de onde quer que se parta, dentro da bacia de atracção, é-se conduzido sempre ao mesmo ciclo limite, com a mesma forma e dimensões.

- e) Há apenas um ponto de equilíbrio, que é um centro. De acordo com o exposto atrás em 2.3.2 será $N=1$ e $S=0$. Pelo teorema de Poincaré está satisfeita a condição necessária para a existência de um ciclo limite ($N=S+1$). Poderá pois haver ciclo limite, mas não quer dizer que haja. A condição é necessária mas não é suficiente. Para aplicar o teorema de Bendixon escreva-se o modelo de estado na forma matricial e calcule-se $\text{div } \mathbf{f}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{div} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{k}{m}x_1 \right) = 0 + 0 = 0$$

A condição necessária para que haja ciclo limite é que $\text{div} \mathbf{f}$ não amortença e mude de sinal. Neste caso, ao ser nula, não muda de sinal nem amortece. Logo, não pode haver ciclo limite.

Probl. 2.2

Considere o sistema descrito pela equação de Van der Pol

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + kv = 0$$

em que ε e k são constantes reais, positivas (v é a tensão de saída do sistema).

- Obtenha um modelo de estado para o sistema.
- Determine os seus pontos de equilíbrio.
- Com o auxílio dos teoremas de Poincaré e de Bendixon conclua sobre a existência de ciclos limite.
- Com o auxílio de um PC obtenha a trajectória para as condições iniciais $v = 0$, $\dot{v} = 0$, num oscilador com $\varepsilon = 1.0$ e $k = 1.0$.

Resolução:

- a) Efectuando as mudanças de variável $x_1 = v$ e $x_2 = \dot{v}$ obtém-se a equação de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - kx_1 \end{cases}, \text{ ou, na forma matricial, } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - kx_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) Pontos de equilíbrio: } \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Para caracterizar o ponto de equilíbrio obtido vai ver-se como é o sistema linearizado obtido a partir deste.

$$\text{Sistema linearizado: } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$$

Cálculo de A:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} [\varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - kx_1] & \frac{\partial}{\partial x_2} [\varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - kx_1] \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\varepsilon x_1 x_2 - k & \varepsilon(1 - x_1^2) \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Esta matriz admite como valores próprios $\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4k}}{2}$ que não são do tipo ponto de sela. De acordo com o exposto atrás em 2.3.2 será $N=1$ e $S=0$. Pelo teorema de Poincaré está satisfeita a condição necessária para a existência de um ciclo limite, ($N=S+1$). Poderá pois haver ciclo limite.

$$\text{Calcule-se div } \mathbf{f}: \quad \text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} [\varepsilon(1 - x_1^2)x_2 - kx_1] = \varepsilon(1 - x_1^2)$$

Esta quantidade muda de sinal e não é amortecida, logo, pelo teorema de Bendixon, pode haver um ciclo limite.

2.6. Problemas propostos

Probl. 2.3

Considere o sistema autónomo, em regime livre

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 \end{cases}$$

- Determine os pontos de equilíbrio e caracterize-os.
- Trace de forma aproximada, usando o método das isoclínicas, o seu retrato de fase.

Probl. 2.4

Dado o sistema contínuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 \end{cases}$$

- Determine os seus pontos de equilíbrio.
- Aplicando o teorema de Bendixon, conclua sobre a possibilidade haver ciclos limite.
- Qual a diferença entre um ciclo limite e a trajetória, sobre o plano de fase, do sistema massa-mola linear sem amortecimento?

Probl. 2.5

Utilizando o método das isoclínicas esboce o retrato de fase dos sistemas descritos por

- $\ddot{x} + \dot{x} + 0.5x = 0$
- $\ddot{x} + \dot{x} + 0.5x = 1$

Confirme os resultados obtidos utilizando o computador.

Probl. 2.6

Utilizando o método das isoclínicas obtenha o esboço do retrato de fase do movimento do pêndulo gravítico sem atrito, a que corresponde a equação diferencial $\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$.

Nota: Repare que as isoclínicas são funções sinusoidais.

3. FUNDAMENTOS DA TEORIA DE LYAPUNOV

3.2. Introdução

Quando se projecta ou se estuda um sistema de controlo, um dos pontos importantes que é necessário ter em conta é a sua **estabilidade**. De uma forma geral deve-se garantir que o sistema seja estável. Com efeito, um sistema instável além de ser difícil de controlar é potencialmente perigoso, se a energia a ele associado for elevada. Um sistema instável pode por exemplo conduzir ao voo descontrolado de um avião (e à sua eventual queda), ou ao rebentamento de um reactor químico.

O problema da estabilidade apareceu desde cedo na história do controlo automático com o regulador automático de Watt⁽¹⁾, sistema mecânico baseado no pêndulo cónico, destinado a estabilizar a velocidade da máquina a vapor. Este dispositivo constitui um sistema de controlo não linear.

O primeiro trabalho teórico sobre a estabilidade de sistemas de controlo não lineares foi publicado por Lyapunov em 1892 na sua tese de doutoramento, com o título “The General Problem of Motion Stability”. Nele é determinado o comportamento de sistemas não lineares com o auxílio de uma função escalar com características semelhantes à energia associada ao sistema, que hoje se designa por **função de Lyapunov**.

O trabalho de Lyapunov foi traduzido para Francês em 1908, e foi reimpresso apenas em 1947, pela Universidade de Princeton. Só nos anos 60 é que este trabalho atraiu a atenção da comunidade científica, tendo a partir daí sido completado e desenvolvido.

Neste capítulo serão introduzidos conceitos que não têm correspondência nos sistemas lineares referentes aos pontos de equilíbrio e estabilidade, são apresentados o método da linearização de Lyapunov, muitas vezes designado por 1º método, e o método directo de Lyapunov, conhecido também como 2º método.

3.3. Pontos de equilíbrio e estabilidade

3.3.1. Sistemas autónomos em regime livre

Viu-se no capítulo 1, secções 1.5.1 e 1.5.2, que um sistema não linear, contínuo ou discreto, pode ser representado por um sistema de equações vectoriais, designado por **modelo de estado** do sistema. Para um sistema contínuo determinístico o modelo de estado escreve-se

¹ James Watt, Mecânico Escocês, 1736-1819.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] & \text{a)} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] & \text{(3.1b)} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 & \text{c)} \end{cases}$$

em que $\mathbf{x} \in D_x \subset \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{u} \in D_u \subset \mathfrak{R}^p$, $\mathbf{y} \in D_y \subset \mathfrak{R}^q$ e $t \in \mathfrak{R}^+$. Para um sistema discreto as equações têm uma escrita semelhante.

Estudar-se-á a estabilidade de sistemas não submetidos a excitações exteriores \mathbf{u} , ou seja, em *regime livre*, e em cadeia fechada, em que existe uma lei de realimentação de estado,

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

Uma vez que o estado de um sistema define o seu comportamento, vai de momento concentrar-se a atenção para a descrição do estado do sistema efectuada pela equação de estado (3.1 a), sujeitos às condições iniciais (3.1 c). Considerando sistemas em cadeia fechada, com a realimentação de estado (3.2), pode escrever-se:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] & \text{a)} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 & \text{(3.3 b)} \end{cases}$$

O sistema descrito por (3.3 a) diz-se **não autónomo** se a função \mathbf{f} depender explicitamente do tempo. Se a função não depender explicitamente do tempo, o sistema diz-se **autónomo**. Um sistema autónomo não tem entradas aplicadas e é invariante no tempo.

Exemplo 3-1

Dado o sistema autónomo descrito pela equação de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(b/m)x_2 - (k_1/m)x_1 - (k_3/m)x_1^3 + u \end{cases} \quad (3.4)$$

sujeito à lei de realimentação

$$u = (k_3/m)x_1^3 \quad (3.5)$$

obtenha a equação de estado do sistema em cadeia fechada.

Resolução:

A substituição da lei de controlo (3.5) na equação de estado (3.5) conduz ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(b/m)x_2 - (k_1/m)x_1 \end{cases} \quad (3.6)$$

É interessante notar que o sistema (3.6), a que se chegou, é linear.

Um sistema autónomo é pois descrito pela equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] \quad (3.7)$$

e pelas condições iniciais (3.3 b). Repare-se que um sistema em cadeia fechada em que a lei de controlo (3.2) varia com o tempo, como acontece no caso do controlo adaptativo, conduz a uma equação de estado com dependência explícita do tempo, ou seja, conduz a um sistema não autónomo.

Exemplo 3-2

Indicar se é autónomo o sistema representado por $\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x^5 = 6\sin t$.

Resolução:

Na equação diferencial aparece $u(t) = 6\sin t$. O sistema encontra-se excitado por uma entrada independente do seu estado, logo é não autónomo.

Exemplo 3-3

Indicar se é autónomo o sistema $m\ddot{x} + (0.2\sin t x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0$.

Resolução:

Apesar de não se encontrar excitado, o sistema não é autónomo, uma vez que é variante no tempo.

3.3.2. Pontos de equilíbrio de sistemas autónomos

Considere-se o sistema autónomo descrito por (3.7). Se as condições iniciais $\mathbf{x}(0)$ forem tais que a trajectória $\mathbf{x}(t)$ permaneça sempre igual a si mesma (e consequentemente a \mathbf{x}_0), diz-se que \mathbf{x}_0 é um *estado de equilíbrio* ou *ponto de equilíbrio*. Designar-se-ão neste texto, os pontos de equilíbrio por \mathbf{x}_e . Trata-se de vectores com a dimensão igual à ordem do sistema. Como se verá, um sistema pode ter um, vários ou infinitos pontos de equilíbrio.

Analiticamente pode definir-se ponto de equilíbrio por

$$\mathbf{x}_e \text{ é ponto de equilíbrio} \Leftrightarrow \forall t > 0, \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_e \quad (3.8)$$

A determinação dos pontos de equilíbrio faz-se utilizando directamente o modelo de estado. Com efeito, se $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_e$ então $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$, pelo que os pontos de equilíbrio se obtêm resolvendo o sistema:

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

ou, como $\mathbf{x}(t)$ não evolui, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Se se tratar de um sistema autónomo linear tem-se,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (3.11)$$

Os pontos de equilíbrio são obtidos resolvendo o sistema de equações:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_e = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

Se a matriz A for **regular**, a única solução de (3.12) é a origem do espaço de estados, $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Um sistema com a matriz A regular designa-se por **sistema linear simples**.

Se a matriz A for **singular**, o sistema (3.12) admite um número infinito de soluções, que constituem um **hiperplano** que passa pela origem.

Seja \mathbf{x}_e um ponto de equilíbrio do sistema (3.7), e efectue-se a mudança de variáveis de estado

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e \quad (3.13)$$

Obtém-se uma nova descrição do sistema, na nova variável de estado \mathbf{z} ,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z} + \mathbf{x}_e) \quad (3.14)$$

À variável \mathbf{x} corresponde a nova variável \mathbf{z} e a correspondência é *biunívoca*. Além disso, $\mathbf{z}_e = \mathbf{0}$ é o ponto de equilíbrio correspondente a $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$. Portanto, o estudo do comportamento do sistema (3.7) na vizinhança de \mathbf{x}_e poderá ser facilitado analisando o comportamento de (3.14) na vizinhança da origem ($\mathbf{z}=\mathbf{0}$). Se o sistema (3.7) possuir mais do que um ponto de equilíbrio, e se se pretender estudar o seu comportamento na vizinhança de cada ponto de equilíbrio utilizando o procedimento que acaba de ser exposto, haverá que efectuar tantas mudanças de variável quantos os pontos de equilíbrio que se desejam estudar.

3.3.3. Estabilidade de pontos de equilíbrio

Devido ao facto de os sistemas não lineares terem um comportamento muito mais rico e complexo do que os sistemas lineares, tornou-se necessário detalhar os conceitos de estabilidade.

Considerar-se-á de momento a estabilidade de trajectórias na vizinhança de pontos de equilíbrio de sistemas autónomos descritos pela equação (3.7), vulgarmente designada por **estabilidade dos pontos de equilíbrio** ou dos estados de equilíbrio. Considerando a possibilidade de efectuar a mudança de variável (3.13), o assunto exposto não perde generalidade se for estudada a **estabilidade em torno da origem**.

3.3.3.1. Estabilidade nsLy

O estado de equilíbrio $\mathbf{x}_e=\mathbf{0}$ diz-se **estável no sentido de Lyapunov (nsLy)** se, para qualquer $R > 0$ existir $r(R) > 0$ tal que se $\|\mathbf{x}(0)\| < r$ então $\|\mathbf{x}(t)\| < R$, para todo o $t > 0$.

O estado de equilíbrio diz-se **instável**, caso contrário. Analiticamente pode escrever-se:

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{0} \text{ é estável nsLy} \Leftrightarrow (\forall R > 0, \exists r(R) > 0 \therefore \|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < R, \forall t) \quad (3.15)$$

A definição afirma que num sistema estável nsLy, se for desejado que uma trajectória não saia fora de uma bola de raio R (qualquer que este seja), então a trajectória deverá ser iniciada dentro de outra bola, cujo raio $r < R$, dependerá de R .

Na Fig. 3.1. representa-se a evolução da norma do estado de um sistema estável nsLy.

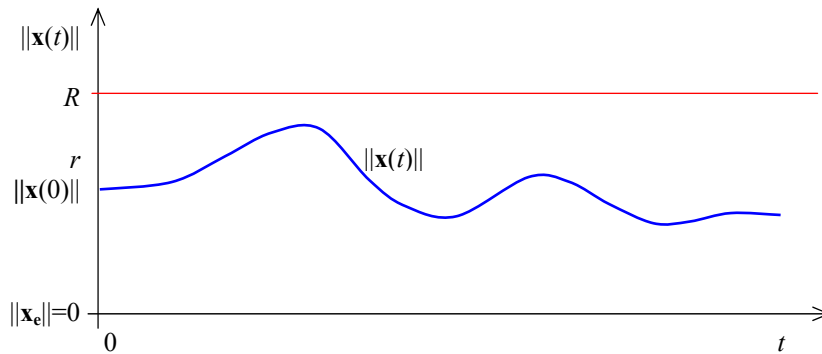


Fig. 3.1 – Sistema estável nsLy.

Repare-se que o valor de R é qualquer, $R \in \mathbb{R}^+$.

Se for desejado que $\|x(t)\|$ permaneça inferior a R , a trajectória deverá iniciar-se com $\|x(0)\| < r$. Da figura observa-se que deverá ser $r < R$, pois caso contrário haveria um intervalo de tempo em que $\|x(t)\| \geq R$.

O **oscilador de Van der Pol**, já apresentado a propósito dos ciclos limite, é *instável nsLy*. Com efeito qualquer trajectória iniciada no interior do ciclo limite (excluída a origem), conduz o sistema a oscilar com uma amplitude bem definida, não havendo possibilidade de iniciar o sistema num estado tal que a amplitude permaneça inferior a um valor desejado, R , qualquer que este seja.

A

Fig. 3.2 caracteriza, no espaço de estados, instabilidade do oscilador de Van der Pol: se for escolhida a circunferência de raio R indicado, interior ao ciclo limite, a trajectória evolui para fora dessa circunferência, e portanto o sistema é instável.

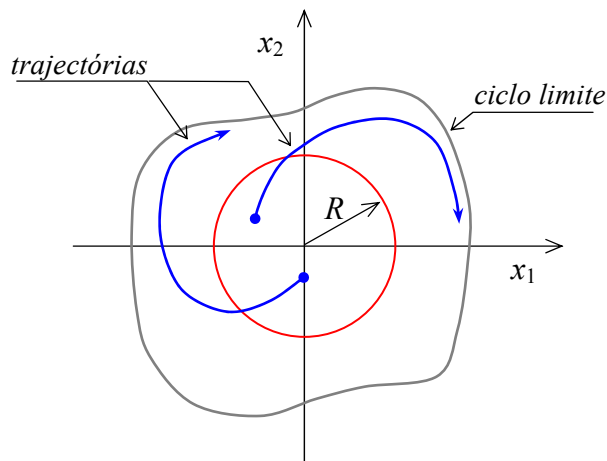


Fig. 3.2 – Instabilidade do oscilador de Van der Pol.

3.3.3.2. Estabilidade assintótica

O estado de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ diz-se **assintoticamente estável nsLy** se for estável nsLy e além disso existir $r > 0$ tal que $\|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ quando $t \rightarrow \infty$. A definição dada tem a interpretação geométrica dada na Fig. 3.3. Ao espaço de estados B_r , constituído por uma bola com o maior raio r que verifique a definição dada, dá-se o nome de **domínio de atracção**, **região de atracção** ou **bacia de atracção** do ponto de equilíbrio (Fig. 3.4).

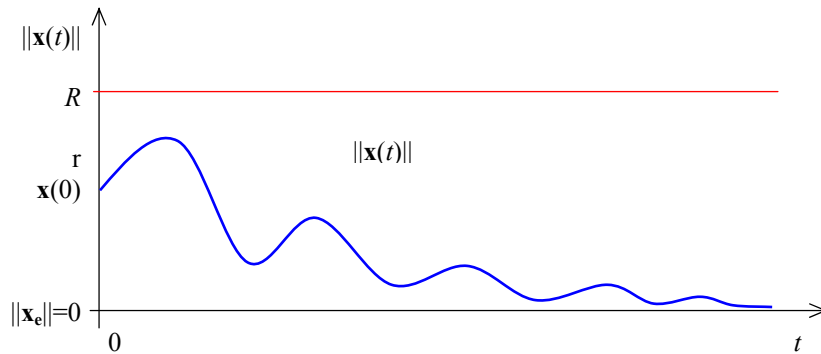


Fig. 3.3 – Sistema assintoticamente estável.

Um ponto de equilíbrio diz-se **marginalmente estável nsLy** se for estável mas não for assintoticamente estável.

Chama-se a atenção para o facto de haver sistemas que podem não ser estáveis nsLy e convergirem para zero. Um exemplo apresentado por Vinograd descreve trajectórias que quando iniciadas dentro da circunferência de raio 1 começam por sair sempre para fora da circunferência e só depois é que convergem para a origem.

Os conceitos de estabilidade que se acabam de apresentar são aplicáveis a qualquer ponto de equilíbrio de um sistema, não necessariamente a origem. Nestas condições, se houver mais do que um ponto de equilíbrio estável o sistema terá as correspondentes bacias de atracção. Designa-se por **separatriz** a linha, superfície ou hipersuperfície que separa as bacias de atracção.

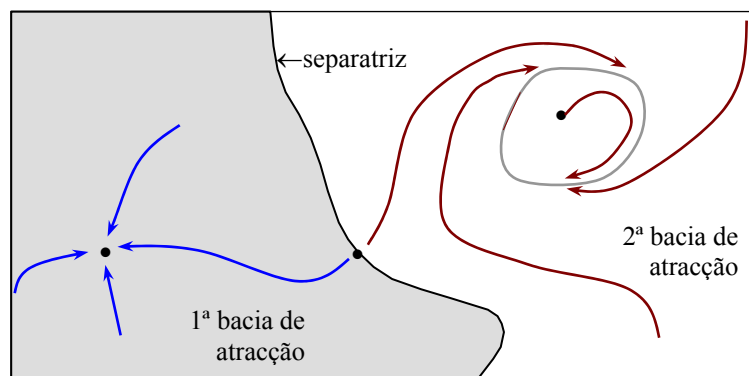


Fig. 3.4 – Bacias de atracção e separatriz.

3.3.3.3. Estabilidade exponencial

O estado de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ diz-se **exponencialmente estável** se existirem dois números reais $\alpha \geq 1$ e $\lambda > 0$ tais que dentro de uma bola B_r com centro na origem

$$\forall t > 0, \quad \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t} \quad (3.16)$$

Ao parâmetro λ chama-se **razão de convergência** da exponencial, ou **decaimento**.

O estado de um sistema exponencialmente estável converge para a origem de uma forma igual ou mais rápida que a exponencial, como se exemplifica na Fig. 3.5.

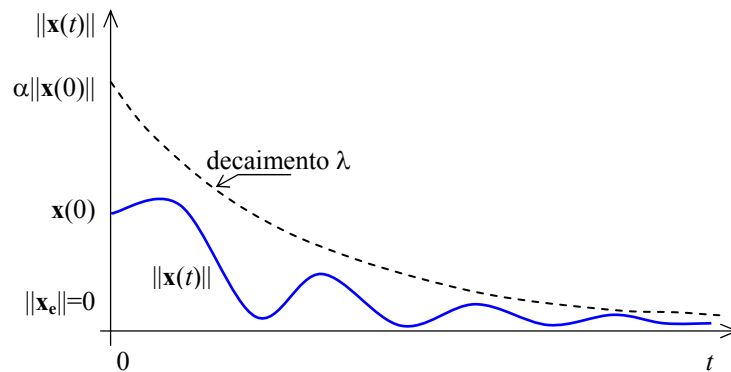


Fig. 3.5 – Sistema exponencialmente estável.

3.3.4. Estabilidade local e global

Os conceitos sobre estabilidade que se acabaram de apresentar, referem-se à estabilidade na vizinhança de um determinado ponto de equilíbrio. A estabilidade assim definida designa-se por **estabilidade local**. No entanto, se o estado inicial se encontrar longe do ponto de equilíbrio, o seu comportamento poderá ser diverso.

Por este motivo é importante saber como é que um sistema se comporta, quando o seu estado inicial se encontra afastado de determinado ponto de equilíbrio. Surge assim o conceito de **estabilidade global**.

Um estado de equilíbrio diz-se **globalmente estável** se for estável, qualquer que seja o valor inicial do seu estado.

Um estado de equilíbrio diz-se **globalmente assintoticamente estável** se for assintoticamente estável, qualquer que seja o valor do seu estado inicial. De um modo semelhante se define estado de equilíbrio **globalmente exponencialmente estável**.

Exemplo 3-4

Determine o tipo de estabilidade do seguinte sistema:

$$\dot{x}(t) = -[1 + \sin^2 x(t)]x(t)$$

Resolução:

O sistema é de 1ª ordem e admite como ponto de equilíbrio $x=0$.

Nem sempre é necessário determinar analiticamente a solução $x(t)$ para saber o comportamento do sistema. Este exemplo pode resolver-se de uma forma bastante simples. Com efeito, do sistema dado, e atendendo a que o seno é uma função limitada, pode escrever-se $\dot{x}(t) < -x(t)$. Separando as variáveis fica $\frac{\dot{x}}{x} < -1$. Esta equação pode ser integrada membro a membro entre os instantes 0 e t , a que correspondem os estados x_0 e $x(t)$, resultando $\ln \frac{x(t)}{x_0} < -t$, ou ainda $x(t) < x_0 e^{-t}$, pelo que o sistema é exponencialmente estável.

A definição de sistema globalmente assintoticamente estável implica o seguinte:

Um sistema global e assintoticamente estável apenas pode ter um ponto de equilíbrio.

3.4. Estabilidade pela linearização

Nesta secção será estudada a estabilidade de um sistema não linear utilizando o método da linearização de Lyapunov⁽²⁾. Este método utiliza o conceito de **sistema linearizado** e serve-se do formalismo dos sistemas lineares para analisar a estabilidade de determinado tipo de sistemas não lineares. Em última análise o método justifica a atitude que se toma na prática de utilizar as técnicas do controlo linear para cada um dos pontos de funcionamento do sistema.

3.4.1. Sistema linearizado

Considere-se o sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

Admita-se que a função \mathbf{f} é de classe C^1 , ou seja, é diferenciável uma vez. Nestas condições o sistema (3.17) pode escrever-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_e=0} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{os}(\mathbf{x}) \quad (3.18)$$

onde $\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)$ representa o primeiro termo do desenvolvimento de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ em série de Taylor e $\mathbf{f}_{os}(\mathbf{x})$ representa os restantes **termos de ordem superior**. Uma vez que o desenvolvimento em série é feito em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$, a expressão (3.18) não tem termo constante.

Repare-se que $\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)$ representa a **matriz Jacobiana** de \mathbf{f} , que se representará por \mathbf{A} ,

² Este método, vulgarmente designado por 1º método de Lyapunov, é devido a Poincaré.

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Nestas condições, o sistema (3.18) pode escrever-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{os}(\mathbf{x}) \quad (3.20)$$

Se em (3.20) se ignorarem os termos de ordem superior, $\mathbf{f}_{os}(\mathbf{x})$, fica apenas,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.21)$$

Ao sistema (3.21) dá-se o nome *aproximação linear* de (3.7), ou *sistema linearizado*.

Repare-se que para obter os termos $\mathbf{f}_{os}(\mathbf{x})$ não é necessário calcular derivadas de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ de ordem superior à 1ª (nem tal condição é exigida para obter a linearização); basta calcular o sistema linearizado e subtrai-lo do sistema original:

$$\mathbf{f}_{os}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.22)$$

Note-se que a linearização pode ser aplicada a sistemas excitados com entrada \mathbf{u} , invariantes no tempo,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \quad (3.23)$$

resultando do desenvolvimento

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\substack{\mathbf{x}_e=0 \\ \mathbf{u}=0}} \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\substack{\mathbf{x}_e=0 \\ \mathbf{u}=0}} \mathbf{u} + \mathbf{f}_{os}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.24)$$

ou ainda

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{os}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.25)$$

sendo a linearização do sistema dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.26)$$

com

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\substack{\mathbf{x}_e=0 \\ \mathbf{u}=0}} \quad (3.27)$$

e

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\substack{\mathbf{x}_e=0 \\ \mathbf{u}=0}} \quad (3.28)$$

Um *método expedito* para obter o sistema linearizado a partir de (3.7), consiste simplesmente em desprezar os termos que convergem para zero com uma ordem superior a 1, substituir $\cos x$ por 1, $\sin x$ por x , etc.

Exemplo 3-5

Obter a linearização dos sistemas a seguir indicados, calculando a matriz Jacobiana e utilizando o método expedito.

a)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

O ponto de equilíbrio deste sistema é $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

Neste sistema tem-se $f_1(x_1, x_2) = -x_1 + x_2^2$ e $f_2(x_1, x_2) = -x_2$, sendo a matriz Jacobiana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_1=0, x_2=0} = \begin{bmatrix} -1 & 2x_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{x_1=0, x_2=0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O sistema linearizado é pois dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para obter este mesmo sistema por um método expedito poderia simplesmente desprezar-se o termo de 2ª ordem, na primeira equação, x_2^2 .

b)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \sin x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - \sin x_1 \end{cases}$$

Considerar-se-á apenas o ponto de equilíbrio $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, em torno do qual se fará a linearização. Tem-se $f_1(x_1, x_2) = -x_1 - \sin x_2$ e $f_2(x_1, x_2) = -x_2 - \sin x_1$, sendo a matriz Jacobiana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_1=0, x_2=0} = \begin{bmatrix} -1 & -\cos x_2 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}_{x_1=0, x_2=0} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

O sistema linearizado é assim

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para obter este mesmo sistema pelo método expedito poderia simplesmente substituir-se $\sin x_1$ por x_1 e $\sin x_2$ por x_2 .

$$c) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 0.5 \sin x_2 + u \end{cases}$$

De acordo com (3.26) será $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$, com $\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\substack{\mathbf{x}_e=0 \\ \mathbf{u}=0}}$ e $\mathbf{B} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\substack{\mathbf{x}_e=0 \\ \mathbf{u}=0}}$.

Os pontos de equilíbrio do sistema autónomo são obtidos por $\begin{cases} -\sin x_1 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 - 0.5 \sin x_2 = 0 \end{cases}$, que

admite como solução 3 pontos de equilíbrio, entre os quais se encontra a origem do espaço de estados. Para este ponto será:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_1=0, x_2=0; u=0} = \begin{bmatrix} -\cos x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -0.5 \cos x_2 \end{bmatrix}_{x_1=0, x_2=0; u=0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Note-se que o sistema apenas tem uma entrada (escalar), pelo que fica

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{x_1=0, x_2=0; u=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{x_1=0, x_2=0; u=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O sistema linearizado em torno da origem será pois $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

3.4.2. Método de Lyapunov da linearização

Considere-se um sistema linear simples, autónomo,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) \quad (3.29)$$

Tratando-se de um sistema simples a matriz \mathbf{A} é regular e portanto o único ponto de equilíbrio do sistema é a origem do espaço de estados, $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Como o sistema é linear *a estabilidade é sempre global*; o seu tipo é independente das condições iniciais, e portanto independente da distância entre o ponto de partida em $t=0$ e o ponto de equilíbrio.

Sabe-se, da teoria dos sistemas lineares, e utilizando a linguagem introduzida atrás, que, em relação à estabilidade, um sistema linear contínuo apenas pode ser:

- **Exponencialmente estável:** matriz \mathbf{A} com todos os valores próprios no semiplano complexo s , esquerdo,
- **Marginalmente estável:** matriz \mathbf{A} com os pólos no semiplano complexo s esquerdo e com pelo menos um valor próprio sobre o eixo $j\omega$.

- **Instável:** matriz A com pelo menos um valor próprio no semiplano complexo s direito. Neste caso a solução $\|x(t)\|$ tende para ∞ quando $t \rightarrow \infty$.

O **método da linearização** de Lyapunov parte da análise da matriz A do sistema linearizado para concluir sobre a estabilidade do sistema não linear, e afirma o seguinte:

- Se o sistema linearizado for (exponencialmente) estável, o correspondente sistema não linear é assintoticamente estável.
- Se o sistema linearizado for instável, o correspondente sistema não linear é instável.
- Se o sistema linearizado for marginalmente estável nada se pode concluir sobre o sistema não linear correspondente.

A demonstração deste teorema será feita adiante, com base no método directo de Lyapunov.

Note-se que se o valor do estado estiver próximo do equilíbrio (por hipótese $x_e = 0$), o sistema linearizado representa com bastante aproximação o sistema não linear de partida. No entanto, se o sistema linearizado for marginalmente estável é de esperar que os termos de ordem superior desempenhem um papel decisivo no comportamento do sistema não linear correspondente.

O método da linearização sofre de uma limitação, quando o sistema linearizado é marginalmente estável. Há no entanto forma de levantar a indeterminação e obter a estabilidade do sistema não linear associado, utilizando o **teorema da variedade central** (“center manifold theorem”). Este teorema permite estudar a estabilidade do sistema não linear de ordem n a partir do estudo de um sistema menos complexo, de ordem $n-p$, em que p é o número de valores próprios com parte real nula, da matriz A do sistema linearizado (ver Khalil, 2ª ed. págs. 167-169)

Exemplo 3-6

Utilizando o método da linearização concluir sobre a estabilidade dos sistemas descritos pelos seguintes modelos:

- a) $\dot{x} = -x^3 - \sin x$ b) $\dot{x} = (1-x)^3 - 1$
 c) $\ddot{x} + 2\dot{x}^2 = ax$, $a \in \mathbb{R}$ d) $ML\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + MgL \sin \theta = 0$ (pêndulo de massa M , comprimento do braço L e factor de amortecimento B)

Resolução:

- a) O único ponto de equilíbrio deste sistema é a origem. Utilizando o método expedito pode obter-se o sistema linearizado em torno da origem, $\dot{x} = -x$. Tem-se pois $A = -1$. O valor próprio desta matriz, -1 , encontra-se no semiplano complexo s esquerdo. O sistema linearizado é exponencialmente estável e consequentemente o sistema original é assintoticamente estável.

b) Este sistema pode ser simplificado, obtendo-se $\dot{x} = -3x + 3x^2 - x^3$. O único ponto de equilíbrio é $x=0$. O sistema linearizado será pois $\dot{x} = -3x$. O pólo encontra-se no semiplano complexo s esquerdo, e tem o valor -3 . O sistema linearizado é exponencialmente estável e portanto o sistema original é assintoticamente estável.

c) Efectuando as mudanças de variável $x = x_1$ e $\dot{x} = x_2$ vem
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - 2x_2^2 \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio são $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. O sistema linearizado será

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ ou ainda, } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios de \mathbf{A} obtêm-se resolvendo a equação $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$,

$\lambda^2 - a = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{a}$. Há a distinguir dois casos:

- 1º. $a > 0$. Neste caso há um pólo do sistema linearizado no semiplano complexo s direito. O sistema linearizado é instável e consequentemente o sistema original também é instável.
- 2º. $a \leq 0$. Neste caso há um par de pólos sobre o eixo imaginário. O sistema linearizado é marginalmente estável, nada se podendo concluir sobre o sistema original.

d) Fazendo $\theta = x_1$ e $\dot{\theta} = x_2$ pode escrever-se
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g \sin x_1 - bx_2 \end{cases} \text{ com } b = \frac{B}{ML} > 0.$$

Pontos de equilíbrio: $\begin{cases} x_2 = 0 \\ -g \sin x_1 - bx_2 = 0 \end{cases}$, ou, $\begin{cases} x_1 = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x_2 = 0 \end{cases}$.

Há agora a distinguir dois casos distintos, ao linearizar:

1º. $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$. Nestes casos o sistema linearizado será
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -gx_1 - bx_2 \end{cases}$$
.

A matriz \mathbf{A} será $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -b \end{bmatrix}$, sendo os valores próprios $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4g})$.

Estes valores próprios estão localizados no semiplano complexo s esquerdo. O sistema linearizado é exponencialmente estável e portanto o sistema original é assintoticamente estável (nos pontos de equilíbrio indicados).

2º. $k = \pm 1, \pm 3, \dots$. Nestes casos o sistema linearizado será
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = gx_1 - bx_2 \end{cases}$$
.

A matriz \mathbf{A} será $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g & -b \end{bmatrix}$, sendo os valores próprios $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 + 4g})$. Estes

valores próprios estão localizados um no semiplano complexo s esquerdo e o outro no semiplano direito. O sistema linearizado é instável e portanto o sistema original é também instável. Note-se que estes pontos de equilíbrio correspondem às posições em que a massa do pêndulo se encontra no topo.

3.5. Método Directo de Lyapunov

3.5.1. Motivação

O *método directo de Lyapunov*, correntemente designado por *2º método de Lyapunov*, permite efectuar a análise da estabilidade de um sistema através de uma função escalar do estado, designada por *função de Lyapunov*.

A função de Lyapunov pode ser encarada como uma extensão matemática do conceito de *energia do sistema*. Um sistema, quer seja mecânico, eléctrico ou de outro tipo, tem habitualmente dissipação ou amplificação de energia. Sempre que a dissipação seja superior à amplificação a energia do sistema irá caindo e as variáveis do sistema (amplitudes de oscilação, velocidades, tensões eléctricas, correntes, etc.) terão tendência a evoluir para zero. Estudando a energia associada ao sistema, ou outra grandeza mais conveniente, será possível avaliar o seu comportamento, em particular a sua estabilidade.

A amplificação de energia só existe em sistemas com componentes activos, em que existe uma transferência de energia contínua para um tipo de energia alternado ou oscilante. Nos circuitos de electrónica o fornecimento de energia contínua é feito pela fonte de alimentação. Numa ponte que entra em oscilação, a energia pode ser originada pela componente contínua do vento, ou por qualquer outra força permanente.

Tome-se como exemplo o sistema em regime livre, constituído por uma massa sujeita à acção de uma mola não linear, com amortecimento proporcional ao quadrado da velocidade. Será uma extensão do modelo representado pela equação (2.22).

$$m\ddot{x} + b|\dot{x}|\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = 0 \quad (3.30)$$

Notando que $k_1x + k_3x^3$ é a força de restituição da mola, a *energia potencial* associada a esta força, quando a mola se encontra na posição x , é dada por

$$V_p(x) = \int_0^x (k_1x + k_3x^3)dx = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_3x^4 \quad (3.31)$$

A *energia cinética* do sistema é dada por

$$V_c(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (3.32)$$

pelo que a *energia mecânica total* do sistema será

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_3x^4 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (3.33)$$

Observando a função $V(\mathbf{x})$, conclui-se que:

$V(\mathbf{x})$ é positiva quando $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ($x \neq 0$ e $\dot{x} \neq 0$)

$V(\mathbf{x})$ é nula quando $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Calcule-se agora a evolução de $V(\mathbf{x})$ com o tempo:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = k_1 x \dot{x} + k_3 x^3 \dot{x} + m \ddot{x} \dot{x} = (k_1 x + k_3 x^3 + m \ddot{x}) \dot{x} \quad (3.34)$$

Notando que a quantidade entre parêntesis, pela equação (3.30) é igual a $-b|\dot{x}|\dot{x}$, vem:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -b|\dot{x}|\dot{x}^2 = -b|\dot{x}|^3 \quad (3.35)$$

Uma vez que se trata de um sistema com amortecimento ($b > 0$), a expressão (3.35) mostra que, independentemente do estado inicial, a função $\dot{V}(\mathbf{x})$ é sempre negativa, isto é, *a energia total do sistema vai diminuindo*, até atingir o valor zero, quando $\dot{x} = 0$.

Os conceitos contidos neste exemplo constituem a base do método directo de Lyapunov.

3.5.2. Funções positivas definidas

Uma função escalar, contínua e unívoca, de um vector, diz-se **localmente positiva definida** se, se dentro de uma bola de raio R_0 for:

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ = 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.36)$$

A função $V(\mathbf{x})$ diz-se **globalmente positiva definida** se (3.36) for válida para todo o espaço de estados.

Tomando o exemplo do sistema atrás representado em (3.30) e considerando a sua energia total $V(\mathbf{x})$ dada por (3.33), conclui-se imediatamente que $V(\mathbf{x})$ é globalmente definida positiva. Na Fig. 3.6 encontra-se representada geometricamente uma função positiva definida.

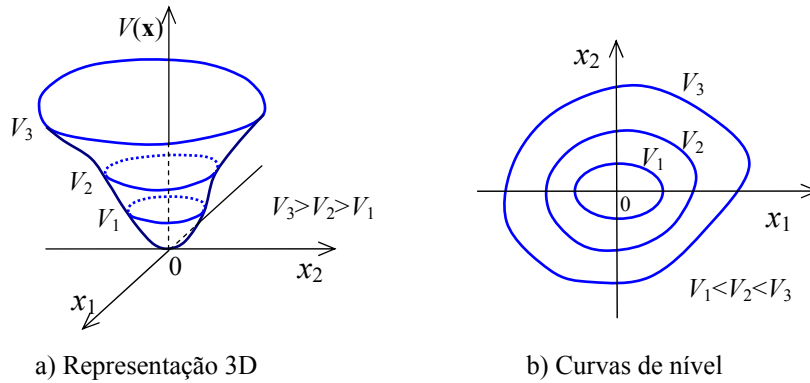


Fig. 3.6 – Representação geométrica de uma função positiva definida.

Repare-se que a definição de função positiva definida exige que $V(\mathbf{0}) = 0$. Isto implica que o seu único mínimo é a origem (estado nulo). Note-se ainda, que na representação por meio de curvas de nível estas não se intersectam, uma vez que a função $V(\mathbf{x})$ é unívoca.

Uma função $V(\mathbf{x})$ diz-se **negativa definida** (local ou globalmente) se a sua simétrica $-V(\mathbf{x})$ for positiva definida.

Uma função escalar, contínua e unívoca, diz-se **positiva semidefinida** (local ou globalmente) se:

$$V(\mathbf{x}) \begin{cases} \geq 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ = 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.37)$$

A função diz-se **negativa semidefinida** se $-V(\mathbf{x})$ for positiva semidefinida.

Uma função escalar, contínua $V(\mathbf{x})$ diz-se **localmente indefinida** se, dentro de uma bola de raio R_0 qualquer, em torno da origem tomar valores positivos e negativos.

Exemplo 3-7

Classificar, no que respeita às definições atrás apresentadas, as seguintes funções $V(\mathbf{x})$ associadas aos sistemas indicados:

$$\text{a) } \ddot{\theta} + \sqrt{2}\dot{\theta} + \sin \theta = 0 \quad V(\mathbf{x}) = 1 - \cos \theta + \dot{\theta}^2 \quad (x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta})$$

$$\text{b) } \dot{x} = -x^3 - \sin x \quad V(\mathbf{x}) = 2x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

$$\text{c) } \dot{x} = -x^3 - \sin x \quad V(\mathbf{x}) = 2x^2 - \frac{1}{4}\dot{x}^2$$

Resolução:

a) Efectuando as mudanças de variável $\theta = x_1$ e $\dot{\theta} = x_2$ obtém-se o modelo de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - \sqrt{2}x_2 \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio obtêm-se resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -\sin x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0 \end{cases}$$

obtendo-se $x_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $x_2 = 0$.

Analise-se o que se passa no ponto de equilíbrio $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. A função $V(\mathbf{x})$ é constituída pela soma de $1 - \cos \theta$, que é maior ou igual a zero (igual apenas para $\theta = 0$ ou múltiplo de 2π), e de $\dot{\theta}^2$, que é maior ou igual a zero, sendo zero nos pontos de equilíbrio. Nestas condições, na vizinhança da origem $V(\mathbf{x})$ satisfaz à definição (3.36) pelo que é localmente positiva definida.

b) O ponto de equilíbrio do sistema é $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. A função $V(\mathbf{x})$ é constituída pela soma de dois termos maiores ou iguais a zero. $V(\mathbf{x})$ satisfaz à definição (3.36), pelo que é globalmente positiva definida.

c) O sistema é igual ao anterior. A função $V(\mathbf{x})$ pode agora tomar valores positivos ou negativos para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. $V(\mathbf{x})$ é pois localmente indefinida.

3.5.3. Função de Lyapunov

Dentro de uma bola centrada na origem e de raio R , uma função $V(\mathbf{x})$ diz-se **função de Lyapunov** se e só se:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &\text{ for positiva definida,} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &\text{ for negativa semidefinida.} \end{aligned}$$

Para uma função de Lyapunov tem-se pois:

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \begin{matrix} V(\mathbf{0}) = 0 \\ \dot{V}(\mathbf{0}) = 0 \end{matrix} \quad (3.38)$$

Na Fig. 3.7 faz-se a representação geométrica de uma função de Lyapunov.

A condição $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ implica que a *trajectória do sistema se deve aproximar da origem*.

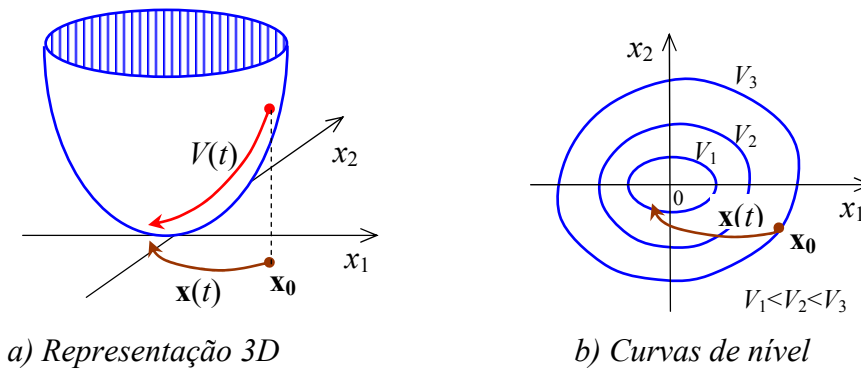


Fig. 3.7 – Representação geométrica de uma função de Lyapunov.

Exemplo 3-8

Indicar quais das funções abaixo são função de Lyapunov dos respectivos sistemas, para a origem:

- a) $\dot{x} = -x$ $V(\mathbf{x}) = x^2 + \dot{x}^2$
- b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$ $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$
- c) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \sin x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - \sin x_2 \end{cases}$ $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

Resolução:

- a) A função $V(\mathbf{x})$ é positiva definida. Analise-se a derivada: $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x\dot{x} + 2\dot{x}\ddot{x} = 2(x + \ddot{x})\dot{x}$.
A partir do sistema obtém-se $\ddot{x} = -\dot{x}$, pelo que $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2(x - \dot{x})\dot{x} = 2(x + x)(-\dot{x}) = -4x^2$ que é negativa definida. Logo, $V(\mathbf{x})$ é uma função de Lyapunov do sistema dado.

