

1.1 La carica elettrica

Questa parte della Fisica studia le interazioni fra le *cariche elettriche ferme*. Ma che cosa sono le cariche elettriche? Certamente ognuno ne avrà già sentito parlare nei corsi di Fisica seguiti alla Scuola Media Superiore, per cui non staremo a dilungarci sulla descrizione dei fenomeni che hanno dimostrato l'esistenza della carica elettrica, né su quelli che hanno provato la costituzione elettrica della materia che ci circonda.

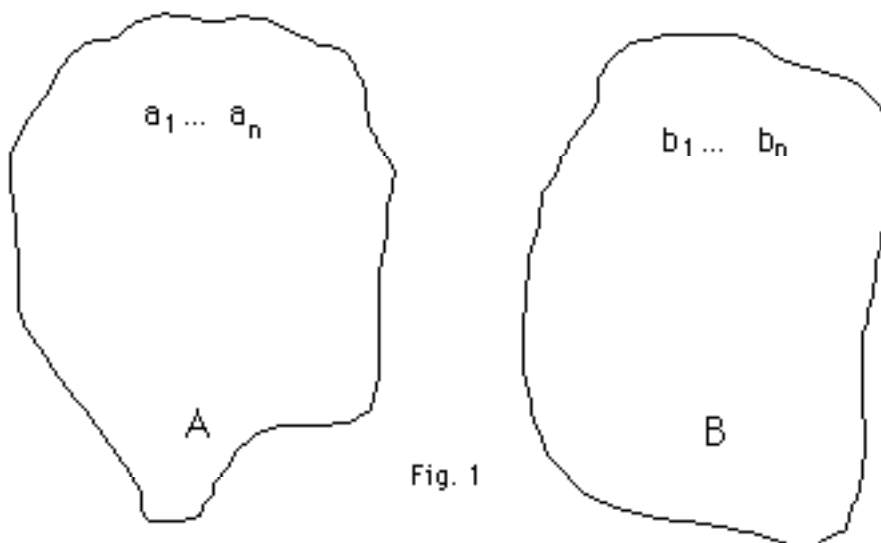
A tutti, probabilmente, sarà capitato di prendere la "scossa" toccando la portiera di una automobile con la chiave...in ogni caso tutti avranno senz'altro visto un fulmine!

Piuttosto, cercheremo invece di arrivare alle leggi che governano la Fisica delle cariche elettriche a riposo, cioè alle **leggi dell'elettrostatica**, mostrandone le basi sperimentali e come, da queste si sia giunti poi alla loro sistemazione teorica.

1° osservazione sperimentale (qualitativa)

Esistono due tipi differenti di corpi carichi, infatti i corpi elettricamente carichi possono attrarsi fra di loro oppure respingersi. Si nota comunque che

- i) se A respinge B ed A respinge C, allora anche B respinge C (una specie di proprietà transitiva...);
- ii) se A respinge B ed A attrae C, allora anche B attrae C;
- iii) se A attrae B ed A attrae C, allora B e C si respingono;
- iv) se A è carico e lo spezziamo in due parti, queste, di norma, si respingono.



Per definizione diremo che l'interazione fra corpi carichi è dovuta alla loro **carica elettrica** che, è dunque, per definizione, la sorgente dei fenomeni elettrici.

I fatti sperimentali sopra descritti si interpretano assumendo che la carica elettrica sia di due tipi diversi e che le cariche dello stesso tipo si respingano, mentre quelle di tipo diverso si attraggano. Tradizionalmente (B. Franklin) si parla di "carica positiva" e "carica negativa" per distinguere fra i due tipi di carica, ma, fino a questo momento, questa deve essere presa solo come una distinzione qualitativa, "puramente nominalistica".

Per poter passare dal qualitativo al quantitativo anche per la carica elettrica, come, del resto, per qualunque altra grandezza fisica, occorre stabilire un metodo operativo di misura.

1.2 La Forza di Coulomb

Abbiamo già detto che fra corpi carichi si esercitano forze meccaniche. Siccome sappiamo come misurare le forze in meccanica, possiamo cercare di definire operativamente il metodo di misura della carica elettrica, appunto attraverso una misura di forza.

A questo scopo consideriamo quest'altro fatto sperimentale.

2° osservazione sperimentale

Se prendiamo due corpi carichi e li poniamo ad una distanza molto grande rispetto alle loro dimensioni, la forza (attrattiva o repulsiva) che ciascun corpo esercita sull'altro ($\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B$ per il principio di azione e reazione...)

- i) è diretta secondo la congiungente i due corpi;
- ii) decresce con l'inverso del quadrato della distanza fra i due corpi:
 $\rightarrow |\mathbf{F}| \propto r^{-2}$

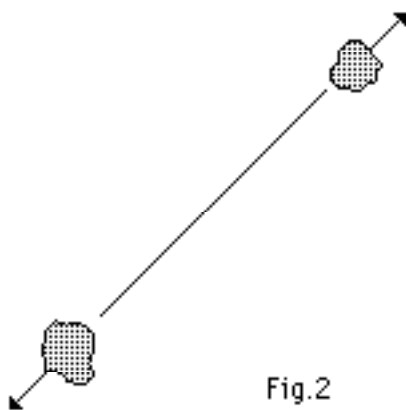


Fig.2

Vediamo come questa osservazione può consentirci di definire un metodo di misura della carica elettrica.

Supponiamo di avere un corpo carico X, che considereremo come "carica campione". Se adesso abbiamo vari corpi carichi A_1, A_2, A_3, \dots possiamo definire la quantità di carica C_1, C_2, C_3, \dots che tali corpi possiedono in termini dell'intensità della forza con cui essi interagiscono con il campione X, quando sono posti ad una distanza D prestabilita da tale campione. Convenzionalmente possiamo poi decidere di dare il segno positivo alla quantità sopra definita se la forza è repulsiva (scegliendo così il segno positivo per il gruppo a cui appartiene anche il campione...) e negativo altrimenti.

Ovviamente, secondo questa definizione, il valore numerico delle cariche C_1, C_2, C_3, \dots dei vari corpi dipende sia dal campione X che dalla distanza D a cui abbiamo deciso di operare. Cominciamo con l'osservare cosa succede cambiando la distanza da D a D' (ma sempre in modo che anche D' sia molto maggiore delle dimensioni dei corpi carichi).

Per la 2° osservazione sperimentale di cui sopra, punto ii), i nuovi valori delle cariche $C'_1, C'_2, C'_3...$ saranno semplicemente proporzionali ai vecchi valori secondo la stessa costante di proporzionalità, cioè $(D/D')^2$. In particolare, i rapporti fra le cariche misurate secondo le due definizioni operative NON dipendono dal modo usato.

Questo è un fatto che ci conforta circa la ragionevolezza della definizione introdotta.

E' quanto accade per esempio, quando decidiamo di misurare le lunghezze in metri o in pollici: per due date lunghezze otterremo nei due modi dei valori diversi, però se una lunghezza è doppia dell'altra quando le misuriamo in metri, lo stesso accadrà se le misureremo in pollici!

Comunque, oltre che cambiare D con D' potremo anche decidere di cambiare addirittura il campione, passando da X ad un altro corpo carico x. Evidentemente, così facendo, in generale cambieranno anche i valori numerici $c_1, c_2, c_3...$ delle cariche associate ai corpi $A_1, A_2, A_3, ...$: i rapporti saranno preservati oppure no?

A priori NON possiamo dirlo: è di nuovo l'esperienza che deve rispondere.

3° osservazione sperimentale

L' intensità della forza elettrica con la quale un corpo carico A_i agisce su un altro corpo carico A_j è proporzionale alla loro carica elettrica, misurata secondo la definizione operativa data sopra.

Questo garantisce che, cambiando la carica campione, si ottengono valori delle cariche che differiscono dai precedenti semplicemente, di nuovo, solo per un fattore di scala.

Da quanto precede è poi immediato che, per simmetria nello scambio dei due corpi carichi ($F_A = -F_B...$), la forza con cui due cariche Q_1, Q_2 si attraggono fra loro ad una distanza data (purché molto maggiore delle loro dimensioni...), è proporzionale al prodotto delle due cariche.

