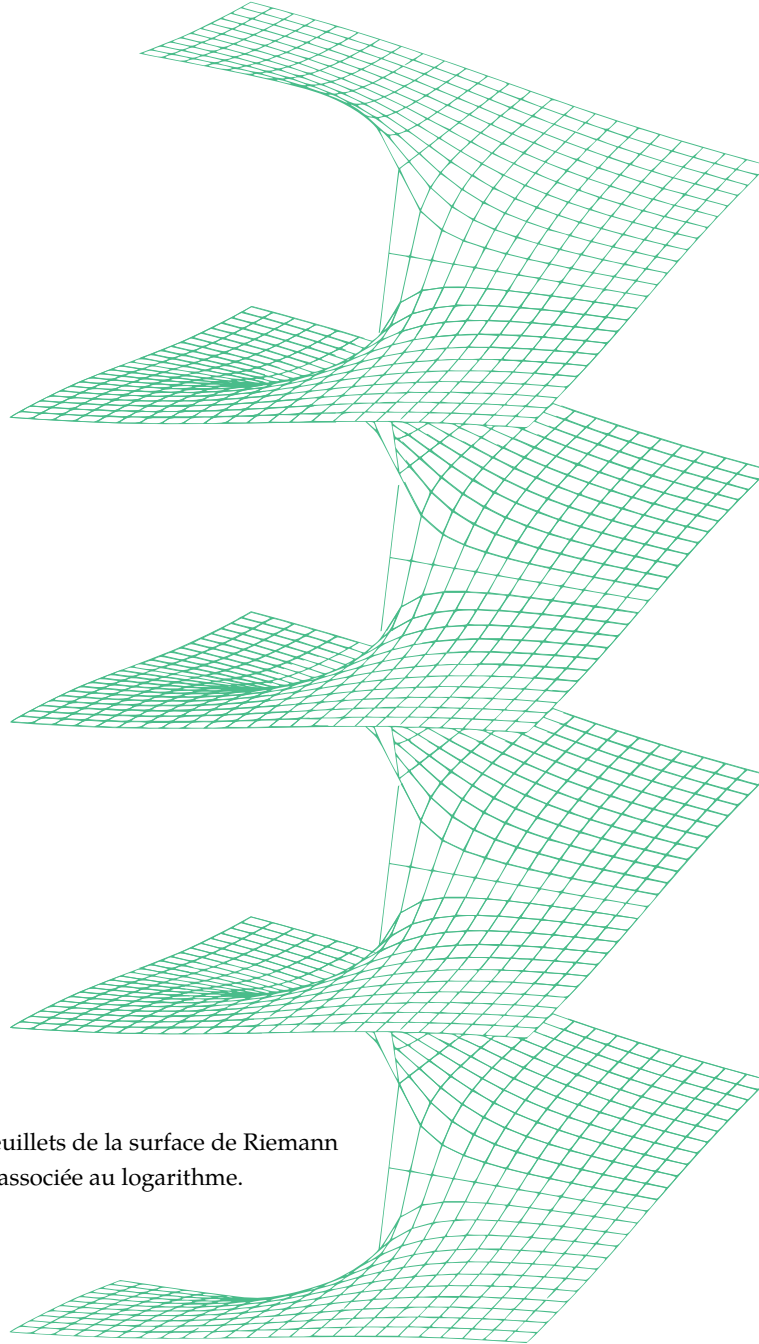


Monodromie

Variations sur un thème



Quatre feuillets de la surface de Riemann
associée au logarithme.

Constance SARRAZIN
sous la direction de Dragoș FRĂȚILĂ

mémoire de maîtrise 2023/2024

Introduction

Le but principal de ce mémoire est de comprendre la notion de *monodromie* et d'en donner des exemples convaincants.

Dans un premier temps, on étudie la structure des solutions à une équation différentielle à coefficients holomorphes sur un ouvert de \mathbb{C} . Les outils importants sont l'existence locale de solutions holomorphes (Cauchy-Lipschitz) et le prolongement analytique de ces solutions suivant un chemin.

On comprend rapidement qu'il existe des obstructions de nature topologique à l'existence de solutions globales. L'exemple le plus familier est le logarithme, dont le prolongement analytique le long d'un chemin autour de l'origine ne coïncide pas avec la solution originelle. C'est la première apparition de la monodromie; un chemin induit une transformation sur les solutions, qui peut être non triviale.

La donnée de l'espace des solutions sur tout voisinage forme un faisceau d'espaces vectoriels. D'après Cauchy-Lipschitz, ce faisceau est localement constant, et donc l'espace des germes (solutions locales) forme un certain revêtement de notre ouvert. On obtient donc une image du prolongement analytique des solutions comme le relèvement d'un chemin sur cette espace des germes. Ceci permet de montrer que le résultat du prolongement analytique selon deux chemins homotopes est identique, ce qui implique l'existence de solutions globales sur les ouverts simplement connexes.

On se tourne donc vers la topologie algébrique pour comprendre le lien entre groupe fondamental (chemins à homotopie près) et revêtements. En construisant le revêtement universel, on montre une première équivalence de catégories entre représentations du groupe fondamental (la monodromie) et faisceaux localement constants d'espaces vectoriels. Finalement, on montre une équivalence de catégories entre systèmes locaux (nos faisceaux de solutions) et connections (équations différentielles). Combiné avec l'équivalence précédente, cela montre donc qu'il est toujours possible de trouver une équation différentielle ayant une monodromie prescrite, à isomorphisme près. C'est le cas le plus simple du vingt-et-unième problème de Hilbert.

Dans un second temps, après quelques généralités sur les surfaces de Riemann, qui sont apparues à la partie précédente comme l'espace formé par les germes, on étudie la monodromie d'une équation bien particulière, l'équation de Picard-Fuchs, qui est d'origine géométrique.

On considère en effet une courbe elliptique, c'est à dire (la version projective d') une courbe complexe de la forme $E_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$. Pour que cette courbe soit non-singulière, il faut $\lambda \neq 0, 1$. D'après la formule de Riemann-Hurwitz, cette courbe se trouve être topologiquement un tore, mais sa structure en tant que surface de Riemann varie avec λ . Par uniformisation, on sait que ce tore est biholomorphe à $\mathbb{C}/a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$; les a et b qui conviennent sont en fait les solutions d'une équation différentielle en λ , l'équation de Picard-Fuchs. La monodromie de cette équation nous dit donc comment varie la famille des E_λ au voisinage des deux points singuliers de la famille (0 et 1).

Table des matières

1	Monodromie des équations différentielles holomorphes	1
1.1	Généralités sur les équations différentielles dans \mathbb{C}	1
1.1.1	Théorème de Cauchy-Lipschitz, version locale	1
1.1.2	Prolongement analytique des solutions	4
1.2	Faisceaux et revêtements	7
1.2.1	Premières définitions et prolongement analytique revisité	7
1.2.2	Faisceaux localement constants et revêtements	11
1.3	Groupe fondamental et classification des revêtements	14
1.3.1	Le groupe fondamental et l'action de monodromie	14
1.3.2	Quelques groupes fondamentaux	16
1.3.3	Correspondance galoisienne	18
1.3.4	Revêtement universel et classification des revêtements	21
1.4	Connections et correspondance de Riemann-Hilbert	24
2	Un exemple géométrique : l'équation de Picard-Fuchs	27
2.1	Surfaces de Riemann	27
2.1.1	Généralités	27
2.1.2	Formule de Riemann-Hurwitz	30
2.1.3	Uniformisation	33
2.2	Uniformisation des courbes elliptiques	33
2.2.1	Périodes	34
2.2.2	Monodromie des périodes en 0 et 1	34
A	Catégories et foncteurs	35
A.1	Premières définitions	35
A.2	Constructions universelles	37
A.3	Foncteurs	39
B	(Co)homologie(s)	40
B.1	Algèbre homologique	40
B.2	Homologie singulière	40
B.3	Homologie simpliciale	40
B.4	Cohomologie de De Rham	40

1 Monodromie des équations différentielles holomorphes

La référence principale pour cette section est [Sza09].

1.1 Généralités sur les équations différentielles dans \mathbb{C}

1.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz, version locale

Définition 1.1 (ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE HOLOMORPHE)

Une équation différentielle ordinaire linéaire à coefficients holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ (ci-dessous simplement équation différentielle) est une équation de la forme

$$X' = AX \quad (1)$$

où $A \in \text{Mat}_n(\mathcal{O}(U))$ est une matrice, dont les coefficients sont des fonctions $a_{ij} : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes sur U .

Les solutions à (1), sur un ouvert $W \subset U$, sont notées

$$\mathcal{S}_A(W) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(W)^n \mid \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right\}$$

Remarque. Pour tout W , $\mathcal{S}_A(W)$ est naturellement muni d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel.

Exemple (ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE SCALAIRE D'ORDRE n)

Le cas familier des équations différentielles scalaires d'ordre n , c'est à dire les équations de la forme

$$f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n f = 0 \quad (2)$$

peut être retrouvé : chercher une solution à (2) équivaut à chercher une solution à (1) pour

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

En effet les $n - 1$ premières lignes assurent que les solutions sont de la forme

$$X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f^{(2)} \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

tandis que la dernière donne l'équation originale.

Exemple (LE LOGARITHME COMPLEXE)

Considérons le problème de Cauchy sur \mathbb{C}^*

$$\begin{cases} f'' + \frac{1}{z}f' = 0 \\ f(1) = 0 \\ f'(1) = 1 \end{cases}$$

Cela équivaut à demander que f soit la primitive de $\frac{1}{z}$ s'annulant en 1 : la première ligne sur réécrit en $(zf')' = 0$, d'où $f' = \frac{C}{z}$, et d'après la dernière ligne $C = 1$. Sur \mathbb{R}_+^* , la solution est donnée par le logarithme naturel. Sur \mathbb{C}^* , il n'existe pas de solution globale, mais il existe une solution sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ou $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Exemple (LA FONCTION $z \mapsto z^\alpha$)

Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Considérons le problème de Cauchy sur \mathbb{C}^* :

$$\begin{cases} f' - \frac{\alpha}{z}f = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Sur \mathbb{R}_+^* , la solution est donnée par la fonction $x \mapsto \sqrt[q]{x^p} = \exp(\alpha \ln x)$. Sur \mathbb{C}^* , il n'existe pas de solution globale, mais sur tout ouvert où il existe une détermination du logarithme, la même formule donne une solution.

Il existe un analogue dans \mathbb{C} du théorème de Cauchy-Lipschitz vu dans le cadre réel.

Théorème 1.1 (CAUCHY-LIPSCHITZ)

Considérons l'équation différentielle sur $U \subset \mathbb{C}$ donnée par $X' = AX$.

Soit $z_0 \in U$. Il existe un ouvert $\tilde{U} \subset U$ contenant z_0 tel que pour toute "condition initiale" $X_0 \in \mathbb{C}^n$, il existe une unique solution $X \in (\mathcal{O}(\tilde{U}))^n$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(z_0) = X_0 \end{cases}$$

Autrement dit, on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_A(\tilde{U}) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n \\ X &\mapsto X(z_0) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit R tel que $\mathcal{B}(z_0, R) \subset U$. On pose $\tilde{U} = \mathcal{B}(z_0, R)$.

Unicité. Soit $X \in \mathcal{S}_A(\tilde{U})$.

Les coefficients de A étant holomorphes, on peut les développer en série entière en z_0 pour obtenir la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(z - z_0)^k$$

où $(A_k) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. De même on peut développer les composantes de X pour trouver une série

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k(z - z_0)^k$$

L'équation $X' = AX$ devient une égalité de séries formelles

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} kX_k(z-z_0)^{k-1} &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i(z-z_0)^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} X_j(z-z_0)^j \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^l A_{l-m} X_m \right) (z-z_0)^l\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on trouve

$$(k+1)X_{k+1} = \sum_{m=0}^k A_{k-m} X_m$$

Cela donne une relation de récurrence du premier ordre pour la suite (X_k) . Or $X_0 = X(z_0)$, et donc X est entièrement déterminée par sa valeur en z_0 .

Existence. Il suffit de montrer que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k(z-z_0)^k$$

a un rayon de convergence au moins égal à R , avec $X_0 = X(z_0)$ et $(X_k)_{k \geq 1}$ défini par les relations de récurrence précédentes : il est automatique que cette série est une solution "formelle" de l'équation $X' = AX$.

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|A_k\|_1 \leq a_k$$

Supposons qu'il existe $r \in]0, R]$ telle que la série suivante converge sur $\mathcal{B}(z_0, r) \subset \tilde{U}$:

$$a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

Comme toute série entière, a a une primitive holomorphe sur $\mathcal{B}(z_0, r)$ s'annulant en z_0 , F . Posons

$$x(z) = \|X(z_0)\|_1 \exp(nF(z))$$

Elle est aussi holomorphe sur $\mathcal{B}(z_0, r)$; de plus elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$x'(z) = na(z)x(z)$$

À ce titre, en la développant en série entière

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(z-z_0)^k$$

on trouve par la même méthode que précédemment la relation de récurrence

$$x_{k+1} = \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^k a_{k-l} x_l$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\|X_k\|_1 \leq x_k$$

Par définition $x_0 = x(z_0) = \|X_0\|_1$. De plus

$$\begin{aligned}
\|X_{k+1}\| &= \frac{1}{k+1} \left\| \sum_{\ell=0}^k A_{k-\ell} X_\ell \right\| \\
&\leq \frac{1}{k+1} \sum_{\ell=0}^k \|A_{k-\ell} X_\ell\| \\
&\leq \frac{n}{k+1} \sum_{\ell=0}^k \|A_{k-\ell}\| \|X_\ell\| \\
&\leq \frac{n}{k+1} \sum_{\ell=0}^k a_{k-\ell} x_\ell \\
&= x_{k+1}
\end{aligned}$$

Donc les coefficients de X sont majorés par ceux de x , qui converge sur $\mathcal{B}(z_0, r)$. Il reste à trouver une bonne suite (a_k) pour tout r : d'après l'inégalité de Cauchy, en posant $M = \sup_{\|z-z_0\| < r} \|A(z)\|_1$, la suite $\left(\frac{M}{r^p}\right)$ convient, ce qui conclut la preuve. \square

Remarque. La méthode de cette preuve, plus élémentaire que son homologue réel, est initialement due à Cauchy pour démontrer le théorème de Cauchy-Kovalevskaja sur l'existence et l'unicité de solutions aux équations différentielles partielles à coefficients analytiques.

