Esercizi di Matematica Discreta e Logica (Risolti)

BRANDON JAVIER MONDOY MARTINEZ

October 2024

Contents

1 Premessa

Tutti noi abbiamo più o meno presente che la matematica è una materia schematica. Più sei bravo a riconoscere degli schemi (pattern) all'interno di una qualsiasi struttura, maggiore sarà la tua capacità di comprendere la matematica, di conseguenza maggiore la tua "bravura" nell'usarla. Eppure cervelli diversi ragionano in maniera diversa e io non ho mai capito perché per alcuni la matematica debba essere una materia "esclusiva", solo per i "secchioni" o quelli che, fortunatamente, hanno avuto qualcuno nei loro primi stadi di sviluppo che li ha indicato come riconoscere schemi. Smettete di credere alle balle del 200 IQ, che la gente nasce così. Non è vero, sono ratti da laboratorio pure loro. Non porto argomenti a riguardo perché il documento non tratta quello. Fatto sta che, per me, il ragionamento logico matematico, il problem solving, le modalità di ragionamento scientifiche, devono e sono patrimonio dell'umanità. Di tutti. Grandi, piccoli. "Superdotati" e normodotati. Artisti e ingegneri.

Ragionare in maniera logica, trovare soluzioni ai problemi in maniera efficiente, è un requisito di ogni buon cittadino e quindi è un dovere per coloro che hanno capito come fare, alleggerire e spianare la strada a quelli che verranno dopo. Sostengo fedelmente che chiunque sia capacitato al comprendere, al vedere, al captare, all'annussare, degli schemi complessi, (che poi dopo un po' non sono nemmeno più complessi perché non sono altro che 'iterazioni di schemi similari), sono chiamati a divulgare ciò che conoscono in maniera **chiara** e **funzionale**. E' un paradosso pensare che coloro che conoscono i "segreti" della matematica, e che quindi sanno come "accomodarsi" i problemi per risolverli, poi non forniscono alle persone che vengono dopo tutto il materiale, il ragionamento, la capacità di pensiero, gli schemi, le modalità di applicazione... Non è una questione di quanto siete bravi a comprendere, o della difficoltà dell'argomento/esercizio, perché se vi sembra impossibile, allora qualcuno vi ha mostrato soltanto una faccia della medaglia. C'è sempre un modo, una via, per tutti. Non solo per quelli più predisposti. E questo non solo nella *matematica*.

2 Foglio 1

2.1 Esercizio 1

Per risolvere questo problema dobbiamo andare per definizioni.
Definiamo quindi

$$C = \{x \in A \wedge x \notin B\} = A/B$$

Dopo dobbiamo vedere che cosa otteniamo con

$$(1) \quad A/C = \{x \in A \wedge x \notin C\}$$

Quindi penso il $\notin$ come una specie di negazione. Pensiamo quindi qual è la negazione di C.

$$\mathrm{NOT}(C) = \{x \notin A \vee x \in B\}$$

che se ricombiniamo con la (1) otteniamo

$$A/C = \{x \in A \wedge (\{x \notin A \vee x \in B\})\}$$

Il segno $\vee$ si interpreta come un 'oppure'. Quindi possiamo immaginarci di posizionarci all'and ($\wedge$) dopo A e avere le possibilità di scegliere una delle opzioni dentro la parentesi tonda.
Scegliessimo la prima otterremo qualcosa di ambiguo come $a \in A \wedge a \notin A$ che sarebbe un controsenso. Concentriamoci quindi sulla seconda parte e avremo:

$$A/C = \{x \in A \wedge x \in B\} \underbrace{=}_{\text{per definizione}} A \cap B$$

2.2 Esercizio 2

2.2.1 1° modo di vedere le cose

Cerco di visualizzare la questione in questo modo. (così da intuirlo)
La partizione non fa altro che espandere il set di valori in uno schema ben determinato: 1) prima prendo tutti gli elementi in maniera singola (singoletti); 2) poi comincio a prenderli 2-2; 3) 3 a 3; . . .
Se ci si pensa un attimo se all'inizio qualcosa accomunava i due insiemi AeB questo sarà sempre vero, ma secondo lo schema della partizione, una volta che la partizione sarà compiuta.

2.2.2 2° modo formale di vedere la faccenda

Pensiamo un attimo alla relazione fra $\in$ e $\subseteq$. C'è qualcosa che li accomuna?
Supponiamo (seppur formalmente sbagliato) che nella definizione di partizione io scambi le simbologie.

$$P'(A) = \{x \mid x \in A\}$$

Se seguiamo le definizioni dell'intersezione arriveremo quindi alla conclusione che sia vero.
In più pensiamo al fatto che se un set è sottoinsieme di un secondo è per forza vero che il primo set appartiene al secondo.
Può sembrare confusionario tutto questo perché stiamo andando più per ragionamenti che per sequenze di simboli, ma è solo uno spunto per dimostrare la faccenda in maniera intuitiva. Si può comunque dimostarla in maniera più rigida e formale.

2.3 Esercizio 3

(a) vero

(b) vero

(c) falso

(d) falso

(e) vero

(f) falso

(g) falso

(h) falso

(i) vero

(j) falso

(k) falso

(l) falso

La notazione non è precisa perché l'alfabeto usato nella lista sopra è quello completo. Al posto di 'j' ci dovrebbe essere 'm' e così via.
Importante notare che $\{a\}$ è diverso da $\{\{a\}\}$ è che $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a\}$ semplicemente perché il primo è più grande del secondo e quindi non ci potrebbe "rientrare"

2.4 Esercizio 4

1. $A \cap B = \{0\}$
2. $A \backslash B = \emptyset \Rightarrow B \backslash \emptyset = B$
3. $A \triangle B = \underbrace{(A \backslash B)}_{=\emptyset} \cup (B \backslash A) = \{\{0\}\}$
4. $(B \cup C) \backslash A \underbrace{=}_{B \subset C} = C \backslash A = \{\{0\}, \{\{0\}\}\}$
5. $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{0\}$
   perché A e B hanno solo A in comune e stessa cosa per la coppia A-C.

2.5 Esercizio 5

- E' iniettiva perché non si presenta la casistica $f(x_1) = f(x_2)$ e questo lo si può dire perché fra i numeri naturali c'è sempre un "buco". Intendo dire che per ragionamento induttivo possiamo dimostrare che $f(x_1) \neq (fx_2)$ sempre
- Non è suriettiva, basta usare il controesempio $\frac{3}{2}$. Non esiste un valore del dominio che mi porti a questo valore del codomio, che ricordiamo essere quello dei numeri razionali. $f(1) = \frac{1}{2} \quad f(2) = \frac{2}{3} \quad f(3) = \frac{3}{4}$

2.6 Esercizio 6

2.7 Esericizio 7

2.8 Esericizio 8

2.9 Esericizio 9

Inanzitutto noto che:

$$X_0 \subset X \subset P(X)$$

poi

$$f(f(Y)) = Y \triangle (Y \triangle X_0) \Rightarrow (Y \triangle Y) \triangle X_0$$

quindi

$$(Y \triangle Y) \triangle X_0 \Rightarrow \emptyset \triangle X_0 \underbrace{=}_{\text{per definizione}} (\emptyset \backslash X_0) \cup (X_0 \backslash \emptyset) = X_0$$

Questa dimostrazione comincia ad essere leggermente laboriosa per me, quindi quello che faccio è ragionare sulla struttura del problema.
Le due ragioni che mi possono dire se è iniettiva e suriettiva stanno:

1. Nel dominio e codominio
2. Nel modo in cui uso la funzione

Può sembrare banale e ovvio, ma evidenziamolo lo stesso per trovare dove fare perno con la dimostrazione.

3 Foglio 2

Questo esercizio richiede di trovare la formula chiusa di relazioni ricorsive lineari **omogenee**.

Se ho una forma del tipo

$$b_n a_n = b_{n-1} a_{n-1} + b_{n-2} a_{n-2}$$

Il polimonio caratteristico è il seguente.

$$b_n x^2 - b_{n-1} x - b_{n-2}$$

Più di così raramente si troverà un polinomio. Equazioni maggiori di secondo grado cominciano a dare problemi più complessi.

Se non si trova una forma del genere subito:

1. Vi si riconduce
2. in più... mai dovesse essere maggiore del grado 2 il polinomio caratteristico, allora si riporta a una forma di secondo grado.

3.1 Esercizio 1

$$\frac{1}{3} a_n = a_{n-1} - \frac{2}{3} a_{n-2}$$

Nell'esercizio 1, fortunatamente, troviamo una forma che ci piace, quindi estriamo subito il polinomio caratteristico.

$$P(x) = \frac{x^2}{3} - x + \frac{2}{3}$$

Di questo polinomio vanno trovate le radici. Io lo faccio fare direttamente al computer perché ho fatto più equazioni di secondo grado che respiri.
Le radici sono 1 e 2. Bastra controllare su: Wolfram Alpha

Quindi adesso dobbiamo scrivere una formula ricorsiva della seguente forma.

$$a_n = b_1(1)^n + b_2(2)^n$$

Per rivelare quali sono i valori di b1 e b2, dobbiamo porre le condizioni iniziali che ci sono state date. Cioè le seguenti.

$$a_0 = 1, a_1 = 2$$

Abbiamo quindi lo schema seguente:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ 1b_1 + 2b_2 = 2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema per ottenere entrambe le b.

NOTA: ci possono essere dei casi dove le radici hanno molteplicità maggiore di 1, in quei casi bisogna impostare una formula ricorsiva, dopo aver trovato le radici, tenendo conto di una regola. Nei seguenti esercizi è presente.