Combinando questi fatti sperimentali fra di loro, si conclude che, quando la distanza fra le cariche è molto grande rispetto alle loro dimensioni (cariche puntiformi...), la forza elettrica che agisce sulla carica Q_1 a causa della carica Q_2 vale

$$\mathbf{F} = k Q_1 Q_2 \mathbf{r}^{-2} \mathbf{n} \qquad \text{Forza di Coulomb}$$

dove \mathbf{n} è il versore definito dal vettore congiungente $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, mentre k è una costante che dipende dal sistema di unità di misura usato.

Esiste una ovvia similitudine fra questa legge di forza e quella stabilita da Isaac Newton circa le masse. Nel caso di due masse puntiformi M_1 ed M_2 , la legge di gravitazione universale stabilisce che fra di esse si esercita una forza attrattiva pari a

$$\mathbf{F} = G M_1 M_2 \mathbf{r}^{-2} \mathbf{n} \qquad \text{Forza di Newton}$$

dove $G = 6.67259(85) * 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Una importante differenza fra le due leggi è che la forza fra le masse è sempre attrattiva, mentre quella fra le cariche può anche essere repulsiva, ovvero mentre esistono cariche di due tipi (positive e negative), esistono masse di un solo tipo...

L'espressione della forza di Coulomb fu verificata sperimentalmente su distanze centimetriche da Charles Augustin Coulomb stesso nel 1785, usando due sferette cariche ed una bilancia di torsione. Ma già fin dal 1772, Henry Cavendish ne aveva verificato la dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza, dimostrando che la carica si disponeva sulla superficie esterna dei conduttori: purtroppo il suo lavoro era rimasto praticamente sconosciuto ai suoi contemporanei.

Oggi la legge di Coulomb è stata verificata sperimentalmente da distanze dell'ordine di 10^{-13} cm fino a svariati chilometri.

Torniamo adesso alla questione del sistema di unità di misura che, tra l'altro, mette in evidenza un'altra differenza fra l'espressione della forza di Newton e quella di Coulomb. La legge di gravitazione, avendo a che fare soltanto con grandezze "meccaniche" (masse, forze, distanze...) di cui si conosce, indipendentemente dalla legge di gravitazione, l'unità di misura, determina essa stessa, univocamente, (entro gli errori sperimentali) il valore della costante di gravitazione universale G .

Nel caso della legge di Coulomb, intervenendo una grandezza a priori non meccanica come la carica elettrica, non possiamo definire la costante k finchè non si è definita l'unità di misura della carica.

Sistema cgs es

In questo sistema di unità di misura, detto anche "di Gauss", dove le grandezze meccaniche hanno come unità, rispettivamente il centimetro, il grammo ed il secondo, la costante k è posta per definizione uguale ad 1, per cui la forza di Coulomb si scrive

$$|\mathbf{F}| = Q_1 Q_2 r^{-2}$$

Come conseguenza le cariche si misurano in unità "meccaniche" :

$$[Q] = [M L^3 T^{-2}]^{1/2}$$

In questo sistema di unità di misura la carica dell'elettrone vale

$$e = 4.8032068(15) * 10^{-10} \text{ esu (electrostatic units)}$$

Sistema Internazionale (SI)

In questo sistema di unità di misura, che deriva dal vecchio MKS, dove le grandezze meccaniche avevano come unità il metro, il chilogrammo ed il secondo, si è ridefinito il metro in modo che la velocità della luce nel vuoto (c) valga esattamente

$$c = 299,792,458 \text{ m/s}$$

L'unità di carica elettrica è il Coulomb (C) e, per ragioni pratiche, è definito attraverso le interazioni meccaniche delle cariche in moto e non di quelle ferme.

Due fili conduttori di sezione trascurabile, paralleli ed infinitamente lunghi, posti in vuoto alla distanza di un metro, quando sono percorsi da una corrente continua di 1 Ampère (pari a 1 Coulomb/sec), si attraggono con una forza di $2.0 * 10^{-7} \text{ N/m}$.

Nel SI la carica dell'elettrone vale

$$e = 1.60217733(49) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

mentre la forza di Coulomb si scrive come

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{n}$$

dove $k^{-1} \equiv 4 \pi \epsilon_0$ ed ϵ_0 è detta "costante dielettrica del vuoto", che vale

$$\epsilon_0 = 8.85418781762 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$$

Osservazione: Il Coulomb, unità di carica del SI, è "molto grande", infatti due cariche da un Coulomb, poste ad un metro di distanza, interagiscono, con una forza pari a

$$F = 1/(4 \pi \epsilon_0) \approx 1/(4 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}) \approx 10^{10} \text{ N} ! \dots$$

1.3 Il Principio di sovrapposizione

La proporzionalità fra carica e forza elettrica che appare dalla legge di Coulomb è un aspetto di una proprietà più generale dell'interazione fra le cariche che va sotto il nome di "principio di sovrapposizione".

Esso, di nuovo, trae la sua origine da un fatto sperimentale.

4° osservazione sperimentale

Se prendiamo tre corpi carichi A, B e C, osserviamo che, entro gli errori di misura, la forza su C a causa dei corpi A e B è pari alla somma vettoriale delle forze esercitate su C separatamente da A e da B (in assenza ognuno dell'altro).

Si osservi che questa linearità non è, a priori, deducibile dai fatti sperimentali fin'ora considerati. Supponiamo infatti di avere le cariche Q_1 , Q_2 e q . Poniamo Q_1 e q a distanza r e misuriamo l'intensità della forza (di Coulomb) agente su q : avremo

$$|\mathbf{F}_1| = \frac{Q_1 q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

Poniamo adesso Q_2 e q alla medesima distanza r : misureremo

$$|\mathbf{F}_2| = \frac{Q_2 q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

Poniamo Q_1 e Q_2 insieme a distanza r dalla carica q (stiamo sempre assumendo che r sia molto maggiore delle dimensioni delle cariche in esame...).

Possiamo già sapere quanto misureremo di forza sulla carica q ? **No**: le cariche potrebbero esaltarsi l'una con l'altra oppure produrre effetti di saturazione...

E' un fatto sperimentale che

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{(Q_1 + Q_2) q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{n}$$

ovvero che la carica elettrica definita attraverso la legge di Coulomb come grandezza algebrica sia una grandezza additiva.

(\Rightarrow ecco un buon motivo per distinguere i due tipi di carica elettrica con il segno + e - dell'algebra!!).

Questo fatto sperimentale viene assunto come base del "principio di sovrapposizione" che assicura che la forza su una carica posta in un certo punto, prodotta da altre cariche disposte nello spazio in posizioni arbitrarie ma definite, è la somma vettoriale delle forze che agirebbero sulla carica data a causa delle altre cariche, prese singolarmente, nelle posizioni loro assegnate.

Ma qual è la differenza fra l'osservazione sperimentale prima menzionata ed il Principio di sovrapposizione? Sembrano tanto la stessa cosa...

Però c'è una differenza sostanziale!!

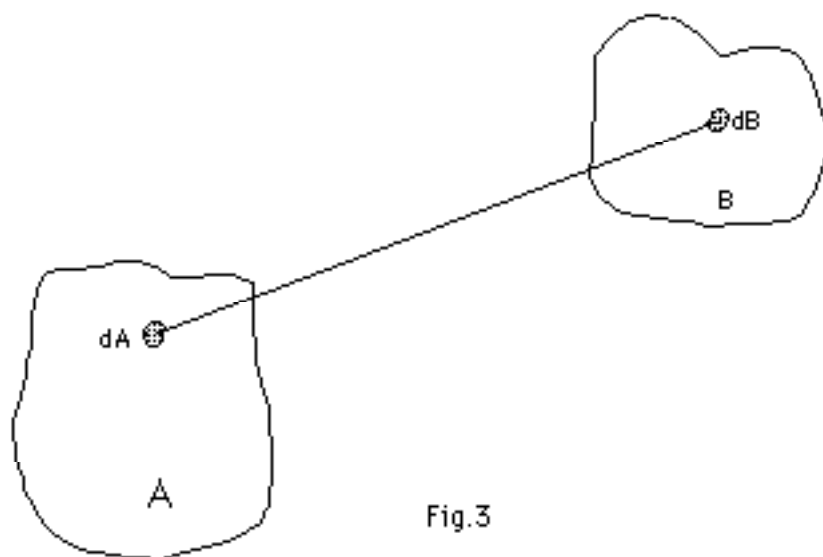
L'osservazione sperimentale, in quanto tale, verifica la validità dell'equazione $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ entro i limiti degli errori sperimentali, ed è "vera" solo entro quei limiti! Il fatto che, migliorando la precisione della misura, non si sia arrivati mai a contraddirla, induce a fare il passo logico di assumere tale eguaglianza "sempre vera", cioè senza limiti. Ecco la nascita del "Principio"!