- b) O único ponto de equilíbrio é a origem. A função $V(\mathbf{x})$ é positiva definida. A sua derivada é $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$. Substituindo \dot{x}_1 e \dot{x}_2 dados pelo sistema obtém-se $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1(-x_2 - x_1^3) + 2x_2(x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4)$ que é negativa definida. Logo, $V(\mathbf{x})$ é uma função de Lyapunov do sistema dado.
- c) O único ponto de equilíbrio é a origem. A função $V(\mathbf{x})$ é positiva definida. A sua derivada é $\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$. Substituindo \dot{x}_1 e \dot{x}_2 dados pelo sistema obtém-se $\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1(-x_2 - \sin x_1) + x_2(x_1 - \sin x_2) = -x_1 \sin x_1 - x_2 \sin x_2$ que pode ser positiva ou negativa. $V(\mathbf{x})$ não é uma função de Lyapunov do sistema dado. Restringindo x_1 e x_2 ao intervalo $(-\pi, \pi)$ já $\dot{V}(\mathbf{x})$ é nd. Nesta região $V(\mathbf{x})$ é função de Lyapunov do sistema dado.

3.5.4. Teorema de Lyapunov (estabilidade local)

Considere-se o sistema autónomo seguinte, e um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] \quad (3.39)$$

Se numa bola de raio R com centro em $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ existir uma função escalar $V(\mathbf{x})$, contínua, com 1ª derivada contínua, tal que:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &\text{ é localmente positiva definida,} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &\text{ é localmente negativa semidefinida,} \end{aligned}$$

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ é localmente estável.

Se além disto $\dot{V}(\mathbf{x})$ for localmente negativa definida, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

Para demonstrar este teorema é preciso provar que dado um número real positivo, R , existe um outro número real também positivo $r < R$, tal que qualquer trajectória com início no interior da bola de raio r permanece no interior da bola de raio R [definição dada pela expressão (3.15)].

Seja m o valor mínimo de V sobre uma superfície de raio R (mínimo de V sobre a curva de intersecção de $V(\mathbf{x})$ com a esfera de raio R). Considere-se uma superfície esférica de raio $r < R$ tal que a sua intersecção com $V(\mathbf{x})$ seja menor que m . Considere-se uma trajectória iniciada sobre esta esfera. Uma vez que por ser uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ não pode crescer, será sempre $V(\mathbf{x}) \leq m$, ou seja, $V(\mathbf{x})$ ficará sempre no interior da esfera de raio R . Logo a trajectória é estável.

Se $V(\mathbf{x})$ for estritamente decrescente, as trajectórias ficarão contidas no interior da bola com raio cada vez menor, o que significa que o sistema é assintoticamente estável.

Repare-se que a existência de uma função de Lyapunov é **condição suficiente** para a estabilidade do sistema, mas não é condição necessária: um sistema poderá ser estável e não se conhecer nenhuma função de Lyapunov associada.

3.5.5. Teorema de Lyapunov (estabilidade global)

O teorema de Lyapunov apresentado na secção anterior refere-se à estabilidade local. É possível efectuar a sua extensão para a análise de estabilidade assintótica global.

Considere-se o sistema autónomo (3.39), e uma função $V(\mathbf{x})$ escalar, contínua, com 1ª derivada contínua, tal que

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &\text{ é positiva definida,} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &\text{ é negativa definida,} \\ V(\mathbf{x}) &\rightarrow \infty \text{ quando } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Então o ponto de equilíbrio na origem é **global** e assintoticamente estável.

A última condição diz que a função $V(\mathbf{x})$ deve ser *radialmente ilimitada*. Do ponto de vista geométrico, isto quer dizer que as curvas de nível de $V(\mathbf{x})$ devem ser fechadas. Se tal não acontecer, como acontece no exemplo da Fig. 3.8, pode acontecer que o estado evolua de um ponto $\mathbf{x}(0)$ para um valor infinito, com diminuição contínua de $V(\mathbf{x})$.

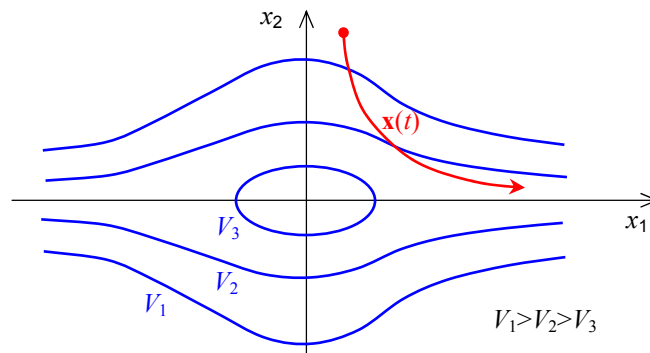


Fig. 3.8 – Caso em que o sistema não é globalmente estável.

Um sistema pode admitir mais do que uma função de Lyapunov. Algumas delas poderão dar mais informação sobre a estabilidade do sistema do que outras.

Exemplo 3-9

Concluir sobre a estabilidade dos sistemas seguintes, em torno da origem, dos quais se conhece uma função de Lyapunov, candidata, $V(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \dot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{x} - \mathbf{x}^3 & V(\mathbf{x}) &= x^2 + \dot{x}^2 \\ \text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_2^2}{x_1} \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_2}{(1+x_1^2)^2} \end{cases} & V(\mathbf{x}) &= \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \end{aligned}$$

Resolução:

a) A função $V(\mathbf{x})$ é positiva definida. Analise-se a sua derivada: $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x\dot{x} + 2\dot{x}\ddot{x}$. A partir do sistema dado obtém-se $\ddot{x} = -\dot{x} - 3x^2\dot{x}$. Substituindo \ddot{x} em $\dot{V}(\mathbf{x})$ conclui-se que $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$. A função $V(\mathbf{x})$ é radialmente limitada. Estão pois satisfeitas todas as condições da secção 3.5.4 e anterior: Logo o sistema é localmente estável na origem.

b) A função $V(\mathbf{x})$ é positiva definida mas não é radialmente ilimitada. Com efeito, para cada valor de x_2 , $V(\mathbf{x})$ não tende para ∞ quando $x_1 \rightarrow \infty$. Analise-se a sua derivada.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{2x_1^3\dot{x}_1 + 2x_2(1+x_1^2)^2\dot{x}_2}{(1+x_1^2)^2}. \text{ Substituindo em } \dot{V}(\mathbf{x}) \text{ os valores de } \dot{x}_1 \text{ e de } \dot{x}_2 \text{ e}$$

$$\text{simplificando, obtém-se } \dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{-4x_2^2}{(1+x_1^2)^2}, \text{ que é negativa semi definida.}$$

Portanto o sistema dado é localmente assintoticamente estável na origem, mas não é globalmente assintoticamente estável.

3.5.6. Teorema de Lyapunov (instabilidade)

Considere-se o sistema autónomo (3.39) e um ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Se dentro de uma bola de raio R com centro em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ existir uma função escalar $W(\mathbf{x})$ tal que:

$W(\mathbf{x})$ é positiva definida, contínua, com primeiras derivadas parciais contínuas

$\dot{W}(\mathbf{x})$ é positiva definida

então a resposta do sistema tende para infinito quando $t \rightarrow \infty$.

A demonstração é deixada ao cuidado do leitor.

3.6. Função de Lyapunov de sistemas lineares

3.6.1. Formas quadráticas e matrizes positivas definidas

Dado o vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, de componentes reais, designa-se por *forma quadrática* o escalar $V(\mathbf{x})$ definido pelo polinómio

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j \quad (3.40)$$

em que os coeficientes p_{ij} são reais.

A expressão (3.40) pode ser escrita sob a forma matricial

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{P} \mathbf{x} \rangle \quad (3.41)$$

Uma vez que qualquer matriz pode ser decomposta na soma de duas matrizes, uma simétrica e outra anti-simétrica, e que a forma quadrática associada a uma matriz anti-simétrica é nula, pode considerar-se que em (3.41) a matriz \mathbf{P} é simétrica.

Uma matriz \mathbf{P} diz-se **positiva definida** (pd) se a forma quadrática que lhe está associada for positiva definida, ou seja:

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0 \quad (3.42)$$

A condição $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 0$ para $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, que aparece em (3.36), é naturalmente satisfeita.

Uma vez que $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ é o produto interno de \mathbf{x}^T e de $\mathbf{P} \mathbf{x}$, a interpretação geométrica de definição de forma quadrática pd é a seguinte: O vector \mathbf{x} e a sua imagem $\mathbf{P} \mathbf{x}$ devem fazer um ângulo que esteja no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

É *condição necessária* para uma matriz ser pd que os elementos da sua diagonal principal sejam estritamente positivos ($p_{ii} > 0$).

É *condição necessária e suficiente* para que uma matriz seja pd que os seus menores principais sejam estritamente positivos, ou seja:

$$\Delta_1 = |p_{11}| > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (3.43)$$

Esta última condição é equivalente à seguinte:

É c.n.s. para que uma matriz seja pd, que os seus valores próprios sejam positivos (os valores próprios são reais porque \mathbf{P} é suposta simétrica).

Uma matriz pd pode ser decomposta em:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{U} \quad (3.44)$$

em que \mathbf{U} é a matriz unitária de vectores próprios de \mathbf{P} , e $\mathbf{\Lambda}$ uma matriz diagonal contendo os valores próprios de \mathbf{P} . Designando por λ_{\min} e λ_{\max} o menor e o maior valor próprio de \mathbf{P} , tem-se a partir de (3.44),

$$\lambda_{\min} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max} \|\mathbf{x}\|^2 \quad (3.45)$$

De uma forma análoga se define uma forma quadrática (e respectiva matriz)

positiva semidefinida (psd),
negativa definida (nd),
negativa semidefinida (nsd).

Os conceitos até aqui apresentados consideram sistemas invariantes no tempo, isto é, em que os elementos das matrizes não dependem do tempo.

3.6.2. Função de Lyapunov para SLIT

Considere-se o sistema autónomo linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.46)$$

e uma *função candidata* a função de Lyapunov dada pela forma quadrática

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (3.47)$$

em que \mathbf{P} é uma matriz pd simétrica. Derivando $V(\mathbf{x})$ em ordem ao tempo e usando (3.46) vem

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (3.48)$$

com

$$-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (3.49)$$

A equação (3.49) tem o nome de *equação de Lyapunov*.

Para que a trajectória do sistema (3.46) seja estável a matriz \mathbf{Q} deverá ser pd. Se tal não acontecer nada se pode concluir sobre a estabilidade do sistema. Para evitar que tal possa acontecer, em vez de escolher \mathbf{P} pd e analisar \mathbf{Q} , procede-se de uma forma inversa:

Escolhe-se uma matriz \mathbf{Q} positiva definida, resolve-se a equação de Lyapunov de modo a obter \mathbf{P} e verifica-se se \mathbf{P} é pd. Se isto acontecer, o sistema é assintoticamente estável (globalmente, por se tratar de um sistema linear). Caso não aconteça o sistema é instável. O teorema que se segue resume o que acaba de se afirmar.

Teorema

É c.n.s. para que o SLIT autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ seja estritamente⁽³⁾ estável que para qualquer matriz pd, \mathbf{Q} , a única solução da equação de Lyapunov (3.49) seja simétrica e pd.

Para detalhes consultar a Ref. [1] da bibliografia – Slotine, J.J.E./Li, Weiping.

3.7. Função de Lyapunov de sistemas não lineares

O problema que se põe em relação ao método directo de Lyapunov consiste em ter um método sistemático de obter uma função de Lyapunov. Os métodos existentes baseiam-se em formalismos de ordem exclusivamente matemática ou em considerações de carácter físico.

3.7.1. Métodos analíticos

Uma maneira simples de obter uma função candidata a função de Lyapunov é a que decorre do seguinte teorema:

³ Não inclui a estabilidade marginal

3.7.1.1. Teorema de Krasovskii

Seja o sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.50)$$

com $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ suave, tendo como ponto de equilíbrio de interesse a origem do espaço de estados. Seja $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ o Jacobiano do sistema:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (3.51)$$

Se numa região Ω em torno do ponto de equilíbrio a matriz

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \quad (3.52)$$

for *negativa definida*, o ponto de equilíbrio é *assimptoticamente estável*. Uma função de Lyapunov do sistema é

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.53)$$

Se além de (3.52) se tiver

$$\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad (3.54)$$

então o ponto de equilíbrio é globalmente assimptoticamente estável.

Demonstração

A matriz $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é nd (por hipótese), o que implica que $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é regular. Com efeito, se $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ fosse singular, existiria um vector $\mathbf{x}_1 \neq 0$ tal que $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}_1 = 0$, ou ainda, $\mathbf{x}_1^T \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{x}_1 = 0$. Mas pela condição (3.52) tem-se $2\mathbf{x}_1^T \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^T \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{x}_1$, que deverá ser 0, o que contradiz a hipótese de $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ser nd. Logo, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é regular. Sendo $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ regular é invertível, o que implica que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ também é invertível, na região Ω em torno da origem, e portanto $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$ para $\mathbf{x} \neq 0$.

Considere-se agora a função (3.53), $V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$; uma vez que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$ para $\mathbf{x} \neq 0$, $V(\mathbf{x})$ é definida positiva. Calcule-se $\dot{V}(\mathbf{x})$. Uma vez que $\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$, vem [derive-se (3.50)]

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \mathbf{A}^T \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{F} \mathbf{f} \quad (3.55)$$

Como \mathbf{F} é negativa definida, então $\dot{V}(\mathbf{x})$ também é negativa definida. Portanto, pela aplicação do método directo de Lyapunov a origem é um ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.

Esta condição resulta directamente da aplicação do método directo de Lyapunov para a estabilidade global.

Exemplo 3-10

Obter uma função de Lyapunov para o sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{cases} \quad (3.56)$$

Tem-se

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} -6x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12x_2^2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é negativa definida se $-\mathbf{F}(\mathbf{x})$ for positiva definida:

1º menor principal de $-\mathbf{F}(\mathbf{x})$: $|-F_{11}| = |12| = 12 > 0$.

2º menor principal de $-\mathbf{F}(\mathbf{x})$: $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 + 12x_2^2 \end{vmatrix} = 144 + 144x_2^2 - 16 = 144x_2^2 + 128 > 0$

Logo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é nd e portanto uma função de Lyapunov candidata é

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (-6x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2.$$

Como $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, a origem é globalmente estável.

3.7.1.2. Teorema de Krasovskii generalizado

Considere-se o sistema (3.50) anterior, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

É c.n.s. para que a origem seja assintoticamente estável, que existam duas matrizes pd simétricas \mathbf{P} e \mathbf{Q} , tais que para todo o $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ a matriz

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} \quad (3.57)$$

seja negativa semidefinida numa vizinhança Ω da origem. Uma função de Lyapunov para o sistema é

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.58)$$

Se a região Ω for todo o espaço de estados e além disso $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, então o sistema é *globalmente estável*.

A demonstração deste teorema é análoga à do teorema anterior e deixa-se ao cuidado do leitor.

3.7.1.3. Método do gradiente variável

O método do gradiente variável é uma outra forma de se obter uma função de Lyapunov associada a um sistema. Parte-se da relação integral

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} \nabla V(\xi) \cdot d\xi \quad (3.59)$$

em que $\nabla V(\mathbf{x})$ é o gradiente de $V(\mathbf{x})$, dado por

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]^T \quad (3.60)$$

Atendendo a que o rotacional do gradiente é identicamente nulo, impõe-se a condição adicional

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad (3.61)$$

No método do gradiente assume-se para o gradiente uma forma linear no estado:

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (3.62)$$

Concretizando, neste método os passos a dar são os seguintes:

1. Construir $\nabla V(\mathbf{x})$ como combinação linear do estado,
2. Impor a $V(\mathbf{x})$ a condição do rotacional nulo, dada por (3.61),
3. Impor aos coeficientes a condição de $\dot{V}(\mathbf{x})$ ser negativa semidefinida,
4. Obter $V(\mathbf{x})$ por integração de $\nabla V(\mathbf{x})$, usando a relação (3.59),
5. Verificar se $V(\mathbf{x})$ é positiva definida.

Exemplo 3-11

Utilizando o método do gradiente obter uma função de Lyapunov para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_1x_2^2 \end{cases} \quad (3.63)$$

Seguindo os passos anteriores tem-se

$$1. \quad \begin{cases} \nabla V_1(\mathbf{x}) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \nabla V_2(\mathbf{x}) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (3.64)$$

$$2. \quad \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} \rightarrow a_{12} = a_{21} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} \quad (3.65)$$

$$3. \text{ Escolhendo } a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 0, \quad (3.66)$$

(valores que satisfazem a condição acima), vem $\nabla V_1(\mathbf{x}) = x_1$ e $\nabla V_2(\mathbf{x}) = x_2$

$$4. \quad V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2 dx_2 = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (3.67)$$

5. $V(\mathbf{x})$ é pd, logo, a origem é assintoticamente estável.

Uma vez que $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, a origem é assintoticamente estável.

3.7.2. Métodos baseados em conceitos físicos

Por vezes utiliza-se o conhecimento que se tem sobre a física do processo para a obtenção da função de Lyapunov associada a um determinado sistema. Esta anda de um modo geral associada ao conceito de *energia* (potencial, cinética, eléctrica, magnética) e ao facto de que normalmente a sua soma (potencial+cinética, para sistemas mecânicos ou eléctrica+magnética para sistemas eléctricos) se *dissipa* com o decorrer do tempo. A energia tem um valor essencialmente positivo ou nulo, o que significa ser $V(\mathbf{x})$ definida positiva. A dissipação significa que $V(\mathbf{x})$ diminui e tende para zero quando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$, ou seja, $\dot{V}(\mathbf{x})$ é definida negativa.

Este método é vantajoso em relação aos métodos matemáticos sempre que se lida com sistemas de ordem elevada.

3.8. Conjuntos invariantes

A introdução do conceito de conjunto invariante e dos teoremas a ele associados, permite analisar a estabilidade de sistemas no caso em que a função de Lyapunov não permite efectuar o estudo da estabilidade em torno de um ponto de equilíbrio.

3.8.1. Definição

Define-se *conjunto invariante* associado a um sistema como sendo a região do espaço de estados tal que toda a trajectória que nele se inicia aí permanece em todos os instantes futuros.

De acordo com a definição dada são conjuntos invariantes os seguintes:

- Um ponto de equilíbrio estável,
- Um ciclo limite estável,
- Um domínio de atracção,
- Uma determinada trajectória,
- Todo o espaço de estados (conjunto trivial).

Os dois teoremas que se seguem são relativos à estabilidade de um sistema numa região contendo um conjunto invariante (estabilidade local) e em todo o espaço de estados (estabilidade global).

3.8.2. Teorema local do conjunto invariante

Considere-se o sistema autónomo (3.50) e seja $V(\mathbf{x})$ uma função escalar contínua que admita derivadas parciais. Considere-se um valor real $\ell > 0$ e seja Ω_ℓ a região do espaço de estados em que se verifica a condição $V(\mathbf{x}) < \ell$. Admita-se que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ para $\mathbf{x} \in \Omega_\ell$. Seja \mathbf{R} o conjunto de pontos dentro de Ω_ℓ onde $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ e seja \mathbf{M} o maior conjunto

invariante contido em \mathbf{R} . Então, toda a trajectória $\mathbf{x}(t)$ com origem em Ω_ℓ converge para \mathbf{M} quando $t \rightarrow \infty$.

A interpretação geométrica deste teorema encontra-se na Fig. 3.9. A demonstração encontra-se na ref. [1] da bibliografia – Slotine, J.J.E./Li, Weiping.

Corolário: Se nas condições anteriores $V(\mathbf{x})$ for localmente positiva definida, $\dot{V}(\mathbf{x})$ negativa semidefinida e o conjunto \mathbf{R} definido por $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ não contiver trajectórias além da trajectória $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$, então o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é assintoticamente estável. Além disso a maior região Ω_ℓ é um domínio de atracção do ponto de equilíbrio.

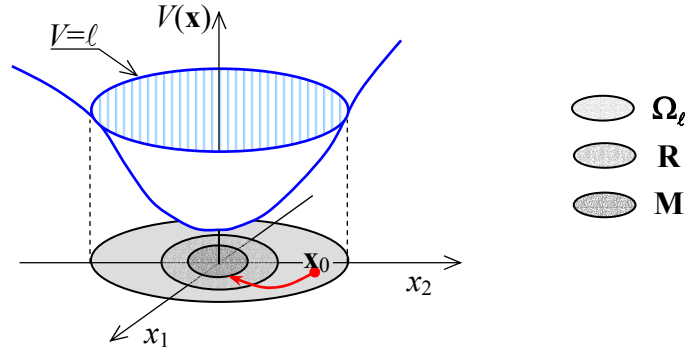


Fig. 3.9 – Convergência da trajectória para o conjunto invariante.

3.8.3. Teorema global do conjunto invariante

Considere-se o sistema autónomo (3.50), $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, e seja $V(\mathbf{x})$ uma função escalar contínua que admita derivadas parciais. Admita-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &\leq 0 \text{ para qualquer } \mathbf{x}, \\ \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty &\Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Seja \mathbf{R} o conjunto de todos os pontos em que $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ e \mathbf{M} o maior conjunto invariante em \mathbf{R} . Então todas as soluções convergem de uma forma global e assintótica para \mathbf{M} quando $t \rightarrow \infty$.

Exemplo 3-12: Uma classe de sistemas n.l. de 2ª ordem.

Considere-se o sistema autónomo de 2ª ordem definido por

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = 0 \quad (3.68)$$

em que $f(\dot{x})$ e $g(x)$ são funções contínuas satisfazendo às condições

$$\begin{cases} \dot{x} f(\dot{x}) > 0, & \text{para } \dot{x} \neq 0 \\ x g(x) > 0, & \text{para } x \neq 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

Estas expressões têm o significado indicado na Fig. 3.10. A equação (3.68) pode representar por exemplo um sistema massa-mola-amortecedor em que as *forças* devidas ao amortecimento e à mola poderão seguir (3.69).

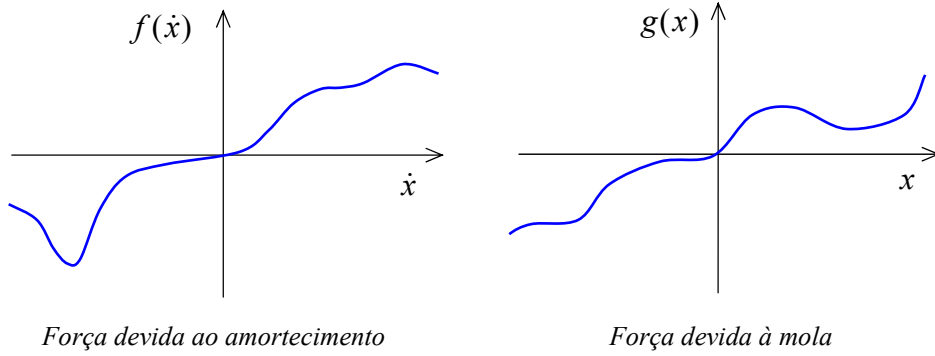


Fig. 3.10 – Forma das funções $f(\dot{x})$ e $g(x)$

Do ponto de vista físico, a imposição das condições (3.69) equivale a dizer que o coeficiente de amortecimento é positivo e a força exercida pela mola é resistente. Nestas condições é de esperar que as energias cinética e potencial do sistema vão diminuindo e que o sistema não fique bloqueado em nenhum ponto de equilíbrio diferente da origem. Considere-se a função

$$V(x) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x g(\xi) d\xi \quad (3.70)$$

que, no caso de se tratar de um sistema mecânico, poderá corresponder à sua energia total. A partir de $V(\mathbf{x})$ obtém-se, por derivação,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \ddot{x} \dot{x} + g(x) \dot{x} = -\dot{x} f(\dot{x}) - \dot{x} g(x) + g(x) \dot{x} = -\dot{x} f(\dot{x}) \leq 0 \quad (3.71)$$

Devido às condições impostas $\dot{x} f(\dot{x})$ só pode ser nula para $\dot{x} = 0$. Mas para $\dot{x} = 0$ tem-se $\ddot{x} = -g(x)$ que é diferente de zero sempre que $x \neq 0$, o que significa o que há pouco se afirmou, isto é, que o sistema não pode ficar preso em nenhum ponto de equilíbrio que não seja a origem. Considerando \mathbf{R} como o conjunto definido por $\dot{x} = 0$, o maior conjunto invariante \mathbf{M} contido em \mathbf{R} contém apenas o ponto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($x = 0, \dot{x} = 0$). A aplicação do teorema local do conjunto invariante indica que a origem é localmente assintoticamente estável.

Como além disto $\int_0^x g(\xi) d\xi \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$, $V(\mathbf{x})$ é radialmente ilimitada e portanto a origem é globalmente assintoticamente estável.

3.9. Estabilidade de sistemas não autónomos

Os conceitos de estabilidade de sistemas não autónomos são muito semelhantes aos que foram definidos para os sistemas autónomos. No entanto, uma vez que o tempo aparece explicitamente nas equações do sistema, é de esperar que este também apareça nas definições de estabilidade, e em particular surja o instante t_0 em que o sistema inicia a sua trajectória, em vez do instante 0.

3.9.1. Pontos de equilíbrio

Considere-se o sistema não autónomo, em regime livre, descrito pela equação

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] \quad (3.72)$$

em que $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$ é uma função *seccionalmente contínua no tempo* e indefinidamente diferenciável em relação a \mathbf{x} .

Designam-se por ***pontos de equilíbrio*** do sistema (3.72) todos aqueles em que para todo $t \geq t_0$ o estado é estacionário, ou seja,

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}_e(t), t] = 0, \quad \forall t > t_0 \quad (3.73)$$

É também de salientar que a extensão de determinados conceitos tem que ser feita com bastante cuidado, para não se chegar a conclusões erradas. Como exemplo tome-se o sistema linear massa mola amortecedor, em que o amortecimento $b(t) > 0$ varia com o tempo:

$$\ddot{x} + b(t)\dot{x} + k_0x = 0 \quad (3.74)$$

O único ponto de equilíbrio deste sistema é a origem, $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Aparentemente, uma vez que se trata de um sistema dissipativo, parece, à primeira vista, que se o movimento for iniciado num estado $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, este tenderá a convergir para o ponto de equilíbrio. Tal poderá não acontecer. Exemplifique-se com $b(t)=2+e^t$ e $k_0 = 0$ e inicie-se o movimento no instante $t=0$ com $x(0)=2$ e $\dot{x}(0) = -1$. A solução da equação é dada por $x(t)=1+e^{-t}$, que tende para 1 quando $t \rightarrow \infty$. Embora possa parecer paradoxal, que neste sistema, sendo $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ o ponto de equilíbrio, a solução não convirja para ele. A explicação, do ponto de vista físico, é simples: o amortecimento vai aumentando de tal forma que o sistema fica preso em $x = -1$ antes de chegar ao ponto de equilíbrio.

3.9.2. Estabilidade de um ponto de equilíbrio

O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ diz-se ***estável no sentido de Lyapunov, no instante t_0*** , se para qualquer $R>0$ existir $r(R, t_0)$ tal que para todo o $t \geq t_0$

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < R \quad (3.75)$$

O ponto de equilíbrio diz-se ***instável***, caso contrário.

Repare-se na diferença em relação à definição dada em 3.3.3.1, expressão (3.15), para sistemas autónomos: Aqui o valor de r depende também de t_0 .

De uma forma análoga à anterior define-se *estabilidade assintótica* e *estabilidade exponencial*, *estabilidade local* e *estabilidade global*. Há no entanto um conceito novo, que não aparecia nos sistemas autónomos: O de estabilidade uniforme.

O ponto de equilíbrio $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ do sistema não autónomo (3.72) diz-se *uniformemente estável* se o escalar r da definição acima puder ser escolhido independentemente do instante inicial t_0 , ou seja, $r=r(R)$. O conceito de estabilidade uniforme é extensível aos sistemas assintoticamente estáveis. Para um sistema não autónomo a estabilidade exponencial implica estabilidade uniforme.

3.9.3. Método directo de Lyapunov

A análise da estabilidade de um sistema autónomo por meio da função de Lyapunov pode ser estendida a sistemas não autónomos, embora com um formalismo um pouco mais complexo e com mais restrições. A função de Lyapunov vai agora depender *do estado e do tempo*, $V=V(\mathbf{x},t)$, como se verá a seguir.

3.9.3.1. Função definida positiva / negativa

Uma função escalar de um vector \mathbf{x} e de um escalar t diz-se *localmente positiva definida* se $V(\mathbf{0},t)=0$ e existir uma função $V_0(\mathbf{x})$ positiva definida, não dependente de t , tal que

$$V(\mathbf{x},t) \geq V_0(\mathbf{x}), \quad \forall t > t_0 \quad (3.76)$$

Repare-se que existe um *predomínio* de $V(\mathbf{x},t)$ sobre a correspondente função $V_0(\mathbf{x})$ independente do tempo.

De uma forma análoga define-se uma função globalmente positiva definida, negativa definida, positiva semidefinida e negativa semidefinida.

Há no entanto um conceito novo que não existe para os sistemas autónomos: o conceito de função decrescente.

Uma função $V(\mathbf{x},t)$ diz-se *decrescente* se $V(\mathbf{0},t)=0$ e existe uma função positiva definida invariante no tempo $V_1(\mathbf{x})$ tal que

$$V(\mathbf{x},t) \leq V_1(\mathbf{x}), \quad \forall t > t_0 \quad (3.77)$$

Exemplo 3-13 – Indicar se a função $V(\mathbf{x},t) = (1 + \sin^2 t)(x_1^2 + x_2^2)$ é pd e decrescente.

Uma vez que $1 \leq 1 + \sin^2 t \leq 2$, existe uma função $V_0(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2)$ positiva definida e independente do tempo, tal que $V(\mathbf{x},t) \geq V_0(\mathbf{x})$. Logo a função dada, variante no tempo, é positiva definida.

Por outro lado existe $V_1(\mathbf{x}) = 2(x_1^2 + x_2^2)$ tal que $V(\mathbf{x},t) \leq V_1(\mathbf{x})$ qualquer que seja t . Além disso é $V(\mathbf{0},t)=0$ e portanto a função dada é decrescente.

3.9.3.2. Cálculo da derivada de $V(\mathbf{x},t)$

Uma vez que $V(\mathbf{x},t)$ é uma função do tempo, explicitamente e também através da evolução do estado, para o cálculo da sua derivada utilizam-se as regras normais da derivação da função de várias variáveis e de função composta:

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) \equiv \frac{d}{dt}V(\mathbf{x},t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \quad (3.78)$$

e como $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x},t)$, vem

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x},t) \quad (3.79)$$

Isto significa que a derivada da função de Lyapunov deve ser calculada ao longo das trajectórias do sistema.

Os teoremas de Lyapunov sobre a estabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas não autónomos encontram-se resumidos na secção seguinte.

3.9.4. Teoremas de Lyapunov para sistemas não autónomos

Seja uma bola B_{R_0} de raio R_0 centrada no ponto de equilíbrio $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ do sistema não autónomo. Definem-se os seguintes conceitos de estabilidade:

3.9.4.1. Estabilidade no sentido de Lyapunov (nsLy)

Se existir uma função escalar $V(\mathbf{x},t)$ com derivadas parciais contínuas, tal que

- a) $V(\mathbf{x},t)$ é positiva definida,
- b) $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ é negativa semi-definida,

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ é **estável nsLy**.

3.9.4.2. Estabilidade uniforme

Se além de verificar as condições a) e b) anteriores e

- c) $V(\mathbf{x},t)$ for decrescente,

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ é **uniformemente estável**.

3.9.4.3. Estabilidade assintótica

Se em vez da condição b) se verificar

- d) $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ é negativa definida,

então o ponto de equilíbrio é **assimptoticamente estável**.

Se além da condição a) as condições c) e d) forem verificadas em simultâneo, o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ diz-se **uniforme e assintoticamente estável**.

3.9.4.4. Estabilidade global

Se a bola B_{R_0} considerada for todo o espaço de estados e se além das condições a) c) d) se verificar também

e) $V(\mathbf{x}, t)$ é radialmente ilimitada,

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}=0$ é global, uniforme e assintoticamente estável.

Exemplo 3-14

Determine a estabilidade do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -e^{-2t}x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

tomando como função de Lyapunov $V(\mathbf{x}, t) = (1 + e^{-2t})x_1^2 + x_2^2$.

Resolução:

A função $V(\mathbf{x}, t)$ é pd, uma vez que existe uma função independente do tempo, $V_0(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ tal que $V(\mathbf{x}, t) \geq V_0(\mathbf{x})$, para todo $t \geq t_0$.

Cálculo de $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = -2e^{-2t}x_1^2 + [2(1 + e^{-2t})x_1, 2x_2] \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -e^{-2t}x_1 - x_2 \end{bmatrix} = -2[x_2^2 - x_1x_2 + x_1^2(1 + e^{-2t})]$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = -(x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0$$

Como $V(\mathbf{x}, t)$ é radialmente ilimitada, conclui-se que o sistema é global, uniforme e assintoticamente estável.

3.9.5. Método directo de Lyapunov para sistemas lineares não autónomos.

Quando um sistema linear é não autónomo, não podem ser utilizados os métodos tradicionais de análise de sistemas autónomos para concluir sobre a sua estabilidade. O exemplo seguinte mostra a necessidade de se tomarem as devidas precauções com os sistemas não autónomos.

Seja o sistema linear não autónomo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

A matriz \mathbf{A} do sistema depende do tempo. Para determinar a estabilidade é-se tentado a determinar os valores próprios de $\mathbf{A}(t)$ e, a pensar que se estes estiveram sempre no semiplano complexo esquerdo, para todo $t > t_0$, que o sistema será estável. Tal no entanto é falso. O sistema acima admite um valor próprio duplo $\lambda = -1$ (no semiplano complexo esquerdo) e não é estável. Com efeito, a solução do sistema é, resolvendo primeiro em ordem a x_2 e depois em ordem a x_1

$$\begin{cases} x_2(t) = x_2(0)e^{-t} \\ \dot{x}_1(t) + x_1(t) = x_2(0)e^t \end{cases}$$

$x_1(t)$ tende para infinito e portanto o sistema não é estável.

Uma situação análoga a esta acontece com os sistemas discretos lineares variantes no tempo: o sistema pode ter os pólos sempre no interior da circunferência de raio 1 e não ser estável. A estabilidade de um sistema não autónomo é estabelecida no seguinte

Teorema:

Seja o sistema linear não autónomo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (3.81)$$

É **condição suficiente** para que o sistema (3.81) seja assintoticamente estável que a matriz (simétrica)

$$\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t) \quad (3.82)$$

tenha os valores próprios (reais) no semiplano complexo esquerdo, ou seja,

$$\forall t \geq t_0, \forall i, \quad \lambda_i[\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)] \leq -\lambda \quad (3.83)$$

Demonstração: Utilize-se a função de Lyapunov $V(\mathbf{x},t) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ para provar a estabilidade. $V(\mathbf{x},t)$ é pd e $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ é dado por

$$\dot{V}(\mathbf{x},t) = \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T(t)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T [\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)] \mathbf{x} \leq -\lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} = -\lambda V$$

$$\forall t \geq t_0, \quad 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{x} = V(t) \leq V(0)e^{-\lambda t}$$

e portanto $\mathbf{x}(t)$ tende exponencialmente para zero.

Repare-se que o teorema apresenta uma condição suficiente para que o sistema seja estável, mas não exige que os valores próprios de $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)$ se encontrem no semiplano complexo esquerdo.

3.9.6. O método da linearização para sistemas não autónomos

O método da linearização apresentado para sistemas autónomos pode ser estendido a sistemas não autónomos.

Seja o sistema não autónomo (3.72). O desenvolvimento do 2º membro do sistema em série de Taylor, em torno de $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$, conduz a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{os}(\mathbf{x},t) \quad (3.84)$$

Se a função $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ puder ser aproximada por (3.84) em qualquer instante, deverá ter-se

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \sup \frac{\|\mathbf{f}_{os}(\mathbf{x},t)\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0 \quad (3.85)$$

Nestas condições o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (3.86)$$

designa-se por sistema linearizado de $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$, em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Repare-se que a matriz \mathbf{A} , Jacobiano do sistema não autónomo, é de um modo geral função do tempo, podendo no entanto ser constante. Note-se ainda que, em relação aos sistemas autónomos, a linearização exige que seja satisfeita a condição adicional (3.85). Nestas condições, obtido o sistema (3.86) por linearização de (3.72), e obedecendo às condições (3.85), tem-se o seguinte:

3.9.6.1. Teorema

Se o sistema linearizado for uniforme e assintoticamente estável, então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e=\mathbf{0}$ do sistema não autónomo original é também uniforme e assintoticamente estável.

Chama-se a atenção para a exigência de estabilidade uniforme do sistema linearizado, sem a qual o teorema não é válido. Repare-se ainda que, contrariamente ao que acontece com o caso autónomo, a instabilidade do sistema linearizado não implica a instabilidade do sistema original. A menos que $\mathbf{A}(t)$ seja constante, como se indica no seguinte

3.9.6.2. Teorema

Se $\mathbf{A}(t)$ for constante, $\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}_0$, então a instabilidade do sistema linearizado implica a instabilidade do sistema original.

3.9.7. Teoremas sobre instabilidade

Os teoremas que se seguem utilizam o método directo de Lyapunov e aplicam-se tanto a sistemas autónomos com não autónomos. Indicam condições suficientes para que um sistema seja instável.

Considere-se o sistema (3.72) em que \mathbf{f} poderá não depender explicitamente do tempo.

3.9.7.1. Primeiro teorema sobre instabilidade

Se numa região Ω em torno da origem existir uma função escalar $V(\mathbf{x},t)$, contínua, diferenciável e decrescente, tal que

- $V(\mathbf{0},t) = 0, \quad \forall t \geq t_0,$
- $V(\mathbf{x},t_0) > 0$ numa região arbitrária próxima da origem,
- $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ é localmente definida positiva,

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e=\mathbf{0}$, no instante t_0 , é instável.

3.9.7.2. Segundo teorema sobre instabilidade

Se numa região Ω em torno da origem existir uma função escalar $V(\mathbf{x},t)$, contínua, diferenciável e decrescente, tal que

- $V(\mathbf{0},t) = 0$,
- $V(\mathbf{x},t_0) > 0$ numa região arbitrária próxima da origem,
- $\dot{V}(\mathbf{x},t) - \lambda V(\mathbf{x},t) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ e $\forall t \geq t_0$

em que $\lambda \in \mathbb{R}^+$, então a origem é um ponto de equilíbrio instável.

3.9.7.3. Terceiro teorema sobre instabilidade

Se numa região $\Omega_1 \in \Omega$ em torno da origem existir uma função escalar $V(\mathbf{x},t)$, contínua, diferenciável e decrescente, tal que $\forall t \geq t_0$

- $V(\mathbf{x},t)$ e $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ são positivas definidas em Ω_1 ,
- A origem é um ponto fronteiro de Ω_1 ,
- Em todos os pontos fronteiros de Ω_1 $V(\mathbf{x},t) = 0$, $\forall t \geq t_0$,

então, no instante t_0 , a origem é um ponto de equilíbrio instável.

A interpretação geométrica deste teorema encontra-se na Fig. 3.11.

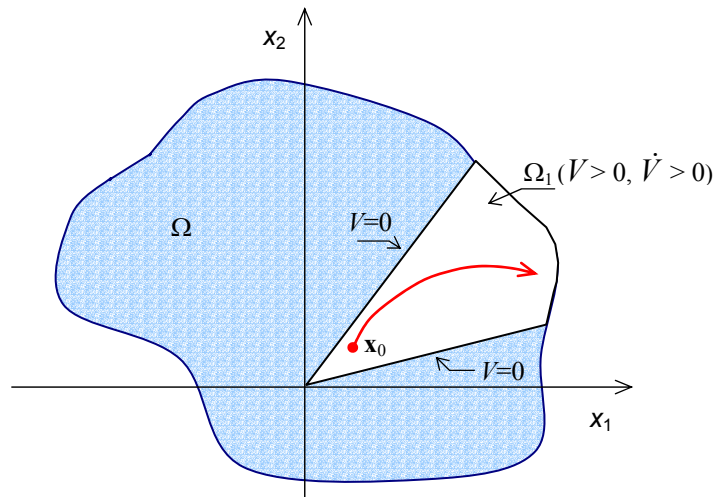


Fig. 3.11 – Interpretação geométrica do 3º teorema sobre instabilidade.

3.10. Existência de funções de Lyapunov

Até aqui obtiveram-se as funções de Lyapunov de um determinado sistema sem ter a garantia precisa da sua existência: se fossem observados determinadas condições em relação ao sistema, construía-se uma função candidata a função de Lyapunov.

Os teoremas que se seguem, designados por **teoremas recíprocos** de Lyapunov, estabelecem condições para a existência de função de Lyapunov associadas a um sistema. Consoante o tipo de estabilidade, isto é, local, global, uniforme, assintótica, etc., existe um teorema recíproco de Lyapunov sobre a existência de uma função de Lyapunov.

3.10.1. Teorema recíproco, ponto de equilíbrio estável

Se a origem do sistema (3.72) for estável nsLy existe uma função positiva definida $V(\mathbf{x}, t)$, com derivada não positiva ao longo da trajectória do sistema.

Este teorema garante que sempre que o ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de um sistema não autónomo representado por (3.72) é estável nsLy, existe uma função de Lyapunov que lhe está associada (e portanto existem infinitas).

3.10.2. Teorema recíproco, estabilidade assintótica e uniforme

Se a origem do sistema (3.72) for assintoticamente estável, então existe uma função $V(\mathbf{x}, t)$, positiva definida e decrescente, com derivada negativa definida ao longo da trajectória do sistema.

3.10.3. Teorema recíproco, estabilidade exponencial

Se a origem do sistema (3.72) for exponencialmente estável, e se a função $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ tiver derivadas parciais contínuas, e limitadas, então existe uma função escalar $V(\mathbf{x}, t)$ positiva se e só se existirem constantes estritamente positivas α_1 , α_2 , α_3 e α_4 tais que

$$\alpha_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2 \|\mathbf{x}\|^2$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\alpha_3 \|\mathbf{x}\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right\| \leq \alpha_4 \|\mathbf{x}\|$$

Demonstração em Sastry/Bodson-1989, Teorema 1.5.1.

3.11. Estabilidade absoluta

3.11.1. Sistema linear com realimentação não linear

Neste capítulo vai-se estudar um tipo de sistemas em que o percurso directo é linear e invariante no tempo e a realimentação é constituída por uma não linearidade estática, como se representa na Fig. 3.12. Este tipo de sistemas aparece com alguma frequência em casos de interesse prático.

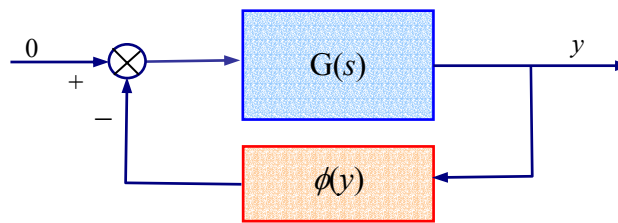


Fig. 3.12 – Sistema linear com realimentação não linear.

A função de transferência $G(s)$ obtém-se a partir do modelo de estado por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}b \quad (3.87)$$

Se a função $\phi(y)$ fosse linear, por exemplo $\phi(y)=kx$, a estabilidade do sistema poderia ser estudada calculando os valores próprios da matriz do sistema em cadeia fechada $A-bkC$. Como $\phi(y)$ não é linear, a análise da estabilidade do sistema em cadeia fechada torna-se mais complicada do que no caso linear. No entanto, se se obrigar $\phi(y)$ a satisfazer determinadas condições, designadas **condições sectoriais**, apresentadas a seguir, já é possível efectuar a análise da estabilidade do sistema.