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \end{cases}$$

Poi la soluzione finale è questa:

$$a_n = 2^n$$

3.2 Esercizio 2

$$a_{n+3} = 7a_{n+2} - 16a_{n-1} + 12a_n$$

In questo caso vogliamo avere una formula come l'avevamo prima. $a_n = a_{n-1} \ldots$. Insomma, una formula che abbia gli indici decrescente.

$$n + 3 = m,\ n + 2 = m - 1,\ n + 1 = m - 2,\ n = m - 3$$

Quindi la nostra vecchia formula ricorsiva diventa:

$$a_m = 7a_{m-1} - 16a_{m-2} + 12a_{m-3}$$

che di conseguenza è

$$a_m - 7a_{m-1} + 16a_{m-2} - 12a_{m-3} = 0$$

A cui corrisponde un polinomio caratteristico:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$$

che devo ovviamente ricondurre a dei polinomi di secondo o di primo grado. Noto che sicuramente c'è un quadrato di binomio. Quindi vado per tentativi e provo a caso:

$$(x - 2)^2 = x^2 + 4 - 4x$$

forse meglio ancora questo (?)

$$(x - 4)^2 = x^2 + 16 - 8x$$

il termine noto è -12 quindi, non credo vadano bene.
Questo è un problema da studiare a parte: un algoritmo per ricavare la migliore ricondurre, quando possibile, a equazioni di secondo e primo grado. (sicuramente c'è, ma io sono troppo pigro per andare a ricercarlo).
Uso WorframAlpha e ottengo che:

$$(x - 3)(x - 2)^2$$

Quindi riscriviamo la nostra formula chiusa con valori b_n ancora ignoti.

$$a_n = b_1(3)^n + (b_2 + nb_3)(2)^n$$

dallo schema delle radici che hanno molteplicità maggiore di uno posso intuire che ci sarà uno schema del tipo n^0, n^1, n^2 di conseguenza qualcosa tipo:

$$(b_n + nb_{n+1} + n^2 b_{n+2} \ldots)(c)^n$$

Ma queste sono delle mie supposizioni da sconfutare, quindi andiamo avanti. Impostiamo il sistema da risolvere con le condizioni iniziali.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} a_{\color{red}n} = b_1(3)^n + (b_2 + nb_3)(2)^n \\ a_n = b_1(3)^n + (b_2 + nb_3)(2)^n \\ a_n = b_1(3)^n + (b_2 + nb_3)(2)^n \\ a_{\color{red}0} = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Adesso alla n sostituiamo il suo valore. Sottolineo in rosso la dove si riproduce lo schema.

quindi quello che otteniamo è:

$$\begin{cases} a_0 = b_1 + b_2 = 0 \\ a_1 = 3b_1 + 2b_2 + 2b_3 = 1 \\ a_2 = 9b_1 + 4b_2 + 8b_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ 3b_1 + 2b_2 + 2b_3 = 1 \\ 9b_1 + 4b_2 + 8b_3 = 1 \end{cases}$$

Soluzione del sistema su WolframAlpha

$$\begin{cases} b_1 = -3 \\ b_2 = 3 \\ b_3 = 2 \end{cases}$$

$$a_n = -3(3)^n + (3 + 2n)(2)^n$$

E così finisce l'esercizio.

3.3 Esercizio 3

Il problema posto è il seguente.

$$a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-3}$$

giusto per averle già pronte, le condizioni iniziali sono le seguenti...

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 4 \\ a_2 = 28 \\ a_3 = 32 \end{cases}$$

Riscriviamo nel seguente modo:

$$a_n - 8a_{n-2} + 16a_{n-3} = 0$$

il polinomio caratteristico risulta quindi

$$P(x) = x^4 - 8x^2 - 16$$

La cui scomposizione è:

$$(x^2 - 4)^2 - 32$$

e le cui radici sono:

$$x_1 = -2\sqrt{1\sqrt{2}},\ x_2 = 2\sqrt{1\sqrt{2}},$$

Entrambi le radici hanno una molteplicità doppia, di secondo grado. Perciò quello che scriviamo successivamente è:

$$a_n = (b_1 + nb_1)(-2\sqrt{1\sqrt{2}})^n + (b_2 + nb_2)(2\sqrt{1\sqrt{2}})^n$$

che a parer mio assomiglia sempre di più a mostro. In particolar modo risolverlo.

$$\begin{cases} a_0 = b_1 + b_2 = 1 \\ a_1 = (b_1 + b_1)(-2\sqrt{1\sqrt{2}}) + (b_2 + b_2)(2\sqrt{1\sqrt{2}}) = 4 \\ a_2 = (b_1 + 2b_1)(-2\sqrt{1\sqrt{2}})^2 + (b_2 + 2b_2)(2\sqrt{1\sqrt{2}})^2 = 28 \\ a_3 = (b_1 + 3b_1)(-2\sqrt{1\sqrt{2}})^3 + (b_2 + 3b_2)(2\sqrt{1\sqrt{2}})^3 = 32 \end{cases}$$

La bestia malforme continua a prendere spazio.
Ma dato che siamo informatici, e che le macchine sono fatte apposta per questa ragione, non mi metterò sicuramente a svolgere tutto questo.

$$b_1 = 0,\ b_2 = 1$$

E qui ci fidiamo di GianPaolo Tirreno (GPT). Il risultato finale è.

$$a_n = (1 + n)(2\sqrt{1\sqrt{2}})^n$$

4 Foglio 3

4.1 Esercizio 1

La risoluzione di

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4(n-3)$$

si trova cercando prima la soluzione omogenea. Quindi si passa come primo punto dal polinomio caratteristico.

$$p(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

Quindi abbiamo la radice $x_1 = 3$ che ha molteplicità 2.
Scriviamo quindi che la forma chiusa si risolverà una volta portato a termine il seguente sistema.

$$\begin{cases} (b_1 + nb_2)x^n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

Al posto della x ci va la radice che abbiamo trovato. In questo caso sarebbe quindi il numero 3. Al posto di n ci va il pedice della a, infatti vedremo infatti che la prima equazione avrà 3^0.

$$\begin{cases} (b_1 + 0 * b_2)3^0 = 1 \\ (b_1 + 1b_2)3^1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ 3b_1 + 3b_2 = 4 \Rightarrow 3 + 3b_2 = 4 \Rightarrow b_2 = 1/3 \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato b1, b2.
Il risultato della parte omogenea risulta essere:

$$(1 + \frac{1}{3}n)3^n$$

Adesso passiamo a risolvere la parte non omogenea La soluzione totale del problema si ha trovando una soluzione particolare alla $f(x) = 4(n-3)$ nel seguente modo.

$$b_n = dn - c \Rightarrow b_n = 4n - 12$$

adesso sostituisco $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4(n-3)$ dentro b_n. Ottengo:

$$d * (n) - c = d(n-1) - c - d(n-2) + c + 4(n-3)$$

Con questo intendo cercare una soluzione particolare alla parte non omogenea. Inizio quindi a svolgere il tutto per avere un risultato. Arrivo a ottenere.

$$n(-d + 4) + (c + 2 - 12 - d) = 0$$

e risolvo il sistema...
$$\begin{cases} -d+4=0 \\ c-10-d=0 \end{cases}$$
trovando che le soluzioni sono:
$$\begin{cases} d=4 \\ c=14 \end{cases}$$
Quindi... riosservando la formula iniziale
$$b_n = dn - c$$
abbiamo che
$$b_n = 4n - 14$$
Adesso dell'esercizio prima possiamo usare la formula chiusa generica. Alla quale sommiamo la soluzione particolare della parte non omogenea.
$$(b_1 + nb_2)x^n + 4n - 14$$
L'ultimo passaggio sta nell'imporre le condizioni iniziali.
$$\begin{cases} (b_1+(0)b_2)3^0+4(0)-14=1 \\ (b_1+(1)b_2)3^1+4(1)-14=4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_1=15 \\ b_2=-\frac{31}{3} \end{cases}$$
quindi...
$$(15 - \frac{31}{3}n)3^n$$
è la soluzione finale dell'esercizio.

4.2 Esercizio 4

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

(1) $R_1 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d)\}$

1. Non abbiamo la presenza della proprietà riflessiva. Perché manca (c,c). Quindi lo dimostriamo già con questo controesempio.
2. Prendiamo (a,b) e (b,a). E' immediato vedere che non abbiamo la presenza della proprietà antisimmetrica. Il ragionamento che faccio è il seguente: se viene specificata la presenza di (b,a) allora vuol dire che b e a sono la stessa cosa. Ci basta un controesempio per "rompere" quella che potrebbe essere la proprietà. Quindi **non** è presente la proprietà antisimmetrica.

3. Invece l'ultima proprietà risulta presente. Gli unici elementi in cui si presenta lo schema è con a, b e c. Se andiamo a vedere gli altri elementi, per esempio d, non troviamo questo schema. a è relazionato a d ma quest'ultimo "non comincia" nessun altro loop, non porta a un altra relazione. Per quanto riguarda a, b e c, la proprietà è valida perché $aRb \wedge bRc \wedge aRc$. Infatti sono presenti le coppie: $(a, b), (b, c), (a, c)$

$$\textbf{(2)} \quad R_2 = \{(a, b), (c, b), (c, c), (c, d), (d, e)\}$$

1. Non si presente la riflessiva.
2. E' presente l'antisimmetrica
3. Non è presente la transitiva perché $(c, d) \wedge (d, e)$ ma non si presenta (c, e)

$$\textbf{(3)} \quad R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$

1. non si presenta la riflessiva, perché non tutti gli elementi sono presenti a coppie con sé stessi. (manca l'elemento e)
2. si presenta antisimmetrica. L'unica simmetria che si presenta è quella degli elementi con sé stessi.
3. si presenta la proprietà transitiva per il semplice fatto che non esiste un insieme di elementi del tipo richiesto. Quel $\forall$ è rispettato fatto che nessuno sia presente. (idea da confermare ancora, oppure semplicemente il fatto di non avere elementi che rispettino quel tipo di relazione mi porta a dire che non è vera la transitività)

$$\textbf{(4)} \quad R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$$

Ragionando sull'esercizio precedente...

