Лабораторная забота №2.

Статистическое моделирование случайных величин. Интервальное оценивание параметров распределения случайных величин.

Часть І.

- 1. Смоделировать выборку из n независимых наблюдений над случайной величиной X, имеющей нормальный закон распределения с параметрами (a, σ^2) .
 - 1.1. С надежностью γ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для математического ожидания случайной величины X, предполагая, что дисперсия случайной величины X известна (см. УКАЗАНИЕ).
 - 1.2. С надежностью γ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для математического ожидания случайной величины X, предполагая, что дисперсия случайной величины X неизвестна (см. YKA3AHUE).
 - 1.3. С надежностью γ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для дисперсии случайной величины X.
- 2. Построить зависимость длины доверительного интервала от надежности при неизменном объеме выборки для случаев интервального оценивания математического ожидания и дисперсии.
- 3. Построить зависимость длины доверительного интервала от объема выборки при неизменной надежности для случаев интервального оценивания математического ожидания и дисперсии.
- 4. Смоделировать M выборок из n значений нормально распределенной случайной величины X с параметрами (a, σ^2) . По каждой из M выборок с надежностью γ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для математического ожидания случайной величины X, предполагая, что дисперсия случайной величины X неизвестна.

По результатам моделирования найти точечную оценку γ^* надежности γ .

- 5. Смоделировать M выборок из n значений нормально распределенной случайной величины X с параметрами (a, σ^2) .
- 5.1. По каждой из M выборок найти наблюдаемое значение случайной величины Z (описание случайной величины Z приведено в Вашем варианте)
- 5.2. Каков закон распределения случайной величины Z?
- 5.3. По выборке из M значений случайной величины Z найти выборочные числовые характеристики ее распределения.
- 5.4. Построить гистограмму относительных частот и теоретическую кривую распределения случайной величины \mathbf{Z} , а также ящичковую диаграмму.

УКАЗАНИЕ. В пунктах 1.1. и 1.2. **Части I** интервальные оценки найти двумя способами. Первый способ заключается в программной реализации формул для вычисления границ интервальной оценки, а второй — в использовании метода **interval** из модуля статистических функций **scipy.stats**.

Часть II.

1. Смоделировать M выборок из n значений нормально распределенной случайной величины X с параметрами (a, σ^2) . По каждой из M выборок с надежностью γ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для дисперсии случайной величины X.

По результатам моделирования найти точечную оценку у* надежности у.

- 2. Повторив пункт 1. K раз, получите массив из K значений оценки γ^* . Найдите выборочные числовые характеристики оценки γ^* , постройте гистограмму относительных частот и бокс-плот. Каким может быть закон распределения оценки γ^* ? Чему равны математическое ожидание и дисперсия оценки γ^* ?
- 3. Смоделировать M выборок из n значений случайной величины W, закон распределения которой указан в Вашем варианте. По каждой из M выборок с надежностью γ найти интервальную оценку (доверительный интервал) для дисперсии случайной величины W. По результатам моделирования найти точечную оценку γ^* надежности γ .
- 4. Повторив пункт 3. **К** раз, получите массив из **К** значений оценки γ^* . Найдите выборочные числовые характеристики оценки γ^* , постройте гистограмму относительных частот и бокс-плот. Каким может быть закон распределения оценки γ^* ?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант	γ	n	M	K	Случайная величина	Случайная
					Z	величина
параметры						W
$\frac{(a;\sigma^2)}{25}$	0,99	13	2000	150	Z X̄−a ┌─	1 1 24 11
<u>23</u>	0,22	13	2000	130	$Z = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n},$	$W = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 U_i;$
(1;4)					где	U_1, U_2, U_3, U_4 — случайная
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	выборка из 4
					$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2;$	значений
						случайной
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	величины U ,
					выборка из n значений случайной величины X ;	равномерно
					$X \sim N(a \sigma^2)$	распределенной на отрезке [0, 1].
24	0,95	11	2500	100	$X \sim N(a, \sigma^2)$ $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$	$W = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} U_i;$
(-1;5)						_
					ГДе $C^2 = {}^1 \nabla^n (V \overline{V})^2$.	U_1, U_2, \dots, U_5 — случайная
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	выборка из 5
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	значений
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	случайной
					выборка из m значений случайной величины X ;	величины U , имеющей
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	распределение
					11 11 (11, 01)	Хи-квадрат с 6
						степенями
23	0,90	13	1500	180	_ \(\bar{X} - a \) \(\bar{\sigma} \)	свободы.
(-3;9)	0,90	13	1300	100	$Z = \frac{\overline{X} - a}{S} \sqrt{n},$	$W = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} U_i;$
					где	U_1, U_2, U_3 — случайная
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	выборка из 3
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	значений
						случайной
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	величины U ,
					выборка из n значений случайной величины X ;	равномерно распределенной
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	на отрезке [0, 2].
<u>22</u>	0,99	10	2000	120	$X \sim N(a, \sigma^2)$ $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$	$W = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 U_i;$
$\frac{22}{(3;1)}$						U_1, U_2, \dots, U_5
					Где $S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	случайная
					10 1	выборка из 5
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	значений
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная выборка из m значений	случайной величины U ,
					выоорка из m значении случайной величины X ;	имеющей
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	распределение
						Фишера-
						Снедекора с k ₁ =k ₂ =5
						к1=к2=3
						свободы.
21	0,95	15	1900	150	$Z = \frac{\bar{X} - a}{s} \sqrt{n},$	$W = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 U_i;$
(-2;10)					где	7

