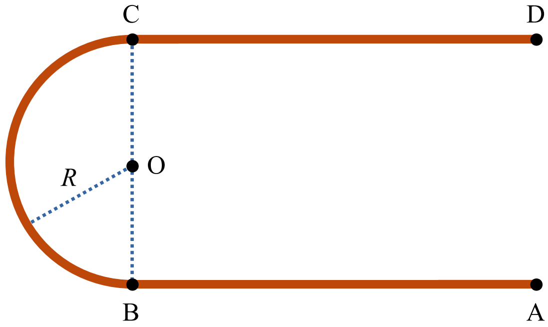
Compito Fisica Generale - 14/06/2023

Esercizio 1: Gara di corsa



Due atleti si sfidano sui 500 metri. Il percorso, mostrato in figura, prevede due tratti rettilinei uguali (AB = CD) uniti fra di loro tramite un raccordo semi-circolare di raggio R e lunghezza pari a metà del tratto AB. Gli atleti partono da fermi in A e il traguardo è in D.

Il corridore 1 utilizza la seguente tattica: nel tratto AB accelera con accelerazione costante fino a raggiungere la velocità v_{1B} nel punto B, percorre il tratto curvo con accelerazione tangenziale costante a_{1T} e infine mantiene una velocità costante nel tratto CD.

Il corridore 2, invece, nel tratto AB accelera con legge $a_2(t) = Kt$, mentre nel tratto curvo prosegue con una velocità angolare costante. Nel tratto finale, con un ultimo sforzo, riesce ancora ad accelerare ulteriormente in modo uniforme, fino a tagliare il traguardo con una velocità nel punto D del 20% superiore a quella che aveva nel punto C.

a) Determinare chi vince la gara, con quale ritardo il perdente arriva al traguardo rispetto al vincitore e la posizione del perdente sulla pista quando il vincitore taglia il traguardo (**7 punti**).

b) Calcolare la velocità e la celerità media dei due corridori fra il punto di partenza A e il punto di arrivo D (**3 punti**).

Bonus: Supponiamo adesso che nell'ultimo tratto CD, entrambi gli atleti siano soggetti ad una forza di attrito viscoso dovuta all'aria, con coefficiente di attrito λ. Si assuma che i due corridori siano punti materiali di massa m_1 e m_2 e che entrambi siano soggetti solamente alla forza frenante dovuto all'attrito.

c) Determinare chi vince in questo caso e calcolare le velocità dei due corridori al traguardo (**3 punti**).

Dati numerici: $v_{1B} = 23$ km/h, $a_{1T} = 0.7$ m/s^2, $K = 0.006$ m/s^3, $\lambda = 2.5$ kg/s, $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 80$ kg.

Esercizio 2: Molla, piano inclinato ed urto

Due punti materiali, uno di massa M e l'altro di massa m, sono collegati tra loro come in figura. La molla ha costante elastica k e il piano su cui si posa m è inclinato di un angolo α. Si può ipotizzare che la fune che collega i due punti materiali sia inestensibile e di massa trascurabile, che la superficie sia liscia e che la puleggia abbia massa e dimensioni trascurabili.

a) Determinare di quanto è deformata la molla in condizioni di equilibrio del sistema (**4 punti**).

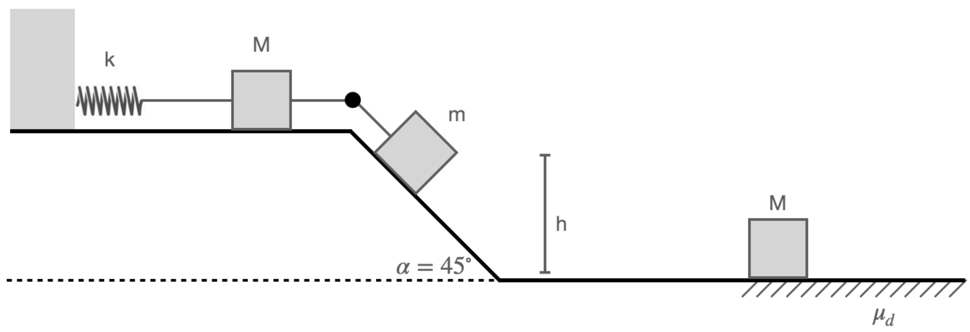
Ad un certo punto la fune che collega m alla puleggia viene tagliata ed m, inizialmente fermo ed in equilibrio statico col sistema, cade lungo il piano inclinato a partire da un'altezza h dal suolo. Una volta raggiunto il suolo, m procede per una distanza x prima di urtare in modo completamente anelastico un nuovo punto materiale di massa M.

b) Determinare la velocità del blocco, subito dopo l'urto (**3 punti**).

Dopo l'urto, il blocco procede per un tratto di lunghezza d su una superficie con coefficiente di attrito dinamico μ_d, fino a fermarsi.

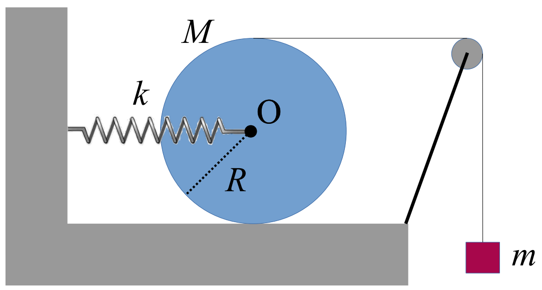
c) Determinare la distanza d percorsa dal blocco (**3 punti**).

Dati numerici: $M = 0.6$ kg, $m = 0.4$ kg, $k = 80$ N/m, $\alpha = 45°$, $h = 1$ m, $\mu_d = 0.1$.



Esercizio 3: Disco, molla e peso

Un disco rigido omogeneo di raggio R e massa M è appoggiato su un piano orizzontale fisso. L'asse passante per il centro di massa del disco, attorno al quale il disco può ruotare senza attrito, è connesso ad una molla ideale di costante elastica k fissata ad una parete all'altra estremità. Attorno al disco è avvolto un filo ideale che passa su una carrucola ideale posizionata in modo tale che il tratto di filo fra carrucola e disco sia orizzontale; dall'altra parte della carrucola il filo è fissato a un blocchetto di massa m. Il sistema è mostrato in figura.



a) Calcolare l'allungamento l_{eq} della molla quando il sistema è in equilibrio (**4 punti**).

b) Se la molla viene rimossa istantaneamente, calcolare il modulo α dell'accelerazione angolare del disco supponendo che il moto di quest'ultimo sia di rotolamento puro (**3 punti**).

c) Se, nelle condizioni del punto (a), si lascia la molla attaccata e si ruota il disco di un angolo θ_0 in senso orario, calcolare il modulo ω_0 della velocità angolare del disco quando il sistema torna nella configurazione iniziale (**3 punti**).

Dati numerici: $R = 50$ cm, $M = 5$ kg, $m = 2$ kg, $k = 200$ N/m, $\theta_0 = 30°$.

Soluzioni - 14/06/2023

Esercizio 1: Gara di corsa

Dato che l'intero percorso fra A e D è 500 m, si ricava facilmente che AB = CD = 200 m e la semi-circonferenza BC = 0.5*AB = 100 m. Il raggio di curvatura è $R = 100$ m/$\pi = 31.83$ m.

(a) Possiamo scrivere le leggi di velocità ed orarie per i tre tratti (AB, BC e CD) per ogni corridore e calcolare i parametri cinematici e il tempo.

Corridore 1:

Il tratto AB è un moto uniformemente accelerato:

$$v_{1AB}(t) = a_{1AB}t \tag{1}$$
$$s_{1AB}(t) = 1/2\ a_{1AB}t^2 \tag{2}$$

Usando i dati sullo spazio percorso AB = 200 m e sulla velocità in B, $v_{1B} = 23$ km/h = 6.39 m/s^2, si risolve il sistema e si ottiene $a_{1AB} = 0.10$ m/s^2 e $t_{1AB} = 62.61$ s.

Il tratto BC è un moto circolare con accelerazione angolare costante $\alpha = a_{1T}/R = 0.022$ s^{-2}. La velocità angolare iniziale nel punto B è $\omega_{1B} = v_{1B}/R = 0.20$ s^{-1}. Le equazioni sono:

$$\omega_{1BC}(t) = \omega_{1B} + \alpha t \tag{3}$$
$$\theta_{1BC}(t) = \omega_{1B}t + 1/2\ \alpha t^2 \tag{4}$$

Ponendo l'angolo finale percorso $\theta_{1BC} = \pi$ e risolvendo il sistema, si ottengono la velocità angolare in C, $\omega_{1C} = 0.42$ s^{-1}, e il tempo impiegato per questo tratto $t_{1BC} = 10.08$ s.

Infine, nel tratto CD, il moto è a velocità costante $v_{1C} = \omega_{1C}R = 13.45$ m/s. La legge oraria è semplicemente $s_{1CD}(t) = v_{1C}t$. Poiché la lunghezza del tratto CD è 200 m, si ottiene $t_{1CD} = 14.87$ s.

Quindi, il corridore 1 impiega in tutto un tempo $t_{1tot} = t_{1AB} + t_{1BC} + t_{1CD} = 87.56$ s.

Corridore 2:

Nel tratto AB, la legge dell'accelerazione è $a_{2AB}(t) = \ddot{x}(t) = Kt$. Integrando questa equazione due volte, e ponendo le condizioni iniziali $v_{1A} = 0$ e $x_{1A} = 0$, si ottengono la legge della velocità e della posizione:

$$v_{1AB}(t) = Kt^2\ /\ 2 \tag{5}$$
$$s_{1AB}(t) = Kt^3\ /\ 6 \tag{6}$$

Imponendo lo spazio percorso di 200 m, si ottengono il tempo impiegato $t_{2AB} = 58.48$ s e la velocità nel punto B, $v_{2B} = 10.26$ km/s.

Nel tratto BC, il moto è circolare uniforme, quindi il tempo impiegato è semplicemente la lunghezza del semicerchio BC diviso la velocità tangenziale, data dalla velocità v_{2B}, quindi $t_{2BC} = BC/v_{2B} = 9.75$ s. Inoltre, avremo che $v_{2C} = v_{2B}$.

Infine, nel tratto CD, il corridore 2 accelera in modo uniforme fino a raggiungere una velocità al traguardo superiore del 20% di quella che aveva nel punto C, ovvero $v_{2D} = 1.2 v_{2C} = 12.31$ km/s. Le equazioni del moto saranno:

$$v_{2CD}(t) = v_{2C} + a_{2CD} t \tag{7}$$
$$s_{2CD}(t) = v_{2C} t + 1/2 \ a_{2CD} t^2 \tag{8}$$

Imponendo la velocità finale appena ottenuta e risolvendo il sistema si ottiene $t_{2CD} = 17.72$ s.

Quindi, il tempo del corridore 2 è $t_{2tot} = t_{2AB} + t_{2BC} + t_{2CD} = 85.95$ s.

Poiché $t_{2tot} < t_{1tot}$, vince il corridore 2. Il distacco temporale è semplicemente $\Delta t = t_{1tot} - t_{2tot} = 1.61$ s. Il corridore 1 si sta muovendo di moto uniforme nel tratto CD; quindi, quando il corridore 2 taglia il traguardo, il corridore 1 si troverà ad una distanza dal traguardo di $\Delta s = v_{1C} \Delta t = 21.65$ m.

(b) La velocità media è definita rispetto al vettore spostamento di modulo $|(D - A)| = 2R = 63.66$ m. Quindi le velocità medie saranno $v_{1m} = 2R/t_{1tot} = 0.73$ m/s e $v_{2m} = 2R/t_{2tot} = 0.74$ m/s. La celerità media è invece definita rispetto allo spazio effettivamente percorso, ovvero 500 m, quindi $v_{c_1} = 500 \text{ m}/t_{1tot} = 5.71$ m/s e $v_{c_2} = 500 \text{ m}/t_{2tot} = 5.82$ m/s.

(c) A causa dell'aria, i due atleti sono soggetti ad una forza di attrito che si oppone al moto di modulo $F_{att}(t) = -\lambda v(t) = -\lambda \dot{x}(t)$. Quindi dalla II legge della dinamica abbiamo:

$$-\lambda \dot{x} = m \ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \eta \dot{x} = 0 \quad \text{con} \quad \eta = \lambda/m \tag{9}$$

È un'equazione del II ordine, lineare a coefficienti costanti. Si può integrare, ad esempio, per separazione delle variabili:

$$\int_{\dot{x}(0)}^{\dot{x}(t)} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\int_0^t \eta dt \quad \Longrightarrow \quad \log(\dot{x}) - \log(\dot{x}_0) = -\eta t \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\eta t} \tag{10}$$

Integrando nuovamente:

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t \dot{x}_0 e^{-\eta t} dt \quad \Longrightarrow \quad x - x_0 = \dot{x}_0/\eta \ (1 - e^{-\eta t}) \tag{11}$$

Invertendo questa relazione e ponendo $x = L = 200$ m, $x_0 = 0$, si ottiene la formula per il tempo impiegato per percorrere il tratto CD in presenza di attrito frenante:

$$t = -\frac{1}{\eta} \log \left(1 - \frac{\eta L}{\dot{x}_0} \right) \tag{12}$$

Inserendo i dati della massa e velocità iniziali (nel punto C) per i due atleti, si ottiene $t_{1CD,att} = 23.20$ s e $t_{2CD,att} = 30.06$ s. Quindi i tempi totali di percorrenza della pista, con attrito nel tratto finale, sono $t_{1tot,att} = t_{1AB} + t_{1BC} + t_{1CD,att} = 95.90$ s e $t_{2tot,att} = t_{2AB} + t_{2BC} + t_{2CD,att} = 98.29$ s. Quindi, in questo caso, vince il corridore 1.

Le velocità finali sono ricavabili dall'equazione (10) utilizzando i tempi di percorrenza appena calcolati e le velocità iniziali dei corridori nel punto C: $v_{1D,att} = 5.11$ m/s e $v_{2D,att} = 4.00$ m/s.