1. si presenta la riflessiva. (basta guardare quello che si è detto dell'esercizio prima)
2. si presenta antisimmetrica. L'unica simmetria che si presenta è quella degli elementi con sé stessi. (oppure non si presenta per il fatto di prima. (punto numero 3 dell'esercizio 3)
3. ragionamento analogo all'esercizio prima.

Ora che invece aggiungiamo altri elementi la situazione cambia.

$$\textbf{(5)} \quad R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (b, c), (d, c), (d, e)\}$$

1. si presenta la riflessiva. (basta guardare quello che si è detto dell'esercizio prima)

2. si presenta antisimmetrica. Questa volta perché se si presenta uno schema del tipo (b, c) non troviamo poi (c, b)

3. Abbiamo uno schema del tipo (b, c) ma da c non si va da nessuna parte. Ci riconduciamo al fatto di prima. La mancanza di una terna di questo tipo comporta la presenza della transitività, oppure consegue in una sua assenza.

4.3 Esercizio 5

Dimostriamo quindi che è un ordinamento totale nel seguente modo.
Prendiamo in maniera casuale una coppia x, y, sarà sempre vero che

$$\begin{cases} x \leq y & \\ x \geq y & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se vere entrambi addirittura l'opzione può essere soltanto $x = y$. Se questo è sempre vero, per semplice deduzione, allora sarà sicuramente vero l'inverso.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} & \\ \\ \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Diamo per scontato che questa legge valga per l'intuizione che i numeri abbiano un loro ordine.
Se questo è vero, sappiamo quindi che

$$\forall(x, y) \quad \text{è vero che} \quad x \trianglelefteq y$$

4.4 Esercizio 6

Qui la richiesta può apparire più criptica. Ma andiamo per ordine.
. Verifichiamo quindi se le proprietà sono le rispettate.

1. $(a, b) \trianglelefteq (a, b)$ sotto sotto non vuol dire altro che $a\rho a$ e ugualmente per b. (Questo che dico è vero per semplice definizione, basta vedere come viene definita la relazione fra coppie di elementi In altre parole).

2. Sappiamo, dalla definizione di prodotto cartesiano, che l'ordine conta e che quindi $(a, b) \neq (b, a)$. Da questa deduzione supporto l'idea che $(a, b) \trianglelefteq (b, a)$ rispetti l'antisimmetrica. A meno di una eccezione particolare nelle due relazioni $(\rho = \sigma)$ otteniamo che $a\rho b$ e $b\sigma a$. Questo non può giustificare l'ipotesi che $a = b$

3. Basta notare che $(a, b) \trianglelefteq (a_1, b_1) \trianglelefteq (a_2, b_2)$ corrisponde esattamente a dire che $a\rho a_2$ che a sua volta $a_1\rho a_2$. Consegue quindi che $a\rho a_2$. Per b la dimostrazione è analoga.

4. La prima intuizione per dimostrare che se **le due relazioni d'ordine iniziali erano totalmente ordinate** allora quella composta sarà a sua volta totalmente ordinata è semplice. L'idea è quella della derivazione. L'elemento che analizziamo è composto da due più piccoli che possiedono determinate qualità e, a meno di casi esotici, questa regola dovrebbe valere. Nel caso nostro basta pensare che in tutte le dimostrazioni fatte dobbiamo aggiungere un ragionamento $\forall$.

4.5 Esercizio 7

Si esegue lo stesso schema che si è fatto fin'ora. L'unica cosa interessante da notare è quel "se solo se". La dimostrazione abbiamo cominciato a prepararla nel punto quattro precedente.

$$(\phi, \trianglelefteq) \text{ è totalmente ordinato} \Leftrightarrow (\phi_1, \rho) \wedge (\phi_2, \sigma) \text{ sono totalmente ordinati}$$

Dimostriamo quindi che

$$(\phi, \trianglelefteq) \text{ è totalmente ordinato} \Leftarrow (\phi_1, \rho) \wedge (\phi_2, \sigma) \text{ sono totalmente ordinati}$$

per mezzo del punto quattro di prima.
Poi.

$$(\phi, \trianglelefteq) \text{ è totalmente ordinato} \Rightarrow (\phi_1, \rho) \wedge (\phi_2, \sigma) \text{ sono totalmente ordinati}$$

noi sappiamo che

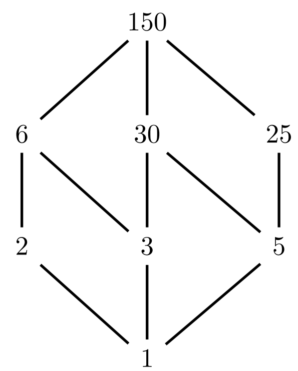
$$\phi = \phi_1 \times \phi_2$$

che per intuizione non cambia niente sull'ordine. Intendo dire che...
Prendendo degli elementi (partizione) da un insieme parzialmente ordinato possiamo sempre trovare un'operazione che lo mantenga tale. La stessa della partizione madre.

5 Foglio 4

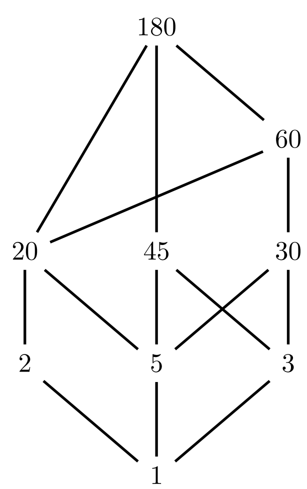
5.1 Esercizio 1

5.2 Esercizio 2



Andiamo a controllare per ogni coppia se riusciamo a trovare un sup e inf e se abbiamo l'occhio rapido ci è facile vedere che $3 \wedge 5$ non è presente. Quando abbiamo la relazione di divisibilità il sup risulta essere il **mcm**, che in questo caso dovrebbe essere 15.
Per questo la struttura data non è reticolo.

5.3 Esercizio 3



Anche qui si vede facilmente che non è un reticolo. Basti vedere che $2 \wedge 5$ è 10. Ma non vi si trova. Quindi non è un reticolo.

6 Foglio 6

6.1 Esercizio 1

La risposta è semplice poiché si applica la formula delle disposizioni semplici. Quindi...

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Con conseguente risultato $\frac{20!}{5!}$ che non si calcola poiché un valore enorme.

6.2 Esercizio 2

La formula che si va a usare per quanto riguardano i seguenti esercizi è quella di permutazioni con ripetizioni.

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\dots k_n!}$$

(a) $\frac{7!}{2!}$ perché abbiamo sette lettere e soltanto una, che sarebbe la 'e' si ripete due volte. Tutti gli altri k_i sono 1 e quindi si omettono.

(b) $\frac{8!}{2!2!}$ otto lettere due delle quali si ripetono per due volte (la 'o' e la 's')

(c) 4! perché sono quattro lettere diverse, nessuna si ripete. Quindi una permutazione semplice la cui formula è $n!$

6.3 Esercizio 3

La soluzione risulta essere la seguente.

$$\binom{20}{10} * \binom{10}{7} * \binom{3}{3}$$

A differrenza di altri esercizi questo non ha una formula specifica.
. Semplicemente lo pensiamo come una sequenza di "e", che in combinatoria tramuta in "prodotto", di combinazioni. Si determina che sono combinazioni da come viene posto il problema.
Lo schema che seguono i numeri è una specie di diagonale. $20-10$ equivale a 10, $10-7$ equivale a 3.

6.4 Esercizio 4

Nel "lotto con reinserimento" abbiamo disposizioni con ripetizione (perché si presenta il reinserimento). Immaginando la presenza di un numero n di elementi. Quindi...

$$n^5$$

Vale la stessa regola per la tombola. Se non c'è reinserimento abbiamo delle disposizioni semplici. Quindi i due risultati in ordine sono.

$$\frac{90!}{(90-5!)} \Rightarrow \frac{90!}{(85!)} \Rightarrow 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$$

e poi

$$90^5$$

6.5 Esercizio 5

Dato che le partite fra A e B sono la stessa cosa che fra B e A (DJOKOVIC versus SINNER, a naso, non dovrebbe essere diverso dal contrario). Dedotto quindi che non importa l'ordine, sappiamo che sono delle combinazioni.

$$\binom{n}{k} \Rightarrow \binom{20}{2}$$

6.6 Esercizio 6

Il modo in cui è posto l'esercizio intende dire che gli elementi si ripeteranno, semplicemente perché le categorie non sono abbastanza (sono 4 su n sacchetti generici).

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Se invece ci interessano anche le posizioni, allora passiamo a disposizioni con ripetizioni, quindi

$$n^k$$

Alla fine avremo per la prima richiesta che n sono gli elementi presenti k invece sono i gruppi

$$\frac{(20+4-1)!}{(20-1)! \cdot 4!} \Rightarrow \frac{23!}{19! \cdot 4!} = \binom{23}{4} \Rightarrow \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Nel secondo punto invece dobbiamo pensare che 20 sono i posti disponibili mentre 4 sono gli n oggetti (o per essere precisi le categorie degli oggetti)

$$4^{20}$$

6.7 Esercizio 7

Esericizio più difficile del foglio se non vengono date le giuste informazioni. Secondo GPT è un classico "problema delle composizioni". Quindi si ragiona

nel seguente modo...
Abbiamo *circa* delle combinazioni con ripetizione, $n = 100$ e $k = 5$ variabili

$$\binom{n+k-1}{k-1} \Rightarrow \binom{100+5-1}{5-1} \Rightarrow \binom{104}{4}$$

Si noti che nella formula delle combinazioni con ripetizioni si ha k e non k-1. Ogni volta che aumentiamo di 1 le variabili andiamo sottraendo cinque valori in $n + k - 1$. Si vede quasi immediatamente se si scrive che con la condizione sulle variabili $x_i \geq 1$ abbiamo

$$\binom{99}{4}$$

mentre se $x_i \geq 2$

$$\binom{94}{4}$$

Questo esercizio sarebbe stato quasi impossibile senza GPT. Ci sarebbe voluto molto più tempo, quindi che senso aveva metterlo? Mancavano le informazioni giuste e il giusto ragionamento per risolverlo...