Il Principio di sovrapposizione ci consente, a partire dalla forza di Coulomb, di scrivere l'espressione della forza elettrica agente fra due cariche comunque estese, poste a distanza qualsiasi l'una dall'altra.

Per trattare problemi di cariche estese è opportuno premettere il concetto di densità di carica. La densità di carica $\rho(\mathbf{x})$ associata ad un qualunque corpo carico è definita in modo che tale densità, moltiplicata per l'elemento di volume infinitesimo centrato intorno al punto \mathbf{x} , fornisca la quantità di carica infinitesima che si trova in tale volumetto:

$$dq = \rho(\mathbf{x}) d^3x$$

Supponiamo adesso di avere due corpi carichi A e B, ed indichiamo rispettivamente con ρ_A e ρ_B le densità di carica relative al corpo A e al corpo B.



Per il principio di sovrapposizione, possiamo valutare la forza elettrica che agisce, per esempio, sul corpo A a causa del corpo B, immaginando di dividere sia A che B in volumetti infinitesimi d^3x e d^3y e calcolando quindi la forza come la somma (integrale) delle forze infinitesime che si manifestano fra le cariche infinitesime

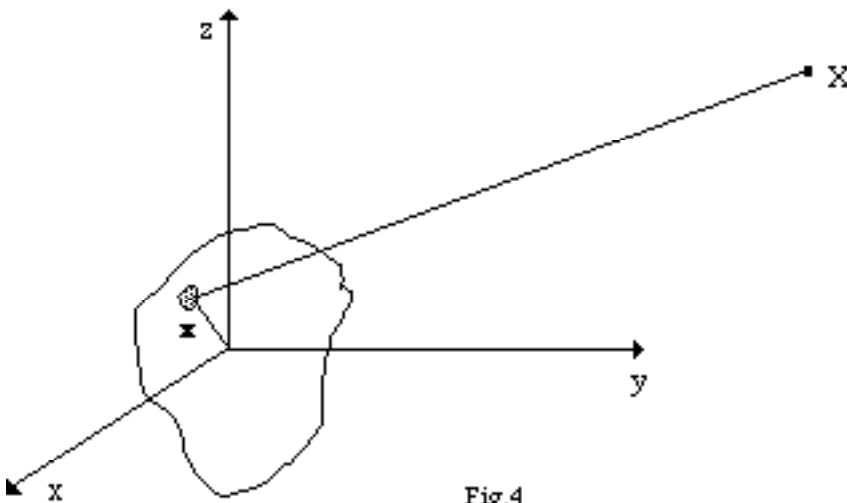
$dA = \rho_A(\mathbf{x}) d^3x$ e $dB = \rho_B(\mathbf{y}) d^3y$ presenti in tali volumetti infinitesimi, per le quali, avendo esse dimensioni trascurabili rispetto alla loro distanza, varrà la legge di Coulomb. Avremo dunque

$$\mathbf{F}_A = \int \frac{dA \, dB \, (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{4 \pi \epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = \int \frac{\rho_A(\mathbf{x}) \rho_B(\mathbf{y}) \, (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d^3x \, d^3y}{4 \pi \epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}$$

1.4 Il campo elettrico

Un'altra conseguenza importante del principio di sovrapposizione lineare delle forze elettrostatiche è la possibilità che esso ci fornisce di definire il campo elettrico.

Abbiamo già visto come da tale principio e dall'espressione della forza di Coulomb si giunga a scrivere l'espressione della forza elettrostatica agente fra due cariche comunque estese a qualsivoglia distanza l'una dall'altra. Supponiamo di avere un corpo A su cui è distribuita la carica elettrica secondo una densità di carica $\rho_A(\mathbf{x})$ e di voler determinare la forza che questo corpo esercita su una carica puntiforme q posta in una certa posizione \mathbf{X} . Chiaramente avremo



$$\mathbf{F} = \int \frac{q \rho_A(\mathbf{x}) (\mathbf{X} - \mathbf{x}) d^3x}{4 \pi \epsilon_0 |\mathbf{X} - \mathbf{x}|^3} = q \int \frac{\rho_A(\mathbf{x}) (\mathbf{X} - \mathbf{x}) d^3x}{4 \pi \epsilon_0 |\mathbf{X} - \mathbf{x}|^3}$$

Se cambiamo soltanto il valore della carica puntiforme q nel punto \mathbf{X} , la forza \mathbf{F} cambierà semplicemente in proporzione a q , comunque sia complessa la distribuzione di carica del corpo A.

Risulta quindi naturale definire la funzione vettoriale

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) \equiv \int \frac{\rho_A(\mathbf{x}) (\mathbf{X} - \mathbf{x}) d^3x}{4 \pi \epsilon_0 |\mathbf{X} - \mathbf{x}|^3} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) / q$$

come la grandezza fisica che caratterizza la distribuzione di carica ρ_A , per quanto concerne le azioni elettriche da essa prodotte sulle altre cariche nello spazio.

Questa funzione vettoriale si chiama **"campo elettrico"** prodotto dalla carica A: esso è definito in tutto lo spazio ed è univocamente determinato (e, come vedremo, determina...) dalla densità di carica del corpo A.

Il valore di questa funzione nei dintorni del punto \mathbf{x} è tutto ciò che dobbiamo conoscere per poter valutare, senza necessità di sapere alcunché di altro, quale sarà la forza elettrostatica \mathbf{F} , causata dal corpo A, agente su una qualunque carica q posta in \mathbf{x} (sempre che la presenza di quest'ultima non alteri la distribuzione della carica su A...)

Per il principio di sovrapposizione lineare, la forza elettrostatica che la presenza della carica A determinerà su una carica B, comunque estesa, sarà dunque data da

$$\mathbf{F}_B = \int \mathbf{E}_A(\mathbf{x}) \rho_B(\mathbf{x}) d^3x$$

Nel caso particolare di una carica puntiforme q , che, senza perdita di generalità, possiamo pensare posta nell'origine del sistema di coordinate, il campo elettrico che essa genera è dato semplicemente dalla relazione

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 |\mathbf{x}|^2} \mathbf{n}(\mathbf{x})$$

dove il versore $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ è definito come

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$$

1.5 La Legge di Gauss

Immaginiamo di avere una carica puntiforme q posta nell'origine del sistema di riferimento e consideriamo una superficie sferica Σ di raggio r , centrata anch'essa nell'origine. Calcoliamo il flusso del campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ attraverso tale superficie. Dalla definizione di flusso che abbiamo dato si ha

