

# Also sprach Marc Schaul

Mathe für alle und keinen



## Table des matières

# Un peu de théorie des ensembles

Théorie des ensembles naïve et ZFC

## 1 Une théorie sur des bases frêles

### 1.1 Manipuler des ensembles

Qu'est-ce qu'un ensemble? Tout, et rien à la fois. C'est un objet formel sur lequel on se donne uniquement une chose : la relation d'appartenance,  $\in$ . Comment alors en pratique construire et utiliser des ensembles? On peut penser qu'un ensemble est simplement défini par la donnée d'une propriété, éventuellement en langage naturel :  $x \in A \iff$  Quelque chose est vrai de  $x$ . On verra plus tard que cette approche connaît de graves problèmes qui motiveront une axiomatisation plus rigoureuse de la théorie des ensembles. Mais pour l'instant, elle suffit à explorer quelques notions de base et à introduire du vocabulaire.

#### Définition 1

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. On appelle union de  $A$  et  $B$  l'ensemble  $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ , et intersection de  $A$  et  $B$  l'ensemble  $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ .

#### Définition 2

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. On dit que  $A$  est inclus dans  $B$ , ce qu'on note  $A \subset B$ , quand  $\forall x \in A, x \in B$ .

#### Définition 3

Soit  $A \subset B$ . On appelle complémentaire de  $A$  dans  $B$  l'ensemble  $B \setminus A = \{x \in B | \neg x \in A\}$

Un poil plus compliqué : définir le produit cartésien  $A \times B$ . Pour ce faire, il faut trouver une façon purement ensembliste de définir un couple ordonné (sachant qu'un ensemble n'est justement pas ordonné). Une des solutions possibles :

#### Définition 4 (Couples de Kuratowski)

On note couple  $(x, y)$  l'ensemble  $\{x, \{x, y\}\}$ .

Cette définition permet de préserver l'ordre de la paire :  $(x, y) \neq (y, x)$ .

#### Définition 5

Le produit cartésien de deux ensembles  $A$  et  $B$ , noté  $A \times B$ , est l'ensemble des couples  $(x, y)$  avec  $x \in A$  et  $y \in B$ .

On peut maintenant définir de façon purement ensembliste une relation binaire.

#### Définition 6 (Relation binaire)

Soit  $E$  un ensemble. On appelle relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $(E, F)$  (ou si  $E = F$ , tout simplement sur  $E$ ) un sous ensemble de  $E \times F$ . On dit que le couple  $(x, y)$  de  $E \times F$  vérifie la relation  $\mathcal{R}$ , ce qu'on note  $x\mathcal{R}y$ , quand  $(x, y)$  appartient à cet ensemble  $\mathcal{R}$ .

Intuitivement, une fonction de  $E$  dans  $F$  est un objet qui à tout  $x$  de  $E$  associe un unique  $y$  de  $F$ . On formalise ceci à l'aide d'une relation binaire ayant une certaine propriété.

#### Définition 7

Soit  $\phi$  une relation binaire sur  $(E, F)$ .  $f$  est une application de  $E$  dans  $F$  quand  $\forall (x, y, z) x\phi y \wedge x\phi z \implies y = z$ . On notera à l'avenir  $\phi(x) = y$ . L'unicité de l'image est essentielle pour que cette notation est un sens : si  $\phi(x) = y$  et  $\phi(x) = z$ , alors  $y = z$ .

On définit encore diverses propriétés sur ces relations.

#### Définition 8 (Premières définitions)

Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire de  $E$ . On dit que :

- $\mathcal{R}$  est réflexive si  $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ .
- $\mathcal{R}$  est symétrique si  $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ .
- $\mathcal{R}$  est antisymétrique si  $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$
- $\mathcal{R}$  est transitive si  $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$ .

### Définition 9 (Relation d'équivalence)

On dit qu'une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$  est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive. On la note en général  $\sim$ .

### Définition 10 (Relation d'ordre)

On dit qu'une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$  est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. On note en général  $\leq$  plutôt que  $\mathcal{R}$ .

## 1.2 Familles et applications

On revient maintenant aux applications.

### Définition 11

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

- $f$  est injective (ou est une injection) quand  $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y$ .
- $f$  est surjective (ou est une surjection) quand  $\forall x \in F, \exists y \in E, f(y) = x$ .
- $f$  est bijective (ou est une bijection) quand elle est injective et surjective.

### Définition 12

On dit que deux ensembles sont équipotents si il existe une bijection de l'un dans l'autre.

Cette notion d'équipotence est la "bonne" notion pour définir le cardinal (la "taille") d'un ensemble, comme on le verra plus tard.

### Théorème 1 (Théorème de Cantor-Bernstein)

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Si il existe une injection de  $E$  dans  $F$  et une injection de  $F$  dans  $E$ , alors  $E$  et  $F$  sont équipotents.

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f$  et  $g$  deux injections. Construisons une bijection  $h$ .

### Théorème 2 (Théorème de Cantor)

Soit  $E$  un ensemble.  $E$  et  $\mathcal{P}(E)$  ne sont pas équipotents.

## 1.3 Relation d'ordre et d'équivalence

## 2 Axiomatisation de Zermelo-Frankel (ZFC)

### 2.1 Motivation : un inventaire de paradoxes

### 2.2 Zoom sur l'axiome du choix

## Les Bases

Vocabulaire, notations et premiers raisonnements

## 1 Bases de raisonnement et raisonnement basique

### 1.1 L'alphabet grec

$\alpha$ A alpha	$\iota$ I iota	$\rho$ P rhô
$\beta$ B bêta	$\kappa$ K kappa	$\sigma$ $\Sigma$ sigma
$\gamma$ $\Gamma$ gamma	$\lambda$ $\Lambda$ lambda	$\tau$ T tau
$\delta$ $\Delta$ delta	$\mu$ M mu	$\upsilon$ Y upsilon
$\varepsilon$ E epsilon	$\nu$ N nu	$\phi$ $\Phi$ phi
$\zeta$ Z dzeta	$\xi$ $\Xi$ xi	$\chi$ X khi
$\eta$ H êta	$\omicron$ O omicron	$\psi$ $\Psi$ psi
$\theta$ $\Theta$ thêta	$\pi$ $\Pi$ pi	$\omega$ $\Omega$ oméga

### 1.2 Raisonnement

#### Définition 1 (Proposition)

Une proposition est un énoncé mathématique qui peut prendre la valeur de vérité : vrai ou faux.