6.8 Esercizio 8

Sappiamo che quello che ci interessa è la differenza fra gli oggetti e non l'ordine (o almeno lo supponiamo, nel gioco effettivo ci interesserebbe anche sapere l'ordine, in questo caso no). Quindi parliamo di combinazioni.

(a) Lo pensiamo diviso in due momenti: il momento in cui scelgo i due assi e il momento in cui scelgo le restanti carte. Usiamo sempre le combinazioni

$$\overbrace{\binom{4}{2}}^{\text{come scelgo 2 assi fra 4}} \cdot \underbrace{\binom{50}{3}}_{\text{come scelgo le restanti carte}}$$

(b) Per risolvere questo esercizio devo pensare di scegliere la carta dalla sua categoria e dopo vedere in che modo la posso combinare

$$\overbrace{\binom{13}{1}}^{2.1} \cdot \underbrace{\binom{4}{3}}_{2.2} \overbrace{\binom{12}{1}}^{2.3} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{2.4}$$

2.1 Scelgo una fra le 13 possibilità $(1, 2 \ldots J, Q, K, A)$ per fare tris (categoria)

2.2 Una volta che ho prese quelle 4 carte dello stesso seme come posso fare tris?

2.3 Scelgo adesso un'altra categoria, sicuramente una l'ho già bruciata, quindi ne restano dodici.

2.4 Come posso prendere una coppia fra 4 carte a disposizione? Stesso concetto di 2.2 ma con una coppia invece che un tris

(c) Penso nello stesso modo, quindi scelgo la categoria di carte, dopo c'è solo un unico modo per prendere 4 carte (senza tenere di conto dell'ordine). La restante carta che posso scegliere è una qualsiasi fra quelle rimanenti. $52 - 4$

$$\binom{13}{1}\binom{4}{4} \cdot 48$$

6.9 Esercizio 9

Questo esercizio è relativamente semplice se lo pensiamo nel seguente modo: abbiamo 4 posizione e cosa ci possiamo inserire in ciascuna?
Un numero non può cominciare per zero semplicemente perché 024 è la stessa cosa di dire 24, quindi abbiamo solo 2 possibilità fra le cifre decimali $(4, 2)$, per il secondo posto partendo da sinistra abbiamo le cifre $(0, 2, 4, 6, 8)$ meno una, quella che è già stata usata. Ragionamento anologo per la cifra successiva.

$$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$$

7 Foglio 7

7.1 Esercizio 1

Per come è costruito il Triangolo di Tartaglia dall'esercizio ricaviamo

- n: corrisponde al grado della potenza
- n - m: con m che corrisponde al grado della x (in questo caso 8). Questo lo nominiamo k.

Quindi a questo punto quello che facciamo è semplicemente il coefficiente binomiale.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{13!}{5!(13-5)!} = 1287$$

Notare che l'unica difficoltà in questo esercizio è l'impostazione di k e di n.

7.2 Esercizio 2

Prima riflessione
Lo zero nella costruzione di questo tipo di numeri può risultare problematico, quindi partiamo dai numeri che non si costruiscono con lo zero.
Abbiamo un set di partenza $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ di cardinalità nove.
Se pensassimo nel posizionare una cifra per ogni posto avremmo.

$$9^4$$

Perché per ogni posto potremmo posizionare sempre tutte le cifre, le possiamo ripetere (ci arriviamo a logica, una via più formale suggerisce che sono disposizione con ripetizione)
Adesso invece prendiamo quei numeri che non contengono il 3.
La parte interessante della faccenda è che $003 = 3$ perché sappiamo che gli zeri a sinistra non hanno un valore. Quindi...
Seconda riflessione

7.3 Esercizio 3

7.4 Esercizio 4

Funzioni suriettive basta leggere al paragrafo "Numero di funzioni suriettive" per comprendere che il risultato è zero.

7.5 Esercizio 5

7.6 Esercizio 6

$$9! - (7 \cdot 6!) - (\text{sottostringhe con 'de'})$$

TODO: da trovare un modo per spiegarlo più velocemente possibile.

7.7 Esercizio 7

7.8 Esercizio 8 e 9

Talmente tanto semplici che si danno per scontato.

8 Foglio 8

8.1 Esercizio 1

Notiamo che

$$d|a = d \cdot c|a \cdot c$$

Di conseguenza

$$d \cdot c|a \cdot c = c \cdot (d|a)$$

che combinato con $\wedge$ e con il concetto di MCD ci da esattamente quello che cercavamo.

$$(ca, cb) \Rightarrow dc|ca \ \wedge \ dc|cb \Rightarrow c \cdot (a, b)$$

Analogo per il concetto di mcm.

8.2 Esercizio 2

Io per questa dimostrazione uso un ponte di definizione.

$$mcm(x, y) = \frac{| \ xy \ |}{MCD(x, y)}$$

da cui passo per andare sia in ambe le direzione delle frecce del "se solo se". Quindi...

$$[a, b] = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

quindi cerchi di risolvere l'enigma da qui.

$$mcm(x, y) = \frac{| \ xy \ |}{MCD(x, y)} = 0$$

che ovviamente può fare zero solo se il divisore è diverso da zero e il numeratore corrisponde a zero. Sappiamo che MCD(x,y) è sempre diverso da zero, quindi perfetto. Mentre per il numeratore l'unico modo in cui può fare zero è che almeno uno dei due fattori sia zero. Enigma risolto.
Adesso passiamo a:

$$a = 0 \vee b = 0 \Rightarrow [a, b] = 0$$

Riusiamo il ponte di prima e impostiamolo nel seguente modo.

$$mcm(0, y) = \frac{| \ 0 \cdot y \ |}{MCD(0, y)} = ?$$

$$mcm(x, 0) = \frac{| \ x \cdot 0 \ |}{MCD(x, 0)} = ?$$

non ci sorprenderà sapere che ? risulta 0. Ma dato che stiamo dimostrando e non dobbiamo dare per scontato nulla, vediamo perché fa zero.
Entrambi i denumeratori sono diversi da zero, nello specifico il primo sarà uguale a y e il secondo a x. Sopra invece che avremo? Qualsiasi numero moltiplicato per zero...

$$mcm(0,y) = \frac{\mid 0 \mid}{y} \Rightarrow \frac{0}{y} \Rightarrow 0$$

Ugualmente per il suo compare x.
Dimostrazione fatta in maniera semplice, senza stare troppo a girare sui megaformalismi... top.

8.3 Esercizio 3

8.4 Esercizio 4

8.5 Esercizio 5

Quello che viene chiesto può essere riformulato nel seguente modo.

$$10^{3n} = x \ mod(10^n - 1)$$

Quello che si deve notare anzitutto è il seguente schema ricavato dall'esempio di $n = 1$

$$9|1000$$

Che sappiamo non essere vero. Quindi già da qui sappiamo che la divisione avrà un resto. Quale?

8.6 Esercizio 6

8.7 Esercizio 7

9 Foglio 9 - Equazioni diofantee e basi

9.1 Esercizio 1, 2, 3

Lo sostituiamo con esercizio da compito, quindi con numeri molto più fattibili, altrimenti ci possiamo confondere nella metodologia risolutiva.

$$315x + 196y = 21$$

l'MCD fra 315 e 196 è 7. Quindi quello che facciamo è.. Dividere per 7 tutto

$$45x + 28y = 3$$

Adesso viene la parte più ostica, quella dove 1 $MCD(45, 28)$ deve essere espresso come combinazione lineare di 45 e 28, per fare questo si ripercorre al contrario l'algoritmo di Euclide Esteso.
Nei libri come anche in ChatGPT non è molto chiaro lo schema de seguire, quindi risolviamolo.

Si deve trovare l'MCD fra a e b di

$$ax + by = c$$

E se non è 1, possiamo dividere la nostra equazione diofantea finché ci comoda, quando però l'MCD risulta 1, abbiamo la nostra equazione ridotta "ai minimi termini" e possiamo cominciare a lavorarci.
In questo caso io so già che 45 e 28 hanno MCD = 1, quindi che sono coprimi, ma svolgo comunque l'algoritmo di Euclide perché mi servirà per trovare delle soluzioni.

$$\begin{gathered}45 = 1 \cdot 28 + 17 \\ 28 = 1 \cdot 17 + 11 \\ 17 = 1 \cdot 11 + 6 \\ 11 = 1 \cdot 6 + 5 \\ 6 = 1 \cdot 5 + 1 \\ 5 = 5 \cdot 1 + 0\end{gathered}$$

E una volta che ho concluso riscrivo tutto in funzione del resto, nel seguente modo:

$$\begin{gathered}17 = 45 \cdot 1 - 28 \cdot 1 \\ 28 = 1 \cdot 17 + 11 \\ 11 = 28 \cdot 1 - 17 \cdot 1 \\ 6 = 17 \cdot 1 - 11 \cdot 1 \\ 5 = 11 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \\ 1 = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1\end{gathered}$$

Ricomincio dall'MCD di quei due numeri, in questo caso 1, e devo arrivare a riscrivere 1 come combinazione lineare di 45 e 28, **RISALENDO** in questo modo.

(1) $1 = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1$ ricordiamo che l'espressione sopra ci dice: $5 = 11 \cdot 1 - 6 \cdot 1$, quindi sostituiamo.

