# Construction de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$

Suites de Cauchy, coupures de Dedekind, théorèmes fondamentaux pour l'analyse

## 1 Motivation et suites de Cauchy

### 1.1 Pourquoi $\mathbb{R}$ ?

Qu'est ce que l'ensemble des réels ? Intuitivement, c'est l'ensemble des nombres rationnels dont on a "rempli les trous". Mais que sont donc ces trous ? Par exemple, une solution de $x^2 = 2$ :

**Une preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$**

On suppose qu'il existe deux entiers $p, q$ premiers entre eux tels que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.
Alors $p^2 = 2q^2$, donc $p^2$ est pair. Mais tout entier ayant la même parité que son carré, $p$ est également pair. Avec $p = 2k$, il vient $4k^2 = 2q^2$, d'où $2k^2 = q^2$, et rebelote : $q$ est pair.
On avait supposé la fraction irréductible, et pourtant $\text{PGCD}(p,q) \geq 2$.... C'est impossible, donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Comment faire sens alors d'une telle solution ?
Peut être d'une façon approchée : par exemple, en construisant une suite de rationnels dont le carré converge vers 2.

**Exercice 1 (Méthode de Héron pour l'approximation de $\sqrt{2}$)**

On définit par récurrence la suite rationnelle suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}) \end{cases}$$

1. Montrer que $u_n^2 > 2$.
2. Montrer (sans utiliser le théorème de la limite monotone, puisqu'il n'est pas valable pour des suites rationelles) que la suite définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = (\frac{v_n}{2})^2$ tend vers 0.
3. Montrer que $u_n^2 \to 2$, en procédant par majoration de $u_n^2 - 2$ par $v_n$.

Les termes de cette suite sont successivement, en valeur approchée, [...]. Ils semblent être de plus en plus proches les uns des autres. On peut formaliser cette notion.

**Définition 1**

On dit qu'une suite $(u_n)$ est de Cauchy quand :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (m \geq N \text{ et } n \geq N) \implies |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Intuitivement, cela veut dire que les termes sont de plus en plus proches deux à deux.
On notera $\mathcal{C}_\mathbb{Q}$ l'ensemble des suites de Cauchy rationnelles.

**Propriété 1**

Toute suite convergente est de Cauchy.

On rappelle que $u_n \to l$ quand :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon$$

Soit $u_n \to l$ et $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies l - \varepsilon/2 < u_n < l + \varepsilon/2$$

Alors si $n \geq N$et $m \geq N$ :

$$l - \varepsilon/2 < u_n < l + \varepsilon/2$$

$$l - \varepsilon/2 < u_m < l + \varepsilon/2$$

D'où :

$$-\varepsilon < u_n - u_m < \varepsilon$$

Autrement dit, $|u_n - u_m| < \varepsilon$ et donc $(u_n)$ est de Cauchy.

On va immédiatemment montrer que la réciproque est fausse dans $\mathbb{Q}$.

**Exercice 2**

La suite $(u_n)$ est celle définie précédemment.
1. En se souvenant que $u_n^2 > 2$, montrer que $(u_n)$ décroit.
2. En se souvenant que $u_n^2 \to 2$, déduire que $\forall p, \lim\limits_{n \to +\infty} |u_{n+p} - u_n| = 0$.
3. En conclure que $(u_n)$ est de Cauchy.

Vue depuis le monde rationnel, cette suite n'est pourtant pas convergente, puisque $\sqrt{2}$ est irrationelle. Ceci nous fournit un contre-exemple à la réciproque de la propriété 1. Pourtant, les termes semblent bien se rapprocher "de quelque chose" : ce quelque chose, c'est le nombre réel $\sqrt{2}$, qu'il reste encore à définir.