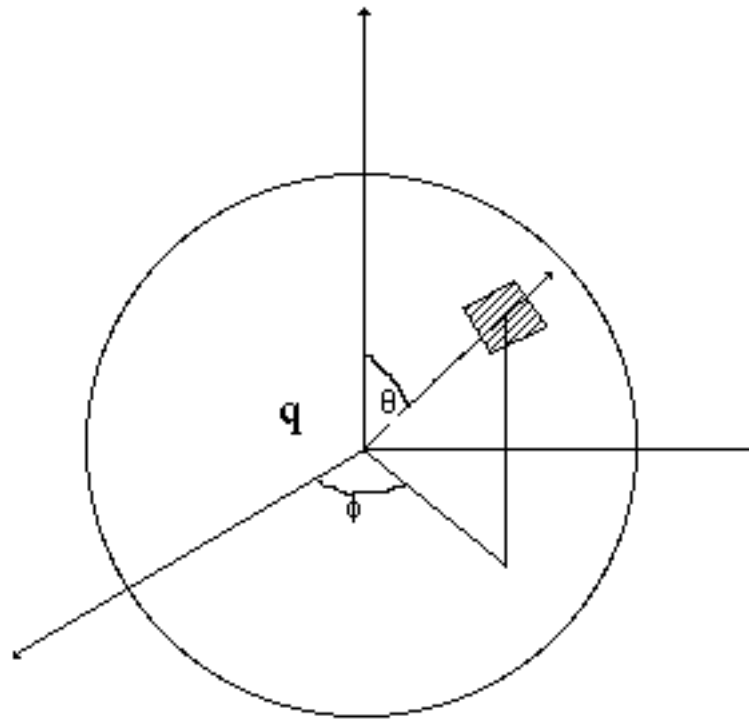


Fig. 5

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \int_{\Sigma} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\sigma = \int_{\Sigma} q (4 \pi \epsilon_0 r^2)^{-1} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\sigma$$

in coordinate polari (r, θ, ϕ) risulta $d\sigma = r \sin \theta \, d\phi \, r \, d\theta = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ dunque

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = q (4 \pi \epsilon_0 r^2)^{-1} \int r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = q \epsilon_0^{-1}$$

Come si vede il flusso non dipende dal raggio della superficie sferica in quanto la dipendenza dalla distanza come r^{-2} della forza di Coulomb (proprietà fisica) viene esattamente compensata dal fatto che la superficie della sfera è proporzionale ad r^2 (proprietà geometrica).

Consideriamo ora una superficie chiusa qualsiasi Σ che contenga la carica puntiforme q al suo interno. Possiamo sempre trovare una sfera di raggio opportuno, avente centro sulla carica e che sia tutta interna alla superficie data. Osserviamo che qualunque elemento di superficie

$d\Sigma$ sulla superficie assegnata individua univocamente un elemento $d\sigma$ sulla superficie della sfera scelta, attraverso la proiezione di $d\Sigma$ rispetto al polo costituito dal punto dove si trova la carica q . Ogni "mappatura" della superficie data Σ individua biunivocamente una "mappatura" sulla superficie sferica centrata sulla carica q e viceversa.

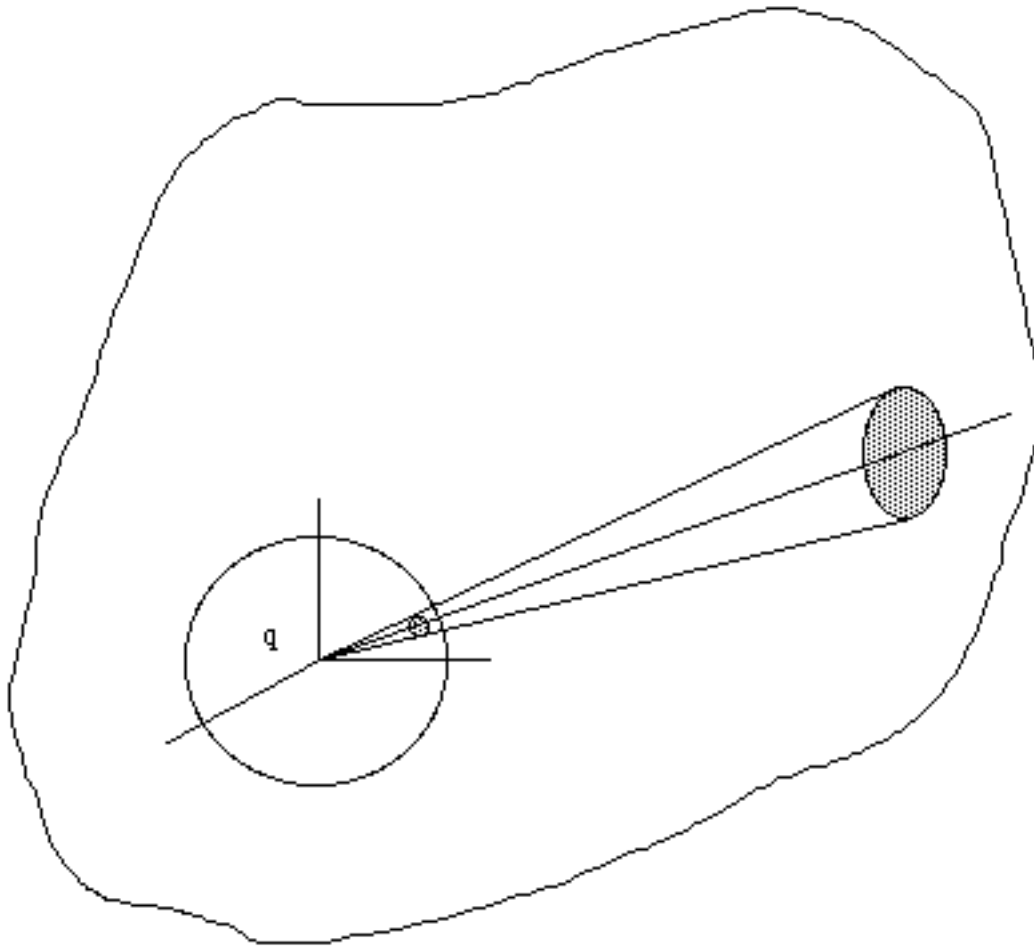


Fig. 6

Consideriamo dunque un elemento di superficie orientato $d\Sigma$. Questo elemento di superficie è posto ad una distanza R (variabile, in generale, al variare di $d\Sigma$) dalla carica puntiforme q , ed il vettore $d\Sigma$ formerà un angolo α con la direzione radiale \mathbf{n} , che è quella del campo elettrico in $d\Sigma$. L'elemento di flusso $d\Phi_{d\Sigma}(\mathbf{E})$ vale, per definizione

$$d\Phi_{d\Sigma}(\mathbf{E}) = \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot d\Sigma = E(\mathbf{R}) d\Sigma \cos \alpha = q (4 \pi \epsilon_0 R^2)^{-1} d\Sigma \cos \alpha$$

mentre l'elemento di flusso di \mathbf{E} attraverso $d\sigma$, cioè attraverso l'elemento di superficie sferica associata a $d\Sigma$ "proiettivamente", vale

$$d\Phi_{d\sigma}(\mathbf{E}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\sigma = q (4 \pi \epsilon_0 r^2)^{-1} d\sigma$$

D'altronde $d\Sigma \cos \alpha$ è la proiezione della superficie $d\Sigma$ sul piano ortogonale al versore \mathbf{n} , e semplici considerazioni geometriche mostrano che

$$d\Sigma \cos \alpha = d\sigma \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

quindi, sostituendo, si ottiene che i due flussi infinitesimi sono uguali.

Integrando allora sulla intera superficie Σ , risulta che il flusso del campo elettrico attraverso di essa è uguale a quello attraverso la superficie sferica centrata sulla carica; e dunque, per quanto abbiamo già visto, ne segue che il flusso del campo elettrico generato da una carica puntiforme q attraverso una qualsiasi superficie chiusa Σ che abbia la carica al suo interno vale sempre