(2) $1 = 6 \cdot 1 - (11 \cdot 1 - 6 \cdot 1) \cdot 1$

(3) Ciò che notiamo in particolar modo in questa riscrittura è che vogliamo tenere gli elementi così come sono con una costante moltiplicativa davanti. Guardate bene come riaggiusto l'espressione dopo.

(4) $1 = 1 \cdot 6 - 11 \cdot 1 + 1 \cdot 6$

(5) $1 = 2 \cdot 6 - 11 \cdot 1$

(6) Dopo questo continuo il perfcrso sostituendo il 6, l'11 e quelli che verranno dopo con le equazioni sopra, finché sarà necessario. Cioe' finché non arriveranno a comparire soltanto i due numeri che cerchiamo. In questo caso 45 e 28.

(7) Sostituisco $1 = 2 \cdot (17 \cdot 1 - 11 \cdot 1) - 1 \cdot 11$. Praticamente ho sostituito l'equazione del 6.

(8) Adesso cerco di sistemare l'eqauzione. $1 = 2 \cdot 17 - 2 \cdot 11 - 1 \cdot 11$

(9) $1 = 2 \cdot 17 - 3 \cdot 11$

(10) Proseguo nello stesso identico modo. $1 = 2 \cdot 17 - 3 \cdot (28 - 17)$

(11) $1 = 2 \cdot 17 - 3 \cdot 28 + 3 \cdot 17$

(12) $1 = 5 \cdot 17 - 3 \cdot 28$

(13) $1 = 5 \cdot (45 - 28) - 3 \cdot 28$

(14) $1 = 5 \cdot 45 - 5 \cdot 28 - 3 \cdot 28$

(15) $1 = 5 \cdot 45 - 8 \cdot 28$

Una volta arrivati alle soluzioni 5 e -8 le moltiplichiamo per 3, perché prima le avevamo divise e dopo possiamo anche avere le soluzioni generali che sono le seguenti.

$$x = x_0 + k \cdot \frac{28}{MCD(45, 28)} = 15 + 28k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$y = y_0 - k \cdot \frac{45}{MCD(45, 28)} = -24 - 45k,\ k \in \mathbb{Z}$$

9.2 Esercizio 4

9.3 Esercizio 5

9.4 Esercizio 6

9.5 Esercizio 7

10 Foglio 10

10.1 Esercizio 1

L'esercizio è il seguente

$$18x \equiv 120(mod\ 156)$$

da qui ricordiamo che

$$ax \equiv b(\text{mod } n) \text{ ammette soluzione se solo se } d = MCD(a, n)|b$$

Qual è l'MCD fra 156 e 18? Scomponiamoli

$$156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13, \quad 18 = 2 \cdot 3^2$$

quindi

$$MCD(18, 156) = 6$$

inoltre 120 è divisibile per 6 quindi va benissimo. Otteniamo che $d = 20$
A questo punto possiamo cominciare a semplificarci la faccenda dividendo tutto per questo MCD.

$$3x \equiv 20(mod\ 26)$$

Poi dobbiamo trovare ciò che si chiama **inverso moltiplicativo**

$$3x \equiv 1(mod\ 26)$$

che in questo caso risulta essere 9. Infatti.

$$3 \cdot 9 = 1(mod\ 26) \Rightarrow 27\ mod\ 26 = 1$$

A questo punto lo moltiplico per entrambi i lati ottenendo

$$(a \cdot a^{-1})x \equiv 20 \cdot 9(mod\ 26)$$

Notare che moltiplicando 3 e 9 che sono inversi moltiplicativi si ottiene 1, quindi per questo ho tenuto la notazione astratta. Per farlo capire. A questo punto abbiamo...

$$x \equiv 180(mod\ 26)x \equiv 24(mod\ 26)$$

ragione per cui la soluzione alla fine è del tipo:

$$x = 24 + 26k$$

A questo punto dobbiamo ripensare all'inizio dell'esercizio e a come ci veniva chiesto di rispettare determinate condizioni. Perciò.

$$250 \leq 24 + 26k \leq 312$$

Svolgendo due disequazioni ottengo il range dove voglio avere k

$$8.6 \leq k \leq 12.9$$

A questo punto quindi se devo considerare solo i numeri naturali, vado scegliendo 9, 10, 11

Ottengo quindi...

1. $24 + 26 \cdot 9 = 258$

2. $24 + 26 \cdot 10 = 284$

3. $24 + 26 \cdot 11 = 310$

10.2 Esercizio 2

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$$

Qui ovviamente si usa il teorema cinese del resto.
La prima cosa si controlla che tutti i numeri siano coprimi due a due. Lo sono. . La seconda cosa è il calcolo dei prodotti parziali denomoinati M_n dopo che ho calcolato il prodotto dei moduli.

$$M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

Poi vado con i prodotti parziali.

(1)
$$M_1 = \frac{210}{2} = 105$$

(2)
$$M_2 = \frac{210}{3} = 70$$

(3)
$$M_3 = \frac{210}{5} = 42$$

(4)
$$M_4 = \frac{210}{7} = 30$$

Poi devo calcolare gli "inversi" di ogni modulo, in una forma di questo tipo:

$$M_i * y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$$

La soluzione finale risulterà qualcosa del genere.

$$x = \Sigma_{i=1}^{n} a_i \cdot M_i \cdot y_i \ (mod\ M)$$

con a che rappresenta il valore

$$x \equiv a_i \ (mod\ n_i)$$

Quindi adesso passiamo in rassegna tutti gli inversi per poi calcolare la formula finale.

(1) $105\ y_1 \equiv 1\ mod\ 2$ e dato che ogni numero dispari da sempre questo risultato, abbiamo che $y_1 = 1$

(2)
$$70\ y_2 \equiv 1\ (mod\ 3) \Rightarrow y_2 = 1$$

(3)
$$42\ y_3 \equiv 1(mod\ 5) \Rightarrow y_3 = 3$$

(4)
$$30\ y_4 \equiv 1(mod\ 7) \Rightarrow 2\ y_4 \equiv 1(mod\ 7) \Rightarrow y_4 = 4$$

Ed è interessante la metodologia utilizzata in questo caso:

$$30\ div\ 7 = 4,\ resto = 2$$

Quindi dobbiamo calcolare

$$x' = 1 \cdot 105 \cdot 1 + 2 \cdot 70 \cdot 1 + 3 \cdot 42 \cdot 3 + 4 \cdot 30 \cdot 4 =$$

Poi lo sistemiamo con il modulo

$$1103 \equiv x\ mod\ 210$$

$$1103 = 210 \cdot 5 + 53$$

Il risultato

$$x_0 = 53$$

La soluzione generale quindi risulta essere:

$$x = x_0 + kM$$

$$x = 53 + 210k$$

E poi da qui puoi determinare quali sono le soluzioni che rientra nel range.

$$2500 \leq 53 + 210k \leq 3500$$

$$12 \leq k \leq 16.$$

10.3 Esercizio 3

$$\phi(10800) = \phi(2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2) \underbrace{=}_{\text{per proprietà } \phi} \phi(2^4)\phi(3^3)\phi(5^2) \underbrace{=}_{\text{usando tabella valori noti}} 8 \cdot 18 \cdot 20 = 2880$$

10.4 Esercizio 4

10.5 Esercizio 5

$$219^{1234567891} \equiv a \ (mod\ 31)$$

Riduciamo la base 219 con il modulo 31.

$$219 = 31 \cdot 7 + 2$$

$$2^{1234567891} \equiv a \ (mod\ 31)$$

Per ridurre l'esponente quello che si fa sempre è che si utilizza la formula:

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \ mod\ n$$

e il risultato di tutto questo diventa poi il mio esponente, quindi:

$$2^{\phi(31)} \equiv 1 \ mod\ 31$$

essendo che 31 è primo ottengo.

$$2^{30} \equiv 1 \ mod\ 31$$

Per risolvere questo problema parto con

$$2^5 \ mod\ 31 = 32 \ mod\ 31 = 1$$

Poi ottengo

$$2^{30} = (2^5)^7 \ mod\ 31 = 1^7 mod\ 31 = 1$$

Ottengo quindi che

$$2^1 \ mod\ 31$$

La soluzione generale è:

$$x = 2 + 31k$$

Noi vogliamo quella specifica, quindi è

$$2$$

11 Foglio 11

11.1 Esercizio 1 ed Esercizio 2

Abbiamo di riferimento le seguenti due strutture.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

L'ordine di f e di g si riesce a trovare una volta che si sono scritti in cicli disgiunti. Quindi facciamolo.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1,5,2,4,3)(6) =$$

$$f = (1,5,2,4,3) = (1,3),(1,4),(1,2),(1,5) \text{ pari}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1,2,3)(4,6,5)$$

$$g = (1,2,3)(4,6,5) = (1,3),(1,2)(4,5),(4,6) \text{ pari}$$

l'ordine si ricava come mcm fra i cicli disgiunti. L'ordine di f è cinque, quello di g è tre.
Ora vogliamo sapere f composto g e g composto f. Il risultato è quasi immediato se si capisce la logica.

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Adesso prendiamo per esempio f e scriviamolo in permutazioni e poi trasposizioni.

$$f = (1,4),(2,6,5,3) = (1,4),(2,3),(2,5),(2,6) \text{ pari}$$

l'ordine di questa struttura è $mcm(2,4) = 8$

$$g = (1,4,6,2),(3,5) = (1,2),(1,6),(1,4),(3,5) \text{ pari}$$

l'ordine di questa struttura è $mcm(4,2) = 8$
per determinare l'ordine poi dopo dobbiamo fare l'mcm.