### 1.2 Quelques propriétés des suites de Cauchy

Avant d'attaquer la construction, on montre ici quelques propriétés qu'il sera utile d'avoir en tête :

**Propriété 2**

Toute suite de Cauchy est bornée.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N$ tel que si $n, m \geq N$ alors $|u_n - u_m| < \epsilon$. En particulier, $|u_N - u_n| < \varepsilon$, c'est à dire $u_n \in [u_N - \varepsilon, u_N + \varepsilon]$. Mais alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \max(\{u_k | k < N\} \cup \{u_N + \varepsilon\})$, et de même $u_n \geq \min(\{u_k | k < N\} \cup \{u_N - \varepsilon\})$. Finalement, $(u_n)$ est majorée et minorée, donc bornée.

**Propriété 3**

— Toute suite de Cauchy $(u_n)$ ne convergeant pas vers 0 est non nulle à partir d'un certain rang.
— Plus fortement, il existe un rationnel $a > 0$ et un rang $N$ tel que pour tout $n \geq N, |u_n| > a$.

— Supposons l'inverse : pour tout $N \in \mathbb{N}$ aussi grand soit-il, il existe un $n \geq N$ tel que $u_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m > N$ et $p > N$, $|u_m - u_p| < \varepsilon$. Soit $n > N$ avec $u_n = 0$ : alors $\forall m \geq N$, $|u_m - u_n| < \varepsilon$ soit $|u_m| < \varepsilon$. D'où $u_n \to 0$.
— Encore une fois, supposons l'inverse :

**Théorème 1 (Analogue au théorème de la limite monotone)**

Toute suite rationnelle monotone bornée est de Cauchy.

On fait une démonstration par dichotomie dans le cas croissante et majorée.
Soit $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ croissante et majorée par un rationnel $M$. Pour tout $n$, $u_0 \leq u_n \leq M$. On pose $a_0 = u_0$ et $b_0 = M$.
On va construire par récurrence deux suites :
— Si $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ contient une infinité de termes de la suite, alors $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ n'en contient aucun. On pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.
— Sinon, $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
On a $|a_n - b_n| = \frac{1}{2^n}$.
De plus, par construction, pour tout $n$ il existe un rang $N_n$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $[a_n, b_n]$. Pour tout $m, p > N_n$ on a donc $|u_m - u_p| < \frac{1}{2^n}$.
Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Soit $n$ le plus petit entier tel que $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Il existe un rang $N$ à partir duquel $|u_m - u_p| < \frac{1}{2^n}$. Mais par définition, $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. D'où finalement, $(u_n)$ est de Cauchy.

**Exercice 3**

Reprendre la démonstration ci dessus dans le cas décroissante et minorée, et ainsi achever la démonstration du théorème 1.

## 2 Une construction de $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy

### 2.1 Les réels

On rappelle les notions suivantes :

**Définition 2**

Une relation d'équivalence sur E est une relation binaire $\sim$ sur E :
— réfléxive ($\forall x \in E, x \sim x$) ;
— transitive ($(x \sim y \wedge y \sim z) \implies x \sim z$) ;
— symétrique ($x \sim y \iff y \sim x$)
On appelle classe d'équivalence de $x$ l'ensemble noté $[x] = \{y \in E | y \sim x\}$. Remarquons que si $x \sim y$, $[x] = [y]$.

Propriété 4

L'ensemble des classes d'équivalence est une partition de E. On l'appelle ensemble quotient de $E$ par $\sim$, noté $E/\sim$.

L'idée est de définir une relation d'équivalence $R$ sur les suites rationnelles :

$$(a_n)R(b_n) \iff a_n - b_n \to 0$$

On vérifie bien que c'est une relation d'équivalence :

— $a_n - a_n = 0 \to 0$,
— si $a_n - b_n \to 0$, alors $b_n - a_n = -(a_n - b_n) \to -0 = 0$,
— si $a_n - b_n \to 0$ et $b_n - c_n \to 0$, alors $a_n - b_n + b_n - c_n = a_n - c_n \to 0$.