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = q \epsilon_0^{-1}$$

Vediamo ora che cosa succede se la carica puntiforme q , invece, è esterna alla superficie chiusa Σ . Questo significa che q non si trova nel volume V individuato da Σ . Aggiungiamo allora a V un opportuno volume finito V' , connesso al volume V , in modo che $V+V'$ contenga adesso la carica q . Il volume V' sarà limitato dalla superficie Σ' , la quale, per il fatto che V e V' sono connessi, dovrà avere una parte, che chiameremo σ , comune con Σ . Indichiamo con Σ'' la superficie totale "esterna" che limita il volume $V+V'$ e poniamo

$$\Sigma_1 = \Sigma'' \cap \Sigma$$

$$\Sigma_2 = \Sigma'' \cap \Sigma'$$

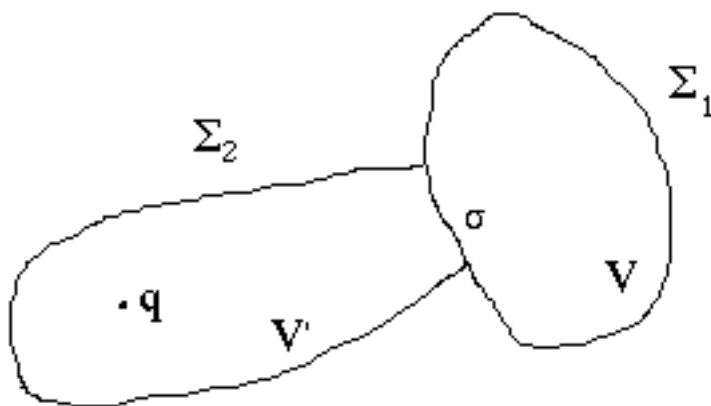


Fig. 7

Risulta che, se decidiamo per esempio che σ sia orientata secondo la normale uscente dal volume V (il risultato è indipendente dalla scelta...), è

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{E}) + \Phi_{\sigma}(\mathbf{E})$$

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \Phi_{\Sigma_2}(\mathbf{E}) - \Phi_{\sigma}(\mathbf{E}) = q \epsilon_0^{-1}$$

ed è altresì

$$\Phi_{\Sigma''}(\mathbf{E}) = \Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{E}) + \Phi_{\Sigma_2}(\mathbf{E}) = q \epsilon_0^{-1}$$

per cui, sottraendo quest'ultima equazione dalla seconda delle precedenti, abbiamo

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \Phi_{\Sigma 1}(\mathbf{E}) + \Phi_{\sigma}(\mathbf{E}) = 0$$

Dunque il contributo al flusso attraverso una superficie chiusa Σ del campo elettrico \mathbf{E} prodotto da una carica puntiforme q ad essa esterna è nullo.

Consideriamo adesso il caso di una carica estesa, descritta dalla densità di carica $\rho(\mathbf{x})$. Per il principio di sovrapposizione lineare, il campo elettrico generato da quella carica è uguale alla somma vettoriale dei campi elettrici elementari prodotti dalle cariche infinitesime $dq = \rho(\mathbf{x}) dv$ che costituiscono la carica stessa.

Consideriamo allora una qualunque superficie chiusa Σ e sia V il volume che essa delimita: qualunque carica elementare che si trovi al suo interno contribuirà con

$dq \epsilon_0^{-1} = \rho(\mathbf{x}) dv \epsilon_0^{-1}$ al flusso di \mathbf{E} attraverso Σ , mentre qualunque carica che sia esterna a V non contribuirà al flusso. Dunque avremo in definitiva che

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \epsilon_0^{-1} \int_V \rho(\mathbf{x}) dv = Q_{\text{int}} \epsilon_0^{-1}$$

Questo risultato va sotto il nome di Legge di Gauss e vale, come abbiamo visto, per ogni distribuzione di carica e per ogni superficie chiusa: in ogni caso il flusso del campo elettrico dalla superficie chiusa Σ è pari ad ϵ_0^{-1} volte la carica contenuta in tale volume!

A questa legge si può dare anche una forma "locale", cioè non integrale, attraverso il teorema della divergenza (attenzione a non confondere la legge di Gauss, che è una legge fisica, con il teorema della divergenza o teorema di Gauss, che è un teorema di matematica...) il quale, come ben sappiamo, afferma che, per ogni campo vettoriale (e quindi anche per il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{x})$), risulta

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \int_V \text{div}(\mathbf{E}) dv$$

Ne segue che, qualunque sia il volume V , risulta sempre

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \epsilon_0^{-1} \int_V \rho(\mathbf{x}) dv = \int_V \text{div}(\mathbf{E}) dv$$

ovvero

$$\text{div}(\mathbf{E})(\mathbf{x}) = \epsilon_0^{-1} \rho(\mathbf{x}) \Rightarrow \text{div } \mathbf{E} = \epsilon_0^{-1} \rho$$

Questa legge è nota come "**Prima equazione di Maxwell**" ed esprime, in forma differenziale, la legge di Gauss che, come abbiamo visto, è "figlia" del principio di sovrapposizione lineare e della legge di Coulomb.

Esercizio 1

Calcolare il campo elettrico prodotto da una sfera di raggio R_0 , nella quale è distribuita uniformemente in tutto il volume una carica totale Q .

Soluzione:

Per ragioni di simmetria il campo elettrico non può avere che direzione radiale e dipendere solo dalla distanza r dal centro della distribuzione di carica.

Applicando la legge di Gauss ad una sfera di raggio $r > R_0$ otteniamo che

$$\begin{aligned}\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) &= \int_{\Sigma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \, d\sigma = \int_{\Sigma} E(r) \, d\sigma = E(r) \int_{\Sigma} d\sigma = 4\pi r^2 E(r) \\ &= \epsilon_0^{-1} Q_{\text{int}} = \epsilon_0^{-1} Q\end{aligned}$$

ovvero, quando $r > R_0$, il modulo del campo elettrico è tale che

$$E(r) = Q/(4\pi \epsilon_0 r^2)$$

e, come si è detto sopra, è radiale. Ne segue che il campo elettrico \mathbf{E} all'esterno della sfera è lo stesso di quello prodotto dall'intera carica concentrata nel centro della stessa.

All'interno della sfera, l'argomento di simmetria si applica ugualmente ma Q_{int} non è più l'intera carica Q , bensì quella contenuta entro la sfera di raggio r e vale

$$Q_{\text{int}} = Q(r/R_0)^3$$

per cui, quando invece $r < R_0$, risulta

$$E(r) = Q r / (4\pi \epsilon_0 R_0^3) = r \rho (3\epsilon_0)^{-1}$$

essendo la densità di carica pari a $\rho = 3Q/(4\pi R_0^3)$.

Si osservi che il campo elettrico è una funzione continua del raggio ed il suo modulo assume il suo valor massimo proprio per $r=R_0$, laddove vale $|Q|/(4\pi \epsilon_0 R_0^2)$.

Esiste un ovvio parallelo fra il calcolo di $\mathbf{E}(r)$ nelle condizioni di simmetria sopra dette ed il calcolo del campo di accelerazione $\mathbf{g}(r)$ determinato, per esempio, dal campo gravitazionale terrestre all'esterno di essa.

La Terra è infatti, con buona approssimazione, sferica (schiacciamento : $1/298.3 \cong 0.3\%$) e, anche se non è omogenea, è pur vero che la densità è, con buona approssimazione, solo funzione della distanza dal centro della Terra (perché basta questa condizione?...).

Detta M la massa dell'intera Terra, risulta dunque

$$g(r) = G M r^{-2}$$

Domanda 1: perché questa formula dice che $g=g(r)$, mentre, usualmente, si dice che g è costante ($=9.81 \text{ m/s}^2$) ?

Domanda 2: Nota la costante di gravitazione universale G ed il raggio medio della Terra, dalla misura di g si può determinarne la massa della Terra ?

Esercizio 2

Calcolare il campo elettrico prodotto da una sfera di raggio R_0 , uniformemente carica con una carica totale Q disposta solo sulla superficie e discuterne la continuità.

Soluzione:

All'esterno della sfera il risultato è come nell'esercizio 1; all'interno della sfera in campo elettrico è nullo, ovvero esso è discontinuo sulla superficie della sfera.

Esercizio 3

Calcolare il campo elettrico prodotto da un piano infinito avente densità superficiale di carica pari a σ . Cosa succede nel caso di due piani paralleli a distanza D , uno avente densità di carica σ e l'altro $-\sigma$?

Soluzione:

Il campo elettrico, per ragioni di simmetria, è ortogonale al piano, infatti immaginiamo che E abbia una componente non ortogonale al piano, dunque giacente nel piano parallelo al piano di carica passante per il punto considerato. Ruotando il piano di carica intorno all'asse passante per quel punto ed ortogonale al piano stesso, la componente in questione dovrebbe ruotare anch'essa, mentre la distribuzione di carica, in definitiva, non muta ...

