Formalisme et raisonnement

Un peu de théorie des ensembles

1 Une théorie sur des bases frêles

1.1 Manipuler des ensembles

Qu'est-ce qu'un ensemble ? Tout, et rien à la fois. C'est un objet formel sur lequel on se donne uniquement une chose : la relation d'appartenance, $\in$. Comment alors en pratique construire et utiliser des ensembles ? On peut penser qu'un ensemble est simplement défini par la donnée d'une propriété, éventuellement en langage naturel : $x \in A \iff$ Quelque chose est vrai de x. On verra plus tard que cette approche connaît de graves problèmes qui motiveront une axiomatisation plus rigoureuse de la théorie des ensembles. Mais pour l'instant, elle suffit à explorer quelques notions de base et à introduire du vocabulaire.

Définition 1

Soient A et B deux ensembles. On appelle union de A et B l'ensemble $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$, et intersection de A et B l'ensemble $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

Définition 2

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B, ce qu'on note $A \subset B$, quand $\forall x \in A, x \in B$.

Définition 3

Soit $A \subset B$. On appelle complémentaire de A dans B l'ensemble $B \backslash A = \{x \in B | \neg x \in A\}$

Un poil plus compliqué : définir le produit cartésien $A \times B$, c'est à dire l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$. Pour ce faire, il faut trouver une façon purement ensembliste de définir un couple ordonné (sachant qu'un ensemble n'est justement pas ordonné). Une des solutions possibles :

Définition 4 (Couples de Kuratowski)

On note couple (x, y) l'ensemble $\{x, \{x, y\}\}$.

Cette définition permet de préserver l'ordre de la paire : $(x, y) \neq (y, x)$. On peut maintenant définir de façon purement ensembliste une relation binaire

Définition 5 (Relation binaire)

Soit E un ensemble. On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur (E, F) (ou si $E = F$, tout simplement sur E) un sous ensemble de $E \times F$. On dit que le couple (x, y) de $E \times E$ vérifie la relation $\mathcal{R}$, ce qu'on note $x\mathcal{R}y$ quand (x, y) appartient à cet ensemble $\mathcal{R}$.

Intuitivement, une fonction de E dans F est un objet qui à tout x de E associe un unique y de F. On formalise ceci à l'aide d'une relation binaire.

Définition 6

Soit ϕ une relation binaire sur (E, F). f est une application quand $\forall(x, y, z) x\phi y \wedge x\phi z \implies y = z$. On notera à l'avenir $\phi(x) = y$.

Toutes les relations binaires ne sont pas des applications. Une application doit associer à tout élément une image unique.
On définit encore diverses propriétés sur ces relations.

Définition 7 (Premières définitions)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de E. On dit que :
- $\mathcal{R}$ est réflexive si $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ est symétrique si $\forall(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique si $\forall(x, y) \in E^2$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \implies x = y$
- $\mathcal{R}$ est transitive si $\forall(x, y, z) \in E^3$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Définition 8 (Relation d'équivalence)

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive. On la note en général $\sim$.

Définition 9 (Relation d'ordre)

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. On note en général $\leq$ plutôt que $\mathcal{R}$.

1.2 Familles et applications

1.3 Relation d'ordre et d'équivalence

2 Axiomatisation de Zermelo-Frankel (ZFC)

2.1 Motivation : un inventaire de paradoxes

2.2 Zoom sur l'axiome du choix