1.1.2 Prolongement analytique des solutions

Le théorème de Cauchy-Lipschitz tel que précédemment énoncé donne une information sur l'existence de solutions locales, mais la démonstration donne plus fort : l'existence de solutions sur des disques aussi grands que l'on veut inclus dans l'ouvert U . On a en fait démontré l'existence et l'unicité de solutions globales sur les disques ! Il est donc naturel de chercher à étendre ce résultat à d'autres ouverts.

La stratégie générale est de recoller des solutions sur les disques pour arriver à des ouverts aussi grands que possible. C'est le principe du prolongement analytique. **Préciser (1)**

Lemme 1.2 (UNICITÉ DES PROLONGEMENTS ANALYTIQUES)

Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ connexe. Si il existe un ouvert $W \subset U$ tel que $f|_W = g|_W$, alors $f = g$ sur tout U .

Démonstration. Tout $z \in W$ est un zéro de $f - g$, ce ne sont donc pas des zéros isolés. Donc $f - g$ est identiquement nulle sur U . \square

Pour construire des prolongements analytiques de façon relativement systématique, on va prolonger les fonctions holomorphes selon des chemins qui quittent U . Pour cela, il est utile de clarifier ce qu'on entend par fonction holomorphe définie au voisinage d'un point.

Dans la suite, on indiquera toujours les domaines de définition des fonctions de la façon suivante : (f, U) désigne une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, où U est un ouvert connexe.

Définition 1.2 (GERME)

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit la relation d'équivalence suivante sur les fonctions holomorphes en z : $(f, U) \sim_z (g, V)$ quand f et g coïncident au voisinage de z_0 . Autrement dit, il existe un voisinage W de z tel que $W \subset U, W \subset V$ et $f|_W \equiv g|_W$.

On appelle germes les classes d'équivalence de \sim_z . Étant donné un représentant (f, U) , on notera $[f]_z$ sa classe d'équivalence, appelée germe de f en z .

Remarque. En fait, une germe en z est la donnée d'une série entière centrée en z de rayon de convergence non nul.

Définition 1.3 (PROLONGEMENT ANALYTIQUE SELON UN CHEMIN)

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin continu et f une fonction holomorphe définie sur un voisinage U de $\gamma(0)$. Supposons que pour tout $t \in [0, 1]$, il existe une fonction holomorphe (f_t, U_t) telle que :

- $\gamma_t \in U_t$;
- $(f, U) \sim_{\gamma_0} (f_0, U_0)$;
- Il existe $\varepsilon(t) > 0$ tel que

$$|s - t| < \varepsilon(t) \implies \gamma(s) \in U_t \text{ et } f_t \sim_{\gamma(s)} f_s$$

Pour quelques lignes, on appelle $((f_t, U_t))_t$ un prolongement analytique de f selon γ .

Proposition 1.3

Le prolongement analytique est bien défini : étant donné un chemin continu γ et une germe $[f]_{\gamma(0)}$, deux prolongements analytiques $((f_t, U_t))$ et $((g_t, V_t))$ donnent des résultats égaux au voisinage de γ :

$$\forall t \in [0, 1], f_t \sim_{\gamma(t)} g_t$$

Dans la suite, on appellera donc *le* prolongement analytique de f selon γ la donnée des germes $([f_t]_{\gamma(t)})_t$ qui viennent d'un tel processus : quand elles existent, elles sont uniquement déterminées.

Démonstration. On va montrer que l'ensemble

$$E = \{t \in [0, 1] \mid f_t \sim_{\gamma(t)} g_t\}$$

est un ouvert fermé de $[0, 1]$: comme $0 \in E$ et $[0, 1]$ connexe, $E = [0, 1]$.

E est ouvert. Soit $t \in E$. Par définition, il existe ϵ tel que

$$|s - t| < \epsilon \implies \gamma(s) \in U_t \cap V_t \text{ et } \begin{cases} f_s \sim_{\gamma(s)} f_t \\ g_s \sim_{\gamma(s)} g_t \end{cases}$$

Comme $t \in E$, $f_t \sim_{\gamma(t)} g_t$. Par lemme d'unicité des prolongements analytiques, cela implique $f_t \equiv g_t$ sur tout $U_t \cap V_t$. En particulier, on a $f_t \sim_{\gamma(s)} g_t$, et par transitivité $s \in E$.

E est fermé. Soit t un point d'accumulation de E . Montrons $t \in E$. Soit à nouveau $\epsilon > 0$ tel que les relations précédentes soient vérifiées en t . Comme t est un point d'accumulation de E , il existe une suite $s_n \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $|s_n - t| < \epsilon$ et $s_n \rightarrow t$. Passer à la limite dans les relations écrites en s_n donne $t \in E$ par continuité de γ . \square

Exemple (RETOUR AU LOGARITHME)

Considérons le logarithme complexe Log défini au voisinage de 1 par son développement en série entière. Le prolongement analytique selon le lacet circulaire $\gamma : t \mapsto e^{2\pi it}$ est possible, mais le résultat à l'arrivée ne coïncide pas avec le départ : à une germe solution f , on a associé la germe $f + 2i\pi$.

Autrement dit, étant donné l'équation

$$f'' + \frac{1}{z}f' = 0$$

dont une base de solutions locale est donnée par $(\text{Log}, 1)$, le prolongement analytique par γ donne un automorphisme de l'espace des solutions, donné par la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2i\pi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cet exemple montre que le prolongement analytique selon des chemins ne permet pas, en général, d'obtenir une fonction analytique bien définie. Mais avec une hypothèse topologique en plus, on s'en sort.

Définition 1.4 (HOMOTOPIE)

Soit X un espace topologique. Soient γ_0 et γ_1 deux chemins de a vers b inclus dans X . On dit qu'ils sont homotopes quand il existe une application continue $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

- Pour tout t , $F(0, t) = \gamma_0(t)$ et $F(1, t) = \gamma_1(t)$.
- $F(\alpha, -)$ soit un chemin γ_α allant de a vers b .

On note $\gamma_0 \simeq \gamma_1$.

Définition 1.5

On dit qu'un espace connexe X est simplement connexe quand tous chemins inclus dans X ayant mêmes extrémités sont homotopes.

Les ouverts simplement connexes sont exactement les ouverts dans lesquels on peut faire facilement de l'analyse complexe. À titre indicatif, on a les équivalences suivantes :

Proposition 1.4 (CARACTÉRISATION DES OUVERTS SIMPLEMENT CONNEXES)

Les énoncés suivants sont équivalents :

- $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe ;
- Pour tout $z_0 \notin U$, l'indice de z_0 selon tout lacet contenu dans U est nul ;
- L'intégrale de toute fonction holomorphe sur U selon un lacet contenu dans U est nulle ;
- Toute fonction holomorphe sur U admet une primitive ;
- U est homéomorphe à un disque (ouvert) ;
- $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ est connexe.
- Pour tout f holomorphe sur U , il existe g holomorphe tel que $\exp g = f$, et en particulier il existe une détermination du logarithme sur U .
- Pour tout f holomorphe sur U , il existe g holomorphe tel que $g^2 = f$, et en particulier il existe une détermination de la racine carrée sur U .

Démonstration. Voir [Con78], théorème VIII.2.2. □

Exemple

- Un convexe est simplement connexe.
- Plus généralement, une partie étoilée est simplement connexe.
- \mathbb{C}^* n'est pas simplement connexe.

On va montrer que la seule situation où des problèmes comme l'exemple du logarithme peuvent apparaître est le prolongement analytique selon deux chemins non homotopes.

Théorème 1.5 (MONODROMIE)

Soit γ_0 et γ_1 deux chemins homotopes de a vers b , via

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ (\alpha, t) \mapsto \gamma_\alpha(t)$$

Soit f holomorphe au voisinage de a .

Supposons que le prolongement analytique de f soit possible selon tout γ_α . Alors ces deux prolongements donnent la même germe en b .

Démonstration. On admet temporairement ce résultat : la suite permettra d'en donner une preuve courte en donnant un autre point de vue sur le prolongement analytique. Une preuve élémentaire serait cependant à notre portée à ce stade, voir par exemple [Con78] (théorème IX.3.6). \square

Corollaire 1.6 (CAUCHY-LIPSCHITZ, DEUXIÈME VERSION)

Soit U simplement connexe. Soit f une fonction holomorphe définie au voisinage de $a \in U$. Si le prolongement analytique de f est possible selon tout chemin inclus dans U , alors il existe un unique prolongement analytique de f sur tout U .

Corollaire 1.7 (CAUCHY-LIPSCHITZ, DEUXIÈME VERSION)

Considérons l'équation différentielle sur $U \subset \mathbb{C}$ donnée par $X' = AX$.

Si U est simplement connexe, on a un isomorphisme

$$\mathcal{S}_A(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n \\ X \mapsto X(z_0)$$

Démonstration. En effet le prolongement analytique est possible selon tout chemin de U : d'après Cauchy-Lipschitz, on peut prendre comme ouverts U_t les disques de centre $\gamma(t)$ et de rayon maximal inclus dans U . De plus par prolongement des identités, le prolongement analytique d'une solution reste une solution. Le théorème de monodromie conclut. \square

Préciser (2)

1.2 Faisceaux et revêtements

1.2.1 Premières définitions et prolongement analytique revisité

Commençons par des définitions générales avant de se ramener aux équations différentielles holomorphes ; en chemin, on obtiendra une image géométrique pour le prolongement analytique, et on démontrera le

théorème de monodromie.

Définition 1.6 (PRÉFAISCEAU)

Soit X un espace topologique. Un préfaisceau d'ensembles \mathcal{F} est un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts de X à Set ; autrement dit :

- à tout ouvert U on associe un ensemble $\mathcal{F}(U)$,
- à chaque inclusion $U \subset V$ on associe une application $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$, de telle sorte que $\rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W$ et $\rho_U^U = \text{Id}_U$.

Un préfaisceau peut aussi être à valeurs dans une catégorie \mathcal{C} quelconque : $\mathcal{F}(U)$ est alors un objet de \mathcal{C} et les ρ_U^V sont des morphismes de \mathcal{C} .

Définition 1.7 (FAISCEAU)

Un préfaisceau \mathcal{F} est un faisceau si pour tout recouvrement ouvert (U_i) d'un ouvert U , il satisfait de plus deux axiomes :

- Si on a $s, t \in \mathcal{F}(U)$ telles que pour tout i $\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(t)$, alors $s = t$.
- Si on se donne une famille $(s_i) \in \mathcal{F}(U)$ telle que $\rho_{U_i \cap U_j}^U(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^U(s_j)$ pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tel que $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$.

Si \mathcal{C} est une catégorie concrète (autrement dit, dont les objets sont des ensembles avec une structure supplémentaire ; par exemple, des groupes, des espaces vectoriels...) la définition est la même pour un faisceau à valeurs dans \mathcal{C} .

Dans la suite, on supposera que les préfaisceaux sont également à valeurs dans une catégorie concrète.

Exemple

Le prototype d'un faisceau, c'est le faisceau des "bonnes fonctions" d'un espace avec leurs morphismes de restriction. Par exemple, forment des faisceaux sur un espace X

- Les fonctions continues de $U \subset X$ dans Y ,
- Si $X \subset \mathbb{R}^n$, les fonctions différentiables (ou encore de classe \mathcal{C}^k) de $U \rightarrow X$ dans \mathbb{R} ,
- Si $X \subset \mathbb{C}$, les fonctions holomorphes de $U \subset X$ dans \mathbb{C} ,
- Si $X \subset \mathbb{C}$, les solutions à une équation différentielle holomorphe sur $U \subset X$...

Les axiomes de définition du faisceau indiquent ainsi la façon dont ses éléments peuvent se recoller : dès que deux fonctions coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition, elles peuvent être étendues de façon unique sur l'union de ces ouverts. En raison de cette analogie, on notera aussi $\rho_U^V(s) = s|_U$.

Les deux derniers exemples ne sont pas seulement des faisceaux d'ensembles, mais des faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels.

Un exemple un peu différent est aussi utile.

Définition 1.8 (FAISCEAU CONSTANT)

Soit A un objet de \mathcal{C} . On le munit de la topologie discrète. Le faisceau constant associé à A , noté \underline{A} , est le faisceau qui à U associe l'ensemble des fonctions continues de U dans A . En particulier pour U connexe, toutes ces fonctions sont constantes : $\underline{A}(U) = A$.

Remarque. On peut se demander pourquoi on ne pose pas simplement $\underline{A}(U) = A$ pour tout U : c'est parce que ceci ne donne pas un faisceau. En effet on pourrait se donner deux ouverts disjoints U_1 et U_2 et deux éléments distincts $a_1 \in \underline{A}(U_1)$ et $a_2 \in \underline{A}(U_2)$; il ne se recollent pas en un élément de $\underline{A}(U_1 \cup U_2)$. Cependant, il y a une façon naturelle d'associer un préfaisceau à un faisceau, et le faisceau constant est le faisceau associé à ce préfaisceau.

Définition 1.9 (LA CATÉGORIE DES (PRÉ)FAISCEAUX)

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux préfaisceaux sur X . Un morphisme f de préfaisceaux entre \mathcal{F} et \mathcal{G} est la donnée pour tout $U \subset X$ d'une application $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ qui commute avec les morphismes de restriction :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_V^U & & \downarrow \rho_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

On note $\text{Psh}(X)$ la catégorie des préfaisceaux sur X . On note $\text{Sh}(X)$ celle des faisceaux ; c'est une sous-catégorie pleine, autrement dit un morphisme de faisceaux est un morphisme de préfaisceaux entre deux faisceaux.

Les faisceaux donnent un cadre pour étudier la façon dont des données locales - par exemple une série entière solution à $X' = AX$ sur un petit ouvert - se recollent globalement. Dans notre situation, notre faisceau a une bonne propriété : localement, les $\mathcal{F}(U)$ sont toujours isomorphes à \mathbb{C}^n : on dit qu'il est localement constant.