Esercizio 2: Molla, piano inclinato ed urto

(a) Per il primo principio della dinamica, se il sistema è all'equilibrio (punti materiali fermi), la sommatoria delle forze che agiscono su di essi è nulla. Per il corpo m ed M si hanno, rispettivamente, le equazioni:

$$-T + mg\sin(\alpha) = 0 \tag{13}$$

$$T - k\Delta x = 0 \tag{14}$$

dove T è la tensione del filo. Da queste equazioni si deriva:

$$\Delta x = \frac{mg\sin(\alpha)}{k} = 3.5 \text{ cm} \tag{15}$$

(b) Durante l'urto completamente anelastico, i punti materiali m ed M rimangono uniti e formano un unico blocco di massa $m + M$. Per calcolare la velocità del blocco $m + M$ bisogna trovare la velocità di m prima dell'urto. Dal momento che il percorso tra il punto in cui m tocca il suolo e il punto in cui urta M è liscio, non c'è alcuna forza che modifica la sua velocità. Dunque la velocità di m prima dell'urto è equivalente alla velocità di m quando tocca il suolo:

$$v_m = \sqrt{2gh} = 4.4 \text{ m/s} \tag{16}$$

A questo punto, applicando la conservazione della quantità di moto prima e dopo l'urto completamente anelastico:

$$mv_m = (m + M)\ v_0, \tag{17}$$

ricaviamo la velocità dopo l'urto del blocco $m + M$:

$$v_0 = \frac{m}{m + M}\ v_m = 1.8 \text{ m/s}. \tag{18}$$

(c) Il blocco di massa $m+M$ si muove di moto uniformemente decelerato, dove la decelerazione è causata dalla forza d'attrito $F_{\text{att}} = -\mu_d(m + M)g$. La distanza percorsa d si può calcolare sia valutando la variazione di energia meccanica dovuta al lavoro della forza d'attrito, sia utilizzando considerazioni cinematiche. Utilizzando il secondo approccio, e l'informazione che a distanza d il corpo è per definizione fermo, possiamo scrivere l'equazione della velocità nel caso di moto uniformemente accelerato:

$$v_{\text{fin}} = 0 = v_0 - \mu_d g t_f, \tag{19}$$

dove $t_f = \dfrac{v_0}{\mu_d g} = 1.8$ s è il tempo impiegato dal blocco $m + M$ a fermarsi. In un tempo t_f, il blocco percorre un tratto che si può calcolare come:

$$d = v_0 t_f - \frac{1}{2}\mu_d g t_f^2 = 1.6 \text{ m}. \tag{20}$$

Esercizio 3: Disco, molla e peso

Prendiamo un sistema di riferimento inerziale xyz solidale con il piano orizzontale, con l'asse x orizzontale e orientato verso destra, l'asse y verticale e orientato verso l'alto, e l'asse z perpendicolare al piano della figura e uscente da quest'ultima.

(a) In situazione di equilibrio, sono nulle la risultante delle forze esterne e quella dei momenti delle forze esterne applicate al disco e, contemporaneamente, la risultante delle forze applicate al blocchetto di massa m. Sul blocchetto agiscono solo la forza peso $\mathbf{P}_m = -mg\,\mathbf{j}$ e la tensione del filo $\mathbf{T} = T\,\mathbf{j}$, quindi lungo y avremo:

$$T - mg = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = mg \tag{21}$$

Sul disco agiscono invece le seguenti forze:

$$\mathbf{P}_M = -Mg\,\mathbf{j} \qquad \text{(forza peso del disco)} \tag{22}$$
$$\mathbf{F}_{el} = -kl\,\mathbf{i} \qquad \text{(forza di richiamo molla)} \tag{23}$$
$$\mathbf{N} = N\,\mathbf{j} \qquad \text{(reazione normale del piano)} \tag{24}$$
$$\mathbf{F}_s = F_s\,\mathbf{i} \qquad \text{(forza attrito statico)} \tag{25}$$
$$\mathbf{T} = T\,\mathbf{i} = mg\,\mathbf{i} \qquad \text{(tensione del filo)} \tag{26}$$

La forza peso e quella elastica sono applicate al centro di massa, la reazione vincolare e l'attrito sono applicate al punto di contatto fra il piano e il disco, e la tensione del filo è applicata al punto superiore del disco.

La risultante dei momenti delle forze esterne, calcolata ad esempio rispetto al punto di contatto fra piano e disco, sarà nulla in condizione di equilibrio. Le uniche forze che hanno momento non nullo sono la forza elastica (con braccio R) e la tensione (con braccio $2R$):

$$-2mRg\,\mathbf{k} + Rkl_{eq}\,\mathbf{k} = 0 \quad \Longrightarrow \quad l_{eq} = \frac{2mg}{k} = 0.196\ \mathrm{m} \tag{27}$$

(b) Rimuovendo la molla, le forze esterne agenti sul sistema saranno le stesse a meno della forza elastica, che scompare. Notare che la forza di attrito sarà sempre statica per l'assunzione di rotolamento puro. Scrivendo la I cardinale per il blocchetto e la II cardinale per il disco abbiamo:

$$-mg + T = m\ddot{y} \tag{28}$$
$$-2RT = I_P\alpha \tag{29}$$

dove I_P è il momento di inerzia del disco rispetto al punto P di contatto fra disco e piano. Per il teorema di Huygens e Steiner, $I_P = I_O + MR^2 = 3/2MR^2$.

Le equazioni qui sopra formano un sistema di due equazioni nelle tre incognite $\ddot{y}$, T e α, e quindi non sono sufficienti. Tuttavia $\ddot{y}$ e α non sono indipendenti: se il disco si muove di rotolamento puro e ruota di un angolo θ, il blocchetto si muove lungo y di un tratto pari al tratto di filo che si è srotolato/riavvolto, ovvero pari a $2R\theta$, perché alla rotazione di θ, che contribuisce con $R\theta$, si somma la traslazione del centro del disco, che contribuisce con un altro $R\theta$. Quindi avrò $y = 2R\theta$, $\dot{y} = 2R\dot{\theta}$ e $\ddot{y} = 2R\ddot{\theta} = 2R\alpha$. Sostituendo $\ddot{y}$ e I_P nelle cardinali:

$$T = 2mR\alpha + mg \tag{30}$$
$$2RT = -\frac{3}{2}MR^2\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -\frac{g}{R}\left(\frac{4m}{3M+8m}\right) = -5.06\ \mathrm{s}^{-2} \tag{31}$$

(c) Le forze che compiono lavoro sono tutte conservative, quindi l'energia meccanica totale si conserva. Le energie cinetica e potenziale del sistema possono essere scritte come:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 \tag{32}$$

$$V = \frac{1}{2}kx_{CM}^2 + mgy \tag{33}$$

dove x_{CM} e v_{CM} sono la posizione e la velocità del centro di massa del disco. Abbiamo scelto uguale a zero l'energia potenziale della molla quando questa è a riposo e quella del peso di m quando questo si trova nella configurazione di equilibrio del punto (a). Possiamo ignorare l'energia potenziale gravitazionale del disco, in quanto rimane sempre costante. Inoltre abbiamo le seguenti relazioni che legano posizione e velocità lineare del centro di massa del disco alla posizione angolare e alla velocità angolare del disco stesso: $x_{CM} = l_{eq} - R\theta$ e $v_{CM} = -\omega R$. Inoltre, abbiamo sempre $y = 2R\theta$ e $\dot{y} = 2R\omega$.

Scrivendo la conservazione dell'energia fra la posizione iniziale ruotata di un angolo θ_0 e ferma ($\theta = \theta_0$ e $\omega = 0$) e la posizione di quando il sistema ripassa alla condizione di equilibrio ($\theta = 0$ e $\omega = \omega_0$) si ha:

$$\frac{1}{2}k(l_eq - R\theta_0)^2 + 2mgR\theta_0 = \frac{1}{2}kl_{eq}^2 + 2m\omega_0^2R^2 + \frac{1}{2}M\omega_0^2R^2 + \frac{1}{4}M\omega_0^2R^2 \tag{34}$$

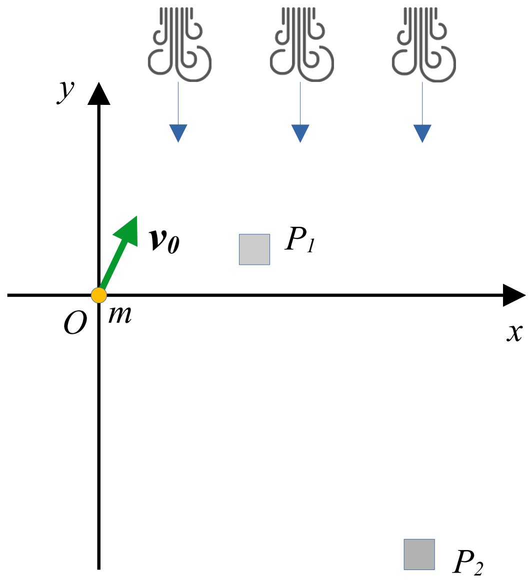
Sostituendo il risultato trovato nel punto a), $kl_{eq} = mg$, e risolvendo per ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k\theta_0^2}{8m + 3M}} = 2.599 \text{ s}^{-1} \tag{35}$$

Compito Fisica Generale - 07/07/2023

Esercizio 1: Moto di una pallina con vento

Su di un piano xy sono presenti due ostacoli fissi nelle posizioni P_1 e P_2, come mostrato in figura. Una pallina di massa m viene lanciata dall'origine O con velocità iniziale $\boldsymbol{v_0}$. Sul piano viene inviato un getto di aria lungo la direzione y, che imprime sulla pallina una forza che varia nel tempo come $\boldsymbol{F}(t) = \beta t^2 \boldsymbol{j}$. Si trascuri la forza peso.



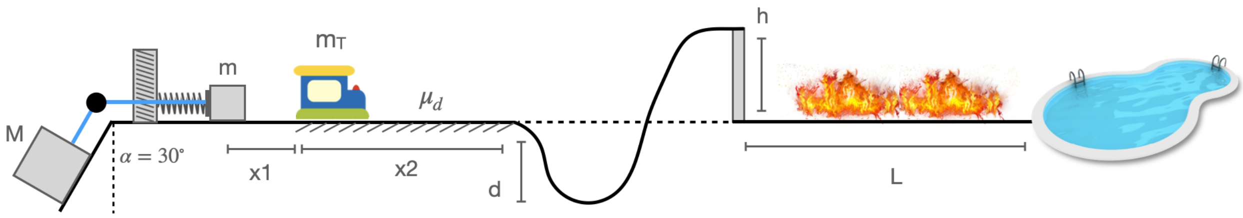
a) Scrivere la legge della velocità $\boldsymbol{v}(t)$ e la legge oraria della posizione $\boldsymbol{p}(t)$ (**3 punti**).

b) Scrivere l'equazione cartesiana $y = y(x)$ della traiettoria della pallina sul piano xy; determinare le coordinate (x_{max}, y_{max}) del punto massimo della traiettoria e la coordinata x_1 in cui la traiettoria intercetta $y = 0$. Infine, disegnare la traiettoria approssimativa nel piano xy (**4 punti**).

c) Determinare se la pallina urta uno dei due ostacoli durante la traiettoria e, in caso affermativo, determinare dopo quanto tempo avviene l'impatto e il modulo, la direzione e il verso della velocità nell'istante dell'urto (**3 punti**).

Dati numerici: $P_1 = (3\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j})$ m, $P_2 = (6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j})$ m, $m = 250$ g, $\boldsymbol{v_0} = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})$ m/s, $\beta = -3$ N/s^2.

Esercizio 2: Trenino con molla



Una molla di costante elastica k ha l'estremità sinistra fissata ad un muro. Invece, la sua estremità destra, come mostrato in figura, è collegata attraverso un filo ad un punto materiale di massa M, appoggiato su di un piano inclinato di un angolo α rispetto alla direzione verticale. Si può ipotizzare che il filo che collega i due punti materiali sia inestensibile e di massa trascurabile, che la superficie sia liscia e che la puleggia abbia massa e dimensioni trascurabili.

a) Determinare di quanto è deformata la molla in condizioni di equilibrio del sistema (**4 punti**).

Nella situazione di equilibrio, un secondo punto materiale di massa m è a contatto con la molla e fermo. Ad un certo punto, il filo viene tagliato e m si mette in moto. Dopo aver percorso un tratto liscio lungo x_1, m urta in modo anelastico un trenino di massa m_T, inizialmente fermo, che si approssima ad un punto materiale. Dopo l'urto, m si ferma, ed il trenino si mette in moto con una certa velocità (si trascuri l'attrito dell'aria). Il trenino percorre un tratto di lunghezza x_2 con coefficiente di attrito dinamico μ_d. Successivamente, il trenino entra in un tratto liscio dalla forma mostrata in figura: una sorta di buca, profonda d, seguita da una rapida salita ed un tratto pianeggiante, posto ad una quota h.

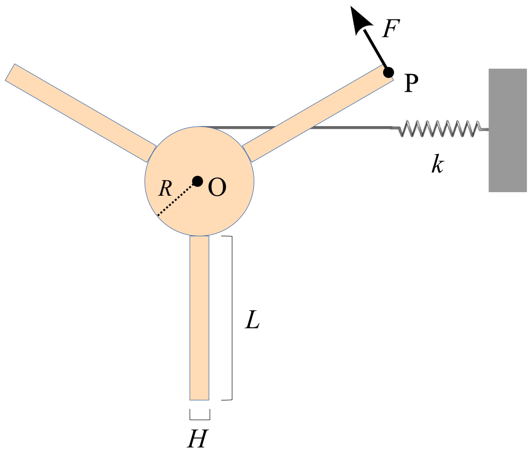
b) Calcolare la velocità del trenino subito dopo l'urto e nel punto finale della pista (**3 punti**).

c) Terminata la pista, il trenino prosegue il suo moto soggetto alla forza di gravità. Determinare se la velocità calcolata nel punto precedente è sufficiente ad evitare un tratto di superficie infuocata lunga L, ed atterrare così in una comoda piscina (**3 punti**).

Dati numerici: $M = 10$ kg, $m = 1$ kg, $k = 80$ N/m, $\alpha = 30°$, $x_1 = 10$ m, $m_T = 0.3$ kg, $\mu_d = 0.5$, $x_2 = 30$ m, $d = 10$ m, $h = 20$ m, $L = 38$ m

Esercizio 3: Elica e molla

L'elica mostrata in figura si può approssimare come un corpo rigido costituito da 3 piastre rettangolari omogenee di lunghezza L e larghezza H collegate ad una estremità ad un disco omogeneo di raggio R. Ciascuna piastra ha massa m, mentre sappiamo che il disco ha densità superficiale di massa σ. L'elica può ruotare attorno ad un asse passante per il centro di massa O e perpendicolare al foglio.



Un filo inestensibile e di massa trascurabile viene collegato ad una molla e arrotolato intorno al disco. L'elica viene quindi ruotata di un angolo θ_0 rispetto alla posizione di riposo, in modo tale da allungare la molla. Il sistema è quindi mantenuto in equilibrio applicando una forza di modulo F all'estremità P di una delle pale in direzione tangenziale. Si ignori la forza peso.

a) Calcolare il valore della costante elastica k della molla, il modulo della tensione del filo e l'energia meccanica quando il sistema è mantenuto in equilibrio (**4 punti**).

b) Calcolare il momento di inerzia I_O totale dell'elica rispetto all'asse di rotazione (**3 punti**).

c) All'istante $t = 0$, la forza F viene rimossa e il sistema è lasciato libero di ruotare. Ignorando possibili forze di attrito, calcolare l'accelerazione angolare dell'elica nell'istante in cui passa per θ_1. Infine, determinare la velocità angolare dell'elica quando la molla raggiunge la posizione di riposo (ovvero a $\theta = 0$) (**3 punti**).

Bonus: Dopo che l'azione della molla è cessata (poiché il filo diventa lasco), si osserva che l'elica continua a ruotare per un tempo Δt prima di fermarsi.

d) Calcolare il momento medio delle forze di attrito rispetto all'asse di rotazione dell'elica e il lavoro compiuto per fermare l'elica (**3 punti**).

Dati numerici: $L = 0.8$ m, $H = 10$ cm, $R = 30$ cm, $m = 0.5$ kg, $\sigma = 0.355$ g/cm^2, $F = 35$ N, $\theta_0 = 40°$, $\theta_1 = 25°$, $\Delta t = 20$ s.