#### Exemple 1

$0$  est un nombre pair ; est une proposition dont la valeur logique est vrai.  
 $0 > 1$  ; est une proposition dont la valeur est faux.

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$	$P \iff Q$	$\neg P$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V

## Entiers, principe de récurrence et suites

Encore de la logique et de la théorie des ensembles

## Structures algébriques

Groupes, anneaux, corps, corps de fractions

## Polynômes

Construction et propriétés de  $\mathbb{K}[X]$ , de  $\mathbb{K}[X, Y]$

## Arithmétique

Arithmétique dans  $\mathbb{Z}$  et dans  $\mathbb{K}[X]$

## Limites et continuité

Un peu de topologie ridiculement générale

### Définition 1

Une topologie  $T$  sur un ensemble  $E$  est une partie de  $\mathcal{P}(E)$  telle que :

## Construction de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$

Suites de Cauchy, coupures de Dedekind, théorèmes fondamentaux pour l'analyse

### 1 Motivation et suites de Cauchy

#### 1.1 Pourquoi $\mathbb{R}$ ?

Qu'est ce que l'ensemble des réels ? Intuitivement, c'est l'ensemble des nombres rationnels dont on a "rempli les trous". Mais que sont donc ces trous ? Par exemple, une solution de  $x^2 = 2$  :

Une preuve de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$

On suppose qu'il existe deux entiers  $p, q$  premiers entre eux tels que  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ . Alors  $p^2 = 2q^2$ , donc  $p^2$  est pair. Mais tout entier ayant la même parité que son carré,  $p$  est également pair. Avec  $p = 2k$ , il vient  $4k^2 = 2q^2$ , d'où  $2k^2 = q^2$ , et rebelote :  $q$  est pair. On avait supposé la fraction irréductible, et pourtant  $\text{PGCD}(p, q) \geq 2$ . C'est impossible, donc  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

Comment faire sens alors d'une telle solution ?

Peut être d'une façon approchée : par exemple, en construisant une suite de rationnels dont le carré converge vers 2.

Exercice 1 (Méthode de Héron pour l'approximation de  $\sqrt{2}$ )

On définit par récurrence la suite rationnelle suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. Montrer que  $u_n^2 > 2$ .
2. Montrer (sans utiliser le théorème de la limite monotone, puisqu'il n'est pas valable pour des suites rationnelles) que la suite définie par  $v_0 = 2$  et  $v_{n+1} = \left(\frac{v_n}{2}\right)^2$  tend vers 0.
3. Montrer que  $u_n^2 \rightarrow 2$ , en procédant par majoration de  $u_n^2 - 2$  par  $v_n$ .

Les termes de cette suite sont successivement, en valeur approchée, [...]. Ils semblent être de plus en plus proches les uns des autres. On peut formaliser cette notion.

#### Définition 1

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est de Cauchy quand :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (m \geq N \text{ et } n \geq N) \implies |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Intuitivement, cela veut dire que les termes sont de plus en plus proches deux à deux.

On notera  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  l'ensemble des suites de Cauchy rationnelles.

#### Propriété 1

Toute suite convergente est de Cauchy.

On rappelle que  $u_n \rightarrow l$  quand :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon$$

Soit  $u_n \rightarrow l$  et  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies l - \varepsilon/2 < u_n < l + \varepsilon/2$$

Alors si  $n \geq N$  et  $m \geq N$  :

$$l - \varepsilon/2 < u_n < l + \varepsilon/2$$

$$l - \varepsilon/2 < u_m < l + \varepsilon/2$$

D'où :

$$-\varepsilon < u_n - u_m < \varepsilon$$

Autrement dit,  $|u_n - u_m| < \varepsilon$  et donc  $(u_n)$  est de Cauchy.

On va immédiatement montrer que la réciproque est fautive dans  $\mathbb{Q}$ .

#### Exercice 2

La suite  $(u_n)$  est celle définie précédemment.

1. En se souvenant que  $u_p^2 > 2$ , montrer que  $(u_n)$  décroît.
2. En se souvenant que  $u_n^2 \rightarrow 2$ , déduire que  $\forall p, \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+p} - u_n| = 0$ .
3. En conclure que  $(u_n)$  est de Cauchy.

Vue depuis le monde rationnel, cette suite n'est pourtant pas convergente, puisque  $\sqrt{2}$  est irrationnelle. Ceci nous fournit un contre-exemple à la réciproque de la propriété 1. Pourtant, les termes semblent bien se rapprocher "de quelque chose" : ce quelque chose, c'est le nombre réel  $\sqrt{2}$ , qu'il reste encore à définir.

## 1.2 Quelques propriétés des suites de Cauchy

Avant d'attaquer la construction, on montre ici quelques propriétés qu'il sera utile d'avoir en tête :

### Propriété 2

Toute suite de Cauchy est bornée.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un rang  $N$  tel que si  $n, m \geq N$  alors  $|u_n - u_m| < \varepsilon$ . En particulier,  $|u_N - u_n| < \varepsilon$ , c'est à dire  $u_n \in [u_N - \varepsilon, u_N + \varepsilon]$ . Mais alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \max(\{u_k | k < N\} \cup \{u_N + \varepsilon\})$ , et de même  $u_n \geq \min(\{u_k | k < N\} \cup \{u_N - \varepsilon\})$ . Finalement,  $(u_n)$  est majorée et minorée, donc bornée.

### Propriété 3

- Toute suite de Cauchy  $(u_n)$  ne convergeant pas vers 0 est non nulle à partir d'un certain rang.
- Plus fortement, il existe un rationnel  $a > 0$  et un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N, |u_n| > a$ .
- Supposons l'inverse : pour tout  $N \in \mathbb{N}$  aussi grand soit-il, il existe un  $n \geq N$  tel que  $u_n = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $m > N$  et  $p > N$ ,  $|u_m - u_p| < \varepsilon$ . Soit  $n > N$  avec  $u_n = 0$  : alors  $\forall m \geq N, |u_m - u_n| < \varepsilon$  soit  $|u_m| < \varepsilon$ . D'où  $u_n \rightarrow 0$ .
- Encore une fois, supposons l'inverse :

### Théorème 1 (Analogie au théorème de la limite monotone)

Toute suite rationnelle monotone bornée est de Cauchy.