Définition 1.10 (FAISCEAU LOCALEMENT CONSTANT)

Un faisceau est dit localement constant quand il est localement isomorphe à un faisceau constant. Autrement dit, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U \ni x$ tel que $\mathcal{F}|_U \cong \underline{A}$: pour tout $V \subset U$ on a une bijection $f_V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \underline{A}(V)$ qui commute avec les restrictions.

Définition 1.11 (SYSTÈME LOCAL)

Un faisceau localement constant d'espaces vectoriels de dimension finie est appelé système local.

On reformule donc le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 1.8 (CAUCHY-LIPSCHITZ, TROISIÈME VERSION)

Considérons une équation différentielle holomorphe $X' = AX$ sur $U \subset \mathbb{C}$. Le faisceau des solutions à cette équation est un système local sur U , qu'on notera \mathcal{S}_A .

La notion de germe se généralise aux préfaisceaux.

Définition 1.12 (GERMES D'UN PRÉFAISCEAU)

Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur X . Soit $x \in X$. On note \mathcal{F}_x la germe de \mathcal{F} en x :

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

Remarque. \varinjlim désigne la limite inductive : voir appendice. Dans le cas où \mathcal{F} est \mathcal{O} ou \mathcal{S}_A , la définition donne une construction exactement identique à notre définition des germes de fonctions holomorphes. Les germes forment un espace topologique "au dessus" de X : construisons une topologie sur cet espace.

Définition 1.13

Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur X . On pose

$$E_{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x \quad \pi_{\mathcal{F}}(p) = x \iff p \in \mathcal{F}_x$$

On munit $E_{\mathcal{F}}$ de la topologie engendrée par les ensembles de la forme

$$[U, s] = \{[s]_x \mid x \in U\}$$

pour $U \subset X$ un ouvert et $s \in \mathcal{F}(U)$.

Proposition 1.9

$\pi_{\mathcal{F}}$ est un homéomorphisme local : autrement dit, pour $[s]_x \in E_{\mathcal{F}}$, il existe un voisinage $U \ni [s]_x$ et un voisinage $W \ni x$ tel que $\pi_{\mathcal{F}}$ soit un homéomorphisme de U sur W .

Proposition 1.10

Si \mathcal{F} est \mathcal{O} ou \mathcal{S}_A , $E_{\mathcal{F}}$ est un espace Hausdorff.

Dans ce cadre, on peut réinterpréter le prolongement analytique. Donnons nous un chemin γ de a vers b dans $U \subset \mathbb{C}$. Soit $[f]_a$ une germe holomorphe. Se donner un prolongement analytique de $[f]_a$ selon γ , c'est exactement se donner un chemin $\tilde{\gamma}$ dans $E_{\mathcal{O}}$ tel que

- $\tilde{\gamma}(0) = [f]_a$,
- $\pi_{\mathcal{O}} \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

On dira que $\tilde{\gamma}$ est un relèvement de γ . Ces relèvements ont de bonnes propriétés topologiques qui nous permettront de montrer le théorème de monodromie.

Proposition 1.11 (UNICITÉ DES RELÈVEMENTS)

Soit $\pi : E_1 \rightarrow E_2$ un homéomorphisme local entre deux espaces Hausdorff. Soit γ un chemin dans E_2 de a vers b . Soit $\tilde{a} \in \pi^{-1}(a)$.

Un relèvement de γ commençant en \tilde{a} est, comme précédemment, un chemin $\tilde{\gamma}$ de E_1 tel que

- $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{a}$,

$$— \pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Si un tel relèvement existe, il est unique.

Ceci donne une autre preuve de l'unicité du prolongement analytique selon un chemin.

Théorème 1.12 (RELÈVEMENT DES HOMOTOPIES)

Soit $\pi : E_1 \rightarrow E_2$ un homéomorphisme local entre deux espaces Hausdorff. Soit γ_1, γ_2 deux chemins homotopes dans E_2 de a vers b . Soit F une homotopie entre eux.

Soit $\tilde{a} \in \pi^{-1}(a)$. Supposons que pour tout $\alpha \in [0, 1]$, le chemin $F(\alpha, -)$ ait un relèvement commençant en \tilde{a} . Alors $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont homotopes dans E_1 ; en particulier, $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$.

En appliquant ceci à $\pi_\theta : E_\theta \rightarrow U$, on trouve exactement l'énoncé du théorème de monodromie, ce qui conclut sa preuve.

Terminons par des dessins. Considérons l'équation différentielle définissant le logarithme. Les germes solutions forment un espace topologique $E_{\mathcal{S}_A}$. Choisissons la germe en 1 qui correspond au logarithme principal. Les prolongements analytiques de cette germe forment la composante connexe par arcs $C \subset E_{\mathcal{S}_A}$ qui contient cette germe. On peut la dessiner ainsi : **Inclure** (3)

1.2.2 Faisceaux localement constants et revêtements

Une limitation des propriétés de la section précédente est que l'existence des relèvements n'est pas garantie : dans le cas de θ , cela correspond au fait que l'existence des prolongements analytiques n'est pas garantie non plus.

Cependant, pour montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz global sur des ouverts simplement connexes, on a vu que le prolongement analytique était toujours possible. Cela est dû au fait que \mathcal{S}_A est localement constant : $E_{\mathcal{S}_A}$ a alors la propriété d'être un revêtement de U . Les relèvements existent toujours sur les revêtements, et ils sont commodes à étudier d'un point de vue topologique.

Définition 1.14 (REVÊTEMENT)

Soit E un espace topologique et $p : E \rightarrow X$ une surjection continue telle que tout point $x \in X$ ait un voisinage U tel que

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup U_i$$

et que $p|_{U_i}$ soit un homéomorphisme de U_i sur U .

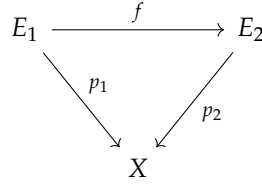
On dit que p fait de E un revêtement de X . En particulier, p est un homéomorphisme local.

Dessiner (4)

L'exemple le plus simple est le revêtement trivial : si I est un ensemble muni de la topologie discrète, $\pi_2 : I \times X \rightarrow X$ fait de $I \times X$ un revêtement de X .

Définition 1.15 (CATÉGORIE DES REVÊTEMENTS)

Soient $p_1 : E_1 \rightarrow X$ et $p_2 : E_2 \rightarrow X$ deux revêtements du même espace. Un morphisme de revêtements $f : E_1 \rightarrow E_2$ est une application continue qui respecte les fibres : le diagramme suivant commute.



Les revêtements de X forment ainsi une catégorie notée Cov_X .

En particulier, on note $\text{Aut}(E|X)$ les automorphismes de revêtements de E .

Proposition 1.13

Soit \mathcal{F} un faisceau localement constant d'ensembles sur X . $E_{\mathcal{F}}$ est un revêtement de X par $\pi_{\mathcal{F}}$. Réciproquement, étant donné un revêtement $p : E \rightarrow X$, on peut définir un faisceau localement constant sur X en posant

$$\mathcal{F}_p(U) = \{s : U \rightarrow E \mid p \circ s = \text{Id}_U\}$$

On a alors

- $\pi_{\mathcal{F}_p} : E_{\mathcal{F}_p} \rightarrow X$ est isomorphe à E en tant que revêtement de X .
- $\mathcal{F}_{\pi_{\mathcal{F}}}$ est isomorphe à \mathcal{F} en tant que faisceau sur X .

On a donc une équivalence de catégories entre revêtements de X et faisceaux localement constants d'ensembles sur X .

Comme annoncé, sur un revêtement, les relèvements de chemins existent toujours.¹

Théorème 1.14 (RELÈVEMENT DES CHEMINS)

Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement et γ un chemin de X de x_0 vers x_1 . Alors pour tout choix $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}$ de E partant de \tilde{x}_0 tel que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Démonstration. Il suffit de montrer l'existence. Pour tout t dans $[0, 1]$, donnons nous un voisinage U_t de $\gamma(t)$ sur lequel le revêtement est trivial. $(\gamma^{-1}(U_t))$ est un recouvrement ouvert de $[0, 1]$, qui est compact. On peut donc en extraire un recouvrement fini.

On peut donc choisir $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1 = t_{n+1}$ tel que $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ soit entièrement contenu dans un U_t . On peut donc construire par récurrence $\tilde{\gamma} : \text{sur un voisinage } [0, t_1], p$ est un homéomorphisme depuis un ouvert contenant \tilde{x}_0 ; on peut composer par p^{-1} pour obtenir $\tilde{\gamma}$ sur $[0, t_1]$. On applique le même procédé intervalle par intervalle en recollant sur leurs intersections. \square

Une grande famille d'exemples de revêtements est donnée par les espaces quotientés par une bonne action de groupe.

Définition 1.16 (ACTION DE REVÊTEMENT)

Soit G un groupe, X un espace, et supposons que G opère continûment sur X . On dit que cette action est une action de revêtement quand pour tout $x \in X$, on ait un voisinage $U \ni x$ tel que

$$\forall g_1, g_2 \in G, g_1 \neq g_2 \implies g_1 \cdot U \cap g_2 \cdot U = \emptyset$$

1. Sous de bonnes hypothèses c'est même une caractérisation : Si $p : E \rightarrow X$ est un homéomorphisme local entre espaces localement connexes et semilocallement simplement connexes, c'est un revêtement si et seulement si tout chemin de X a un relèvement par p .

La raison de cette terminologie (qui n'est pas universelle) est la suivante :

Proposition 1.15

Donnons nous une action continue de G sur X . Alors on peut former l'espace des orbites $G \backslash X$ en choisissant la topologie la moins fine qui fait de la projection $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ une application continue :

$$U \subset G \backslash X \text{ ouvert} \iff \pi^{-1}(U) \text{ ouvert}$$

Si cette action est une action de revêtement, π fait de X un revêtement de $G \backslash X$.

Démonstration. Étant donné $x \in X \backslash G$, on peut trouver un antécédant \tilde{x} de π et un ouvert $U \ni \tilde{x}$ vérifiant la condition de la définition. On a $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigsqcup_{g \in G} g \cdot U$; la projection de $g \cdot U$ sur $\pi(U)$ est un homéomorphisme de réciproque $y \mapsto g \cdot \tilde{y}$, où \tilde{y} est l'unique antécédent de y par π qui est dans U . Or $\pi(U)$ est un ouvert, puisque $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigsqcup_{g \in G} g \cdot U$ et $g \cdot U$ est homéomorphe à U . Donc π est un revêtement. \square

Exemple (QUELQUES ACTIONS DE REVÊTEMENT)

- Soit $X^{\sqcup n}$ l'union disjointe de n copies de X , numérotées. \mathfrak{S}_n agit sur $X^{\sqcup n}$ en permutant la numérotation. Cette action est une action de revêtement, et on retrouve le revêtement trivial avec $I = \{1, \dots, n\}$.
- \mathbb{Z} agit sur \mathbb{R} par translation : $n \cdot x = x + n$. Cette action est une action de revêtement, et l'espace des orbites est homéomorphe à S^1 . Au moment de calculer $\pi_1(S^1)$, on verra une expression explicite de ce revêtement.
- Plus généralement, \mathbb{Z}^n agit sur \mathbb{R}^n par translation. Cette action est encore une action de revêtement, et l'espace des orbites est homéomorphe au tore n -dimensionnel.
- \mathbb{Z}_2 agit sur S^n par $\pm 1 \cdot x = \pm x$. L'espace des orbites est homéomorphe à l'espace projectif réel de dimension n , $\mathbb{R}P^n$. Cela fait de S^n un revêtement de $\mathbb{R}P^n$.
- Rappelons que le produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ a pour loi

$$(n_1, m_1) \star (n_2, m_2) = (n_1 + (-1)^{m_1} n_2, m_1 + m_2)$$

On peut le faire agir sur \mathbb{R}^2 :

$$(n, m) \cdot x = ((-1)^m x + n, y + m)$$

L'espace des orbites est la bouteille de Klein.

- Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ ou } y \in \mathbb{Z}\}$. \mathbb{Z}^2 agit sur X par translations, et l'espace des orbites est homéomorphe à un bouquet de deux cercles.

Proposition 1.16

Étant donné un revêtement connexe $p : E \rightarrow X$, l'action du groupe d'automorphismes $\text{Aut}(E|X)$ sur E est une action de revêtement.

Démonstration. Cela revient à montrer qu'un automorphisme non trivial n'a pas de points fixe. Soit $S = \{x \in E \mid f(x) = x\}$. Soit $x \in S$. Comme $p \circ f = p$, sur un voisinage de x où p est un homéomorphisme, f est trivial : ce voisinage est dans S . Soit maintenant $x \notin S$. Soit $U \ni x$ avec $p^{-1}(p(U)) = U \sqcup \bigsqcup U_i$. On a $f(x) \notin U$, sans quoi on aurait $f(x) = x$. Mettons

$f(x) \in U_j$. Par continuité de f , il doit exister un voisinage de x inclus dans U dont l'image est incluse dans U_j , disjoint de U . Donc ce voisinage est inclus dans $E \setminus S$ qui est ouvert. Par connexité de E , S est vide (f est sans points fixes) ou E tout entier (f est l'identité). \square

1.3 Groupe fondamental et classification des revêtements

On a vu que la topologie de U , et en particulier l'existence de chemins non homotopes, permettait que le revêtement $E_{\mathcal{S}_A}$ soit non trivial. On peut donner un lien plus précis entre lacets dans U et revêtements. Dans cette partie, on s'est aidé de [Gui22].

1.3.1 Le groupe fondamental et l'action de monodromie

Définition 1.17 (CONCATÉNATION)

Soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans X avec $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Leur concaténation est définie comme le chemin

$$\gamma_2 * \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 1.17

- Si γ est un lacet et que $-\gamma$ est le lacet parcouru dans le sens inverse, i.e. $-\gamma : t \mapsto \gamma(1 - t)$, alors $\gamma * -\gamma = -\gamma * \gamma$ est homotope au lacet constant.
- Si γ_1 est homotope à γ'_1 et si γ_2 est homotope à γ'_2 , alors $\gamma_1 * \gamma_2$ est homotope à $\gamma'_1 * \gamma'_2$.
- $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ est homotope à $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$.