Soluzioni - 07/07/2023

Esercizio 1: Moto di una pallina con vento

Il moto avverrà esclusivamente nel piano xy, dato che la velocità iniziale ha solo le componenti $v_{0x} = 3$ m/s e $v_{0y} = 4$ m/s, e la forza impressa dal vento è diretta lungo y.

(a) Possiamo scomporre il moto lungo i due assi. Lungo x, abbiamo un semplice moto a velocità uniforme di equazioni:

$$v_x(t) = v_{0x} = 3 \text{ m/s} \tag{1}$$
$$x(t) = v_{0x}t \tag{2}$$

Lungo l'asse y, la pallina subisce una forza dovuta al vento che le imprime una accelerazione $a_y(t) = dv_y(t)/dt = F(t)/m = \beta/m\ t^2$. Integrando quest'ultima equazione una prima ed una seconda volta, otteniamo la velocità e la posizione lungo y:

$$\int_{v_{0y}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t \frac{\beta}{m}\ t^2 dt \implies v_y(t) = v_{0y} + \frac{\beta}{3m}\ t^3 \tag{3}$$
$$\int_0^{y(t)} dy = \int_0^t \left(v_{0y} + \frac{\beta}{3m}\ t^3\right) dt \implies y(t) = v_{0y}t + \frac{\beta}{12m}\ t^4 \tag{4}$$

(b) Per ricavare l'equazione cartesiana della traiettoria, è sufficiente eliminare il tempo da una delle leggi orarie. Per esempio, dalla (2) abbiamo $t = x/v_{0x}$, che possiamo andare a sostituire nella (4) per ottenere la traiettoria:

$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\ x + \frac{\beta}{12mv_{0x}^4}\ x^4 \tag{5}$$

Per ottenere il massimo della traiettoria, possiamo derivare la (5) e porla uguale a 0:

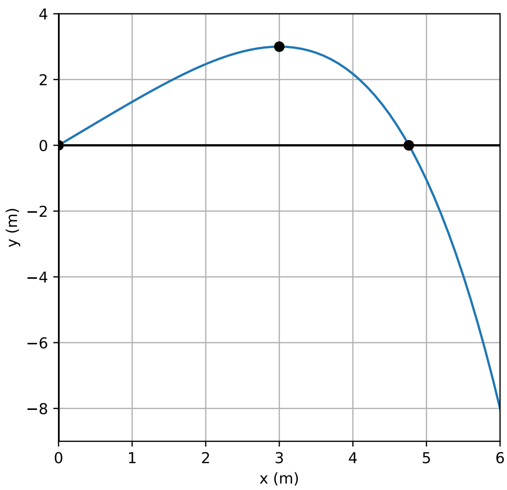
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{\beta}{3mv_{0x}^4}\ x^3 = 0 \implies x_{max} = \left(-\frac{3mv_{0x}^3 v_{0y}}{\beta}\right)^{1/3} = 3.0 \text{ m} \tag{6}$$

L'ordinata corrispondente si ricava sostituendo x_{max} alla (5), ottenendo $y_{max} = 3.0$ m. Quindi le coordinate del punto massimo della traiettoria sono $P_{max} = (3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})$ m. Lo stesso risultato poteva essere ottenuto con le equazioni della velocità e della posizione, studiando l'istante in cui $v_y = 0$.

Infine per trovare la coordinata x_1, poniamo $y = 0$ nell'equazione (5), ottenendo:

$$x\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{\beta}{12mv_{0x}^4}\ x^3\right) = 0 \tag{7}$$
$$\implies x_1 = \left(-\frac{12mv_{0x}^3 v_{0y}}{\beta}\right)^{1/3} = 4.76 \text{ m} \tag{8}$$

dove abbiamo ignorato la soluzione banale $x = 0$. Sapendo massimo e intersezione con l'asse y, possiamo disegnare la traiettoria approssimativa (figura a lato).



(c) Per verificare se gli ostacoli vengono colpiti, basta sostituire la loro coordinata x nell'equazione (5) e vedere se ri-otteniamo la coordinata y corretta:

$$y(x_{P1} = 3 \text{ m}) = 3 \text{ m} \neq y_{P1} \qquad \text{(Ostacolo 1 non viene colpito)} \tag{9}$$

$$y(x_{P2} = 6 \text{ m}) = -8 \text{ m} = y_{P2} \qquad \text{(Ostacolo 2 viene colpito)} \tag{10}$$

Usiamo ora la (2) per calcolare il tempo di impatto e le (1)-(3) per ottenere le componenti della velocità all'istante dell'impatto:

$$t_u = x_{P2}/v_{0x} = 2 \text{ s} \tag{11}$$

$$v_{xu} = v_x(t_u) = v_{0x} = 3 \text{ m/s} \tag{12}$$

$$v_{yu} = v_y(t_u) = v_{0y} + \frac{\beta}{3m}\, t_u^3 = -28 \text{ m/s} \tag{13}$$

Il modulo della velocità sarà quindi $v_u = \sqrt{v_{xu}^2 + v_{yu}^2} = 28.16$ m/s, con un angolo $\theta = \arctan(v_{yu}/v_{xu}) = -83.9°$ rispetto alla direzione orizzontale.

Esercizio 2: Trenino con molla

(a) Per il primo principio della dinamica, se il sistema è all'equilibrio (punti materiali fermi), la sommatoria delle forze che agiscono su di essi è nulla. Per il corpo M si ha:

$$-Mg\cos(\alpha) + T = 0 \tag{14}$$

dove la tensione T del filo è data dalla compressione della molla, $T = k\Delta x$. Da queste equazioni si deriva:

$$\Delta x = -\frac{Mg\cos(\alpha)}{k} = -1.1 \text{ m} \tag{15}$$

(b) Il punto materiale m acquista una velocità di partenza v_0 che si può determinare usando la conservazione dell'energia meccanica del sistema "molla + punto materiale" tra uno stato iniziale, in cui c'è solo l'energia potenziale della molla, ed uno stato finale, in cui tutta l'energia si è convertita in energia cinetica di m:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x = 9.8 \text{ m/s} \tag{16}$$

Nel tratto x_1 la velocità rimane invariata perché il piano è liscio, e quindi m arriva al momento dell'urto con il trenino con una velocità v_0. Applicando la legge di conservazione della quantità di moto prima e dopo l'urto anelastico tra m ed m_T, sapendo che il trenino è fermo prima dell'urto e che m è fermo dopo l'urto, otteniamo la velocità v_1 del trenino subito dopo l'urto:

$$v_1 m_T = m v_0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \frac{m}{m_T}\, v_0 = 32.7 \text{ m/s} \tag{17}$$

Durante il tratto x_2, m_T si muove di moto uniformemente decelerato, dove la decelerazione è causata dalla forza d'attrito $F_{\text{att}} = -\mu_d m_T g$. La velocità nel punto in cui finisce il tratto scabro si può calcolare sia utilizzando considerazioni cinematiche, sia valutando la variazione di energia meccanica dovuta al lavoro della forza d'attrito. Utilizzando il secondo approccio:

$$\frac{1}{2}m_T v_2^2 - \frac{1}{2}m_T v_1^2 = -\mu_d m_T g x_2 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2\mu_d g x_2} = 27.8 \text{ m/s} \tag{18}$$

Terminato il tratto scabro, poiché il resto del percorso è liscio e ci sono in gioco solo forze conservative, indipendentemente dalla forma del tragitto, la velocità alla quota h, che chiamiamo v_h, si può determinare impostando la conservazione dell'energia. Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}m_T v_2^2 = \frac{1}{2}m_T v_h^2 + mgh \quad \Longrightarrow \quad v_h = \sqrt{v_2^2 - 2gh} = 19.5 \text{ m/s} \tag{19}$$

(c) Terminata la pista, il trenino si muove di moto parabolico soggetto all'accelerazione di gravità, dovuto alla combinazione di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse orizzontale, ed un moto uniformemente accelerato lungo l'asse verticale.

Dalle leggi della cinematica si determina facilmente la gittata:

$$x_g = \sqrt{\frac{2v_h^2 h}{g}} = 39.4 \text{ m} \tag{20}$$

Quindi $x_g > L = 38$ m, ovvero la gittata è di poco superiore al tratto infuocato: il trenino riesce a salvarsi per un pelo!

Esercizio 3: Elica e molla

Prendiamo un classico sistema di riferimento inerziale xyz destrorso (asse x orizzontale e orientato verso destra, y verticale e orientato verso l'alto, z perpendicolare e uscente dal foglio).

(a) Possiamo applicare la seconda equazione cardinale all'elica. Nella situazione di equilibrio, la somma dei momenti della forza elastica F_{el} (trasferita al disco tramite il filo) e della forza F deve essere nulla:

$$\boldsymbol{\tau_F} + \boldsymbol{\tau_{F_{el}}} = F(L+R)\ \boldsymbol{k} - k\Delta x R\ \boldsymbol{k} = 0 \tag{21}$$

Sappiamo che l'elica è ruotata di un angolo $\theta_0 = 40°$ rispetto alla posizione di riposo, quindi la molla avrà un allungamento $\Delta x = R\theta_0 = 20.94$ cm. Quindi:

$$F(L+R) - kR^2\theta_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{F(L+R)}{R^2\theta_0} = 612.75 \text{ N/m} \tag{22}$$

La tensione del filo sarà uguale alla forza di richiamo della molla, ovvero avrà modulo $T = k\Delta x = kR\theta_0 = 128.33$ N. Poiché il sistema è fermo, l'energia meccanica è data solo dalla componente di energia potenziale elastica: $E_0 = V_0 = 1/2\ k\Delta x^2 = 13.44$ J.

(b) Il momento di inerzia dell'elica è dato dalla somma dei momenti di inerzia del disco e delle tre pale. Il momento di inerzia del disco è $I_{d,O} = 1/2\ MR^2 = 1/2\ \sigma\pi R^4$, dove la massa M del disco è calcolata a partire della densità superficiale di massa, ovvero $M = \sigma\pi R^2 = 1$ kg. Per ogni pala, il momento di inerzia $I_{p,0}$ è quello di un rettangolo rispetto all'asse di rotazione passante per O e si può calcolare usando il teorema di Huygens-Steiner: $I_{p,O} = I_{p,CM} + m(L/2+R)^2 = 1/12\ m(L^2+H^2) + m(L/2+R)^2$. Quindi il momento d'inerzia totale sarà:

$$I_O = I_{d,O} + 3I_{p,O} = \frac{1}{2}\pi\sigma R^4 + \frac{3}{12}m(L^2+H^2) + \frac{3}{4}m(L+2R)^2 = 0.861 \text{ kg m}^2 \tag{23}$$

(c) L'unica forza in gioco è la forza di richiamo della molla, che agisce dalla massima estensione Δx_0, quando $\theta_0 = 40°$, fino a quando si raggiunge la posizione di riposo $\Delta x = 0$ a $\theta = 0$. Andando oltre, il filo diventa lasco e non ci sono più forze che agiscono sull'elica.

Considerando che, nel sistema di riferimento scelto, la coordinata x si può scrivere come $x = -\theta R$, con $\theta \in [0, \theta_0]$, possiamo riscrivere la seconda cardinale:

$$kxR = -k\theta R^2 = I_0\alpha \implies \ddot{\theta} + kR^2/I_O\ \theta = 0 \implies \ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0 \tag{24}$$

Abbiamo una equazione dell'oscillatore armonico con costante $\Omega^2 = kR^2/I_O$. Potevamo arrivare alla stessa equazione scrivendo la conservazione dell'energia e derivandola una volta. La soluzione sarà del tipo $\theta(t) = A\cos(\Omega t + B)$. Possiamo trovare le costanti A e B imponendo le condizioni iniziali $\theta(t=0) = \theta_0 = 40°$ e $\dot{\theta}(t=0) = 0$:

$$\begin{cases} \theta(0) = A\cos(B) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = -A\Omega\sin(B) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \theta_0 \\ B = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Quindi le equazioni che descrivono il moto in questo regime saranno:

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\Omega t) \tag{26}$$

$$\dot{\theta}(t) = -\theta_0\Omega\sin(\Omega t) \tag{27}$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\theta_0\Omega^2\cos(\Omega t) \tag{28}$$

Dalla prima equazione, possiamo trovare il tempo t_1 impiegato per raggiungere la posizione θ_1, e dalla terza calcoliamo l'accelerazione in quel punto particolare:

$$t_1 = \frac{1}{\Omega}\arccos\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) = 0.336 \text{ s} \tag{29}$$

$$\ddot{\theta}_1 = \theta_0\Omega^2\cos(\Omega t_1) = -3.10 \text{ s}^{-2} \tag{30}$$

La velocità angolare nel punto $\theta = 0$ si può calcolare o in modo analogo a quanto fatto sopra utilizzando le equazioni del moto, o semplicemente tramite la conservazione dell'energia:

$$E_0 = E_f \implies \frac{1}{2}k(R\theta_0)^2 = \frac{1}{2}I_O\omega_f^2 \implies \omega_f = -R\theta_0\sqrt{\frac{k}{I_0}} = -5.59 \text{ s}^{-1} \tag{31}$$

dove si è scelta la soluzione con il segno negativo per essere consistenti con il verso di rotazione orario dell'elica.

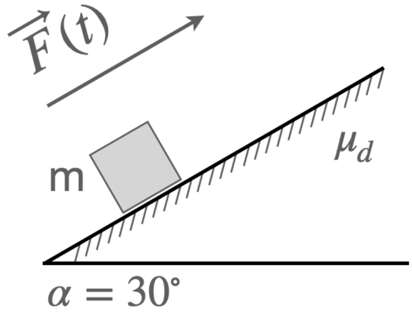
(d) Dopo che il filo è diventato lasco, abbiamo un moto rotatorio uniformemente decelerato a causa dell'azione delle forze di attrito. Se l'elica si ferma dopo un tempo Δt, la decelerazione media dovuta alle forze di attrito sarà $\overline{\alpha} = \Delta\omega/\Delta t = (0 - \omega_f)/\Delta t = 0.28 \text{ s}^{-2}$ (segno positivo poiché la decelerazione è in senso anti-orario). Il momento medio delle forze di attrito sarà quindi $\overline{\tau}_{att} = I_O\overline{\alpha} = 0.24$ N m.

Il lavoro compiuto dalle forze di attrito sarà semplicemente uguale all'energia cinetica dissipata: $\mathcal{L}_{attr} = \Delta T = T_{fin} - T_{in} = 0 - 1/2\ I_O\omega_f^2 = -13.44$ J. Notiamo che questo è lo stesso valore dell'energia potenziale elastica iniziale.

Compito Fisica Generale - 25/07/2023

Esercizio 1: Piano inclinato con forza variabile

In un laboratorio dell'Università di Firenze, degli studenti di fisica conducono il seguente esperimento. Un corpo di massa $m = 1$ kg, approssimabile ad un punto materiale, è posto su un piano inclinato che forma un angolo α rispetto all'orizzontale. A partire da un certo istante iniziale t_{in}, gli studenti imprimono sul corpo m una certa forza parallela al piano inclinato (figura a lato) e variabile nel tempo $\mathbf{F}(t)$. In questo modo il corpo risale il piano inclinato. Gli studenti misurano lo spostamento di m (definito rispetto alla sua posizione iniziale a t_{in}) e trovano che questo varia nel tempo seguendo la legge: $s(t) = A\,(1 - e^{-Bt})$.



a) Determinare i valori della velocità e dell'accelerazione di m all'istante iniziale $t_{in} = 0$ s (**3 punti**).