On peut donc partitionner $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ : cette partition est $\mathbb{R}$. Chaque classe d'équivalence est alors un réel, représenté par toutes les suites rationnelles qui l'approximent.
En identifiant tout rationnel $q$ à la classe d'équivalence de la suite stationnaire dont tous les termes sont égaux à $q$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

## 2.2 Leur structure algébrique

On peut ensuite définir les opérations usuelles sur $\mathbb{R}$ :

Définition 3

1. $[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$
2. $[(a_n)] \times [(b_n)] = [(a_n b_n)]$

Il faut ici vérifier que quelque soit la suite rationelle qu'on a choisi pour représenter un réel, l'addition et la multiplication donnera le même résultat. Autrement dit :

1. Si $(a_n)R(a'_n)$, $[(a_n + b_n)] = [(a'_n + b_n)]$.
2. Si $(a_n)R(a'_n)$, $[(a_n b_n)] = [(a'_n b_n)]$.

En effet comme attendu :

1. $a_n - a'_n = (a_n + b_n) - (a'_n + b_n)$, donc si $a_n - a'_n \to 0$, $(a_n + b_n)R(a'_n + b_n)$ soit $[(a_n + b_n)] = [(a'_n + b_n)]$.
2. Si $a_n - a'_n \to 0$, comme $(b_n)$ est de Cauchy donc bornée, $b_n(a_n - a'_n) \to 0$. D'où $(a_n b_n)R(a'_n b_n)$ soit $[(a_n b_n)] = [(a'_n b_n)]$.

On peut montrer que ceci définit une structure de corps. Tout le côté anneau est impliqué de façon assez mécanique par la structure d'anneau de $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$. On montrera simplement la propriété suivante :

Propriété 5 (Existence d'un inverse)

Soit un réel $x = [(x_n)] \neq 0$. Il existe $y = [(y_n)]$ tel que $xy = 1$.

Comme $(x_n)$ est une suite de Cauchy ne tendant pas vers 0, il existe un rang $N$ à partir duquel aucun de ses termes n'est nul.
On définit donc la suite $(y_n)$ : si $n \geq N$, $y_n = \frac{1}{x_n}$, sinon, $y_n = 42$. (Ce 42 n'a en fait aucune importance, puisque ce qui nous intéresse est le comportement d'$(y_n)$ à l'infini.)
Montrons que cette suite est bien de Cauchy.
Enfin pour tout $n \geq N$,

On définit de plus une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ :

Définition 4

Soit $x = [(a_n)] \in \mathbb{R}$. $x$ est positif si $x \neq 0$ et si il existe un rang $N$ tel que $\forall n \geq N, a_n > 0$.

Il faut encore vérifier que cette définition a un sens, c'est à dire que si $a_n - b_n \to 0$ et $(a_n)$ ne tend pas vers 0, si $(a_n)$ finit par n'avoir que des termes positifs, alors $(b_n)$ aussi.
Supposons que $\forall N, \exists n \geq N, b_n \leq 0$. $a_n - b_n \to 0$ c'est à dire $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \implies |a_n - b_n| < \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N, n \geq N \implies |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, comme $(a_n)$ est de Cauchy, $\exists N', n, p \geq N' \implies |a_n - a_p| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Enfin, $\exists m \geq \max(N, N'), b_m \leq 0$. Mais alors comme $b_m - \frac{\varepsilon}{2} < a_m < b_m + \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq \max(N, N'), |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, $b_m - \varepsilon < a_n < b_m + \varepsilon$ d'où $0 < a_n \leq \varepsilon$. D'où $a_n \to 0$.

On peut maintenant montrer que $\mathbb{R}$ est un corps ordonné, dont on rappelle la définition :

Définition 5 (Corps ordonné)

Un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ est dit ordonné quand il existe une partie $P$ de $\mathbb{K}$ - les éléments de $P$ sont dits positifs - telle que :

— Pour tout $x \in \mathbb{K}$, soit $x \in P$, soit $x = 0$, soit $-x \in P$.
— Si $(x, y) \in P^2$, $x + y \in P$ et $x \times y \in P$.