Concluso così che il campo deve essere ortogonale al piano, dalla legge di Gauss si ricava

$$E = |\sigma| / (2\epsilon_0)$$

Nel caso poi dei due piani carichi con densità uguali in modulo ma di segno opposto, basta usare il principio di sovrapposizione per scoprire che il campo è nullo all'esterno dei piani e raddoppia rispetto al valore di cui sopra, all'interno degli stessi ...

Esercizio 4

Calcolare il campo elettrico prodotto da un filo di raggio r , infinitamente lungo, che possiede una densità lineare di carica λ .

Soluzione:

Il campo ha simmetria cilindrica ed è diretto radialmente. Infatti non può avere una componente lungo l'asse del filo perché, ruotando sopra/sotto il filo, questa dovrebbe seguire la rotazione e quindi invertirsi, mentre la situazione di carica resta, alla fine, la stessa. Analogamente non può avere una componente nel piano ortogonale all'asse del filo che sia diversa da quella radiale, perché, per parità (riflessione) nel piano che contiene il filo, la distribuzione di carica non cambia mentre la componente in questione dovrebbe cambiar di segno.

Una volta stabilito che il campo è necessariamente radiale, dalla legge di Gauss si ricava

$$E = |\lambda| / (2\pi \epsilon_0 r)$$

1.6 Il campo elettrico è conservativo

Ripartiamo dal caso di due cariche puntiformi, che chiameremo rispettivamente Q e q , ed immaginiamo che Q sia fissa nell'origine del nostro sistema di riferimento mentre q possa invece essere spostata.

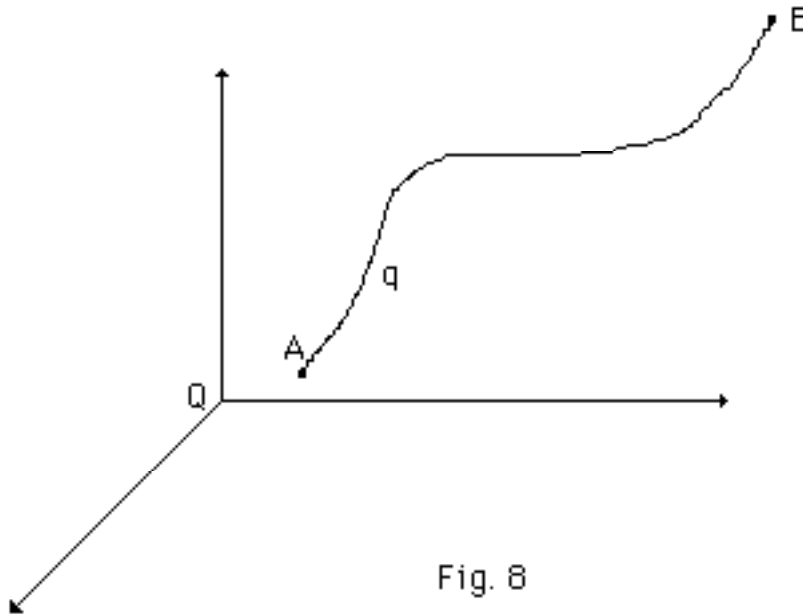


Fig. 8

Inizialmente sia q nel punto A , di coordinata \mathbf{x}_A , e la si porti nel punto B di coordinata \mathbf{x}_B , procedendo lungo la curva generica Γ , che ha per estremi i punti A e B . Immaginiamo anche di procedere per stati di equilibrio, cioè opponendo costantemente alla forza di Coulomb \mathbf{F}_c , una forza meccanica \mathbf{F}_m ad essa uguale ed opposta.

Per definizione, il lavoro L che faremo sulla carica q con la nostra forza \mathbf{F}_m sarà pari a

$$L = \int_{\Gamma} \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\Gamma} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} = -qQ(4\pi\epsilon_0)^{-1} \int_{\Gamma} r^{-2} (\mathbf{r}/r) \cdot d\mathbf{s}$$

dove $d\mathbf{s}$ è l'elemento di linea orientata da A a B . Geometricamente è ovvio che risulta comunque $(\mathbf{r}/r) \cdot d\mathbf{s} = dr$; dunque l'integrale di cui sopra vale

$$\int_{\Gamma} r^{-2} (\mathbf{r}/r) \cdot d\mathbf{s} = \int_{R_A}^{R_B} r^{-2} dr = -(1/R_B - 1/R_A) = (1/R_A - 1/R_B),$$

per cui si ha

$$L = qQ(4\pi\epsilon_0)^{-1} (1/R_B - 1/R_A)$$

Verifichiamo in particolare che, per esempio, se q e Q sono concordi (le due cariche si respingono...) allora il lavoro meccanico L è positivo se $R_B < R_A$ ovvero se avviciniamo q a Q : in questo caso dobbiamo infatti spingere la carica nel verso del moto.

Il risultato importante è che **L è indipendentemente dal cammino scelto !**

Si osservi che questa conclusione non richiede che l'andamento della forza di Coulomb con la distanza sia proprio r^{-2} , ma solo che sia radiale, ovvero del tipo

$$\mathbf{F}_c = -qQ f(r) \mathbf{r}$$

Una conseguenza immediata del fatto che il lavoro compiuto sulla carica non dipende dal cammino scelto ma solo dai punti iniziale e finale è che il lavoro complessivamente fatto sulla carica q per compiere un percorso chiuso nel campo elettrico prodotto da un'altra carica puntiforme è comunque nullo.

$$0 = \int \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} = q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Osserviamo adesso che se la carica Q invece che puntiforme è una carica estesa, definita dalla densità di carica $\rho(\mathbf{x})$, per il campo elettrico $d\mathbf{E}$ generato da ogni carica elementare $dq = \rho(\mathbf{x}) dv$ vale la conclusione di cui sopra circa l'integrale ciclico, e quindi, per il principio di sovrapposizione lineare, qualunque sia la distribuzione di carica che lo ha generato, avremo sempre che, su un percorso chiuso

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Questa conclusione si esprime dicendo che il campo elettrostatico è un campo conservativo. Come abbiamo visto, questa proprietà discende

- a) dal fatto che la forza fra due cariche puntiformi sia proporzionale ad una funzione della loro distanza e sia diretta secondo la loro congiungente;
- b) dalla validità del principio di sovrapposizione lineare per le forze elettrostatiche.

(Per il campo gravitazionale, vale lo stesso risultato...)

Possiamo esprimere questa proprietà del campo elettrico anche in forma differenziale, usando il Teorema di Stokes.

Come abbiamo già detto, questo Teorema afferma che l'integrale su una linea chiusa del prodotto scalare di un campo vettoriale per l'elemento di linea orientata è uguale all'integrale del rotore del campo, fatto su una qualsivoglia superficie che abbia come bordo la linea di cui sopra e sia orientata in conseguenza dell'orientazione stabilita sulla linea stessa.

$$\int \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \text{rot}(\mathbf{u}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Essendo dunque che, data una qualunque linea chiusa, è

$$\int \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

ne segue che, in tutto lo spazio, deve essere

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

Questa è la "**Seconda equazione di Maxwell**" per il campo elettrostatico: essa esprime semplicemente, in forma differenziale, il fatto che il campo elettrostatico è conservativo.

1.7 Il potenziale elettrostatico

Possiamo adesso, sfruttando proprio la conservatività del campo \mathbf{E} , introdurre la nozione di Potenziale elettrostatico generato da una carica.

Riprendiamo il caso della carica puntiforme q nel campo della carica puntiforme Q , che, senza perdita di generalità, possiamo supporre che sia posta nell'origine del nostro sistema di riferimento.