Démonstration.

- Posons $\gamma_\alpha : t \mapsto \gamma(\alpha t)$. Alors $F : (\alpha, t) \mapsto (\gamma_\alpha * -\gamma_\alpha)(t)$ est une homotopie du lacet constant vers $\gamma * -\gamma$.
- Soit F_1 et F_2 les homotopies respectives. $F_1 * F_2 : (\alpha, t) \mapsto (F_1(\alpha, -) * F_2(\alpha, -))(t)$ est une homotopie entre $\gamma_1 * \gamma_2$ et $\gamma'_1 * \gamma'_2$.
- Soit $f_\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la fonction affine par morceaux suivante :

$$f_\alpha : t \mapsto \begin{cases} (1 - \frac{1}{2}\alpha)t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t - \frac{1}{4}\alpha & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (1 + \alpha)t + \frac{\alpha}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quand $\alpha = 0$, c'est l'identité. Quand $\alpha = 1$, c'est la fonction affine par morceaux qui envoie 0 sur 0, $\frac{1}{2}$ sur $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ sur $\frac{1}{2}$ et 1 sur 1. Donc on a

$$((\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3)(f_1(t)) = (\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3))(t)$$

$F : (\alpha, t) \mapsto ((\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3)(f_\alpha(t))$ est l'homotopie recherchée. \square

Définition 1.18 (GROUPE FONDAMENTAL)

Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$. Le groupe fondamental de X basé en x_0 est le groupe des classes d'homotopie de lacets basés en x_0 , muni de la concaténation.

Les propriétés précédentes montrent le bien-fondé de cette définition : l'homotopie est une relation d'équivalence compatible avec la concaténation, qui est associative à homotopie près, qui a pour élément neutre le lacet constant et pour qui tout lacet a un inverse.

Définition 1.19 (MORPHISME INDUIT)

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue telle que $f(x_0) = y_0$. On note $f_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ l'application induite sur les groupes fondamentaux, qui à la classe d'homotopie du lacet γ associe celle de $f \circ \gamma$.

Remarque. Ces deux définitions donnent un foncteur (voir annexe A) de la catégorie des espaces topologiques pointés Top_* vers Grp .

Remarque. Quand X est connexe par arcs, le choix de deux points bases différents donne des groupes fondamentaux isomorphes, mais non canoniquement : choisir un isomorphisme entre $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$, c'est choisir un chemin de x_0 vers x_1 . En effet, si α est un tel chemin, alors on a l'isomorphisme explicite

$$\begin{aligned} f : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_1) \\ \gamma &\mapsto \alpha * \gamma * -\alpha \end{aligned}$$

Étant donné un revêtement $p : E \rightarrow X$, on a vu qu'on pouvait relever les lacets dans X en chemins dans E . En associant à un chemin le point d'arrivée de ce processus, on définit une action de groupe, l'action de monodromie.

Proposition 1.18 (ACTION DU GROUPE FONDAMENTAL SUR LES FIBRES)

Pour tout lacet γ basé en $x_0 \in X$, on peut associer à tout point $y_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$ le point de la fibre $\tilde{\gamma}(1)$. On a ainsi défini une action (canonique) de $\pi_1(X, x_0)$ sur $p^{-1}(x_0)$.

Démonstration. C'est un corollaire du relèvement des homotopies : le point d'arrivée du relèvement d'un chemin ne dépend que de la classe d'homotopie de γ . \square

Proposition 1.19

- L'action de monodromie est transitive si E est connexe par arcs.
- l'action de monodromie sur les fibres est simplement transitive si E est simplement connexe. Plus généralement, le stabilisateur de l'action de monodromie en $e_0 \in E$ est $p_\#(\pi_1(E, e_0))$.

Démonstration.

- Soient $x_1, x_2 \in p^{-1}(x_0)$. Si E est connexe par arcs il existe un chemin γ dans E allant de x_1 à x_2 . Alors $p \circ \gamma$ est un lacet basé en x_0 dans X . Son relèvement est γ ; donc l'action de $p \circ \gamma$ sur la fibre envoie x_1 sur x_2 .

- Soient $x_1, x_2 \in p^{-1}(x_0)$. Soient deux lacets γ_1, γ_2 dans X basés en x_0 dont le relèvement qui commence en x_1 finit en x_2 . Comme E est simplement connexe, ils sont homotopes. Composer cette homotopie par p donne qu'ils sont aussi homotopes dans X .
Plus généralement, dire que $\gamma \in p_{\#}(\pi_1(E, e_0))$ revient à dire que le relèvement de γ sur E est un lacet, c'est à dire exactement $\gamma \cdot e_0 = e_0$.

□

Proposition 1.20 (FONCTEUR Fib_{x_0})

Cette construction est fonctorielle : autrement dit, on a un foncteur de Cov_X dans $\pi_1(X, x_0)\text{-Set}$ (la catégorie des ensembles munis d'une action de $\pi_1(X, x_0)$) qui associe

- à $p : E \rightarrow (X, x_0)$ l'ensemble $p^{-1}(x_0)$ muni de l'action de monodromie,
- à $f : E_1 \rightarrow E_2$, l'application $f|_{p_1^{-1}(x_0)} : p_1^{-1}(x_0) \rightarrow p_2^{-1}(x_0)$.

Démonstration. Le deuxième point mérite des précisions.

- Comme f est un morphisme de revêtements, il respecte les fibres par définition. Donc on a effectivement $f(p_1^{-1}(x_0)) \subset p_2^{-1}(x_0)$.
- De plus cette application est compatible avec l'action de monodromie : par unicité des relèvements, f envoie le relèvement dans E_1 commençant en \tilde{x}_0 d'un lacet basé en x_0 sur son relèvement dans E_2 commençant en $f(\tilde{x}_0)$. Autrement dit on a $f(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot f(x)$: c'est un morphisme dans $\pi_1(X, x_0)\text{-Set}$.

□

1.3.2 Quelques groupes fondamentaux

Cette action permet de calculer le groupe fondamental de S^1 .

Exemple (GROUPE FONDAMENTAL DU CERCLE)

\mathbb{R} est un revêtement de S^1 par la formule

$$p(t) = (\cos t, \sin t)$$

Choisissons $x_0 = (1, 0)$. Le groupe fondamental $\pi_1(S^1, x_0)$ est en bijection avec l'orbite de 0 sous son action, i.e. $p^{-1}(\{x_0\})$. Mais $p^{-1}(\{x_0\}) = 2\pi\mathbb{Z}$. Il reste donc à montrer que la bijection est un morphisme de groupes : si $[\gamma_1] \cdot 0 = 2\pi n_1$ et $[\gamma_2] \cdot 0 = 2\pi n_2$, alors $[\gamma_2 * \gamma_1] \cdot 0 = 2\pi n_1 + 2\pi n_2$. C'est vrai par unicité des relèvements : si $\widetilde{\gamma}_2$ est le relèvement de γ_2 qui commence en 0, le relèvement de γ_2 qui commence en $2\pi n_1$ est

$$\widetilde{\widetilde{\gamma}}_2 : t \mapsto \widetilde{\gamma}_2(t) + 2\pi n_1$$

Donc un relèvement de $\gamma_2 * \gamma_1$ commençant en 0 est $\widetilde{\widetilde{\gamma}}_2 * \widetilde{\gamma}_1$, et il vaut bien $2\pi n_1 + 2\pi n_2$ en 1.
In fine : $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Du groupe fondamental de S^1 on peut déduire celui de \mathbb{C}^* .

Exemple (GROUPE FONDAMENTAL DE \mathbb{C}^*)

$\pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*)$ via l'isomorphisme $i_\#$ qui à un lacet de S^1 associe le même lacet vu comme lacet de \mathbb{C}^* .

Démonstration. Posons l'application continue

$$r : \mathbb{C}^* \rightarrow S^1$$

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

On va montrer que l'inverse de $i_\#$ est l'application $r_\#$. Comme $r \circ i = \text{Id}_A$, il est immédiat que $r_\# \circ i_\# = \text{Id}_{\pi_1(S^1)}$. À l'inverse regardons $i_\# \circ r_\#$. Considérons $i \circ r \circ \gamma$ avec γ un lacet de \mathbb{C}^* . En posant

$$F(\alpha, t) = \alpha \gamma(t) + (1 - \alpha) \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$$

on a une homotopie entre $i \circ r \circ \gamma$ et γ ; autrement dit, $i_\# \circ r_\# = \text{Id}_{\pi_1(\mathbb{C}^*)}$. \square

Remarque. En fait dans ce cas on a un isomorphisme explicite : à γ un lacet de \mathbb{C}^* , on associe son indice par rapport à 0.

Plus généralement, on peut en déduire le groupe fondamental de \mathbb{C} privé d'un nombre fini de points à partir du groupe fondamental d'un bouquet de cercles.

Définition 1.20 (RÉTRACTION)

Soit $A \subset X$. On appelle rétraction de X sur A une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r|_A = \text{Id}_A$. On dit que A est un rétract de X . Si de plus, avec $i : A \rightarrow X$ l'inclusion, $i \circ r$ est homotope à l'identité dans X , on dit que A est un rétract de X par déformation.

Par exemple, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ est une rétraction par déformation de \mathbb{C}^* sur S^1 .

Théorème 1.21 (GROUPE FONDAMENTAL D'UN RÉTRACT PAR DÉFORMATION)

L'inclusion induit un morphisme $i_\# : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ qui à un chemin de A associe le même chemin vu comme chemin de X .

Si A est un rétract de X , $i_\#$ est une injection entre groupes fondamentaux de A et de X . Si de plus A est un rétract de X par déformation, $i_\#$ est un isomorphisme entre groupes fondamentaux de A et de X .

Démonstration. De façon similaire au cas de \mathbb{C} , on va montrer que $r_\#$ est un inverse de $i_\#$. $r \circ i = \text{Id}_A$, donc $r_\# \circ i_\# = \text{Id}_{\pi_1(A)}$. D'où l'injectivité. De plus si $i \circ r$ est homotope à l'identité, par définition $i_\# \circ r_\# = \text{Id}_{\pi_1(X)}$. D'où l'isomorphisme dans le cas rétraction-déformation. \square

Définition 1.21 (BOUQUET DE n CERCLES)

Soient n copies de S^1 . Sur chaque copie, marquons un point x_i . Un bouquet de n cercles est l'espace quotient formé par la somme disjointe des n copies de S^1 quotienté par la partie $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Remarque. Les petites fleurs suivantes sont un plongement d'un bouquet de n cercles dans le plan :
Dessiner (5)

Le bouquet de deux cercles est un cas particulier d'une construction générale, la somme pointée : étant donnés deux espaces X_1 et X_2 munis chacun d'un point marqué x_1 et x_2 , la somme pointée de X_1 et X_2 est la somme disjointe $X_1 \sqcup X_2$ quotientée par la partie $\{x_1, x_2\}$. On notera cet espace $X_1 \wedge X_2$.

Théorème 1.22 (GROUPE FONDAMENTAL D'UNE SOMME POINTÉE)

Soient (X_0, x_0) et (X_1, x_1) deux espaces connexes par arcs avec leur point marqué. On a un isomorphisme canonique

$$\pi_1(X_0 \wedge X_1, x_0 = x_1) \cong \pi_1(X_0, x_0) * \pi_1(X_1, x_1)$$

où $*$ désigne le produit libre de groupes, i.e. l'ensemble de tous les produits finis formels d'éléments de ces deux groupes, muni de la concaténation.

Démonstration. On a un morphisme bien défini

$$f : \pi_1(X_0, x_0) * \pi_1(X_1, x_1) \rightarrow \pi_1(X_0 \wedge X_1, x_0 = x_1)$$

qui à la concaténation formelle de deux chemins associe leur concaténation réelle.

Ce morphisme est surjectif : étant donné $\gamma : [0, 1] \rightarrow X_0 \wedge X_1$, on peut supposer, quitte à se ramener dans ce cas par homotopie, que $\gamma^{-1}(\{x_0\})$ est une partie finie de $[0, 1]$. On la note $\{t_1, \dots, t_{n+1}\}$. Alors par continuité et connexité $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ doit être contenu entièrement dans X_0 ou X_1 . Alors on pose γ_i la "renormalisation" à $[0, 1]$ de $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$. On a alors

$$\gamma \simeq \gamma_1 * \dots * \gamma_n$$

Ce morphisme est aussi injectif : si $\gamma_1 * \dots * \gamma_n$ est contractile, nécessairement chaque γ_i l'est. **Démontrer (6)** □

Remarque. Ce théorème est une forme plus faible du théorème de Seifert-Van-Kampen, qui permet de calculer le groupe fondamental de $A \cup B$ à partir de celui de A , B , et $A \cap B$.

Corollaire 1.23

Le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles est le groupe libre de rang n , F_n .

Démonstration. F^n est le produit libre de n copies de \mathbb{Z} . Le théorème précédent permet de conclure par une récurrence immédiate. □

Théorème 1.24

Un bouquet de n cercles – en tout cas un de ses plongements dans \mathbb{C} – est un rétract de \mathbb{C} privé de n points. Par conséquent :

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}) \cong F_n$$

Dessiner (7)

1.3.3 Correspondance galoisienne

D'abord, étant donné un revêtement assez bon, on va tâcher de classer tous les revêtements intermédiaires à un revêtement donné. Par revêtement intermédiaire, on entend qu'il y a un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{f} & E' \\
 & \searrow p & \downarrow p' \\
 & & X
 \end{array}$$

où p et p' sont des revêtements de X et f est continue : p' est alors intermédiaire à p .

Proposition 1.25

Dans le diagramme précédent, supposons de plus que E' soit connexe. Alors f est un revêtement.