Sapendo che la superficie del piano inclinato ha un coefficiente di attrito dinamico μ_d:

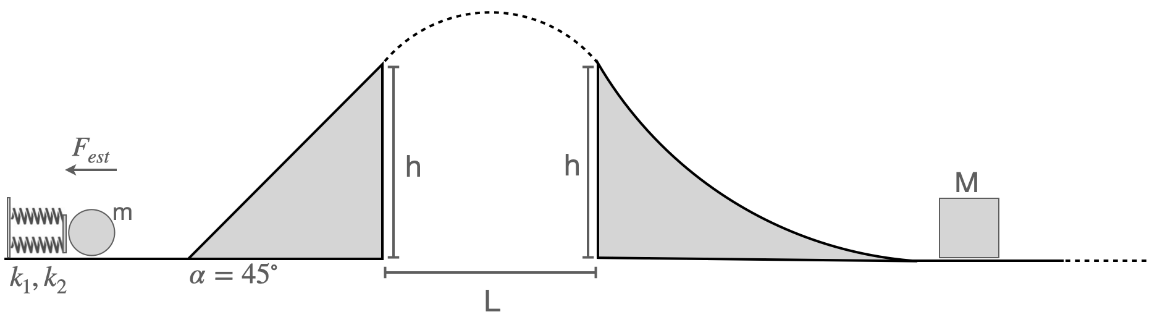
b) determinare l'espressione del modulo della forza $\mathbf{F}(t)$ agente sul corpo in funzione del tempo (**4 punti**);

c) determinare i valori numerici dell'ampiezza di $\mathbf{F}(t)$ al tempo $t_{in} = 0$ s, e nel limite in cui t tende a infinito (**3 punti**);

d) **<u>Bonus:</u>** impostare un metodo su come si potrebbe calcolare il lavoro complessivo che la forza $\mathbf{F}$ compie durante il moto del corpo (**3 punti**).

Dati numerici: $m = 1$ kg, $\alpha = 30°$, $A = 20$ m, $B = 0.2$ s^{-1}, $\mu_d = 0.2$.

Esercizio 2: Molle, piano inclinato ed urti



Un corpo di massa m, approssimabile ad un punto materiale, è poggiato su un piano orizzontale liscio, ed è a contatto con un sistema di due molle collegate in parallelo, di costanti elastiche k_1 e k_2. Una forza esterna F_{est}, diretta orizzontalmente, mantiene in equilibrio il sistema tenendo le molle compresse di un valore Δx.

a) Determinare il valore del modulo di F_{est} (**4 punti**).

Ad un certo istante, F_{est} smette di agire sul sistema, ed il corpo m si mette in moto. Dopo un breve tratto percorso sul piano orizzontale liscio, m comincia a salire lungo un piano inclinato, che forma un angolo α rispetto all'orizzontale. Giunto al picco del piano inclinato, posizionato ad una quota h, il corpo m effettua una traiettoria parabolica (si trascuri l'attrito dell'aria) e raggiunge il picco di una pista liscia, alta h e distante L, atterrando tangenzialmente alla sua superficie.

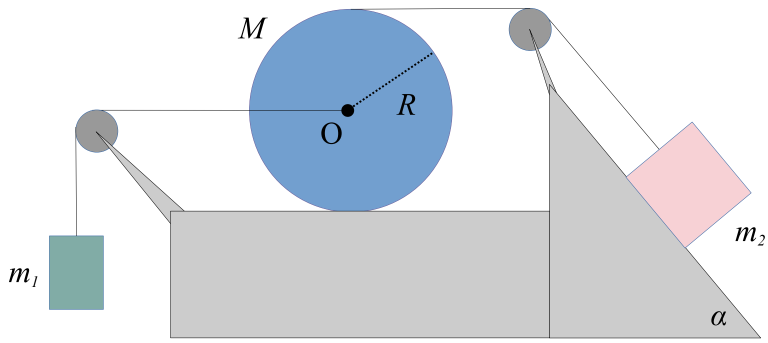
b) Determinare il valore del modulo della velocità di m quando atterra sul picco della pista, alla quota h (**3 punti**).

Il corpo m scivola così lungo la pista effettuando una traiettoria curva come in figura, e, dopo aver raggiunto il piano orizzontale liscio, urta in modo completamente anelastico un blocchetto di massa M inizialmente fermo, anch'esso approssimabile ad un punto materiale.

b) Determinare la velocità del blocchetto M, e calcolare dopo quanto tempo questo si ferma (**3 punti**).

Dati numerici: $m = 0.1$ kg, $k_1 = 20$ N/m, $k_2 = 30$ N/m, $\Delta x = 0.2$ m, $\alpha = 45°$, $h = 1$ m, $M = 10$ kg.

Esercizio 3: Cilindro collegato a due masse



Un cilindro omogeneo di raggio R è collocato su di un piano orizzontale. Il suo centro O è collegato, tramite un filo ed una puleggia ideali, ad un corpo 1 (punto materiale) di massa m_1 appeso. Un altro filo è arrotolato attorno al cilindro e collegato, tramite un'altra puleggia, ad una massa m_2 (punto materiale), che giace su di un piano liscio inclinato di un angolo α rispetto alla direzione orizzontale, come mostrato in figura. Il sistema è inizialmente in equilibrio.

a) Determinare il valore della massa m_2 e il modulo, la direzione e il verso della forza di attrito statico fra il cilindro e il piano (**4 punti**).

La massa 1 viene sostituita con un nuovo corpo di massa $m_{1,2} = 0.5m_1$: si osserva che ora il sistema si mette in moto e che il cilindro rotola verso destra senza strisciare (rotolamento puro). Dopo un intervallo di tempo Δt, la massa m_2 ha percorso uno spazio Δx lungo il piano inclinato.

b) Calcolare la massa M del cilindro, l'accelerazione del suo centro di massa e la sua accelerazione angolare (**3 punti**).

c) Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico affinché il cilindro possa effettivamente rotolare senza scivolare sul piano (**3 punti**).

Dati numerici: $R = 30$ cm, $m_1 = 5$ kg, $\alpha = 60°$, $\Delta x = 20$ cm, $\Delta t = 0.5$ s.

Soluzioni - 25/07/2023

Esercizio 1: Piano inclinato con forza variabile

(a) Avendo a disposizione l'espressione dello spostamento di m in funzione del tempo, $s(t)$, possiamo ricavare le espressioni della sua velocità e accelerazione istantanee derivando la legge oraria rispettivamente una e due volte rispetto al tempo:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = ABe^{-Bt} \tag{1}$$
$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -AB^2e^{-Bt}. \tag{2}$$

Da queste espressioni otteniamo $v_{in} = v(0) = AB = 4$ m/s e $a_{in} = a(0) = -AB^2 = -0.8$ m/s^2.

(b) Considerando le forze in gioco, ed applicando la seconda legge di Newton per la dinamica, possiamo scrivere la seguente equazione (in forma vettoriale):

$$m\mathbf{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f_{att}}, \tag{3}$$

dove $\boldsymbol{N}$ è la reazione vincolare esercitata dalla superficie piano inclinato e $\boldsymbol{f_{att}}$ è la forza d'attrito agente su m.

Proiettando le forze lungo la direzione parallela e perpendicolare al piano inclinato, otteniamo:

$$ma = F - mg\ \sin\alpha - f_{att} \tag{4}$$
$$0 = N - mg\ \cos\alpha \tag{5}$$

Essendo $f_{att} = \mu_d\ N$, e quindi, usando l'ultima equazione, $f_{att} = \mu_d\ mg\ \cos\alpha$, possiamo scrivere $F = ma + mg\ (\sin\alpha + \mu_d\ \cos\alpha)$, e quindi, inserendo l'espressione di $a(t)$:

$$F(t) = m[-AB^2\ e^{-Bt} + g\ (\sin\alpha + \mu_d\ \cos\alpha)]. \tag{6}$$

(c) Dall'espressione precedente, si può facilmente calcolare

$$F_{in} = F(t_{in} = 0) = m[-AB^2 + g\ (\sin\alpha + \mu_d\ \cos\alpha)] = 5.8\ N \tag{7}$$
$$F_{in} = F(t_{in} \to \infty) = mg\ (\sin\alpha + \mu_d\ \cos\alpha) = 6.6\ N \tag{8}$$

(d) Il lavoro svolto dalla forza $\boldsymbol{F}$ si esprime nella forma:

$$L_F = \int_{in}^{fin} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}. \tag{9}$$

Nel sistema in analisi, la forza $\boldsymbol{F}$ ha una direzione costantemente parallela al piano inclinato e quindi al $\mathbf{ds}$. Pertanto, l'integrale si semplifica in $L_F = \int_{in}^{fin} F\ ds$. Sfruttando la nostra conoscenza della $v(t)$, possiamo cambiare variabile e riscrivere il lavoro della forza $\boldsymbol{F}$ come

$$L_F = \int_0^{\infty} F(t)\ v(t)\ dt\ . \tag{10}$$

Quest'integrale ora si può calcolare (lungo ma facile!). Provate a svolgerlo se siete curiosi.

Esercizio 2: Molle, piano inclinato ed urti

(a) Per il primo principio della dinamica, se il sistema è all'equilibrio, la sommatoria delle forze agenti è nulla. Dunque F_{est} deve equilibrare la forza elastica generata dal sistema di molle in parallelo. Un sistema di due molle in parallelo può essere trattato come un'unica molla di costante elastica equivalente $k_{eq} = k_1 + k_2$, con medesimo Δx. Si avrà:

$$F_{est} = k_{eq}\ \Delta x = (k_1 + k_2)\ \Delta x \tag{11}$$

da cui ricaviamo $F_{est} = 10$ N.

(b) Calcoliamo il valore della velocità v_h del corpo m alla quota h del piano inclinato, prima che m effettui il moto parabolico. Dal momento che le superfici del piano orizzontale e del piano inclinato sono liscie, e dal momento che ci sono solo in gioco forze conservative, possiamo calcolare v_h utilizzando la conservazione dell'energia meccanica tra uno stato iniziale in cui il corpo m è soggetto esclusivamente all'energia potenziale della molla, ed uno stato finale in cui il corpo m ha energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale. Dunque, utilizzando direttamente la definizione di k_{eq}:

$$\frac{1}{2}k_{eq}(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}mv_h^2 + mgh, \tag{12}$$

da cui ricaviamo $v_h = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}(\Delta x)^2 - 2gh} = 0.61$ m/s.

Dal momento che le sommità del piano inclinato di sinistra e della pista di destra sono le stesse, il modulo della velocità con la quale m atterra sulla pista è esattamente pari a v_h.

(c) Per prima cosa, calcoliamo la velocita v_m del corpo m quando questo ha raggiunto il piano orizzontale dopo aver scivolato lungo la pista. Dal momento che la pista è liscia, indipendentemente dalla forma della traiettoria, possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica. In effetti, si può notare che non essendoci dissipazioni energetiche lungo il tragitto totale (incluso il piano inclinato e la traiettoria parabolica), l'energia cinetica $\frac{1}{2}mv_m^2$ deve essere uguale all'energia potenziale iniziale della molla $\frac{1}{2}k_{eq}(\Delta x)^2$. Dunque:

$$v_m = \sqrt{\frac{k}{m}(\Delta x)^2} = 4.47 \text{ m/s}. \tag{13}$$

A questo punto, applicando la conservazione della quantità di moto prima e dopo l'urto completamente anelastico:

$$mv_m = (m + M)\ v_{fin}, \tag{14}$$

ricaviamo la velocità finale v_{fin} del blocco $m + M$:

$$v_{fin} = \frac{m}{m + M}\ v_m = 0.04 \text{ m/s}. \tag{15}$$

Non essendoci attrito tra il piano orizzontale ed il blocco $m + M$, questo non si fermerà mai e proseguirà il suo moto rettilineo uniforme all'infinito.

Esercizio 3: Cilindro collegato a due masse

Utilizziamo dei classici sistemi di riferimento destrorsi xyz per il cilindro e $x_1y_1z_1$ per il corpo 1 appeso, con le ascisse orizzontali, le ordinate verticali e i terzi assi uscenti dal foglio. Per il corpo 2 sul piano inclinato, usiamo un sistema $x_2y_2z_2$ inclinato come il piano.

Possiamo scrivere le equazioni generiche del moto per i due punti materiali e per il cilindro. Le forze che agiscono nel sistema sono le varie forze peso, le tensioni dei fili, le reazioni vincolari e la forza di attrito statico F_A fra il cilindro e la superficie (necessaria per garantire il rotolamento). Le equazioni saranno:

$$\text{Corpo 1:} \quad \begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \end{cases} \tag{16}$$

$$\text{Corpo 2:} \quad \begin{cases} -T_2 + m_2 g \sin\alpha = m_2 \ddot{x}_2 \\ N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0 \end{cases} \tag{17}$$

$$\text{Cilindro:} \quad \begin{cases} T_2 - T_1 + F_A = M\ddot{x} \\ N - Mg = 0 \\ -RT_2 + RF_A = I\ddot{\theta} \end{cases} \tag{18}$$

dove la II cardinale per il cilindro è calcolata rispetto al centro di riduzione O e il verso di F_A è scelto rivolto verso destra arbitrariamente.

(a) Nella situazione di equilibrio tutto è fermo, quindi le accelerazioni sono nulle, $\ddot{y}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x} = \ddot{\theta} = 0$. Avremo:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g = 49.05 \text{ N} \\ T_2 = m_2 g \sin\alpha = 24.53 \text{ N} \\ F_A = T_2 = 24.53 \text{ N} \\ T_2 - T_1 + F_A = 2m_2 g \sin\alpha - m_1 g = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad m_2 = m_1/(2\sin\alpha) = 2.89 \text{ kg} \end{cases} \tag{19}$$

(b) Dopo aver sostituito la massa 1, le equazioni del moto saranno esattamente le (16)-(17)-(18) che abbiamo scritto sopra, solo con una nuova massa $m_{1,2} = 0.5m_1 = 2.5$ kg al posto della massa m_1. In particolare abbiamo un sistema di 4 equazioni (possiamo trascurare le equazioni lungo l'asse verticale del corpo 2 e del cilindro, che non aggiungono nessuna informazione) con 7 incognite, ovvero T_1, T_2, F_A, $\ddot{\theta}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}_1$ e M.