## 3 Une autre construction de $\mathbb{R}$

### 3.1 Les réels, version 2

On peut aussi voir le réel $\sqrt{2}$ comme la borne supérieure de l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} | a < 0 \vee x^2 < 2\}$, ou la borne inférieure de l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} | a > 0 \wedge x^2 > 2\}$.
Ces deux ensembles forment ce qu'on appelle une coupure de Dedekind :

**Définition 6**

Soit $(A, B)$ un couple de parties de $\mathbb{Q}$. C'est une coupure de Dedekind quand :
- $A \cap B = \varnothing$
- $A \cup B = \mathbb{Q}$
- Pour tout $(x, y) \in A \times B, x < y$.
- B ne possède pas de borne inférieure.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble de ces coupures.
On identifie tout rationnel $q$ à une coupure, $(\{x \in \mathbb{Q} | x \leq q\}, \{x \in \mathbb{Q} | x > q\})$. On voit que le quatrième point a pour effet (c'est en fait son seul intérêt) d'exclure les couples $(\{x \in \mathbb{Q} | x < q\}, \{x \in \mathbb{Q} | x \geq q\})$ de $\mathbb{R}$, ce qui permet de bien définir la coupure associée à un rationnel.
Avec cette identification, comme précédemment $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

### 3.2 Leur structure algébrique

On peut comme précédemment définir addition et multiplication, puis montrer que $\mathbb{R}$ a une structure de corps ordonné.

**Définition 7 (Addition)**

Soient $(A, B)$ et $(A', B')$ deux coupures. On définit l'ensemble $A + A' = \{x + y | (x, y) \in A \times A'\}$.
Alors $(A + A', \mathbb{Q} \backslash A + A')$ est une coupure.

- Évidemmentpu $A + A' \cap \mathbb{Q} \backslash A + A' = \varnothing$ et $A + A' \cup \mathbb{Q} \backslash A + A' = \mathbb{Q}$.
- Soit $x \in A + A' = a + a'$ et $y \in \mathbb{Q} \backslash A + A'$. Évidemment $x \neq y$. Supposons $x > y$, alors $a > y - a'$. Mais alors $y - a' \in A$, et donc $y - a' + a' = y \in A + A'$. Comme on avait défini $y \in \mathbb{Q} \backslash A + A'$, c'est impossible.

**Définition 8 (Multiplication)**

## 4 Les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

On suppose au début de cette partie qu'on a bien le droit de parler de $\mathbb{R}$ comme d'un "unique objet", qu'il est été construit à partir des coupures de Dedekind ou des suites de Cauchy. À la fin de cette partie, on montrera qu'elles sont effectivement isomorphes, c'est à dire que d'un point de vue structurel, elles sont parfaitement identiques. On prouvera même mieux : toutes les structures possédant certaines propriétés "$\mathbb{R}$-esques" sont isomorphes. C'est cette unicité à isomorphisme près qui permet à vos camarades un peu moins braves de se passer totalement de la construction de $\mathbb{R}$ et de l'introduire sur le mode axiomatique.

### 4.1 La complétude, à partir des suites de Cauchy

On rappelle que la borne supérieure d'une partie d'un ensemble est le plus petit de ses majorants.

**Propriété 6 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)**

Une première conséquence importante :

**Théorème 2 (Théorème de la limite monotone)**

Toute suite bornée et monotone converge.

On considère $\ell = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\forall \varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ell - \varepsilon < u_{n_0} \leq \ell$ puisque sinon $\ell - \varepsilon$ serait un majorant de $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$, ce qui est impossible. Mais comme $(u_n)$ est croissante, $\forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon < u_n < \ell$. Autrement dit, $u_n \to \ell$.