Démonstration. Montrons d'abord que f est surjective. Soit $y \in E'$ et $x = p'(y) \in X$. Soit $U \ni x$ un ouvert tel que $p'^{-1}(U) = \bigsqcup U'_i \subset E'$ et $p^{-1}(U) = \bigsqcup U_i \subset E$. On peut supposer ces voisinages connexes. On a $p'(f(U_i)) = U$, donc $f(U_i) \subset p'^{-1}(U)$. Comme U_i est connexe, $f(U_i)$ aussi, et il existe un j tel que $f(U_i) \subset U'_j$. Mais U'_j et $f(U_i)$ sont tous deux homéomorphes à U par p' . Donc $U'_j = f(U_i)$; en particulier $f(U_i)$ est ouvert, et c'est un voisinage de x dans $\text{Im } f$. Donc $\text{Im } f$ est ouvert. Montrons qu'il est aussi fermé. Soit $y \in E' \setminus \text{Im } f$ et $x = p'(y)$. On se place dans la même situation que précédemment. Soit U'_j la composante de $p'^{-1}(U)$ contenant y . Si $y' \in \text{Im } f \cap U'_j$, alors comme avant il existe $U_k \subset E$ tel que $f(U_k) = U'_j$. Donc $y \in \text{Im } f$: contradiction. D'où $y \in U'_j \subset E \setminus \text{Im } f$, et $\text{Im } f$ fermé. Par connexité de E' , $\text{Im } f = E'$.

Enfin montrons que c'est un revêtement. Comme précédemment on obtient

$$f^{-1}(p'^{-1}(U)) = \bigsqcup U_i$$

Si U'_j est la composante de $p'^{-1}(U)$ qui contient y , alors en fait

$$f^{-1}(U'_j) = \bigsqcup \begin{cases} U_i & \text{si } f(U_i) = U'_j \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

par les arguments précédents, et f est un homéomorphisme de chaque U_i sur U'_j . □

L'hypothèse supplémentaire sur le revêtement est la suivante.

Définition 1.22 (REVÊTEMENT GALOISIEN)

Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement connexe. On a vu que la projection $\pi : E \rightarrow E/\text{Aut}(E|X)$ était un revêtement. On a donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\pi} & E/\text{Aut}(E|X) \\
 & \searrow p & \downarrow \tilde{p} \\
 & & X
 \end{array}$$

p passe au quotient car par définition il est constant sur les orbites de $\text{Aut}(E|X)$.

Quand \tilde{p} est un homéomorphisme, p est dit galoisien.

Proposition 1.26

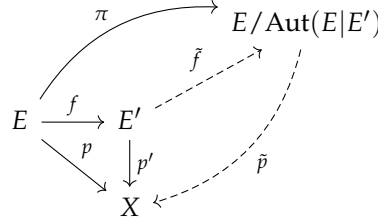
$p : E \rightarrow X$ est galoisien si et seulement si l'action de $\text{Aut}(E|X)$ sur les fibres est transitive.

Démonstration. \tilde{p} est un homéomorphisme local; pour que ce soit un homéomorphisme il faut et suffit qu'il soit injectif.

Par définition $E/\text{Aut}(E|X)$ est exactement l'ensemble des orbites de l'action. \tilde{p} envoie l'orbite sur le point base de la fibre; pour que \tilde{p} soit injective il faut et suffit que l'orbite soit la fibre entière c'est à dire que l'action soit transitive. \square

Proposition 1.27

Dans la situation de la propriété précédente, si $p : E \rightarrow X$ est galoisien, alors $f : E \rightarrow E'$ aussi, et on peut identifier E' au revêtement intermédiaire $\pi : E \rightarrow E/\text{Aut}(E|E')$ via le diagramme



Démonstration. Il faut montrer que l'action de $\text{Aut}(E|E')$ est transitive sur les fibres de f . Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. A fortiori, $p(x) = p(y)$. Comme p est galoisien, il existe $\Phi \in \text{Aut}(E|X)$ tel que $\Phi(x) = y$. Il reste à montrer que $\Phi \in \text{Aut}(E|E')$, c'est à dire que pour tout $z \in E$, $f(z) = f(\Phi(z))$.

Soit $S = \{z \in E \mid f(z) = f(\Phi(z))\}$. Soit $z \in S$. On a $p' \circ f \circ \Phi = p' \circ f$; mais p' est un homéomorphisme local. Donc en composant par l'inverse, on a $f \circ \Phi = f$ au voisinage de z , et S est ouvert. Supposons maintenant $z \notin S$. Soit $U \ni p'(f(z))$ tel que $p'^{-1}(U) = \bigsqcup U_i$. Comme $f(z) \neq f(\Phi(z))$, on a $f(z) \in U_i$ et $f(\Phi(z)) \in U_j$ pour $i \neq j$. Donc sur un voisinage de z , $f \neq f \circ \Phi$ et S est fermé.

S est ouvert fermé, et par hypothèse $x \in S$. Donc comme E est connexe, $S = E$ et finalement $\Phi \in \text{Aut}(E|E')$. \square

Théorème 1.28 (CORRESPONDANCE GALOISIENNE)

Quitte à faire l'identification donnée par la propriété précédente, on a la correspondance

$$\begin{aligned} \{\text{revêtements intermédiaires connexes de } E\} &\leftrightarrow \{\text{sous-groupes de } \text{Aut}(E|X)\} \\ p' : E' \rightarrow X &\mapsto \text{Aut}(E|E') \\ E/G &\leftarrow G \end{aligned}$$

Démonstration. On a déjà montré que $\text{Aut}(E|X)$ avait une action de revêtement, donc ceci est bien défini.

On a déjà montré que $E' \cong E/\text{Aut}(E|E')$: c'est exactement l'identification canonique qu'on se permet de faire.

Montrons que $\text{Aut}(E|E/G) = G$. Il y a une injection naturelle

$$\begin{aligned} m : G &\hookrightarrow \text{Aut}(E|E/G) \\ g &\mapsto (x \mapsto g \cdot x) \end{aligned}$$

mais pour $\varphi \in \text{Aut}(E|E/G)$ et $x \in E$, on a $\varphi(x)$ dans la même fibre que x , c'est à dire dans la même orbite : il existe $g \in G$ tel que $\varphi(x) = g \cdot x$. Alors $\varphi^{-1} \circ m(g)$ a un point fixe, donc est trivial, et $\varphi = m(g)$.

Finalement, les deux applications proposées sont bien inverses l'une de l'autre. \square

1.3.4 Revêtement universel et classification des revêtements

Sous de bonnes hypothèses, le théorème précédent va nous permettre de comprendre tous les revêtements connexes d'un espace : on sera en mesure de réaliser tout revêtement connexe comme revêtement intermédiaire d'un revêtement dit universel, dont on connaîtra le groupe d'automorphismes.

Théorème 1.29 (CRITÈRE DE RELÈVEMENT DES APPLICATIONS)

Soit $p : (E, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un revêtement. Soit $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ une application continue. Alors on peut relever f , autrement dit on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (Y, y_0) & & \\ \downarrow \tilde{f} & \searrow f & \\ (E, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{p} & (X, x_0) \end{array}$$

si et seulement si $\text{Im } f_{\#} \subset \text{Im } p_{\#}$. De plus, \tilde{f} est alors unique.

Démonstration.

Si... Supposons l'inclusion des images. Soit $y \in Y$. On peut trouver dans Y un chemin de y_0 à y . Alors $\alpha = f \circ \gamma$ est un chemin dans X . Il possède un unique relèvement d'origine \tilde{x}_0 .

On veut définir $\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1)$: montrons que ceci ne dépend pas du choix de γ .

Soit γ' un chemin de y_0 à y . On définit α' et $\tilde{\alpha}'$ comme précédemment. Alors

$$\alpha' * (-\alpha) = f \circ (\gamma' * (-\gamma))$$

Comme la classe d'homotopie de ce dernier lacet est dans $\text{Im } f_{\#} \subset \text{Im } p_{\#}$, il est homotope à un lacet de la forme $p \circ \beta$, où β est un lacet de E basé en \tilde{x}_0 . D'où

$$\alpha' \simeq (p \circ \beta) * \alpha$$

Donc leurs relèvements (commençant en \tilde{x}_0) sont homotopes dans E : mais le relèvement de $(p \circ \beta) * \alpha$ est clairement $\beta * \tilde{\alpha}$. In fine : $\alpha'(1) = (\beta * \tilde{\alpha})(1) = \tilde{\alpha}(1)$.

On a montré que \tilde{f} était bien définie ; il reste à montrer qu'elle est continue. Plaçons nous un voisinage $U \ni f(y)$ tel que p soit un homéomorphisme de $V \ni \tilde{f}(y)$ sur U . Soit $W \ni y$ un voisinage connexe par arcs de y tel que $f(W) \subset U$. On va montrer que $\tilde{f}|_W = p^{-1} \circ f|_W$, où $p^{-1} : U \rightarrow V$ est l'inverse "local" de p . À ce titre \tilde{f} doit être continue sur W donc en y .

Soit $y' \in W$. On peut trouver un chemin μ de y à y' inclus dans W . $f \circ (\gamma * \mu)$ a un relèvement partant en \tilde{x}_0 : d'après les définitions précédentes, ce relèvement est $t \mapsto \tilde{f} \circ (\gamma * \mu)$. Mais comme on dispose d'un inverse local à p , pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, ce relèvement est aussi $p^{-1} \circ f \circ (\gamma * \mu)$. En particulier en 1 il vient $\tilde{f}(y') = p^{-1}(f(y'))$. Ceci conclut.

...et seulement si Supposons l'existence de \tilde{f} . Alors $f = p \circ \tilde{f}$ donc $f_{\#} = p_{\#} \circ \tilde{f}_{\#}$. D'où l'inclusion des images. \square

On remarque en particulier que si Y est simplement connexe, toute application de Y vers X se relève sur E . C'est particulièrement intéressant quand Y est un revêtement : pouvoir relever p fait de E un revêtement intermédiaire de Y .

Définition 1.23

Un revêtement est dit universel quand il est simplement connexe.

Théorème 1.30 (CONSTRUCTION DU REVÊTEMENT UNIVERSEL)

On rappelle que X est supposé connexe et localement connexe par arcs.

X possède un revêtement \tilde{X} simplement connexe quand pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U \ni x$ tel que le morphisme induit

$$i_{\#} : \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

est nul.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$. Soit \tilde{X} l'ensemble des chemins $f : I \rightarrow X$ avec $f(0) = x_0$, modulo homotopie, et la projection

$$p : \tilde{X} \rightarrow X \quad (3)$$

$$[f] \mapsto f(1) \quad (4)$$

Soit $[f] \in \tilde{X}$. Pour définir une topologie sur \tilde{X} , on va donner une base de voisinages de $[f]$. Soit \mathcal{U} l'ensemble des voisinages connexes par arcs U de $f(1)$ tels que le morphisme induit par l'inclusion $\varphi : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ soit nul.

On pose $\tilde{U}_{[f]} = \{[f * \gamma] \mid \gamma : I \rightarrow U, \gamma(0) = f(1)\}$. Alors $(\tilde{U}_{[f]})_{[f] \in \tilde{X}}$ peut définir une base de voisinages de $[f]$, et p est continue. $p^{-1}(U) = \bigsqcup \tilde{U}_{[f]}$ donc p définit un revêtement.

\tilde{X} est connexe par arcs : étant donné $f : I \rightarrow X$, on peut définir $f_{\alpha}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \alpha \\ f(\alpha) & \text{si } \alpha \leq t \leq 1 \end{cases}$;

$\alpha \mapsto [f_{\alpha}]$ est un chemin du lacet constant en x_0 vers $[f]$, et c'est le relèvement de f .

Enfin, $\pi_1(\tilde{X})$ est trivial car p_* est injective, et $p_*(\pi_1(\tilde{X})) = 0$ car si le relèvement de f est un lacet, alors $[f_1] = [f_0]$, c'est à dire f est homotope au chemin constant en x_0 . \square

Une fois x_0 choisi, \tilde{X} est muni d'un point base canonique \tilde{x}_0 qui correspond au lacet constant.

Remarque. Un tel espace est dit délaçable : l'image mentale (en tout cas, la mienne) est à chercher dans la construction du revêtement universel. Les lacets qui ne sont pas homotopes à l'identité sont "délaçés" : ils deviennent des chemins dans \tilde{X} .

Remarque. En particulier, si X possède une base d'ouverts simplement connexes, X est délaçable. C'est le cas notamment de tout espace vectoriel normé, de toute variété topologique, de tout graphe...

Proposition 1.31

Un revêtement universel est galoisien.

Démonstration. Par relèvement des applications on trouve pour tous $\tilde{x}_0, \tilde{x}'_0 \in p^{-1}(x_0)$ deux morphismes de revêtement

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad g \quad} \\ \xrightarrow{\quad h \quad} \end{array} & (\tilde{X}, \tilde{x}'_0) \\ & \begin{array}{c} \searrow p \\ \swarrow p \end{array} & \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

$f \circ g$ et $g \circ f$ sont des morphismes de revêtements avec un point fixe, donc l'identité, et f et g sont des automorphismes. Donc l'action de $\text{Aut}(\tilde{X}|X)$ sur la fibre est transitive. \square

Théorème 1.32

On a un morphisme

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}_{x_0}|X)^{\text{op}}$$

tel que pour $\gamma \in \pi_1$ on ait $\gamma \cdot \tilde{x}_0 = \varphi(\gamma)(\tilde{x}_0)$

Démonstration. Comme l'action de $\text{Aut}(\tilde{X}_{x_0}|X)$ est simplement transitive, on peut poser $\varphi(\gamma)$ comme étant l'unique $f \in \text{Aut}(\tilde{X}_{x_0}|X)$ tel que $f(\tilde{x}_0) = \gamma \cdot \tilde{x}_0$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma_1 \gamma_2) &= \gamma_1 \gamma_2 \cdot \tilde{x}_0 \\ &= \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \tilde{x}_0) \\ &= \gamma_1 \cdot \varphi(\gamma_2)(\tilde{x}_0) \\ &= \varphi(\gamma_2)(\gamma_1 \cdot \tilde{x}_0) \\ &= \varphi(\gamma_2) \circ \varphi(\gamma_1)(\tilde{x}_0) \end{aligned}$$

C'est bien un morphisme. Il est bijectif car l'action de monodromie est simplement transitive.