					$ar{X} = rac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$ $S^2 = rac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - ar{X})^2;$ X_1, X_2, \dots, X_n — случайная выборка из n значений случайной величины X ; $X \sim N(a, \sigma^2)$	U_1, U_2, \dots, U_4 — случайная выборка из 4 значений случайной величины U , имеющей распределение X и-квадрат с 4 степенями свободы.
20 (-1;5)	0,90	16	2400	100	$Z=rac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$ где $S^2=rac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-ar{X})^2;$ $ar{X}=rac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i;$ X_1,X_2,\ldots,X_n — случайная выборка из m значений случайной величины $X;$ $X\sim N(a,\sigma^2)$	$W = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} U_i;$ $U_1, U_2,, U_4$ — случайная выборка из 4 значений случайной величины U , равномерно распределенной на отрезке $[-1, 0]$.
1 <u>9</u> (0,5;16)	0,99	12	1600	160	$Z = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{m},$ где $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i;$ $S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X})^2;$ X_1, X_2, \dots, X_m — случайная выборка из m значений случайной величины X ; $X \sim N(a, \sigma^2)$	$W = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} U_i;$ U_1, U_2, \dots, U_6 — случайная выборка из 6 значений случайной величины U , имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1 = k_2 = 6$ степенями свободы.
18 (-0,5;4)	0,95	14	1800	170	$Z = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n},$ где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2;$ X_1, X_2, \dots, X_n — случайная выборка из n значений случайной величины X ; $X \sim N(a, \sigma^2)$	$W = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} U_i;$ U_1, U_2, \dots, U_5 — случайная выборка из 5 значений случайной величины U , имеющей распределение X и-квадрат с 4 степенями свободы.
17 (-4;6)	0,90	17	1800	180	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$ где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2;$ $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i;$	$W = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} U_i;$ U_1, U_2, \dots, U_4 — случайная выборка из 4 значений случайной величины U ,

16	0,99	18	1900	130	X_1, X_2, \dots, X_n — случайная выборка из m значений случайной величины X ; $X \sim N(a, \sigma^2)$ $Z = \frac{\bar{X} - a}{s} \sqrt{n},$	имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1=k_2=6$ степенями свободы. $W = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 U_i;$
(0,5;5)		,			где $ \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i; $ $ S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2; $ $ X_1, X_2, \dots, X_n \longrightarrow \text{случайная} $ выборка из n значений	$W = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} U_i$, U_1, U_2, U_3, U_4 — случайная выборка из 4 значений случайной величины U , равномерно распределенной на отрезке $[-2, 1]$.
15 (-1;1)	0,95	13	1600	110	Случайной величины X ; $X \sim N(a, \sigma^2)$ $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$ где $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2;$ $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i;$ X_1, X_2, \dots, X_n — случайная выборка из m значений случайной величины X ; $X \sim N(a, \sigma^2)$	$W = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} U_i;$ U_1, U_2, U_3, U_4 — случайная выборка из 4 значений случайной величины U , имеющей распределение X и-квадрат с 3 степенями свободы.
14 (3;2)	0,90	14	1800	160	$Z = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n},$ где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2;$ X_1, X_2, \dots, X_n — случайная выборка из n значений случайной величины X ; $X \sim N(a, \sigma^2)$	$W = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} U_i;$ U_1, U_2, \dots, U_5 — случайная выборка из 5 значений случайной величины U , имеющей распределение Фишера-Снедекора с $k_1=k_2=2$ степенями свободы.
1 <u>3</u> (4;9)	0,99	18	2300	170	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$ где $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2;$ $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i;$ X_1, X_2, \dots, X_n — случайная выборка из m значений случайной величины $X;$ $X \sim N(a, \sigma^2)$	$W = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} U_i;$ $U_1, U_2, U_3,, U_5$ — случайная выборка из 5 значений случайной величины U , равномерно распределенной на отрезке $[-3, 3]$.

