Лабораторная забота №2.

Статистическое моделирование случайных величин. Интервальное оценивание параметров распределения случайных величин.

Часть I.

1. Смоделировать выборку из $\boldsymbol{n}$ независимых наблюдений над случайной величиной $\boldsymbol{X}$, имеющей нормальный закон распределения с параметрами $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\sigma}^2)$.

    1.1. С надежностью $\boldsymbol{\gamma}$ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для математического ожидания случайной величины $\boldsymbol{X}$, предполагая, что дисперсия случайной величины $\boldsymbol{X}$ известна (см. **УКАЗАНИЕ**).

    1.2. С надежностью $\boldsymbol{\gamma}$ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для математического ожидания случайной величины $\boldsymbol{X}$, предполагая, что дисперсия случайной величины $\boldsymbol{X}$ неизвестна (см. **УКАЗАНИЕ**).

    1.3. С надежностью $\boldsymbol{\gamma}$ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для дисперсии случайной величины $\boldsymbol{X}$.

2. Построить зависимость длины доверительного интервала от надежности при неизменном объеме выборки для случаев интервального оценивания математического ожидания и дисперсии.

3. Построить зависимость длины доверительного интервала от объема выборки при неизменной надежности для случаев интервального оценивания математического ожидания и дисперсии.

4. Смоделировать $\boldsymbol{M}$ выборок из $\boldsymbol{n}$ значений нормально распределенной случайной величины $\boldsymbol{X}$ с параметрами $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\sigma}^2)$. По каждой из $\boldsymbol{M}$ выборок с надежностью $\boldsymbol{\gamma}$ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для математического ожидания случайной величины $\boldsymbol{X}$, предполагая, что дисперсия случайной величины $\boldsymbol{X}$ неизвестна.

По результатам моделирования найти точечную оценку $\boldsymbol{\gamma^*}$ надежности $\boldsymbol{\gamma}$.

5. Смоделировать $\boldsymbol{M}$ выборок из $\boldsymbol{n}$ значений нормально распределенной случайной величины $\boldsymbol{X}$ с параметрами $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\sigma}^2)$.

5.1. По каждой из $\boldsymbol{M}$ выборок найти наблюдаемое значение случайной величины $\boldsymbol{Z}$ (описание случайной величины $\boldsymbol{Z}$ приведено в Вашем варианте)

5.2. Каков закон распределения случайной величины $\boldsymbol{Z}$?

5.3. По выборке из $\boldsymbol{M}$ значений случайной величины $\boldsymbol{Z}$ найти выборочные числовые характеристики ее распределения**.**

5.4. Построить гистограмму относительных частот и теоретическую кривую распределения случайной величины $\boldsymbol{Z}$, а также ящичковую диаграмму.

УКАЗАНИЕ. В пунктах 1.1. и 1.2. **Части I** интервальные оценки найти двумя способами. Первый способ заключается в программной реализации формул для вычисления границ интервальной оценки, а второй — в использовании метода **interval** из модуля статистических функций **scipy.stats**.

Часть II.

1. Смоделировать $\boldsymbol{M}$ выборок из $\boldsymbol{n}$ значений нормально распределенной случайной величины $\boldsymbol{X}$ с параметрами $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\sigma}^2)$. По каждой из $\boldsymbol{M}$ выборок с надежностью $\boldsymbol{\gamma}$ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для дисперсии случайной величины $\boldsymbol{X}$.

По результатам моделирования найти точечную оценку $\boldsymbol{\gamma^*}$ надежности $\boldsymbol{\gamma}$.

2. Повторив пункт 1. $\boldsymbol{K}$ раз, получите массив из $\boldsymbol{K}$ значений оценки $\boldsymbol{\gamma^*}$. Найдите выборочные числовые характеристики оценки $\boldsymbol{\gamma^*}$**,** постройте гистограмму относительных частот и бокс-плот. Каким может быть закон распределения оценки $\boldsymbol{\gamma^*}$? Чему равны математическое ожидание и дисперсия оценки $\boldsymbol{\gamma^*}$?

3. Смоделировать $\boldsymbol{M}$ выборок из $\boldsymbol{n}$ значений случайной величины $\boldsymbol{W}$**,** закон распределения которой указан в Вашем варианте. По каждой из $\boldsymbol{M}$ выборок с надежностью $\boldsymbol{\gamma}$ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для дисперсии случайной величины $\boldsymbol{W}$. По результатам моделирования найти точечную оценку $\boldsymbol{\gamma^*}$ надежности $\boldsymbol{\gamma}$.