\square

De la correspondance galoisienne précédente, on tire donc qu'il y a une correspondance entre classes de conjugaison de sous-groupes du groupe fondamental et revêtements connexes. On peut retrouver ce résultat sous la forme d'une équivalence de catégories.

Théorème 1.33 (CLASSIFICATION DES REVÊTEMENTS)

Si X est délaçable, Fib_X est une équivalence de catégories entre Cov_X et $\pi_1(X, x)\text{-Set}$.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on se ramène facilement au cas des revêtements connexes, et de l'autre côté aux actions transitives. En effet l'action de monodromie envoie les composantes connexes sur orbites disjointes.

D'abord, Fib_X est pleinement fidèle : l'association

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & (X, x) & \end{array} \mapsto f|_{p_1^{-1}(x)} : p_1^{-1}(x) \rightarrow p_2^{-1}(x)$$

est injective car deux points qui coïncident en un point sont égaux sur toute sa composante connexe. Or $p_1^{-1}(x)$ contient un point dans chaque composante connexe.

Cette association est aussi surjective. En effet donnons nous une application équivariante

$$\tilde{f} : p_1^{-1}(x) \rightarrow p_2^{-1}(x)$$

Choisissons $y \in p_1^{-1}(x)$ et posons $z = \tilde{f}(y)$. Montrons que $\text{Stab}_y \subset \text{Stab}_z$: si $\gamma \cdot y = y$, alors $\gamma \cdot z = \gamma \cdot \tilde{f}(y) = \tilde{f}(\gamma \cdot y) = \tilde{f}(y) = z$. Or :

$$\text{Stab}_y = p_{1\#}(\pi_1(Y_{c,y})) \quad \text{Stab}_z = p_{2\#}(\pi_1(Z_{c,z}))$$

où Y_c et Z_c sont les composantes connexes contenant respectivement y et z .

Donc le critère de relèvement donne une unique application

$$\begin{array}{ccc}
(Y_c, y) & \xrightarrow{f} & (Z_c, z) \\
& \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\
& (X, x) &
\end{array}$$

telle que $f(y) = z$. Mais en fait les applications équivariantes sont aussi unique pour les actions transitives : ici comme pour tout $y' \in Y_c \cap p_1^{-1}(x)$ on peut trouver γ tel que $y' = \gamma \cdot y$, on a $f(y') = \gamma \cdot f(y)$, et f est entièrement déterminée par sa valeur en y , ici z . Donc f , étant équivariante, doit coïncider avec \tilde{f} sur $Y_c \cap p_1^{-1}(x)$. En répétant l'opération sur chaque composante connexe, on trouve un antécédent à \tilde{f} .

Ensuite Fib_x est essentiellement surjectif. Soit $S \in \pi_1(X, x) - \text{Set}$. Quitte à décomposer S en orbites disjointes, on peut supposer S transitif. Alors on a un isomorphisme (dans $\pi_1(X, x) - \text{Set}$)

$$S \cong \pi_1(X, x) / \text{Stab} S$$

En posant $G = \phi(\text{Stab} S) \leq \text{Aut}(\tilde{X}_x | X)$ on regarde

$$p : \tilde{X}_x / G \rightarrow \tilde{X}_x / \text{Aut}(\tilde{X}_x | X) \cong X$$

L'action de monodromie sur ce revêtement a pour stabilisateur $\text{Stab} S$: en effet $\gamma \cdot y = y \iff \phi(\gamma)(y) = y \iff \phi(\gamma) \in G$, puisque l'action de monodromie sur \tilde{X}_x est simplement transitive.

In fine, \tilde{X}_x / G est bien un antécédent de S . □

En combinant ceci avec la proposition 1.13, on a une équivalence de catégories entre les faisceaux localement constants d'ensembles sur X . Mais dans notre contexte, nos faisceaux sont des systèmes locaux : il y a une structure d'espace vectoriel complexe de dimension finie sur les fibres. On doit donc améliorer cette proposition.

Théorème 1.34

Si X est délaçable, il y a une équivalence de catégories entre système locaux sur X (muni d'un point base x) et représentations de dimension finie de $\pi_1(X)$.

Dans le cas particulier où X est un ouvert de \mathbb{C} , on a en fait déjà rencontré ce foncteur. Si \mathcal{L} est le système local des solutions à une équation différentielle sur X , le prolongement analytique des solutions le long d'un lacet basé en x donne un automorphisme sur l'espace des germes de solutions en x . Comme le résultat du prolongement analytique selon un chemin ne dépend que de la classe d'homotopie de ce chemin, cela fait de l'espace des germes solutions une représentation de $\pi(X, x_0)$. Cette représentation est dite représentation de monodromie associée à l'équation différentielle.

1.4 Connexions et correspondance de Riemann-Hilbert

Toute représentation du groupe fondamental est-elle réalisée comme représentation de monodromie d'une équation différentielle ? D'après les résultats de la section précédente, à cette représentation correspond au moins un système local. La question devient donc : tout système local est-il isomorphe au système local des solutions à une équation différentielle holomorphe ? Pour répondre à cette question, il faut donner un sens à la "catégorie des équations différentielles sur X ".

On suppose que $X \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe.

Définition 1.24 (FAISCEAU DE \mathcal{O} -MODULES)

Un faisceau de \mathcal{O} -modules sur $X \subset \mathbb{C}$ est un faisceau \mathcal{F} de groupes abéliens sur X tel que pour tout $U \subset X$, $\mathcal{F}(U)$ soit un module sur $\mathcal{O}(U)$, et que de plus la multiplication commute avec les restrictions :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U) \times \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\text{mult}} & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow \rho_V^U & & \downarrow \rho_V^U \\ \mathcal{O}(V) \times \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\text{mult}} & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Un morphisme de faisceaux de \mathcal{O} -modules est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens qui est de plus $\mathcal{O}(U)$ -linéaire pour tout U .

Un faisceau de \mathcal{O} -modules est dit (localement) libre quand il est (localement) isomorphe au faisceau :

$$\mathcal{O}^n : U \mapsto \mathcal{O}(U)^n$$

Définition 1.25 (CONNEXION)

Une connexion sur X est la donnée d'un faisceau de \mathcal{O} -modules localement libre \mathcal{E} sur X et d'un morphisme de faisceaux de \mathcal{O} -modules

$$\nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$$

où Ω_X^1 est le faisceau des 1-formes différentielles holomorphes sur X , tel que l'identité de Leibniz soit satisfaite :

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \cdot \nabla(s)$$

Un morphisme de connexions est un morphisme de \mathcal{O} -modules qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1 \\ \downarrow f & & \downarrow f \otimes \text{Id} \\ \mathcal{E}' & \xrightarrow{\nabla'} & \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1 \end{array}$$

Remarque. Pour nous, une 1-forme différentielle sur U est simplement une expression de la forme $f dz$, où f est holomorphe sur U . On note de plus $df = f' dz$.

Exemple (LIEN AVEC LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES)

Une connexion sur le faisceau \mathcal{O}^n se ramène à la donnée d'une équation différentielle holomorphe. En effet on dispose d'une connexion

$$\begin{aligned} d : \mathcal{O}^n &\rightarrow \mathcal{O}^n \otimes_{\mathcal{O}} \Omega_X^1 \cong (\Omega_X^1)^n \\ (f_1, \dots, f_n) &\mapsto (df_1, \dots, df_n) \end{aligned}$$

En effet on a bien

$$d(gf_1, \dots, gf_n) = (dgf_1 + gdf_1, \dots, dgf_n + gdf_n) = dg \otimes (f_1, \dots, f_n) + g \cdot d((f_1, \dots, f_n))$$

D'après la formule de Leibnitz, on a

$$(\nabla - d)(fs) = f \cdot (\nabla - d)(s)$$

autrement dit $\nabla - d$ est un endomorphisme sur le module libre $(\Omega_X^1)^n$. On peut trouver une matrice A de formes $a_{ij}dz$ telles que

$$(\nabla - d)(f_1, \dots, f_n) = A(f_1, \dots, f_n)$$

On a donc l'équivalence

$$\nabla(f_1, \dots, f_n) = 0 \iff (f'_1, \dots, f'_n) = \tilde{A}(f_1, \dots, f_n)$$

avec $\tilde{A} = (-a_{ij})$.

Du théorème de Cauchy-Lipschitz, on tire donc que le faisceau des sections annulées par la connexion :

$$\mathcal{E}^\nabla(U) = \{s \in \mathcal{E}(U) \mid \nabla(s) = 0\}$$

est un système local.

Théorème 1.35 (CORRESPONDANCE DE RIEMANN-HILBERT)

Le foncteur qui a une connexion (E, ∇) associe le système local E^∇ est une équivalence de catégories.

Démonstration. On peut construire le foncteur inverse : à \mathcal{L} on associe le faisceau des produits tensoriels $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}$.

Ce faisceau est localement libre : il est localement isomorphe à $\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O} \cong \mathcal{O}^n$. Ceci permet de définir une connexion, en transportant la connexion canonique d par isomorphisme. Plus explicitement, localement on peut trouver une base (e_i) de $\mathcal{L}(U)$, et toute section s'écrit $\sum e_i \otimes f_i$; l'image de cette section par la connexion est $\sum e_i \otimes df_i$.

On a $(\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O})^\nabla \cong \mathcal{L}$: localement, si

$$\sum e_i \otimes df_i = 0$$

alors $df_i = \lambda_i$ et on peut lui associer $\sum \lambda_i e_i$.

On a $\mathcal{E}^\nabla \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O} \cong E$: localement, si (s_i) est une base de $\mathcal{E}^\nabla(U)$, on peut associer à $\sum s_i \otimes f_i$ la section $\sum f_i s_i$. \square

Cela répond à la question : tout système local est isomorphe au faisceau des solutions à une équation différentielle. Donc, en combinant avec les équivalences précédentes, toute représentation du groupe fondamental de X est la représentation de monodromie d'une équation différentielle sur X .

2 Un exemple géométrique : l'équation de Picard-Fuchs

2.1 Surfaces de Riemann

2.1.1 Généralités

Définition 2.1

Une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1, c'est à dire un espace topologique connexe X , muni d'un recouvrement ouvert (U_i) et d'une famille d'homéomorphismes $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}$ tel que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on ait des "fonctions de transition"

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow U_i$$

holomorphes.

On dira que (U_i, ϕ_i) est une carte. La donnée de toutes les cartes est un atlas holomorphe.

Remarque. On pourra supposer que l'atlas est maximal, c'est à dire que toutes les cartes compatibles se trouvent encore dans l'atlas. Par exemple si (U, ϕ) est une carte et que $W \subset U$ est un ouvert, $(W, \phi|_W)$ est encore dans l'atlas.

Définition 2.2

Soient M et N deux surfaces de Riemann. $f : M \rightarrow N$ est holomorphe quand elle est holomorphe dans les cartes ; autrement dit, pour une carte (U_i, ϕ_i) au voisinage de $x \in M$ et une carte (V_j, ψ_j) au voisinage de $f(x) \in N$, on a

$$\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorphe.

Exemple

La droite projective complexe, $P_1(\mathbb{C})$, est une surface de Riemann : on a les deux cartes

$$\begin{aligned} \phi_N : P_1(\mathbb{C}) \setminus \{[0 : 1]\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ [1 : z] &\mapsto z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_S : P_1(\mathbb{C}) \setminus \{[1 : 0]\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ [z : 1] &\mapsto z \end{aligned}$$

Exemple

Un tore \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 est une surface de Riemann : la projection $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ est localement un homéomorphisme et son inverse sert à définir les cartes.

Exemple

Soit $P \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme tel que $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ ne s'annulent pas simultanément.

L'ensemble des points où P s'annule est une surface de Riemann : au voisinage des points où $\frac{\partial P}{\partial x}$ ne s'annule pas, $(x, y) \mapsto y$ est une carte d'après le théorème d'inversion locale (ou plutôt son analogue holomorphe). De même au voisinage des points où $\frac{\partial P}{\partial y}$ ne s'annule pas, $(x, y) \mapsto x$ est une carte. De plus quand aucune des deux dérivées partielles ne s'annule, les deux fonctions de transitions sont holomorphes : le théorème des fonctions implicites donne que y est une fonction holomorphe de x (et vice versa).

Cette surface est dite courbe algébrique affine.

De même, soit $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène tel que $\frac{\partial P}{\partial X}$, $\frac{\partial P}{\partial Y}$ et $\frac{\partial P}{\partial Z}$ ne s'annulent simultanément en aucun point de $P^2(\mathbb{C})$.

L'ensemble des points de $P^2(\mathbb{C})$ où P s'annule (cela n'a un sens que parce que P est homogène : la valeur de P ne dépend pas du choix des coordonnées projectives) forme une surface de Riemann. Quitte à recouvrir $P^2(\mathbb{C})$ par trois copies de \mathbb{C}^2 , on peut se ramener au cas précédent pour définir les cartes.

Cette surface est dite courbe algébrique projective, et elle est compacte.

On peut passer d'une courbe affine à sa version compacte en remplaçant x par $\frac{X}{Z}$ et y par $\frac{Y}{Z}$, puis en multipliant par Z à la puissance idoine. Alors la nouvelle courbe coïncide avec l'ancienne pour les coordonnées projectives $[x : y : 1]$.

Remarque. En fait, toute surface de Riemann compacte est (biholomorphe à) une courbe algébrique projective : l'exemple précédent est donc très important.

On admet le théorème suivant.

Théorème 2.1 (CLASSIFICATION DES SURFACES DE RIEMANN COMPACTES)

Soit M une surface de Riemann compacte. Elle est homéomorphe, pour un certain g , à une sphère à g anses.

On dira que g est le genre de M .

Démonstration. Voir par exemple [Rey89], chapitre II. □

Pour arriver à cette description, on peut notamment mettre les surfaces de Riemann compactes sous une forme "combinatoire" adaptée au calcul d'invariants topologiques.