Abbiamo visto che per andare da A a B con la carica q occorre spendere un lavoro meccanico (contro la forza di Coulomb)

$$L = - \int_{\Gamma} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} = qQ(4\pi\epsilon_0)^{-1} (1/R_B - 1/R_A)$$

dove R_A ed R_B sono le distanze di q da Q quando q è in A e quando q è in B , rispettivamente. Poiché il lavoro L dipende solo dalle coordinate del punto iniziale e finale e non dal percorso, per quanto già imparato in Meccanica, possiamo definire l'energia potenziale $U(\mathbf{P})$ della carica q nel punto \mathbf{P} , dovuta alla presenza della carica Q , come l'integrale di linea

$$U(\mathbf{P}) = - \int \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_{\mathbf{P}} U(\mathbf{P}) = -\mathbf{F}_c(\mathbf{P}) \quad (*)$$

effettuato fra un punto fisso qualsiasi \mathbf{P}_0 ed il punto \mathbf{P} in esame, secondo una qualunque curva (differenziabile) che li unisca. Nel nostro caso, per quanto visto sopra, sarà

$$U(\mathbf{P}) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} q Q/r + \text{cost}$$

dove r è la distanza fra il punto \mathbf{P} e la carica Q e la costante "cost" dipende solo dalla scelta del punto \mathbf{P}_0 ed è comunque irrilevante, poiché dell'energia potenziale usiamo, alla fine, sempre differenze... Per questo motivo "cost" viene posta di solito uguale a zero, e questo corrisponde ad assumere \mathbf{P}_0 molto lontano (all'infinito) dalla carica Q (che supporremo distribuita solo al finito).

Se al posto della carica puntiforme Q ne abbiamo due, Q_1 e Q_2 , essendo il campo elettrico globale \mathbf{E} la somma vettoriale dei due campi elettrici \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 prodotti da Q_1 e Q_2 separatamente (il principio di sovrapposizione, di nuovo...),

(*) Si ha infatti

$$U(\mathbf{P}+\Delta\mathbf{x}) = U(\mathbf{P}) + \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{P}+\Delta\mathbf{x}} \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{s}$$

e dunque

$$U(\mathbf{P}+\Delta\mathbf{x}) - U(\mathbf{P}) = \mathbf{F}_m \cdot \Delta\mathbf{x}$$

ovvero, per la definizione stessa di gradiente

$$\nabla_{\mathbf{P}} U(\mathbf{P}) = \mathbf{F}_m(\mathbf{P}) = -\mathbf{F}_c(\mathbf{P}) \quad \text{c.v.d.}$$

avremo

$$\mathbf{F}_c = q \mathbf{E} = q (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \Rightarrow \int \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s}$$

ovvero l'energia potenziale di una carica puntiforme nel campo di altre cariche puntiformi è una funzione additiva.

$$U(\mathbf{P}) = U_1(\mathbf{P}) + U_2(\mathbf{P})$$

Come conseguenza, se la carica Q invece che puntiforme è estesa e descritta dalla densità $\rho(\mathbf{x})$, l'energia potenziale di una carica puntiforme q nel campo della carica estesa Q sarà

$$U(\mathbf{P}) = \int dU(\mathbf{P}) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} q \int dQ(\mathbf{y})/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

dove $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ è la distanza fra la carica $dQ = \rho(\mathbf{x}) dv$ posta nel punto \mathbf{y} e la carica puntiforme q posta nel punto \mathbf{P} .

Osserviamo che anche per l'energia potenziale di una carica puntiforme accade l'analogo di quanto già visto per la forza elettrostatica: U è una funzione lineare nel valore della carica "di prova" q . Possiamo dunque scrivere U come il prodotto del valore della carica q per una funzione, che chiameremo $V(\mathbf{x})$, la quale dipende solo dalla distribuzione della carica Q e dal punto \mathbf{x} dove si trova la carica q , ma non dal suo valore. Così come avevamo introdotto la nozione di campo elettrico \mathbf{E} , possiamo introdurre ora quella di **Potenziale elettrostatico** V prodotto dalla distribuzione di carica $\rho(\mathbf{x})$.

Per definizione si ha

$$V(\mathbf{x}) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int dQ(\mathbf{y})/|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int [\rho(\mathbf{y}) / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|] d^3y \quad (**)$$

Ricordiamo che il potenziale, così come l'energia potenziale, è definito a meno di una costante: nella definizione di cui sopra si assume che il potenziale all'infinito prodotto dalla distribuzione di carica data (presunta diversa da zero solo al finito) si annulli.

L'unità di misura nel SI del potenziale elettrostatico è il Volt.

Dalla definizione risulta in particolare che l'energia potenziale di una carica puntiforme q nel punto \mathbf{x} , dovuta alla presenza di una carica estesa Q vale

$$U(\mathbf{x}) = q V(\mathbf{x})$$

Dato il modo come siamo giunti al potenziale V , non stupirà che ci sia un legame strettissimo con il campo elettrico \mathbf{E} . Abbiamo già visto che

$$\nabla U = -\mathbf{F}_c = -q \mathbf{E}$$

$$\nabla U = q \nabla V$$

dunque risulta

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

e si ha altresì che (con la solita condizione di annullamento all'infinito, valida per distribuzioni di carica diverse da zero solo al finito...)

$$V(\mathbf{x}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{x}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Esempio: Una carica puntiforme Q , che assumeremo posta nell'origine del sistema di assi coordinati, produce, come sappiamo, un campo elettrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = Q(4\pi\epsilon_0 r^2)^{-1} \mathbf{n}$$

dove il versore \mathbf{n} è definito come $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Sostituendo nell'espressione di sopra del potenziale V e ricordando che $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{s} = dr$, risulta allora

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= - \int_{\infty}^{\mathbf{x}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - Q(4\pi\epsilon_0)^{-1} \int_{\infty}^{\mathbf{x}} r^{-2} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{s} = - Q(4\pi\epsilon_0)^{-1} \int_{\infty}^{\mathbf{x}} r^{-2} dr \\ &= - Q(4\pi\epsilon_0)^{-1} \left[-r^{-1} \right]_{\infty}^{\mathbf{x}} = Q(4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}|)^{-1} \end{aligned}$$

che è l'espressione del potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme.

In generale, abbiamo potuto esprimere il campo \mathbf{E} come gradiente di una funzione scalare perché il campo \mathbf{E} è conservativo: d'altronde avevamo già osservato che il fatto che \mathbf{E} fosse conservativo era sinonimo del fatto che il campo \mathbf{E} fosse irrotazionale (seconda equazione di Maxwell). Vediamo adesso come questo risultato matematico risulti evidente dal fatto che \mathbf{E} sia esprimibile come gradiente di un campo scalare.

Risulta infatti, in generale che, data comunque una funzione scalare $f(\mathbf{x})$, è

$$\mathbf{rot grad} f \equiv (\partial_y \partial_z f(\mathbf{x}) - \partial_z \partial_y f(\mathbf{x}), \partial_z \partial_x f(\mathbf{x}) - \partial_x \partial_z f(\mathbf{x}), \partial_y \partial_x f(\mathbf{x}) - \partial_x \partial_y f(\mathbf{x})) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{rot} \mathbf{E} \equiv - \mathbf{rot grad} V = 0$$

Se usiamo ora anche la prima equazione di Maxwell, ricaviamo

$$\text{div} \mathbf{E} = \epsilon_0^{-1} \rho \Rightarrow \text{div} \mathbf{grad} V = \nabla^2 V = - \epsilon_0^{-1} \rho$$

dove ∇^2 è l'operatore differenziale scalare "laplaciano" già incontrato in idrodinamica, definito da

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

L'equazione differenziale del 2° ordine per il potenziale V di sopra, si chiama "equazione di Poisson" ed ha come soluzione generale l'espressione (**) della pagina precedente (se si richiede anche la condizione che V si annulli all'infinito...).

Esercizio 1

Calcolare il potenziale elettrostatico prodotto da una sfera di raggio R_0 , nella quale è distribuita uniformemente in tutto il volume una carica totale Q .