3.11.1.1. Função pertencente a sector

Uma função contínua ϕ **pertence ao sector** $[k_1, k_2]$ se existirem dois números não negativos k_1 e k_2 tais que

$$y \neq 0 \Rightarrow k_1 \leq \frac{\phi(y)}{y} \leq k_2 \quad (3.88)$$

Geometricamente a condição (3.88) implica que o gráfico da função não linear $\phi(y)$ está localizado entre duas rectas com declive k_1 e k_2 , como se mostra na Fig. 3.13.

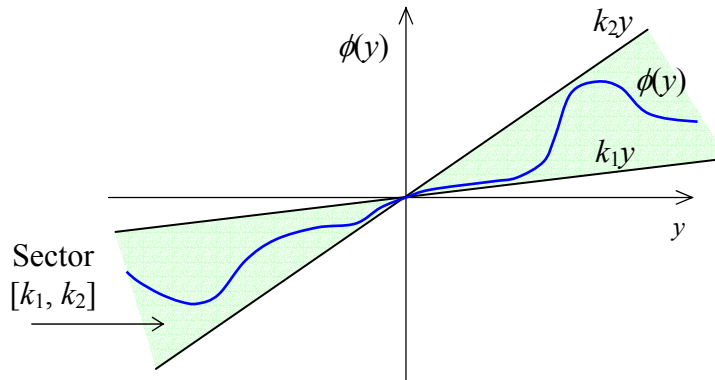


Fig. 3.13 – Função pertencente a um sector.

A definição (3.88) implica que $\phi(0) = 0$ e que $y\phi(y) \geq 0$, isto é, o gráfico de $\phi(y)$ está localizado no 1º e 3º quadrantes, uma vez que k_1 e k_2 são não negativos.

Um caso particular com interesse é aquele em que $k_1 = 0$, dizendo-se então que a função *pertence ao sector* $[0, k]$ quando

$$\exists k > 0 \therefore 0 \leq \phi(y) \leq ky \quad (3.89)$$

Admitindo que a não linearidade $\phi(y)$ pertence ao sector $[k_1, k_2]$, a pergunta que se põe é a seguinte: Se o sistema em cadeia aberta $G(s)$ for estável, que condições deverão ser impostas a $\phi(y)$ para que o sistema em cadeia fechada seja estável?

A intuição levaria a pensar, uma vez que o ganho de realimentação está compreendido entre k_1 e k_2 se ϕ for linear, que tal propriedade poderia ser explorada com ϕ não linear. Tal foi a hipótese feita por Aizerman⁽⁴⁾ em 1949: se a matriz $[A - bkC]$ for estável para todos os valores de k compreendidos no intervalo $[k_1, k_2]$, então o sistema não linear é global e assintoticamente estável.

A hipótese de Aizerman, aparentemente muito interessante, porque permitia estudar a estabilidade de uma determinada classe de sistemas não lineares a partir de sistemas lineares, *revelou não ser verdadeira*. Ela não considerou a variação de ϕ com y , que pode conduzir à instabilidade do sistema. Após uma intensa pesquisa neste campo foram estabelecidos novos critérios para determinar a estabilidade deste tipo de sistemas em cadeia fechada.

⁴ M. A. Aizerman, cientista Soviético,

3.11.2. Critério de Popov

O critério de Popov⁽⁵⁾ estabelece uma condição suficiente para a estabilidade do sistema em cadeia fechada. Considere-se o sistema apresentado na Fig. 3.12. Se forem satisfeitas as condições seguintes:

A matriz **A** tem todos os valores próprios no semiplano complexo esquerdo,

O par **[A,b]** é controlável⁶,

A não linearidade ϕ pertence ao sector $[0, k]$,

Existe um número real positivo, α , tal que

$$\forall \omega \geq 0 \quad \operatorname{Re}([1 + j\alpha\omega)G(j\omega)] + \frac{1}{k} > \varepsilon \quad (3.90)$$

em que $\varepsilon > 0$ é arbitrariamente pequeno,

então a origem é global e assintoticamente estável.

A relação (3.90) tem o nome de **desigualdade de Popov**. Repare-se que os tipos de sistemas representados na Fig. 3.12 aos quais se aplica o critério de Popov, são lineares autónomos e com realimentação não linear estática. O critério estabelece apenas uma condição suficiente de estabilidade e não necessita de recorrer a nenhuma função de Lyapunov.

O critério de Popov tem uma interpretação geométrica interessante. Fazendo

$$G(j\omega) = G_r(j\omega) + jG_j(j\omega) \quad (3.91)$$

a expressão (3.90) escreve-se

$$G_r(j\omega) - \alpha\omega G_j(j\omega) + \frac{1}{k} > \varepsilon \quad (3.92)$$

Construa-se uma *função de transferência associada* $W(j\omega)$ com a mesma parte real que $G(j\omega)$ mas com a parte imaginária igual a $\omega I_m[G(j\omega)]$:

$$W(j\omega) = x + jy = G_r(j\omega) + j\omega G_j(j\omega) \quad (3.93)$$

Com esta nomenclatura, a relação (3.92) implica que o sistema não linear é global e assintoticamente estável se sobre o plano complexo (x,y) a representação de $W(j\omega)$ estiver para baixo da recta $x - \alpha y + 1/k = 0$. Na Fig. 3.14 estão traçados o diagrama $W(j\omega)$, designado por **diagrama de Popov**, e a recta que efectua a separação das regiões, da estabilidade e instabilidade.

⁵ Alexander Stephanovitch Popov, Engº Electrotécnico Russo, 1859-1906.

⁶ Um sistema linear caracterizado pela equação de estado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu}$ é controlável se e só se o determinante da matriz de controlabilidade $\mathbf{Co} = [\mathbf{b}|\mathbf{Ab}|\dots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$ for diferente de zero.

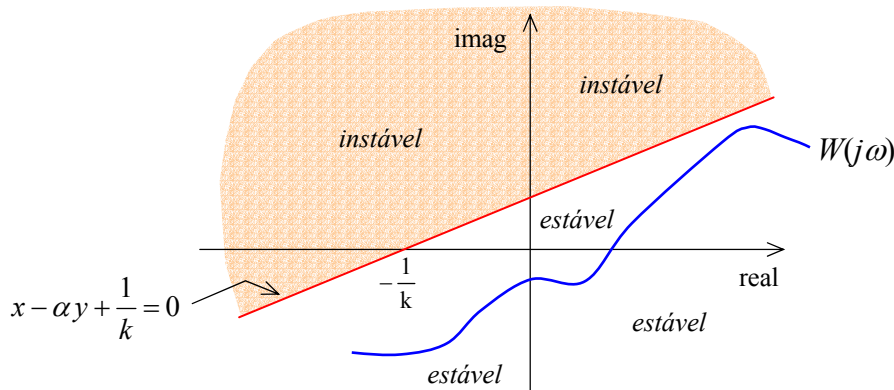


Fig. 3.14 – Diagrama de Popov.

Exemplo 3-15

Determine a estabilidade de um sistema não linear com a estrutura do que é apresentado na Fig. 3.12, em que o bloco linear é definido por

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+7s+10} \quad (3.94)$$

e a realimentação não linear é definida por (3.89).

Resolução:

1. Pólos de $G(j\omega)$: $s^2+7s+10=0 \Rightarrow p_1=-2, p_2=-5$, logo, o sistema obedece à condição a) do critério de Popov, ou seja, é estritamente estável.
2. A função de transferência não tem cancelamento de zeros e pólos, e portanto o sistema obedece à condição b).
3. A não linearidade pertence ao sector $[0, k]$, por hipótese.
4. Para a determinação da desigualdade de Popov, determinam-se primeiro as partes reais e imaginária de $G(j\omega)$: Substituindo $s \rightarrow j\omega$ em (3.94) vem

$$G(j\omega) = \frac{3+j\omega}{(10-\omega^2)+7j\omega}$$

e portanto

$$G_r(j\omega) = \frac{4\omega^2+30}{\omega^4+29\omega^2+100} \quad \text{e} \quad G_j(j\omega) = \frac{-\omega(\omega^2+11)}{\omega^4+29\omega^2+100}$$

Substituindo em (3.92) vem

$$\omega^4+29\omega^2+100+\alpha\omega^2(\omega^2+11)+\left(\frac{1}{k}-\varepsilon\right)(\omega^4+29\omega^2+100)>0$$

Esta desigualdade é satisfeita para qualquer α estritamente positivo e para qualquer número k tal que $0 < k < \infty$, pelo que o sistema dado é global e assintoticamente estável.

3.11.3. Critério do círculo

Este critério, como o anterior, aplicável a sistemas com o trajecto directo linear e realimentação não linear estática, sujeito às condições impostas atrás, é uma generalização do Teorema de Nyquist para este tipo de sistemas.

Considere-se o sistema apresentado na Fig. 3.12. Se forem satisfeitas as condições seguintes

- a) A matriz \mathbf{A} não tem valores próprios sobre o eixo $j\omega$ e tem p valores próprios no semiplano complexo direito,
- b) A não linearidade ϕ pertence ao sector $[k_1, k_2]$,
- c) Verifica-se uma das condições:
 - c₁) $0 < k_1 \leq k_2$ e o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ não entra no disco $D(k_1, k_2)$ (Fig. 3.15) e envolve-o p vezes no sentido contrário aos ponteiros do relógio,
 - c₂) $0 = k_1 < k_2$ e o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ permanece no semi-plano $\text{Re}(s) \geq -1/k_2$,
 - c₃) $k_1 < 0 < k_2$ e o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ permanece no interior do disco $D(k_1, k_2)$,
 - c₄) $k_1 < k_2 < 0$ e o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ não entra no disco $D(-k_1, -k_2)$ e envolve-o p vezes no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio,

então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ é global e assintoticamente estável.

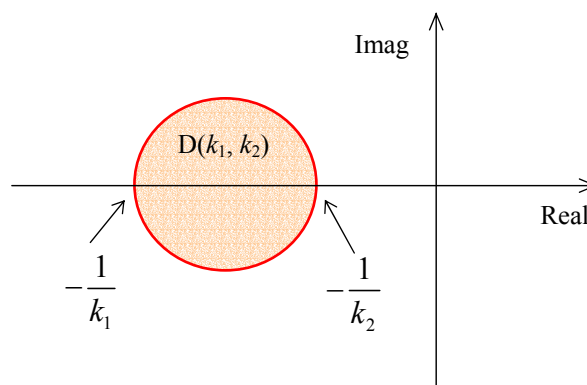


Fig. 3.15 – Diagrama do círculo.

3.12. Problemas resolvidos

Probl. 3-1

Obter a linearização do sistema a seguir indicado, calculando a matriz Jacobiana e utilizando o método expedito.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

Resolução:

O ponto de equilíbrio deste sistema é $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$.

Neste sistema tem-se $f_1(x_1, x_2) = -x_1 + x_1x_2$ e $f_2(x_1, x_2) = -x_2$, sendo a matriz Jacobiana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_1=0, x_2=0} = \begin{bmatrix} -1 & x_1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{x_1=0, x_2=0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O sistema linearizado é igual ao anterior e dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para obter este mesmo sistema pelo método expedito poderia simplesmente desprezar-se o termo de 2ª ordem, na primeira equação, x_1x_2 .

Probl. 3-2

Determine o tipo de estabilidade dos seguintes sistemas:

- a) $\dot{x} = -x^3$
- b) $\dot{x} = -x^{1/2}$
- c) $\dot{x} = \sin(x)$

Resolução:

- a) O sistema admite como ponto de equilíbrio $x = 0$. A equação pode escrever-se na forma $-x^{-3}dx = dt$, que integrada membro a membro entre os instantes 0 e t , aos quais correspondem os estados x_0 e x , conduz a $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} = 2t$, ou ainda

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2} + 2t}}. \text{ Quando } t \rightarrow \infty \text{ } x(t) \text{ tende para zero com } \frac{1}{\sqrt{2t}}, \text{ pelo que o sistema}$$

é assintoticamente estável nsLy, mas não é exponencialmente estável, pois decai de uma forma mais lenta que qualquer exponencial.

- b) O ponto de equilíbrio deste sistema é $x = 0$. Como para o sistema da alínea anterior, efectuando a separação de variáveis e integrando entre 0 e t , obtém-se $[-2x^{\frac{1}{2}}]_{x_0}^x = t$, o que conduz a $x(t) = (x_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}t)^2$. Esta solução tende para infinito com t , pelo que o sistema é instável nsLy.
- c) Os pontos de equilíbrio deste sistema são $x=k\pi$, com $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Como anteriormente, separando as variáveis e integrando entre 0 e t obtém-se $\left[\ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)\right]_{x_0}^x = t$, ou seja, $\tan \frac{x}{2} = e^{-\ln(\tan \frac{x_0}{2}) + t} = ke^t$, donde $x(t) = 2 \arctan(ke^t)$. Quando $t \rightarrow \infty$ $x(t)$ tende para $\pm\pi$, consoante o valor de x_0 seja positivo ou negativo.

3.13. Problemas propostos

Probl. 3-3

Determine os pontos de equilíbrio dos seguintes sistemas autónomos:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{cases} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

Probl. 3-4

Determine o tipo de estabilidade dos seguintes sistemas:

$$\text{a) } \dot{x} = -x^2 \quad \text{b) } \dot{x} = -x^{-1/2} \quad \text{c) } \dot{x} = a \cos(x) \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Probl. 3-5

Obtenha os sistemas linearizados correspondentes a:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = k \operatorname{sen} x_1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}^+ \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \cos x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + \operatorname{sen} x_2 \end{cases}$$

Probl. 3-6

Utilizando o teorema da linearização de Lyapunov, determine a estabilidade dos pontos de equilíbrio dos seguintes sistemas

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(1 + \cos x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1(1 + \operatorname{sen} x_2) \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \operatorname{sen}(x_1 + x_2) \end{cases}$$

Probl. 3-7

Mostre que $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ é uma função de Lyapunov, para a origem, para cada um dos seguintes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

Probl. 3-8

Mostre que a função $V(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ é definida positiva se e só se $a > 0$ e $4ac - b^2 > 0$ sendo definida negativa se $a < 0$ e $4ac - b^2 > 0$.

Probl. 3-9

Considere o sistema de 1ª ordem representado pelo modelo de estado

$$\dot{x} = -x(1+x)$$

em que x é escalar e está sujeito à condição inicial $x(0) = x_0$.

- Determine os seus pontos de equilíbrio.
- Obtenha analiticamente a solução.
- Com o auxílio do Matlab faça num só gráfico o traçado das soluções que se iniciam entre -1 e $+1$ (degraus de 0.1), para o tempo compreendido entre 0 e 6 segundos.
- Análoga à anterior, para x_0 compreendido entre -1.5 e -0.8 (degraus de 0.1), para $0 \leq t \leq 1$ s.
- Escreva de novo a solução para os valores particulares $x_0 = 0.5$ e $x_0 = -1.5$. Alguma delas exhibe tempo de escape finito? Se sim qual delas e qual o seu valor?
- Com o auxílio dos dados obtidos até aqui indique quais as bacias de atracção e qual a(s) separatriz(es).
- A partir do conhecimento que já tem do sistema indique qual o tipo de estabilidade nsLy dos pontos de equilíbrio, justificando com o uso da definição e dizendo quais os domínios a considerar para R e $r(R)$.
- Linearize o sistema em torno de $x_e = 0$. A partir da estabilidade do sistema linearizado conclua sobre a estabilidade de $x_e = 0$ do sistema dado. Que teorema utilizou?
- Análogo ao anterior, para $x_e = -1$.

Probl. 3-10

Considere um sistema de 2ª ordem representado pelo modelo de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2(1 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1(1 + x_1^2) - 0.4x_2 \end{cases}$$

- Determine os seus pontos de equilíbrio.
- Com o auxílio do Matlab faça o traçado do campo de vectores na região do espaço de estados constituída por um rectângulo tal que $-2 \leq x_1 \leq 2$ e $-2 \leq x_2 \leq 2$. Sobre ele represente uma trajectória que se inicie em $\mathbf{x} = [1.5 \ -1]^T$ e dure 20 segundos.
- Linearize o sistema em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e=0$. Determine a estabilidade do sistema linearizado e a partir dela, utilizando o teorema de Lyapunov da linearização, conclua sobre a estabilidade do sistema dado.
- Usando o teorema de Krasovskii determine a estabilidade do sistema dado.
- Com os resultados da alínea anterior obtenha uma função de Lyapunov para o sistema dado. Verifique que é positiva definida e que a sua derivada em ordem ao tempo é negativa definida.
- Com o auxílio do Matlab trace um gráfico de $V(\mathbf{x})$, com \mathbf{x} pertencente ao domínio dado em b). Sugestão: Use um ciclo “for” dentro de outro ciclo “for” para x_1 e x_2 e a instrução “surf” ou “mesh”. Trace também as curvas de nível de $V(\mathbf{x})$.

Probl. 3-11

Considere um sistema linear de realimentado negativamente por uma função $\varphi(y)$:

$$\text{Sistema linear: } G(j\omega) = \frac{a}{s^2 + s + 0.29}, \quad \varphi(y) = y \sin^2 y \quad (a=1.4)$$

- Com o auxílio do critério de Popov determine a estabilidade deste sistema.
- Represente este sistema em Simulink e confirme o resultado obtido em a).

4. MÉTODO DA FUNÇÃO DESCRITIVA

4.1. Função Descritiva

Considere-se um sistema não linear com a entrada excitada por um sinal sinusoidal de amplitude U e frequência ω_0 ,

$$u(t) = U \sin(\omega_0 t) \quad (4.1)$$

A saída do sistema, $y(t)$, será também periódica mas não sinusoidal. O seu desenvolvimento em *série de Fourier* é dado por

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (4.2)$$

ou, equivalentemente

$$y(t) = \frac{Y_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (4.3)$$

Chama-se *função descritiva* do sistema à função complexa N tal que

$$|N| = \frac{Y_1}{U} \quad \arg N = \varphi_1 \quad (4.4)$$

em que Y_1 é a amplitude da primeira harmónica da resposta e φ_1 a sua defasagem em relação ao sinal de entrada.

Se o sistema for linear, na expressão (4.3) apenas subsistem os termos em que $n=1$; Nestas condições N transforma-se no **ganho** do sistema (módulo N e argumento φ_1).

Para efectuar o cálculo da função descritiva convém recordar as expressões que permitem calcular os coeficientes A_n e B_n da série de Fourier

$$A_n = \frac{2}{T} \int_T y(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (4.5)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_T y(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (4.6)$$

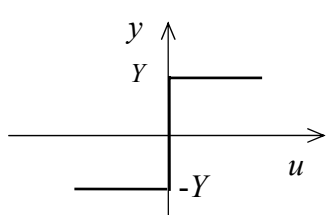
$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (4.7)$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{A_n}{B_n}\right) \quad (4.8)$$

Se $y(t)$ é par, $y(t) = y(-t)$, tem-se $B_n = 0$. Se $y(t)$ é ímpar, $y(t) = -y(-t)$, é $A_n = 0$, para $n \geq 1$. A_0 é o valor médio do sinal de saída.

4.2. Função descritiva de não linearidades correntes.

A aplicação das fórmulas acima permite efectuar o cálculo de algumas funções descritivas correntes. U designa a amplitude do sinal sinusoidal de entrada, estando os restantes símbolos definidos nas figuras.

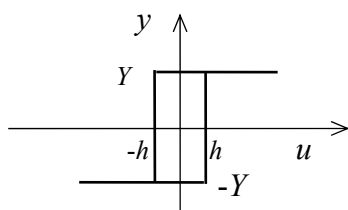


Liga-desliga, “on-off” ou tudo ou nada

$$N = \frac{4Y}{\pi U} e^{j0} \quad (4.9)$$

(O cálculo encontra-se efectuado no Probl.4.1)

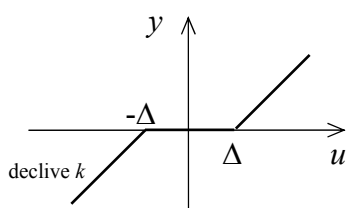
Fig. 4.1 – Função descritiva da característica liga-desliga



Liga-desliga, com histerese

$$N = \frac{4Y}{\pi U} e^{j[-\arctan(\frac{h}{U})]} \quad (4.10)$$

Fig. 4.2 – Função descritiva da característica liga-desliga com histerese



Zona morta

$$N = k - \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{\Delta}{U}\right) + \left(\frac{\Delta}{U}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{U}\right)^2} \right] e^{j0} \quad (4.11)$$

Fig. 4.3 – Função descritiva da característica zona morta

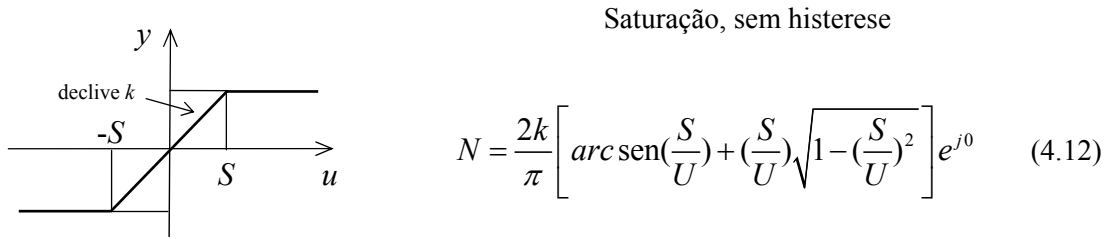


Fig. 4.4 – Função descritiva da característica saturação sem histerese

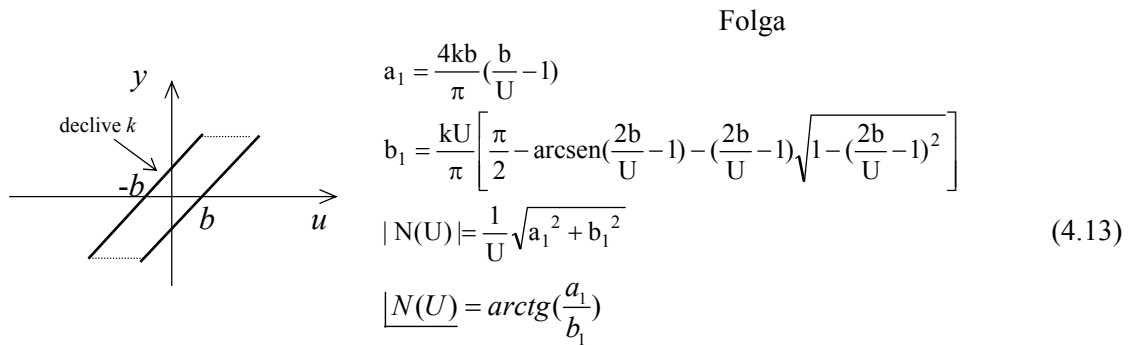


Fig. 4.5 – Função descritiva da característica folga

4.3. Estabilidade pelo método da função descritiva.

Se um sistema não linear tiver uma estrutura tal que se for excitado por uma entrada sinusoidal as harmónicas de ordem superior à primeira contidas na resposta forem suficientemente atenuadas, então a estabilidade do sistema pode ser analisada pelo método da função descritiva.

Admita-se que se tem um sistema em cadeia fechada satisfazendo essas condições, e que é possível agrupar os elementos não lineares numa função descritiva N , e os elementos lineares num outro bloco, G (Fig. 4.6). A função de transferência do sistema é dada por

$$Y = \frac{GN}{1 + GN} R \quad (4.14)$$

A equação característica é dada por $1 + GN = 0$ pelo que resolvendo em ordem a G

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(U, \omega)} \quad (4.15)$$

A expressão (4.15) indica que o ponto -1 do diagrama de Nyquist é substituído aqui pelo lugar geométrico de $-1/N$.

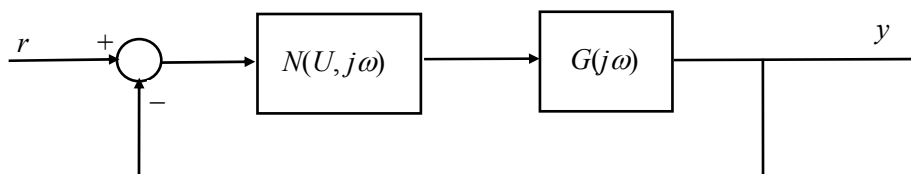


Fig. 4.6 – Sistema de controlo não linear.

A função de transferência dos elementos lineares $G(j\omega)$ depende da frequência. $N(\omega, U)$ além de depender da frequência depende ainda da amplitude do sinal U .

A condição de estabilidade pode enunciar-se da seguinte forma

O sistema em cadeia fechada constituído pelos elementos não lineares N e pelos elementos lineares G , supostos de fase mínima ⁽¹⁾, é estável se o lugar geométrico de G não envolver o lugar geométrico de $-1/N$.

Se os dois diagramas se intersectarem, o sistema poderá apresentar oscilações em regime permanente. Estas oscilações não são sinusoidais, embora possam considerar-se aproximadamente como tal. A frequência da harmónica fundamental pode ser lida no diagrama de G e a sua amplitude no lugar geométrico de $-1/N$.

Admita-se que os diagramas de G e $-1/N$ se intersectam, como indica a Fig. 4.7. Sobre o diagrama de $-1/N$ convém indicar qual o sentido a que corresponde o aumento e a diminuição de amplitude de oscilação.

Na figura estão representados dois pontos de intersecção, A e B. O ponto A corresponde a uma amplitude de uma possível oscilação inferior à do ponto B. Qual dos pontos é estável e qual é instável? Fixe-se a atenção sobre o ponto A. Admita-se que uma perturbação coloca o ponto A em A_1 . O ponto A_1 , fica fora do diagrama de $G(j\omega)$. A oscilação tenderá a diminuir. Se a perturbação tivesse conduzido $A \rightarrow A_2$, A_2 encontrava-se dentro do diagrama de $G(j\omega)$ e a oscilação tenderia a aumentar, o que aconteceria até se atingir o ponto B. O ponto A tem *características divergentes*, é portanto **instável**.

¹ Zeros no semi-plano complexo esquerdo, incluindo o eixo $j\omega$.

Considere-se agora o ponto de intersecção B e admita-se que a perturbação conduz $B \rightarrow B_1$. Como $G(j\omega)$ deixa de envolver B_1 a amplitude tenderá a diminuir, ou seja B_1 regressa a B. Finalmente admita-se que a perturbação conduz $B \rightarrow B_2$. O novo ponto B_2 fica envolvido por $G(j\omega)$; estabelece-se uma oscilação, a amplitude aumenta e B_2 volta para B. O ponto B tem *características convergentes*, é pois *estável*.

A frequência de oscilação pode ser obtida directamente do diagrama de $G(j\omega)$, e a amplitude da primeira harmónica a partir do diagrama de $-1/N$, também no ponto de intersecção B.

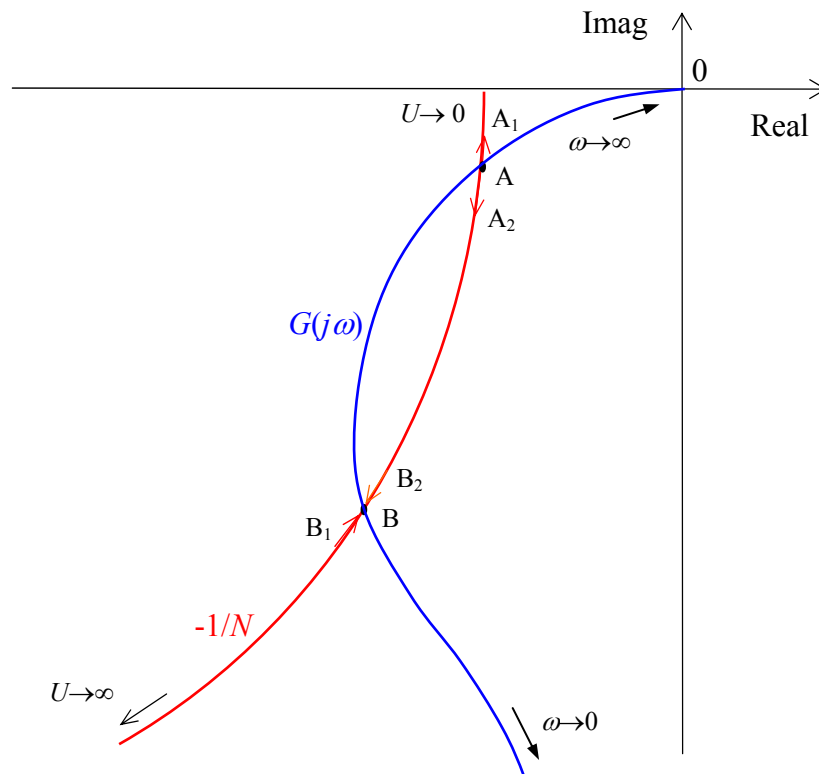


Fig. 4.7 – Estabilidade de um sistema não linear.

Se as curvas de $G(j\omega)$ e $-1/N$ se intersectarem quase na perpendicular a precisão com que se obtém os valores de ω e U é boa.

Repare-se que os valores obtidos são aproximados uma vez que se está a ignorar o efeito das restantes harmónicas.

4.4. Problemas Resolvidos

Probl. 4-1

Obtenha a função descritiva da não linearidade “liga/desliga” representada na Fig. 4.1

Resolução

Por definição, a função descritiva é a relação entre a amplitude da 1ª harmónica do sinal de saída e a amplitude do sinal de entrada. Represente-se a não linearidade sob a forma de um bloco, o sinal de entrada e o sinal de saída.



Com a entrada sinusoidal tem-se $u(t) = U \sin(\omega t)$ e $y(t) = \begin{cases} -Y, & u < 0 \\ +Y, & u > 0 \end{cases}$

$y(t)$ não se encontra bem definida para $t = kT$. Considerar-se-á o seu valor nulo nesses instantes.

Devido ao facto de se considerar $u(t)$ sinusoidal, $y(t)$ é também uma função ímpar, pelo que os coeficientes A_n em (4.5) são nulos, subsistindo apenas os coeficientes B_n da expressão (4.6). A função descritiva, N , será então obtida dividindo B_1 por U . Para o cálculo de B_1 utiliza-se a expressão (4.6) com $n=1$:

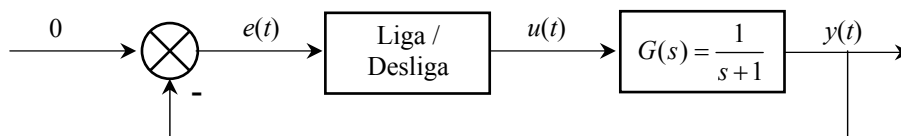
$$B_1 = \frac{2}{T} \int_T y(t) \sin(\omega t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} Y \sin(\omega t) dt + \int_{T/2}^T -Y \sin(\omega t) dt \right] =$$

$$= \frac{2Y}{\omega T} \left\{ [-\cos(\omega t)]_0^{T/2} + [\cos(\omega t)]_{T/2}^T \right\} = \frac{2Y}{\omega T} [-(-1+1) + (1+1)] = \frac{4Y}{\pi}$$

A função descritiva será $N = \frac{B_1}{U} = \frac{4Y}{\pi U}$. Para indicar que se trata de um valor real escreve-se por vezes $N = \frac{4Y}{\pi U} e^{j0}$.

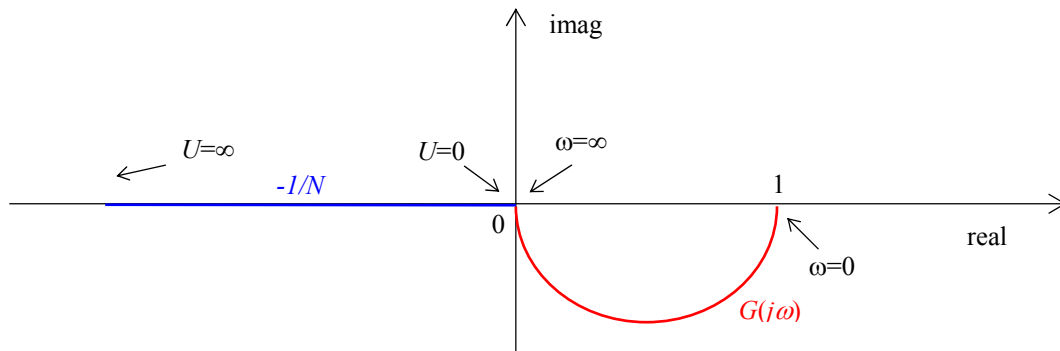
Probl. 4-2

Utilizando o método da F.D. determine a estabilidade do sistema em cadeia fechada constituído pela não linearidade liga/desliga anterior de amplitude 1, seguido de um sistema linear de 1ª ordem, como se indica na figura.



Resolução

Sobre o diagrama $G(j\omega)$ correspondente à função de transferência do sistema de 1ª ordem dado desenha-se o gráfico de $-\frac{1}{N} = -\frac{\pi U}{4}$, com se indica na Fig. 4.7.



Uma vez que os diagramas de $-1/N$ e de $G(j\omega)$ não se intersectam (apenas têm um ponto comum em que $U=0$), o sistema é estável.

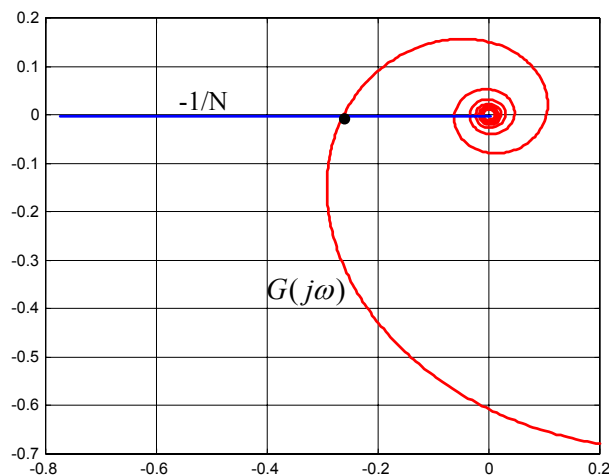
Probl. 4-3

Problema análogo ao anterior mas com um atraso de 0.5 segundos no processo.

Resolução

Como anteriormente, sobre o diagrama $G(j\omega)$ correspondente à função de transferência do sistema de 2ª ordem dado desenha-se o gráfico de $-\frac{1}{N} = -\frac{\pi U}{4}$. O problema resolve-se bem com o auxílio do Matlab. Exemplo de um programa para o efeito:

```
w=logspace(0,2,500); % cria escala logarítmica para as frequências
tau=0.5; % tempo de atraso
s=j*w; % escala de frequências, eixo imaginário
G=1./(s+1).*exp(-tau*s); % f.t. do processo com atraso
plot(real(G),imag(G)); % diagrama de Nyquist de G(jw)
hold on; % mantém o gráfico, para desenhar o próximo gráfico por cima
M=1; % amplitude da não linearidade
h=0.2; % valor da histerese
U=0.01:0.01:1; % amplitudes para o traçado de -1/N
FD=-(pi.*U/4/M); % Função descritiva
plot(real(FD),imag(FD)); % diagrama da f.d.
grid; % grelha sobre os gráficos
hold off; % liberta os gráficos
```



Uma vez que os diagramas de $-1/N$ e de $G(j\omega)$ se intersectam, o sistema é instável.

4.5. Problemas Propostos

Probl. 4-4

Obtenha a função descritiva da não linearidade “liga/desliga com histerese” da Fig. 4.2.

Probl. 4-5

Obtenha a função descritiva da não linearidade “zona morta” representada na Fig. 4.3.

Probl. 4-6

Obtenha a função descritiva da não linearidade “saturação” representada na Fig. 4.4.

Probl. 4-7

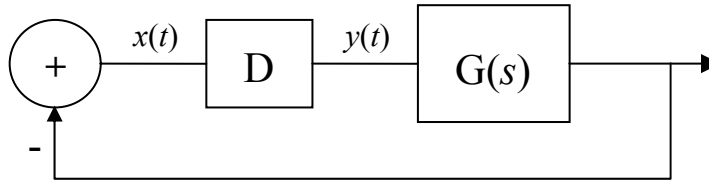
Obtenha a função descritiva da não linearidade “folga” representada na Fig. 4.5.

Probl. 4-8

Problema análogo ao Probl. 4-2, mas com $G(s) = \frac{-1.5}{s+1}$.

Probl. 4-9

Considere o sistema de retroação:



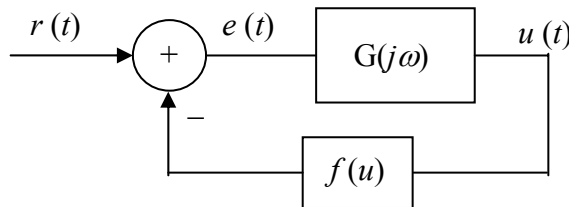
onde $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$.

O bloco D é uma *linha de atraso*, descrita por $y(t) = Kx(t - T_0)$.

- Considere $x(t) = A \cos(\omega t)$. Determine a função descritiva $N(A, \omega)$ do bloco D.
- Esboce o diagrama de Nyquist do sistema. Sobreponha o gráfico $-1/N(A, \omega)$.
- Quais são as condições sobre T_0 que permitem que o sistema entre em oscilação? Estas oscilações são estáveis ou instáveis? Qual a variação da frequência e amplitude com T_0 e K ? Justifique.

Probl. 4-10

Considere o sistema representado abaixo:



Onde $G(j\omega) = \frac{10}{s^2 + s + 1}$ e $f(u) = u^3$.

- Determine a função descritiva de $f(u)$.
- Admita que $r(t) = \cos(\omega t)$. Demonstre que a equação que descreve o sistema é:

$$G^{-1}(u) = r - f(u)$$

Substituindo f pela sua função descritiva demonstre que a equação acima é aproximada por:

$$\frac{3}{4}U^3 + G^{-1}(j\omega)U = e^{j\phi}$$

Sugestão: Faça $u(t) = U \cos(\omega t + \phi)$ e lembre-se que $G(j\omega)$ apenas altera a amplitude e fase inicial de um sinal sinusoidal.

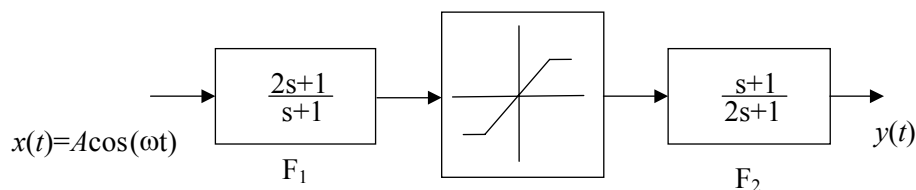
- Considerando ω fixo, represente graficamente utilizando o Matlab, o lado esquerdo da equação obtida na alínea anterior. Note que o lado direito da mesma

equação representa um ponto sobre o círculo unitário. Qual o significado físico das possíveis intersecções (para um dado ω)? Sugestão: lembre-se que, por hipótese, os sinais que circulam no sistema são puramente sinusoidais.

- d) Investigue o que acontece quando, no gráfico anterior, ocorrem três intersecções. Mais precisamente, fixe uma frequência onde isto ocorra e varie a frequência do sinal de entrada $r(t)$ numa vizinhança da primeira. O que é que acontece à amplitude do sinal $u(t)$.

Probl. 4-11

Considere o seguinte sistema



Admita que a função descritiva da saturação é:

$$N(A, \omega) = \begin{cases} 1, & A \leq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left(\arcsin\left(\frac{1}{A}\right) + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} \right) & A > 1 \end{cases}$$

Onde A e ω são, respectivamente, a amplitude e a frequência angular do sinal $x(t)$.

- Determine o ganho de alta frequência do filtro F_1 ($\lim_{\omega \rightarrow \infty} F_1(j\omega)$) e o ganho de baixa frequência do filtro F_2 . Determine o sinal de saída $y(t)$ se $A < 1$.
- Mantendo a aproximação do sistema pela sua função descritiva, determine a amplitude de $y(t)$ para qualquer A .
Sugestão: qual é a relação entre $|F_1(j\omega)|$ e $|F_2(j\omega)|$?
- Que tipo de filtragem é feita por este sistema? Qual é a função dos filtros F_1 e F_2 ? Qual é a defasagem entre $y(t)$ e $x(t)$ (considere o sistema aproximado).
Sugestão: note que os filtros F_1 e F_2 estão relacionados.

Probl. 4-12

Demonstre que se um elemento não-linear não tem dinâmica, ou seja, é dado por $y=N(u)$, então a sua função descritiva é independente da frequência.

Sugestão: considere dois sinais de entrada com frequências diferentes $r_1=\cos(\omega_1 t)$ e $r_2=\cos(\omega_2 t)$. Note que $r_1(t)=r_2((\omega_1/\omega_2)t)$. Escreva a expressão integral da 1ª harmónica de $N(r_1)$ e através de uma mudança conveniente de variáveis, demonstre que é igual à 1ª harmónica de $N(r_2)$.

5. LINEARIZAÇÃO EXACTA POR REALIMENTAÇÃO

5.1. Uma primeira abordagem

A *linearização exacta por realimentação* é um procedimento que permite transformar a dinâmica de um sistema não linear numa dinâmica linear, através de uma *realimentação não linear* do estado ou da saída, convenientemente escolhida. Para atingir este objectivo torna-se quase sempre necessário efectuar uma mudança de variável de estado e introduzir uma variável de entrada auxiliar. Depois de ter o sistema não linear modificado de modo a que o todo se comporte como linear, é possível utilizar técnicas lineares, bem conhecidas e mais poderosas do que as não lineares, para se efectuar o controlo do sistema original. O método, para poder ser aplicado, exige o conhecimento do modelo descritivo do sistema não linear de partida.

Este tipo de procedimento é conceptualmente diferente da linearização na vizinhança de um ponto de equilíbrio, apresentada no capítulo 3.4.1, em que se efectua o desenvolvimento da *função do sistema* em série de Taylor, eliminando os termos de ordem superior à primeira, ou seja, em que se substitui, quando tal é possível, a *função do sistema* pelo seu *jacobiano* multiplicado pelo estado. No caso em que se lineariza pelo jacobiano a linearização é *local*, isto é, é válida apenas para uma região em torno de um determinado ponto, enquanto que a linearização por realimentação é *global*, isto é, aplica-se a todo o domínio do espaço de estados ou de saída, com a eventual excepção de pontos isolados. Além disso, enquanto a linearização pelo jacobiano é *aproximada*, a linearização por realimentação é *exacta*.

Apenas determinados tipos de sistemas são susceptíveis de ser linearizados exactamente por realimentação: poderão sê-lo a classe de sistemas SISO em que na equação de estado as variáveis de entrada e de estado são *separáveis*, ou seja, sistemas representáveis pelo modelo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\psi(u) \\ y = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5.1)$$

Neste tipo de sistemas, e para os casos em que é possível efectuar a linearização exacta, há normalmente que efectuar uma *mudança de variável de estado*

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

e introduzir uma *lei de controlo*

$$u = u(\mathbf{x}, v) \quad (5.3)$$

ou seja, efectuar uma *mudança de variável de controlo*, em que v é uma nova variável intermédia que conduz o sistema original (5.1), a um sistema linear.

A linearização por realimentação tem sido utilizada com êxito numa grande gama de aplicações, nomeadamente no controlo de braços robô e manipuladores, peças de artilharia, helicópteros, aviões e satélites, além de ser usada em aparelhagem médica e nas indústrias química e farmacêutica.

Consoante as variáveis utilizadas para efectuar a realimentação sejam as variáveis de estado ou então as variáveis de saída, assim o tipo de tratamento será diferente (eventualmente idêntico). Antes de apresentar o formalismo matemático da linearização por realimentação serão apresentados alguns exemplos.

5.1.1. Exemplo de linearização e controlo por realimentação

Considere-se o problema de controlar o nível do líquido no interior de um tanque esférico aberto, como o que se representa na Fig. 5.1.