Définition 2.3

Une triangulation d'un espace topologique X est un ensemble fini (T_i) d'homéomorphismes

$$T_i : \Delta = \text{Conv}(e_1, e_2, e_3) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow T_i(\Delta) \subset X$$

tels que les $T_i(\Delta)$ recouvrent X et que de plus

$$T_i(\Delta) \cap T_j(\Delta) = \begin{cases} \emptyset \\ T_i(e_{n_1}) = T_j(e_{n_2}) \text{ (un sommet)} \\ T_i([e_{n_1}, e_{m_1}]) = T_j([e_{n_2}, e_{m_2}]) \text{ (une arête)} \\ T_i(\Delta) = T_j(\Delta) \text{ (une face)} \end{cases}$$

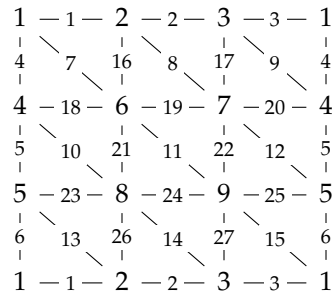
Remarque. C'est un homéomorphisme de X avec un 2-complexe simplicial (voir appendice)

Proposition 2.2

Toute surface de Riemann compacte est triangulable.

Démonstration. Cette démonstration devrait être antérieure à la classification ; mais ici on va simplement donner une triangulation des surfaces de genre g , en commençant par la sphère : elle est homéomorphe à un tétraèdre triangulé par définition.

Ensuite, on a vu le tore comme le quotient \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 ; on peut aussi le voir comme le quotient du carré unité qui identifie arêtes opposées et donc qui identifie les quatres sommets du carré. On peut trianguler ceci :



Cette triangulation a 9 sommets, 27 arêtes et 18 faces.

Pour généraliser ceci aux surfaces de genre $g > 1$, on pourrait généraliser cette construction : un $4g$ -gone dont on identifie les côtés opposés donne une surface de genre g . Mais on peut aussi remarquer qu'une surface de genre g est formée par g -tores recollés côte à côte. Or pour recoller deux surfaces triangulées, il suffit d'identifier une face de chaque. \square

Définition 2.4 (CARACTÉRISTIQUE D'EULER)

Soit X un espace topologique avec une triangulation. Si sa triangulation a S sommets, A arêtes et F faces, on note

$$\chi(X) = S - A + F$$

la caractéristique d'Euler de X .

Théorème 2.3

La caractéristique d'Euler d'une surface de Riemann est invariante par homéomorphisme, et en particulier ne dépend pas de la triangulation choisie.

Démonstration. Cette démonstration utilise l'appendice B. La caractéristique d'Euler d'une surface triangulée n'est autre que la somme alternée

$$\sum_n (-1)^n \dim H_n^\Delta(X)$$

car le complexe associé à X est

$$0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}^f \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^a \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^s \xrightarrow{d_0} 0$$

et donc

$$\begin{aligned} & \dim H_0^\Delta(X) - \dim H_1^\Delta(X) + \dim H_2^\Delta(X) \\ &= \underbrace{\dim \ker d_0}_s - \underbrace{(\dim \operatorname{im} d_1 + \dim \ker d_1)}_a + \underbrace{\dim \operatorname{im} d_2 + \dim \ker d_2}_f - \underbrace{\dim \operatorname{im} d_3}_0 \end{aligned}$$

En appendice, on a vu l'équivalence entre homologies simpliciale et singulière. Il a été facile de montrer que l'homologie singulière était invariante par homéomorphisme. Donc la quantité

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n \dim H_n^\Delta(X) = \sum_n (-1)^n \dim H_n(X)$$

est également invariante par homéomorphisme. \square

Définition 2.5

Le genre et la caractéristique d'Euler d'une surface de Riemann compacte sont liés par la formule

$$\chi = 2 - 2g$$

Démonstration. Il suffit de calculer la caractéristique d'Euler des triangulations qu'on a trouvées précédemment.

D'abord, on sait que la caractéristique d'Euler d'une sphère est 2 (c'est la fameuse formule d'Euler-Poincaré) : par exemple, la caractéristique d'Euler du tétraèdre, qui lui est homéomorphe, est $4 - 6 + 4 = 2$.

Ensuite, la caractéristique d'Euler du tore tel que triangulé précédemment est $9 - 27 + 18 = 0$.

Enfin, la construction précédente permet de montrer la formule par récurrence : augmenter le genre de 1 revient à supprimer deux faces, trois arêtes et trois sommets et ajouter un tore, c'est à dire au total ajouter 16 faces, 24 arêtes et 6 sommets. Finalement, on diminue la caractéristique d'Euler de 2. \square

2.1.2 Formule de Riemann-Hurwitz

Les fonctions holomorphes entre surfaces de Riemann compactes ont une structure très spéciale : ce sont presque des revêtements, en dehors de quelques points dits de ramification, où elles se comportent localement (dans les cartes) comme l'application complexe $z \mapsto z^k$.

Définition 2.6

Soient X et Y deux surfaces de Riemann. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe. C'est un revêtement ramifié quand pour tout $y \in Y$ il existe :

- un voisinage $U \ni y$ et un homéomorphisme $\Psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$;
- une application $k : f^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- un biholomorphisme $\Phi : f^{-1}(U) \rightarrow V \times f^{-1}(y)$ tel que sur $V \times \{x\}$

$$\Psi \circ f \circ \Phi^{-1} : (z, x) \mapsto z^{k(x)}$$

Proposition 2.4

$k(x)$ ne dépend pas du choix de (Ψ, U) et (Φ, V) .

On peut donc dire que x est un point de ramification de f d'indice $k(x)$ dès que $k(x) > 1$. Si Y est compact, il n'y a qu'un nombre fini de points de ramification, car l'ensemble des points de ramification ne peut pas avoir de points d'accumulation : pour y comme dans la définition, tout $y' \in U \setminus \{y\}$ est non ramifié.

Proposition 2.5

Soit $\tilde{Y} := Y \setminus \{f(x) \mid k(x) > 1\}$. Alors f fait de $f^{-1}(\tilde{Y})$ un revêtement de \tilde{Y} : autrement dit, si on exclut les fibres qui contiennent des points de ramification, f est un revêtement.

Proposition 2.6

La somme $\sum_{x \in f^{-1}(y)} k(x)$ ne dépend pas du choix de $y \in Y$. On la note $\deg f$ et elle coïncide avec le degré du revêtement de $f^{-1}(\tilde{Y})$ sur \tilde{Y} .

Démonstration. $y \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} k(x)$ est localement constante car elle est constante sur les U de la définition. Comme Y est connexe, c'est une fonction constante.

De plus, en un point $y \in \tilde{Y}$, $k(x) = 1$ pour tout x ; la somme vaut donc le cardinal de la fibre, qui est le degré du revêtement. \square

Théorème 2.7

Toute application propre – c'est à dire fermée et dont les fibres sont compactes – entre deux surfaces de Riemann est soit constante, soit un revêtement ramifié.

En particulier, toute application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann compactes est un revêtement ramifié.

Étant donné $f : M \rightarrow N$ holomorphe entre surfaces de Riemann compactes, un calcul de la caractéristique d'Euler de triangulation bien choisie permet de lier les genres de M et N avec les points et indices de ramification.

Théorème 2.8 (RIEMANN-HURWITZ)

Soit $f : M \rightarrow N$ un revêtement ramifié entre deux surfaces de Riemann compactes. Leurs caractéristiques d'Euler sont alors liées par la formule

$$\chi(M) = \deg f \cdot \chi(N) - \sum_{x \in M} (k(x) - 1)$$

Démonstration. Quitte à ajouter un nombre fini de points à une triangulation existante, on peut choisir une triangulation de Y dont tous les points de ramification de f sont des sommets.

Mettons que cette triangulation a S sommets, A arêtes et F faces. La préimage de cette triangulation est encore une triangulation ; mettons qu'elle a S' sommets, A' arêtes et F' faces. Aucun point de l'intérieur d'une arêtes (resp. d'une face) n'est un point de ramification, car ils sont tous sommets. Donc la préimage d'une arête (resp. d'une face) est $\deg f$ arêtes (faces) et on a

$$A' = \deg f \cdot A \quad F' = \deg f \cdot F$$

La préimage d'un sommet s est $|f^{-1}(s)|$ sommets :

$$\begin{aligned}
|f^{-1}(s)| &= \sum_{s' \in f^{-1}(s)} 1 \\
&= \sum_{s' \in f^{-1}(s)} 1 + k(s') - k(s') \\
&= \deg f - \sum_{s' \in f^{-1}(s)} k(s') - 1
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
S' &= \sum_{s \text{ sommet}} \deg f - \sum_{s' \in f^{-1}(s)} k(s') - 1 \\
&= S \cdot \deg f - \sum_{s' \text{ sommet}} k(s') - 1
\end{aligned}$$

et le calcul des deux caractéristiques d'Euler donne la formule recherchée, quitte à ajouter des termes nuls (x avec $k(x) = 1$) à la dernière somme. \square

Corollaire 2.9

On considère la courbe

$$y^2 = p(x)$$

où p est un polynôme à racines simples de degré d . Cette courbe (ou plutôt sa version compacte) est une surface de Riemann compacte de genre

$$g = \begin{cases} \frac{d-1}{2} & \text{si } d \text{ est impair} \\ \frac{d-2}{2} & \text{si } d \text{ est pair} \end{cases}$$

Ces courbes sont appelées courbes hyperelliptiques.

Démonstration. C'est un revêtement ramifié de degré 2 de $P_1(\mathbb{C})$: c'est la surface de Riemann associée à la fonction multivaluée

$$x \mapsto \sqrt{p(x)}$$

Il y a ramification d'indice 2 en chaque racine, ainsi qu'en ∞ si $\deg p$ impair. Pour le voir, notons qu'on sait déjà que $\sqrt{\prod (x - a_i)}$ a monodromie double au voisinage d'un a_i . Quand $x = \infty$, on opère la substitution $x = \frac{1}{w}$ et on regarde la monodromie au voisinage de 0. On a

$$\sqrt{\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{w} - a_i\right)} = \sqrt{\frac{1}{w^n}} \cdot \sqrt{\prod_{i=1}^n (1 - a_i w)}$$

Ce dernier terme étant sans monodromie, on cherche juste la monodromie de $w^{-\frac{n}{2}}$ en 0 : quand n est pair, la fonction est univaluée, et sinon la monodromie est double.

Enfin, d'après Riemann-Hurwitz :

$$2 - 2g = 2 \times 2 - \begin{cases} d + 1 & \text{si } d \text{ est impair} \\ d & \text{si } d \text{ est pair} \end{cases}$$

D'où le résultat. \square

En particulier, les courbes elliptiques $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ sont de genre 1.

2.1.3 Uniformisation

Étant donné une surface de Riemann simplement connexe, on entend par uniformisation la mettre en biholomorphisme avec une des trois seules possibles, données par le théorème suivant :

Théorème 2.10 (UNIFORMISATION)

Les seules surfaces de Riemann simplement connexes à biholomorphisme près sont

- $P_1(\mathbb{C})$;
- \mathbb{C} ;
- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$, le demi-plan de Poincaré.

Exemple

Le demi-plan de Poincaré est en biholomorphisme avec le disque unité (ouvert) via l'application holomorphe

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

Plus généralement, un théorème d'analyse complexe, le théorème de l'application conforme, dit que tout ouvert simplement connexe de \mathbb{C} est biholomorphe au disque unité (et donc à \mathbb{H}), s'il est non-vide et différent de \mathbb{C} .

Nous n'utiliserons pas vraiment ce théorème, donc on ne le démontrera pas non plus.

Pour passer à des surfaces de Riemann arbitraires, on va utiliser le revêtement universel. Soit M une surface de Riemann et \tilde{M} son revêtement universel. La projection $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ est un homéomorphisme local. Donc, en transportant localement les cartes, \tilde{M} a une structure de surface de Riemann, l'unique structure complexe telle que π soit holomorphe.

Les automorphismes de revêtement sont eux aussi holomorphes car π est localement un biholomorphisme : si $f \in \text{Aut}(\tilde{M}|M)$, pour $x \in M$ on peut dire qu'on a un biholomorphisme π_1 induit par π entre un voisinage de x et un voisinage de $\pi(x) = \pi(f(x))$, et un biholomorphisme π_2 induit par π entre un voisinage de $f(x)$ et ce même voisinage de $\pi(x) = \pi(f(x))$. Alors f est localement $\pi_2^{-1} \circ \pi_1$, holomorphe.

En vertu du théorème d'uniformisation, $\tilde{M} \cong P_1(\mathbb{C}), \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} . M est alors biholomorphe au quotient de \tilde{M} par le groupe de Galois $\text{Aut}(\tilde{M}|M)$, qui est un sous groupe de $\text{Aut}(\tilde{M})$ agissant sans point fixe.

Il reste à décrire $\text{Aut}(P_1(\mathbb{C}))$, $\text{Aut}(\mathbb{C})$ et $\text{Aut}(\mathbb{H})$.

Théorème 2.11

- $\text{Aut}(P_1(\mathbb{C})) = \text{PSL}_2(\mathbb{C})$.
- $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{a \mapsto az + b \mid (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$
- $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$

Manque surtout montrer que dans le cas \mathbb{C} le sous-groupe est un réseau

2.2 Uniformisation des courbes elliptiques

Le théorème d'uniformisation nous assure donc que toute courbe elliptique peut se mettre sous la forme \mathbb{C}/Λ , où $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ avec $\frac{a}{b} \notin \mathbb{R}$. Le but de cette section est de construire cet isomorphisme en pratique,

et de s'intéresser à l'uniformisation de la famille (dite "de Legendre") des courbes d'équation

$$E_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

quand λ varie dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Cela fait apparaître une équation différentielle holomorphe, l'équation de Picard-Fuchs de cette famille.

2.2.1 Périodes

Proposition 2.12

La forme différentielle

$$\omega = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}$$

est holomorphe sur tout E_λ et ne s'annule pas. De plus, c'est la seule à une constante près.

Le premier groupe d'homologie de E_λ est $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$: il est généré par deux cycles, α et β . On peut donc considérer les intégrales, appelées périodes

$$A = \int_\alpha \omega \quad B = \int_\beta \omega$$

Étant marqué sur le tore le point O d'intersection des deux cycles, on a une application bien définie

$$I : E_\lambda \rightarrow \mathbb{C} / A\mathbb{Z} + B\mathbb{Z}$$

$$P \mapsto \int_O^P \omega$$

l'intégrale le long d'un chemin de O à P étant bien définie modulo les périodes.