On fait une démonstration par dichotomie dans le cas croissante et majorée. Soit  $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  croissante et majorée par un rationnel  $M$ . Pour tout  $n$ ,  $u_0 \leq u_n \leq M$ . On pose  $a_0 = u_0$  et  $b_0 = M$ . On va construire par récurrence deux suites :

- Si  $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$  contient une infinité de termes de la suite, alors  $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$  n'en contient aucun. On pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ .
- Sinon,  $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On pose  $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$ .

On a  $|a_n - b_n| = \frac{1}{2^n}$ . De plus, par construction, pour tout  $n$  il existe un rang  $N_n$  à partir duquel tous les termes de la suite sont dans  $[a_n, b_n]$ . Pour tout  $m, p > N_n$  on a donc  $|u_m - u_p| < \frac{1}{2^n}$ . Soit maintenant  $\varepsilon > 0$ . Soit  $n$  le plus petit entier tel que  $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Il existe un rang  $N$  à partir duquel  $|u_m - u_p| < \frac{1}{2^n}$ . Mais par définition,  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . D'où finalement,  $(u_n)$  est de Cauchy.

### Exercice 3

Reprendre la démonstration ci dessus dans le cas décroissante et minorée, et ainsi achever la démonstration du théorème 1.

## 2 Une construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy

### 2.1 Les réels

On rappelle les notions suivantes :

#### Définition 2

Une relation d'équivalence sur  $E$  est une relation binaire  $\sim$  sur  $E$  :

- réflexive ( $\forall x \in E, x \sim x$ ) ;
- transitive ( $(x \sim y \wedge y \sim z) \implies x \sim z$ ) ;
- symétrique ( $x \sim y \iff y \sim x$ )

On appelle classe d'équivalence de  $x$  l'ensemble noté  $[x] = \{y \in E | y \sim x\}$ . Remarquons que si  $x \sim y$ ,  $[x] = [y]$ .

#### Propriété 4

L'ensemble des classes d'équivalence est une partition de  $E$ . On l'appelle ensemble quotient de  $E$  par  $\sim$ , noté  $E/\sim$ .

L'idée est de définir une relation d'équivalence  $R$  sur les suites rationnelles :

$$(a_n)R(b_n) \iff a_n - b_n \rightarrow 0$$

On vérifie bien que c'est une relation d'équivalence :

- $a_n - a_n = 0 \rightarrow 0$ ,
- si  $a_n - b_n \rightarrow 0$ , alors  $b_n - a_n = -(a_n - b_n) \rightarrow -0 = 0$ ,
- si  $a_n - b_n \rightarrow 0$  et  $b_n - c_n \rightarrow 0$ , alors  $a_n - b_n + b_n - c_n = a_n - c_n \rightarrow 0$ .

On peut donc partitionner  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$  : cette partition est  $\mathbb{R}$ . Chaque classe d'équivalence est alors un réel, représenté par toutes les suites rationnelles qui l'approximent.

En identifiant tout rationnel  $q$  à la classe d'équivalence de la suite stationnaire dont tous les termes sont égaux à  $q$ ,  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

## 2.2 Leur structure algébrique

On peut ensuite définir les opérations usuelles sur  $\mathbb{R}$  :

#### Définition 3

1.  $[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$
2.  $[(a_n)] \times [(b_n)] = [(a_n b_n)]$

Il faut ici vérifier que quelque soit la suite rationnelle qu'on a choisi pour représenter un réel, l'addition et la multiplication donnera le même résultat. Autrement dit :

1. Si  $(a_n)R(a'_n)$ ,  $[(a_n + b_n)] = [(a'_n + b_n)]$ .
2. Si  $(a_n)R(a'_n)$ ,  $[(a_n b_n)] = [(a'_n b_n)]$ .

En effet comme attendu :

1.  $a_n - a'_n = (a_n + b_n) - (a'_n + b_n)$ , donc si  $a_n - a'_n \rightarrow 0$ ,  $(a_n + b_n)R(a'_n + b_n)$  soit  $[(a_n + b_n)] = [(a'_n + b_n)]$ .
2. Si  $a_n - a'_n \rightarrow 0$ , comme  $(b_n)$  est de Cauchy donc bornée,  $b_n(a_n - a'_n) \rightarrow 0$ . D'où  $(a_n b_n)R(a'_n b_n)$  soit  $[(a_n b_n)] = [(a'_n b_n)]$ .

On peut montrer que ceci définit une structure de corps. Tout le côté anneau est impliqué de façon assez mécanique par la structure d'anneau de  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ . On montrera simplement la propriété suivante :

#### Propriété 5 (Existence d'un inverse)

Soit un réel  $x = [(x_n)] \neq 0$ . Il existe  $y = [(y_n)]$  tel que  $xy = 1$ .

Comme  $(x_n)$  est une suite de Cauchy ne tendant pas vers 0, il existe un rang  $N$  à partir duquel aucun de ses termes n'est nul.

On définit donc la suite  $(y_n)$  : si  $n \geq N$ ,  $y_n = \frac{1}{x_n}$ , sinon,  $y_n = 42$ . (Ce 42 n'a en fait aucune importance, puisque ce qui nous intéresse est le comportement d' $(y_n)$  à l'infini.)

Montrons que cette suite est bien de Cauchy.

Enfin pour tout  $n \geq N$ ,

On définit de plus une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$  :

#### Définition 4

Soit  $x = [(a_n)] \in \mathbb{R}$ .  $x$  est positif si  $x \neq 0$  et si il existe un rang  $N$  tel que  $\forall n \geq N, a_n > 0$ .

Il faut encore vérifier que cette définition a un sens, c'est à dire que si  $a_n - b_n \rightarrow 0$  et  $(a_n)$  ne tend pas vers 0, si  $(a_n)$  finit par n'avoir que des termes positifs, alors  $(b_n)$  aussi.

