

Formalisme et raisonnement

Un peu de théorie des ensembles

1 Une théorie sur des bases frêles

1.1 Manipuler des ensembles

Qu'est-ce qu'un ensemble ? Tout, et rien à la fois. C'est un objet formel sur lequel on se donne uniquement une chose : la relation d'appartenance, \in . Comment alors en pratique construire et utiliser des ensembles ? On peut penser qu'un ensemble est simplement défini par la donnée d'une propriété, éventuellement en langage naturel : $x \in A \iff$ Quelque chose est vrai de x . On verra plus tard que cette approche connaît de graves problèmes qui motiveront une axiomatisation plus rigoureuse de la théorie des ensembles. Mais pour l'instant, elle suffit à explorer quelques notions de base et à introduire du vocabulaire.

Définition 1

Soient A et B deux ensembles. On appelle union de A et B l'ensemble $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$, et intersection de A et B l'ensemble $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

Définition 2

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B , ce qu'on note $A \subset B$, quand $\forall x \in A, x \in B$.

Définition 3

Soit $A \subset B$. On appelle complémentaire de A dans B l'ensemble $B \setminus A = \{x \in B | \neg x \in A\}$

Un poil plus compliqué : définir le produit cartésien $A \times B$, c'est à dire l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$. Pour ce faire, il faut trouver une façon purement ensembliste de définir un couple ordonné (sachant qu'un ensemble n'est justement pas ordonné). Une des solutions possibles :

Définition 4 (Couples de Kuratowski)

On note couple (x, y) l'ensemble $\{x, \{x, y\}\}$.

Cette définition permet de préserver l'ordre de la paire : $(x, y) \neq (y, x)$. On peut maintenant définir de façon purement ensembliste une relation binaire

Définition 5 (Relation binaire)

Soit E un ensemble. On appelle relation binaire \mathcal{R} sur (E, F) (ou si $E = F$, tout simplement sur E) un sous ensemble de $E \times F$. On dit que le couple (x, y) de $E \times E$ vérifie la relation \mathcal{R} , noté $x\mathcal{R}y$ si et seulement si (x, y) appartient à cet ensemble \mathcal{R} .

Intuitivement, une fonction de E dans F est un objet qui à tout x de E associe un unique y de F . On formalise ceci à l'aide d'une relation binaire.

Définition 6

Soit ϕ une relation binaire sur (E, F) . f est une application quand $\forall (x, y, z) x\phi y \wedge x\phi z \implies y = z$. On notera à l'avenir $\phi(x) = y$.

Toutes les relations binaires ne sont pas des applications. Une application doit associer à tout élément une image unique.

On définit encore diverses propriétés sur ces relations.

Définition 7 (Premières définitions)

Soit \mathcal{R} une relation binaire de E . On dit que :

- \mathcal{R} est réflexive si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- \mathcal{R} est symétrique si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.
- \mathcal{R} est antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$
- \mathcal{R} est transitive si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Définition 8 (Relation d'équivalence)

On dit qu'une relation binaire \mathcal{R} sur E est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive. On la note en général \sim .

Définition 9 (Relation d'ordre)

On dit qu'une relation binaire \mathcal{R} sur E est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. On note en général \leq plutôt que \mathcal{R} .

1.2 Familles et applications

1.3 Relation d'ordre et d'équivalence

2 Axiomatisation de Zermelo-Frankel (ZFC)

2.1 Motivation : un inventaire de paradoxes

2.2 Zoom sur l'axiome du choix