Théorème 2.13

I est un biholomorphisme.

Proposition 2.14

A et B sont des fonctions holomorphes en λ .

Théorème 2.15

A et B génèrent l'espace des solutions d'une équation différentielle holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$:

$$\lambda(\lambda-1) \frac{d^2 f}{d\lambda^2} + (2\lambda-1) \frac{df}{d\lambda} f + \frac{1}{4} f$$

Démonstration. $f = \sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-\lambda)^3}}$, df est la bonne forme (celle qu'on veut montrer exacte)
blabla □

2.2.2 Monodromie des périodes en 0 et 1

(Peut-être aussi regarder la famille $(x^2 - \epsilon)(x-1)$ avec les twists de Dehn)

A Catégories et foncteurs

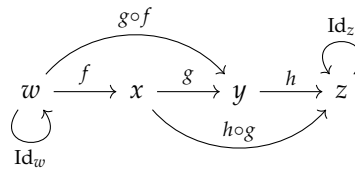
A.1 Premières définitions

Définition A.1

Une catégorie \mathcal{C} est la donnée de

- Une collection d'objets¹ $\text{Ob}(\mathcal{C})$,
- Pour tous objets $x, y \in \mathcal{C}$, une collection de morphismes $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$, tels que les morphismes puissent être composés :
 - Pour tous morphismes $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ et $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, z)$, il existe un morphisme $g \circ f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, z)$,
 - Pour tout objet x , il existe un morphisme $\text{Id}_x \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x)$,
 - On a toujours $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, $f \circ \text{Id}_x = f$ et $\text{Id}_y \circ f = f$.

Beaucoup d'énoncés gagnent à être exprimés sous la forme de diagramme commutatif : par exemple, dans toute catégorie, le diagramme suivant commute.



Autrement dit : quel que soit le chemin choisi entre deux points, la composition de ses arêtes donnera le même résultat.

Exemple (CATÉGORIES CONCRÈTES)

Les premiers exemples de catégories sont des catégories d'ensembles munis d'une structure. Les morphismes sont les applications qui respectent la structure. Ces catégories sont dites concrètes : voici quelques exemples.

catégorie	objets	morphismes
Set	ensembles	fonctions
Set _*	ensembles munis d'un point marqué	fonctions envoyant point marqué sur point marqué
Grp	groupes	morphismes de groupes
Ab	groupes abéliens	morphismes de groupes
Ring	anneaux	morphismes d'anneaux
CRing	anneaux commutatifs	morphismes d'anneaux
Top	espaces topologiques	fonctions continues
X _{Top}	ouverts d'un espace topologique X	inclusions
Vect _k	espaces vectoriels sur k	applications k-linéaires
Mod _A	modules sur A	applications A-linéaires
GSet	groupes munis d'une action d'un groupe G	applications G-équivariantes

1. Cette 'collection' n'est en général pas un ensemble mais une classe propre.

Remarque. On peut considérer des catégories qui ne sont pas des catégories concrètes : par exemple, pour tout monoïde M , on peut définir une catégorie avec un seul objet $*$ et $(\text{Mor}(*, *), \circ) = M$.

Définition A.2 (ÉPI, MONO, ISO)

Un morphisme est dit :

- Un épimorphisme est un morphisme tel que $f \circ g = f \circ h \implies g = h$,
- Un monomorphisme est un morphisme tel que $g \circ f = h \circ f \implies g = h$,
- Un isomorphisme est un morphisme qui possède un inverse.

Attention! Épi- et monomorphismes sont en quelque sorte des avatars des fonctions injectives et surjectives : dans Set , les deux notions correspondent. Mais en général, un épimorphisme n'a pas forcément d'inverse à droite, et un monomorphisme n'a pas forcément d'inverse à gauche. Donc on ne peut pas non plus dire qu'un morphisme qui est à la fois épi- et mono- est un isomorphisme. Par exemple, dans Top , comme l'inverse d'une fonction continue n'est pas forcément continue, un morphisme peut être bijectif donc épi- et mono- mais sans inverse.

Un morphisme qui admet un inverse à droite (resp. à gauche) est dit épimorphisme (resp. monomorphisme) scindé.

Définition A.3

Étant donnée une catégorie \mathcal{C} , la catégorie opposée \mathcal{C}^{op} est la catégorie qui a les mêmes objets, mais les morphismes dans l'autre sens : a un morphisme $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ correspond un morphisme $f^{\text{op}} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(y, x)$.

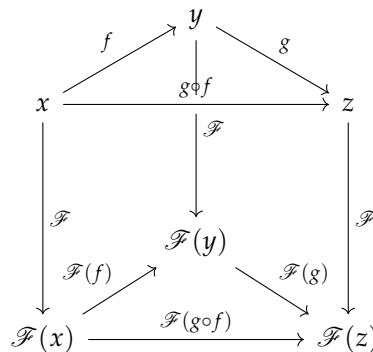
Définition A.4

Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Un foncteur (covariant) \mathcal{F} de \mathcal{C} vers \mathcal{D} associe :

- À tout objet $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ un objet $\mathcal{F}(x) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$,
- À tout morphisme $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ un morphisme $\mathcal{F}(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y))$,

en respectant les lois de composition, autrement dit $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{F}(\text{Id}_x) = \text{Id}_{\mathcal{F}(x)}$.

En diagramme :



Un foncteur contravariant est un foncteur covariant de \mathcal{C} dans \mathcal{D}^{op} .

Exemple (FONCTEUR D'OUBLI)

Si \mathcal{C} est une catégorie concrète, il y a un foncteur vers Set qui à chaque objet associe l'ensemble sous-jacent et à chaque morphisme associe l'application sous-jacente. Ce foncteur est dit foncteur d'oubli.

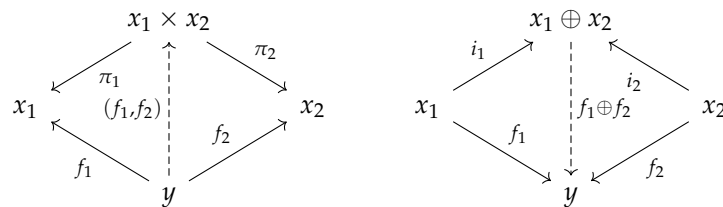
De façon similaire, il y a un foncteur d'oubli de Ab dans Grp , de CRing dans Ring , de Vect_k dans Ab ...

A.2 Constructions universelles

Certaines constructions omniprésentes : produits, quotients, objets libres... peuvent être caractérisées par des propriétés universelles, et ont des analogues catégoriques.

Définition A.5 (PRODUITS, COPRODUITS)

Soit x_1 et x_2 deux objets d'une catégorie. Leur produit $x_1 \times x_2$ (resp. leur coproduit $x_1 \oplus x_2$) est caractérisé par la propriété universelle suivante :



Remarque. Produits et coproduits sont deux constructions duales : le produit dans une catégorie correspond au coproduit dans la catégorie opposée. Le même scénario va se répéter. La propriété universelle est toujours donnée par le même diagramme en renversant le sens des flèches.

Exemple

- Dans Set , le produit est le produit cartésien et le coproduit la somme disjointe.
- Dans Grp , le produit est le produit cartésien et le coproduit est le produit libre, c'est à dire l'ensemble de tous les produits formels d'éléments des deux groupes.
- Dans Ab , le produit et le coproduit sont le produit cartésien. Cela est dû au fait que le produit libre est isomorphe au produit cartésien car les produits d'élément sont tous de la forme gh .
- Dans Vect_k , il est d'usage que le produit soit le produit cartésien et le coproduit soit la somme directe. Mais la somme directe est toujours canoniquement isomorphe au produit cartésien. Donc la situation est la même que pour Ab .
- Dans CRing , le produit est le produit cartésien et le coproduit est le produit tensoriel.
- Dans Top , le produit est le produit cartésien et le coproduit la somme disjointe.
- Dans Top_* , le produit est le produit cartésien et le coproduit la somme pointée.

Remarque. Comme toutes les constructions universelles qui vont suivre, dès que le (co)produit existe, la propriété universelle assure qu'il est unique à unique isomorphisme près.

Définition A.6 (SYSTÈME DIRECT)

Soit I un ensemble ordonné filtrant, c'est à dire un ensemble ordonné tel que toute paire ait un majorant.

On lui associe une catégorie \mathcal{C}_I dont les objets sont les éléments de i et où il existe un unique morphisme de i vers j si et seulement si $i \leq j$.

Un système direct dans \mathcal{C} est un foncteur de \mathcal{C}_I dans \mathcal{C} , autrement dit :

- Pour tout $i \in I$, on a un objet X_i de \mathcal{C} ,
- Pour tout $i \leq j \in I$, on a un morphisme $f_{ij} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X_i, X_j)$.
- Pour tout $i \in I$, $f_{ii} = \text{Id}_{X_i}$.
- Pour tout $i \leq j \leq k \in I$, on a $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$.

Définition A.7 (LIMITE DIRECTE)

Soit (X_i, f_{ij}) un système direct dans \mathcal{C} .

Soit X dans \mathcal{C} muni de morphismes $\phi_i : X_i \rightarrow X$ tel que tous les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_{ij}} & X_j \\ & \searrow \phi_i & \swarrow \phi_j \\ & X & \end{array}$$

Si pour tout autre tel (X', ϕ'_i) les ϕ'_i se factorisent par X , c'est à dire qu'on a un unique morphisme de X dans X' faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_{ij}} & X_j \\ & \searrow \phi_i & \swarrow \phi_j \\ & X & \\ & \downarrow \exists! & \\ & X' & \end{array}$$

on dit que (X, ϕ_i) est la limite directe du système X_i , et on note

$$X = \varinjlim_{i \in I} X_i$$

Exemple

Voici un lien un peu tiré par les cheveux avec les limites topologiques. Soit $I = \mathbb{N}$, et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite. Soit

$$X_n = \overline{\{x_k \mid k \geq n\}}$$

et f_{ij} l'inclusion.

Alors $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) . Quand (x_n) converge, cette limite est un singleton, mais la réciproque n'est pas vraie : une suite peut avoir une unique valeur d'adhérence et diverger.

Exemple

Soit \mathcal{F} un faisceau sur un espace topologique X . On considère l'ensemble des voisinages de $x \in X$, ordonné par \supseteq . C'est bien un ensemble filtrant car

A.3 Foncteurs

Les foncteurs entre deux catégories forment eux-même une catégorie dont les morphismes sont les transformations naturelles :

Définition A.8 (TRANSFORMATION NATURELLE)

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} . Une transformation naturelle N entre \mathcal{F} et \mathcal{G} est la donnée pour tout objet $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ d'un morphisme $N_x \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(x), \mathcal{G}(x))$ tel que les diagrammes suivants commutent pour chaque morphisme $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(y) \\ \downarrow N_x & & \downarrow N_y \\ \mathcal{G}(x) & \xrightarrow{\mathcal{G}(f)} & \mathcal{G}(y) \end{array}$$

On note $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ cette catégorie.

Pour un foncteur, on a plusieurs notions d'injectivité/surjectivité/bijectivité.

Définition A.9

Un foncteur peut être injectif/surjectif/bijectif sur les objets : il induit une injection/bijection/surjection entre les collections d'objets.

Un foncteur peut être essentiellement injectif/surjectif/bijectif : à isomorphisme près, il induit une injection/bijection/surjection entre les collections d'objets. Autrement dit, il est essentiellement injectif quand $\mathcal{F}(x) \cong \mathcal{F}(y) \implies x \cong y$, et il est essentiellement surjectif quand pour tout $y \in \mathcal{D}$, il existe un $x \in \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{F}(x) \cong y$.

Un foncteur \mathcal{F} peut être injectif/surjectif/bijectif sur les morphismes ; autrement dit, il induit une injection/surjection/bijection entre $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ et $\text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y))$. On dira en fait que ce foncteur est respectivement fidèle, plein, et pleinement fidèle.

Proposition A.1 (ÉQUIVALENCE DE CATÉGORIES)

$\mathcal{F} \in [\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ est une équivalence de catégories quand il existe $\mathcal{G} \in [\mathcal{D}, \mathcal{C}]$ tel que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \cong \text{Id}_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \cong \text{Id}_{\mathcal{C}}$. De façon équivalente c'est un foncteur pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Démontrer (8)

Une équivalence de catégories indique donc que les catégories sont les mêmes à isomorphismes d'objets près : plusieurs objets isomorphes entre eux peuvent être identifiés. Par exemple, la catégorie des ensembles est équivalente à celle des cardinaux, tout ensemble étant en bijection avec un unique cardinal.

B (Co)homologie(s)

Je veux juste mettre des définitions ici...

B.1 Algèbre homologique

B.2 Homologie singulière

B.3 Homologie simpliciale

...pour le calcul avec les triangulations...

B.4 Cohomologie de De Rham

...et expliquer au passage ce qu'on fait quand on intègre une forme sur un cycle

Références

- [Con78] John B. CONWAY. *Functions of One Complex Variable*. Springer, 1978.
- [Gui22] Pierre GUILLOT. *Leçons sur l'homologie et le groupe fondamental*. Société Mathématique de France, 2022.
- [Rey89] Éric REYSSAT. *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. Birkhäuser, 1989.
- [Sza09] Tamás SZAMUELY. *Galois Groups and Fundamental Groups*. Cambridge University Press, 2009.

Choses à faire

- ☐ 1 (p. 4) : **Préciser** Rendre un peu plus convaincante la fin
- ☐ 2 (p. 7) : **Préciser** Rendre la démonstration de Cauchy-Lipschitz 2 un peu plus convaincante...
- ☐ 3 (p. 11) : **Inclure** le dessin (en noir) du revêtement
- ☐ 4 (p. 11) : **Dessiner** Pancakes du revêtement trivial
- ☐ 5 (p. 18) : **Dessiner** Quelques bouquets de cercles dans le plan
- ☐ 6 (p. 18) : **Démontrer** Montrer l'injectivité
- ☐ 7 (p. 18) : **Dessiner** Preuve en image de la rétraction
- ☐ 8 (p. 39) : **Démontrer** Critère équivalence catégories