Supposons que  $\forall N, \exists n \geq N, b_n \leq 0$ .  $a_n - b_n \rightarrow 0$  c'est à dire  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \implies |a_n - b_n| < \varepsilon$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $\exists N, n \geq N \implies |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ . De plus, comme  $(a_n)$  est de Cauchy,  $\exists N', n, p \geq N' \implies |a_n - a_p| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Enfin,  $\exists m \geq \max(N, N'), b_m \leq 0$ . Mais alors comme  $b_m - \frac{\varepsilon}{2} < a_m < b_m + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\forall n \geq \max(N, N'), |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $b_m - \varepsilon < a_n < b_m + \varepsilon$  d'où  $0 < a_n \leq \varepsilon$ . D'où  $a_n \rightarrow 0$ .

On peut maintenant montrer que  $\mathbb{R}$  est un corps ordonné, dont on rappelle la définition :

#### Définition 5 (Corps ordonné)

Un corps  $(\mathbb{K}, +, \times)$  est dit ordonné quand il existe une partie  $P$  de  $\mathbb{K}$  - les éléments de  $P$  sont dits positifs - telle que :

- Pour tout  $x \in \mathbb{K}$ , soit  $x \in P$ , soit  $x = 0$ , soit  $-x \in P$ .
- Si  $(x, y) \in P^2$ ,  $x + y \in P$  et  $x \times y \in P$ .



### 3 Une autre construction de $\mathbb{R}$

#### 3.1 Les réels, version 2

On peut aussi voir le réel  $\sqrt{2}$  comme la borne supérieure de l'ensemble  $\{x \in \mathbb{Q} | a < 0 \vee x^2 < 2\}$ , ou la borne inférieure de l'ensemble  $\{x \in \mathbb{Q} | a > 0 \wedge x^2 > 2\}$ .

Ces deux ensembles forment ce qu'on appelle une coupure de Dedekind :

##### Définition 6

Soit  $(A, B)$  un couple de parties de  $\mathbb{Q}$ . C'est une coupure de Dedekind quand :

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cup B = \mathbb{Q}$
- Pour tout  $(x, y) \in A \times B, x < y$ .
- $B$  ne possède pas de borne inférieure.

$\mathbb{R}$  est l'ensemble de ces coupures.

On identifie tout rationnel  $q$  à une coupure,  $(\{x \in \mathbb{Q} | x \leq q\}, \{x \in \mathbb{Q} | x > q\})$ . On voit que le quatrième point a pour effet (c'est en fait son seul intérêt) d'exclure les couples  $(\{x \in \mathbb{Q} | x < q\}, \{x \in \mathbb{Q} | x \geq q\})$  de  $\mathbb{R}$ , ce qui permet de bien définir la coupure associée à un rationnel.

Avec cette identification, comme précédemment  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

#### 3.2 Leur structure algébrique

On peut comme précédemment définir addition et multiplication, puis montrer que  $\mathbb{R}$  a une structure de corps ordonné.

##### Définition 7 (Addition)

Soient  $(A, B)$  et  $(A', B')$  deux coupures. On définit l'ensemble  $A + A' = \{x + y | (x, y) \in A \times A'\}$ .

Alors  $(A + A', \mathbb{Q} \setminus A + A')$  est une coupure.

- Évidemment  $A + A' \cap \mathbb{Q} \setminus A + A' = \emptyset$  et  $A + A' \cup \mathbb{Q} \setminus A + A' = \mathbb{Q}$ .
- Soit  $x \in A + A' = a + a'$  et  $y \in \mathbb{Q} \setminus A + A'$ . Évidemment  $x \neq y$ . Supposons  $x > y$ , alors  $a > y - a'$ . Mais alors  $y - a' \in A$ , et donc  $y - a' + a' = y \in A + A'$ . Comme on avait défini  $y \in \mathbb{Q} \setminus A + A'$ , c'est impossible.

##### Définition 8 (Multiplication)

### 4 Les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

On suppose au début de cette partie qu'on a bien le droit de parler de  $\mathbb{R}$  comme d'un "unique objet", qu'il est été construit à partir des coupures de Dedekind ou des suites de Cauchy. À la fin de cette partie, on montrera qu'elles sont effectivement isomorphes, c'est à dire que d'un point de vue structurel, elles sont parfaitement identiques. On prouvera même mieux : toutes les structures possédant certaines propriétés " $\mathbb{R}$ -esques" sont isomorphes. C'est cette unicité à isomorphisme près qui permet à vos camarades un peu moins braves de se passer totalement de la construction de  $\mathbb{R}$  et de l'introduire sur le mode axiomatique.

#### 4.1 La complétude, à partir des suites de Cauchy

On rappelle que la borne supérieure d'une partie d'un ensemble est le plus petit de ses majorants.

##### Propriété 6 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)

Une première conséquence importante :

##### Théorème 2 (Théorème de la limite monotone)

Toute suite bornée et monotone converge.

On considère  $\ell = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ . Soit  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ell - \varepsilon < u_{n_0} \leq \ell$  puisque sinon  $\ell - \varepsilon$  serait un majorant de  $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ , ce qui est impossible. Mais comme  $(u_n)$  est croissante,  $\forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon < u_n < \ell$ . Autrement dit,  $u_n \rightarrow \ell$ .

Une deuxième conséquence importante :

##### Définition 9 (Suites adjacentes)

Deux suites réelles  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites adjacentes si

- L'une est croissante et l'autre décroissante.
- $u_n - v_n$  tend vers 0.

### Théorème 3 (Théorème des suites adjacentes)

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites adjacentes, avec  $(a_n)$  croissante et  $(b_n)$  décroissante.

Commençons par montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons l'inverse. Alors  $\forall p > n, b_p \leq b_n < a_n \leq a_p$  et donc  $\forall p > n, |b_p - a_p| > |a_n - b_n|$ . Mais comme  $|b_p - a_p| \rightarrow 0$ , ceci est absurde.