11.2 Esercizio 3

Per essere semigruppo la relazione binaria deve esssere associativa. Quindi è sicuramente un **semigruppo**.

$$max(x_1, x_2, x_3...x_n) = x'$$

Con questo cerco di dire in maniera compatta che non importa quanti numeri inserisca, ne l'ordine, quando cerco il massimo, il risultato sarà sempre lo stesso. Basti provare con l'algoritmo if-else classico per ricavare il massimo fra due numeri.

11.3 Esercizio 4

Poiché somma e moltiplicazione sono associative, di conseguenza, essendo questa operazione immaginaria una sua derivata non ci deve sorprendere affermare che è un semigruppo.

$$a \star b = a + b + a \cdot b$$

$$b \star a = b + a + b \cdot a$$

Si vede facilmente che invertendo gli ordini di questi elementi si ottiene la stessa cosa. $ab = ba$ nella moltiplicazione che conosciamo tutti i giorni.
Poi, pensando un attimo si arriva velocemente al fatto che zero sia l'elemento neutro. Basta vedere che.

$$a \star 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$$

Quindi è anche un Gruppo? Deve essere presente un inverso per ogni elemento appartente all'insieme preso in considerazione.

$$a \star a' = 0, \ a' = ?$$

Dico che non esiste, per il fatto che non trovo un elemento che mi "annulli" la somma e la divisione al contempo.
Intendo dire che se usassi: $-a$

$$a \star -a = a - a - a \cdot a \neq 0$$

Mi annulla il primo elemento, ma non la motiplicazione.

$$a \star \frac{1}{a} = a + \frac{1}{a} + a \cdot \frac{1}{a} = 2$$

Anche cercando di annullare la moltiplicazione non ci trovo un modo.

11.4 Esercizio 5

Inanzitutto chi è $\mathbb{Z}_6$

$$\mathbb{Z}_6 = \{0, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{5}\}$$

quindi l'elemento neutro, che è zero, deve appartenere al sottogruppo. Y quindi non è un sottogruppo.
Per quanto riguarda X invece deve essere chiuso per quanto riguarda gli inversi e l'operazione considerata, quindi in questo caso la somma.
Il trattino sopra i numeri intende dire che sono coinvolti sia il numero che il suo opposto.
Non è chiuso rispetto alla somma X. Ricodiamoci che...

$$X = \{0, \overline{2}, \overline{4}\}$$

Se sommo 2 e 4 in modulo ottengo 6 che "sfora" lo spazio preso in considerazione, quindi non è un sottogruppo.

$$\mathbb{Z} = \{a | \text{ sia presente il numero e il suo opposto}\}$$

Se sommo un numero e il suo opposto ottengo zero, quindi sono apposto. Poi...

11.5 Esercizio 6

Per sapere se è un'algebra di Boole, dobbiamo soddisfare 8 condizioni, che sono tantine, quindi per memorizzarle usiamo un acronimo:

2ACIDEM

Che sta a significare per;

1. Assorbimento
2. Associativa
3. Complemento
4. Idempotenza
5. Distributiva
6. Esistenza
7. Leggi di DeMorgan

Dobbiamo dimostrare andando da sinistra verso destra e da destra verso sinistra, una doppia implicazione.

1. (⇒)

$$a \cdot b = a \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b = 1$$

che non vuol dire altro che

$$a + b = 1 \Rightarrow a + b = b$$

2. (⇐) Sarà all'incirca lo stesso procedimento.

$$a + b = b \Rightarrow a = 0$$

adesso ci deve tornare che

$$b \cdot 0 = 0, \text{ se b} = 0$$

cosa che non è vera se supponiamo che $A = \{0, 1\}$ e a corrisponde allo zero, allora $b \neq 0$.
In più ci ricordiamo che $\cdot$ corrisponde all'OR.

$$1 \cdot 0 = 1$$

Quindi sto praticamente dicendo che.

$$b \cdot a = 1$$

che equivale a dire

$$a \cdot b = a$$

11.6 Esercizio 7

La relazione d'ordine del tipo:

$$a \leq b = \begin{cases} a \cdot b = a \\ a + b = b \end{cases}$$

dobbiamo praticamente trasformare tutto in una equazione che sia corretta. Dobbiamo fare due trasformazioni.

$$a \leq b = a \cdot b = a$$

$$a \leq b = a + b = b$$

abbiamo anche che

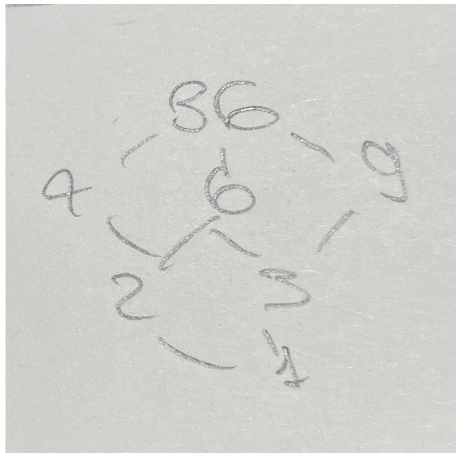


Figure 1: Soluzione foglio 12 esercizio 1

$$c \leq d = c \cdot d = c$$

$$c \leq d = c + d = d$$

Quindi dimostriamo che:

$$a + c \leq b + d$$

$\alpha \leq \beta$; α = a + c, β = b + d

Quindi sappiamo che:

$$(a + c) + (b + d) = b + d$$

consegue direttamente nella seguente cosa.
Si ribadisce che riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

$$a + b + c + d = b + d$$

Si fa la stessa cosa con il $\cdot$ Evitiamo di rifarlo, è praticamente banale se si adotta la stessa metodologia.

11.7 Esercizio 8

Se si crea il diagramma di Hasse si nota che non è un reticolo, perché il sup è l'mcm e fra 6 e 9 l'mcm sarebbe 18, ma non è presente nei valori presi in considerazione.

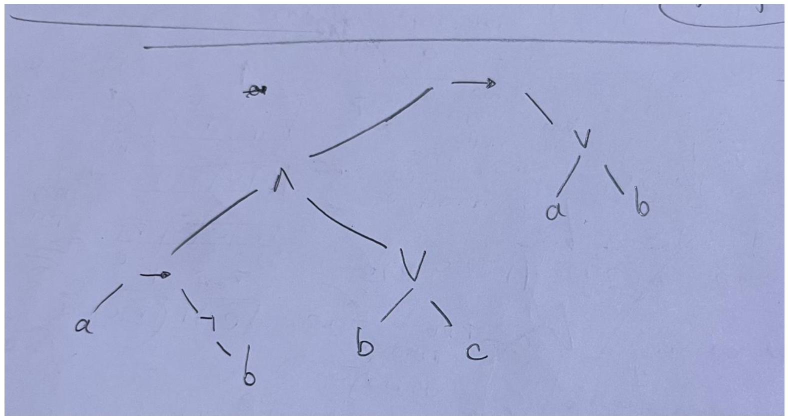


Figure 2: Soluzione foglio 12 esercizio 1

12 Foglio 12, Logica Booleana

12.1 Esercizio 1

Per costruire un albero di Parsing si deve ricoradre che:

1. Esiste una precedenza fra operazioni
2. Le parentesi danno una precedenza.

Ricordiamo che l'ordine di precedenza per gli operatori è il seguent (dal più alto al più basso):

1. Negazione
2. Coniugazione
3. Disgiunzione
4. Implicazione
5. Doppia implicazione

Questo è da tenerlo in considerazione in generale, ma in pratica, basta guardare come è scritta la formula e le precedenze saranno praticamente ovvie. L'albero di parsing è la figura n.1

12.2 Esercizio 2

a	b	a $\rightarrow$ b
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

a	b	¬ a → ¬ b
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Le tabelle sono le stesse, le righe sono scritte soltanto in un ordine contrario. Quindi sono **logicamente equivalenti**

12.3 Esercizio 3

Ricordiamo che una formula si dice soddisfacibile se, in maniera molto intuitiva, si trova un input che la rende vera, insoddisfacibile se contrario, tautologia se a prescindere risulta sempre vera.

1.

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

2.

p	q	$p \to q$	$p \to (p \to q)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

La prima è una tautologia, la seconda è invece una formula soddisfacibile.

12.4 Esercizio 4

p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to r) \land (q \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
1	1
1	1
0	1
1	1
0	0
1	1
0	0
1	1

Confrontando i risultati dell'ultima tabella, la prima formula è conseguenza logica della seconda? Andiamo a vedere tutte le righe dove è presente 1 e consultiamo la colonna accanto. **Risulta che la prima è conseguenza logica della seconda**. Ma non è vero il contrario.
In più è semplice capire che non sono logicamente congruenti, perchè hanno risultati diversi. Interessante notare che se sono uguali, una è conseguenza logica dell'altra e viceversa.

12.5 Esercizio 5

12.6 Esercizio 6

Prima di tutto bisogna ricordare queste due simpatiche regole:

1. $$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

2. $$A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \ \vee A)$$

Oltre alle distributive e all'idempotenza...

1. $$a + bz = (a + b) \cdot (a + z)$$

2. $$a(b + z) = a \cdot b + a \cdot z$$

3.
$$a \vee a = a = a \wedge a$$

e al fatto che...

1.
$$a \vee b = a \text{ OR } b = a + b$$

2.
$$a \wedge b = a \text{ AND } b = a \cdot b$$

Questa notazione mi ha sempre confuso perché o si usa una, oppure l'altra... ma praticamente si dice la stessa cosa. Se si consulta questa tabella non ci si confonde più.
Infine si deve tenere di conto l'astrazione seguente, quella che si usa praticamente per fare la derivata di funzione composta.

$$(abc + def) * (g + h) = (\alpha + \beta) * (\gamma)$$

che poi risulta diventare

$$(\alpha + \beta) * (\gamma) = \alpha * \gamma + \beta * \gamma$$

cioè

$$(abc * (g + h)) + (def * (g + h))$$

Questo lo specifico perché fa pesantemente parte dei ragionamenti che si fanno per risolvere problemi.
Lascio quindi di seguito la mia soluzione al problema.