Une deuxième conséquence importante :

**Définition 9 (Suites adjacentes)**

Deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ sont dites adjacentes si
- L'une est croissante et l'autre décroissante.
- $u_n - v_n$ tend vers 0.

**Théorème 3 (Théorème des suites adjacentes)**

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites adjacentes, avec $(a_n)$ croissante et $(b_n)$ décroissante.
Commençons par montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'inverse. Alors $\forall p > n, b_p \leq b_n < a_n \leq a_p$ et donc $\forall p > n, |b_p - a_p| > |a_n - b_n|$. Mais comme $|b_p - a_p| \to 0$, ceci est absurde.
On sait maintenant que $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$. On peut donc appliquer le théorème de la limite monotone : $(a_n)$ est croissante et majorée par $b_0$ et $(b_n)$ est décroissante et minorée par $a_0$. Les deux suites convergent donc vers $\ell_1$ et $\ell_2$.
Enfin comme $a_n - b_n \to 0$ $\ell_1 - \ell_2 = 0$ donc les deux suites convergent vers la même limite.

On peut enfin montrer que dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge. On a ainsi bien défini tous les "quelque chose" qu'on évoquait en fin de paragraphe 1.1.

**Théorème 4 (Critère de Cauchy ou Cauchy-complétude)**

Toute suite réelle de Cauchy converge.

Soit $(u_n)$ une suite de Cauchy et $\varepsilon > 0$ :

$$\exists N \in \mathbb{N}, p \geq N \implies |u_N - u_p| < \varepsilon$$

L'idée de cette preuve est d'encadrer les termes de la suite entre deux suites adjacentes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \inf\{u_k | k \geq N\}$ et $b_n = \sup\{u_k | k \geq n\}$.
Comme $\{u_k | k \geq n+1\} \subset \{u_k | k \geq n\}$, on a bien $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
De plus, soit $\varepsilon \geq 0$ Comme $(u_n)$ est de Cauchy, il existe $N$ tel quel $\forall n \geq N, |u_N - u_n| < \frac{\epsilon}{2}$. On a $\{u_k | k \geq N\} \subset ]u_N - \frac{\varepsilon}{2}, u_N + \frac{\varepsilon}{2}[$ soit $b_N - a_N < \varepsilon$. Mais par croissance/décroissance, $\forall n \geq N, b_n - a_n \leq b_N - a_N < \varepsilon$, d'où $b_n - a_n \to 0$.

Cette propriété de $\mathbb{R}$ est importante et se généralise aux espaces métriques.

**Définition 10 (Suite de Cauchy)**

Soit $(E, d)$ un espace métrique et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. $(u_n)$ est de Cauchy quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q > N, d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

Avec la distance usuelle sur les nombres rationnels $d(a, b) = |a - b|$ on retrouve bien la précédente définition.

**Définition 11 (Espace métrique complet)**

Un espace métrique est dit complet quand toute suite de Cauchy y converge.

**Exemple 1**

$\mathbb{R}^n$ est complet.

### 4.2 La propriété de la borne supérieure, à partir des coupures de Dedekind

### 4.3 Ces deux constructions sont équivalentes

**Théorème 5 (Existence et unicité de $\mathbb{R}$)**

Il existe un corps totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure, unique à isomorphisme près.

### 4.4 $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Cette dernière partie concerne le cardinal de $\mathbb{R}$. Dans le chapitre 2, on a établi une théorie général des cardinaux transfinis. On a évoqué l'hypothèse du continu, c'est à dire le problème initialement posé par Cantor sur les cardinaux entre $\aleph_0$, cardinal de $\mathbb{N}$ et $2^{\aleph_0}$, cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
On justifie ici l'appelation "hypothèse du continu" en montrant que $2^{\aleph_0}$ est le cardinal de $\mathbb{R}$.

**Théorème 6**

$\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(N)$.

**Théorème 7 ($\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable)**

La propriété précédente nous permet directement de conclure grâce au théorème de Cantor qu'il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.