On sait maintenant que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$ . On peut donc appliquer le théorème de la limite monotone :  $(a_n)$  est croissante et majorée par  $b_0$  et  $(b_n)$  est décroissante et minorée par  $a_0$ . Les deux suites convergent donc vers  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Enfin comme  $a_n - b_n \rightarrow 0$   $\ell_1 - \ell_2 = 0$  donc les deux suites convergent vers la même limite.

On peut enfin montrer que dans  $\mathbb{R}$ , toute suite de Cauchy converge. On a ainsi bien défini tous les "quelque chose" qu'on évoquait en fin de paragraphe 1.1.

### Théorème 4 (Critère de Cauchy ou Cauchy-complétude)

Toute suite réelle de Cauchy converge.

Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy et  $\varepsilon > 0$  :

$$\exists N \in \mathbb{N}, p \geq N \implies |u_N - u_p| < \varepsilon$$

L'idée de cette preuve est d'encadrer les termes de la suite entre deux suites adjacentes.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \inf\{u_k | k \geq n\}$  et  $b_n = \sup\{u_k | k \geq n\}$ .

Comme  $\{u_k | k \geq n+1\} \subset \{u_k | k \geq n\}$ , on a bien  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ .

De plus, soit  $\varepsilon \geq 0$ . Comme  $(u_n)$  est de Cauchy, il existe  $N$  tel quel  $\forall n \geq N, |u_N - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ . On a  $\{u_k | k \geq N\} \subset ]u_N - \frac{\varepsilon}{2}, u_N + \frac{\varepsilon}{2}[$  soit  $b_N - a_N < \varepsilon$ . Mais par croissance/décroissance,  $\forall n \geq N, b_n - a_n \leq b_N - a_N < \varepsilon$ , d'où  $b_n - a_n \rightarrow 0$ .

Cette propriété de  $\mathbb{R}$  est importante et se généralise aux espaces métriques.

### Définition 10 (Suite de Cauchy)

Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ .  $(u_n)$  est de Cauchy quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q > N, d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

Avec la distance usuelle sur les nombres rationnels  $d(a, b) = |a - b|$  on retrouve bien la précédente définition.

### Définition 11 (Espace métrique complet)

Un espace métrique est dit complet quand toute suite de Cauchy y converge.

### Exemple 1

$\mathbb{R}^n$  est complet.

## 4.2 La propriété de la borne supérieure, à partir des coupures de Dedekind

## 4.3 Ces deux constructions sont équivalentes

### Théorème 5 (Existence et unicité de $\mathbb{R}$ )

Il existe un corps totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure, unique à isomorphisme près.

## 4.4 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Cette dernière partie concerne le cardinal de  $\mathbb{R}$ . Dans le chapitre 2, on a établi une théorie général des cardinaux transfinis. On a évoqué l'hypothèse du continu, c'est à dire le problème initialement posé par Cantor sur les cardinaux entre  $\aleph_0$ , cardinal de  $\mathbb{N}$  et  $2^{\aleph_0}$ , cardinal de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

On justifie ici l'appellation "hypothèse du continu" en montrant que  $2^{\aleph_0}$  est le cardinal de  $\mathbb{R}$ .

### Théorème 6

$\mathbb{R}$  est équipotent à  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

### Théorème 7 ( $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable)

La propriété précédente nous permet directement de conclure grâce au théorème de Cantor qu'il n'existe aucune bijection entre  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{R}$ .

## Dérivation

Dérivée, série de Taylor, fonction exponentielle

## Intégration

## Convergence et analyse asymptotique

Convergence de suites et de séries numériques, développements limités et asymptotiques, un peu d'arithmétique

Théorème 1 (Théorème de réarrangement de Riemann)

## Groupe symétrique et déterminant

Polynômes caractéristiques, théorème de Cayley-Hamilton

### 1 Le groupe symétrique

#### Définition 1 (Groupe symétrique (ou groupe des permutations))

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on note l'ensemble fini  $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$ . On note alors  $\mathfrak{S}_n$  ou  $\mathcal{S}_n$  le groupe symétrique (ou groupe des permutations) d'indice  $n$  qui correspond au groupe de toutes les permutations de  $\mathbb{N}_n$ , c'est à dire toutes les bijections de  $\mathbb{N}_n$  sur lui-même.

Une bijection  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}_n$ , c'est à dire une permutation, est une application de  $\mathbb{N}_n$  dans  $\mathbb{N}_n$  représentée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Avec  $\mathbb{N}_n = \{\sigma(k) \mid k \in \mathbb{N}_n\}$ .

#### Exemple 1

Dans  $\mathfrak{S}_3$  une permutation possible serait :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Et alors  $\sigma(1) = 3$ ;  $\sigma(2) = 1$  et  $\sigma(3) = 2$

Les éléments de l'ensemble de départ étant toujours dans l'ordre on se permet parfois d'écrire uniquement  $\sigma = (3 \ 1 \ 2)$  ce qui signifie la même permutation.

#### Propriété 1 (Structure de groupe)

L'ensemble  $\mathfrak{S}_n$  muni de la composition  $\circ$  forme un groupe.

- Loi interne de composition : Soit  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux permutations de  $\mathfrak{S}_n$ , alors  $\sigma' \circ \sigma$  est une bijection de  $\mathbb{N}_n$  dans  $\mathbb{N}_n$  par composé et  $\sigma' \circ \sigma \in \mathfrak{S}_n$ .
- Élément neutre : Il est facile de voir que la fonction identité est un élément neutre, en effet  $\forall k \in \mathbb{N}_n, \text{Id}(k) = k$  et  $\sigma \circ \text{Id}(k) = \sigma(k)$  alors  $\sigma \circ \text{Id} = \sigma$ . Réciproquement  $\forall k \in \mathbb{N}_n, \text{Id}(\sigma(k)) = \sigma(k)$  et  $\text{Id} \circ \sigma = \sigma$ .
- Existence d'un inverse : Simplement pour toute permutation  $\sigma$  on associe  $\sigma^{-1}$  la permutation suivante :  $\forall k \in \mathbb{N}_n, \sigma^{-1}(\sigma(k)) = k$  c'est alors une bijection entièrement définie et  $\sigma^{-1} \circ \sigma = \text{Id}$ . C'est alors la bijection réciproque de  $\sigma$  et  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \text{Id}$ .