Soluzione passo-passo commentata

1.
$$\neg(p \to q) \vee ((r \vee s) \to (q \vee t)) \vee (\neg p \to r)$$

2. Rimuovo tutti le implicazioni (e anche le doppie implicazioni se ci fossero)
$$\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge \neg s) \vee (q \vee t)) \vee (\neg\neg p \vee \neg r)$$

3. Uso le leggi di De Morgan e poi cerco di sistemare tutto.
$$(p \wedge q) \vee ((\neg r \wedge \neg s) \vee (q \vee t)) \vee (p \vee \neg r)$$

4. Cambio i simboli e uso $((\cdot, +))$ perché più comodi per la mia vista. Voi potete tenerli, usare, quello che volete. *Fate sempre le cose così che risultino più comode a voi.*
$$(p \cdot \neg q) + (\neg r \cdot \neg s) + q + t + (p \cdot \neg r)$$

5. Adesso mi concentro a utilizzare una legge distributiva per t e per q, quindi ottengo.

$$(p \cdot \neg q) + [(q + \neg r) \cdot (q + \neg s)] + [(t + p) \cdot (t + \neg r)]$$

6. Mi concentro su:

$$(p \cdot \neg q) + [(q + \neg r) \cdot (q + \neg s)] + [(t + p) \cdot (t + \neg r)]$$

7. E proseguo sulla stessa direzione aspettandomi che, prima o poi, qualcosa si semplifichi.

$$\{[(p \cdot \neg q) + (q + \neg r)] \cdot [(p \cdot \neg q) + (q + \neg s)]\} + [(t + p) \cdot (t + \neg r)]$$

8. $$\{[(q + p) \cdot (q + \neg q) + \neg r)] \cdot [(q + p) \cdot (q + \neg q) + \neg s)]\} + [(t + p) \cdot (t + \neg r)]$$

   possiamo usare la proposizione degli inversi dell'algebra booleana e otteniamo che quei due in rosso sono pari a 1

9. $$\underbrace{((q + p) + \neg r)}_{b} \cdot \underbrace{((q + p) + \neg s)}_{z} + \underbrace{[(t + p) \cdot (t + \neg r)]}_{a}$$

   Ricordati che: $a + bz = (a + b) \cdot (a + z)$

10. Quindi vado di nuovo di distributive, finché non trovo altre semplificazioni e uno schema abbastanza "elegante" in cui scrivere la formula. In questo caso vedremo che mi sono ritrovato in una specie di product of sums.

$$[(t + p) \cdot (t + \neg r) + (q + p + \neg r)] \cdot [(t + p) \cdot (t + \neg r) + (q + p + \neg s)]$$

11. Una volta che hai capito che si usa e si riusa quella regola distributiva si arriva a (saltando praticamente solo 1 passaggio)

$$(q + p + \neg r + t + p) \cdot (q + p + \neg r + t + \neg r) \cdot (q + p + \neg s + t) \cdot (q + p + \neg s + t + \neg r)$$

   Di verde sono sottolineate le parti che si semplficano per idempotenza.

12. $$(q + p + \neg r + t) \cdot (q + p + \neg r + t) \cdot (q + p + \neg s + t) \cdot (q + p + \neg s + t + \neg r)$$

13. $$(q + p + \neg r + t) \cdot (q + p + \neg s + t) \cdot (q + p + \neg s + t + \neg r)$$

Se vi state chiedendo chi ve l'ha fatto fare di cominciare questo esercizio, fate bene.

12.6.1 Determinare se è soddisfacibile

A questo punto la determinazione della sua soddisfacibilità può essere determinata soltanto con D. Puttnam.
Trall'altro è facile notare che una volta che la formula è in questa forma (FNC - forma normale congiuntiva) basta far partire subito l'algoritmo.

$$(q \vee p \vee \neg r \vee t) \wedge (q \vee p \vee \neg s \vee t) \wedge (q \vee p \vee \neg s \vee t \vee \neg r)$$

Essendo che non ci sono clausole unitarie, quello che succede è che dobbiamo controllare variabile per variabile... ma è buono saperlo perché è un caso possibile dell'algoritmo D. Puttnam.

13 Foglio 13

13.1 Esercizio 1

Prima devo portare la formula proposizionale in FNC. Prima lo facciamo con la parte dopo la conseguenza logica.
L'esercizio implica che io lo faccia tre volte. Vediamo in che senso.

1. $$a \vee b \vee c \models (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

2. $$c \rightarrow (a \vee b) \models (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

3. $$a \rightarrow (b \vee c) \models (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

4. $$(a \wedge b) \rightarrow c \models (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Il primo passo è trasformare ogni formula senza $\models$. Quindi si fa la seguente cosa.

$$\alpha \models \beta \Rightarrow \alpha \wedge \neg \beta$$

Quindi... andiamo a vedere come risolvere il tutto.

1. $$a \vee b \vee c \wedge \neg((\neg a \wedge b) \vee (a \wedge c))$$
   $$(a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c)$$

   Che si converte in clausole. (In forma piuttosto immediata).

   $$S = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{\neg a, \neg c\}\}$$

   Ora un piccolo appunto.
   Il professore qui esegue il metodo di pivoting, che io ho cercato fra libri e siti e non ho trovato, quindi mi sono adattato a un metodo molto più intuitivo che è quello di unire le varie clausole, si vede facilmente dalle prossime cose che farò.
   In più ricordo che se questa formula in clausole è **insoddisfacibile, allora la conseguenza logica è valida**, altrimenti il contrario.

   $$S = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{\neg a, \neg c\}\}$$

   $$S = \{\{b\}, \{b, \neg c\}\}$$

Non ho fatto altro che unire l'ultima clausola con la penultima e l'ultima clausola con la prima (quando scelgo una clausola la vo unendo a tutte le altre, un po' lo schema di $a \cdot (c + d)$.) Un elemento generico a se unito alla sua negazione deduco diventi unità, quindi non lo consideriamo, semplicemente lo cancelliamo.
Mentre un elemento unito a sé stesso, resta.

$$S = \{\{b, \neg c\}\}$$

Se restano delle clausole, allora la formula è soddisfacibile.
La formula in clausole è **insoddisfacibile** se per qualche combinazione ottengo una clausola vuota al suo interno. Tipo $S = \{\{a, b\}, \ldots, \{c, d\}, \{\}\}$

2.

3.

13.2 Esercizio 2

E' importante sottolineare che

$$a \models b \wedge b \models a \Rightarrow a \equiv b$$

13.3 Esercizio 3

13.4 Esercizio 4

13.5 Nota finale

Gli algoritmi svolgono e risvolgono la stessa operazione ancora e ancora senza niente di interessante da notare. L'umano si annoia a ripetere le operazioni, io poi mi annoio molto più che facilmente. Lascio questi spazi ovvi perché gli esercizi sono una diretta conseguenza del primo che è spiegato nei migliori dei modi. In più è già stato discusso come trasformare una formula proposizionale in FNC

14 Foglio 14 - Logica dei predicati

14.1 Esercizio 1

(a) La prima frase da tradurre è: "Ognuno ama qualcuno". Questo significa per ogni uomo presente ciascuno ama qualcuno.

$$\forall\ x\ \exists(U(x) \vee D(x)) \to A(U(x), U(x) \vee (D(x))$$

Fin qui tutto bene, ma dovrei stare a riscrivere la stessa per le donne. Quindi invece di scrivere $U(x)$ oppure $D(x)$ parlerò generalizzando con $P(x)$ inteso come persona. Quindi "ognuno ama qualcuno" diventa:

$$\forall\ x\ \exists\ x_1, x_2 \to A(P(x_1), P(x_2))$$

Sicuramente devo usare la notazione con i pedici, altrimenti sembra che la stessa persona ama sé stesso.

$$\forall\ x\ \exists\ P(x) \to A(P(x), P(x))$$

Sinceramente questa notazione non è tanto comoda, per il fatto che le proposizioni in matematica le trovi nel modo in cui ho scritto io ora. Non in quello in alto, molto più complessa come modalità, prolissa e non semplice. Quindi cerchiamo sempre di capire il senso.

(b) La seconda frase è: "Ognuno ama tutti".

$$\forall\ (U(x), D(x)) \dots$$

Anche qui invece di usare la notazione che mi è stata data, me la semplifico a modo mio per essere più chiaro possibile e risolvere l'esercizio in maniera efficiente.

$$\forall\ x, A(x, P(x))$$

Questo potrebbe essere un modo (che in realtà è ambiguo e sbagliato), ma non ti complicheresti a scrivere una frase del genere. Scriveresti più una cosa del tipo.

$$A(x_n, P(x_m)), \forall n, m$$

che non sembra nemmeno così tanto corretto.
Quindi forse sarebbe meglio fare la negazione: "non esiste qualcuno che non ama qualcuno. "

$$\nexists\ x \mid \neg(A(P(x_n), P(x_m))), \forall n, m$$

Come si può ben vedere, la questione non è così banale se si usa questo linguaggio, quindi a mio parere si butta via tutto e si cerca un modo migliore di comunicare la questione.

(c) Si potrebbe dire: "Non esiste qualcuno che ami tutti"

$$\nexists\ x \mid (A(P(x_n), P(x_m))), \forall n, m$$

Che è la estessa di prima senza la negazione davanti funzione d'amore.

(d) La prima cosa che mi verrebbe da scrivere:

$$\forall\ x\ \exists\ n, m \to A(P(x_n), (P(x_m)) \to \exists l\ A(P(x_m), P(x_l))$$

ma mi sembra una piccola bestia e sinceramente lo passerei volentieri a una forma migliore.