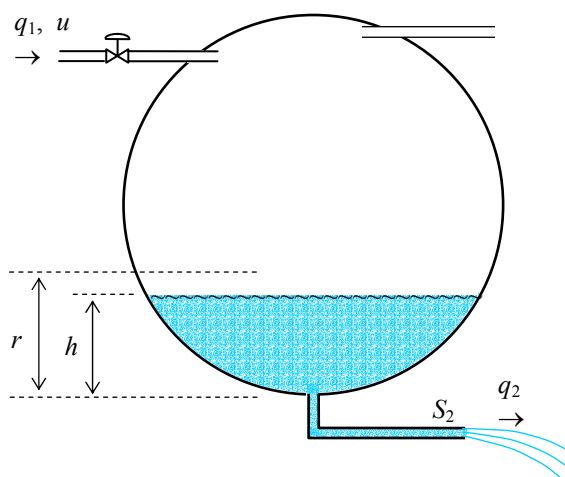


Fig. 5.1 – Controlo do nível numa esfera.

A variável manipulada $u = q_1$ é o caudal de entrada. A variável controlada $y = h$ é o nível do líquido no interior da esfera. Há um escape contínuo de líquido para um reservatório exterior q_2 , escape este que depende da altura do líquido no interior da esfera, e que, para um fluido ideal é dado por

$$q_2 = S_2 \sqrt{2gh} \quad (5.4)$$

em que S_2 representa a secção da tubagem por onde se escapa o líquido e g a aceleração da gravidade. Esta relação pode ser obtida a partir da equação de Bernoulli para fluidos ideais em regime permanente $\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = C^{te}$, da equação de hidrostática $p = \rho gh$ e da relação $q = vS$.

Neste sistema, a variação de volume no interior da esfera é resultante da diferença entre o caudal que entra e o caudal que sai. Representando por $S(h)$ a secção interior da esfera à cota h , ou seja, a área da superfície livre do líquido, o volume de líquido obtém-se integrando $S(h)dh$ entre as cotas 0 e h , pelo que a dinâmica do sistema é representada por

$$\frac{d}{dt} \int_0^h S(\xi) d\xi = u(t) - S_2 \sqrt{2gh(t)} \quad (5.5)$$

ou ainda, desenvolvendo o 1º membro⁽¹⁾,

$$S(h)\dot{h}(t) = u(t) - S_2 \sqrt{2gh(t)} \quad (5.6)$$

Se o **valor desejado** para a altura, r (**referência**), estiver, por exemplo, a $\frac{1}{2}$ da altura da esfera, o ganho óptimo para um controlador linear deverá ser bastante diferente do ganho óptimo para uma referência a $\frac{1}{4}$ da altura.

Considere-se uma lei de controlo que procure linearizar (5.6). Poderá ser do tipo

$$u(t) = S(h)v(t) + S_2 \sqrt{2gh(t)} \quad (5.7)$$

em que $v(t)$ é uma nova variável manipulada intermédia, escolhida por (5.7) de modo a tornar (5.6) linear. Com efeito, substituindo $u(t)$ na equação do sistema resulta o sistema

$$\dot{h}(t) = v(t) \quad (5.8)$$

Este sistema pode ser controlado para uma referência $r(t)$ variável no tempo utilizando a lei de controlo

$$v(t) = \dot{r}(t) - ke(t) \quad (5.9)$$

em que $e = h - r$ representa o valor do erro e k uma constante real. Substituindo (5.9) em (5.8) obtém-se

$$\dot{e}(t) + ke(t) = 0 \quad (5.10)$$

Se a constante k for escolhida positiva, a solução da equação (5.10) tende para zero quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, a equação do erro é exponencialmente estável.

Se a referência r mudar, o novo erro tende exponencialmente para zero, o que significa que o nível do tanque segue a referência.

Substituindo a lei de controlo (5.9) em (5.7) obtém-se

$$u(t) = S_2 \sqrt{2gh} + S(h)\dot{r} - S(h)ke \quad (5.11)$$

Repare-se na constituição do 2º membro de (5.11). O primeiro termo é utilizado para compensar directamente o caudal de escape pelo fundo do tanque. O 2º termo compensa as variações da referência. Finalmente o 3º termo compensa outras perturbações do nível, por exemplo variações de consumo, não indicadas na figura.

Nota: Neste exemplo há uma limitação no desempenho do controlo, uma vez que $u(t)$ não pode tomar valores negativos.

¹ Relembre-se que $\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f(b, y) \frac{db(x)}{dx} - f(a, y) \frac{da(x)}{dx}$

5.1.2. Sistemas na forma companheira

Um sistema não linear diz-se *na forma companheira* se a sua dinâmica puder ser representada por uma equação do tipo

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \quad (5.12)$$

em que \mathbf{x} representa o vector de estado,

$$\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T \quad (5.13)$$

e f e g são duas funções escalares, não lineares, de \mathbf{x} . Deverá ainda ser $g(\mathbf{x}) \neq 0$. Esta representação tem a particularidade de nela não intervirem as derivadas de u . Efectuando a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ \dots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases} \quad (5.14)$$

a equação de estado correspondente à equação diferencial (5.12) escreve-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Utilizando a lei de controlo

$$u(t) = \frac{1}{g(\mathbf{x})} [v(t) - f(\mathbf{x})] \quad (5.16)$$

e substituindo em (5.12), obtém-se o sistema linear, *integrador múltiplo*,

$$\dot{x}^{(n)} = v \quad (5.17)$$

Se for desejado seguir uma referência $r(t)$, definindo o *erro* por

$$e(t) = x(t) - r(t) \quad (5.18)$$

a lei de controlo

$$v = r^{(n)} - k_0 e - k_1 \dot{e} - \dots - k_{n-1} e^{(n-1)} \quad (5.19)$$

conduz a um seguimento exponencialmente convergente se as raízes do *polinómio característico*

$$\lambda^n + k_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + k_1 \lambda + k_0 = 0 \quad (5.20)$$

tiverem a parte real estritamente negativa.

A lei de controlo (5.19) pode ser escrita na forma

$$v = r^{(n)} - \mathbf{k}^T \mathbf{e} \quad (5.21)$$

com

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \dots \\ k_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} x - r \\ \dot{x} - \dot{r} \\ \dots \\ x^{(n-1)} - r^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

O procedimento que acaba de ser apresentado foi aplicado a sistemas na forma companheira, *não lineares no estado mas lineares na entrada*. Eles são expansíveis ao caso em que na equação (5.12) em vez de estar u estiver uma função $\psi(u)$, **invertível**. Neste caso efectuando uma mudança de variável prévia

$$u = \psi^{-1}(w) \quad (5.23)$$

a não linearidade na entrada é **cancelada**.

5.1.3. Linearização entrada-estado

Na linearização entrada-estado o objectivo é linearizar por realimentação um sistema descrito pela equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u) \quad (5.24)$$

em que o estado é completamente acessível. Como se disse atrás, a linearização é feita com uma mudança da variável de estado $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$, (5.2), e com uma mudança na variável de entrada $u = u(\mathbf{x}, v)$, (5.3), de modo a obter-se um sistema linear e invariante no tempo, com a dinâmica

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v \quad (5.25)$$

Chegando-se ao sistema linear (5.25), este pode ser controlado com qualquer das técnicas usadas com sistemas lineares. Ilustre-se o procedimento com um exemplo.

Exemplo 5-1

Considere-se o sistema de 2ª ordem não linear no estado e linear na entrada,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1 \end{cases} \quad (5.26)$$

Efectue-se a seguinte mudança de variável de estado

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = 2x_2 + \sin x_1 \end{cases} \quad (5.27)$$

A combinação de (5.26) com (5.27) conduz a

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -3z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -3x_1 \cos x_1 + \sin x_1 \cos x_1 + 2u \cos 2x_1 \end{cases} \quad (5.28)$$

Se for efectuada uma mudança na variável de entrada

$$u = \frac{1}{2 \cos 2x_1} (v + 3x_1 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_1) \quad (5.29)$$

é-se conduzido à equação de estado linear

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -3z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{cases} \quad (5.30)$$

Repare-se que a relação entre u e v não é global. Com efeito ela só é válida desde que o denominador em (5.29) seja diferente de zero, ou seja, para $x_1 \neq \pi/4 + k\pi/2$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Para estes valores de x_1 o coeficiente de u em (5.26) anula-se e o sistema *deixa de ser controlável*, uma vez que o estado passa a não depender de u .

Se for desejado que o novo estado estabilize a origem, poderá utilizar-se a lei de controlo

$$v = -\mathbf{k}^T \mathbf{e} \quad (5.31)$$

com \mathbf{k} e \mathbf{e} dados por

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} z - r \\ \dot{z} - \dot{r} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

A raízes do polinómio característico (5.20) deverão localizar-se no semiplano complexo esquerdo, eixo imaginário excluído, para que o sistema em cadeia fechada seja exponencialmente estável.

A Fig. 5.2 resume o conjunto de transformações que se efectuaram para linearizar e controlar o sistema deste exemplo.

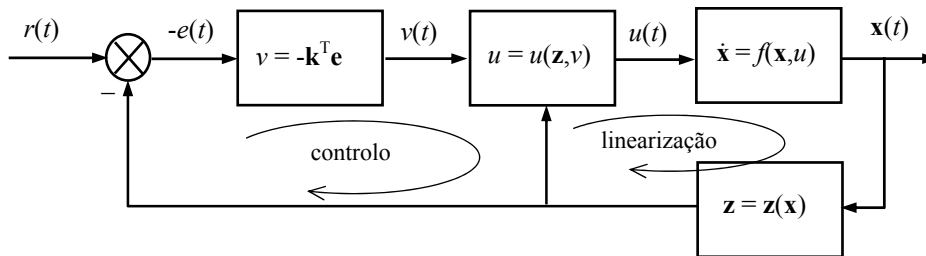


Fig. 5.2 – Esquema de controlo com linearização entrada-estado.

Repare-se no seguinte:

- Está-se a admitir que o estado é completamente acessível. Caso tal não aconteça, deverá providenciar-se para ser feita a sua medida ou o seu cálculo.
- Não foram consideradas incertezas no modelo original. Estas podem eventualmente conduzir a um tal aumento na incerteza da descrição linearizada que esta pode deixar de ter qualquer utilidade.

Até agora foram dados dois exemplos de sistemas em que através de mudanças de variáveis se transformou uma dinâmica não linear numa dinâmica linear. Será que tal é sempre possível? Em caso afirmativo, será que existem *classes de sistemas* às quais o método é sempre aplicável? Quais essas classes e quais os métodos sistemáticos para proceder à sua linearização?

Antes de procurar responder a estas questões levantem-se outras mais, procurando efectuar a linearização de um sistema a partir das variáveis de entrada e de saída.

5.1.4. Linearização entrada-saída

Seja um sistema não linear, descrito pelo modelo de estado

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u) \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5.33)$$

e projecte-se um sistema de controlo para seguir uma referência $r(t)$. A referência e suas derivadas assumem-se *conhecidas e limitadas*.

O sistema de controlo vai procurar impor valores a u no sentido de minimizar a diferença entre y e r . Por agora não se fará qualquer consideração sobre qual o *critério de minimização*. Vai sim procurar-se uma relação explícita entre u e y , que de momento apenas aparece implícita através de (5.33). Procure abordar-se o problema por meio de um exemplo.

Exemplo 5-2

Considere-se o sistema não linear de 3ª ordem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin 2x_2 + (x_2 + 3)x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1^2 + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.34)$$

Neste sistema não existe uma relação explícita entre a saída e a entrada, como é pretendido que haja. Para a obter, derive-se a equação de saída e substitua-se o valor de \dot{x}_1 dado por (5.34)

$$\dot{y} = \sin 2x_2 + (x_2 + 3)x_3 \quad (5.35)$$

Como ainda não aparece a relação entre y (ou \dot{y}) e u , derive-se de novo e substitua-se \dot{x}_2 e \dot{x}_3 pelos seus valores dados por (5.34). Obtém-se

$$\ddot{y} = f_1(\mathbf{x}) + (x_2 + 3)u \quad (5.36)$$

em que f_1 é a função do estado

$$f_1(\mathbf{x}) = (2 \cos 2x_2 + x_3) (x_1^3 + x_3) + (x_2 + 3)x_1^2 \quad (5.37)$$

Agora, na equação (5.36) já aparece uma relação explícita entre a saída e a entrada (através de \ddot{y} e de u). Escolhendo uma nova variável de entrada v , relacionada com u por

$$u = \frac{1}{x_2 + 3}(v - f_1) \quad (5.38)$$

a não linearidade de (5.36) é cancelada, ficando

$$\ddot{y} = v \quad (5.39)$$

que é um **duplo integrador**.

Projecte-se um sistema de controlo para (5.39), para seguir uma trajectória $r(t)$, fazendo

$$v = \ddot{r} - \mathbf{k}^T \mathbf{e} \quad (5.40)$$

com

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} y - r \\ \dot{y} - \dot{r} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Substituindo (5.40) em (5.39) obtém-se

$$\ddot{y} - \ddot{r} + k_1(\dot{y} - \dot{r}) + k_0(y - r) = 0 \quad (5.42)$$

ou ainda

$$\ddot{e} + k_1\dot{e} + k_0e = 0 \quad (5.43)$$

que, se as raízes da sua equação característica tiverem a *parte real estritamente negativa*, representa um *sistema exponencialmente estável*.

Se as condições iniciais forem $e(0)=0$, $\dot{e}(0)=0$, $\ddot{e}(0)=0$, tem-se, para qualquer $t \geq 0$, $e(t)=0$, ou seja, há um **seguimento perfeito da trajectória**. Para condições iniciais diferentes destas o erro $e(t)$ tende exponencialmente para zero.

Chama-se a atenção para o seguinte:

- A expressão (5.38), que define a nova variável manipulada v , *não é global*, isto é, não é válida para todo o espaço de estados, não se aplicando se $x_2 = -3$.
- Como no caso do exemplo anterior, continua a ser necessário o conhecimento das variáveis de estado, pois o cálculo de \dot{y} e de \ddot{y} utiliza os seus valores.
- Para a obtenção de uma relação explícita entre y e u houve necessidade de *derivar duas vezes a saída*. Diz-se que o sistema tem um *grau relativo* igual a 2.

De uma forma mais geral:

Diz-se que o sistema tem o grau relativo r , se para obter uma relação explícita entre a entrada e a saída esta tiver que ser derivada r vezes.

O grau relativo deverá ser menor ou igual à ordem do sistema:

$$r \leq n \quad (5.44)$$

Com efeito r não pode ser superior a n , porque se fosse possível derivar um número de vezes superior a n então o sistema não seria de ordem n mas de ordem superior a n .

Se ao fim de derivar n vezes ainda não houver uma relação explícita entre a entrada e a saída é porque o sistema **não é controlável**.

5.1.5. A dinâmica interna

Um facto curioso que se levanta com o exemplo anterior é o seguinte: Partiu-se de um sistema não linear de 3ª ordem, o sistema (5.34), e chegou-se a uma equação diferencial linear de 2ª ordem, a equação (5.39). Pelo caminho perdeu-se uma variável de estado. O que é que lhe aconteceu?

A explicação é a seguinte: a equação (5.39) apenas representa parte da dinâmica do sistema inicial. A restante dinâmica tornou-se **não observável**, ao efectuar-se a linearização entrada-saída. A esta dinâmica não observável dá-se o nome de **dinâmica interna** do sistema.

Neste exemplo a dinâmica interna pode ser analisada por meio do estado x_3 , uma vez que é possível obter um novo vector de estado com y , \dot{y} e x_3 . A dinâmica interna será então representada por

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + \frac{1}{x_2 + 3}(\ddot{r} - k_0 e - k_1 \dot{e} + f_1) \quad (5.45)$$

Se o estado x_3 for estável a dinâmica interna será **estável** e o sistema pode efectuar o seguimento da trajectória. Se a dinâmica interna for **instável**, ou seja, se o estado x_3 for não limitado, o seguimento da trajectória r poderá conduzir a fenómenos indesejáveis, como por exemplo vibrações violentas, rotura de peças, disparo de protecções ou queima de fusíveis.

Portanto, a eficiência do sistema de controlo de seguimento, além de depender do comportamento do modelo linear de **ordem reduzida** (5.43), depende também da **estabilidade da dinâmica interna**.

A fim de compreender melhor o que é a dinâmica interna de um sistema vai dar-se um outro exemplo.

Exemplo 5-3

Considere-se o sistema não linear de 2ª ordem

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^3 + u \\ u \end{bmatrix} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.46)$$

e projecte-se um controlador que faça a saída seguir uma referência $r(t)$, *limitada e com derivada limitada*. Procure-se uma relação entre y e u , derivando y :

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2^3 + u \quad (5.47)$$

Como acaba de se obter a relação entre y e u (através de \dot{y}), aplique-se a *lei de controlo*

$$u = v - x_2^3 \quad (5.48)$$

A substituição de (5.48) em (5.47) origina o sistema linear de 1ª ordem (integrador)

$$\dot{y} = v \quad (5.49)$$

Efectuando um controlo de seguimento por *realimentação de estado* [ver as equações (5.19), (5.31), (5.40)], em que $e = y - r$, será

$$v = \dot{r} - ke \quad (5.50)$$

Substituindo (5.50) em (5.49) e notando que $\dot{r} = \dot{y} - \dot{e}$, é-se conduzido à equação diferencial de 1ª ordem, para o erro,

$$\dot{e} + ke = 0 \quad (5.51)$$

cuja equação característica tem o valor próprio $\lambda = -k$, pelo que o erro converge para zero, exponencialmente.

A dinâmica interna obtém-se substituindo a lei de controlo (5.48) na 2ª equação de (5.46), ainda não utilizada, resultando

$$\dot{x}_2 + x_2^3 = \dot{r} - ke \quad (5.52)$$

Uma vez que (5.51) garante que $e(t)$ é limitado, e que por hipótese a referência e a sua derivada são limitadas, tem-se

$$|\dot{r} - ke| < C \quad (5.53)$$

em que C é uma constante positiva, e portanto

$$|\dot{x}_2 + x_2^3| < C \quad (5.54)$$

ou seja, x_2 é limitado. O sistema de controlo satisfaz pois os objectivos pretendidos, uma vez que $y(t)$ segue a trajectória desejada $r(t)$ e a dinâmica interna é estável.

Se no entanto o sistema (5.46) for substituído por um aparentemente muito semelhante

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^3 + u \\ -u \end{bmatrix} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.55)$$

chega-se a uma equação para o erro igual a (5.51), mas a dinâmica interna dará

$$\dot{x}_2 - x_2^3 = -\dot{r} + ke \quad (5.56)$$

que, mesmo com $|\dot{r} + ke| < C$, como anteriormente, é uma equação cuja solução tende para infinito quando $t \rightarrow \infty$.

Embora nos exemplos apresentados tenha havido como motivação o *seguimento de uma referência*, o método da linearização por realimentação pode ser utilizado também para a análise da estabilidade de um sistema não linear na vizinhança de um ponto de equilíbrio.

Viu-se que o grau relativo de um sistema está relacionado com o número de derivações que é necessário efectuar sobre a variável de saída até se obter uma relação explícita entre $y^{(r)}$ e u . A dinâmica interna de um sistema será caracterizada por um determinado número de equações diferenciais de 1ª ordem, concretamente $n-r$. Um caso importante é aquele em que para obter a relação entre y e u é necessário derivar y um número de vezes igual à ordem do sistema. Neste caso o grau relativo é $r = n$, e o número de equações representativas da dinâmica interna é zero. O conjunto de variáveis $y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}$ pode ser tomado para vector de estado e o sistema fica assim transformado num sistema na forma companheira, análogo ao sistema (5.15). Neste caso a linearização entrada-saída é equivalente à linearização entrada-estado e **o sistema é controlável**.

5.1.6. Dinâmica interna de sistemas lineares

Para compreender melhor o significado da dinâmica interna analise-se o sistema linear

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.57)$$

semelhante a (5.46), mas linear. Derivando a saída e substituindo \dot{x}_1 obtém-se

$$\dot{y} = x_2 + u \quad (5.58)$$

A lei de controlo (que contém a realimentação de estado)

$$u = \dot{r} - ke - x_2 \quad (5.59)$$

conduz à equação exponencialmente estável ($k > 0$)

$$\dot{e} + ke = 0 \quad (5.60)$$

e à dinâmica interna [comparar com (5.52)]

$$\dot{x}_2 + x_2 = \dot{r} - ke \quad (5.61)$$

cujas soluções tendem para zero quando $t \rightarrow \infty$.

No entanto, se for considerado o sistema [confrontar com (5.55)],

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.62)$$

a lei de controlo (5.59), embora conduza à mesma equação para o erro, (5.60), origina a dinâmica interna

$$\dot{x}_2 - x_2 = -\dot{r} + ke \quad (5.63)$$

cuja solução tende para infinito quando $t \rightarrow \infty$. Qual será a diferença nos dois sistemas que conduz a resultados tão diferentes? Antes de responder a esta questão observem-se as respectivas funções de transferência, que podem ser obtidas pela relação

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \quad (5.64)$$

Obtêm-se assim

$$\begin{aligned} &1^\circ \text{ sistema:} \\ G_1(s) &= \frac{s+1}{s^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2^\circ \text{ sistema:} \\ G_2(s) &= \frac{s-1}{s^2} \end{aligned}$$

Embora os dois sistemas tenham os mesmos pólos, o primeiro tem o zero igual a -1 enquanto que o segundo tem o zero igual a $+1$. O sistema com o zero no semiplano complexo esquerdo⁽²⁾ tem a **dinâmica interna estável**, enquanto que o sistema com o zero no semiplano complexo direito⁽³⁾ tem a **dinâmica interna instável**.

Considere-se agora um outro exemplo, um sistema de 3ª ordem com um excesso de pólos sobre zeros igual a dois. A sua função de transferência genérica pode escrever-se

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + s^3} \quad (5.65)$$

Introduzindo as variáveis de estado (escrita simbólica)

$$x_1 = \frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} u \quad x_2 = \dot{x}_1 \quad x_3 = \dot{x}_2 \quad (5.66)$$

o sistema pode escrever-se na forma companheira

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5.67)$$

² Designados por **sistemas de fase mínima**.

³ Designados por **sistemas de fase não mínima**.

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Como em (5.68) não existe nenhuma relação explícita entre a saída e a entrada, derive-se a saída. Obtém-se

$$\dot{y} = b_0 \dot{x}_1 + b_1 \dot{x}_2 = b_0 x_2 + b_1 x_3 \quad (5.69)$$

e voltando a derivar

$$\ddot{y} = b_0 \dot{x}_2 + b_1 \dot{x}_3 = b_0 x_3 + b_1 (-a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u) \quad (5.70)$$

Verifica-se que o número de diferenciações necessárias para obter uma relação explícita entre a saída e a entrada, ou seja, o **grau relativo**, é igual ao **excesso de pólos sobre zeros**. Escolhendo a lei de controlo

$$u = (a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 - \frac{b_0}{b_1} x_3) + \frac{1}{b_1} (\ddot{r} - k_0 e - k_1 \dot{e}) \quad (5.71)$$

com k_0 e k_1 positivos, é-se conduzido à equação de 2ª ordem, que origina um erro exponencialmente estável,

$$\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_0 e = 0 \quad (5.72)$$

A dinâmica interna do sistema será descrita por $n - r = 1$ equação. Escolhendo a 1ª equação escalar de (5.67) para representar a dinâmica interna, vem

$$\dot{x}_1 = x_2 = \frac{1}{b_1} (y - b_0 x_1) \quad (5.73)$$

ou seja

$$\dot{x}_1 + \frac{b_0}{b_1} x_1 = \frac{1}{b_1} y \quad (5.74)$$

Uma vez que y é limitado, por ser $y = r + e$, e tanto r como e são limitados, a estabilidade de (5.74) depende da localização do seu pólo, que é o zero da função de transferência (5.65): se o sistema for **de fase mínima** o zero encontra-se no semiplano complexo esquerdo, e a dinâmica interna é estável. Se o sistema for **de fase não mínima** o zero encontra-se no semiplano complexo direito, e a dinâmica interna é instável.

Como exemplos clássicos de sistemas de fase não mínima, tem-se o controlo da altitude de um avião, por meio da manipulação do leme de elevação, e o controlo do nível do ebulidor de uma caldeira por manipulação do caudal de água de alimentação.

5.1.7. A dinâmica zero

Na secção anterior estudou-se o efeito da localização dos zeros da função de transferência de um sistema linear sobre a estabilidade da sua dinâmica interna. Será que é possível estender o conceito de zero(s) da função de transferência de um sistema linear a um sistema não linear? O problema que começa por pôr-se à partida é que para um sistema não linear não se define função de transferência e, portanto, não existem os conceitos de zero ou de pólo. Há no entanto uma forma de abordar este assunto através do conceito de dinâmica zero:

Dado um sistema linear, define-se **dinâmica zero** desse sistema como sendo a dinâmica interna que actuada pela entrada mantém a saída a zero.

Para o sistema (5.46) do Exemplo 5-3 a dinâmica zero obtém-se a partir da equação (5.52), fazendo o 2º membro igual a zero, ou seja,

$$\dot{x}_2 + x_2^3 = 0 \quad (5.75)$$

A dinâmica zero é uma *característica intrínseca de um sistema não linear*. Ela não depende nem da saída nem da referência. Para este exemplo pode verificar-se que a dinâmica (5.75) é assintoticamente estável utilizando uma função de Lyapunov, por exemplo $V = x_2^2$.

Para o sistema (5.67)/(5.68) a dinâmica zero obtém-se fazendo $y = 0$ em (5.74), resultando

$$\dot{x}_1 + \frac{b_0}{b_1} x_1 = 0 \quad (5.76)$$

A equação (5.76) é estável, isto é, $x_1 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, se a raiz da sua equação característica, $-\frac{b_0}{b_1}$, estiver no semiplano complexo esquerdo, e é instável caso a raiz se

encontre no semiplano complexo direito. A observação de (5.76) e de (5.65) mostra que o pólo da última é o zero da primeira. O resultado que acaba de se apresentar é válido para todos os sistemas lineares e pode traduzir-se do modo seguinte:

a localização dos zeros do sistema sobre o semiplano complexo esquerdo garante a estabilidade da dinâmica zero.

Nos sistemas lineares a estabilidade da dinâmica zero é global. Para os sistemas não lineares não é possível garantir a estabilidade global, apenas a estabilidade local pode ser garantida.

Diz-se que um sistema não linear é **de fase mínima** se a sua dinâmica zero for assintoticamente estável.

Resumindo, o método de linearização entrada-saída envolve os seguintes passos:

1. Derivar a saída r vezes até se obter uma relação explícita entre $y^{(n)}$ e u .
2. Escolher $u=u(v,x)$ de modo a cancelar as não linearidades e garantir a convergência do erro de seguimento.
3. Analisar a estabilidade da dinâmica interna.

Quando o grau relativo r for igual à ordem do sistema, este fica **completamente linearizado** e é possível escolher um controlador que conduza a um seguimento satisfatório. Caso $r < n$, o comportamento do sistema dependerá também da estabilidade da sua dinâmica interna.

5.2. O formalismo da Geometria Diferencial

Nesta secção serão introduzidos alguns conceitos matemáticos que permitem abordar a linearização por realimentação com o formalismo utilizado na Geometria Diferencial.

5.2.1. Conceitos e aplicações

5.2.1.1. Campo vectorial

Considere-se um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Dá-se o nome de **campo vectorial** a uma aplicação \mathbf{f} de D em \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (5.77)$$

O campo vectorial representa uma função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ que a cada ponto \mathbf{x} do domínio D faz corresponder um vector \mathbf{f} , de componentes reais. Pode fazer-se uma abstracção geométrica imaginando um vector \mathbf{f} emanando de cada ponto \mathbf{x} do domínio.

O campo vectorial é representado por um *vector coluna* de comprimento n e componentes $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})$. Neste texto, quando mais nada for dito, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ designa um campo vectorial.

No caso particular em que $n = 1$, o campo vectorial tem o nome de **campo escalar**. Neste texto $h(\mathbf{x})$ representará uma função escalar e será

$$h: D \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.78)$$

A função escalar faz corresponder a cada ponto do espaço vectorial um valor real.

No que se segue admitir-se-á que $h(\mathbf{x})$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ são funções suaves de \mathbf{x} ⁽⁴⁾.

5.2.1.2. Campo covectorial

Designa-se por **campo covectorial** ao transposto de um campo vectorial. Representa-se por um vector linha.

5.2.1.3. Produto interno

Define-se **produto interno** de um campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ por um campo covectorial $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, e representa-se por $\langle \mathbf{w}, \mathbf{f} \rangle$, pelo escalar

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{f} \rangle = \mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})f_i(\mathbf{x}) \quad (5.79)$$

O produto de $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ por $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ deve ser entendido como o produto matricial de uma matriz linha $1 \times n$ (covector \mathbf{w}), por uma matriz coluna $n \times 1$ (vector \mathbf{f}).

5.2.1.4. Gradiente

Define-se **gradiente** de uma função escalar $h(\mathbf{x})$, e representa-se por $\nabla h(\mathbf{x})$, $\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$, ou $\text{grad } h(\mathbf{x})$, pelo covector

⁴ $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é função *suave* se todas as suas componentes forem funções suaves em relação a todas as componentes de \mathbf{x} . Ver Cap.2, nota da pág.43.

$$\nabla h(\mathbf{x}) \equiv \text{grad } h(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) \quad (5.80)$$

O gradiente de uma função escalar é um campo covectorial, cujas componentes se obtêm derivando $h(\mathbf{x})$ em relação a cada uma das componente de \mathbf{x} , respectivamente. Também se lhe dá o nome de **gradiente** de $h(\mathbf{x})$.

5.2.1.5. Jacobiano

Define-se **jacobiano** de um campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ pela expressão

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_n)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x_1)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.81)$$

O jacobiano de um campo vectorial de dimensão n é uma matriz $n \times n$.

5.2.1.6. Derivada de Lie

Dados uma função escalar $h(\mathbf{x})$ e um campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, define-se **derivada de Lie** de $h(\mathbf{x})$ em relação a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, e representa-se por $L_{\mathbf{f}}h$, pela expressão

$$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla h(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle \nabla h(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle \quad (5.82)$$

Repare-se que ∇h é um covector, pelo que o seu produto com \mathbf{f} é um escalar.

A $L_{\mathbf{f}}h$ também se costuma chamar derivada de Lie de h ao longo de \mathbf{f} . A derivada de Lie é a derivada dirigida de $h(\mathbf{x})$ segundo a direcção de \mathbf{f} .

Uma vez que a derivada de Lie de uma função escalar é também uma função escalar, é possível calcular as derivadas de Lie de ordem 2, 3, etc. A sua definição faz-se por recorrência: Define-se **derivada de Lie de ordem i** de uma função escalar $h(\mathbf{x})$ por

$$L_{\mathbf{f}}^i h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}[L_{\mathbf{f}}^{i-1} h(\mathbf{x})] = \nabla[L_{\mathbf{f}}^{i-1} h(\mathbf{x})] \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.83)$$

e em que, por definição, a derivada de Lie de ordem zero é

$$L_{\mathbf{f}}^0 h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \quad (5.84)$$

Uma função escalar pode ser derivada em relação a mais do que um campo vectorial. Sejam $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ dois campos vectoriais. Define-se $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ pela expressão

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}}[L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})] = \nabla[L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})] \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (5.85)$$

De um modo geral será

$$L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) \neq L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) \quad (5.86)$$

Dados um campo vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e um campo vectorial $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, define-se *derivada de Lie* de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ em relação a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, e representa-se por $L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}$, pela expressão

$$L_{\mathbf{f}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.87)$$

Note-se que $\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ é uma matriz, pelo que o seu produto por \mathbf{f} é um vector.

Exemplo 5-4

Sejam $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$

$$h(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2 \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (campo vectorial constante)}$$

Calcular: a) $L_{\mathbf{f}}h$ b) $L_{\mathbf{f}}^2h$ c) $L_{\mathbf{g}}h$ d) $L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}h$ e) $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h$.

Resolução:

$$\text{a) } L_{\mathbf{f}}h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [3x_1^2 \quad 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 x_2 + x_1 + x_2^2$$

$$\text{b) } L_{\mathbf{f}}^2h = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = [6x_1x_2+1 \quad 3x_1^2+2x_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{bmatrix} = 3x_1^3 + 3x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2 + x_2 + 6x_1x_2^2 + 2x_2^3$$

$$\text{c) } L_{\mathbf{g}}h = [3x_1^2 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$\text{d) } L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}h = \frac{\partial(L_{\mathbf{g}}h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = [0 \quad 0] \mathbf{f} = 0$$

$$\text{e) } L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = [6x_1x_2+1 \quad 3x_1^2+2x_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 2x_2 \neq L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}h$$

5.2.1.7. Aplicações da derivada de Lie

Veja-se como é que as derivadas de Lie se aplicam a sistemas dinâmicos não lineares. Considere-se o sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5.88)$$

As derivadas da saída podem obter-se por

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = L_{\mathbf{f}}h \\ \ddot{y} = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{f}}^2h \\ \dots \\ y^{(n)} = L_{\mathbf{f}}^n h \end{cases} \quad (5.89)$$

A derivada de Lie já apareceu no Cap. 3 secção 3.5.3, embora o seu nome não tenha sido aí referido, aquando do cálculo da derivada da função de Lyapunov ao longo de uma trajectória do sistema. Considere-se então uma função de Lyapunov candidata, para o sistema (5.88). A derivada $\dot{V}(\mathbf{x})$ obtém-se por

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = L_f V(\mathbf{x}) \quad (5.90)$$

As derivadas de Lie podem ser usadas para redefinir as expressões de *grau relativo* de um sistema, apresentadas atrás em 5.1.4. Seja o sistema não linear no estado e linear na entrada

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5.91)$$

e seja r o seu grau relativo. Isto significa que é necessário derivar r vezes a 2ª equação de (5.91) até se obter uma dependência explícita da entrada na saída. Derive-se uma vez a 2ª equação (5.91) e substitua-se $\dot{\mathbf{x}}$ pelo seu valor:

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f} + \mathbf{g}u) = L_f h + L_g h u \quad (5.92)$$

Se o sistema for de grau relativo $r = 1$ deverá ser $L_g h \neq 0$. Se $r > 1$ terá que ser $L_g h = 0$. Neste caso deverá derivar-se de novo a saída. Derivando, substituindo $\dot{\mathbf{x}}$ pelo seu valor e generalizando o raciocínio até à derivada de ordem r , pode afirmar-se o seguinte:

O sistema (5.91) é de grau relativo r se para qualquer $\mathbf{x} \in D$ se verificar

$$\begin{cases} L_g L_f^i h(\mathbf{x}) = 0, \quad 0 \leq i \leq r-2 \\ L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases} \quad (5.93)$$

Para mais detalhe vejam-se as secções 5.4.1 e 5.4.2. mais adiante.

5.2.1.8. Parêntesis de Lie

Dados uma função escalar $h(\mathbf{x})$ e dois campos vectoriais $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, em \mathcal{R}^n , define-se *parêntesis de Lie* de \mathbf{f} e \mathbf{g} pela expressão

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (5.94)$$

Repare-se que $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ é um campo vectorial de dimensão n (vector coluna).

Uma outra notação utilizada para o parêntesis de Lie, conveniente para a aplicação recursiva, é a seguinte:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \text{ad}_f \mathbf{g} \quad (5.95)$$

onde $\text{ad}_f \mathbf{g}$ significa *adjunta* de \mathbf{g} e representa o parêntesis de Lie de \mathbf{f} e \mathbf{g} .

O *parêntesis de Lie de ordem i* é definido por

$$\text{ad}_f^i \mathbf{g} = [\mathbf{f}, \text{ad}_f^{i-1} \mathbf{g}] \quad (5.96)$$

com a condição de se fazer

$$\text{ad}_f^0 \mathbf{g} = \mathbf{g} \quad (5.97)$$

Exemplo 5-5

Dados $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 \\ -x_2 \sin x_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$, calcular $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$.

Resolução:

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{g}] &= \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 \\ -x_2 \sin x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -x_2 \cos x_1 & -\sin x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 2x_1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_2 \cos x_1 + 2x_1 \sin x_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 5-6

Considere o sistema obtido a partir de (5.91) fazendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ e $h(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Tem-se assim o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{cases}$$

Calcule os vectores $\{\text{ad}_f^0 \mathbf{g}, -\text{ad}_f \mathbf{g}, \text{ad}_f^2 \mathbf{g}, \dots, (-1)^{n-1} \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}\}$

Resolução:

A aplicação das definições (5.97) e (5.96) permite obter o resultado

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}\}$$

Que semelhança tem com a matriz de controlabilidade de um sistema linear?

5.2.1.9. Propriedades do parêntesis de Lie

P1. Bilinearidade:

$$\begin{aligned} [(\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2), \mathbf{g}] &= \alpha_1 [\mathbf{f}_1, \mathbf{g}] + \alpha_2 [\mathbf{f}_2, \mathbf{g}] \\ [\mathbf{f}, (\beta_1 \mathbf{g}_1 + \beta_2 \mathbf{g}_2)] &= \beta_1 [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1] + \beta_2 [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2] \end{aligned} \quad (5.98)$$

em que $\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{g}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ são campos vectoriais suaves e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ são escalares constantes.

P2. Anticomutatividade:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}] \quad (5.99)$$

P3. Identidade de Jacobi:

$$L_{[\mathbf{f}, \mathbf{g}]} h = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h \quad (5.100)$$

5.2.1.10. Difeomorfismos

Considere-se uma região do espaço de estados, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, um vector $\mathbf{x} \in \Omega$ e uma aplicação $\phi(\mathbf{x})$ de Ω em \mathbb{R}^n . A aplicação $\phi(\mathbf{x})$ diz-se um **difeomorfismo** se existir $\phi^{-1}(\mathbf{x})$ e se além disso $\phi(\mathbf{x})$ e $\phi^{-1}(\mathbf{x})$ forem funções suaves.

Normalmente a região Ω onde o difeomorfismo é definido é uma vizinhança de um ponto \mathbf{x}_0 do espaço de estados. Nestas condições diz-se que se trata de um *difeomorfismo local*. Em casos menos correntes a região Ω onde o difeomorfismo se encontra definido coincide com todo o espaço de estados, tratando-se então de um *difeomorfismo global*.

Os teoremas seguintes estabelecem as condições para a existência de difeomorfismos.

Considere-se um campo vectorial $\phi(\mathbf{x})$

$$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (5.101)$$

Teorema 1 (difeomorfismo local)

É condição necessária e suficiente para que $\phi(\mathbf{x})$ seja um difeomorfismo local, numa vizinhança de \mathbf{x}_0 contida em Ω , que o jacobiano $\nabla\phi(\mathbf{x})$ seja regular em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

Teorema 2 (difeomorfismo global)

É condição necessária e suficiente para que $\phi(\mathbf{x})$ seja um difeomorfismo global, que o jacobiano $\nabla\phi(\mathbf{x})$ seja regular em todo o espaço de estados e que além disso $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \|\phi(\mathbf{x})\| = \infty$

Uma das aplicações dos difeomorfismos consiste em transformar o modelo de estado de um sistema não linear num outro modelo de estado, linear ou não linear, através de uma mudança de variável de estado. Considere-se o sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5.102)$$

e efectue-se a mudança de variável de estado

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}) \quad (5.103)$$

Derivando (5.103) obtém-se

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (5.104)$$

Como ϕ é um difeomorfismo tem-se

$$\mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{z}) \quad (5.105)$$

pelo que, substituindo em (5.104) se obtém

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{z}) + \mathbf{g}^*(\mathbf{z})u \\ y = h^*(\mathbf{z}) \end{cases} \quad (5.106)$$

5.2.2. Teorema de Frobenius

O teorema de Frobenius estabelece as condições necessárias e suficientes para que uma determinada classe de equações diferenciais às derivadas parciais seja integrável. Antes de apresentar o teorema na sua forma geral, apresente-se um exemplo.

Considere-se a função escalar $h(x_1, x_2, x_3)$, a determinar, e as funções escalares conhecidas $f_i(x_1, x_2, x_3)$ e $g_i(x_1, x_2, x_3)$, com $i = 1, 2, 3$, relacionadas pelas equações diferenciais às derivadas parciais

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 = 0 \end{cases} \quad (5.107)$$

Se o sistema (5.107) admitir solução, isto é, se existir $h(x_1, x_2, x_3)$ que o satisfaça, diz-se que ele é **completamente integrável**.

A questão está em saber quais as condições a impor a $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3]^T$ e $\mathbf{g} = [g_1, g_2, g_3]^T$ para que o sistema admita solução. A resposta a este problema é dada pelo **teorema de Frobenius**, que se apresenta a seguir.

Teorema de Frobenius:

O sistema (5.107) admite solução se e só se existirem dois escalares $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ e $\beta(x_1, x_2, x_3)$ tais que

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g} \quad (5.108)$$

ou seja, o parêntesis de Lie de \mathbf{f} e \mathbf{g} possa ser expresso por meio de uma combinação linear de \mathbf{f} e \mathbf{g} .

Dois campos vectoriais \mathbf{f} e \mathbf{g} dizem-se **involutivos** se satisfizerem a condição (5.108).

Repare-se que as equações (5.107) podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} \nabla h \mathbf{f} = 0 \\ \nabla h \mathbf{g} = 0 \end{cases} \quad (5.109)$$

Considere-se agora o caso geral de um conjunto de m campos vectoriais $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$, todos eles definidos em \mathbb{R}^n e linearmente independentes, com $m < n$.

O conjunto de campos vectoriais diz-se **completamente integrável** se e só se existirem $n-m$ funções escalares $h_1(\mathbf{x})$, $h_2(\mathbf{x})$, ..., $h_{n-m}(\mathbf{x})$ que satisfaçam o sistema de equações diferenciais

$$\nabla h_i \mathbf{f}_j = 0 \quad i = 1, \dots, n-m; j = 1, \dots, m \quad (5.110)$$

Repare-se que o número de funções escalares $h_i(\mathbf{x})$ é igual a $n-m$, e o número de equações diferenciais é $n \times (n-m)$.

Um conjunto de campos vectoriais linearmente independentes diz-se **involutivo** se e só se existirem funções escalares $\alpha_{ijk}: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ tais que

$$[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] = \sum_{k=0}^m \alpha_{ijk}(x) \mathbf{f}_k(x) \quad (5.111)$$

A expressão (5.111) significa que os parêntesis de Lie de dois quaisquer campos vectoriais podem ser expressos por uma combinação linear dos campos de vectores originais. Com as definições dadas pode apresentar-se o teorema de Frobenius de um modo mais formal:

Teorema de Frobenius:

Seja $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$ um conjunto de m campos vectoriais, definidos em \mathcal{R}^n , com $m < n$. Este conjunto é completamente integrável se e só se for involutivo.

Exemplo 5-7

Determine a existência de solução para o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x_3 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0 \\ -x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} - 3x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

Resolução:

Do sistema obtém-se $\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_2 \\ -3x_3 \end{bmatrix}$. Calcule-se $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$.

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_1 - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ 2x_2 \\ -3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{f}_1$$

e portanto o sistema é completamente integrável. Repare-se que só há uma função h , uma vez que $n=3$ e $m=2$.

5.3. Linearização Entrada-Estado

Considere-se um sistema não linear, de entrada única com a equação de estado da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (5.112)$$

A um sistema com esta estrutura dá-se o nome sistema *linear na entrada, linear no controlo* ou *linear na variável de controlo*.