#### Propriété 2 (Cardinal de $\mathfrak{S}_n$ )

L'ordre ou le cardinal de  $\mathfrak{S}_n$ , noté  $|\mathfrak{S}_n|$  ou  $\text{Card}(\mathfrak{S}_n)$  vaut  $n!$

En effet une permutation  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}_n$  est entièrement déterminée par le n-uplet  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ , on comprend facilement en commençant par 1, on a  $n$  possibilités différentes pour  $\sigma(1)$ , puis alors  $n-1$  pour  $\sigma(2)$  car il ne peut plus prendre la valeur prise par  $\sigma(1)$ , puis  $n-2$  possibilités pour  $\sigma(3)$  et ainsi de suite. On a donc bien  $n!$  permutation distinctes dans  $\mathfrak{S}_n$ .

### Exemple 2 ( $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ , et $\mathfrak{S}_3$ )

- Pour  $\mathfrak{S}_1$ , comme  $\mathbb{N}_1 = \{1\}$ , la seule permutation possible est  $\sigma(1) = 1$ ,  $\sigma = \text{Id}$  et  $\mathfrak{S}_1 = \{\text{Id}\}$
- Pour  $\mathfrak{S}_2$  on a  $2! = 2$  permutation, trivialement  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Id}$  et  $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Pour  $\mathfrak{S}_3$  on a  $3! = 6$  permutations.  
 $\text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  
 $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On peut alors se demander si le groupe est commutatif avec par exemple un table de groupe;

### Exemple 3 (Table de groupe (ou table de Pythagore ou table de Cayley))

On va le faire avec  $\mathfrak{S}_3$ , pour le remplir on calcul les différents produits, on peut aussi utiliser le fait que tout les éléments doivent apparaître exactement une fois dans chaque ligne ou colonne (comme un sudoku).

Pour les produits de permutation on applique l'une après l'autre.

$$\tau_3 \circ \sigma' = (3 \ 2 \ 1) (2 \ 3 \ 1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 2) = \tau_2, \text{ (il faut s'entraîner)}$$

Il faut faire suffisamment de calcul pour remplir le reste par sudoku, on obtient la table :

$\circ$	Id	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\sigma$	$\sigma'$
Id	Id	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\sigma$	$\sigma'$
$\tau_1$	$\tau_1$	Id	$\sigma$	$\sigma'$	$\tau_2$	$\tau_3$
$\tau_2$	$\tau_2$	$\sigma'$	Id	$\sigma$	$\tau_3$	$\tau_1$
$\tau_3$	$\tau_3$	$\sigma$	$\sigma'$	Id	$\tau_1$	$\tau_2$
$\sigma$	$\sigma$	$\tau_3$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\sigma'$	Id
$\sigma'$	$\sigma'$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_1$	Id	$\sigma$

Ce qui se lit l'élément de la ligne fois celui de la colonne. On voit que la table n'est pas symétrique par rapport à la diagonale donc le groupe n'est commutatif.

### Définition 2 (Orbite par permutation)

On appelle orbite de  $p \in \mathbb{N}_n$  d'une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  l'ensemble  $\{\sigma^k(p) \mid k \in \mathbb{N}\}$

## 2 Cycles et transpositions

### Définition 3 (Cycle)

Dans  $\mathfrak{S}_n$  avec  $n \geq 2$ , pour  $p \geq 2$ ,  $p \in \mathbb{N}_n$  on dit que  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est un cycle de longueur  $p$  s'il existe  $p$  éléments  $a_1, a_2, \dots, a_p$  distincts de  $\mathbb{N}_n$  tel que :  $\sigma(a_1) = a_2$ ,  $\sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{p-1}) = a_p$  et  $\sigma(a_p) = a_1$ . Et que pour tout élément  $b$  de  $\mathbb{N}_n \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ ,  $\sigma(b) = b$ , on dit que  $b$  est invariant par  $\sigma$ . L'ensemble  $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$  est appelé support du cycle  $\sigma$ , généralement on écrit ce cycle  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ .

Dans  $\mathfrak{S}_n$ , on appelle permutation circulaire un cycle de longueur  $n$ ; c'est-à-dire de support  $\mathbb{N}_n$ .

Dans  $\mathfrak{S}_1$ , la seule permutation est l'identité, on peut la considérer comme un cycle à un seul élément.

### Exemple 4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ est le cycle } (1 \ 5 \ 2 \ 6 \ 4)$$

### Définition 4

On dit que deux cycles  $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  et  $\sigma' = (b_1, b_2, \dots, b_q) \in \mathfrak{S}_n$  ont des supports disjoints si  $\{a_1, a_2, \dots, a_p\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_q\} = \emptyset$

### Propriété 3 (Sur les cycles)

- l'inverse du cycle  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$  vaut  $(a_p \ a_{p-1} \ \dots \ a_1)$
- Soit  $\sigma$  un cycle de longueur  $p$  alors  $\sigma^p = \text{Id}$ , on a fait un tour du cycle. On en déduit que pour un entier relatif  $m = pq + r$ ,  $\sigma^m = \sigma^r$ .
- Deux cycles à support disjoint commutent

#### Propriété 4 (Orbite d'un cycle)

Un cycle est entièrement défini par l'orbite d'un élément de son support.

Soit  $p \in \mathbb{N}_n$  un élément du support de  $\sigma$  un cycle de longueur  $n$  alors  $\sigma = (p \ \sigma(p) \ \sigma^2(p) \ \dots \ \sigma^{n-1}(p))$  Soit  $p \in \mathbb{N}_n$  un élément dans le support de  $\sigma$  et de  $\sigma'$  tel que  $\{\sigma^k(p) \mid k \in \mathbb{N}\} = \{\sigma'^k(p) \mid k \in \mathbb{N}\}$  alors  $\sigma = \sigma'$

#### Définition 5 (Transposition)

Dans  $\mathfrak{S}_n$  avec  $n \geq 2$ , on dit que la permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est une transposition si c'est un cycle de longueur 2, c'est à dire qu'il existe  $i, j \in \mathbb{N}_n$  distinct tel que  $\sigma(i) = j$  et  $\sigma(j) = i$  et que  $\forall k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i, j\}, \sigma(k) = k$ .  
On note souvent cette transposition  $(i \ j)$  ou  $(j \ i)$  ou encore  $\tau_{i,j}$ .