(e) teniamo sempre presente che:

$$\neg\forall = \exists$$

Poi trall'altro quando si fanno questi esercizi si deve tenere conto del fatto che a volte le frasi è meglio negarle. Per esempio la frase.

Non tutti amano qualcuno

Il non tutti diventa esiste.

Esiste qualcuno che ama qualcuno

Molto semplicemente quindi diventa.

$$\exists\ x \text{ tale che } A(P(x), \text{un altro } P(x))$$

In questa logica dei predicati ci sono così tanti modi diversi di scrivere le cose che non cerco di fossilizzarmi nel modo.

(f)

$$\forall\ U(x)\ \exists\ D(x)\ \to A(U(x), D(x))$$

14.2 Esercizio 2

15 Foglio 15

Ecco, già qui che è meglio... facciamo questi esercizi che sono più schematici.

15.1 Esercizio 1

(1)
$$\forall\ x\ (\exists\ y\ (P(y) \wedge\ \forall\ z\ (Q(z,x))\ \ \rightarrow \exists\ y\ Q(x,y)$$

(2)
$$\forall\ x\ (\neg(\exists\ y\ (P(y) \wedge\ \forall\ z\ (Q(z,x))) \vee \exists\ y\ Q(x,y)$$

(3)
$$\forall\ x\ (\neg(\exists\ y\ (P(y) \wedge\ \forall\ z\ (Q(z,x))) \vee \exists\ y\ Q(x,y)$$

(4)
$$\forall\ x\ (\forall\ y\ (\neg P(y) \vee\ \exists\ z\ \neg(Q(z,x)) \vee \exists\ y\ Q(x,y)$$

(5)
$$\forall\ x\ (\forall\ y\ \exists\ z\ (\neg P(y) \vee\ \neg(Q(z,x)) \vee \exists\ y\ Q(x,y)$$

(6)
$$\forall\ x\ \forall\ y\ \exists\ z\ (P(\neg y) \vee\ (Q(\neg z, \neg x) \vee \exists\ y\ Q(x,y)$$

(7)
$$\forall\ x\ \forall\ y\ \exists\ z\ (P(\neg y) \vee\ (Q(\neg z, \neg x) \vee \exists\ w\ Q(x,w)$$

(8)
$$\forall\ x\ \forall\ y\ \exists\ z\ \exists\ w\ (P(\neg y) \vee\ (Q(\neg z, \neg x) \vee\ Q(x,w)$$

Fin qui era il processo per arriva a FNC. Adesso Skolemizzo un passo alla volta.

(9)
$$\forall\ x\ \forall\ y\ \exists\ w\ (P(\neg y) \vee\ (Q(\neg(P(x,y), \neg x) \vee\ Q(x,w)$$

(10)
$$\forall\ x\ \forall\ y\ (P(\neg y) \vee\ (Q(\neg(P(x,y), \neg x) \vee\ Q(x, P(x,y))$$

(11)
$$\forall\ x\ \forall\ y\ (P(\neg y) \vee\ (Q(\neg(P(x,y), \neg x) \vee\ Q(x, P(x,y))$$

Adesso passo all'universo di Herbrand. Considero P() come f() e Q() come g().

(12) Se non ho un elemento costante lo scelgo.

$$H = \{c_0, \ldots\}$$

Nell'universo di Herbrand non ci interessa se la funzione ha la sua variabile oppure la sua negazione. Quindi...

$$H = \{c_0, g(f(x, y), x), g(x, f(x, y), \ldots\}$$

E da quel che ho capito le funzioni articolate, composte, sono quelle che ci interessano nell'universo di Herbrand.
Aggiungo che né GPT né gli appunti spiegano in maniera chiara questi passagi. Quindi sto andando a intuito. Cerco poi di approfondire nei libri per vedere se trovo dei chiarimenti.
La teoria aiuta sicuramente, però ci vuole del tempo per approfondirla e capirla completamente.

15.2 Esercizio 2

$$\neg\exists x(\neg P(x) \vee \forall y(P(y))$$

$$\forall x(P(x) \wedge \exists y(P(y))$$

$$\forall x\exists y(P(x) \wedge (P(y))$$

Se voglio Skolemizzare devo fare

$$\forall x(P(x) \wedge (P(P(x)))$$

questo perché il quantificatore esistenziale si trovava prima di x, questo significava che dipendeva da lui e di conseguenza questa dipendenza si scrive per mezzo di funzioni composte, come potete vedere qui in alto sottolineato di blu.

A questo punto per l'universo di Herbrand ci inventiamo una costante che non esisteva fin'ora, perché noi vogliamo che ce ne sia almeno una.

$$H = \{c_0, \ldots\}$$

poi cominciamo a scrivere le due funzioni che avevamo fin'ora,

$$H = \{c_0, f(x), f(f(x)), \ldots\}$$

il resto non è altro che una composizione ricorsiva di funzioni. Almeno in questo caso perché ci è andata bene che le due funzioni si riducevano alla stessa. f(x)

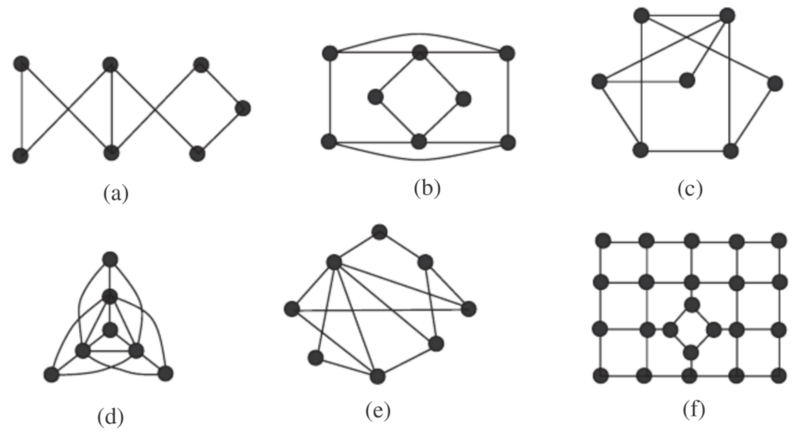


Figure 3: Grafi da considerare per l'esercizio numero 5

15.3 Esercizio 3

Risposta corretta è la (c).

15.4 Esercizio 4

Formula normale prenessa è la (c).
Se si è arrivati fin qua e si è compreso i meccanismi, diventa abbastanza semplice comprendere come funziona la faccenda.

15.5 Esercizio 5

Per vedere se un grafo è hamiltoniano ci sono 4-5 modi diversi, ricordiamoli:

1. Ciclo hamiltoniano
2. Grafo completo
3. Teorema di Ore
4. Un ulteriore teorema che riguarda il grado dei vertici
5. Criteri di Hamiltonianetà

Quindi in base all'esercizio useremo uno degli approcci qui sopra indicati. Bisogna sottolineare in questo tipo di esercizi spesso non si può prevedere in maniera immediata quale è la tattica migliore da usare, dobbiamo andare a tentativi o a intuito.

(a) Numeriamo i vertici a strati/liveli. La punta in basso a destra corrisponde al numero quattro. Basta fare un cammino del tipo (1-6-3-4-5-2-7) per vedere che si presenta un ciclo Hamiltoniano. Quindi il grafo **è Hamiltoniano.**

(b) Adesso proviamo a usare il teorema riguardo a vertici. Il grado di ogni vertice (Cioè il numero di archi incidenti su quest'ultimo) deve essere maggiore uguale alla metà del numero vertici presenti.
$n = |V| \geq 3 \quad d_g(v) \geq \frac{n}{2}$ per ogni vertice Basti notare che questo non è vero per gli elementi al centro, che hanno solo due archi incidenti, e il gioco è fatto. (In realtà se n è un numero dispari si arrotonda per eccesso, quindi basterebbe guardare gli altri vertici che hanno solo 3 archi incidenti. ... **Ulteriore nota**: i vertici sono sette e quindi il confronto si va facendo con il numero quattro (3.5 arrotondato per difetto))
Questo grafo non è Hamiltoniano

(c) Con lo stesso gioco di prima si arriva a concludere che anche questo non è Hamiltoniano. Il vertice infondo a destra ha solo 2 archi incidenti.

(d) Con questo invece ci basta fare un percorso piuttosto banale, ce ne sono più di uno, per sapere se è Hamiltoniano.

(e) Anche questo Hamiltoniano. Non è difficile trovare un percorso che passi una volta sola per tutti i vertici.

(f) Qui, invece di trovare un percorso, che si può intuire essere un procedimento lungo e macchinoso, prendiamo sempre il teorema sui vertici (che mi sembra essere quello più computabile per un umano) e ricaviamo prima quanti sono i vertici.
24, vertici, quindi il confronto si fa con 12... ed è banale arrivare alla conclusione che questo grafo **non è** Hamiltoniano.

15.6 Esercizio 6

Qui usiamo sempre la questione dei gradi degli archi. Basta notare lo schema che ogni vertice è connesso ad altri quattro vertici e il totale è otto. Se si è compreso la metodologia si può dichiarare che questo grafo **è a tutti gli effetti** Hamiltoniano

15.7 Esercizio 7

TODO

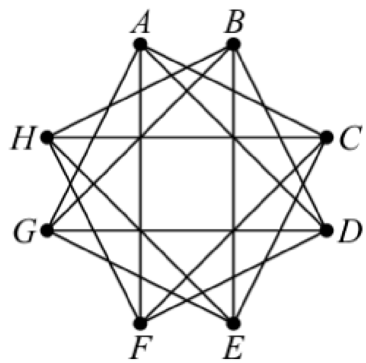


Figure 4: Grafi da considerare per l'esercizio numero 6

16 Foglio 16

16.1 Esercizio 1

16.2 Esercizio 2

16.3 Esercizio 3

16.4 Esercizio 4