•						
(2;7)	0,95	20	1800	140	$Z = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n},$ где	$W = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} U_i; U_1, U_2, \dots, U_5 $
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	случайная
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	выборка из 5
						значений случайной
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	величины U ,
					n_1, n_2, \dots, n_n езу іншал выборка из n значений	имеющей
					случайной величины X ;	распределение
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	Хи-квадрат с 2
						степенями
						свободы.
$\frac{11}{(5.0)}$	0,90	17	1900	180	$Z = \frac{(n-1)S^2}{r^2},$	$W = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} U_i;$
(5;8)					σ ² где	U_1, U_2, \ldots, U_6
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	случайная
					1 2 2	выборка из 6
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	значений
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	случайной
					выборка из т значений	величины U , имеющей
					случайной величины X ; $X \sim N(a, \sigma^2)$	распределение
					$X^{\bullet,N}(u, o)$	Фишера-
						Снедекора с
						k1=k2=2
						степенями
10	0.00	10	1770	177	V a	свободы.
$\frac{10}{(1;2)}$	0,99	10	1750	175	$Z = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n},$	$W = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 U_i;$
(1,2)					где	U_1, U_2, U_3, U_4 —
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	случайная
					$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2;$	выборка из 4 значений
					n-1 $2i-1$ i	случайной
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	величины U ,
					выборка из п значений	равномерно
					случайной величины Х;	распределенной
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	на отрезке [-1, 0].
9	0,95	13	1950	125	$X \sim N(a, \sigma^2)$ $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$	$W = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} U_i;$
(2;1)					σ ² где	U_1, U_2, \ldots, U_6
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	случайная
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	выборка из 6
					I t	значений
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	случайной величины U ,
					выборка из m значений случайной величины X ;	имеющей
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	распределение
					12 11 (60, 0)	Хи-квадрат с 2
						степенями
	0.00	4.7	1000	105	V	свободы.
$\frac{8}{(3\cdot 2)}$	0,90	17	1890	135	$Z = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n},$	$W = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} U_i;$
(3;2)					где	U_1, U_2, \ldots, U_6
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	случайная
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	выборка из б
					$\int_{n-1}^{\infty} \int_{n-1}^{\infty} \int_{n$	значений
						случайной

			1	ı		
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	величины U ,
					выборка из <i>п</i> значений	имеющей
					случайной величины X ;	распределение
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	Фишера-
						Снедекора с
						$k_1=k_2=3$
						степенями
						свободы.
<u>7</u>	0,99	15	2100	160	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$	$W = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 U_i;$
<u>7</u> (-5;8)					0-	U_1, U_2, U_3 —
					где	случайная
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	выборка из 3
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	значений
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	случайной
					A_1, A_2, \dots, A_n — случаиная выборка из m значений	величины U ,
					_ =	равномерно
					случайной величины X ;	равномерно
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	на отрезке [-2, 0].
6	0,95	14	1890	170	\bar{X} -a \bar{X}	_
$\frac{6}{(7;25)}$	0,73	14	1070	1/0	$Z = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n},$	$W = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 U_i;$
(,,25)					где	U_1, U_2, U_3, U_4 —
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	случайная
					1 11	выборка из 4
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	значений
						случайной
					X_1, X_2, \ldots, X_n — случайная	величины U ,
					выборка из п значений	имеющей
					случайной величины X ;	распределение
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	Хи-квадрат с 3
						степенями
						свободы.
<u>5</u>	0,90	16	1950	180	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$	$W = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 U_i;$
(-1;16)					σ² где	U_1, U_2, \dots, U_6
					7 7	случайная
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	выборка из 5
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	значений
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	случайной
					N_1, N_2, \dots, N_n — случайнай выборка из m значений	величины U ,
					случайной величины X;	имеющей
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	распределение
					Λ - Ν (u, U)	Фишера-
						Снедекора с
						k1=k2=3
						степенями
						свободы.
4	0,99	17	1300	130	$\bar{X} - \bar{X} - a$	$W = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} U_i;$
(2;21)	0,77	1/		150	$Z = \frac{\bar{X} - a}{S} \sqrt{n},$	
(2,21)					где	$U_1, U_2, U_3, \dots, U_5$ —
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	случайная
					10	выборка из 5
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	значений
						случайной
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	величины U ,
					выборка из <i>п</i> значений	равномерно
					случайной величины Х;	распределенной
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	на отрезке [-1,0].
				1	\-'''' \-	

_			T		T	
$\frac{3}{(5;25)}$	0,95	12	1600	160	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$	$W = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 U_i;$
(3,23)					где	U_1, U_2, \ldots, U_5
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	случайная
					, , , <u>, , , , , , , , , , , , , , , , </u>	выборка из 5
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	значений
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	случайной
					выборка из т значений	величины U ,
					случайной величины X;	имеющей
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	распределение
						Фишера-
						Снедекора с
						k1=k2=4
						степенями
						свободы.
2	0,90	19	2100	200	$Z = \frac{\bar{X} - a}{c} \sqrt{n},$	$W = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 U_i;$
(2;9)					где	U_1, U_2, \dots, U_5
					$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	случайная
					16	выборка из 5
					$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2;$	значений
						случайной
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	величины U ,
					выборка из п значений	имеющей
					случайной величины X ;	распределение
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	Хи-квадрат с 2
						степенями
						свободы.
<u>1</u> (5:4)	0,99	20	1750	150	$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$	$W = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 U_i;$
(5;4)					где	$U_1, U_2, U_3, \dots, U_5$ —
					$S^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \bar{X})^{2};$	случайная
						выборка из 5
					$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i;$	значений
					X_1, X_2, \dots, X_n — случайная	случайной
					выборка из т значений	величины U ,
					случайной величины X ;	равномерно
					$X \sim N(a, \sigma^2)$	распределенной
						на отрезке [0, 3].