#### Propriété 5 (Sur les transposition)

- Comme on peut le voir avec la notation  $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$ , on a aussi facilement  $\tau_{i,j}^2 = \text{Id}$  et donc  $\tau_{i,j} = \tau_{i,j}^{-1}$ .
- Pour avoir une transposition dans  $\mathfrak{S}_n$ , on prend deux éléments distincts de  $\mathbb{N}_n$  c'est à dire  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  transpositions possibles.
- Soit  $\begin{pmatrix} j & i \\ a & b \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} a & b \\ j & i \end{pmatrix}$  deux transpositions,  $\begin{pmatrix} j & i \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ j & i \end{pmatrix} = \text{Id}$

#### Exercice 1

On appelle centre de  $\mathfrak{S}_n$  l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{S}_n$  qui commutent avec tous les autres. Déterminer pour  $n \geq 3$  le centre de  $\mathfrak{S}_n$

#### Théorème 1 (Décomposition de permutations en produit de cycle)

Toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  (avec  $n \geq 1$ ) se décompose en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Existence par récurrence :  $\mathcal{H}_n$  : Toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  (avec  $n \geq 1$ ) se décompose en un produit de cycles à supports deux à deux disjoints.

Pour  $n = 1$ , la seule permutation est l'identité, c'est le cycle à 1 élément

Soit  $n$  tel que  $\forall k \in \mathbb{N}_n, \mathcal{H}_k$ . Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ , on pose  $A = \{\sigma^k(1) \mid k \in \mathbb{N}\}$  le support de 1 par  $\sigma$  et  $B = \mathbb{N}_{n+1} \setminus A$ .

$A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}_{n+1}$ , il est donc de cardinal fini. Donc il existe une infinité d'entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\exists k' \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \sigma^{k'}(1) = \sigma^k(1)$ . Comme tout sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément, on peut poser  $p$  le plus petit entier vérifiant  $\exists p' \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \sigma^{p'}(1) = \sigma^p(1)$ . On montre alors que  $\sigma^p(1) = 1$ , en effet si  $p' \geq 1, \sigma \circ \sigma^{p'-1}(1) = \sigma \circ \sigma^{p-1}(1)$  et par injectivité  $\sigma^{p'-1}(1) = \sigma^{p-1}(1)$  ce qui contredit le caractère minimal de  $p$ . On se retrouve finalement avec  $A = \{\sigma^k(1) \mid k \in \mathbb{N}_{p-1}\}$ , on pose  $c = (1, \sigma(1), \sigma^2(1), \dots, \sigma^{p-1}(1))$ , et donc  $\forall x \in A, c(x) = \sigma(x)$ . Alors si  $A = \mathbb{N}_{n+1}$ , c'est à dire  $\text{Card}(A) = n+1$ ,  $c$  est un cycle donc on a  $\mathcal{H}_{n+1}$ . Sinon on a  $1 \leq \text{Card}(B = \mathbb{N}_{n+1} \setminus A) \leq n$  car 1 est forcément dans  $A$ , et  $B$  invariant par  $c$ . On considère  $\sigma'$  la restriction de  $\sigma$  à  $B$ ,  $\sigma' \in \mathfrak{S}_k$  avec  $k \in \mathbb{N}_n$  car  $\sigma'$  est injective comme restriction d'une application injective et  $\sigma'(B) \subset B$ ,  $k$  représente le cardinal de  $B$  et par hypothèse de récurrence  $\sigma'$  se décompose en produit de cycle à support disjoint notons les  $c_2, \dots, c_i$ . Finalement  $\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \dots \circ c_i$  et  $\mathcal{H}_{n+1}$ .

Unicité : Soit deux décompositions en cycles à supports disjoints de  $\sigma$ ,  $c_1 \circ c_2 \circ \dots \circ c_i$  et  $c'_1 \circ c'_2 \circ \dots \circ c'_p$ . Quitte à changer la numérotation des cycles on peut supposer que 1 est dans le support de  $c_1$  et de  $c'_1$ , alors  $\forall k \in \mathbb{N}, c_1^k(1) = \sigma^k(1) = c'^k_1(1)$  et par propriété  $c_1 = c'_1$ . On montre de manière analogue en prenant un élément commun au support de  $c_2$  et  $c'_2$  (quitte à changer la numérotation) et au final la décomposition est unique.

#### Théorème 2 (Décomposition de cycle en produit de transposition)

Tout cycle se décompose en produit de transposition, il en découle que toutes permutations (Sauf Id dans un ensemble à 1 élément mais sans intérêt), se décomposent en produit de transposition.

Soit  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$  un cycle, alors il se décompose par produit de transpositions  $(a_1 \ a_2)(a_2 \ a_3)(a_3 \ a_4) \dots (a_{n-1} \ a_n)$

## 2.1 Signature d'une permutation

### Définition 6 (Inversion)

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , et  $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ , on dit que ce couple est une inversion si  $i < j$  et  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . On note  $N(\sigma)$  le nombre d'inversion de  $\sigma$ .