Tuttavia, poiché il cilindro rotola senza slittare, abbiamo delle semplici relazioni che legano le accelerazioni dei tre corpi. L'accelerazione del centro di massa $\ddot{x}$ del cilindro e la sua accelerazione angolare $\ddot{\theta}$ sono legate dalla relazione $\ddot{x} = -R\ddot{\theta}$. Inoltre, è facile verificare che $\ddot{y}_1 = \ddot{x}$ e $\ddot{x}_2 = 2\ddot{x}$. Quest'ultima deriva dal fatto che, se il cilindro rotola di un angolo θ, il corpo 2 avrà uno spostamento pari a $x_2 = -2R\theta$, poiché l'allungamento della fune sarà dato dalla rotazione, che contribuisce con $R\theta$, e dalla traslazione del centro di massa, che aggiunge un altro $R\theta$. Derivando due volte nel tempo otteniamo $\ddot{x}_2 = -2R\ddot{\theta} = 2\ddot{x}$. L'accelerazione del corpo 2 possiamo calcolarla direttamente dai dati, visto che la massa 2 ha un moto uniformemente accelerato lungo il piano inclinato, ovvero $\ddot{x}_2 = 2\Delta x/\Delta t^2 = 1.6$ m/s^2. Riassumendo, avremo le seguenti accelerazioni:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_2/2 = 0.8 \text{ m/s}^2 \tag{20}$$
$$\ddot{y}_1 = \ddot{x} = 0.8 \text{ m/s}^2 \tag{21}$$
$$\ddot{\theta} = -\ddot{x}/R = -2.67 \text{ s}^{-2} \tag{22}$$

Infine, il momento di inerzia del cilindro rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa O è semplicemente $I = \frac{1}{2}MR^2$. Tenendo conto di tutto ciò, il nostro sistema di 4 equazioni si riduce a 4 incognite (T_1, T_2, M e F_A) e diventa risolvibile:

$$\begin{cases} T_1 - m_{1,2}g = m_{1,2}\ddot{x} \\ -T_2 + m_2 g\sin\alpha = 2m_2\ddot{x} \\ T_2 - T_1 + F_A = M\ddot{x} \\ -RT_2 + RF_A = -\frac{1}{2}MR\ddot{x} \end{cases} \implies \begin{cases} T_1 = m_{1,2}(\ddot{x} + g) = 26.53 \text{ N} \\ T_2 = m_2(g\sin\alpha - 2\ddot{x}) = 19.91 \text{ N} \\ M = \frac{2}{3\ddot{x}}(2T_2 - T_1) = \\ \quad = \frac{2}{3}\left[\frac{g}{\ddot{x}}(2m_2\sin\alpha - m_{1,2}) - (4m_2 + m_{1,2})\right] = \\ \quad = 11.07 \text{ kg} \\ F_A = M\ddot{x} + T_1 - T_2 = 15.48 \text{ N.} \end{cases} \tag{23}$$

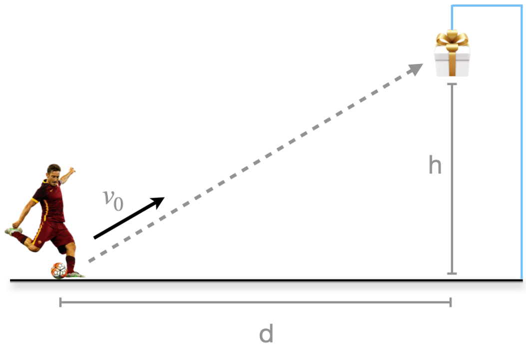
(c) Dato che $F_A \leqslant \mu_s N$, abbiamo:

$$\mu_s \geqslant \frac{F_A}{N} \implies \mu_s \geqslant \mu_{s,min} = \frac{F_A}{N} = \frac{F_A}{Mg} = 0.14 \tag{24}$$

Compito Fisica Generale - 21/09/2023

Esercizio 1: Cinematica al Luna Park

Francesco Totti, grande ex calciatore della Roma, va al Luna Park e prova un gioco apparentemente impossibile. Calciando un pallone bisogna colpire un pacco premio (approssimabile ad un punto materiale) sospeso ad una quota h, e posto ad una distanza d, come in figura. La complicazione sta nel fatto che nell'esatto momento in cui il pallone viene calciato, il pacco viene lasciato libero di cadere (si trascuri l'attrito dell'aria in tutto l'esercizio). Totti pensa che una buona strategia sia di calciare il pallone in direzione della posizione iniziale del pacco, imprimendogli una velocità iniziale di modulo v_0.



a) Dimostrare che la velocità impressa al pallone è sufficiente a farlo arrivare almeno ad una distanza d (**3 punti**).

b) Verificare se il pallone riuscirà ad impattare il pacco (**4 punti**).

Dopodiché il calciatore prova un nuovo gioco: bisogna calciare fortissimo il pallone verso l'alto e raggiungere la quota maggiore possibile. Totti vuole battere ogni record esistente, pensando addirittura di riuscire a spedire il pallone nello spazio, e calcia il pallone sempre con una velocità v_0, ma stavolta interamente diretta in direzione verticale.

c) Verificare se il pallone riesce a sfuggire al campo gravitazionale terrestre (**3 punti**).

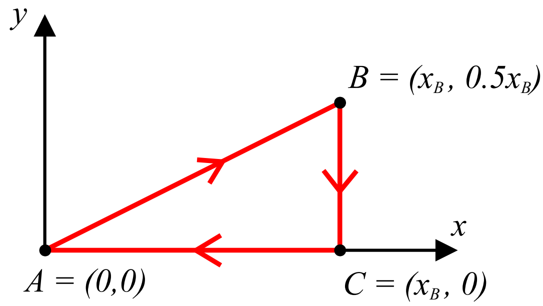
d) **Bonus:** Chiamiamo v_f la velocità minima necessaria per sfuggire al campo gravitazionale terrestre. Se l'obiettivo fosse spedire il pallone sulla Luna, potrebbe bastare una velocità minore di v_f, o servirebbe una velocità maggiore di v_f? Argomentare uno o l'altro caso (va bene anche in forma discorsiva) (**3 punti**).

Dati numerici: $d = 60$ m, $h = 5$ m, $v_0 = 30$ m/s, $M_{\text{Terra}} = 5.97 \times 10^{24}$ kg, $R_{\text{Terra}} = 6357$ km, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2.

Esercizio 2: Punto sottoposto a campo di forza

Un punto materiale si muove in un piano (x, y) lungo una traiettoria chiusa $A \to B \to C \to A$, come mostrato in figura. Il punto è sottoposto ad una forza che ha la seguente forma:

$$\boldsymbol{F}(x, y) = ax^2y\,\boldsymbol{i} + \frac{a}{3}x^3\,\boldsymbol{j}$$



dove $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ sono i versori degli assi x e y, rispettivamente, ed a è una costante. I punti di inversione A, B e C hanno coordinate $A = (0, 0)$, $B = (x_B, 0.5x_B)$ e $C = (x_B, 0)$. Il segmento AB segue la retta di equazione $y = 0.5x$.

a) Calcolare il lavoro compiuto dalla forza $\boldsymbol{F}$ lungo il percorso chiuso (**4 punti**).

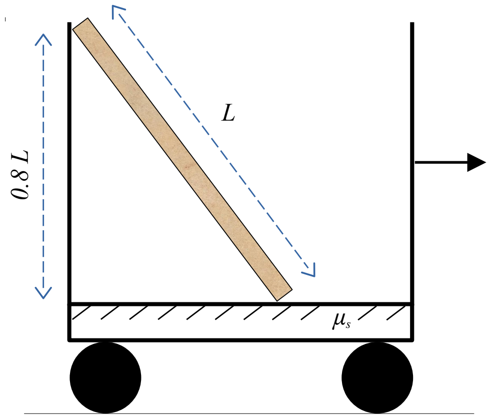
b) Stabilire se la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa e determinare, se esiste, la sua energia potenziale (**4 punti**).

c) Ripetere i punti a) e b) per una nuova forza $\boldsymbol{F_2}(x, y) = a_2 x^2 \, \boldsymbol{j}$ (**2 punti**).

Dati numerici: $a = 6$ N/m^3, $x_B = 100$ cm, $a_2 = 6$ N/m^2.

Esercizio 3: Trave su carrello mobile

Una trave uniforme di lunghezza L e massa m è appoggiata su un carrello, come rappresentato in figura. Il punto di contatto superiore fra la trave e il carrello è ad un'altezza dalla base pari a $0.8L$. I lati verticali del carrello sono lisci, mentre la superficie orizzontale è scabra. Il coefficiente di attrito statico fra la superficie orizzontale e la trave è μ_s. Il carrello è in movimento verso destra.



a) Nel caso in cui il carrello si muova con velocità costante v_c, determinare i valori delle reazioni normali nei punti di appoggio fra la trave e il carrello. Calcolare inoltre la forza di attrito statico e verificare che abbia un valore accettabile per mantenere la trave in equilibrio (**5 punti**).

b) Calcolare i valori massimi dell'accelerazione e della decelerazione che il carrello può avere affinché la trave non scivoli o non si ribalti (**3 punti**).

c) Stabilire per quale valore di accelerazione del carrello la forza di attrito statico fra la trave e la superficie è nulla (**2 punti**).

Dati numerici: $L = 120$ cm, $m = 8$ kg, $\mu_s = 0.5$, $v_c = 15$ km/h.

Soluzioni - 21/09/2023

Esercizio 1: Cinematica al Luna Park

Scegliamo un sistema di riferimento con origine centrata sulla posizione iniziale del pallone. Il pallone segue il classico moto del proiettile: un moto uniforme lungo l'asse x ed un moto uniformemente accelerato lungo l'asse y, con accelerazione uguale all'accelerazione gravitazionale g. Il pallone avrà quindi le seguenti accelerazioni, velocità e legge oraria:

$$\begin{cases} a_x^{palla} = 0 \\ a_y^{palla} = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x^{palla} = v_0 \cos\alpha \\ v_y^{palla} = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{palla} = v_0 \cos\alpha\, t \\ y^{palla} = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1}$$

dove $\alpha = \arctan(h/d) = 4.76^\circ$ è l'angolo con cui il pallone viene calciato rispetto alla direzione orizzontale. Invece, per il pacco premio, il moto è quello di un grave, quindi sempre uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} a_x^{pacco} = 0 \\ a_y^{pacco} = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x^{pacco} = 0 \\ v_y^{pacco} = -gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{pacco} = d \\ y^{pacco} = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{2}$$

(a) Il pallone effettua un moto parabolico, la cui gittata è determinata dalla formula:

$$x_G = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = 79.45 \text{ m} \tag{3}$$

che è maggiore della distanza orizzontale d a cui è posizionato il pacco premio.

(b) Il pallone colpisce il pacco premio se esiste un tempo t^* per il quale i loro vettori posizione sono uguali (ovvero le loro coordinate x e y coincidono). Possiamo procedere determinando a che istante t^* le coordinate y dei due corpi siano le stesse:

$$y^{palla}(t^*) = y^{pacco}(t^*) \quad \Longrightarrow \quad v_0 \sin\alpha\, t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} = h - \frac{1}{2}gt^{*2} \quad \Longrightarrow \quad t^* = \frac{h}{v_0 \sin\alpha} \tag{4}$$

Al tempo t^* la coordinata x del pacco è ovviamente d, e la coordinata x del pallone è

$$x^{palla}(t^*) = v_0 \cos\alpha\, t^* = \frac{h}{\tan\alpha} = \frac{h}{h/d} = d = x^{pacco}(t^*) \tag{5}$$

Quindi al tempo t^* il pallone impatterà il pacco premio. Notare che, per ogni valore di velocità iniziale v_0, la situazione continuerà ad essere verificata ed il pallone impatterà sempre il pacco premio ad un certo tempo t^*. Ovviamente, il pallone deve essere lanciato nella direzione della posizione iniziale del pacco (cosicché $\tan\alpha = h/d$) e la v_0 deve essere comunque grande abbastanza da far sì che il pallone arrivi ad una distanza d (rispettando quindi la condizione del primo punto dell'esercizio).

(c) Per sfuggire al campo gravitazionale terrestre il pallone deve avere una velocità maggiore o uguale della velocità di fuga della Terra, v_f. Questa vale:

$$v_f = \sqrt{2\ G\ \frac{M_{\text{Terra}}}{R_{\text{Terra}}}} = 11193 \text{ m/s} \tag{6}$$

Questo valore è enormemente più grande della velocità del pallone, che dunque, come ci si poteva aspettare, non sfugge alla gravità terrestre. Totti aveva sbagliato di molto i calcoli.

(d) Per spedire il pallone sulla Luna basterebbe una velocità leggermente minore della v_f calcolata nell'equazione (6). Infatti, il pallone non avrebbe bisogno di sfuggire completamente al campo gravitazionale terrestre (ad una distanza infinita), ma gli basterebbe arrivare in prossimità della Luna, che si trova ad una distanza media $D_L = 380000$ km. La Luna è ben all'interno del potenziale gravitazionale della Terra (altrimenti non orbiterebbe attorno al nostro pianeta!).

Trascurando l'attrazione gravitazionale della Luna, possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica per stimare la velocità minima v_L iniziale necessaria per lanciare un oggetto di massa m dalla superficie terrestre (R_{Terra}), facendolo arrivare ad una distanza pari a D_L con velocità finale nulla:

$$\frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{GmM_{Terra}}{R_{Terra}} = -\frac{GmM_{Terra}}{D_L} \qquad \Longrightarrow \qquad v_L = v_f\sqrt{1-\frac{R_{Terra}}{D_L}} \simeq 0.9916\, v_f \tag{7}$$

Avremo quindi bisogno di una velocità pari al 99.16% della velocità di fuga, ovvero 11099 m/s.

Esercizio 2: Punto sottoposto a campo di forza

(a) Poiché il percorso chiuso $A \to B \to C \to A$ è composto da tre segmenti, il lavoro totale è dato dalla somma di tre contributi:

$$W_{tot} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to A} = \int_{A\to B} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{ds} + \int_{B\to C} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{ds} + \int_{C\to A} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{ds} \tag{8}$$

dove $\boldsymbol{ds} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j}$ è lo spostamento infinitesimo lungo ogni tratto.

Nel tratto $A \to B$, lo spostamento avviene lungo la retta di equazione $y = 0.5x$, il che implica $dy = 0.5dx$, con x che varia fra 0 e x_B. Quindi:

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_{A\to B} \boldsymbol{F}(x, x/2)\cdot \boldsymbol{ds} = \int_0^{x_B} \left(ax^2\frac{x}{2}\,\boldsymbol{i} + \frac{a}{3}x^3\,\boldsymbol{j}\right)\cdot(dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j}) = \\ &= \int_0^{x_B} \left(\frac{a}{2}x^3\,\boldsymbol{i} + \frac{a}{3}x^3\,\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(dx\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}dx\,\boldsymbol{j}\right) = \int_0^{x_B}\left(\frac{a}{2}x^3 + \frac{a}{6}x^3\right)dx = \frac{a}{6}x_B^4 \end{aligned} \tag{9}$$

Nel tratto $B \to C$, lo spostamento è lungo l'ordinata con y che varia fra $x_B/2$ e 0. Quindi avremo $dx = 0$ e $\boldsymbol{ds} = dy\,\boldsymbol{j}$. Il lavoro in questo tratto sarà:

$$W_{B\to C} = \int_{B\to C} \boldsymbol{F}(x_B, y)\cdot \boldsymbol{ds} = \int_{x_B/2}^{0} \left(ax_B^2 y\,\boldsymbol{i} + \frac{a}{3}x_B^3\,\boldsymbol{j}\right)\cdot dy\,\boldsymbol{j} = -\int_0^{x_B/2} \frac{a}{3}x_B^3 dy = -\frac{a}{6}x_B^4 \tag{10}$$

Infine, il tratto $C \to D$ è orizzontale con x che varia da x_B a 0 e $y = 0$. Abbiamo $dy = 0$, $\boldsymbol{ds} = dx\,\boldsymbol{i}$ ed il lavoro è:

$$W_{C\to D} = \int_{B\to C} \boldsymbol{F}(x, 0)\cdot \boldsymbol{ds} = \int_{x_B}^{0} \left(0\,\boldsymbol{i} + \frac{a}{3}x^3\,\boldsymbol{j}\right)\cdot dx\,\boldsymbol{i} = 0 \tag{11}$$

Il lavoro totale sul percorso chiuso è $W_{tot} = W_{A\to B} + W_{B\to C} + W_{C\to A} = \frac{a}{6}x_B^4 - \frac{a}{6}x_B^4 + 0 = 0$.