4. Повторив пункт 3. $\boldsymbol{K}$ раз, получите массив из $\boldsymbol{K}$ значений оценки $\boldsymbol{\gamma^*}$. Найдите выборочные числовые характеристики оценки $\boldsymbol{\gamma^*}$**,** постройте гистограмму относительных частот и бокс-плот. Каким может быть закон распределения оценки $\boldsymbol{\gamma^*}$?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант параметры (a;σ^2)	γ	*n*	*M*	*K*	Случайная величина *Z*	Случайная величина *W*
25 (1;4)	0,99	13	2000	150	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} U_i$; U_1, U_2, U_3, U_4 — случайная выборка из 4 значений случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке [0, 1].
24 (-1;5)	0,95	11	2500	100	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i$; $U_1, U_2, \ldots, U_5$ — случайная выборка из 5 значений случайной величины U, имеющей распределение Хи-квадрат с 6 степенями свободы.
23 (-3;9)	0,90	13	1500	180	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} U_i$; U_1, U_2, U_3— случайная выборка из 3 значений случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке [0, 2].
22 (3;1)	0,99	10	2000	120	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i$; $U_1, U_2, \ldots, U_5$ — случайная выборка из 5 значений случайной величины U, имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1=k_2=5$ степенями свободы.
21 (-2;10)	0,95	15	1900	150	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где	$W = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} U_i$;

					$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$U_1, U_2, \ldots\ldots, U_4$ — случайная выборка из 4 значений случайной величины U, имеющей распределение Хи-квадрат с 4 степенями свободы.
<u>20</u> (-1;5)	0,90	16	2400	100	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} U_i$; $U_1, U_2, \ldots, U_4$— случайная выборка из 4 значений случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке [-1, 0].
<u>19</u> (0,5;16)	0,99	12	1600	160	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{m}$, где $\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$; $S^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_m$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} U_i$; $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_6$ — случайная выборка из 6 значений случайной величины U, имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1 = k_2 = 6$ степенями свободы.
<u>18</u> (-0,5;4)	0,95	14	1800	170	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i$; $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_5$ — случайная выборка из 5 значений случайной величины U, имеющей распределение Хи-квадрат с 4 степенями свободы.
<u>17</u> (-4;6)	0,90	17	1800	180	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;	$W = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} U_i$; $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_4$ — случайная выборка из 4 значений случайной величины U,

					$X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1=k_2=6$ степенями свободы.
16 (0,5;5)	0,99	18	1900	130	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} U_i$; U_1, U_2, U_3, U_4— случайная выборка из 4 значений случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке [-2, 1].
15 (-1;1)	0,95	13	1600	110	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} U_i$; U_1, U_2, U_3, U_4 — случайная выборка из *4* значений случайной величины U, имеющей распределение Хи-квадрат с 3 степенями свободы.
14 (3;2)	0,90	14	1800	160	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i$; $U_1, U_2, \dots\dots, U_5$ — случайная выборка из 5 значений случайной величины U, имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1=k_2=2$ степенями свободы.
13 (4;9)	0,99	18	2300	170	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i$; $U_1, U_2, U_3, \dots, U_5$— случайная выборка из 5 значений случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке [-3, 3].

<u>12</u> (2;7)	0,95	20	1800	140	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i$; $U_1, U_2, \dots\dots, U_5$ — случайная выборка из 5 значений случайной величины U, имеющей распределение Хи-квадрат с 2 степенями свободы.
<u>11</u> (5;8)	0,90	17	1900	180	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} U_i$; $U_1, U_2, \dots\dots, U_6$ — случайная выборка из 6 значений случайной величины U, имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1=k_2=2$ степенями свободы.
<u>10</u> (1;2)	0,99	10	1750	175	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} U_i$; U_1, U_2, U_3, U_4— случайная выборка из 4 значений случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке [-1, 0].
<u>9</u> (2;1)	0,95	13	1950	125	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} U_i$; $U_1, U_2, \dots\dots, U_6$ — случайная выборка из 6 значений случайной величины U, имеющей распределение Хи-квадрат с 2 степенями свободы.
<u>8</u> (3;2)	0,90	17	1890	135	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$;	$W = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} U_i$; $U_1, U_2, \dots\dots, U_6$ — случайная выборка из 6 значений случайной

					$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	величины U, имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1=k_2=3$ степенями свободы.
7 (-5;8)	0,99	15	2100	160	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} U_i$; U_1, U_2, U_3— случайная выборка из 3 значений случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке [-2, 0].
6 (7;25)	0,95	14	1890	170	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} U_i$; U_1, U_2, U_3, U_4 — случайная выборка из 4 значений случайной величины U, имеющей распределение Хи-квадрат с 3 степенями свободы.
5 (-1;16)	0,90	16	1950	180	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} U_i$; $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_6$ — случайная выборка из 5 значений случайной величины U, имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1=k_2=3$ степенями свободы.
4 (2;21)	0,99	17	1300	130	$Z = \frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i$; $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_5$— случайная выборка из 5 значений случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке [-1,0].

3 (5;25)	0,95	12	1600	160	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i$; $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_5$ — случайная выборка из 5 значений случайной величины U, имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1=k_2=4$ степенями свободы.
2 (2;9)	0,90	19	2100	200	$Z = \frac{\bar{X} - a}{S}\sqrt{n}$, где $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из n значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i$; $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_5$ — случайная выборка из 5 значений случайной величины U, имеющей распределение Хи-квадрат с 2 степенями свободы.
1 (5;4)	0,99	20	1750	150	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ — случайная выборка из m значений случайной величины X; $X \sim N(a, \boldsymbol{\sigma^2})$	$W = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} U_i$; $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_5$— случайная выборка из 5 значений случайной величины U, равномерно распределенной на отрезке [0, 3].