

## Construction de $\mathbb{R}$

Suites de Cauchy, coupures de Dedekind, théorèmes fondamentaux pour l'analyse

### 0.1 Motivation et suites de Cauchy

#### 0.1.1 Pourquoi $\mathbb{R}$ ?

Qu'est ce que l'ensemble des réels ? Intuitivement, c'est l'ensemble des nombres rationnels dont on a "rempli les trous". Mais que sont donc ces trous ? Par exemple, une solution de  $x^2 = 2$  :

Une preuve de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$

On suppose qu'il existe deux entiers  $p, q$  premiers entre eux tels que  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ .

Alors  $p^2 = 2q^2$ , donc  $p^2$  est pair. Mais tout entier ayant la même parité que son carré,  $p$  est également pair. Avec  $p = 2k$ , il vient  $4k^2 = 2q^2$ , d'où  $2k^2 = q^2$ , et rebelote :  $q$  est pair.

On avait supposé la fraction irréductible, et pourtant  $\text{PGCD}(p, q) \geq 2$ .... C'est impossible, donc  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

Comment faire sens alors d'une telle solution ?

Peut être d'une façon approchée : par exemple, en construisant une suite de rationnels dont le carré converge vers 2.

Exercice 1 (Méthode de Héron pour l'approximation de  $\sqrt{2}$ )

Help