Nesta secção serão estabelecidas as condições para que a um sistema deste tipo possa ser efectuada uma linearização entrada-estado. Note-se que há sistemas um pouco mais genéricos do que este, do tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, u) \quad (5.113)$$

com $\psi(\mathbf{x}, u) = \psi[\phi(\mathbf{x}) + u]$ e ψ invertível, que podem ser convertidos à forma (5.112). Com efeito, fazendo

$$v = \psi[\phi(\mathbf{x}) + u] \quad (5.114)$$

o sistema fica imediatamente na forma (5.112), calculando-se u através de

$$u = \psi^{-1}(v) - \phi(\mathbf{x}) \quad (5.115)$$

5.3.1. Definição de linearização entrada-estado

Considere-se um sistema do tipo (5.112), com $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ campos vectoriais suaves em \mathcal{R}^n . O sistema diz-se *linearizável entrada-estado* numa região $\Omega \subseteq \mathcal{R}^n$ se existirem

$$1. \text{ Um difeomorfismo } \phi : \Omega \rightarrow \mathcal{R}^n \quad (5.116)$$

$$2. \text{ Uma lei de controlo } u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v \quad (5.117)$$

tais que o novo conjunto de variáveis

$$\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}) \quad (5.118)$$

e a nova entrada v satisfaçam o sistema linear e invariante no tempo

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{b} v \quad (5.119)$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.120)$$

A nova variável de estado \mathbf{z} é designada por *estado linearizado*, e a lei de controlo (5.117) é chamada *lei de controlo linearizante*.

Repare-se que a forma das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{b} faz com que o sistema (5.120) tenha a forma de um **integrador múltiplo**. Este facto não introduz qualquer perda de generalidade, uma vez que todo o sistema linear pode ser escrito na forma companheira, que por sua vez, por meio da mudança de variável (5.118) pode ser transformado num integrador múltiplo. Note-se que na linearização entrada-saída de um sistema com grau relativo $r=n$ também se é conduzido a um integrador múltiplo, de ordem n . Isto significa que se um sistema for linearizável entrada-estado e a sua saída for a 1ª componente do vector de estado, $y=z_1$, então o sistema é linearizável entrada-saída, com grau relativo $r=n$.

5.3.2. Condições para efectuar a linearização entrada-estado

Na secção anterior definiu-se o conceito de linearização entrada estado de um sistema não linear, linear no controlo. Será que é sempre possível efectuar tal linearização? Se sim, quais as condições exigidas?

A resposta a estas questões é dada pelo seguinte teorema, um dos mais importantes da teoria da linearização por retroacção.

Teorema (c.n.s. para a linearização)

Considere-se um sistema linear no controlo, da forma (5.112), com \mathbf{f} e \mathbf{g} campos vectoriais suaves. O sistema é linearizável entrada-estado se e só se existir uma região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ na qual se verifiquem as seguintes condições:

1. Os campos vectoriais $\{\mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}, \dots, \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}\}$ são linearmente independentes. (5.121)

2. O conjunto de vectores $\{\mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}, \dots, \text{ad}_f^{n-2} \mathbf{g}\}$ é involutivo. (5.122)

A primeira condição indica que **o sistema é controlável**. Exemplificando para um sistema linear (ver Exemplo 5-6) tem-se

$$\{\text{ad}_f^0 \mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}, \text{ad}_f^2 \mathbf{g}, \dots, \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}\} = \{\mathbf{b}, -\mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, (-1)^{n-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}\} \quad (5.123)$$

e a independência destes vectores equivale a ser igual a n a característica da **matriz de controlabilidade**

$$[\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (5.124)$$

A demonstração deste teorema encontra-se em [Slotine] e em [Isidori]

5.3.3. Algoritmo para realizar a linearização entrada-estado

Com base nos resultados que se acabam de apresentar é possível estabelecer o seguinte algoritmo destinado a efectuar a linearização entrada-estado de um sistema não linear do tipo (5.112).

1. Construir os campos de vectores $\{\mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}, \dots, \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}\}$ (5.125)

2. Verificar se as condições 1. e 2. da secção anterior, de controlabilidade e involutividade são satisfeitas. Caso não o sejam o sistema não é linearizável entrada-saída. Caso sejam, passar ao ponto seguinte.

3. Calcular a 1ª componente do novo vector de estado, z_1 , a partir de (5.93) e fazer $r = n$

$$\nabla z_1 \text{ad}_f^i \mathbf{g} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \quad (5.126)$$

$$\nabla z_1 \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g} \neq 0 \quad (5.127)$$

4. Calcular o novo estado

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = [z_1 \ L_f z_1 \ \dots \ L_f^{n-1} z_1]^T \quad (5.128)$$

5. Calcular a nova variável de entrada, v , referida em (5.114) e dada por

$$u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) v \quad (5.129)$$

com $\alpha(\mathbf{x})$ e $\beta(\mathbf{x})$ dados por

$$\alpha(\mathbf{x}) = - \frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \quad (5.130)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \quad (5.131)$$

Exemplo 5-8 (Slotine/Li, 1991, págs. 242-245)

Considere um braço mecânico actuado por um veio através de uma junta flexível, como se mostra na Fig. 5.3.

- a) Determinar um modelo de estado representativo da dinâmica do sistema.
- b) Nas condições em que tal é possível, efectue a linearização entrada-saída do modelo.

Resolução:

Designando por

- T – Binário motor (variável de controlo, u),
- J – Momento de inércia do veio motor,
- θ_m – Posição angular do veio motor, relativamente à vertical,
- k – Coeficiente de torção do eixo de ligação ($k > 0$),
- M – Massa do braço,
- L – Distância do centro de massas do braço ao eixo de ligação,
- I – Momento de inércia do braço em relação ao veio,
- θ – Posição angular do braço, relativamente à vertical (variável controlada),

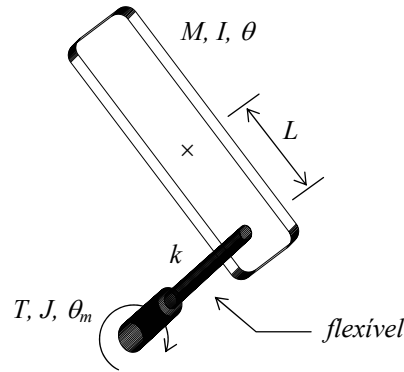


Fig. 5.3 – Braço com junta flexível

podem escrever-se as equações do sistema:

$$\begin{cases} T = J \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + k(\theta_m - \theta) \\ k(\theta_m - \theta) = MgL \sin \theta + I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases} \quad (5.132)$$

Escolhendo para vector de estado

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \theta_m \ \dot{\theta}_m]^T \quad (5.133)$$

tem-se

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \\ x_4 \\ \frac{k}{J} (x_1 - x_3) \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (5.134)$$

Seguindo agora os passos do algoritmo anterior, será:

1. Construção do campo de vectores (sendo \mathbf{g} constante a sua derivada é nula)

$$\text{ad}_f \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = -\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{MgL}{I} \cos x_1 + \frac{k}{I} & 0 & -\frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{k}{J} & 0 & \frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} (= \mathbf{g}_1)$$

$$\text{ad}_f^{(2)} \mathbf{g} = \text{ad}_f(\text{ad}_f \mathbf{g}) = \text{ad}_f(\mathbf{g}_1) = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{MgL}{I} \cos x_1 + \frac{k}{I} & 0 & -\frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{k}{J} & 0 & \frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{IJ} \\ 0 \\ -\frac{k}{J^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{e, mais uma vez, até se obter, } [\mathbf{g} \text{ ad}_f \mathbf{g} \text{ ad}_f^2 \mathbf{g} \text{ ad}_f^3 \mathbf{g}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{IJ} \\ 0 & 0 & \frac{k}{IJ} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & \frac{k}{J^2} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{k}{J^2} & 0 \end{bmatrix}$$

2. A característica desta matriz é igual a 4 desde que $k > 0$, $I, J < \infty$.
 Por sua vez os campos vectoriais $\{\mathbf{g} \text{ ad}_f \mathbf{g} \text{ ad}_f^2 \mathbf{g}\}$ são constantes, formando assim um conjunto involutivo. Conclui-se pois que o sistema é linearizável entrada estado.

3. Para a 1ª componente do novo vector de estado, z_1 ,

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_4} = 0 \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \neq 0$$

A componente z_1 deverá ser apenas função de x_1 . A forma mais simples é fazer $z_1 = x_1$.

4. As restantes componentes do novo vector de estado serão, por (5.132),

$$z_2 = L_f z_1 = x_2$$

$$z_3 = L_f^2 z_1 = -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I} (x_1 - x_3)$$

$$z_4 = L_f^3 z_1 = -\frac{MgL}{I} x_2 \cos x_1 - \frac{k}{I} (x_2 - x_4)$$

5. A nova variável de entrada, v , é definida por $u = \frac{IJ}{k} [v - \alpha(\mathbf{x})]$, com $\alpha(\mathbf{x})$ dado por

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{MgL}{I} \sin x_1 \left(x_2 + \frac{MgL}{I} \cos x_1 + \frac{k}{I} \right) + \frac{k}{I} (x_1 - x_3) \left(\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{MgL}{I} \cos x_1 \right)$$

obtendo-se assim o sistema linear

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ v \end{bmatrix}$$

Repare-se que neste exemplo a linearização é global, uma vez que o difeomorfismo $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ e a transformação da entrada se encontram bem definidos em todo o espaço de estados.

5.4. Linearização Entrada-Saída

Viu-se na secção 5.1.4 que para efectuar a linearização entrada-saída se derivava a saída r vezes até se ter uma relação explícita entre a derivada de ordem r da saída e a entrada, procurando-se então uma lei de controlo que cancelasse a linearidade. Ao valor r dá-se o nome de grau relativo do sistema.

Acontece porém que este procedimento nem sempre é possível, devido ao facto do grau relativo do sistema poder ser indefinido. Considerar-se-ão a seguir os casos em que o grau relativo é bem definido e em que é indefinido.

5.4.1. Grau relativo bem definido

Considere-se um sistema de entrada única e saída única, linear na variável de controlo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (5.135)$$

com \mathbf{f} , \mathbf{g} e h funções suaves e considere-se uma região do espaço de estados $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}^n$. Derivando a saída, e utilizando a notação de geometria diferencial, obtém-se [ver (5.89)]

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f} + \mathbf{g}u) = L_f h + L_g h u \quad (5.136)$$

Se for $L_g h \neq 0$ para algum $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ pertencente a Ω_x , então por continuidade também será diferente de zero numa região Ω , finita, na vizinhança de \mathbf{x}_0 . A transformação da entrada, dentro de Ω ,

$$u = \frac{1}{L_g h} (-L_f h + v) \quad (5.137)$$

conduz à relação linear entre y e v ,

$$\dot{y} = v \quad (5.138)$$

Se $L_g h = 0$ para todo \mathbf{x} pertencente a Ω_x , então é necessário diferenciar de novo a saída, obtendo-se

$$\ddot{y} = L_f^2 h + L_g L_f h u \quad (5.139)$$

O raciocínio prossegue até se chegar a um determinado inteiro r para o qual se tem

$$y^{(r)} = L_f^r h + L_g L_f^{r-1} h u \quad (5.140)$$

com $L_g L_f^{r-1} h \neq 0$ para algum $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Então por continuidade esta desigualdade será verificada numa região finita $\Omega \subseteq \Omega_x$. A lei de controlo

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (-L_f^r h + v) \quad (5.141)$$

aplicada a (5.140) conduz à relação linear

$$y^{(r)} = v \quad (5.142)$$

Como também se disse anteriormente, deverá ser $r \leq n$. No caso particular em que $r = n$, a linearização entrada-saída é equivalente à linearização entrada-estado. Pode dar-se então a seguinte definição, já apresentada em (5.93):

O sistema (5.135) é de grau relativo r , numa região Ω , se para qualquer $\mathbf{x} \in \Omega$ se verificar

$$\begin{cases} L_g L_f^i h(\mathbf{x}) = 0, & 0 \leq i < r-1 \\ L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases} \quad (5.143)$$

5.4.2. Grau relativo indefinido

Viu-se que quando o grau relativo de um sistema é r , se deve verificar $L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0$. Acontece porém que esta expressão pode ser diferente de zero numa vizinhança de \mathbf{x}_0 , mas ser nula no próprio ponto \mathbf{x}_0 . Diz-se então que o sistema tem um **grau relativo indefinido** em \mathbf{x}_0 . Ilustre-se este caso com um exemplo.

Seja o sistema de 2ª ordem

$$\begin{cases} \ddot{x} = \psi(\dot{x}, x) + u \\ y = x^2 \end{cases} \quad (5.144)$$

onde ψ é uma função não linear do estado $\mathbf{x} = [x \ \dot{x}]^T$. Derivando a saída duas vezes obtém-se

$$\dot{y} = 2x\dot{x} \quad (5.145)$$

$$\ddot{y} = 2x\ddot{x} + 2\dot{x}^2 = 2x(\psi + u) + 2\dot{x}^2 \quad (5.146)$$

Comparando com (5.139) será $L_g L_f h(\mathbf{x}) = 2x$. Para $x \neq 0$ o grau relativo é $r = 2$, mas para $x=0$ (o nosso ponto de interesse), $L_g L_f h(\mathbf{x}) = 0$, e portanto não se sabe qual o grau relativo.

Por vezes uma mudança na variável de saída é suficiente para tornar o problema solúvel. Veja-se por exemplo o que acontece com o cálculo do grau relativo se na equação de saída do sistema acima se fizer $y = x$, em vez de $y = x^2$. No entanto em muitos outros casos o problema não tem solução, e a linearização entrada-saída na vizinhança de um ponto de funcionamento não pode efectuar-se.

5.5. Problemas resolvidos

Probl. 5-1

Suponha que pretende controlar o nível de um tanque cónico (com o vértice para baixo) com 10 m de altura e diâmetro no cimo de 6 m. O sistema é análogo ao da Fig. 5.1, bem como a definição das variáveis.

- Obtenha um modelo de estado para o sistema, para os valores numéricos dados.
- Efectue uma linearização por realimentação, baseado nos conceitos apresentados na secção 5.1.1.
- Com o auxílio do Simulink faça uma simulação deste modelo. Ponha a referência a variar entre 0.8 e 1.2 m, com um período de 1 minuto. Utilize a realimentação de estado indicada na equação (5.9) e limite a derivada da referência. Observe a referência, a saída, o erro e o caudal de entrada.
- Repita o ensaio anterior mas com a referência a variar entre 8.8 e 9.2 m. Conclua sobre o desempenho do controlador. Limite este caudal q_1 a 0.1 m³/s. Que conclui?

Resolução

- a) Esquema da instalação e equações:

O diâmetro d , da superfície do líquido, à cota h , é proporcional à h , devido ao facto do tanque ser cónico.

$$d = kh = \frac{D}{H} h = 0.6h$$

A área da superfície do líquido, $S(h)$ é

$$S(h) = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (0.6h)^2}{4} = 0.2827h^2$$

A variável controlada é h e a manipulada é $u=q_1$.

O balanço de massas impõe $dV = (q_1 - q_2)dt$.

Pelos teoremas da mecânica dos fluidos é $q_2 = S_2 \sqrt{2gh}$, pelo que, se pode escrever, notando que $dV = S(h)dh$ e que $u \equiv q_1$,

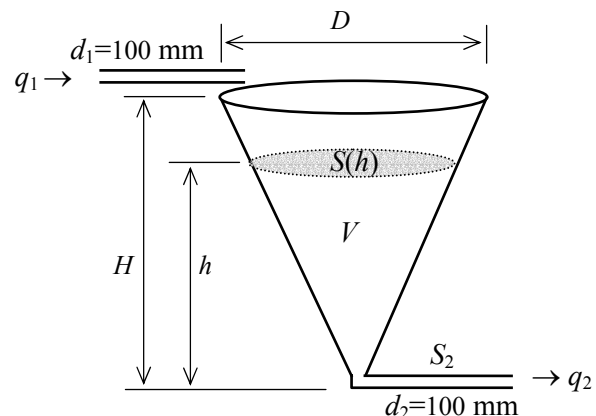
$$S(h)dh = (u - S_2 \sqrt{2gh})dt \quad \text{ou ainda} \quad S(h)\dot{h} = u - S_2 \sqrt{2gh}.$$

Substituindo $S(h)$ pela sua expressão, obtida acima, vem

$$\dot{h} = \frac{-S_2 \sqrt{2gh}}{0.2827h^2} + \frac{1}{0.2827h^2} u$$

ou, como $S_2 = 0.007854 \text{ m}^2$

$$\dot{h} = -0.123h^{-\frac{3}{2}} + 3.537h^{-2} u$$



b) Por analogia com a expressão (5.7) a lei de controlo deverá ser

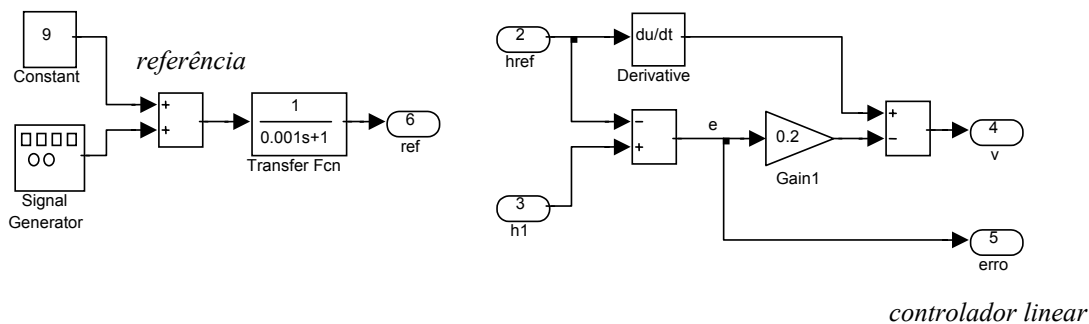
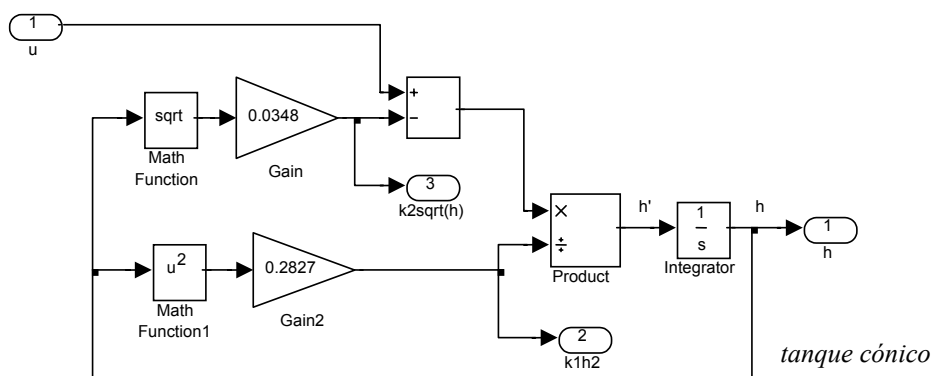
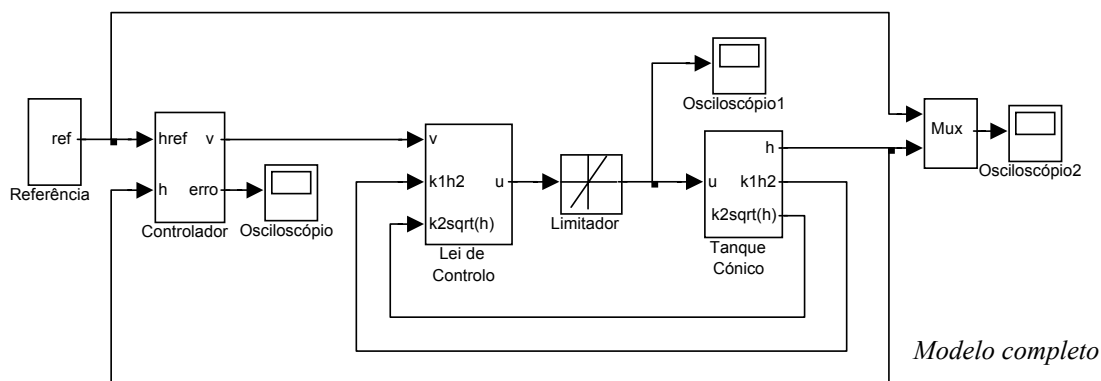
$$u(t) = \frac{1}{3.537h^{-2}} v(t) + 0.123h^{-\frac{3}{2}}$$

Substituindo na equação do sistema obtém-se, depois de efectuar as simplificações

$$\dot{h}(t) = v(t)$$

que é a equação que representa o modelo linearizado.

c) e d) (O limitador de caudal só deverá ser incluído na alínea d))



Probl. 5-2

Utilizando os conhecimentos adquiridos na secção 5.1.3, e *por analogia* com o Exemplo 5-1, e substituição de variáveis (5.27), para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 + e^{x_1} \\ \dot{x}_2 = -x_2 e^{x_1} + x_1 u \end{cases}$$

- a) Efectue a linearização, por realimentação, entrada-estado
b) Indique se a linearização obtida é global. Justifique.

Resolução

- a) Por analogia com (5.27) efectue-se a mudança de variáveis $\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = 2x_2 + e^{x_1} \end{cases}$

Será pois

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_1 \\ \dot{z}_2 = 2\dot{x}_2 + \dot{x}_1 e^{x_1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = -3z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = 2\dot{x}_2 + \dot{x}_1 e^{x_1} \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -3z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -2x_2 e^{x_1} + 2x_1 u + \dot{x}_1 e^{x_1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = -3z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -3x_1 e^{x_1} + e^{2x_1} + 2x_1 u \end{cases}$$

Introduzindo a lei de controlo

$$u = \frac{1}{2x_1}(v + 3x_1 e^{x_1} - e^{2x_1})$$

obtém-se o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -3z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{cases} \text{ ou seja } \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}u, \text{ com } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- b) A lei de controlo não pode ser aplicada em $x_1=0$, pelo que a linearização não é global.

Probl. 5-3

Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Utilizando os conhecimentos adquiridos nas secções 5.1.4 e 5.1.5

- a) Efectue a linearização por realimentação, entrada-saída.
b) Qual o grau relativo do sistema?
c) Indique se a linearização obtida é global.
d) Qual a sua dinâmica zero?

Resolução

- a) Como não existe nenhuma relação explícita entre a entrada e a saída, derive-se y :

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_1 - x_2 x_3.$$

Uma vez que continua a não haver nenhuma relação explícita entre a entrada e a saída, derive-se de novo:

$$\ddot{y} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 x_3 - x_2 \dot{x}_3 \rightarrow \ddot{y} = x_1 - x_2 x_3 - (x_3 - x_1 x_3) x_3 - x_2 (x_1 u)$$

ou ainda

$$\ddot{y} = x_1 - x_2 x_3 - x_3^2 + x_1 x_3^2 - x_1 x_2 u$$

A lei de controlo

$$u = -\frac{1}{x_1 x_2} (v - x_1 + x_2 x_3 + x_3^2 - x_1 x_3^2)$$

conduz ao sistema linear

$$\ddot{y} = v$$

- b) O grau relativo do sistema é $r=2$. Com efeito, foi necessário derivar a saída 2 vezes, até se obter uma relação explícita entre a entrada e a saída (através da sua derivada).
- c) A lei de controlo não pode ser aplicada em $x_1=0$ ou $x_2=0$, pelo que a linearização não é global.
- d) A dinâmica zero pode obter-se substituindo a lei de controlo na última equação de estado e igualando v a zero, resultando assim $\dot{x}_3 = \frac{1}{x_2} (x_1 - x_2 x_3 - x_3^2 + x_1 x_3^2)$

Probl. 5-4

Considere o seguinte sistema linear: $G(s) = \frac{1-2s}{2+2s+s^2}$

- a) Obtenha um modelo de estado para o sistema.
- b) Projecte um controlador por realimentação de estado para a saída seguir uma referência conhecida e com derivada limitadas. (Porque é que se impõe esta condição?)
- c) Como representaria a dinâmica interna deste sistema? Será que ela é estável?
- d) Represente a dinâmica zero do sistema.

Resolução

- a) Por comparação entre o sistema dado e o modelo da expressão (5.65) pode escrever-se o modelo de estado, análogo a (5.67) / (5.68)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- b) A equação de saída, $y = x_1 - 2x_2$ não contém nenhuma relação explícita entre a entrada e a saída. Derivando esta obtém-se $\dot{y} = \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2$, ou ainda, $\dot{y} = 4x_1 + 5x_2 - 2u$. Como se encontrou a dependência pretendida ao fim da 1ª derivação conclui-se que o grau relativo do sistema é 1. Com efeito o grau relativo, nos sistemas lineares, representa o excesso de pólos sobre zeros, e o sistema tem 2 zeros e um pólo. Projecte-se um controlador análogo ao de (5.71). Começa-se por introduzir a lei de controlo

$$u = -\frac{1}{2}v - 4x_1 - 5x_2$$

e faz-se $v = \dot{r} - ke$, em que $e = y - r$. Obtém-se a equação para o erro $\dot{e} + ke = 0$, que conduz a um erro exponencialmente estável se e só se $k > 0$.

- c) A dinâmica interna será descrita por $n-r$ equações, sendo n a ordem do sistema e r o seu grau relativo. Para este sistema será descrita por $2-1=1$ equação. Escolhendo a equação $\dot{x}_1 = x_2$ e atendendo a que $y = x_1 - 2x_2$, obtém-se $\dot{x}_1 - \frac{1}{2}x_1 = -\frac{1}{2}y$. Esta dinâmica não é estável, uma vez que o seu pólo, com o valor 0.5, se encontra localizado no semiplano complexo direito. Repare-se que este pólo corresponde ao zero do sistema dado.
- d) A dinâmica zero obtém-se a partir da dinâmica interna fazendo $y=0$ (ver secção 5.1.7) obtendo-se assim $\dot{x}_1 - \frac{1}{2}x_1 = 0$.

Probl. 5-5

Considere o sistema $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$ e a função de Lyapunov $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$.

Utilizando o formalismo da Geometria Diferencial calcule $\dot{V}(\mathbf{x})$. Utilize a expressão (5.90). Que conclui sobre a estabilidade do sistema?

Resolução

O sistema dado pode ser escrito na forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, com $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 \\ x_1 - x_2^3 \end{bmatrix}$.

Pela expressão (5.90) será $\dot{V}(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x})$, ou seja

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 \\ x_1 - x_2^3 \end{bmatrix} = [2x_1 \quad 2x_2] \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 \\ x_1 - x_2^3 \end{bmatrix} = -2(x_1^4 + x_2^4),$$

que é negativa definida, pelo que $V(\mathbf{x})$ é função de Lyapunov do sistema, e portanto o sistema é estável.

Probl. 5-6

Usando a notação da Geometria Diferencial determine o grau relativo do sistema apresentado no Probl. 5-3.

Resolução

Na secção 5.4 encontram-se as expressões (5.143), que serão utilizadas para a determinação de r . O sistema do Probl. 5-3 pode escrever-se

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 x_3 \\ x_3 - x_1 x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

que é da forma (5.135), com

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 x_3 \\ x_3 - x_1 x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = x_1$$

Comece-se a ensaiar a expressão (5.143) com $r=1$:

Será, de acordo com (5.84), $L_f^0 h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) = x_1$.

$$\text{Calcule-se agora } L_g L_f^0 h(\mathbf{x}) = L_g x_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Portanto o grau relativo será superior a 1. Ensaie-a então (5.143) para $r=2$:

$$\text{Será } L_f^1 h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 x_3 \\ x_3 - x_1 x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 x_3 \\ x_3 - x_1 x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 - x_2 x_3$$

$$L_g L_f^1 h(\mathbf{x}) = L_g (x_1 - x_2 x_3) = \begin{bmatrix} 1 & -x_3 & -x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -x_2$$

Este valor é diferente de zero, excepto quando $x_2=0$. Para $x_2 \neq 0$ o grau relativo é $r=2$, sendo indefinido em $x_2=0$.

Probl. 5-7

Considere de novo o sistema do Probl. 5-3.

- a) Construa a matriz $\{\text{ad}_f^0 \mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}, \text{ad}_f^2 \mathbf{g}, \dots, \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}\}$ apresentada no Exemplo 5-6 e também em (5.123).
 b) Que conclui sobre a controlabilidade do sistema? Será local ou global?

Resolução

- a) Uma vez que se trata de um sistema de 3ª ordem a matriz pedida será apenas $\mathbf{M} = \{\text{ad}_f^0 \mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}, \text{ad}_f^2 \mathbf{g}\}$.

No Probl. 5-6 viu-se que em relação ao Probl. 5-3 se tinha

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 x_3 \\ x_3 - x_1 x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h = x_1$$

pelo que

$$1. \text{ad}_f^0 \mathbf{g} = \mathbf{g} = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ad}_f \mathbf{g} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}] &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 x_3 \\ x_3 - x_1 x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 x_3 \\ x_3 - x_1 x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & 1 - x_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 - \begin{bmatrix} -x_2 \\ 1 - x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{g}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ad}_f^2 \mathbf{g} = \text{ad}_f(\text{ad}_f \mathbf{g}) = \text{ad}_f \mathbf{g}' &= \frac{\partial \mathbf{g}'}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}' = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g'_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 x_3 \\ x_3 - x_1 x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 x_3 \\ x_3 - x_1 x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & 1 - x_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Juntando os 3 vectores calculados obtém-se

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & -x_2 \\ 0 & x_1 - 1 & x_1 \\ 1 & 0 & -x_2 \end{bmatrix}$$

- b) O determinante da matriz obtida é diferente de zero, excepto para $x_1 = 0.5$ ou $x_2 = 0$. O sistema dado é controlável, excepto para estes pontos do espaço de estados. A controlabilidade não é pois global.

Probl. 5-8

Com o auxílio do teorema de Frobenius indique se o seguinte sistema de equações às derivadas parciais é completamente integrável:

$$\begin{cases} x_3 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0 \\ -2x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

Resolução

Pelo teorema de Frobenius, é c.n.s. para que o sistema seja completamente integrável

que $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}$, em que $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e α e β são escalares, reais não

simultaneamente nulos.

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O resultado obtido não pode ser expresso como combinação linear de \mathbf{f} e \mathbf{g} , pelo que o sistema não é completamente integrável.

Probl. 5-9

Considere o modelo do pêndulo ligado a um ponto por meio de uma haste rígida, podendo rodar em torno desse ponto. O pêndulo encontra-se excitado por uma força u .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{b}{m} x_2 + \frac{1}{ml} u \end{cases}$$

e em que g representa a aceleração da gravidade, ℓ o comprimento da haste, m a massa do pêndulo e k o seu coeficiente de atrito cinético. As componentes x_1 e x_2 do estado representam a posição angular do pêndulo em relação à vertical, e a sua velocidade.

Baseando-se nos conceitos apresentados em 5.3.2 e 5.3.3,

- Indique quais as condições para que se possa efectuar a linearização entrada-estado.
- No caso das condições anteriores serem satisfeitas, e utilizando o algoritmo para a linearização entrada-estado, efectue a sua linearização.

Resolução

a) Para este modelo, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$, tem-se $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{b}{m} x_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{bmatrix}$

Verifique-se se o sistema é controlável. Por ser de 2ª ordem será $\mathbf{M} = [\text{ad}_f^0 \mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}]$.

$$\text{ad}_f^0 \mathbf{g} = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{bmatrix}$$

$$\text{ad}_f \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{b}{m} x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} \cos x_1 & -\frac{b}{m} x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m\ell} \\ \frac{b}{m^2 \ell} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m\ell} \\ \frac{1}{m\ell} & \frac{b}{m^2 \ell} \end{bmatrix} \text{ A característica de M é igual a 2 desde que } m \neq \infty \text{ ou } \ell \neq \infty,$$

pelo que o sistema é controlável. Por sua vez os vectores coluna da matriz \mathbf{M} são constantes, e portanto involutivos [aplique-se-lhes a definição (5.108)]. Estão pois satisfeitas as condições para que se possa efectuar a linearização entrada-estado.

- A 1ª componente do novo vector de estado, z_1 , deverá ser obtida por meio das expressões (5.126) e (5.127). Uma vez que $n=2$, da expressão (5.126) resulta

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \frac{1}{m\ell} \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0$$

Da expressão (5.127) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{m\ell} \\ \frac{b}{m^2 \ell} \end{bmatrix} \neq 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{m\ell} \\ \frac{b}{m^2 \ell} \end{bmatrix} \neq 0 \rightarrow -\frac{1}{m\ell} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \neq 0 \rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \neq 0$$

A forma mais simples de satisfazer a última expressão consiste em fazer $z_1 = x_1$.

A segunda componente do novo vector de estado, z_2 , é determinada a partir de (5.128):

$$z_2 = L_f z_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{b}{m} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{b}{m} x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

Logo, o novo vector de estado é igual ao anterior: $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2] = [x_1 \ x_2] = \mathbf{x}$

A nova variável de entrada é calculada por meio de (5.129): $u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) v$

em que $\alpha(\mathbf{x})$ e $\beta(\mathbf{x})$ são obtidos por (5.130) e (5.131), respectivamente:

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1} \quad \beta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1}$$

$L_f^{n-1} z_1 = x_2$ (já calculado atrás).

$$\begin{aligned} L_f^n z_1 &= L_f (L_f^{n-1} z_1) = L_f x_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{b}{m} x_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{b}{m} x_2 \end{bmatrix} = -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{b}{m} x_2 \end{aligned}$$

$$L_g (L_f^{n-1} z_1) = L_g x_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell} \end{bmatrix} = \frac{1}{m\ell}$$

$$\text{Logo, será } \alpha(\mathbf{x}) = -\frac{-\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{b}{m} x_2}{\frac{1}{m\ell}} = mg \sin x_1 + \ell b x_2 \quad \beta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\frac{1}{m\ell}} = -m\ell$$

e portanto $u = mg \sin x_1 + \ell b x_2 - m\ell v$,

obtendo-se assim o sistema linear $\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -v \end{bmatrix}$

5.6. Problemas propostos

Probl. 5-10

Considere o modelo de um motor de corrente contínua controlado pela corrente de magnetização, descrito pelo modelo de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 u + k_3 \\ \dot{x}_2 = -k_4 x_2 + k_5 x_1 u \\ y = x_2 \end{cases}$$

k_1 a k_5 – Constantes positivas, u – Corrente de magnetização (variável manipulada),
 x_1 – Corrente no motor, x_2 – velocidade do motor.

- Efectue a sua linearização entrada-saída.
- Determine o grau relativo do sistema?
- Exprima \dot{y} em termos da notação usada na Álgebra de Lie.

Probl. 5-11

Considere o sistema descrito pelo modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- Indique, justificando, se o sistema é controlável e se é linearizável entrada-estado.
- Determine o grau relativo do sistema. Que conclui sobre a sua dinâmica interna?

Probl. 5-12

Considere o sistema definido por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1 x_2 + \ln x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

- Determine uma lei de controlo $u(x_1, x_2, v)$ (v é a nova variável de controlo), que transforme este sistema em $\dot{y} = v$. A lei de controlo é global? Justifique.
- Considere agora apenas as equações entrada-estado. Determine $\mathbf{f}(x_1, x_2)$ e $\mathbf{g}(x_1, x_2)$ de modo a que o sistema fique na forma: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(x_1, x_2) + \mathbf{g}(x_1, x_2)u$
- Defina variáveis de estado z_1 e z_2 tais que $\nabla z_1 \cdot \mathbf{g} = 0$, $\nabla z_1 \cdot \text{ad}_f \mathbf{g} \neq 0$ e $z_2 = L_f z_1$. Utilizando estas variáveis, calcule a lei de controlo $u = \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2)v$ onde:

$$\alpha(x_1, x_2) = -\frac{L_f^2 z_1}{L_g L_f z_1} \quad \beta(x_1, x_2) = \frac{1}{L_g L_f z_1}$$

(Compare com a lei de controlo obtida na alínea b)).

6. SISTEMAS DIFUSOS E REDES NEURONAIS

6.1. Introdução. Controlo inteligente

Quase todos os processos industriais estão ligados a sistemas de aquisição de dados, a sistemas de controlo distribuído, ou apenas a sistemas de monitorização e diagnóstico. Devido ao aumento de complexidade dos processos, com acréscimo do número de cadeias de controlo multivariável, com um grande acoplamento entre as variáveis, fortes não linearidades e variações dos parâmetros por vezes rápidas, os esquemas de controlo convencionais, apesar de terem tido uma evolução muito significativa, por vezes são insuficientes para resolver alguns dos problemas de controlo que se colocam, pelo que poderá haver necessidade de recorrer a técnicas diferentes das convencionais.

Uma das ideias que se encontra na base de algumas das técnicas que surgiram foi a de observar como é que os seres vivos, e em particular os seres humanos, se comportam perante determinado tipo de problemas, e como é que os solucionam. Aplicado ao controlo de processos surgiu desta forma o chamado *controlo inteligente*.

O facto do ser humano lidar por vezes com informação que não se encontra bem definida, ou até mesmo inexistente foi uma das razões que levou ao aparecimento da *lógica difusa*, que tem servido para muitos fins, entre eles para efectuar a identificação de sistemas e efectuar o seu controlo. Os *sistemas periciais* e os *sistemas baseados em regras* são outras formas de lidar com sistemas e podem por vezes ser associados aos sistemas difusos.

A observação da modo como o cérebro humano funciona deu origem ao desenvolvimento de uma estrutura matemática, as *redes neuronais artificiais* (RNA). Os diversos tipos de RNA têm sido utilizados em campos muito diversos, sendo talvez os mais importantes o reconhecimento de caracteres, o reconhecimento de padrões e a identificação de sistemas. Também têm sido usadas em controlo de sistemas.

Quando os parâmetros de um sistema variam no tempo ou quando devido à existência de vários pontos de funcionamento com características muito distintas (devido por exemplo às não linearidades), torna-se necessário ir ajustando os parâmetros do controlador de uma forma automática: é este o princípio do *controlo adaptativo*. Outras vezes há necessidade de trabalhar com sistemas em que os parâmetros podem variar muito rapidamente no tempo, de forma que, para a obtenção de bons resultados, não há tempo de esperar que se faça a adaptação dos parâmetros. Surgiu então a ideia de ter previamente disponíveis uns tantos modelos do sistema, previstos ou não previstos, e outros tantos conjuntos de parâmetros para os respectivos controladores, de modo a entrar imediatamente em operação o controlador que nesse instante melhor corrige o processo, tendo nascido assim o controlo com *modelos múltiplos*.

Num outro tipo de formalismo, designado por **algoritmos genéticos**, definem-se entes matemáticos com propriedades semelhantes às das células biológicas, que nascem, se multiplicam e desaparecem de acordo com um conjunto de regras bem definidas. Estes algoritmos têm sido utilizados em vários campos científicos, nomeadamente no controlo de processos.

Neste capítulo apenas serão abordadas a lógica difusa e as redes neuronais e a sua aplicação no controlo de sistemas.

6.2. Conjuntos e lógica difusa

6.2.1. Introdução

O conceito de **conjunto difuso** (“*fuzzy set*”) está associado a uma classe de objectos em que não se consegue, ou não tem interesse, efectuar a classificação de uma forma precisa, no sentido convencional. Embora o conceito se perca na 2ª metade do século XIX, ele só em 1965 foi formalmente apresentado, por Zadeh⁽¹⁾. Uma das preocupações que estiveram na base do aparecimento dos conjuntos difusos foi a seguinte:

“Algumas classes de objectos não têm critérios de pertença bem definidos”.

Veja-se o seguinte exemplo: Estão 60 pessoas de diversas nacionalidades numa esplanada em Paris, numa noite de Outubro, em que a temperatura ronda os 17 °C. Como é que os utentes da esplanada classificam o ambiente: *muito frio, frio, tépido, quente ou muito quente?*

Este problema, que aqui se equaciona para um facto do dia a dia, põe-se em qualquer outro ramo de actividade, como sejam numa indústria ou até mesmo numa ciência exacta como a Matemática. Num processo industrial, um determinado operador trabalha com uma certa válvula com uma *abertura* que considera *ideal*, enquanto outro operador, nas mesmas circunstâncias acha que essa válvula se encontra demasiado aberta. E em matemática, o que é que se entende por analisar o comportamento de uma determinada função na *vizinhança* de $x=0$? Qual deverá ser o domínio a considerar?

É para formalizar este tipo de conceitos que se estudam os conjuntos difusos, e os sistemas que com eles operam, designados por sistemas difusos. O conceito é de tal modo flexível e poderoso que pode ser estendido aos sistemas de controlo, dando origem ao **controlo difuso**.

6.2.2. Conjuntos e sistemas difusos

6.2.2.1. Definições

O conceito convencional de conjunto é obtido à custa de uma determinada **característica**, C . Designando por U o conjunto universal e por x os seus elementos, para um determinado conjunto A atribui-se um valor $C_A(x)$ a cada um dos seus elementos $x \in U$, do seguinte modo:

¹ Lutfi A. Zadeh, Engenheiro Electrotécnico, Azerbeijão, 1921-...

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{sse } x \in A \\ 0, & \text{sse } x \notin A \end{cases} \quad (6.1)$$

Esta função característica A de x , discrimina todos os elementos de um determinado conjunto universal, também designado por **universo do discurso**, em dois grupos: os que pertencem a A (têm a característica $C_A=1$) e os que não pertencem a A (têm a característica $C_A=0$). Pode pois dizer-se que C_A é uma **aplicação** de U em $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$:

$$C_A: U \rightarrow \{0,1\} \quad (6.2)$$

Esta **classificação dicotómica**, embora exacta, poderá não ser das mais apropriadas para lidar com certo tipo de fenómenos. Considere-se assim o exemplo dado atrás para classificar o ambiente da esplanada em função da temperatura. Pode efectuar-se uma classificação, do tipo anterior, do modo seguinte:

<i>Temperatura (T)</i>	<i>Ambiente</i>
$T < 10^\circ\text{C}$	<i>muito frio</i>
$10 \leq T < 17^\circ\text{C}$	<i>frio</i>
$17 \leq T < 24^\circ\text{C}$	<i>tépido</i>
$24 \leq T < 30^\circ\text{C}$	<i>quente</i>
$T \geq 30^\circ\text{C}$	<i>muito quente</i>

Sabe-se assim, de uma forma exacta, que a característica do ambiente é “*tépido*” se a temperatura se encontrar compreendida entre 17 e 24 °C, e não será “*tépido*” caso contrário. E que acontece quando a temperatura, que estava a descer de uma forma muito lenta, passar de 17.01 °C para 16.99 °C? Será que o ambiente passou bruscamente de *tépido* a *frio*? De acordo com a classificação dada de facto assim aconteceu. Mas será esta a forma mais correcta de classificar?

Para resolver situações semelhantes à deste exemplo faz-se uma extensão da noção convencional de conjunto, definindo uma classe de objectos em que a transição de uma classe para outra é gradual, em vez de ser abrupta. É assim introduzido o conceito de função de pertença, definido como se segue:

Seja U o conjunto universal ou universo do discurso. Define-se **função de pertença** de um conjunto A , μ_A , pela aplicação

$$\mu_A: U \rightarrow \{0,1\} \quad (6.3)$$

em que $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$.

Nestes termos, a classificação do ambiente da esplanada apresentado atrás pode por exemplo ser feita com 5 funções de pertença, como exemplificado na Fig. 6.1

Define-se **suporte** de um conjunto difuso como o conjunto convencional dos pontos com grau de pertença em A não nulo. Formalmente é conjunto

$$\{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (6.4)$$

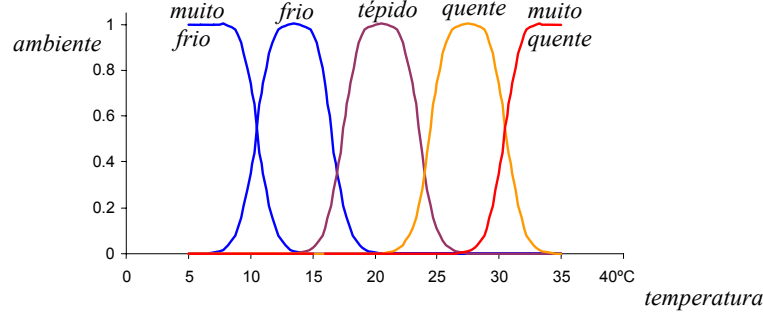


Fig. 6.1 – Funções de pertinência para a temperatura ambiente

Define-se **corte- α fraco** de um conjunto difuso A, ou simplesmente **corte- α** , como

$$A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (6.5)$$

Define-se **corte- α forte** de um conjunto difuso A, como sendo

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \in U \mid \mu_A(x) > \alpha\} \quad (6.6)$$

Se a função de pertinência for contínua os cortes fraco e forte são coincidentes.