### Définition 7 (Signature d'un permutation)

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , en notant  $N(\sigma)$  le nombre d'inversion de  $\sigma$ . On appelle signature (souvent noté  $\varepsilon$ ) l'application

$$\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}, \sigma \mapsto (-1)^{N(\sigma)}$$

On peut le voir alors aussi en développant la définition de l'inversion que  $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \text{sgn}(\sigma(j) - \sigma(i))$

### Propriété 6 (Signature d'une transpositions)

La signature d'une transposition vaut  $-1$

Soit une transposition  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $\sigma = (i \ j)$ , quitte à retourner la transposition on suppose  $i < j$  alors  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-i & j & j+1 & \dots \\ n & & & & & & & & & \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-i & i & j+1 & \dots \\ n & & & & & & & & & \end{pmatrix}$

Les inversions liées à  $j$  sont les  $(i, j), (i+1, j), \dots, (j-1, j)$ , celle avec  $i$  sont les  $(i, j), (i, i+1), (i, i+2) \dots (i, j-1)$  On remarque tout simplement qu'il y a le même nombre d'inversions avec  $j$  qu'avec  $i$ , on appelle  $p$  ce nombre, alors le nombre  $N(\sigma) = 2p - 1$ , car on ne doit pas compter l'inversion  $(i, j)$  deux fois. Alors  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)} = (-1)^{2p-1} = (-1)$

### Théorème 3 (Morphisme signature)

L'application signature réalise un morphisme du groupe  $(\mathfrak{S}_n, \circ)$  dans  $(\{-1, 1\}, \times)$

### Propriété 7 (Signature d'un cycle)

Soit  $\sigma$  un cycle de longueur  $p \geq 2$ , alors  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$

D'après la définition d'un cycle,  $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$ , on connaît une décomposition de  $\sigma = (a_1 \ a_2)(a_2 \ a_3)(a_3 \ a_4) \dots (a_{p-1} \ a_p)$ , c'est à dire un produit de  $p - 1$  transposition,  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$

### Théorème 4 (Développement d'un déterminant)

Blabla

Pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $n \geq 2$  de terme général  $a_{ij}$  de déterminant  $\Delta = \det A$ , on donne les définitions suivantes :

### Définition 8 (Mineur d'une matrice A)

On appelle mineur  $(i, j)$  de  $A$  ou mineur de  $a_{ij}$  dans  $A$  le déterminant souvent noté  $\Delta_{ij}$  ou  $(\det A)_{ij}$  qui correspond au déterminant de  $A$  où l'on a supprimé la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

### Définition 9 (Cofacteur d'une matrice A)

On appelle cofacteur  $(i, j)$  de  $A$  ou cofacteur de  $a_{ij}$  dans  $A$ , souvent noté  $\gamma_{ij}$  le scalaire  $\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$  avec  $\Delta_{ij}$  la mineur  $(i, j)$  de  $A$ .



### Définition 10 (Comatrice d'une matrice $A$ )

La comatrice de  $A$ , noté  $\text{Com}(A)$  est la matrice des cofacteurs de  $A$ , c'est à dire la matrice de terme générale  $\gamma_{ij}$ .

### Propriété 8 (Caractérisation suivant les lignes ou les colonnes d'un cofacteur)

(Rarement utilisé en pratique mais utile pour certaine démonstration), Soit  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , en désignant par  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  le système des vecteurs colonnes de  $A$  et par  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$  le système des vecteurs lignes de  $A$  on a  $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$  le cofacteur :

$$\gamma_{ij} = \det_e(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n) = \det_e(L_1, \dots, L_{j-1}, e_j, L_{j+1}, \dots, L_n)$$

On part de  $D_C = \det_e(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n)$  pour montrer l'égalité.

$$D_C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & 0 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & 0 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & 0 & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & 0 & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & 0 & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

On effectue un premier cycle sur les colonnes  $(C_n \ C_{n-1} \ \cdots \ C_{j+1} \ C_j)$  de longueur  $n - j + 1$  donc de signature  $(-1)^{n-j}$ .

Puis un deuxième sur les lignes  $(L_n \ L_{n-1} \ \cdots \ L_{i+1} \ L_i)$  de longueur  $n - i + 1$  donc de signature  $(-1)^{n-i}$ , la signature totale vaut  $(-1)^{n-j+n-i} = (-1)^{-(j+i)} = (-1)^{j+i}$  On se retrouve alors avec  $e_i$  en position  $(n, n)$  et des zéros sur le reste de  $C_n$  et  $L_n$  alors

$$D_C = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} & 0 \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} D'_C$$

Avec  $D'_C$  le nouveau déterminant on calcul  $D'_C = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{p=1}^n a_{\sigma(p), p}$

Or vu la  $n$ -ième ligne ou colonne  $a_{\sigma(n), n} = 0$  si  $\sigma(n) \neq n$  et  $a_{\sigma(n), n} = 1$  si  $\sigma(n) = n$ .

### Propriété 8 (Suite)

Or il existe une bijection de  $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = n\}$  dans  $\mathfrak{S}_{n-1}$  :

$$\varphi : \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = n\} \rightarrow \mathfrak{S}_{n-1}$$

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \mathbb{N}_{n-1} \rightarrow \mathbb{N}_{n-1} \\ i \mapsto \sigma(i) \end{pmatrix}$$

Alors pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  tel que  $\sigma(n) = n$  il existe la permutation  $\varphi(\sigma) \in \mathfrak{S}_{n-1}$  de décomposition en produit de cycles à support disjoint identique à  $\sigma$ , alors  $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\varphi(\sigma))$ . De plus pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$  on peut associer la permutation  $\varphi^{-1}(\sigma) \in \mathfrak{S}_n$  en posant pour  $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ ,  $\varphi^{-1}(\sigma(k)) = \sigma(k)$  et  $\varphi^{-1}(\sigma(n)) = n$ , et  $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\varphi^{-1}(\sigma))$ .

$$D'_C = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{p=1}^{n-1} a_{\sigma(p), p}$$

### Théorème 5 (Développement suivant une ligne ou une colonne)

Toujours pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $n \geq 2$  de terme général  $a_{ij}$  de déterminant  $\Delta = \det A$ , en utilisant les notations des définitions précédentes :

Pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ , on dit que l'on développe le déterminant suivant la  $i$ -ème ligne

$$\text{avec } \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} a_{ij}.$$

Et pour tout  $j \in \mathbb{N}_n$ , on dit que l'on développe le déterminant suivant la  $j$ -ème

$$\text{colonne avec } \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} a_{ij}.$$

Suivant une ligne  $i$ ; soit  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

$$\det A = \det_e(L_1, \dots, L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, \dots, L_n) \text{ avec } L_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \text{ donc}$$

$$\det A = \det_e(L_1, \dots, L_{i-1}, \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, L_{i+1}, \dots, L_n) \text{ et par } n\text{-linéarité } \det A =$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \det_e(L_1, \dots, L_{i-1}, e_j, L_{i+1}, \dots, L_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_{ij}.$$