(b) Anche se il lavoro sul percorso $A \to B \to C \to A$ è nullo, non possiamo da questo concludere che la forza F è conservativa. Infatti, per una forza conservativa, il lavoro deve essere nullo lungo qualsiasi traiettoria, mentre noi abbiamo solo verificato un singolo percorso. Per determinare se la forza è conservativa, possiamo verificare se esiste una energia potenziale $V(x, y)$ tale che:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x} = F_x = ax^2y \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} = F_y = \dfrac{a}{3}x^3 \end{cases} \implies \quad V(x,y) = -\frac{a}{3}x^3 + \text{costante} \tag{12}$$

dove l'espressione di $V(x, y)$ si può ottenere, ad esempio, integrando la prima equazione e verificando che soddisfi anche la seconda. Quindi l'energia potenziale $V(x, y)$ esiste ed ha la forma trovata nella (12). Ne segue che la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa.

(c) Il procedimento è identico, semplicemente sostituiamo $\boldsymbol{F}$ con $\boldsymbol{F_2}$. Valgono le stesse considerazione precedenti e il lavoro totale in questo caso sarà:

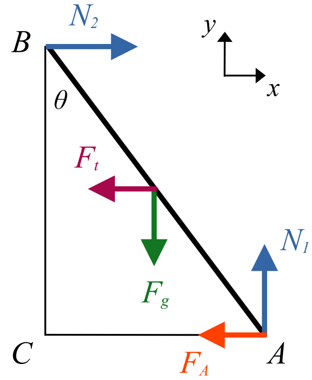
$$W_{tot} = \int_0^{x_B} \boldsymbol{F_2}(x, x/2)\cdot \boldsymbol{ds} + \int_{x_B/2}^{0} \boldsymbol{F_2}(x_B, y)\cdot \boldsymbol{ds} + \int_{x_B}^{0} \boldsymbol{F_2}(x, 0)\cdot \boldsymbol{ds} + = \tag{13}$$

$$= \int_0^{x_B} (a_2x^2\,\boldsymbol{j})\cdot(dx\,\boldsymbol{i} + dx/2\,\boldsymbol{j}) - \int_0^{x_B/2} (a_2x_B^2\,\boldsymbol{j})\cdot(dy\,\boldsymbol{j}) - \int_0^{x_B} (a_2x^2\,\boldsymbol{j})\cdot(dx\,\boldsymbol{i}) = \tag{14}$$

$$= \int_0^{x_B} \frac{a_2}{2}x^2dx - \int_0^{x_B/2} a_2x_B^2dy - 0 = \frac{a_2}{6}x_B^3 - \frac{a_2}{2}x_B^3 = -\frac{a_2}{3}x_B^3 = -2 \text{ J} \tag{15}$$

Chiaramente, poiché il lavoro su questo percorso chiuso è diverso da zero, la forza $\boldsymbol{F_2}$ non può essere conservativa e non esiste alcuna energia potenziale.

Esercizio 3: Trave su carrello mobile



Ci mettiamo nel sistema di riferimento mobile del carrello. Il diagramma del corpo libero è mostrato a lato. La trave è appoggiata con un certo angolo θ rispetto alla parete posteriore del pannello, formando un triangolo rettangolo di ipotenusa $\overline{AB} = L$ e cateti $\overline{BC} = 0.8L$ e $\overline{AC} = \sqrt{L^2 - (0.8L)^2} = 0.6L$. L'angolo sarà quindi semplicemente $\theta = \arctan(\overline{CA}/\overline{BC}) = 36.87°$.

Le forze in gioco sono le reazioni normali N_1 e N_2, applicate rispettivamente ai punti di contatto A e B, la forza di attrito statico F_A fra la trave e il pavimento, applicata in A, e la forza peso $F_g = -mg$ applicata al centro di massa a $L/2$. Se il carrello si muove con accelerazione $\boldsymbol{a_c}$ non nulla, la trave sentirà anche una forza di trascinamento in verso opposto all'accelerazione, $\boldsymbol{F_t} = -m\boldsymbol{a_c}$. Nella figura a lato, abbiamo assunto, ad esempio, un'accelerazione del carrello positiva ed una forza di trascinamento negativa, mentre il verso della forza di attrito è scelto arbitrariamente.

In condizioni di equilibrio statico, abbiamo che entrambe le equazioni cardinali sono nulle, quindi avremo:

$$\begin{cases} N_2 - F_A - ma_c = 0 \\ N_1 - mg = 0 \\ -N_2 L\cos\theta + ma_c\frac{L}{2}\cos\theta + mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} N_1 = mg \\ N_2 = \frac{m}{2}(g\tan\theta + a_c) \\ F_A = \frac{m}{2}(g\tan\theta - a_c) \end{cases} \tag{16}$$

dove la II cardinale è stata calcolata rispetto al centro di riduzione A. Notiamo come l'equilibrio del sistema non dipenda dalla lunghezza L della trave.

(a) Il sistema è inerziale: il carrello si muove ad una velocità costante (qualunque essa sia), quindi la sua accelerazione è nulla e non c'è forza di trascinamento. Dalle equazioni (16) con $a_c = 0$ si ricavano direttamente i valori numerici delle forze normali e della forza di attrito:

$$\begin{cases} N_1 = mg = 78.48 \text{ N} \\ N_2 = F_A = \frac{m}{2}g\tan\theta = 29.43 \text{ N} \end{cases} \tag{17}$$

Ricordiamoci che la forza di attrito statico dovrà avere sempre modulo $F_A \leqslant F_{A,max} = \mu_s N_1 = 39.24$ N, quindi il valore calcolato qui sopra è accettabile e il sistema può rimanere in equilibrio.

(b) Quando il moto del carrello è accelerato ($a_c \neq 0$), il sistema è non inerziale e la forza di trascinamento non nulla. A seconda del valore dell'accelerazione, la trave potrebbe scivolare nel punto A, se la forza di attrito statico non è sufficiente a tenerla ferma, oppure ribaltarsi, ovvero staccarsi dal punto di contatto B.
La forza di attrito statico potrà evitare lo scivolamento se $\mid \boldsymbol{F_A} \mid \leqslant \mu_s \mid \boldsymbol{N_1} \mid = \mu_s mg$, il che implica, utilizzando le relazioni trovate in (16):

$$-\mu_s mg \leqslant \frac{m}{2}(g\tan\theta - a_c) \leqslant \mu_s mg \quad\Longrightarrow\quad -\frac{1}{4}g \leqslant a_c \leqslant \frac{7}{4}g \tag{18}$$

dove abbiamo inserito i valori numerici $\mu_s = 0.5$ e $\tan\theta = \frac{3}{4}$. Abbiamo trovato i valori limite per l'accelerazione/decelerazione del carrello per evitare lo scivolamento.
Analogamente, per evitare il ribaltamento dobbiamo avere $N_2 > 0$, ovvero:

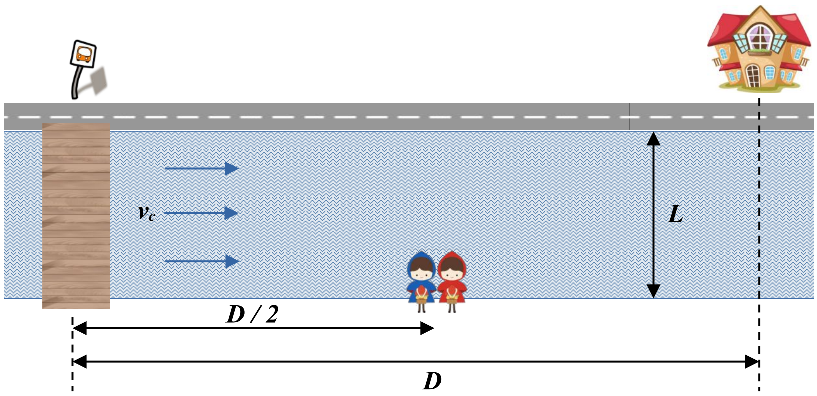
$$\frac{m}{2}(g\tan\theta + a_c) > 0 \quad\Longrightarrow\quad a_c > -\frac{3}{4}g \tag{19}$$

Quindi, quando il carrello accelera ($a_c > 0$), potremo avere esclusivamente scivolamento nel momento in cui $a_c > \frac{7}{4}g = 17.17$ m/s^2. Se il carrello decelera ($a_c < 0$), avremo scivolamento se $a_c < -\frac{1}{4}g$ e ribaltamento se $a_c < -\frac{3}{4}g$. Quindi, in questo caso, lo scivolamento avviene per primo e il valore massimo di decelerazione è proprio $a_c = -\frac{1}{4}g = -2.45$ m/s^2.

(c) Utilizzando l'equazione (16) per F_A, si ha che $F_A = 0$ quando $(g\tan\theta - a_c) = 0$, ovvero $a_c = g\tan\theta = \frac{3}{4}g = 7.36$ m/s^2.

Compito Fisica Generale - 22/01/2024

Esercizio 1: Salvare la nonna con la cinematica



Cappuccetto Rosso e sua sorella, Cappuccetto Blu, devono avvertire la loro nonna che il lupo si sta dirigendo a casa sua. La casa della nonna si trova sulla sponda sinistra del fiume, ad una distanza D dal ponte più vicino, come in figura. Rosso e Blu si trovano sulla riva destra del fiume, largo L, ad una distanza $D/2$ dal ponte e hanno calcolato che il lupo arriverà a casa della nonna in esattamente mezzora. Blu decide di correre fino alla fermata del bus oltre il ponte, nella speranza di riuscire a prendere la prossima corsa prevista fra 15 minuti. Rosso invece pensa sia più veloce attraversare a nuoto il fiume e percorrere il restante tratto di strada a piedi.

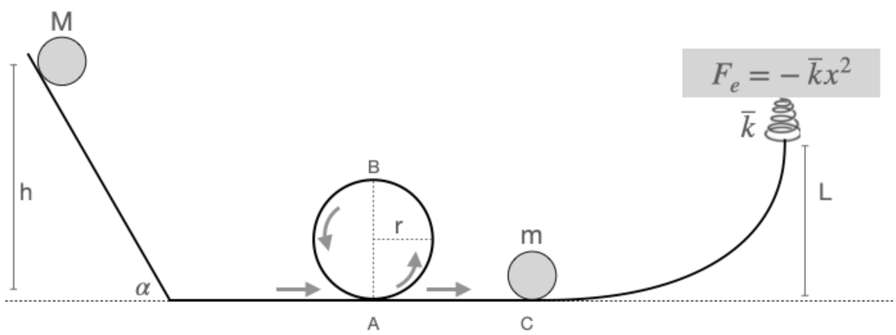
a) Blu purtroppo arriva alla fermata 3 minuti dopo il passaggio dell'autobus. Calcolare la velocità vettoriale media (modulo, direzione e verso) fra la sua posizione di partenza e di arrivo. Quale velocità scalare media (celerità) Blu avrebbe dovuto avere per non perdere l'autobus? (**3 punti**)

b) Sapendo che le acque del fiume si muovono con velocità v_c verso destra e che Rosso nuota verso la riva opposta in direzione perpendicolare alla corrente con velocità v_R, determinare con quale angolo Rosso si muove rispetto alla direzione di scorrimento del fiume ed a quale distanza dalla casa si ritrova una volta approdata sull'altra riva (**4 punti**).

c) Una volta attraversato il fiume, Rosso inizia a muoversi con accelerazione uniforme. Calcolare l'accelerazione minima che Rosso deve avere per giungere a casa della nonna almeno 5 minuti prima del lupo e la sua velocità finale (**3 punti**).

Dati numerici: $D = 3$ km, $L = 600$ m, $v_R = 1.8$ km/h, $v_c = 0.8$ m/s.

Esercizio 2: Urto e legge elastica modificata



Un punto materiale di massa M si trova ad una quota h su un piano inclinato che forma un angolo α con la base orizzontale, come in figura. Il corpo M, inizialmente fermo, viene lasciato libero di muoversi e, dopo aver raggiunto la base orizzontale, entra nel punto A all'interno di una guida circolare di raggio r. Uscito dalla guida circolare, al punto C, il corpo M urta in modo elastico un punto materiale di massa m inizialmente fermo, e si ritrova in uno stato di quiete immediatamente dopo l'urto. Invece il corpo m, messo in moto a a causa dell'urto, percorre in salita una guida curvilinea e si ferma ad un quota L, dopo aver compresso una molla inizialmente a riposo. La molla in questione, con una costante elastica $\overline{k}$, è soggetta ad una forza elastica modificata del tipo $F_{el} = -\overline{k}\Delta x^2$. Si possono trascurare tutti gli attriti in gioco.

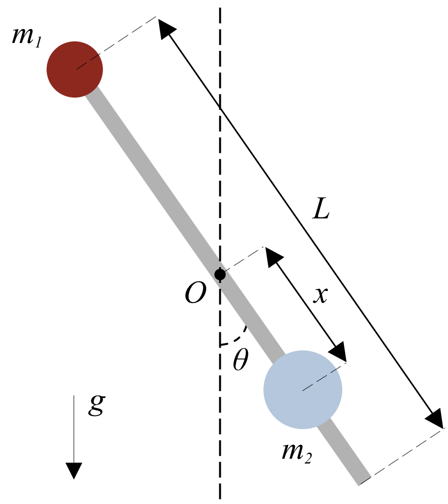
a) Si determini la velocità con cui il corpo M raggiunge il punto B, nell'estremità superiore della guida circolare. Calcolare anche il valore del modulo della reazione vincolare della guida nel punto B (**3 punti**).

b) Calcolare la velocità del corpo m dopo l'urto con il corpo M (**3 punti**).

c) Dimostrare che la forza F_{el} è conservativa e determinare di quanto si è compressa la molla (**4 punti**).

Dati numerici: $M = 1$ kg, $h = 2$ m, $\alpha = 60°$, $r = 0.25\ h$, $L = 1.5$ m, $\overline{k} = 500$ N/m^2.

Esercizio 3: Sbarra con due sfere



Una sbarretta omogenea e sottile di massa M e lunghezza L può ruotare in un piano verticale attorno ad un asse passante per il suo centro O. Ad una estremità della sbarra è fissata una sferetta di massa m_1. Un'altra sferetta, di massa m_2, può essere piazzata sulla sbarretta a una distanza x qualsiasi dal suo centro. Si indichi con θ l'angolo fra la sbarra e la direzione verticale ($\theta = 0$ quando la sferetta di massa m_2 si trova in basso), si considerino le sferette come punti materiali e si trascurino tutti gli attriti.

a) Determinare il valore di x per il quale il sistema è in equilibrio per ogni valore di θ (**3 punti**).