Define-se **altura** de um conjunto difuso A pela expressão

$$H(A) = \{\sup \mu_A(x) > \alpha\} \quad (6.7)$$

Um conjunto difuso diz-se **normalizado** ou **regular** se $H(A) = 1$.

Um conjunto difuso diz-se **convexo** quando o seu suporte é um subconjunto dos reais e verifica

$$\forall x \in [a, b] \subset \mathfrak{R}, \mu_A(x) \geq \min(\mu_A(a), \mu_A(b)) \quad (6.8)$$

Observando o conjunto difuso de valores do ambiente “tépido” do exemplo anterior, conclui-se que é normalizado e convexo.

Chama-se **número difuso** a um conjunto difuso normalizado e convexo, definido em \mathfrak{R} , com uma função de pertinência contínua ou contínua por troços. Dê-se um exemplo, relacionado com o que já foi abordado na introdução, da vizinhança de uma função em torno de zero. Introduza-se o conceito de número próximo de zero através de uma função de pertinência, por exemplo,

$$\mu_{\text{zero}}(x) = \frac{1}{10x^2 + 1} \quad (6.9)$$

cuja representação gráfica se encontra na Fig. 6.2. O conjunto difuso dos números próximos de zero é caracterizado pela função de pertença (6.9). O número difuso *aproximadamente zero* poderá ser caracterizado pela mesma função de pertença.

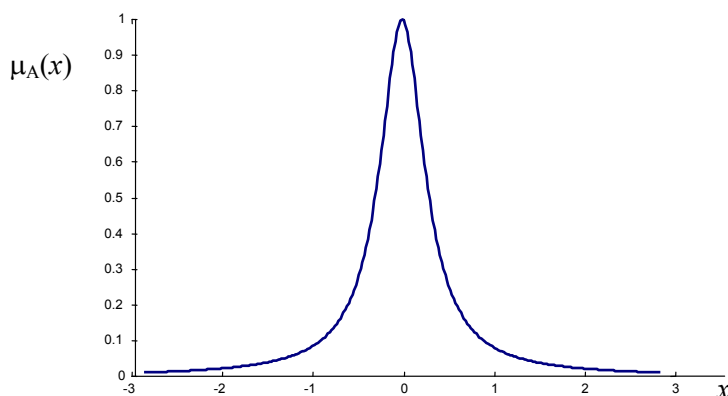


Fig. 6.2 – Função de pertença para o conjunto difuso dos números reais próximos de zero.

Chama-se **singular difuso** (“*fuzzy singleton*”) a um conjunto difuso cujo suporte é um único ponto de U . Se A é um singular difuso cujo suporte é o ponto x_0 , então A é representado por

$$A = \mu_A(x_0) / x_0 \quad (6.10)$$

Um conjunto difuso A pode ser considerado como sendo a união dos seus singulares constituintes. Nesta conformidade, num universo de discurso **discreto** $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o conjunto pode representar-se por

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) / x_i \quad (6.11)$$

6.2.2.2. Propriedades fundamentais

Há dois princípios básicos na teoria dos conjuntos difusos: o princípio da resolução e o princípio da extensão.

O **princípio da resolução**, ou da **representação**, afirma o seguinte: um conjunto difuso pode ser encarado como sendo a união dos seus *cortes- α* :

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha A_{\bar{\alpha}} \quad (6.12)$$

O **princípio da extensão** permite a generalização de conceitos matemáticos convencionais aos conjuntos difusos. Seja f uma função contínua tal que $f: X \rightarrow Y$. Pelo princípio da extensão, ao conjunto difuso A definido em X é feito corresponder um conjunto difuso $f(A)$ tal que

$$f(A) = \int_Y \mu_{f(A)}(x) / f(x) \quad (6.13)$$

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_{y=f(x)} \mu_A(x) \quad (6.14)$$

Este princípio está na base da aritmética difusa, cujas operações foram generalizadas a números difusos, por meio da aplicação de (6.13) e de (6.14).

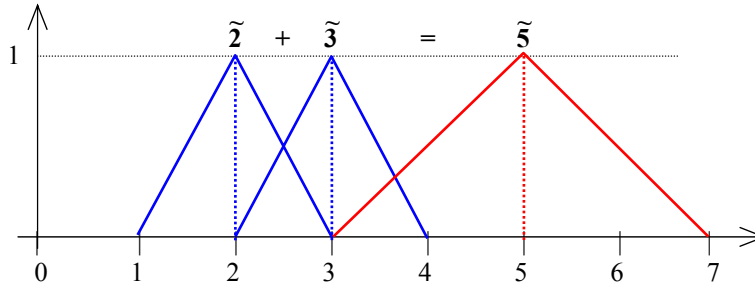


Fig. 6.3 – Adição de dois números difusos

6.2.3. Lógica difusa

A designação ***lógica difusa*** é utilizada em dois contextos diferentes:

- Um no sentido lato, designando os conceitos e técnicas referentes aos conjuntos e aos sistemas difusos (exemplo: controlador de lógica difusa).
- Outro em sentido restrito, referindo-se às relações entre grandezas difusas.

6.2.3.1. Variáveis

De entre as diversas variáveis tipo que podem ser definidas, serão considerados apenas duas: as variáveis difusa e as variáveis linguísticas.

– ***Variáveis difusas*** – são aquelas cujos valores são nomes de conjuntos difusos, associados aos seus possíveis valores. No exemplo apresentado na pág. 157 a *temperatura*, associada aos valores desde “*muito frio*” até “*muito quente*” é um exemplo de uma variável difusa.

– ***Variáveis linguísticas*** – são aquelas cujos valores são nomes de conjuntos difusos, associados a expressões que permitem determiná-las. Tomando o exemplo da pág. 157, poderá definir-se uma variável linguística *TpAmbiente* “quente mas não muito quente”.

De um modo mais formal, define-se variável linguística x pelo conjunto

$$x = (L, U, G, S) \quad (6.15)$$

em que L é o conjunto de termos linguísticos de x ; cada um destes termos é representado por um conjunto definido no universo U . G representa uma gramática para a manipulação sintáctica e S uma regra semântica que associa a cada variável difusa uma variável linguística.

6.2.3.2. Operações

Nos conjuntos convencionais definem-se as seguintes as **operações fundamentais** ou **operações básicas**: união, intersecção e complemento:

$$\text{União} \rightarrow A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\} \quad (6.16)$$

$$\text{Intersecção} \rightarrow A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad (6.17)$$

$$\text{Complemento} \rightarrow \bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\} \quad (6.18)$$

Com conjuntos difusos definem-se operações semelhantes a estas, mas em termos de função de pertença. Considerem-se dois conjuntos difusos A e B, definidos em U, com funções de pertença μ_A e μ_B .

A **função de pertença da união ou disjunção de A com B** é definida ponto a ponto para todos os elementos $x \in U$ tais que

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (6.19)$$

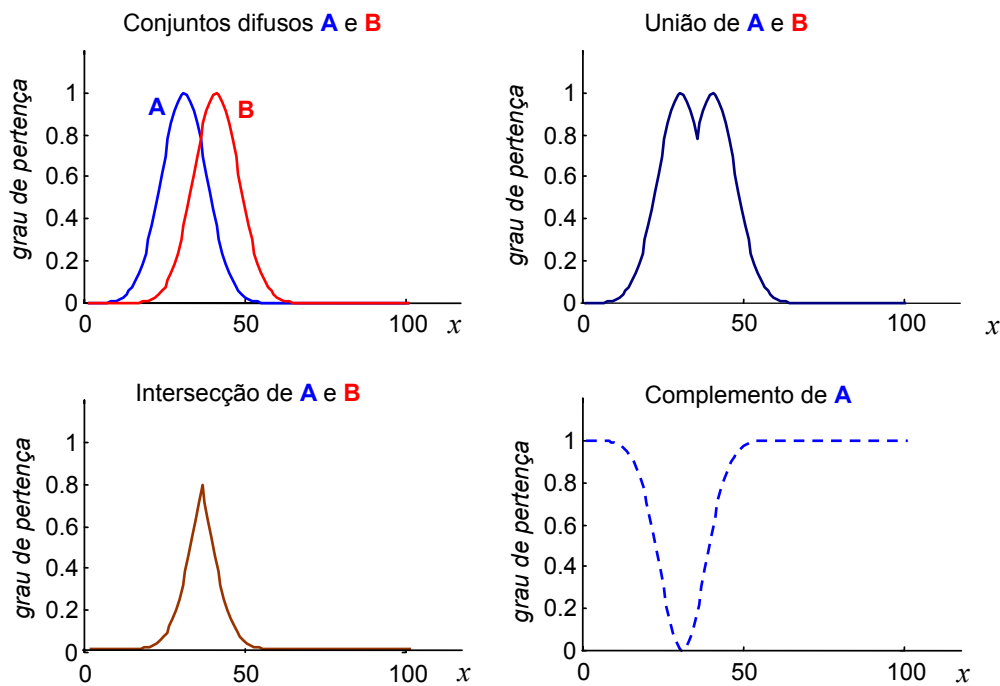


Fig. 6.4 – Operações básicas com conjuntos difusos.

De modo análogo, a **função de pertença da intersecção ou conjunção de A com B** é definida ponto a ponto para todos os elementos $x \in U$ tais que

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (6.20)$$

A **função de pertença do complemento de A** é definida ponto a ponto para todos os elementos $x \in U$ tais que

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (6.21)$$

Na Fig. 6.4 faz-se uma representação gráfica das operações que se acabam de apresentar.

Aos operadores lógicos união e intersecção, uma vez que estabelecem uma ligação entre conjuntos difusos, dá-se por vezes o nome genérico de **conectivas**.

O **produto cartesiano** de n conjuntos difusos A_1, A_2, \dots, A_n , definidos respectivamente em U_1, U_2, \dots, U_n , é o conjunto difuso definido no espaço cartesiano $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, com a seguinte função de pertença:

$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(x) = \min \{ \mu_{A_1}(x), \dots, \mu_{A_n}(x) \} \quad (6.22)$$

A forma de definir os operadores lógicos “OU difuso”, “E difuso” e “Complemento difuso” são as que foram propostas por Zadeh, mas não são as únicas. Os operadores lógicos intersecção e conjunção são definidos de uma forma bastante mais genérica através dos chamados **operadores triangulares**. Definem-se dois operadores triangulares, a “norma-T”, extensão da intersecção, e a “norma-S”, extensão da conjunção.

Norma-T Seja x o elemento genérico do universo do discurso, A e B dois conjuntos difusos e $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ duas funções de pertença para A e B respectivamente. O conjunto C diz-se *norma-T* de A e B se existir uma função de pertença $\mu_C(x)$ definida do modo seguinte:

$$\begin{aligned} \mu_C(x) &= T(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ T: \quad [0,1] \times [0,1] &\rightarrow [0,1] \end{aligned} \quad (6.23)$$

e goza das seguintes propriedades:

- T_1 – fronteira: $T(0,0)=0 \quad T(1,a)=T(a,1)=a$
- T_2 – monotonia: $T(a,b) \leq T(c,d)$ sse $a \leq c \wedge b \leq d$
- T_3 – comutatividade: $T(a,b)=T(b,a)$
- T_4 – associatividade: $T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c)$

A propriedade P_1 é uma generalização da propriedade análoga existente nos conjuntos convencionais. Da propriedade P_2 conclui-se que a diminuição do grau de pertença de A ou de B não pode produzir um aumento do grau de pertença da sua intersecção. A comutatividade da intersecção diz que é indiferente a ordem pela qual se combinam os conjuntos. Finalmente a associatividade permite efectuar o agrupamento de conjuntos emparelhando-os como se pretender.

A norma-T de x e y também é representada por:

$$T(x, y) \equiv \odot(x, y) \equiv x \odot y \quad (6.24)$$

Norma-S Sejam $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ duas funções de pertença de dois conjuntos difusos A e B respectivamente. O conjunto C diz-se *norma-S* de A e B sse existir uma função de pertença $\mu_C(x)$ definida do modo seguinte:

$$\begin{aligned}\mu_C(x) &= S(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ S: [0,1] \times [0,1] &\rightarrow [0,1]\end{aligned}\quad (6.25)$$

e goza das seguintes propriedades:

- S_1 – fronteira: $S(1,1)=1$ $S(a,0)=S(0,a)=a$
- S_2 – monotonia: $S(a,b) \leq S(c,d)$ sse $a \leq c \wedge b \leq d$
- S_3 – comutatividade: $S(a,b)=S(b,a)$
- S_4 – associatividade: $S(a,S(b,c))=S(S(a,b),c)$

A norma-S de x e y também é representada por:

$$S(x,y) = \oplus (x,y) = x \oplus y \quad (6.26)$$

A norma-T está associada à norma-S por meio da negação ou complemento:

$$x \oplus y = n(n(x) \odot n(y)) \quad (6.27)$$

A relação (6.27) não é mais do que uma das leis de Morgan.

Deixa-se ao cuidado do leitor verificar que a função de pertença intersecção, definida por (6.20), obedece à definição (6.23) propriedades T_1 a T_4 , e que a função de pertença união, definida por (6.19), obedece à definição (6.25) e goza das propriedades S_1 a S_4 .

Há outras formas de definir as funções de pertença intersecção e união, dentro das normas triangulares. A mais simples para a intersecção, consiste em efectuar o **produto** xy e para a união, efectuar a operação $x+y-xy$, designada por **ou probabilístico**.

6.2.3.3. Regras if-then

Viu-se que as funções de pertença são definidas por regras. Comparando com a linguagem corrente, os elementos de um conjunto são equivalentes aos substantivos e os operadores equivalentes aos verbos. Há uma regra condicional, bastante conhecida das linguagens de programação, que é a “if-then”. Ela tem uma forma semelhante a

se x pertence a A **então** y pertence a B

A primeira parte da regra, “se x pertence a A” é designada **antecedente** ou **permissa**. A 2ª parte, “então y pertence a B” tem o nome de **consequente** ou **conclusão**. Concretize-se com um exemplo, a partir das temperaturas ambiente e do tipo de estação do ano.

se o ambiente está quente **então** é tempo de Verão

A característica *quente* é representada por um número entre 0 e 1 e portanto o antecedente gera um número também compreendido entre 0 e 1. A palavra *Verão* é um conjunto difuso; o consequente atribui a uma variável de saída (*tempo*) um conjunto difuso (*Verão*).

6.2.4. Regras de inferência

As regras de inferência constituem o processo de estabelecer a relação entre as entradas e as saídas de um sistema lógico. Esta **relação, aplicação** ou “**mapping**” fornece a base a partir da qual podem ser tomadas decisões. Este processo envolve os conceitos que se apresentaram atrás: funções de pertença, operadores lógicos e regras *if-then*.

Vai dar-se um exemplo que permite fazer a previsão aproximada da chuva numa certa região, tomando como base o valor da pressão atmosférica e a direcção do vento. Este exemplo é muito simplista, pois uma boa previsão deverá ser baseada em mais variáveis de entrada. Os passos a seguir são os seguintes:

1. **Escolha das variáveis de entrada e de saída.** Neste exemplo as variáveis de entrada serão a *pressão atmosférica* e a *direcção do vento*. Esta escolha deverá ser feita de acordo com os conhecimentos meteorológicos pré-existentes que se sabe serem determinantes para o estado do tempo. Vai considerar-se para variável de saída a *previsão da quantidade de chuva*.
2. **Definição dos universos de discurso** para as variáveis de entrada. Neste exemplo, tendo em conta conhecimentos meteorológicos sabe-se que a pressão atmosférica poderá estar baixa, normal ou alta.
3. **Definição das funções de pertença** para as variáveis consideradas (“**fuzificação**” das entradas e das saídas). É aqui que se vai dizer o que se entende por pressão baixa, normal ou alta, e o que é vento Norte, Oeste ou outro. Neste exemplo considerar-se-ão apenas 3 funções de pertença para a variação da pressão e 4 para a direcção do vento. Poderão ser utilizadas funções do tipo gaussiano, como se mostra na Fig. 6.5, ou de outro tipo, como no exemplo que se dá adiante.

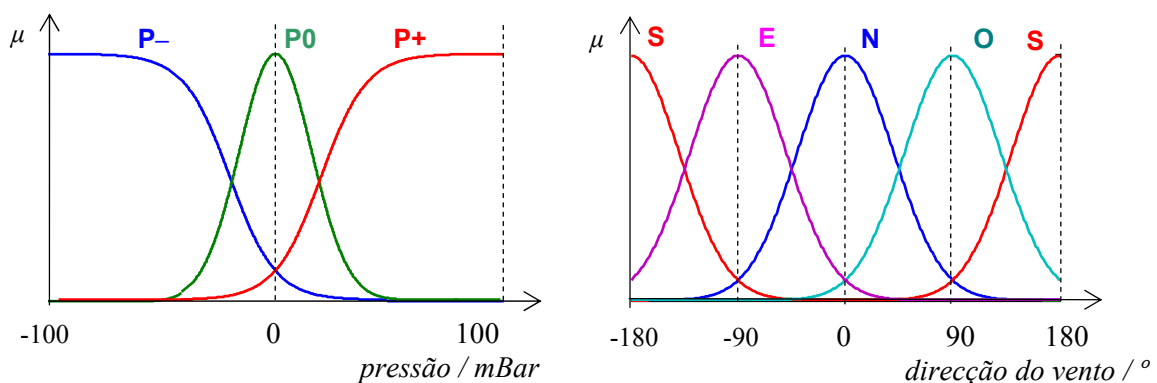


Fig. 6.5 – Funções de pertença para a pressão e para a direcção do vento.

4. **Escolha das conectivas a utilizar.** Para este efeito deverão ser definidos os tipos de funções a utilizar para as funções de pertença da conjunção e da disjunção. Neste exemplo escolhe-se para a intersecção a função $\min(x,y)$ e para a união a função $\max(x,y)$.

5. **Escolha das regras de inferência.** É neste ponto que se vão criar as variáveis difusas de saída, a partir de regras. Neste exemplo vai ser utilizado o conhecimento pré-existente sobre o fenómeno (consulta aos especialistas) para prever se vai ou não haver chuva. Quando há apenas duas variáveis de entrada é comum apresentarem-se as regras sob a forma de uma matriz. Se houvesse mais variáveis de entrada as regras poderiam ser apresentadas sob a forma de um “array”. No caso deste exemplo pode construir-se a seguinte matriz, geradora das variáveis difusas SC , $SC+$, CH , $CH+$.

“and”	direcção do vento			
pressão atmosf.	N (norte)	S (sul)	E (este)	O (oeste)
$P-$	-	SC	$SC+$	-
$P0$	-	CH	SC	CH
$P+$	CH	$CH+$	-	$CH+$

Estas variáveis difusas de saída têm o seguinte significado:

$SC+$	tempo <i> muito seco</i>
SC	tempo <i> seco</i>
CH	tempo de <i> chuva</i>
$CH+$	tempo com <i> muita chuva</i>

A matriz apresentada é uma forma compacta de apresentar as seguintes regras:

1. Se (*if*) a pressão atmosférica é $P-$ e (*and*) a direcção do vento é S , então (*then*) o tempo irá ser SC (tempo seco).
 2. Se (*if*) a pressão atmosférica é $P-$ e (*and*) a direcção do vento é E , então (*then*) o tempo irá ser $SC+$ (tempo muito seco).
 3. Se (*if*) a pressão atmosférica é $P0$ e (*and*) a direcção do vento é S , então (*then*) o tempo irá ser CH (tempo chuvoso).
 4. Se (*if*) a pressão atmosférica é $P0$ e (*and*) a direcção do vento é E , então (*then*) o tempo irá ser SC (tempo seco).
- ...

Há neste exemplo um total de 8 regras, que definem as 4 variáveis difusas de saída indicadas acima. No caso geral as regras não terão necessariamente que ser feitas apenas com o operador “and”, poderão ser mais complexas, em particular quando há mais que duas entradas.

Ficam assim definidas, em termos de variáveis linguísticas, as 4 possibilidades que o tempo atmosférico irá ter, em função das medições efectuadas na pressão e na direcção do vento. No caso de pretender dar esta informação de forma numérica ou através de um ponteiro sobre uma escala, torna-se necessário efectuar a agregação das variáveis linguísticas de saída assim obtidas e converter a agregação num valor numérico através da *operação inversa da fuzificação*, que é designada por **desfuzificação**. Estes dois pontos serão abordados no exemplo seguinte, do controlo de um satélite.

6.2.5. Projecto de um controlador difuso

O projecto de um controlador difuso tem passos muito semelhantes aos anteriores. Vai admitir-se que o controlador será inserido numa cadeia de controlo convencional, com realimentação negativa, como se mostra na Fig. 6.6.

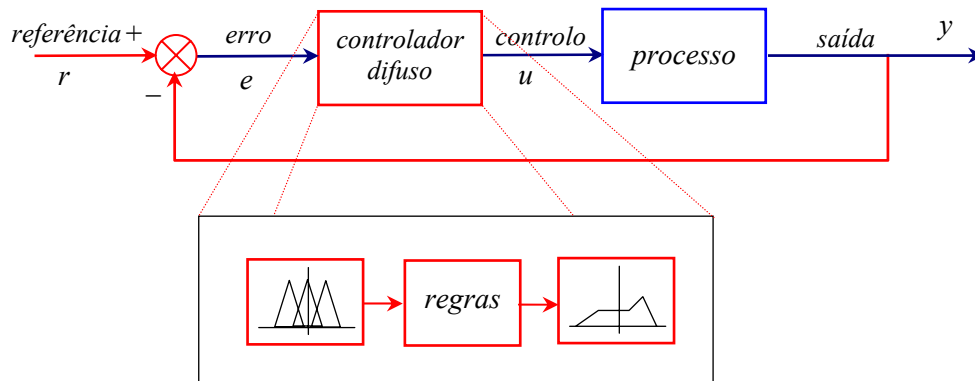


Fig. 6.6 – Cadeia de controlo difuso.

Os passos a considerar no projecto do controlador são os seguintes:

1. Escolha das variáveis de entrada e de saída.
2. Definição dos universos de discurso para as variáveis de entrada e de saída.
3. Definição das funções de pertinência para os termos linguísticos das variáveis consideradas (“fuzificação” das entradas e das saídas).
4. Construção das regras de inferência a utilizar.
5. Escolha das conectivas a utilizar.
6. Agregação de todas as regras de saída.
7. “Desfuzificação” da saída.

Vai concretizar-se através do exemplo dado no Cap.2: Pretende-se controlar a posição angular θ de um satélite, obrigando-o a rodar em torno de um eixo por meio de um par de propulsores, como indicado na Fig. 6.7. Considera-se apenas este grau de liberdade.

1. Escolha das variáveis de entrada e de saída:

Viu-se na secção 2.4.1, que utilizando na cadeia de controlo apenas a variável posição angular, o satélite ficava a oscilar em torno da referência. Vai então utilizar-se, além da posição, o valor da velocidade angular, $\dot{\theta}$. Tem-se deste modo para variáveis de entrada do controlador a *posição angular* e a *velocidade angular*. A saída do controlador será a *intensidade do jacto propulsor* (em que se considera o seu sentido).

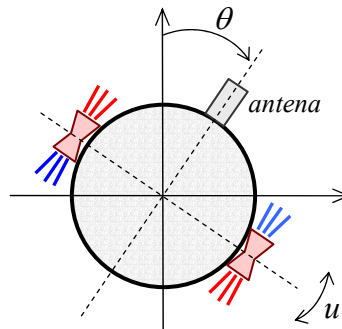


Fig. 6.7 – Esquema do satélite

2. Universos do discurso:

A posição do satélite poderá variar entre $-\pi$ e $+\pi$. A determinação da sua velocidade angular é um pouco mais complicada. Ela depende do momento de inércia do satélite em torno do seu eixo de rotação e do binário propulsor. Para um satélite com a massa de 200 kg, e o diâmetro de 2,8 m, e para um binário propulsor de 1 Nm, um cálculo aproximado permite determinar o momento de inércia do satélite (suposto homogêneo $I=2/5mR^2=160 \text{ kg.m}^2$) e concluir, utilizando as expressões (2.34) e (2.35) que a velocidade angular estará compreendida entre -0.20 e $+0.20 \text{ rad/s}$. Tem-se assim os valores do universo do discurso: $\theta=x_1 \in [-\pi, +\pi] \text{ rad}$ e $\dot{\theta}=x_2 \in [-0.2, +0.2] \text{ rad/s}$.

3. Definição das funções de pertença:

A definição das funções de pertença é feita de acordo com a “sensibilidade” que o especialista tem em relação ao problema específico em causa. Mesmo assim é recomendado que se façam várias hipóteses, se testem os resultados e se escolha a que conduzir a melhores resultados. Uma vez que se está a apresentar um exemplo, vai começar-se com um número muito pequeno de funções de pertença e testar o resultado. Na prática é corrente ter entre 3 e 11 funções de pertença por variável. Escolhemos 3 funções de pertença para a posição e outras 3 para a velocidade:

Posição:

RE – rodado à esquerda
RO – centrado
RD – rodado à direita

Velocidade:

VE – velocidade para a esquerda
VO – velocidade nula
VD – velocidade para a direita

Podem escolher-se as funções de pertença do tipo **triangular**, como indicado na Fig. 6.8. Depois de efectuados os testes podem escolher-se outros tipos de funções de pertença, nomeadamente funções do tipo **gaussiano**, e comparar os resultados. Em grande parte dos casos não haverá melhoria significativa no desempenho.

Para a velocidade angular segue-se uma estratégia análoga à que se utilizou com a posição.

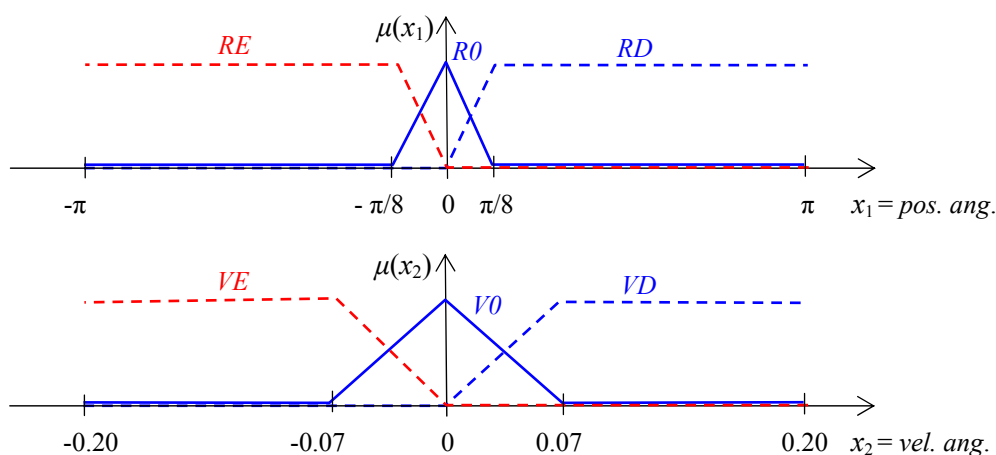


Fig. 6.8 – Funções de pertinência para a posição e velocidade do satélite

4. Obtenção das regras de controlo

A definição das regras de controlo também é feita de acordo com os conhecimentos do especialista em satélites, que definiu as regras seguintes:

1. Se (if) a posição é *RE* e (and) a velocidade *VE*, então (then) o jacto deverá ser *JD2* (jacto para a direita, forte).
2. Se (if) a posição é *RE* e (and) a velocidade *V0*, então (then) o jacto deverá ser *JD* (jacto para a direita).
- ...

Como para o exemplo anterior poderá elaborar-se o conjunto de regras por seguinte quadro, em que as entradas são ligadas por meio do operador “E”.

	<i>posição angular</i>		
<i>velocidade angular</i>	<i>RE</i>	<i>R0</i>	<i>RD</i>
<i>VE</i>	<i>JD2</i>	<i>JD</i>	<i>J0</i>
<i>V0</i>	<i>JD</i>	<i>J0</i>	<i>JE</i>
<i>VD</i>	<i>J0</i>	<i>JE</i>	<i>JE2</i>

De acordo com o quadro resumo haverá 9 regras e 5 funções de pertinência para o jacto propulsor:

- JE2* jacto propulsor actua para a esquerda, forte
- JE* jacto propulsor actua para a esquerda
- J0* jacto propulsor nulo
- JD* jacto propulsor actua para a direita
- JD2* jacto propulsor actua para a direita, forte

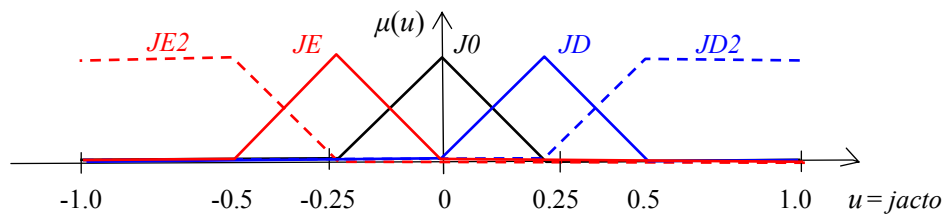


Fig. 6.9 – Funções de pertença para a intensidade do jacto propulsor

5. Escolha das conectivas a utilizar.

Este ponto poderá ser feito antes ou depois do anterior. Serve para definir o modo como são implementados os operadores “ou” e “and”. Podem de novo usar-se as definições (6.19) e (6.20), por serem as mais correntes e a experiência mostrar que oferecerem um bom desempenho.

6. Agregação de todas as regras de saída.

A agregação é o processo pelo qual os conjuntos difusos resultantes de cada regra são **combinados num único conjunto difuso**. A agregação das regras de saída é necessária, uma vez que muitas das decisões se baseiam em mais do que uma regra ao mesmo tempo. Esta afirmação é particularmente válida quando as funções de pertinência são do tipo gaussiano. Acompanhe-se a exposição com um exemplo. Admita-se o satélite estava posicionado e estabilizado e que se mudou de -0.1 rad a referência da posição angular. O erro de posição será de $+0.1$ rad. Da Fig. 6.8 tira-se, para $x_1=0.1$, o valor de $\mu_{R0}(x_1)=0.73$ e o valor de $\mu_{RD}(x_1)=0.27$. O satélite está centrado com um grau de pertinência de 0.73 e rodado à direita com um grau de pertinência de 0.27. Pode dizer-se que com as funções de pertinência atribuídas o satélite está mais centrado do que desviado. Como neste instante a velocidade angular é nula será $\mu_{V0}(x_2)=1$ e as outras funções de pertinência da velocidade têm o valor zero. A saída dependerá de duas regras simultâneas com valores não nulos:

1. Se (if) a posição é $R0$ e (and) a velocidade $V0$, então (then) o jacto deverá ser $J0$ (jacto nulo), multiplicado por 0,73
2. Se (if) a posição é RD e (and) a velocidade $V0$, então (then) o jacto deverá ser JE (jacto para a esquerda), multiplicado por 0.27.

O resultado global consiste em multiplicar por 0.73 a função de pertinência $J0$, por 0.27 a função JE e efectuar a sua união. Resulta a função de pertinência que limita a área sombreada da Fig. 6.10.

É importante chamar-se aqui a atenção para o facto de as regras deverem ter um **peso** diferente consoante a entrada. Com efeito, neste exemplo, a importância da contribuição da posição e da velocidade para a intensidade do jacto propulsor não será a mesma. Neste exemplo tal não foi considerado, tendo sido atribuídos o mesmo peso 1 às contribuições da posição e da velocidade.

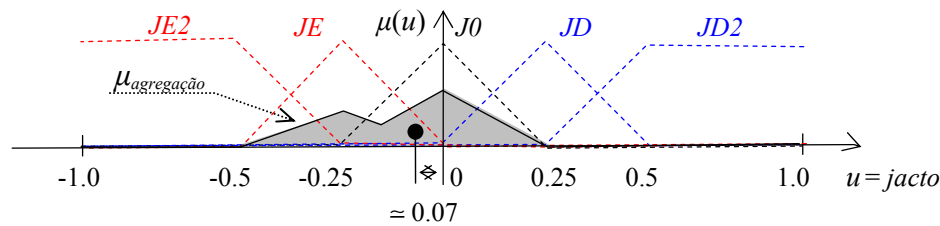


Fig. 6.10 – Função de pertinência da agregação das saídas

7. “Desfuzificação” da saída.

A “**desfuzificação**” consiste em converter a variável de saída linguística num valor numérico. No exemplo que se está a apresentar, a saída é a função de pertinência que limita a área sombreada, e é resultado da agregação das saídas de cada regra. Mas a saída para o jacto não pode ser uma função de pertinência, tem que ser um valor numérico, que neste exemplo deverá estar no intervalo $[-1, 1]$, em que 1 é o máximo de intensidade que o jacto pode ter num sentido e -1 no sentido oposto. É pois necessário efectuar a conversão da saída linguística num número que esteja dentro da gama de saída. Um método muito vulgar para efectuar esta conversão é o chamado método do **centróide**; consiste em determinar o centro geométrico da área definida pela função de pertinência da agregação das variáveis de saída e a partir da sua posição determinar a coordenada da saída, pela distância ao eixo das ordenadas, como se indica na Fig. 6.10.

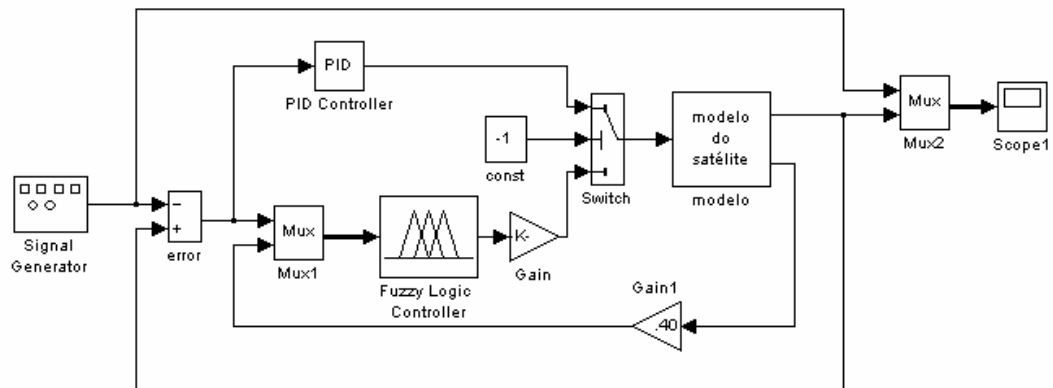
6.2.6. Controlo difuso do satélite no Matlab

O sistema de controlo que acaba de se descrever foi implementado em Matlab/Simulink.

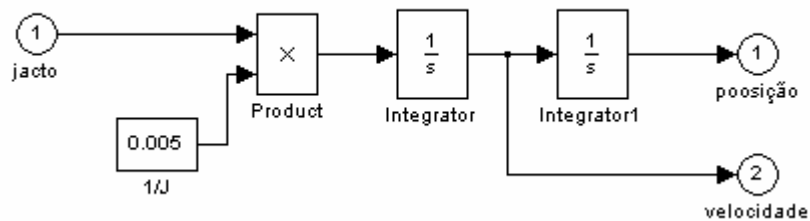
Para este efeito é necessário implementar as regras em Matlab, através do editor FIS (“fuzzy inference systems”). Para isto invoca-se o editor através do comando “`fuzzy`”. Uma vez no editor define-se o número de entradas, a gama de cada entrada, o número de funções de pertinência e o seu tipo (de entre uma lista standard). Faz-se o mesmo para as saídas. Definem-se também as regras e o seu peso. Pode observar-se o resultado final vendo as regras ou a “superfície”. O ficheiro deverá ser salvo em disco e também no “workspace”. Este último ponto é importante, pois é ao “workspace” que o Simulink vai buscar as regras.

A seguir abre-se o Simulink e constrói-se o modelo do satélite. Da biblioteca do Simulink “Fuzzy Logic Toolbox” copia-se o “Fuzzy Logic Controller”, que deverá ser ligado à entrada do processo (através de um ganho). Este deverá estar ligado ao ficheiro com as regras que foram anteriormente salvas no “workspace”. A entrada do “Fuzzy Logic Controller” deverá ser feita através de um multiplexer, que contém o erro de posição e a velocidade, esta multiplicada por um ganho. Na pág. seguinte está representado o modelo que acaba de se descrever. Colocou-se também um PID, para poder comparar o desempenho dos controladores.

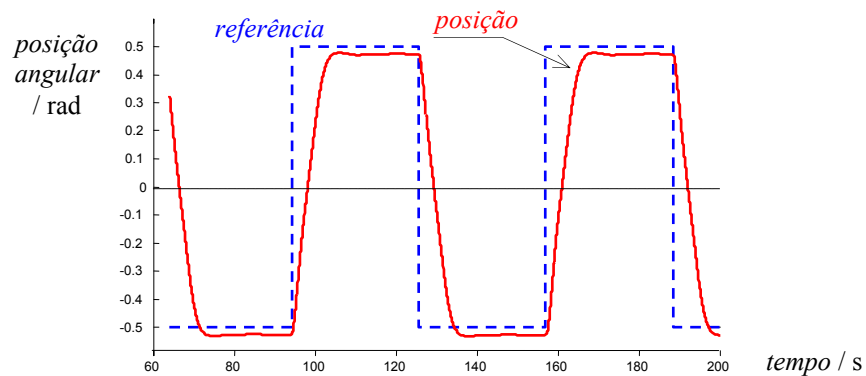
Modelo Simulink utilizado para implementar o controlo difuso do satélite:



Modelo do satélite:



Resultados do controlo:



6.3. Redes Neurais

6.3.1. Conceitos e definições

6.3.1.1. A rede multicamada

Uma **rede neuronal artificial**, RNA, é uma estrutura matemática constituída por um número finito de *unidades* individualizadas, também designadas por **neurónios**, organizados em **camadas**. A rede é uma aplicação de um espaço de entrada \mathbf{P} num espaço de saída \mathbf{A} .

A Fig. 6.11 representa a estrutura de uma RNA. O sinal de entrada, \mathbf{P} , um vector de dimensão \mathcal{R}^r , é aplicado à entrada da rede. A entrada da rede contém r unidades, dispostas numa camada. Cada unidade desta camada recebe directamente a respectiva componente do sinal de entrada. A soma das entradas multiplicadas por *coeficientes de ponderação*, não indicados na figura, à qual é adicionado um *valor constante*, é aplicada a cada uma das unidades da camada seguinte, designada por **1ª camada**, que origina uma saída a

$$a = \sigma(i) \quad (6.28)$$

em que i designa a soma ponderada das entradas e do valor constante, e σ é uma função suave crescente e limitada, designada por **função de activação**².

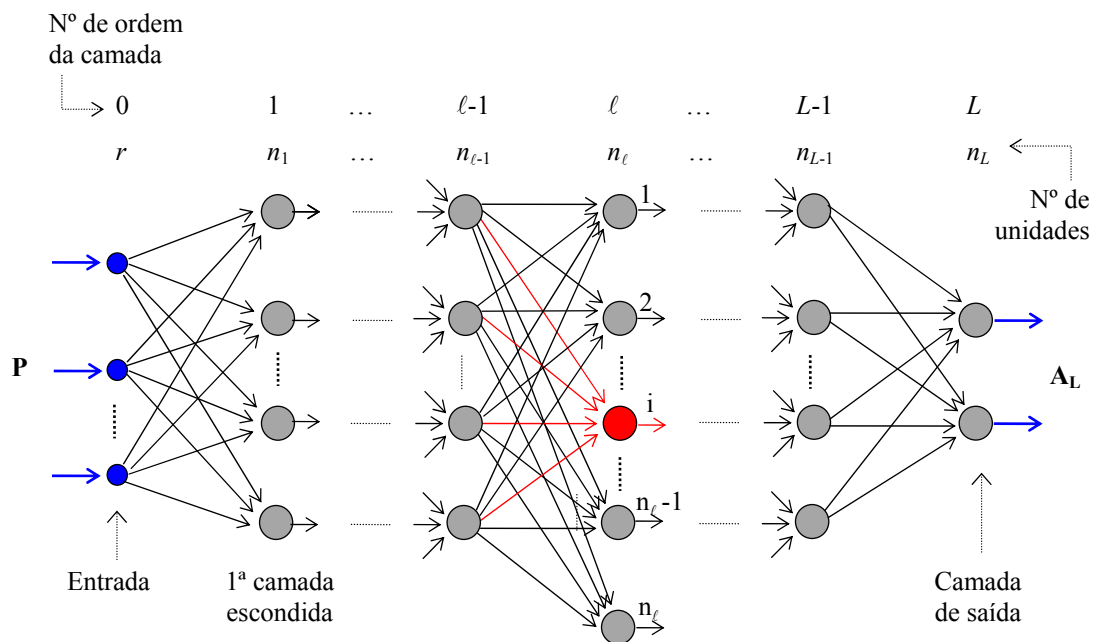


Fig. 6.11 – Representação de uma rede neuronal artificial

² Dá-se o nome de "função suave" a uma função contínua e indefinidamente diferenciável.

A Fig.6.12 representa o detalhe de uma **unidade** de processamento, ou **neurónio**, e a Fig.6.13 mostra um exemplo de uma função de activação. De uma forma análoga ao que se passa na 1ª camada, a segunda camada recebe os sinais de saída de cada uma das unidades da camada 1, também multiplicados por coeficientes de ponderação, e o processo repete-se até se atingir a camada de saída.

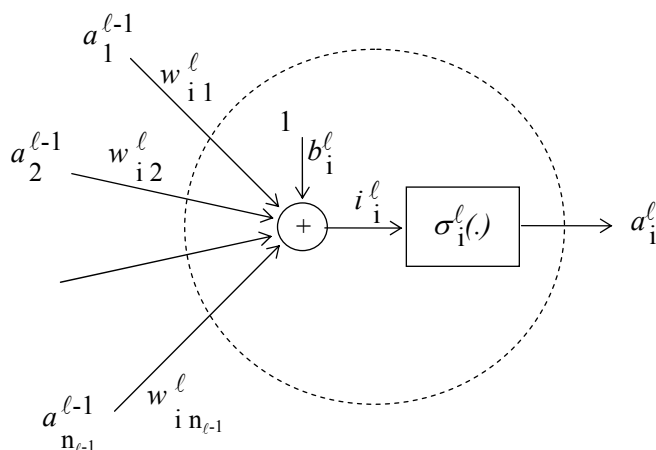


Fig.6.12 – Representação do cálculo realizado pelo neurónio i da camada l

Na terminologia das RNA é costume designar por **camadas escondidas** todas as que se encontram entre a entrada e a **camada de saída**, não sendo a entrada contabilizada para efeito de contagem do número de camadas, embora muitas vezes se lhe chame **camada de entrada**. Assim, por exemplo, quando se referir uma rede de três camadas, significa que se trata de uma rede com duas camadas escondidas e uma camada de saída.