La sfera m_2 viene ora fissata all'estremo della sbarretta opposto a quello dove si trova la sfera m_1, ovvero $x \equiv L/2$.

b) Calcolare il momento di inerzia totale del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per O (**3 punti**).

c) La sbarretta viene portata ad un angolo iniziale θ_0 e lasciata libera di muoversi. Calcolare il modulo della velocità angolare del sistema quando passa da $\theta = 0$ (**4 punti**).

d) **Bonus**: dimostrare che, se l'angolo iniziale $\theta_0 \ll 1$, allora il sistema compie oscillazioni armoniche e determinare il periodo delle piccole oscillazioni (**3 punti**).

Dati numerici: $M = 2$ kg, $L = 70$ cm, $m_1 = 500$ g, $m_2 = 900$ g, $\theta_0 = 53°$.

Soluzioni - 22/01/2024

Esercizio 1: Salvare la nonna con la cinematica

(a) Vogliamo calcolare la velocità media vettoriale fra il punto di partenza di Blu e il punto di arrivo alla fermata del bus. Ricordiamo che la velocità vettoriale è da calcolare rispetto al vettore spostamento e non rispetto alla distanza percorsa effettivamente da Blu. Scegliendo un sistema di riferimento xy destrorso con l'asse x rivolto verso destra e con origine nel punto di partenza, il vettore spostamento sarà dato semplicemente dalle coordinate della fermata del bus, ovvero $\vec{s} = -D/2\ \hat{\imath} + L\ \hat{\jmath}$, il cui modulo è $|\ \vec{s}\ | = \sqrt{(-D/2)^2 + L^2} = 1615.5$ m. Sappiamo che il bus passa fra 15 minuti e che Blu arriva alla fermata quando il bus è già passato da 3 minuti, quindi Blu impiega un tempo $\Delta t = 18$ min. La velocità media vettoriale sarà quindi $\vec{v}_B = \vec{s}/\Delta t = (D/2\ \hat{\imath} + L\ \hat{\jmath})/\Delta t = (-1.39\ \hat{\imath} + 0.56\ \hat{\jmath})$ m/s. Il modulo della velocità media è $|\ \vec{v}_B\ | = |\ \vec{s}\ |\ /\Delta t \simeq 1.5$ m/s, la direzione è lungo la congiungente fra i punti e il verso dal punto di partenza a quello di arrivo.

La velocità media scalare (o celerità) è invece da calcolare rispetto alla distanza effettivamente percorsa, ovvero $S = D/2 + L = 3.6$ km. Per non perdere l'autobus, Blu avrebbe dovuto compiere il percorso in $T = 15$ minuti con una velocità media scalare $v_{B,c} = S/T = 2.33$ m/s.

(b) Il moto di Rosso durante l'attraversamento del fiume è dato dalla somma di una velocità uniforme lungo l'asse x dovuta alla corrente e di una velocità uniforme lungo l'asse y dovuta al nuoto. La velocità vettoriale costante con cui si muove Rosso può essere scritta come $\vec{v} = v_c\ \hat{\imath} + v_R\ \hat{\jmath}$ ed il suo angolo rispetto l'asse x è $\phi = \arctan(v_R/v_c) = 32°$.

Le equazioni sono quelle del moto uniforme lungo i due assi e, imponendo uno spostamento lungo y pari alla lunghezza del fiume L, possiamo calcolare il tempo di attraversamento t_R e la distanza corrispondente percorsa lungo la direzione orizzontale x_R:

$$\begin{cases} x(t) = v_c t \\ y(t) = v_R t \end{cases} \quad \xRightarrow{y\ =\ L} \quad \begin{cases} t_R = L/v_R = 20 \text{ min} \\ x_R = v_c t_R = 960 \text{ m} \end{cases} \tag{1}$$

Quindi, una volta arrivata sulla riva sinistra, Rosso si trova ad una distanza $R = D/2 - x_R = 540$ m dalla casa della nonna e ha ancora 10 minuti prima che arrivi il lupo.

(c) Usando le equazioni del moto uniformemente accelerato lungo x e imponendo che Rosso percorra una distanza R in $T = 5$ min (in modo tale da arrivare 5 min prima del lupo, come richiesto dal problema), troviamo i valori dell'accelerazione a_R e della sua velocità finale v_f:

$$\begin{cases} v(t) = a_R t \\ x(t) = \frac{1}{2} a_R t^2 \end{cases} \quad \xRightarrow[x\ =\ R]{t\ =\ T} \quad \begin{cases} a_R = 2R/T^2 = 0.012 \text{ m/s}^2 \\ v_f = a_R T = 3.6 \text{ m/s} \end{cases} \tag{2}$$

Esercizio 2: Urto e legge elastica modificata

(a) Dal momento che gli attriti in gioco sono trascurabili, la velocità con cui il punto materiale di massa m arriva al punto B si può calcolare applicando la conservazione dell'energia meccanica. Scegliendo gli assi in modo che la superficie orizzontale abbia quota nulla, si ha:

$$Mgh = Mg\frac{h}{2} + \frac{1}{2}Mv_B^2 \quad \Longrightarrow \quad v_B = \sqrt{gh} = 4.43 \text{ m/s} \tag{3}$$

Al punto B la reazione vincolare N_B della guida ha stessa direzione e verso della forza peso. Possiamo ricavare il suo modulo dalla componente radiale della seconda legge della dinamica in un moto circolare, sfruttando la nozione di accelerazione centripeta:

$$N_B + Mg = M\frac{v_B^2}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad N_B = 29.44 \text{ N} \tag{4}$$

(b) Per calcolare la velocità di m dopo l'urto, bisogna prima calcolare la velocità di M al punto C, prima dell'impatto. Questa può essere calcolata semplicemente tramite la conservazione dell'energia meccanica ed equivale a $v_{C,M} = \sqrt{2gh} = 6.26$ m/s. Durante l'urto elastico tra M e m, la quantità di moto e l'energia cinetica si conservano. Poiché il corpo m è fermo prima dell'urto e poiché il corpo M si ferma a causa dell'urto, avremo:

$$\begin{cases} Mv_{C,M} = mv_{C,m} \\ \frac{1}{2}Mv_{C,M}^2 = \frac{1}{2}mv_{C,m}^2 \end{cases} \tag{5}$$

Questo sistema ha soluzione solo nel caso in cui $m = M$. In questo caso l'urto è simmetrico e il corpo M trasferisce tutta la sua velocità ed energia al corpo m. Avremo dunque $v_{C,m} = v_{C,M} = 6.26$ m/s.

(c) La forza elastica modificata è conservativa se esiste un'energia potenziale U_{el} tale che $F_{el} = -\nabla U_{el} = -\partial U_{el}/\partial x$. Integrando questa equazione, si verifica facilmente che l'energia potenziale elastica esiste e ha la forma $U_{el} = \frac{1}{3}\overline{k}\Delta x^3$.

Per ricavare il valore della compressione della molla Δx, possiamo ancora una volta usare la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mv_{C,m}^2 = mgL + \frac{1}{3}\overline{k}\Delta x^3 \tag{6}$$

da cui si ricava $\Delta x = [\frac{3}{\overline{k}}\,(\frac{1}{2}mv_{C,m}^2 - mgL)]^{\frac{1}{3}} = 0.31$ m.

Esercizio 3: Sbarra con due sfere

(a) Il sistema è in equilibrio quando la somma dei momenti delle forze esterne rispetto al centro O è nulla (II equazione cardinale). Le forze in gioco sono le forze peso delle tre masse M, m_1 e m_2. Il momento della forza peso della sbarra M è nullo, in quanto la forza è applicata in O. Dagli altri due momenti possiamo calcolare la posizione di equilibrio x_{eq}:

$$m_1 g\frac{L}{2}\sin\theta - m_2 g\; x_{eq}\sin\theta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{eq} = \frac{m_1}{2m_2}L = 19.44 \text{ cm} \tag{7}$$

Notiamo anche che, per qualsiasi altro x, il sistema è in equilibrio solo se $\sin\theta = 0$, ovvero per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. In questo caso, la sbarra è verticale e tutti i momenti sono nulli poiché le forze peso e i relativi bracci sono vettori paralleli.

(b) Calcoliamo il momento di inerzia I_O del sistema rispetto all'asse passante per il centro O dopo aver fissato m_2 all'estremità dalla sbarra. Il momento di inerzia totale sarà dato semplicemente dalla somma dei momenti di inerzia della sbarretta e delle due sferette:

$$I_O = \frac{ML^2}{12} + m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M + 3(m_1+m_2)}{12}L^2 \simeq 0.253 \text{ kg m}^2 \tag{8}$$

(c) Le forze che compiono lavoro sono tutte conservative, quindi l'energia meccanica totale si conserva. L'energia potenziale sarà quella delle forze peso. La quota di O non varia e quindi la barretta contribuirà all'energia potenziale totale come una costante. Per semplificare, scegliamo l'altezza del centro O della barretta come quota di riferimento per il calcolo dell'energia potenziale U, in modo tale che il suo contributo sia sempre nullo. L'energia potenziale U e cinetica K delle sfere possono quindi essere scritte come:

$$U = m_1 g \frac{L}{2} \cos\theta - m_2 g \frac{L}{2} \cos\theta = g\frac{L}{2}(m_1 - m_2)\cos\theta \tag{9}$$

$$K = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \tag{10}$$

Imponendo la conservazione dell'energia fra l'istante iniziale ($\omega = 0$ e $\theta = \theta_0$) e l'istante finale ($\theta = 0$ e $\omega = \omega_f$) abbiamo:

$$\cancel{K_0} + U_0 = K_f + U_f \quad \Longrightarrow \quad g\frac{L}{2}(m_1 - m_2)\cos\theta_0 = \frac{1}{2} I_O \omega_f^2 + g\frac{L}{2}(m_1 - m_2) \tag{11}$$

da cui:

$$\omega_f = \pm\sqrt{\frac{gL}{I_O}(m_2 - m_1)(1 - \cos\theta_0)} = \pm\sqrt{\frac{12g}{L}\frac{(m_2 - m_1)(1 - \cos\theta_0)}{M + 3(m_1 + m_2)}} = \pm 2.078\ \mathrm{s}^{-1} \tag{12}$$

dove il segno dipende da quale passaggio per $\theta = 0$ si considera: poiché il sistema parte con $\theta_0 \in [0, \pi/2)$, al primo passaggio avremo il segno negativo (rotazione in senso orario), al secondo quello positivo, e così via.[1]

(d) Possiamo scrivere la II equazione cardinale per il sistema:

$$\sum \tau^{\mathrm{ext}} = I_O \ddot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad -g\frac{L}{2} m_2 \sin\theta + m_1 \frac{L}{2} \sin\theta = I_O \ddot{\theta} \tag{13}$$

Per $\theta \ll 1$, abbiamo che $\sin\theta \approx \theta$ e l'equazione si riduce a quella di un oscillatore armonico:

$$\ddot{\theta} = -\frac{gL}{2I_O}(m_2 - m_1)\theta = -\Omega^2\theta \qquad \text{con} \ \ \Omega^2 = \frac{gL}{2I_O}(m_2 - m_1) \tag{14}$$

dove Ω è la pulsazione dell'oscillatore. Il periodo delle piccole oscillazioni sarà quindi:

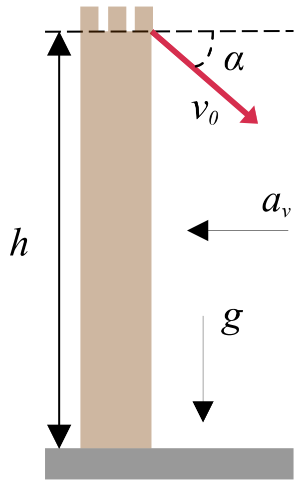
$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{[M + 3(m_1 + m_2)]L}{6g(m_2 - m_1)}} = 2.697\ \mathrm{s} \tag{15}$$

[1] Notiamo che $\omega_f \to 0$ se $\theta_0 \to 0$ e se $m_2 \to m_1$. Nel primo caso il sistema è già in pratica nel punto di equilibrio stabile, mentre nel secondo caso è dovuto al fatto che quando le due masse tendono a diventare uguali ogni valore di θ tende a diventare una posizione di equilibrio. Se invece $m_1 > m_2$, la (12) non è più definita: il minimo dell'energia potenziale non si ha più in $\theta = 0$ ma in $\theta = \pi$ ed il sistema oscilla attorno a $\theta = \pi$. Se parte da fermo con $\theta \neq 0$, non raggiungerà mai la posizione $\theta = 0$.

Compito Fisica Generale - 20/02/2024

Esercizio 1: Oggetto lanciato da una torre

Un oggetto viene lanciato da una torre alta h con una velocità iniziale di modulo v_0 e con un angolo α rispetto alla direzione orizzontale.



a) Determinare dopo quanto tempo l'oggetto colpisce il suolo e a quale distanza dalla base della torre (**3 punti**).

Si ripete l'esperimento, ma questa volta, a causa di un forte vento, l'oggetto subisce anche un'accelerazione costante orizzontale a_v in direzione contraria al moto iniziale.

b) Si osserva che l'oggetto colpisce la torre prima di toccare il suolo. Calcolare le coordinate del punto di impatto con la torre e le componenti della velocità al momento dell'impatto (**4 punti**).

c) Calcolare il modulo minimo della velocità iniziale (tenendo fisso l'angolo α) affinché l'oggetto riesca ad arrivare al suolo prima di impattare la torre (**3 punti**).

Dati numerici: $h = 100$ m, $v_0 = 35$ m/s, $\alpha = 30°$, $a_v = 25$ m/s^2.

Esercizio 2: Satelliti di Nettuno

Nettuno è il pianeta più lontano dal Sole e possiede un sistema di almeno 14 satelliti.

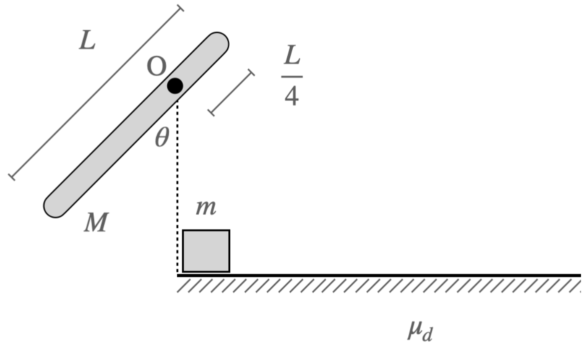
a) Il più grande fra i satelliti, Tritone, si muove attorno a Nettuno su un'orbita che possiamo considerare circolare, di raggio r_T, con periodo orbitale T_T. Calcolare la massa di Nettuno (**4 punti**).

b) Proteo, il secondo satellite di Nettuno per massa, si muove anch'esso su un'orbita circolare con periodo T_P. Calcolare il raggio dell'orbita di Proteo e la sua velocità tangenziale (**3 punti**).

c) Una sonda si muove attorno a Nettuno su un'orbita ellittica. Nel punto più distante da Nettuno della sua orbita, la sonda si trova alla stessa distanza di Tritone r_T e ha velocità di modulo v_A. Usando le leggi di conservazione, calcolare la distanza ed il modulo della velocità della sonda quando si trova nel punto dell'orbita più vicino a Nettuno (**3 punti**).

Dati numerici: $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}, $r_T = 354760$ km, $T_T = 5.88$ giorni, $T_P = 1.12$ giorni, $v_A = 2.5$ km/s.