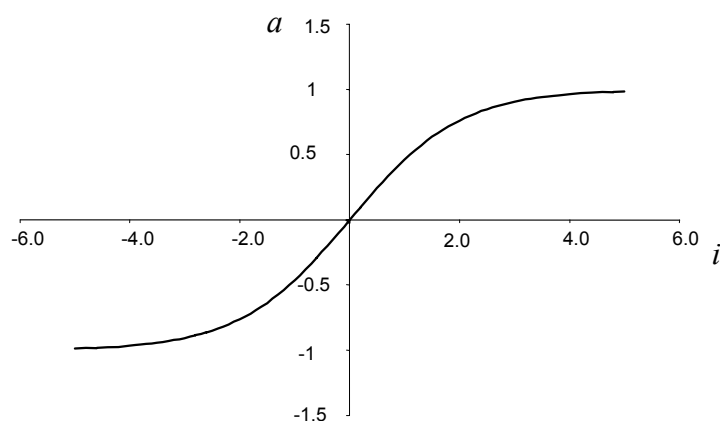


Fig.6.13 – Exemplo de uma função de activação

Nas duas expressões seguintes estão indicados os cálculos efectuados na unidade genérica i da camada ℓ :

Valor interno:
$$i_i^\ell = \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} w_{ij}^\ell a_j^{\ell-1} + b_i^\ell \quad (6.29)$$

Saída:
$$a_i^\ell = \sigma_i^\ell(i_i^\ell) \quad (6.30)$$

Designando por \mathbf{W}_ℓ a *matriz de transferência* da saída da camada $\ell-1$ para a camada ℓ ,

$$\mathbf{W}^\ell = \begin{bmatrix} w_{11}^\ell & w_{12}^\ell & \dots & w_{1n_{\ell-1}}^\ell \\ w_{21}^\ell & w_{22}^\ell & \dots & w_{2n_{\ell-1}}^\ell \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{i1}^\ell & w_{i2}^\ell & \dots & w_{in_{\ell-1}}^\ell \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n_\ell 1}^\ell & w_{n_\ell 2}^\ell & \dots & w_{n_\ell n_{\ell-1}}^\ell \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

por \mathbf{I}_ℓ o vector de valores internos nas unidades da camada ℓ , por \mathbf{B}_ℓ o vector de constantes ou *vector de polarização* da camada ℓ e por \mathbf{A}_ℓ o vector de saída da camada ℓ ,

$$\mathbf{I}_\ell = \begin{bmatrix} i_1^\ell \\ i_2^\ell \\ \dots \\ i_{n_\ell}^\ell \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_\ell = \begin{bmatrix} b_1^\ell \\ b_2^\ell \\ \dots \\ b_{n_\ell}^\ell \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_\ell = \begin{bmatrix} a_1^\ell \\ a_2^\ell \\ \dots \\ a_{n_\ell}^\ell \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

as equações (6.29) e (6.30) podem escrever-se na forma matricial

$$\mathbf{I}_\ell = \mathbf{W}^\ell \mathbf{A}_{\ell-1} + \mathbf{B}_\ell \quad (6.33)$$

$$\mathbf{A}_\ell = \sigma_\ell(\mathbf{I}_\ell) \quad (6.34)$$

em que σ_ℓ é aplicado *individualmente* a cada um dos elementos do vector \mathbf{I}_ℓ .

Na matriz \mathbf{W}^ℓ , w_{ij}^ℓ representa o coeficiente de ponderação que multiplica a saída da unidade j da camada anterior, $\ell-1$, antes de a adicionar à unidade i da camada ℓ , e no vector \mathbf{B}_ℓ b_i^ℓ é o vector de polarização da unidade i da camada ℓ .

É corrente fazer-se a função de activação *igual* para todas as unidades de uma *mesma* camada.

Uma vez que as funções de activação são limitadas, para se poder ter uma saída com uma amplitude arbitrária faz-se a *camada de saída linear* ($\sigma_\ell(x) = x$), pelo que a saída de uma rede com L camadas é dada pela expressão

$$A_L = W_L \sigma_{L-1} (W_{L-1} (\cdots (\underbrace{\sigma_\ell (W_\ell (\cdots \sigma_2 (W_2 \sigma_1 (W_1 P + B_1) + B_2) + \cdots + B_\ell) + \cdots)}_{A_1}) + B_{L-1}) + B_L) \quad (6.35)$$

A_2

O sinal de entrada poderá ser uma função contínua do tempo, $\mathbf{P}(t)$, sendo então a saída também uma função contínua, admitindo-se neste caso que a execução dos cálculos se faz em tempo contínuo e num intervalo de tempo *infinitesimal*, ou poderá ser uma sequência de sinais discretos do tempo ou de outras variáveis. Neste caso a execução dos cálculos faz-se ao ritmo da chegada das entradas da rede.

Repare-se que a RNA, tal como aqui foi definida, é uma **rede estática**, não guardando qualquer informação relativa a estados anteriores; não existe realimentação das saídas nas entradas. No caso de se desejar manipular *sistemas dinâmicos*, os valores anteriores das entradas, saídas ou estados deverão ser aplicados à entrada juntamente com a entrada actual da rede.

6.3.1.2. A rede de base radial

A estrutura desta rede é semelhante à da rede anterior, mas com uma diferença importante: o sinal de entrada é primeiramente transformado por meio de uma função não linear, só sendo em seguida efectuada a soma dos valores resultantes de cada conversão, como se mostra na expressão (6.36) e na Fig.6.14.

$$a_i^\ell = w_i^\ell \sum_{j=1}^{n_{\ell-1}} \xi_j^\ell(a_i^{\ell-1}, c_j^\ell) \quad (6.36)$$

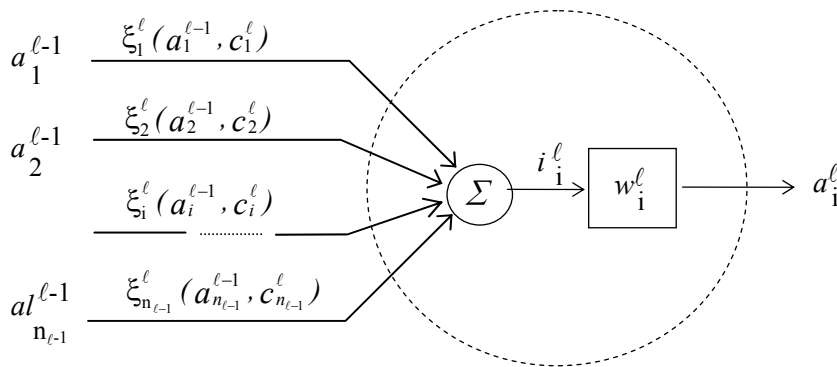


Fig.6.14 – Representação gráfica da unidade i da camada l , numa rede de base radial

6.3.2. A RNA como aproximador universal

A RNA constitui um *aproximador universal*. Uma das suas vantagens sobre outros aproximadores consiste em ter-se uma estrutura com um número finito de unidades. Se a função a aproximar for contínua, é possível aproximá-la por meio de uma RNA com apenas duas camadas, uma camada escondida e a camada de saída:

$$f_2 = W_2 \sigma_1 (W_1 P + B_1) + B_2 \quad (6.37)$$

Se a função a aproximar for descontínua, poderá não ser possível aproximá-la por meio de uma rede de duas camadas. É no entanto sempre possível aproximá-la por meio de uma RNA com três camadas:

$$f_3 = W_3 \sigma_2 (W_2 \sigma_1 (W_1 P + B_1) + B_2) + B_3 \quad (6.38)$$

Este último caso é de bastante interesse em sistemas de controlo com a lei de realimentação descontínua, ou em sistemas em que haja necessidade de identificar modelos inversos de processo de fase não mínima.

6.3.3. Estrutura de uma rede

6.3.3.1. Número de camadas

Na secção anterior viu-se que para as aplicações que interessam à identificação de sistemas e ao controlo é suficiente a utilização de redes com três camadas: duas camadas escondidas e uma camada de saída. Nos casos mais simples, em que *não haja descontinuidades* da função a aproximar, no modelo a identificar ou na lei de controlo, é suficiente a utilização de *uma camada escondida* e uma camada de saída.

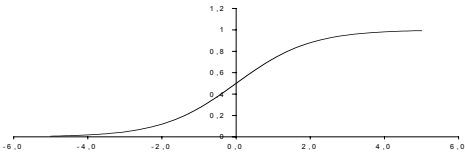
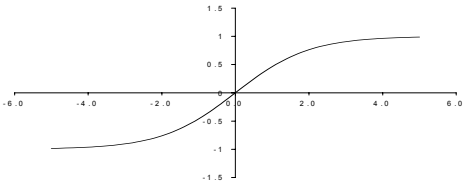
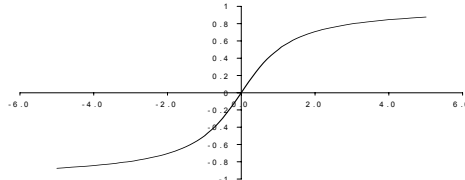
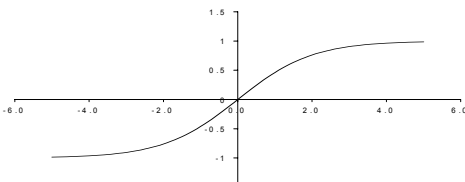
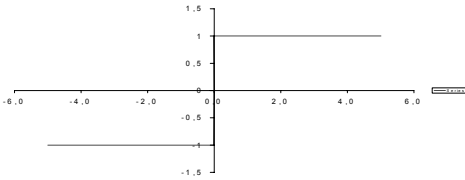
6.3.3.2. Número de unidades

A determinação do número de unidades de uma rede, e a sua distribuição pelas camadas da rede, é normalmente abordada de uma forma prática, uma vez que não existe um procedimento exacto para efectuar a sua determinação. Obviamente o número de unidades das camadas de entrada e de saída deverão ser iguais à dimensão dos respectivos sinais.

Para as camadas escondidas é corrente configurar inicialmente a rede com um número de unidades igual à *soma das dimensões dos sinais de entrada e de saída*. Depois de testar a rede com este número de unidades, reconfigura-se a rede com mais ou menos unidades, consoante os resultados obtidos. Na medida em que os resultados sejam aceitáveis, utilizar-se-á *sempre o menor número possível de unidades*.

6.3.3.3. Funções de activação

De entre as várias funções de activação não lineares utilizadas nas RNA salientam-se as seguintes:

	<i>Função</i>	<i>Expressão</i>	<i>Gráfico</i>
1	Exponencial	$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$	
2	Exponencial	$\sigma(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$	
3	Trigonométrica inversa arctg()	$\sigma(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$	
4	Hiperbólica th()	Igual à 2ª, excepto factor de escala em x	
5	Degrau unitário	Pode ser considerado como sendo o limite dos anteriores, mudada a escala x	

Do ponto de vista do comportamento da rede, as quatro primeiras funções são equivalentes.

6.3.4. Obtenção dos parâmetros da rede

6.3.4.1. Funcional de custo

Depois de se fixar o número de camadas de uma rede e o número de unidades em cada camada, deverá determinar-se quais os valores dos parâmetros w_{ij}^ℓ e de b_i^ℓ que conduzem ao melhor desempenho da rede. Aos parâmetros w_{ij}^ℓ dá-se também o nome de *pesos*.

O método correntemente usado para avaliar o desempenho de uma rede consiste em calcular o *funcional de custo*, J_{Nd} , obtido pela soma do quadrado dos desvios da previsão em relação ao processo, e referida a um par de sequências $\{\hat{y}\}$ e $\{y\}$ de comprimento N_d .

$$J_{Nd} = \sum_{k=1}^{Nd} [y(k) - \hat{y}(k)]^2 \quad (6.39)$$

Considera-se que a rede é adequada se o valor deste funcional for inferior a um determinado limite de aceitação.

Os parâmetros ideais para a rede serão assim aqueles a que corresponde o mínimo do funcional J_{Nd} . Pode no entanto acontecer que este mínimo esteja acima do limite de aceitação. Isto poderá ser devido a várias causas:

- O mínimo obtido para J_{Nd} não é um *mínimo absoluto* mas sim um *mínimo local*.
- O número de unidades da rede não é suficiente.
- O número de entradas da rede não é o correcto.

A determinação do mínimo de J_{Nd} é um problema geralmente complexo, uma vez que se trata de minimizar uma *função de muitas variáveis*. Com efeito, para uma rede com duas camadas escondidas, com n_1 e n_2 unidades em cada camada, com r entradas e n_L saídas, o número total de parâmetros a obter, n_p , é dado por (ver Fig. 6.11):

$$n_p = (r \times n_1 + n_1) + (n_1 \times n_2 + n_2) + (n_2 \times n_L + n_L) \quad (6.40)$$

Uma rede muito simples com $r = 5$, $n_1 = 3$ e $n_2 = 3$ e uma saída terá $n_p = 34$ parâmetros.

Se se fizerem estes parâmetros variar continuamente de modo a obter o valor mínimo para J_{Nd} , tem-se o problema da *minimização* de uma função de muitas variáveis, que poderá apresentar mínimos locais. Os métodos de cálculo dos parâmetros de modo a minimizar J_{Nd} deverão considerar a possível existência destes *mínimos locais* e procurar ultrapassar o problema de modo a encontrar-se, se possível, o *mínimo global*.

O outro caso mencionado atrás, do número de unidades insuficiente, resolve-se simplesmente tentando uma rede com maior número de unidades, ou eventualmente com uma outra distribuição pelas camadas escondidas.

Finalmente o último caso indicado: se se suspeitar das entradas da rede não serem as correctas, deverão ser reanalisadas quais as entradas mais convenientes.

6.3.4.2. Treino da rede

A minimização de J_{Nd} é efectuada por *métodos iterativos*. Durante a busca do mínimo diz-se que se efectua o *treino da rede*, ou que esta está em *aprendizagem*.

Um método muito corrente para treinar a rede é designado por *rectro-propagação* (“*backpropagation*”: Rumelhart et al. 1986). Esta forma de treino baseia-se no método do gradiente. Parte de um valor inicial arbitrário para os parâmetros e dá-lhes um acréscimo negativo proporcional à derivada de J_{Nd} em relação ao parâmetro. Começa-se pela camada de saída e aplica-se a seguir às sucessivas camadas, por ordem contrária à do fluxo de informação. O método é lento, em particular junto do mínimo.

Um outro método utilizado para treinar as redes neuronais é o de Marquardt-Levenberg. Trata-se de uma modificação do método de Gauss-Newton (Hagan e Menhaj, 1994). O método é computacionalmente mais pesado do que a rectro-propagação, exibindo no entanto uma convergência bastante mais rápida do que esta.

6.3.5. Identificação do Processo.

6.3.5.1. Dados de entrada /saída

Considere-se um processo discreto, de uma só variável, linear ou não, com atraso de transporte p . Se o processo for observável, poderá ser representado por uma equação às diferenças

$$y(n) = f[y(n-1), \dots, y(n-n_y), u(n-p), \dots, u(n-p-n_u)] \quad (6.41)$$

em que

n - tempo discreto,	p - atraso de transporte,
$u(n)$ - variável de entrada,	n_u - número de entradas atrasadas,
$y(n)$ - variável de saída,	n_y - número de realimentações atrasadas.

Considerando as observações das saídas nos instantes sucessivamente anteriores ao actual, $n-1$, $n-2$, ..., $n-h$, pode escrever-se

$$y(n-1) = f[y(n-2), \dots, y(n-n_y-1), u(n-p-1), \dots, u(n-p-n_u-1)] \quad (6.42)$$

$$y(n-2) = f[y(n-3), \dots, y(n-n_y-2), u(n-p-2), \dots, u(n-p-n_u-2)] \quad (6.43)$$

...

$$y(n-h) = f[y(n-h-1), \dots, y(n-h-n_y), u(n-h-p), \dots, u(n-h-p-n_u)] \quad (6.44)$$

A substituição sucessiva em (6.41) de (6.42), (6.43), ..., (6.44) conduz a uma equação do tipo

$$y(n) = g[y(n-h-1), \dots, y(n-h-n_y), u(n-p), \dots, u(n-h-p-n_u)] \quad (6.45)$$

A equação (6.45) tem o seguinte significado, representado na Fig. 6.15: O valor da variável de saída no instante actual, n , pode ser considerado como dependente dos valores dessa variável nos instantes $(n-h-1)$ a $(n-h-n_y)$ e dos valores da variável de entrada nos instantes $(n-p)$ a $(n-h-p-n_u)$.

Uma vez que para a identificação do processo apenas se dispõe de sequências de entrada e de saída, como se referiu no início, apenas será possível efectuar a *identificação da parte observável do processo*, permanecendo a *dinâmica interna por identificar*.

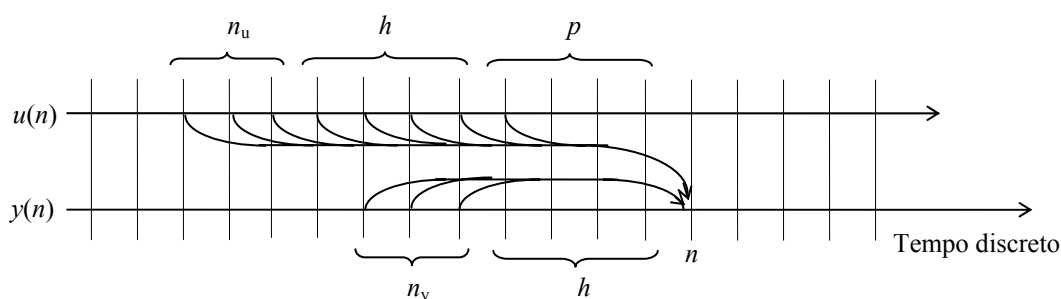


Fig. 6.15 – Processo de ordem n_y com atraso p

6.3.5.2. Estrutura da entrada da rede.

As considerações anteriores sugerem que a rede estimadora do processo deverá ser alimentada com $(h+n_u+1)$ entradas u e respectivos atrasos, e n_y entradas y e anteriores. Com efeito da equação (6.45) pode obter-se

$$y(n+h) = g[y(n-1), \dots, y(n-n_y), u(n-p+h), \dots, u(n-p-n_u)] \quad (6.46)$$

pelo que para dois pares de sequências $u(n)$ e $y(n)$ se espera ter para uma RNA estimadora do processo, cuja saída se designará por $\hat{y}(n)$,

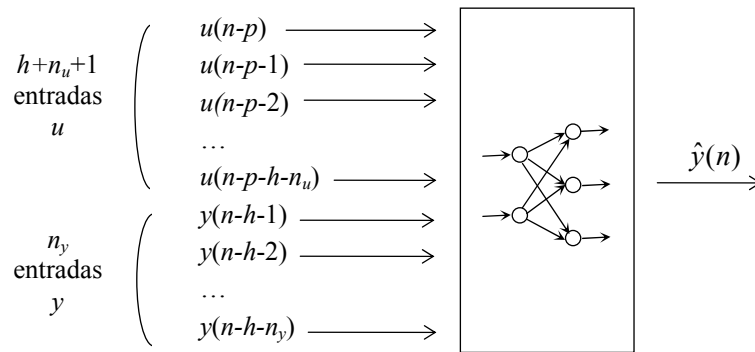
$$\hat{y}(n+h) = \hat{g}[y(n-1), \dots, y(n-n_y), u(n-p+h), \dots, u(n-p-n_u)] \quad (6.47)$$

Considerem-se os dois casos seguintes:

$h \leq p$: Neste caso os valores de $u(n-p+h)$, ..., $u(n-p-n_u)$ pertencem ao passado pelo que podem ser sempre conhecidos. Dispõe-se assim dos dados necessários para efectuar uma identificação do processo.

$h > p$: Nesta situação a determinação de $\hat{y}(n+h)$ vai depender de $u(n_f)$, ou seja dos valores da entrada tomados em instantes futuros $n_f > n$. Será necessário efectuar alguma suposição sobre $u(n_f)$, como por exemplo **congelar todas as entradas futuras**, mantendo-as iguais a $u(n)$ presente, ou prever $u(n_f)$ a partir dos valores passados.

Representando a rede neuronal pelo rectângulo da Fig. 6.16, o conjunto de entradas e saídas sugerido para a rede é o indicado a seguir:

Fig. 6.16 – Conjunto de entradas de uma RNA para estimar $\hat{y}(n+h)$

Como muitas vezes os valores de n_u , n_y e p não são conhecidos a priori, deverão ser atribuídas à rede um número de entradas u e um número de entradas y suficientes para se obter um desempenho aceitável.

É corrente escolher-se uma rede com *duas camadas escondidas*. A razão da escolha, já mencionada anteriormente, é complementada com os resultados obtidos por Hartman et al (1990) e por Hornick (1991):

- Para uma função contínua uma rede neuronal com duas camadas escondidas constitui um aproximador universal com convergência mais rápida do que uma rede de uma camada.
- Uma RNA com duas camadas escondidas permite a utilização de leis de controlo descontínuas, o que não é possível com apenas uma camada,
- Uma RNA com duas camadas escondidas permite sempre a obtenção de um modelo inverso (Sontag, 1992).

O número de unidades nas camadas escondidas depende da relação (6.41) que caracteriza o processo, que à partida não é conhecido. Considera-se habitualmente uma rede com um total de unidades igual ao valor estimado para n_u+n_y , por se verificar suficiente.

Treino da rede

Para o treino da rede devem ser considerados dois casos: *treino em grupo* (“batch”) e *treino em linha* (“on line”). O primeiro tem interesse quando o processo a identificar é invariante no tempo ou então para a obtenção de um valor inicial de parâmetros para a rede. O treino em linha poderá ser necessário sempre que é preciso identificar um processo variante no tempo. Chama-se no entanto a atenção para o facto de o treino em linha, quando se trata de processos não lineares, poder conduzir à obtenção de uma rede que não aproxime o processo globalmente. No treino em linha é pois necessário ter cuidado com os dados utilizados, para não se cair num ponto de funcionamento local. Neste caso tem-se uma rede bem treinada localmente mas com *pouca capacidade para generalizar* para outro tipo de dados de entrada. Assim, o algoritmo de treino *não deverá esquecer* os dados iniciais mas sim complementá-los.

Treino em grupo.

Uma vez que se trata de identificar um processo genérico, que poderá ser linear ou não-linear, uma questão que se coloca é a definição da *amplitude* do sinal de entrada. Deverá considerar-se o sinal de entrada a poder variar entre $-au_M$ e $+ au_M$ sendo u_M o valor absoluto máximo detectado na sequência de entrada e a uma constante real maior do que a unidade. De forma análoga se estabelece o domínio para o sinal de saída.

O número de valores das sequências $\{u\}$ e $\{y\}$ utilizados para o treino em grupo, N_d , deverá ser da ordem das centenas, para permitir ter uma grande variedade de amplitudes.

Alimentando a rede com $(h+n_u+1)$ entradas desde $u(n-p)$ a $u(n-p-h-n_u)$ e com n_y entradas desde $y(n-h)$ a $y(n-h-n_y)$, esta origina um sinal de saída $\hat{y}(n)$. A rede deve ser treinada utilizando um algoritmo disponível, por exemplo o de retropropagação dos erros ou o algoritmo de Marquardt-Levenberg. O número de iterações utilizado para obter a convergência da rede é variável consoante os casos estudados, a respectiva rapidez de convergência e o valor aceite para J_{Nd} . No caso da rectro-propagação a fim de acelerar a convergência devem utilizar-se os métodos do *passo adaptativo* e do *momento*, conhecidos das redes neuronais e postos à disposição pelos fornecedores do *software* específico de redes neuronais.

Após o treino em grupo as redes devem testadas utilizando outras sequências de entrada/saída, com outras formas amplitudes e número de pontos, para verificar a sua boa capacidade de *generalização*. Após ser definido um critério de aceitação, a rede é considerada adequada e suficientemente treinada quando satisfaz esse critério. Por vezes considera-se como critério de aceitação o andamento da curva de erro $y(n) - \hat{y}(n)$, em vez do valor de J_{Nd} .

Treino em linha.

Uma vez que o treino de uma rede neuronal envolve um número muito grande de iterações, normalmente superior a 1000, ao efectuar-se o treino em linha não pode ser feita apenas uma destas iterações por cada passo de execução do controlo. O seu número dependerá da velocidade de variação no tempo do próprio processo. No entanto deverá ser pelo menos da ordem das dezenas. A Fig. 6.17 representa esquematicamente as sequências para efectuar o treino em linha.

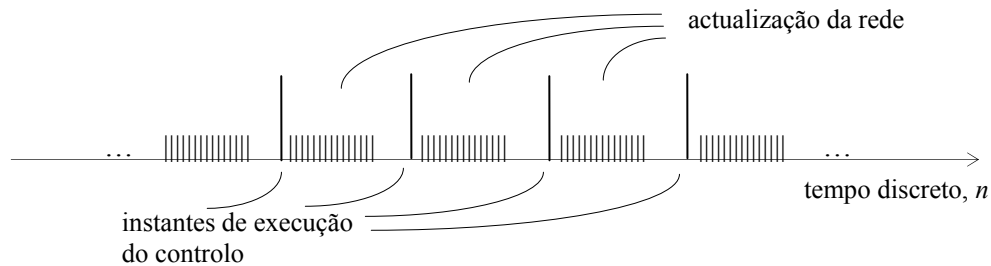


Fig. 6.17 - Treino de uma rede neuronal, em linha.

No entanto, se o número de iterações para actualização da rede for elevado, o ruído do processo, incluído o ruído dos sensores, pode perturbar significativamente a convergência da rede, levando os seus parâmetros a *mudar sistematicamente de trajectória*. É-se assim conduzido à necessidade de filtrar os dados $u(n)$ e $y(n)$ utilizados para treinar a rede. Esta filtragem, que poderá ser igual para todas as entradas da rede, deverá obedecer a duas condições antagónicas: por um lado deverá ser bastante elevada para que o ruído não perturbe a convergência da rede e por outro suficientemente fraca para que qualquer variação dos parâmetros do processo seja imediatamente detectada.

Um outro problema da actualização em linha, em sistemas não lineares, já atrás referido, consiste no *esquecimento* das características globais da rede, ficando esta mais adaptada apenas para pontos de funcionamento com características locais.

6.3.6. Controlo preditivo.

No controlo de um processo com atraso de transporte utilizando um controlador clássico, por exemplo um PID, à medida que se vão tendo tempos de atraso maiores torna-se necessário baixar o ganho proporcional e aumentar o tempo de integração, se se quiserem evitar oscilações ou ter um sistema instável. Esta medida torna a resposta do sistema lenta. Com o fim de obter controladores com melhor desempenho, utilizam-se outros métodos. De entre os que utilizam redes neuronais foram estudados os seguintes: Uso de um controlador clássico em que o *erro* é obtido subtraindo à referência o valor da previsão, e controlo por meio do modelo inverso. Em qualquer dos casos o modelo deverá ser actualizado em linha.

7. EXEMPLOS DE SISTEMAS NÃO LINEARES

7.1. Pêndulo simples

Considere-se o pêndulo simples, representado esquematicamente na Fig. 7.1. Trata-se de uma pequena esfera de massa m , ligada a um ponto fixo O por meio de uma haste rígida de comprimento ℓ e massa desprezável. A haste pode rodar em torno de O.

Considere-se apenas o movimento no plano vertical (x,O,y) . Pela aplicação da 2ª lei de Newton, a massa sujeita a uma força exterior \mathbf{f}_e adquire uma aceleração \mathbf{a} tal que $m\mathbf{a}=\mathbf{f}_e$.

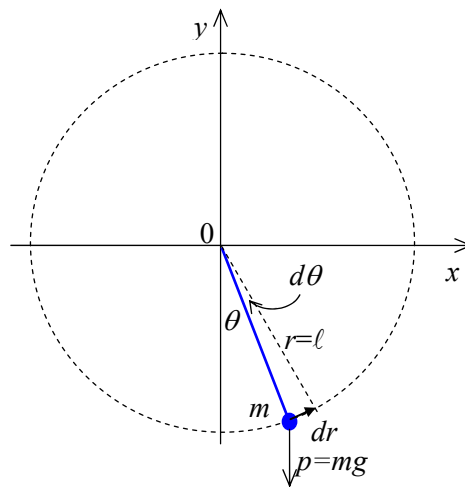


Fig. 7.1– Pêndulo simples

A observação da Fig. 7.1 mostra que $dr = \ell d\theta$, pelo que, como ℓ é constante,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (7.1)$$

ou, uma vez que $d^2 r/dt^2$ é a aceleração a que se encontra submetida a massa m , pode escrever-se, aplicando a lei de Newton, e usando uma notação simplificada:

$$m\ell\ddot{\theta} = f_e \quad (7.2)$$

A resultante das forças exteriores actuando sobre o corpo de massa m (suposta a massa concentrada no seu centro de massas) é constituída por duas parcelas: uma força de restituição devida ao seu peso ($-mg \sin \theta$) e outra resistente, devido ao atrito, que se admitirá ser viscoso, ou seja, proporcional à velocidade linear do corpo ($-b\ell \dot{\theta}$), pelo que (7.2) se pode escrever:

$$m\ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta - b\ell \dot{\theta} \quad (7.3)$$

A força $mg \cos \theta$, na direcção da haste, não é representada por não contribuir para esta aceleração.

Para se obter um modelo de estado para o sistema da equação (7.3) façam-se as mudanças de variável $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$. Obtém-se então a seguinte equação de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(g/\ell) \sin x_1 - (b/m)x_2 \end{cases} \quad (7.4)$$

A equação de saída, $y = x_1$, não é escrita por uma questão de economia.

Os pontos de equilíbrio obtêm-se a partir de (7.4) fazendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -(g/\ell) \sin x_1 - (b/m)x_2 = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

ou ainda:

$$\begin{cases} \sin x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x_1 = k\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Do ponto de vista de localização física apenas as soluções para $k=0$ e $k=1$ são distintas; as restantes são repetições das posições geométricas das primeiras. No entanto as soluções são distintas, como se pode observar na Fig. 7.2.

Voltando às variáveis iniciais θ e ω (ou $\dot{\theta}$), os pontos de equilíbrio distintos são:

$$\begin{bmatrix} \theta_{e1} \\ \omega_{e1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ rad} \\ 0 \text{ rad/s} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \theta_{e2} \\ \omega_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \text{ rad} \\ 0 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

A integração numérica da equação (7.4) para um pêndulo com $m=1$ kg, $l=1$ m e $b=0.2$ N.s.m⁻², sujeito às condições iniciais $\theta=0$ rad e $\omega=10$ rad/s, dá origem à solução que se representa na Fig. 7.3.

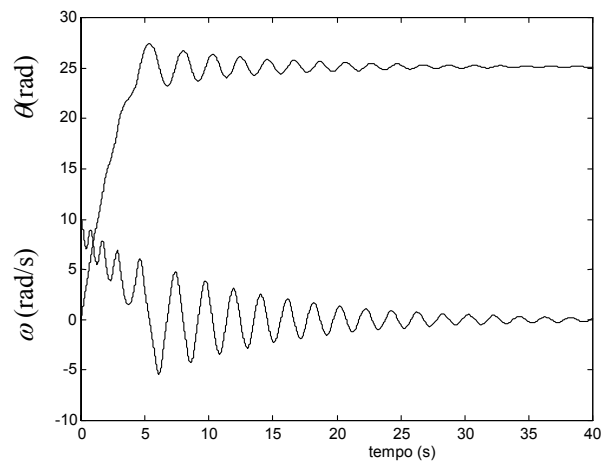


Fig. 7.2– Evolução no tempo do estado do pêndulo simples

A Fig. 7.3 representa a evolução do referido estado, no plano de fase, submetido às mesmas condições iniciais.

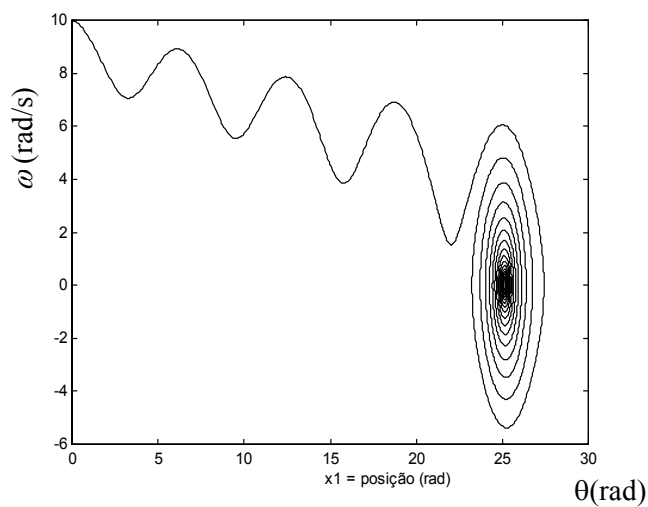


Fig. 7.3– Evolução do estado do pêndulo no espaço de fases.

7.2. Sistema massa-mola-amortecedor

Imagine-se um sistema mecânico constituído por um bloco rígido de massa m que se pode deslocar ao longo do eixo dos xx , sujeito à acção de uma mola não linear e de um amortecedor viscoso, como se mostra na Fig. 7.4.

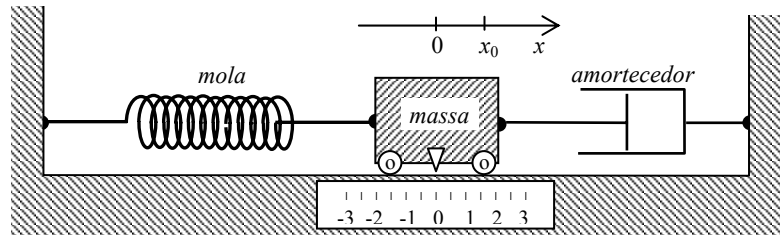


Fig. 7.4– Sistema massa-mola-amortecedor

A aplicação da 2ª lei de Newton a este sistema, conduz à seguinte equação diferencial:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + k_1 x + k_3 x^3 = f \quad (7.7)$$

em que

- m - massa do bloco, suposta concentrada ao centro de massas,
- $x(t)$ - posição da massa, suposta igual a zero com o sistema em repouso,
- b - coeficiente de atrito viscoso do amortecedor,
- k_1 e k_3 – coeficientes da mola,
- $f(t)$ - força de excitação externa, exercida sobre o bloco.

Os parâmetros m , b e k_1 são positivos; k_3 pode ser positivo ou negativo.

(Relembre-se a equação linear correspondente ao sistema linear de 2ª ordem,

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = f / m \quad (7.8)$$

com $\omega_0^2 = k_1 / m$ e $\lambda = b / 2m$).

Se k_3 for positivo a mola diz-se **dura**: a sua força resistente incremental aumenta com a amplitude da coordenada x . Se k_3 for negativo a mola diz-se **macia**: a sua força resistente incremental diminui com a amplitude. Neste caso, se se tratar de uma mola passiva, deverá ser imposta a condição adicional

$$\left| \frac{k_3}{k_1} x^2 \right| < 1 \quad (7.9)$$

que corresponde à força resistente da mola ser positiva. A Fig. 7.5 representa a força resistente de uma mola linear, de uma mola dura e a de uma mola macia.

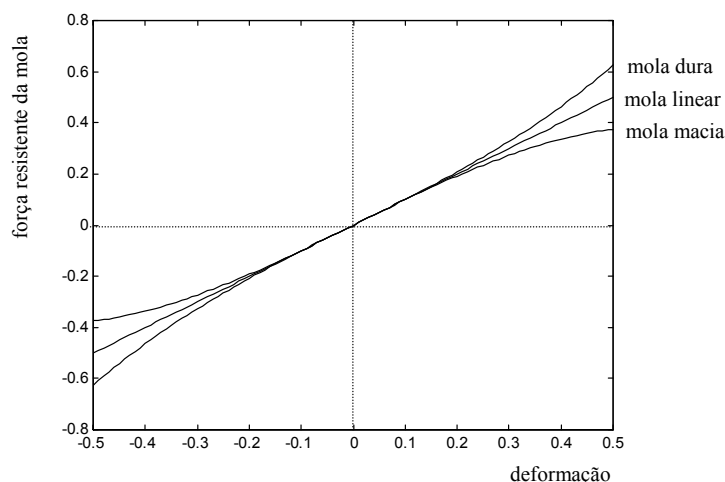


Fig. 7.5– Força resistente de diversos tipos de mola

A equação de estado do sistema exposto pode obter-se a partir de (7.7) efectuando as mudanças de variável $x_1 = x$ (posição do bloco) e $x_2 = \dot{x}$ (velocidade linear):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k_1}{m}x_1 - \frac{k_3}{m}x_1^3 + \frac{1}{m}f \end{cases} \quad (7.10)$$

Considere-se o sistema em regime livre ($f = 0$), a partir das condições iniciais $[x_0 \neq 0; 0]$, isto é posição inicial x_0 distinta da posição de repouso e velocidade inicial nula. Se o amortecimento for fraco⁽¹⁾ a massa vai oscilar, de uma forma amortecida em torno da posição $x=0$, sendo a frequência de oscilação função da amplitude.

Para $k_3 > 0$ observa-se que a frequência de oscilação aumenta com a amplitude (a mola é mais resistente para amplitudes maiores) e para $k_3 < 0$ a frequência de oscilação diminui com a amplitude (Fig. 7.6).

Considere-se agora o sistema em regime forçado; admita-se que sobre o bloco se exerce uma força alternada sinusoidal $f(t)$ de frequência ω e amplitude F constante,

$$f(t) = F \cos(\omega t) \quad (7.11)$$

Nestas condições a massa entrará em oscilação.

Considere-se o caso em que $k_3 = 0$ (sistema linear). Neste caso a amplitude de oscilação $x(t)$ será também sinusoidal e terá a mesma frequência ω que a força de excitação:

$$x(t) = X \cos(\omega t - \varphi) \quad (7.12)$$

¹ Para o sistema linear equivalente (7.8), o amortecimento diz-se fraco se $\lambda^2 < \omega_0^2$.

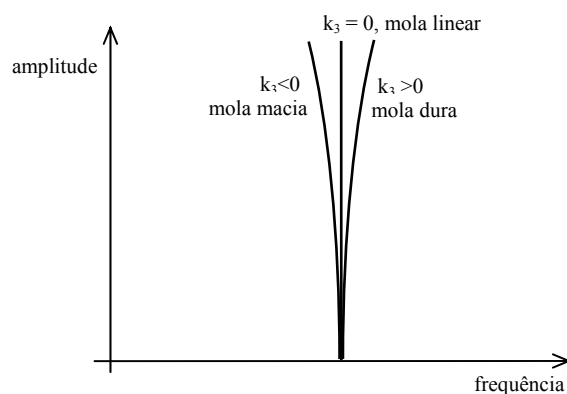


Fig. 7.6– Variação da frequência de oscilação com a amplitude

A Fig. 7.7 representa a relação entre a amplitude de oscilação X por unidade de força de excitação, para diversos valores do amortecimento $\lambda^{(2)}$, em função da frequência da força de excitação. Estas funções de transferência são bastante conhecidas do estudo da resposta de sistemas lineares de 2ª ordem.

A relação X/F depende de ω e do amortecimento do sistema e não depende de F . Para um determinado grau de amortecimento existe uma relação unívoca entre X/F e ω . O gráfico X/F apresentado considera apenas o regime forçado, que se estabelece depois de desaparecer a resposta transitória inicial.

Nestas condições, se a frequência ω variar lentamente no tempo, o ponto representativo de X/F em função de ω evolui sobre a curva respectiva, quer ω aumente, quer diminua.

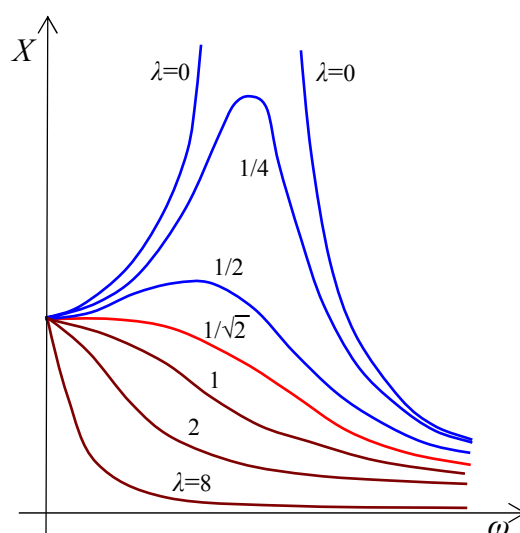


Fig. 7.7– Curvas de resposta em frequência, sistema linear

² $\lambda = b/2m$

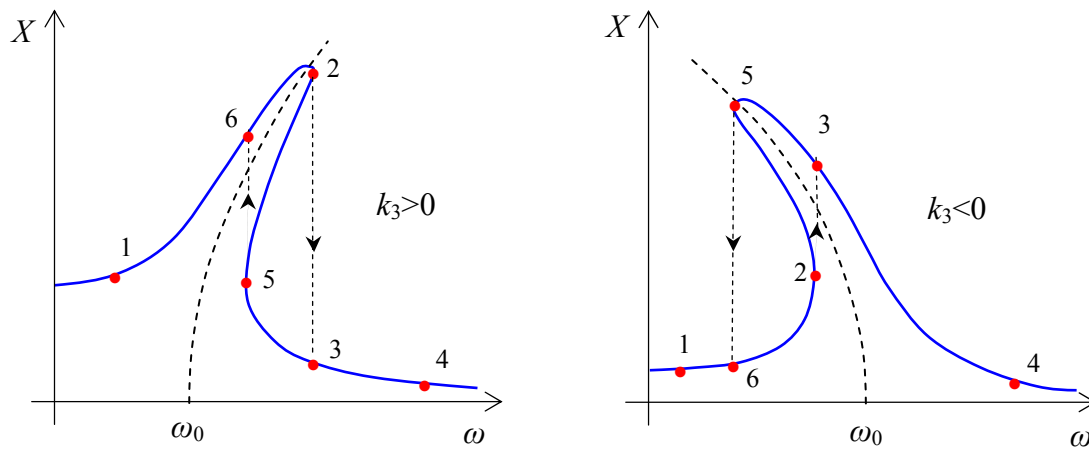


Fig. 7.8– Curvas de resposta em frequência, sistema não linear.

Seja agora o caso em que $k_3 \neq 0$. Admite-se $|k_3|$ suficientemente elevado para se poderem observar as não linearidades. As curvas de resposta em frequência, para um amortecimento muito pequeno, tomam o aspecto indicado na Fig. 7.8.

Análise-se a curva correspondente a $k_3 > 0$. Admita-se F constante e ω lentamente variável e crescente. Partindo do ponto 1, à medida que a frequência ω vai aumentando, vai-se progredindo sobre a curva X/F até se atingir o ponto 2, em que a amplitude de oscilação é máxima. Neste ponto um ligeiro aumento de ω produz uma descontinuidade na amplitude da oscilação, de 2 para 3. Continuando a aumentar ω caminha-se até ao ponto 4 com uma diminuição contínua da amplitude. Se agora ω descer lentamente a partir de 4, a amplitude seguirá a trajectória $4 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ havendo uma nova descontinuidade, com aumento brusco de amplitude, na transição de $5 \rightarrow 6$. A este fenómeno chama-se **ressonância com saltos**. Esta exige que a não linearidade seja apreciável e o amortecimento pequeno. Tem a propriedade de exibir uma gama de frequências em que para cada ω existem duas amplitudes de oscilação estáveis.

Para a curva correspondente a $k_3 < 0$ acontece um fenómeno semelhante.

7.3. Oscilador de resistência negativa

Considere-se o circuito eléctrico representado na Fig. 7.9a), constituído por um condensador, uma bobina e um elemento resistivo com a característica indicada em b). A capacidade do condensador e o coeficiente de auto-indução da bobina supõe-se constantes. São exemplos de dispositivos electrónicos de resistência negativa os díodo túnel, o transistor unijunção, o díodo de 4 camadas e o transistor de avalanche.

Para valores de v junto da origem a um aumento de v corresponde uma diminuição i . É por esta razão que se diz o circuito exibir resistência negativa.