Esercizio 3: Asta rotante ed urto



Un'asta sottile, rigida ed omogenea di lunghezza L e massa M è libera di ruotare senza attrito attorno al punto O (vedi figura), posto ad una distanza $\frac{L}{4}$ dal suo estremo superiore. L'asta, inizialmente tenuta ferma ad un angolo θ rispetto all'asse verticale, viene lasciata cadere sotto l'effetto della forza di gravità (si trascuri l'attrito dell'aria). In corrispondenza dell'asse verticale, l'asta urta in modo completamente elastico un punto materiale di massa m. Dopo l'urto l'asta rimane ferma in posizione verticale, ed m inizia a muoversi su una superficie orizzontale scabra con attrito dinamico μ_d, prima di fermarsi dopo aver percorso una certa distanza.

a) Si determini il momento di inerzia dell'asta (**3 punti**).

b) Trovare la velocità angolare dell'asta appena prima dell'urto (**3 punti**).

c) Determinare il valore della massa m del punto materiale affinché la barretta rimanga ferma dopo l'urto elastico, e il valore della velocità con cui il punto materiale si mette in moto (**4 punti**).

d) **Bonus:** si determini la distanza percorsa da m prima di fermarsi (**3 punti**).

Dati numerici: $M = 2$ kg, $L = 1$ m, $\theta = 45°$, $\mu_d = 0.1$.

Soluzioni - 20/02/2024

Esercizio 1: Oggetto lanciato da una torre

Scegliamo un sistema di coordinate con origine nel punto in cui viene lanciato l'oggetto, con asse x diretto verso destra e asse y rivolto verso il basso. Scriviamo le equazioni del moto nel caso più generale possibile, ovvero con accelerazione di gravità g lungo la direzione verticale e con accelerazione a_v lungo la direzione orizzontale. Sono entrambi moti uniformemente accelerati, e avremo lungo i due assi:

$$\text{Lungo } x: \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} - a_v t \\ x(t) \ = v_{0x} t - \dfrac{1}{2} a_v t^2 \end{cases} \qquad \text{Lungo } y: \begin{cases} v_y(t) = v_{0y} + gt \\ y(t) \ = v_{0y} t + \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \tag{1}$$

dove abbiamo già imposto le condizioni iniziali $x_0 = y_0 = 0$. Inoltre, avremo che $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ e $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$.

(a) Inizialmente non c'è vento, quindi $a_v = 0$ e le equazioni (1) lungo x si semplificano a quelle di un moto a velocità uniforme. Chiamando t_f il tempo di caduta, avremo che lo spazio verticale percorso sarà $y(t_f) = h$. Imponendo questa condizione nell'equazione di $y(t)$ risolviamo per il tempo t_f, che poi sostituiamo nell'equazione di $x(t)$ per ottenere la gittata $s = x(t_f)$:

$$\begin{cases} h = v_0 \sin\alpha \, t_f + \dfrac{1}{2} g t_f^2 \\ s = v_0 \cos\alpha \, t_f \end{cases} \implies \begin{cases} t_f = \dfrac{-v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g} = 3.07 \text{ s} \\ s = 93.08 \text{ m} \end{cases} \tag{2}$$

dove abbiamo considerato solo la soluzione positiva per il tempo t_f.

(b) A questo punto, il vento contribuisce ad accelerare l'oggetto lungo x con accelerazione $-a_v$. L'oggetto impatterà con la torre dopo un tempo t_1 quando $x(t_1) = 0$. Utilizzando questa condizione nell'equazione per $x(t)$ si ottiene il tempo t_1 e poi utilizziamo l'equazione per $y(t)$ per ricavare l'altezza dell'impatto $h_1 = y(t_1)$:

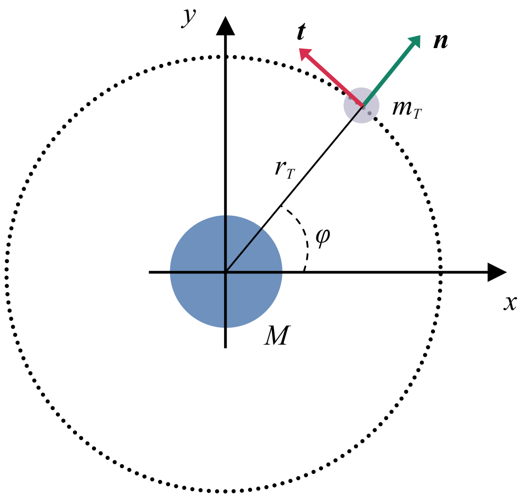
$$\begin{cases} 0 \ = v_0 \cos\alpha \, t_1 - \dfrac{1}{2} a_v t_1^2 \\ h_1 = v_0 \sin\alpha \, t_1 + \dfrac{1}{2} g t_1^2 \end{cases} \implies \begin{cases} t_1 = \dfrac{2 v_0 \cos\alpha}{a_v} = 2.42 \text{ s} \\ h_1 = 71.28 \text{ m} \end{cases} \tag{3}$$

dove si è trascurata la soluzione banale $t_1 = 0$. Quindi, al momento dell'impatto il corpo si troverà ad una distanza h_1 dal vertice della torre, ovvero ad una altezza $H = h - h_1 = 28.72$ m dal suolo. Per calcolare le componenti della velocità nel momento dell'impatto, basta ancora una volta sostituire t_1 nelle equazioni (1) delle velocità. Si ottiene $v_x(t_1) = -30.31$ m/s e $v_y(t_1) = 41.29$ m/s.

(c) Infine, la velocità minima $v_0^\star$ affinché la torre non venga colpita può essere trovata imponendo le condizioni $x(t_2) = 0$ e $y(t_2) = h$, dove t_2 è il tempo di caduta. Ovvero, stiamo richiedendo che l'oggetto arrivi esattamente ai piedi della torre. Le equazioni diventano:

$$\begin{cases} 0 = v_0^\star \cos\alpha\, t_2 - \dfrac{1}{2} a_v t_2^2 \\ h = v_0^\star \sin\alpha\, t_2 + \dfrac{1}{2} g t_2^2 \end{cases} \implies \begin{cases} v_0^\star = \sqrt{\dfrac{a_v^2 h}{2\cos\alpha(a_v \sin\alpha + g\cos\alpha)}} = 41.46 \text{ m/s} \\ t_2 = \dfrac{2 v_0^\star \cos\alpha}{a_v} = 2.87 \text{ s} \end{cases} \tag{4}$$

Esercizio 2: Satelliti di Nettuno



Utilizziamo un sistema di riferimento inerziale centrato su Nettuno e siano $\hat{n}$ il versore radiale (normale) uscente dall'origine, $\hat{t}$ il versore tangenziale e φ l'angolo rispetto all'asse x, come in figura.

(a) Siano M la massa di Nettuno e m_T la massa di Tritone. Il moto di quest'ultimo è un moto circolare a distanza r_T da Nettuno. Possiamo scrivere la velocità e l'accelerazione di Tritone in componenti intrinseche:

$$\begin{cases} \vec{v} = \cancelto{0}{v_n \hat{n}} + v_t \hat{t} = r_T \dot{\varphi}\, \hat{t} \\ \vec{a} = a_n \hat{n} + a_t \hat{t} = -r_T \dot{\varphi}^2 \hat{n} + r_T \ddot{\varphi}\, \hat{t} \end{cases} \tag{5}$$

L'unica forza in gioco è la forza gravitazionale tra Tritone e Nettuno e possiamo scrivere il secondo principio della dinamica applicato a Tritone:

$$m_T \vec{a} = -G \frac{m_T M}{r_T^2} \hat{n} \quad \xRightarrow[a_t \;=\; 0]{a_n \;=\; -r_T \dot{\varphi}^2} \quad r_T \dot{\varphi}^2 = G \frac{M}{r_T^2} \tag{6}$$

Il moto è di tipo circolare uniforme (poiché $\ddot{\varphi} = 0$), sappiamo che Tritone compie un'orbita intera ($\Delta\varphi = 2\pi$) in un tempo T_T, e quindi possiamo ricavare la velocità angolare costante $\dot{\varphi} = \omega_T = \Delta\varphi / T_T = 2\pi / T_T$. Sostituendo $\dot{\varphi}$ nella (6) e risolvendo per M:

$$M = \frac{4\pi^2 r_T^3}{G T_T^2} = 1.024 \times 10^{26} \text{ kg} \simeq 17.1 \text{ M}_\oplus \tag{7}$$

(b) Ripetendo gli stessi ragionamenti del punto precedente per Proteo, (ovvero utilizzando il secondo principio della dinamica e le definizioni di accelerazione centripeta e velocità angolare costante) abbiamo che:

$$m_P \frac{4\pi^2 r_P}{T_P^2} = \frac{G M m_P}{r_P^2} \implies r_P = \left(\frac{G M T_P^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = r_T \left(\frac{T_P}{T_T}\right)^{2/3} \simeq 117443 \text{ km} \tag{8}$$

Notiamo che l'equazione qui sopra altro non è che la III legge di Keplero per un'orbita circolare. La velocità tangenziale di Proteo sull'orbita sarà quindi $v_P = \omega_P r_P = 2\pi r_P / T_P = 7.63$ km/s.

(c) Chiamiamo A e B i punti più distante e più vicino a Nettuno a cui si trova la sonda di massa m durante l'orbita, r_A e r_B le rispettive distanze da Nettuno e v_A e v_B i rispettivi moduli delle velocità. Durante il moto si conservano il momento angolare rispetto al centro di Nettuno, $\vec{L}_A = \vec{L}_B$ e l'energia meccanica totale, $E_A = E_B$. Poiché l'orbita è ellittica, nel punto A, il vettore posizione e il vettore velocità sono ortogonali tra loro e quindi il modulo del momento angolare è semplicemente $L_A = mr_Av_A$. Lo stesso vale per il punto B, ovvero $L_B = mr_Bv_B$. A questo punto, possiamo scrivere le due leggi di conservazione:

$$\begin{cases} E_A = E_B \\ L_A = L_B \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 - \frac{G\cancel{m}M}{r_A} = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 - \frac{G\cancel{m}M}{r_B} \\ \cancel{m}r_Av_A = \cancel{m}r_Bv_B \end{cases} \tag{9}$$

Abbiamo un sistema di due equazioni e due incognite: dai dati conosciamo $r_A = r_T$ e v_A, mentre le incognite sono r_B e v_B. Dalla seconda equazione, $r_B = r_Av_A/v_B$, e posso sostituirlo nella prima per ottenere una equazione quadratica con unica incognita v_B:

$$v_B^2 - \frac{2GM}{r_Av_A}v_B + \left(\frac{2GM}{r_A} - v_A^2\right) = 0 \implies v_B = \frac{GM}{r_Av_A} \pm \left(\frac{GM}{r_Av_A} - v_A\right) \tag{10}$$

Abbiamo due soluzioni: $v_B = v_A$ implica un'orbita circolare, mentre noi sappiamo che la sonda è su un orbita ellittica. La soluzione accettabile è quindi $v_B = 2GM/(r_Av_A) - v_A = 12.90$ km/s. Infine, la distanza della sonda da Nettuno nel punto B sarà $r_B = v_Ar_A/v_B \simeq 68749$ km.

Esercizio 3: Asta rotante ed urto

(a) Per ragioni di simmetria è facile stabilire che il fulcro di rotazione è ad una distanza $\frac{L}{4}$ dal centro di massa dell'asta, situato a $\frac{L}{2}$. Il momento di inerzia dell'asta nella configurazione data dal problema può essere calcolato attraverso il teorema di Huygens-Steiner:

$$I = I_{CM} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ML^2 = 0.29 \text{ kg m}^2. \tag{11}$$

(b) Per calcolare la velocità angolare ω_0 dell'asta al momento dell'urto si può sfruttare la conservazione dell'energia meccanica durante il moto. Al bilancio energetico contribuiscono l'energia cinetica rotazionale dell'asta durante il moto e la variazione di energia potenziale dovuta al cambiamento di quota del centro di massa del corpo rigido. Per comodità, scegliamo la quota di riferimento per l'energia potenziale a $L/2$ rispetto al piano orizzontale, in modo tale che la barretta abbia energia potenziale nulla quando è nella posizione finale. Possiamo scrivere l'equazione della conservazione dell'energia meccanica tra lo stato iniziale (asta tenuta ferma ad un angolo θ) e lo stato finale (asta che raggiunge la posizione verticale) e risolvere per la velocità angolare finale:

$$Mg\frac{L}{4}(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}I\omega_0^2 \implies \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{2I}(1-\cos\theta)} = 3.14 \text{ rad/s}. \tag{12}$$

(c) Nell'urto tra la barretta ed il punto materiale si conservano sia l'energia cinetica (essendo l'urto elastico), sia il momento angolare rispetto al polo O (essendo nullo il momento delle forze esterne agenti rispetto a questo polo). Tenendo presente che la sbarretta dopo l'urto rimane ferma, trasferendo tutta la sua energia cinetica e momento angolare al punto materiale m, si può scrivere il sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}I\omega_0^2 = \dfrac{1}{2}mv_0^2 \\ I\omega_0 = mv_0\left(\dfrac{3}{4}L\right) \end{cases} \tag{13}$$

Abbiamo dunque un sistema di due equazioni in due incognite, che possiamo risolvere per determinare v_0 ed m. Il sistema si può risolvere in diversi modi. Ad esempio, dividendo la prima equazione per la seconda, si ottiene l'equazione:

$$\omega_0 = v_0\,\frac{4}{3L} \quad , \tag{14}$$

da cui si deriva

$$v_0 = \omega_0\frac{3}{4}L = 2.36 \text{ m s}^{-1} \quad , \tag{15}$$

e, sostituendo l'espressione per ω_0 dentro l'equazione della conservazione del momento angolare, si ottiene:

$$I\omega_0 = m\omega_0\left(\frac{3}{4}L\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad m = I\,\left(\frac{3}{4}L\right)^{-2} = 0.52 \text{ kg}. \tag{16}$$

(d) La distanza d può essere calcolata usando nuovamente considerazioni energetiche, considerando che la variazione (dissipazione) di energia meccanica tra lo stato iniziale in cui m inizia a muoversi con velocità v_0 e lo stato finale in cui m interrompe il moto, corrisponde al lavoro svolto dalla forza di attrito non conservativa lungo il tragitto. Abbiamo quindi:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_d mgd \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{v_0^2}{2\mu_d g} = 2.84 \text{ m}. \tag{17}$$

Lo stesso risultato si può derivare studiando la cinematica di un moto uniformemente accelerato (decelerato, nel caso particolare), dove l'accelerazione dovuta alla forza d'attrito è $a = -\mu_d g$. Scegliendo un sistema di riferimento in cui l'origine dell'asse orizzontale corrisponde al punto di partenza, si possono scrivere le equazioni del moto e ricavare il tempo $t^\star$ in cui la massa si ferma e lo spazio percorso d in questo tempo:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \dfrac{1}{2}\mu_d g t^2 \\ v(t) = v_0 - \mu_d g t \end{cases} \xrightarrow[v(t^\star)\,=\,0]{t\,=\,t^\star} \begin{cases} t^\star = \dfrac{v_0}{\mu_d g} = 2.41 \text{ s} \\ x(t^\star) = d = \dfrac{v_0^2}{2\mu_d g} = 2.84 \text{ m} \end{cases} \tag{18}$$