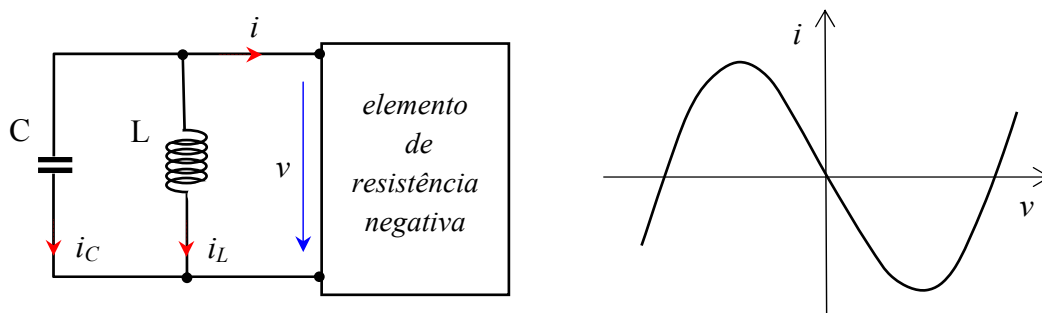


Fig. 7.9– Oscilador de resistência negativa.

Pela aplicação das leis de Kirchoff pode escrever-se:

$$i_C + i_L + i = 0 \quad (7.13)$$

Da electrotecnia sabe-se que:

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad \text{e} \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (7.14)$$

A característica $i = h(v)$ por enquanto não é dada. Substituindo (7.14) em (7.13) pode escrever-se:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau + h(v) = 0 \quad (7.15)$$

Multiplicando-se ambos os membros de (7.15) por L e derivando em ordem ao tempo fica:

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + Lh'(v) \frac{dv}{dt} + v = 0 \quad (7.16)$$

Efectuando a mudança de variável $\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$ pode escrever-se

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \sqrt{\frac{L}{C}} h'(v) \frac{dv}{dt} + v = 0 \quad (7.17)$$

Utilizando a notação simplificada para a derivada em ordem ao tempo normalizado τ e fazendo $\varepsilon = \sqrt{L/C}$ vem:

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v) \dot{v} + v = 0 \quad (7.18)$$

Finalmente, aproximando a curva $h(v)$ da figura Fig. 7.9b por uma parábola cúbica:

$$h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3 \quad (7.19)$$

pode escrever-se:

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2)\dot{v} + v = 0 \quad (7.20)$$

que é a **equação de Van der Pol**⁽³⁾. Esta equação foi utilizada por Van der Pol para estudar osciladores electrónicos com tubos de vazio. É um exemplo muito corrente apresentado no estudo dos sistemas não lineares, por exhibir um ciclo limite.

Para a obtenção da equação de estado correspondente ao sistema descrito pela equação (7.20), façam-se as mudanças de variável $x_1 = v$ e $x_2 = \dot{v}$. Obtém-se assim a equação de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{cases} \quad (7.21)$$

A integração numérica desta equação, para dois valores distintos de ε , conduz às soluções apresentadas na Fig. 7.10. Na Fig. 7.11 indicam-se as respectivas trajectórias no espaço de estado.

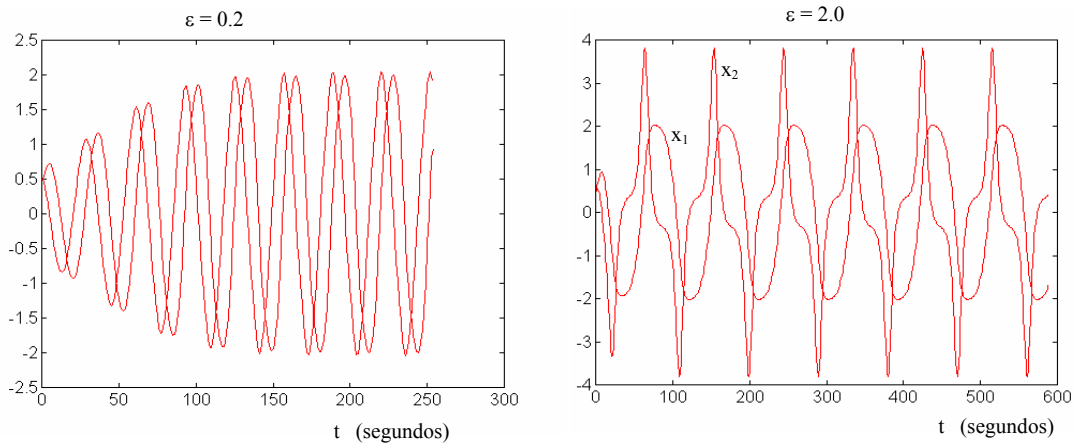


Fig. 7.10– Soluções da equação de Van der Pol

³ Van der Pol – Engenheiro Electrotécnico Holandês, 1889-1959.

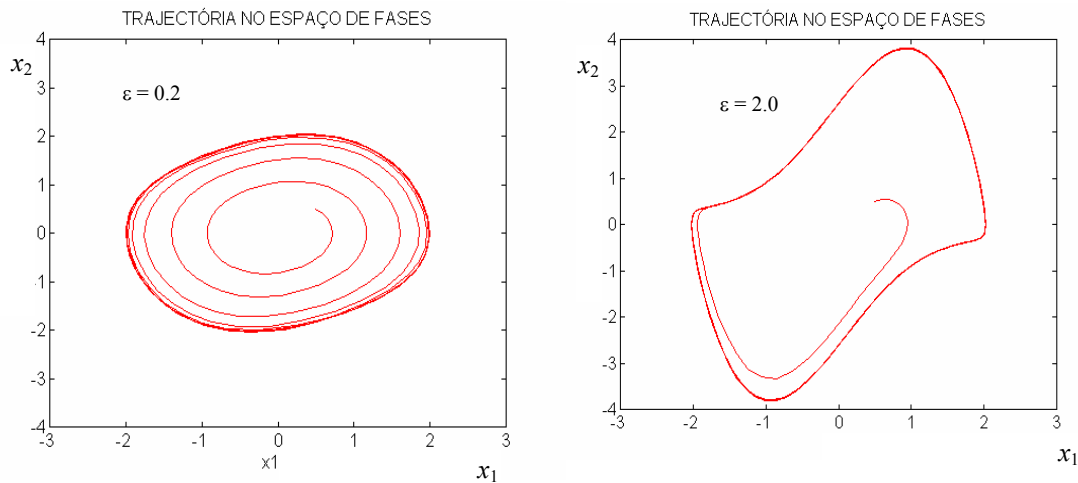


Fig. 7.11– Diagramas de estado da equação de Van der Pol.

Compare-se agora a equação (7.20) com a sua correspondente linear

$$\ddot{v} - \varepsilon \dot{v} + v = 0 \quad (7.22)$$

Repare-se que para valores muito pequenos de v se tem $(1-v^2) \approx 1$. A equação (7.22), devido à existência de $\varepsilon \neq 0$, não tem soluções periódicas. Para $\varepsilon > 0$ as soluções crescem indefinidamente com o tempo e para $\varepsilon < 0$ decrescem e tendem para zero. Considere-se o caso em que $\varepsilon > 0$ e o estado inicial é $v = 0$ e $\dot{v} = 0$. Qualquer perturbação em v faz com que este comece a aumentar. No entanto, a partir de uma certa amplitude o termo $(1-v^2)$ começa a ser francamente diferente de 1. É a existência da não linearidade que estabiliza o sistema: o termo $-\varepsilon(1-v^2)\dot{v}$ amplifica v se $|v| < 1$ e amortece-o se $|v| > 1$. Este fenómeno dá origem a uma solução periódica.

7.4. Movimento de dois corpos com forças centrais

Este caso é de extrema importância em astronomia. Seja um corpo de massa m sujeito a uma *força central* $f(r)$, ou seja, dirigida para a origem, como se indica na Fig. 7.12. Serão utilizadas coordenadas polares.

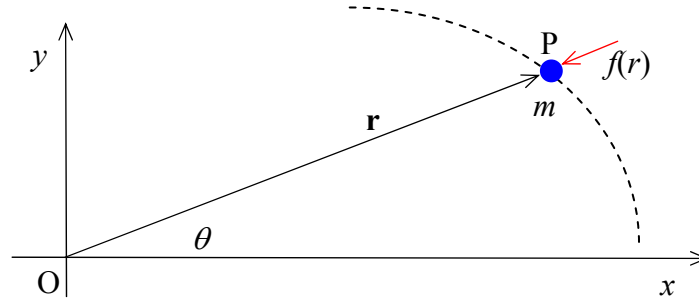


Fig. 7.12– Corpo de massa m sujeito a uma força central.

Trata-se por exemplo da trajectória de um planeta P de massa m que se movimenta em torno de uma estrela O de massa M muito maior que m . A força $f(r)$, devido à lei de atracção de massas, é dirigida de P para O e tem o valor

$$f(r) = -G \frac{mM}{r^2} \quad (7.23)$$

A aplicação das leis da mecânica conduz às equações diferenciais

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (7.24)$$

Substituindo $f(r)$ pelo seu valor dado por (7.23) e dividindo por m vem:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (7.25)$$

Para se obter um modelo de estado, efectuem-se as seguintes mudanças de variável :

$$x_1 = r \quad x_2 = \dot{r} \quad x_3 = \theta \quad x_4 = \dot{\theta}$$

Obtêm-se as equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_3^2 - \frac{GM}{x_1} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{2x_2 x_4}{x_1} \end{cases} \quad (7.26)$$

A equação de estado contém duas equações lineares e duas equações não lineares. Uma vez que G e M são constantes, o comportamento do movimento de um planeta de massa m em torno de uma estrela de massa M vai depender exclusivamente das suas condições iniciais, uma vez que não há outros parâmetros ou solicitações. A órbita do planeta, no sentido geométrico, será a trajectória no *sub-espaço de estados* $x_1 x_3$, isto é a trajectória no plano (r, θ) . De acordo com os valores iniciais $\mathbf{x}_0 = [r_0 \dot{r}_0 \theta_0 \dot{\theta}_0]$ assim a órbita será *elíptica* ou um *ramo de hipérbole*. A zona de transição corresponde à órbita *parabólica*.

7.5. Interacção entre espécies animais

Descreve-se a seguir o exemplo clássico relativo à interacção entre populações. Este problema foi estudado por Volterra⁽⁴⁾ e por Lotka⁽⁵⁾, e pode equacionar-se do seguinte modo:

Duas espécies animais semelhantes competem entre si num ambiente em que os recursos alimentares são limitados. Qual a evolução das respectivas populações?

Designando por x_i o número de indivíduos da espécie i ($i=1,2$), o sistema pode ser modelado pelo sistema de equações diferenciais não lineares

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a - bx_1 - \sigma x_2)x_1 \\ \dot{x}_2 = (c - \nu x_1 - dx_2)x_2 \end{cases} \quad (7.27)$$

com $a, b, c, d, \sigma, \nu > 0$.

Nas equações acima a taxa de crescimento “per capita” da espécie 1 é dada por

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1} = a - bx_1 - \sigma x_2 \quad (7.28)$$

Observe-se que é constituída por três termos: a taxa de crescimento a da população x_1 isolada, a taxa devida à competição “intra-espécie”, $-bx_1$, e a taxa da competição “inter-espécie” $-\sigma x_2$. A taxa de crescimento “per capita” da espécie 2 tem uma constituição semelhante.

Uma condição necessária para a coexistência indefinida das duas espécies é que exista pelo menos um ponto de equilíbrio tal que $x_{1e} > 0$ e $x_{2e} > 0$. Os pontos de equilíbrio obtêm-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases} (a - bx_1 - \sigma x_2)x_1 = 0 \\ (c - \nu x_1 - dx_2)x_2 = 0 \end{cases} \quad (7.29)$$

obtendo-se os 3 pontos

$$x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c}{d} \end{bmatrix} \quad x_{e2} = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{e3} = \begin{bmatrix} \frac{ad - \sigma c}{bd - \nu\sigma} \\ \frac{bc - a\nu}{bd - \nu\sigma} \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Os pontos de equilíbrio x_{e1} e x_{e2} são instáveis e correspondem à extinção das espécies 1 e 2 respectivamente. O ponto de equilíbrio x_{e3} estável se $bd > \nu\sigma$ (nestas condições exige-se que $ad > \sigma c$ e $bc < a\nu$).

⁴ Vito Volterra, Matemático Italiano, 1860-1940.

⁵ Alfred James Lotka, Biofísico Americano, 1860-1949.

7.6. Reactor químico continuamente agitado

O reactor químico continuamente agitado, CSTR (“Continuous Stirred Tank Reactor”) é constituído por um tanque por onde transita uma mistura de reagentes químicos. Para que a mistura seja bem feita esta está continuamente a ser agitada. O reactor, representado esquematicamente na Fig. 7.13, é refrigerado por meio de um permutador de calor.

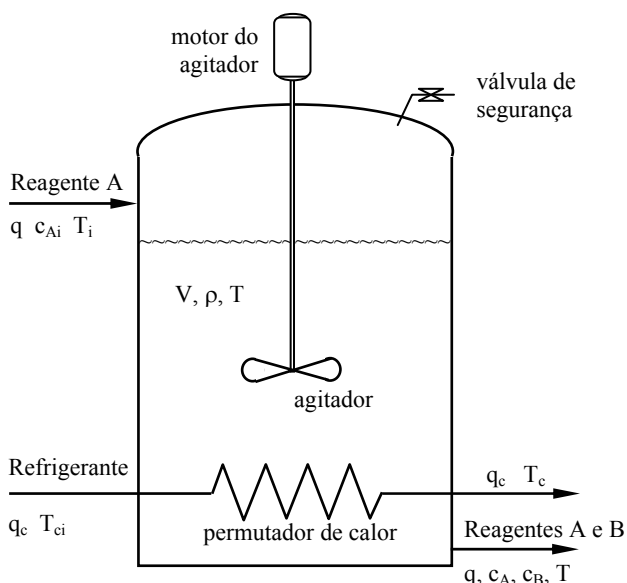


Fig. 7.13– Reactor químico continuamente agitado.

O reactor é alimentado com um reagente A, de concentração c_{Ai} , caudal q e temperatura T_i . No tanque, de volume V , encontra-se uma mistura de dois reagentes A e B, à temperatura T . Admite-se que por acção do agitador a mistura é homogénea e de composição igual em todas as zonas no interior do reactor, e com massa volúmica ρ . No interior do reactor, vai dar-se uma reacção exotérmica em que o produto A se transforma, originando o produto B



A velocidade de reacção, por unidade de volume, é proporcional à concentração de A

$$r = kc_A \quad (7.32)$$

com

$$r = -\frac{dc_A}{dt} = \frac{dc_B}{dt} \quad (7.33)$$

em que k representa o coeficiente de reacção do produto A e c_A a sua concentração molar. O coeficiente k é fortemente dependente da temperatura a que se dá a reacção e é correntemente aproximado pela Lei de Arrhenius

$$k = k_0 e^{-\frac{E}{RT}} \quad (7.34)$$

em que:

k – constante de velocidade, k_0 – factor pré-exponencial,
 E – energia de activação, R – constante de Boltzmann.

Admitindo que as densidades do reagente A e da mistura são iguais, o **balanço de massas** permite escrever

$$V \frac{dc_A}{dt} = q(c_{Ai} - c_A) - V k c_A \quad (7.35)$$

Se a reacção for exotérmica, a energia libertada é retirada por meio de um permutador de calor. O **balanço de energia** permite escrever a equação

$$V \rho q \frac{dT}{dt} = w(T_i - T) + (-\Delta H) V k c_A + U A(T_c - T) \quad (7.36)$$

em que:

ΔH – é o calor desenvolvido na reacção,
 U – coeficiente de transferência de calor do permutador,
 A – área do permutador,
 w – caudal mássico através do reactor.

Substituindo (7.34) em (7.35) e (7.36) podem escrever as equações de estado

$$\begin{cases} \dot{c}_A = \frac{q}{V}(c_{Ai} - c_A) - k_0 e^{-\frac{E}{RT}} c_A \\ \dot{T} = \frac{q}{V}(T_i - T) - J k_0 e^{-\frac{E}{RT}} c_A + UA(T_c - T) \end{cases} \quad (7.37)$$

As equações (7.37), não lineares, representam com uma aproximação suficiente para muitos casos práticos, o que se passa neste tipo de reactor.

O sistema descrito admite 3 pontos de equilíbrio. Sabe-se que a quantidade de energia libertada pela reacção é uma *função sigmoideal da temperatura*, e que o calor retirado

pelo permutador é proporcional à temperatura, como se representa na Fig. 7.14. Os pontos de equilíbrio correspondem à energia retirada pelo permutador de calor ser igual à energia libertada pela reacção exotérmica. Os pontos de equilíbrio A e C são estáveis, o ponto de equilíbrio B é instável: Admita-se que o reactor se encontra no ponto de equilíbrio B. Uma perturbação no processo, que conduza a uma ligeira elevação de temperatura de T_2 para T'_2 , para a qual a libertação de energia pela reacção é superior à energia retirada pelo permutador, leva a caminhar na direcção de C.

Se a perturbação inicial, a partir de B, tivesse produzido uma ligeira baixa de T'_2 , um raciocínio análogo ao anterior conduziria ao ponto de equilíbrio A. Considerações análogas a estas, para os pontos A e C, permitem provar que estes são estáveis.

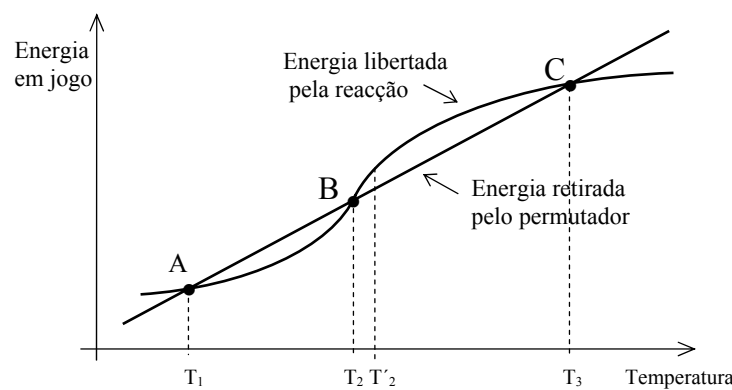


Fig. 7.14– Pontos de equilíbrio do CSTR.

8. CONSTANTES, FORMULÁRIOS E TABELAS

8.1. Constantes matemáticas

$$e = 2.7182\ 81828\ 45904\ 52353\ 60287$$

$$\pi = 3.1415\ 92653\ 58979\ 32384\ 62643$$

$$\sqrt{2} = 1.4142\ 13562\ 37309\ 50488$$

$$\sqrt{3} = 1.7320\ 50807\ 56887\ 72935$$

$$\sqrt{10} = 3.1622\ 77660\ 16837\ 93320$$

8.2. Constantes fundamentais da Física

<i>Nome da constante</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Valor + (incerteza) + unidades</i>
Carga eléctrica elementar	e	$1.602\ 177\ 33(4\ 9) \times 10^{-19}\ \text{C}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.380\ 658\ (12) \times 10^{-23}\ \text{JK}^{-1}$
Constante de Coulomb	k_e	$8.987\ 551\ 787 \times 10^{-9}\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$ (exacto)
Constante de Faraday	F	$9.648\ 670\ (54) \times 10^4\ \text{C/mol}$
Constante de Planck	h	$6.626\ 075\ (40) \times 10^{-34}\ \text{Js}$ (exacto)
Constante de Stefan	σ	$5.669\ 6 \times 10^{-8}\ \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
Constante dos gases	R	$8.314\ 510(70)\ \text{JK}^{-1}\text{mol}$
Constante gravitacional	G	$6.672\ 59(8\ 5) \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$
Electrão-volt (unidade de energia)	eV	$1.602\ 177\ 33(4\ 9) \times 10^{-19}\ \text{J}$
Massa do electrão	m_e	$9.109\ 389\ 7(54) \times 10^{-31}\ \text{kg}$
Massa do neutrão	m_n	$1.674\ 928\ 6(10) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
Massa do protão	m_p	$1.672\ 623(10) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
Número de Avogadro	N_A	$6.022\ 136\ 7(36) \times 10^{23}$ partículas/mole
Permeabilidade eléctrica do vazio	ϵ_0	$8.854\ 187\ 817 \times 10^{-12}\ \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ (exacto)
Permeabilidade magnética do vazio	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ \text{TmA}^{-1}$ (exacto)
Raio de Bohr	a_0	$0.529\ 177\ 249(24) \times 10^{-10}\ \text{m}$
Unidade de massa atómica	u	$1.660\ 540\ 2(10) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
Velocidade da luz no vazio	c	$2.997\ 924\ 58 \times 10^8\ \text{ms}^{-1}$ (exacto)

8.3. Formulário de Matemática

8.3.1 Álgebra elementar

Fracções

$$\text{soma} \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\text{multiplicação} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\text{divisão} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Potências

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{m \times n} \quad x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Factorização

quadrado perfeito:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

diferença de quadrados:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Equações

$$1^\circ \text{ grau: } ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$2^\circ \text{ grau: } ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

8.3.2 Logaritmos e exponenciais

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^p) = p \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log x \equiv \log_{10} x$$

$$\ln x \equiv \log_e x$$

$$\ln x = 2.302585 \times \log x$$

$$\ln e = 1$$

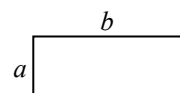
$$\ln 1 = 0$$

8.3.3 Geometria

Rectângulo de lados a e b

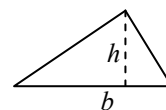
$$\text{Perímetro: } P = 2(a+b)$$

$$\text{Área: } A = a \times b$$



Triângulo de base b e altura h

$$\text{Área: } A = \frac{1}{2} b \times h$$

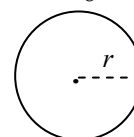


Circunferência / círculo de raio r

$$\text{Diâmetro: } d = 2r$$

$$\text{Perímetro: } P = 2\pi r$$

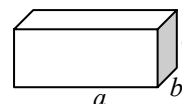
$$\text{Área: } A = \pi r^2$$



Paralelepípedo de lados a , b e c

$$\text{Área da base: } A = ab$$

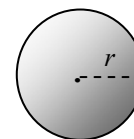
$$\text{Volume: } V = abc$$



Esfera de raio r

$$\text{Área: } A = 4\pi r^2$$

$$\text{Volume: } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



Cilindro com base de raio r e altura h

$$\text{Área da base: } A_b = \pi r^2$$

$$\text{Área lateral: } A_l = 2\pi r \ell$$

$$\text{Volume: } V = \pi r^2 \ell$$



$$\text{Ângulo sólido: } d\Omega = dA / r^2$$

8.3.4 Limites

$$\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

8.3.5 Séries

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots$$

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \dots$$

$$(1 + x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \frac{63x^5}{256} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

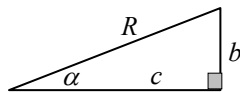
$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (x \text{ em radianos})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (x \text{ em radianos})$$

$$\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (x \text{ rad}, |x| < \pi/2)$$

8.3.6 Trigonometria



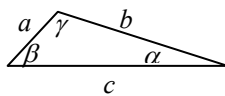
Teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 = R^2$

$$\sin \alpha = \frac{b}{R} \quad \cos \alpha = \frac{c}{R} \quad \tan \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

8.3.7 Derivadas

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a$$

$$\frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + (\log u) u^v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (uv) = u^{(n)} + n u^{(n-1)} v' + \dots$$

$$\dots + C_r^n u^{(n-r)} v^{(r)} + \dots + u v^{(n)}$$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \log a}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

8.3.8 Integrais indefinidos

$$\int v du = vu - \int u dv$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \ln ax dx = (x \ln ax) - x + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$$

$$\int \frac{xdx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(ax+b) + C$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{x+a}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \quad (a^2-x^2>0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (a^2-x^2>0)$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int \tan ax dx = \frac{1}{a} \ln(\cos ax) + C$$

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sin ax) + C$$

$$\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax) + C$$

$$\int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax) + C$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

8.4. Transformada de Laplace unilateral

8.4.1 Propriedades da TL

P.1 - **Linearidade:** $\mathcal{L}^+[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$

P.2 - **Deslocamento no tempo:** $\mathcal{L}^+[x(t-t_0)] = e^{-st_0}X(s) \quad (t_0 > 0)$

P.3 - **Deslocamento no domínio s:** $\mathcal{L}^+[x(t)e^{s_0t}] = X(s-s_0)$

P.4 - **Sinal conjugado:** $\mathcal{L}^+[x(t)^*] = X^*(s^*)$

P.5 - **Contração/expansão no tempo:** $\mathcal{L}^+[x(at)] = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$

P.6 - **Derivação no tempo:**

$$\mathcal{L}^+\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0^+)$$

$$\mathcal{L}^+\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = s^n X(s) - s^{n-1}x(0^+) - s^{n-2}\dot{x}(0^+) - \dots - x^{(n-1)}(0^+)$$

P.7 - **Derivação no domínio s:**

$$\mathcal{L}^+[-tx(t)] = \frac{dX(s)}{ds} \quad \mathcal{L}^+[(-t)^n x(t)] = \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

P.8 - **Integração no tempo:**

$$\mathcal{L}^+\left[\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}X(s) \quad \mathcal{L}^+\left[\int_0^t \dots \int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s^n}X(s)$$

P.9 - **Integração no domínio s:** $\mathcal{L}^+\left[\frac{1}{t}x(t)\right] = \int_s^\infty X(\sigma)d\sigma$

P.10 - **Convolução:** $\mathcal{L}^+[x(t)*y(t)] = X(s)Y(s)$

P.11 - **Função periódica [período a: $x(t+a)=x(t)$]:**

$$\mathcal{L}^+[x(t)] = \frac{\int_0^a x(t)e^{-st}dt}{1-e^{-as}}$$

P.12 - **Rectificação de onda completa [período a: $x(t+a)=x(t)$]:**

$$\mathcal{L}^+[|x(t)|] = X(s)\coth\left(\frac{as}{2}\right)$$

P.13 - **Teorema do valor final:** $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s)]$ (desde que exista o 1º limite)

P.14 - **Teorema do valor inicial:** $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s)]$

8.4.2 Tabelas de TL

	Sinal temporal, $x(t)$	TL unilateral, $X(s)$	Região de convergência
1.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$R_e(s) > 0$
2.	$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	todo s
3.	t	$\frac{1}{s^2}$	$R_e(s) > 0$
4.	t^n (n inteiro)	$\frac{n!}{s^{(n+1)}}$	$R_e(s) > 0$
5.	\sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} s^{-3/2}$	$R_e(s) > 0$
6.	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$R_e(s) > 0$
7.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$R_e(s) > -a$
8.	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$R_e(s) > -a$
9.	$t^n e^{-at}$ (n inteiro)	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$R_e(s) > -a$
10.	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$R_e(s) > 0$
11.	$\text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$R_e(s) > 0$
12.	$1 - \cos(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + \omega_0^2)}$	$R_e(s) > 0$
13.	$e^{-at} \text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$R_e(s) > 0$
14.	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$R_e(s) > 0$
15.	$t \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$R_e(s) > 0$
16.	$t \text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$R_e(s) > 0$

8.5. Formulário de Física

8.5.1 Mecânica dos sólidos

\vec{r} vector de posição da partícula

\vec{v} velocidade linear da partícula

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

\vec{a} aceleração da partícula

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Movimento circular:

$\vec{\omega}$ velocidade angular da partícula

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$a = \omega^2 r$$

2ª lei de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$

Teorema do momento linear (lei de Newton)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento angular $\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v}$

I momento de inércia

Momento de inércia de uma partícula de massa m que descrever um movimento circular uniforme de raio R :

$$I = mR^2$$

Momento angular de um corpo rígido que roda com velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação ao seu eixo de simetria:

$$\vec{\ell} = I\vec{\omega}$$

Momento de uma força em relação a um ponto: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Teorema do momento angular

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

Energia cinética: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Energia potencial: $E_p = mgh$

Trabalho exercido por uma força: $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$

Lei da atracção universal: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

Lei de Hooke: $\sigma = Y\varepsilon$

(σ tensão mecânica, ε deformação relativa, Y módulo de elasticidade de Young)

8.5.2 Mecânica dos fluidos

Pressão exercida num ponto: $p = \frac{F}{S}$

Lei fundamental da hidrostática:

$$\Delta p = \rho g \Delta h$$

Teorema de Arquimedes $I = \rho_f g V_i$

(I impulsão, ρ_f massa volúmica do fluido, V_i volume imerso do corpo)

Caudal: $q = VS$ (V velocidade, S área)

Número de Reynolds: $R_e = VD\gamma / \mu$

(V velocidade, D diâmetro da tubagem, γ peso volúmico, μ viscosidade do fluido)

Equação de Bernoulli para fluidos ideais

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = C^{te}$$

(V velocidade, g aceleração da gravidade, p pressão, γ peso volúmico, z cota geométrica)

8.5.3 Electrotecnia

Lei de Coulomb: $F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$

Campo eléctrico: $\vec{E} = \vec{F} / q_0$ (volt/metro)

Densidade volumétrica de carga eléctrica:

$\rho = q / V$ (carga por unidade de volume)

Densidade superficial de carga eléctrica:

$\sigma = q / S$ (carga por unidade de área)

Potencial num ponto: $U_p = -\int_{\infty}^p \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Diferença de potencial entre A e B:

$$U_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Se o campo for uniforme na direcção de s

$$V_{AB} = E d_{AB}$$

Capacidade (definição): $C = \frac{q}{U}$

Capacidade de um condensador plano:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Corrente eléctrica: $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$

Densidade de corrente: $J = \frac{I}{A}$

Lei de ohm: $J = \sigma E \rightarrow U = R I$

Resistência eléctrica de um condutor

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

Potência dissipada numa resistência (lei de Joule) $P = R I^2 = U^2 / R$

Associação de resistências

em série: $R = \sum_{i=1}^N R_i$ em paralelo: $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$

Associação de bobinas

em série: $L = \sum_{i=1}^N L_i$ em paralelo: $\frac{1}{L} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i}$

Associação de condensadores

em série: $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$ em paralelo: $C = \sum_{i=1}^N C_i$

Leis de Kirchhoff

nós: $\sum_{k=1}^n i_k = 0$ malhas: $\sum_{k=1}^m u_k = 0$

Força magnética sobre carga em movimento:

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Força magnética entre condutores paralelos:

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

(F força, ℓ comprimento, μ_0 permeabilidade magnética do meio, I_1 e I_2 correntes nos condutores 1 e 2, d distância entre condutores)

Força electromotriz induzida por variação de

$$\text{fluxo: } e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Reactância de uma bobina: $X_L = \omega L$

($\omega = 2\pi f$ frequência angular, f frequência, L coeficiente de auto-indução)

Reactância de um condensador: $X_C = \frac{1}{\omega C}$

(C capacidade do condensador)

Impedância do circuito RLC série:

$$\vec{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Potência aparente: $Q = V_{ef} I_{ef}$

Potência activa: $P = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi$

Potência reactiva: $S = V_{ef} I_{ef} \sin \varphi$

(φ desfasagem entre a tensão e a corrente)

Transformador ideal (ligação magnética perfeita e sem perdas):

$$\frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2} \quad N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$

(u tensão, i corrente, N nº de espiras, 1 primário, 2 secundário)

Linha de transmissão sem perdas (L coeficiente de auto-indução/m, C capacidade/m, R_L resistência de carga no final da linha)

Impedância característica: $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Factor de reflexão: $p = \frac{R_L - Z}{R_L + Z}$

Velocidade de propagação: $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Circuitos trifásicos

Tensão composta: $V_{12} = \sqrt{3} V_1 = 1,732 V_1$

(V_1 tensão simples, ou por fase)

BIBLIOGRAFIA

- [1]. NONLINEAR SYSTEMS
Khalil, Hassan K Prentice Hall 1996
- [2]. APPLIED NONLINEAR CONTROL
Slotine, J. J. E / Li, Weiping Prentice Hall 1991
- [3]. NONLINEAR CONTROL SYSTEMS – AN INTRODUCTION
Isidori, A Springer Verlag 1989
- [4]. MATHEMATICAL CONTROL THEORY
Sontag, Eduard Springer 1998
- [5]. ESSENTIALS OF NONLINEAR CONTROL THEORY
Leigh, J. R. IEE Topics in Control, Series 2
Peter Peregrinus LTD 1983
- [6]. CONTROLO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES
Lemos, J. Miranda Actas das aulas de Controlo II IST – 1985
<http://ramses.inesc.pt/People/jlml/flsC2.html>
- [7]. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
Costa, Fernando Pestana da IST Press 1998
- [8]. FUZZY CONTROL AND FUZZY SYSTEMS
Pedrycz, Witold John Wiley & Sons Inc. 1993
- [9]. NEURO-CONTROL AND ITS APPLICATIONS
Omatu, S. / Khalid M. / Yusof R. Springer 1996

ÍNDICE

adjunta	136	complemento	166	estável	130
agregação	173	completamente integrável	139	instável	130
algoritmo para a linearização		condições sectoriais	99	zero	132
entrada-estado	143	condutância térmica	20	disjunção	165
algoritmos genéticos	160	conectivas	166	dissipa.....	88
altura de conjunto difuso	162	congelar entradas	185	divergência	51
amortecimento,	194	conjunção	165	domínio de atracção.....	68
amplificadores	18	conjunto difuso	160, 162	domínios transformados	22
amplitude da excitação	6	convexo	162		
anterior	167	normalizado.....	162	energia	21, 88
aprendizagem	184	regular	162	cinética	14, 76
aproximação linear	71	conjunto invariante.....	88	do sistema	14, 76
aproximadamente zero	163	controlabilidade	142	mecânica total	76
aproximador universal	181	controlador		potencial	15, 76
assimptótica/ estável.....	85	difuso	170	equação	
assimptótica/ estável nsLy.....	68	liga/desliga	37	às diferenças	25
atraso no processo	115	controlo		característica	44
atrito estático	35	adaptativo	1, 159	de Bernouilli	120
atrito viscoso	15	difuso	160	de conservação da massa .	21
autónomo	64	difuso do satélite	174	de estado	24
		inteligente	159	de Lyapunov	84
bacia de atracção	68	não linear	1	de saída	24
<i>backlash</i>	33	preditivo	188	de Van der Pol	61, 197
<i>backpropagation</i>	184	corte- α forte	162	do balanço de energia 22, 203	
balanço de energia	22, 203	corte- α fraco	162	n-vectorial	26
balanço de massas	21, 203	critério de Popov	101	equações	
bifurcação	11	critério do círculo.....	103	de estado escalares	43
binário.....	54	critérios de pertença	160	diferenciais às derivadas	
		CSTR (“Continuous Stirred		parciais	139
calor específico	18	Tank Reactor	202	vectoriais	24, 26
calor latente	19	condições iniciais	13	esboço do retrato de fase	44
camada de entrada	178			espaço de fases	43
camada de saída	178	decaimento	69	esquecimento	188
camadas	177	del	51	estabilidade.....	63, 112
camadas escondidas	178	dependência crítica	10	absoluta.....	99
campo		derivada de Lie	134, 135	assimptótica	92
covectorial	51, 133	derivada de $V(x,t)$	93	assimptótica	93
escalar	51	descrição entrada-saída	22	BIBO	5
vectorial	51, 133	desfuzificação	169, 174	de sistemas não autónomos	91
vectorial.involutivo	139	desigualdade de Popov.....	101	exponencial.....	92
caos	12	diagrama de Nyquist	111	global	69, 92, 94
características convergentes ..	113	diagrama de Popov.....	101	local	69
características divergentes	112	diagrama do círculo.....	103	no sentido de Lyapunov	93
centro.....	47	dicotómica	161	pelo método da função	
centróide	174	difeomorfismo	138	descritiva.....	111
ciclo limite.....	49	global	138	uniforme.....	93
estável	49	local	138	estado	22
semi-estável	49	dinâmica		de equilíbrio	65
existência de.....	50	interna	127, 129, 185	completa/ acessível	125

linearizado	141	globalmente estável.....	69	para sist. não autónomos....	95
estável.....	45, 113	gradiente.....	51, 133	método das isoclínicas.....	56
no sentido de Lyapunov....	66, 91	grau de amortecimento.....	194	Lyapunov.....	76
nsLy.....	93	grau relativo	127, 131	método da linearização	73
estrutura interna do sistema ...	22	bem definido.....	146	método directo	76, 92, 94
excesso de pólos / zeros	131	indefinido	147	método delta	56
excitação	3	harmónicas	13	método do gradiente variável ..	86
existência de funções de		hipérbole	200	método expedito	71
Lyapunov.....	98	hiperplano	66	mínimo	
exponencialmente estável..	69, 73	hipótese feita por Aizerman ..	100	absoluto.....	183
fase	19	histerese	16, 20, 31	global	183
fase mínima	112	ideal	32	local	183
fuzzy inference systems	174	história do sinal	31	modelo	2
foco estável / instável	46	identificação do processo	184	de Ebers-Moll	18
folga	33, 111	if-then.....	167	de estado	13, 22, 24, 63
forças centrais	199	inferência	168	modelos múltiplos	159
forma quadrática.....	82	instável.....	49, 66, 91, 74, 112	mola	
Frobenius	139	integrador múltiplo.....	122, 142	dura	15, 192
função		interacção entre espécies		linear	15, 192
candidata.....	84	animais	201	macia	15, 192
de activação	177	intersecção	165	momento.....	187
de Lyapunov	63, 76, 79	involutivos	139	momento angular	14
de pertença	161	isoclínicas.....	56, 57, 58	momento de inércia	16
função descritiva.....	109, 111	Jacobiano	96, 134	momento linear	14
folga	111	jactos	54	multivariável	24
liga-desliga	110	lei de Arrhenius.....	203	nabla	51
liga-desl. c/ histerese ..	110	lei de controlo	119	não autónomo	64
saturação s/ histerese ..	111	lei de ohm térmica.....	21	não linear	1
zona morta.....	110	leis de Morgan	167	não linearidades artificiais	5
n. linearid. correntes ..	110	liga/desliga	35	não linearidades duras	1
pertencente a sector....	99, 100	liga-desliga.....	110	não linearidades naturais ...	5, 29
positiva definida	92	com histerese.....	110	não observável.....	127
positiva semidefinida	78	linearização		não unicidade da solução	10
negativa definida.....	78, 92	entrada-estado	123, 141	neurónio.....	177, 178
saturação	30	entrada-saída	146	nó.....	45
seccionalmente contínua....	91	exacta	119	estável	45, 46
sigmoidal	203	exacta por realimentação ..	119	instável.....	45, 46
sinal de ()	35	por realimentação	1	nodo.....	45
radialmente ilimitada	81	linha de atraso	117	norma-S	167
decrecente.....	92	localmente indefinida.....	78	norma-T	166
invertível	123	lógica difusa	159, 164	nsLy.....	66, 93
funcional de custo	183	marginalmente estável	73	número de camadas	181
funções de activação	182	estável nsLy.....	68	número de unidades.....	181
fusão	19	Marquardt-Levenberg	184	número difuso.....	162
fuzificação	168	massa	21	observável.....	185
fuzzy set	160	massa-mola-amortecedor	192	on/off	35
ganho	109	Matlab	115	operador	
gás perfeito	20	matriz Jacobiana.....	70, 72	atraso	25
Gauss-Newton	184	memória	3	triangulares	166
generalização.....	187	método da linearização	74	vectoriais.....	51
generalizar	186			órbita	28, 43
Geometria Diferencial	133			plana.....	43
global/ assintótica/ estável....	85			elíptica	200
				ordem	

do sistema	23	sistema(s)	1, 2	de Bendixon	51, 62
reduzida	127	autónomo	24	de Frobenius, 139, 140	
oscilações	49	causal	4	de Krasovskii	85
oscilador		completa/ linearizado	132	de Krasovskii generalizado	86
de resistência negativa.....	196	contínuo	4, 27	de Poincaré.....	50, 62
de Van der Pol.....	67	de fase mínima	130, 132	de Lyapunov	80
		de fase não mínima.....	130	sistemas não autónomos.....	93
parâmetros da rede.....	183	de parâmetros concentrados	4	de Ly (estabilidade global)	81
parêntesis de Lie	136	de parâmetros distribuídos .	4	de Ly (instabilidade)	82
passo adaptativo	187	determinístico	5	de Poincaré-Bendixon.....	50
pêndulo simples	189	dinâmico	3	do conjunto invariante	
permissa.....	167	discreto	4, 26	global.....	89
plano de estado	43	em regime livre	24	local.....	88
plano de fases	43	em repouso	4	recíproco	98
polarização	179	em tempo real	4	sobre instabilidade	96
polinómio característico	122	económicos	2	termos de ordem superior	70
ponto de equilíbrio...8, 28, 65, 91		estático	3	tiristores	18
estável	28	estável	5	trajectória	28
ponto de sela.....	45	estocástico	5	trajectória estável	28
positiva definida	83	físicos	2	trajectória.....	52, 188
princípio		geológicos	2	parabólica.....	200
da extensão	163	invariante no tempo	4	transformador	17
da representação.....	163	linear massa-mola.....	52	ideal	17
da resolução	163	linear na entrada	141	transistor de junção	18
da sobreposição	1, 5	linear simples	66	treino	
produto		linearizado	1, 70, 71	da rede.....	184, 186
cartesiano	166	linearizável	54	em grupo	186
interno.....	133	matemáticos	2	em linha	186, 187
propulsores	54	misto	2	única variável	24
		na forma companheira.....	122	união.....	165
quadrático	15	não controlável.....	127	unidade de processamento	178
quantificar	2	não forçado	24	uniformemente estável.....	92
		não relaxado	4	universo do discurso,	161
razão de convergência	69	químicos	2		
reactor químico continuamente		relaxado	4	valor inicial do estado	24
agitado	202	saturação	16, 29	valor próprio duplo.....	47
realimentação	1	sem histerese	111	valores próprios	44
de estado.....	128	seguimento da trajectória	126	Van der Pol,	197
realimentação não linear..99, 119		separatriz.....	68	vaporização	19
rectificadores	18	série de Fourier	109	variáveis	
rectro-propagação	184	sinal de entrada	3	separáveis,	119
rede de base radial	180	singular	28, 66	estado	23, 43
rede estática	180	singular difuso.....	163	difusas,	164
redes neuronais	177	singularidade na solução	7	linguísticas,	164
artificiais	159, 177	solução periódica	198	variável	
região de atracção.....	149, 68	sub-harmónicas	13	controlada	120
regime livre	64	sublimação	19	de entrada	2, 23
regular	28, 66	suporte.....	162	de saída	2
relés	18			manipulada,	120
resistência negativa.....	96	tanque cónico	148	vector de estado	23
resistência térmica	21	taxa da competição.....	201	vector de saída	23
ressonância com saltos	195	tempo de escape	7		
retrato de fase	43	tempo discreto	25	zona morta	30
Rumelhart.....	184	teorema		zona morta	110
		da variedade central.....	74		

FICHA TÉCNICA

Título

“Controlo Não Linear”
Copyright © 2003 do autor

Autor



Gustavo Monteiro da Silva
http://ltodi.est.ips.pt/gsilva/GVMSilva/CV_GMS_Out_2001.pdf
e-mail: gsilva@est.ips.pt
gmsilva@netcabo.pt

Edição



Escola Superior de Tecnologia de Setúbal
Campus do IPS
Rua do Vale de Chaves, Estefanilha
2910-761 SETÚBAL – PORTUGAL
Tel: 265 790 000 Fax: 265 721 869
e-mail: rel-ext@est.ips.pt

Capa



FXS, Gestão de Marketing, Lda.
Rua Prof. Mark Athias, 4, 3º Frente
1600-646 LISBOA – PORTUGAL
Tel: 217 524 285
Fax: 217 524 286 / 217 599 327
e-mail: info@fxs.pt

ISBN 972-98624-5-1

Depósito Legal 1

Setúbal, Julho de 2003