Soluzione:

Abbiamo già visto che l'andamento del campo elettrico nel problema in questione è radiale e che varia nel modo seguente:

$$E(r) = Q r / (4\pi \epsilon_0 R_0^3) \quad \text{quando } r < R_0$$

$$E(r) = Q / (4\pi \epsilon_0 r^2) \quad \text{quando } r > R_0$$

Per calcolare l'andamento del potenziale basta ricordare che

$$V(\mathbf{x}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{x}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{x}}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

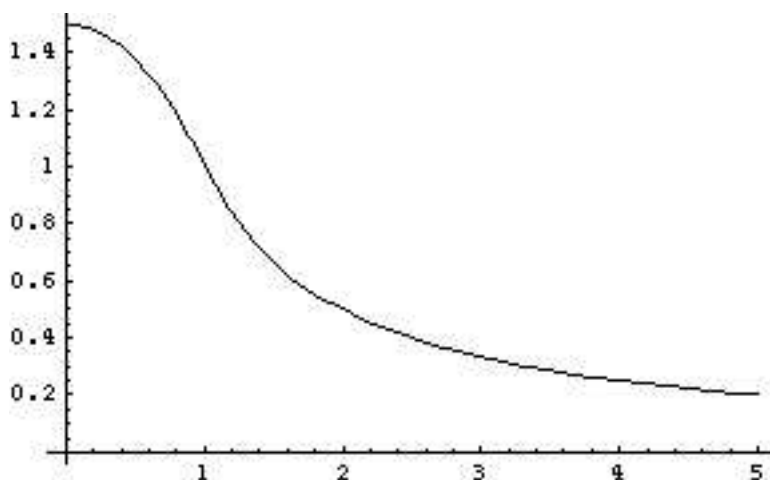
per cui, integrando sulla retta che passa per il punto \mathbf{x} e per il centro della sfera carica, dal punto \mathbf{x} all'infinito, essendo $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(r) dr$ risulta

$$V(r) = Q / (4\pi \epsilon_0 r) \quad \text{quando } r > R_0$$

$$V(r) = 3Q / (8\pi \epsilon_0 R_0) - Q r^2 / (8\pi \epsilon_0 R_0^3) \quad \text{quando } r < R_0$$

Si noti che

- a) il potenziale effettivamente si annulla all'infinito;
- b) il potenziale è monotono (ovvero l'andamento radiale del campo elettrico è sempre dello stesso segno...)
- c) è continuo in $r = R_0$.



Il grafico mostra l'andamento del potenziale diviso per $Q / (4\pi \epsilon_0)$, in funzione di r/R_0 .

Esercizio 2

Calcolare il potenziale elettrostatico prodotto da una sfera di raggio R_0 , sulla cui superficie è distribuita uniformemente una carica totale Q .

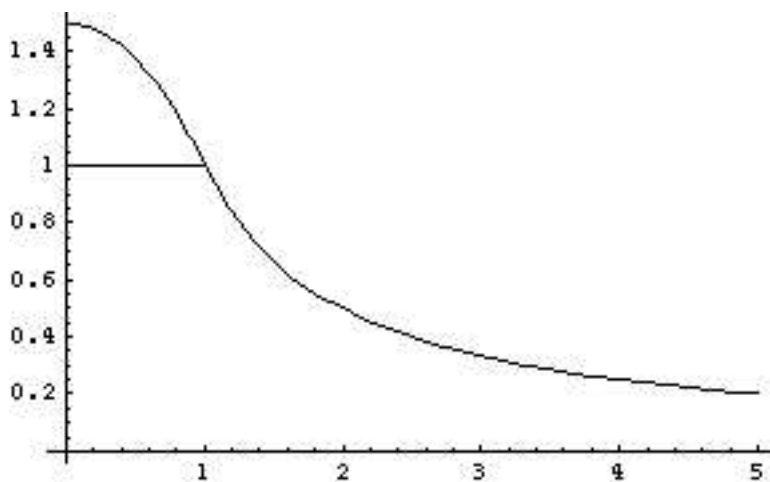
Soluzione:

Per $r > R_0$ non cambia niente rispetto al caso precedente, proprio perché il campo elettrico all'esterno è lo stesso; mentre per $r < R_0$ il potenziale è costante (essendo il campo nullo all'interno della superficie sferica), e quindi abbiamo

$$V(r) = Q/(4\pi \epsilon_0 r) \quad \text{quando } r > R_0$$

$$V(r) = Q/(4\pi \epsilon_0 R_0) \quad \text{quando } r < R_0$$

Nella figura sottostante è rappresentato l'andamento (normalizzato ad 1 per $r = R_0$) dei potenziali prodotti sia dalla distribuzione di carica di volume che di superficie, in funzione della variabile r/R_0 .



Esercizio 3

Calcolare l'andamento radiale del potenziale elettrostatico prodotto da un filo rettilineo infinitamente lungo, di raggio r_0 , sul quale è assegnata una distribuzione superficiale di carica $\sigma > 0$.

Soluzione:

Si noti che la carica non è distribuita solo al finito, quindi la consueta convenzione secondo la quale il potenziale si annulla all'infinito non può essere invocata...

Il campo elettrico è nullo all'interno del filo e, al suo esterno, vale

$$E(r) = (2\pi r_0 h \sigma) / (2\pi r h \epsilon_0) = \sigma r_0 / (r \epsilon_0)$$

Otteniamo dunque (rispetto al bordo del filo e quindi al suo interno...)

$$V(r) = - \sigma r_0 \epsilon_0^{-1} \ln(r/r_0)$$

Si osservi che il potenziale è comunque decrescente quando ci si allontana dal filo (forza repulsiva sulla carica di prova, essendo $\sigma > 0$...).

Esercizio 4

Calcolare la velocità acquistata da un elettrone ($e = 1.60217733 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg) dopo che ha attraversato una ddp di 2 kV, partendo da fermo.

Se il campo elettrico è uniforme e si estende su una lunghezza L di 20 cm, quanto tempo ha impiegato per attraversare la ddp?

Soluzione:

$$\frac{1}{2} m v^2 = e \Delta V \Rightarrow v = (2e \Delta V / m)^{1/2} = 2.652 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$a = eE/m = e \Delta V / mL \Rightarrow a = 1.759 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow t = v/a = 1.508 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

1.8 Energia di un sistema di cariche

Abbiamo visto che una carica puntiforme q posta nel punto \mathbf{x} possiede, a causa della presenza di un'altra carica Q comunque estesa, una energia potenziale U pari a

$$U = q V(\mathbf{x})$$

dove $V(\mathbf{x})$ è il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione di carica associata al corpo avente carica complessiva Q .

Immaginiamo ora di avere due cariche A e B , entrambe estese, descritte rispettivamente dalle distribuzioni di carica $\rho_A(\mathbf{x})$ e $\rho_B(\mathbf{y})$.

Ci poniamo il problema di valutare l'energia potenziale di una carica nel campo dell'altra.

A ciascuna carica infinitesima $dq_A(\mathbf{x}) = \rho_A(\mathbf{x}) d^3x$ costituente il corpo A potremo applicare il risultato ottenuto nel caso in cui una delle due cariche sia puntiforme, ottenendo così

$$U_{AB} = \int dq_A(\mathbf{x}) V_B(\mathbf{x}) = \int \rho_A(\mathbf{x}) V_B(\mathbf{x}) d^3x$$

dove $V_B(\mathbf{x})$ è, beninteso, il potenziale elettrostatico nel punto \mathbf{x} , prodotto dalla carica B , cioè, secondo quanto visto precedentemente

$$V_B(\mathbf{x}) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int \rho_B(\mathbf{y}) d^3y / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

per cui è

$$U_{AB} = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int d^3x d^3y \rho_A(\mathbf{x}) \rho_B(\mathbf{y}) / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

Chiaramente l'espressione ottenuta dell'energia U_{AB} risulta simmetrica nello scambio

$A \leftrightarrow B$ e questo ci autorizza a parlare sia di energia potenziale della carica A nel campo della carica B come pure di energia potenziale della carica B nel campo della carica A . Più concisamente e più correttamente, possiamo parlare di U come dell'energia di interazione fra le due cariche A e B .

Il suo significato fisico, infatti, è quello di misurare il lavoro che occorre compiere contro le forze elettrostatiche (coulombiane) per portare le due cariche A e B in presenza una dell'altra, partendo dalla situazione in cui esse sono infinitamente lontane e quindi, non si influenzano reciprocamente, cioè sono "asintoticamente libere".

Veniamo ora al caso in cui si voglia conoscere l'energia di interazione di tre cariche A , B , e C . Immaginiamo dunque che A si trovi già nella posizione finale, mentre B e C siano dapprima lontanissime da A e l'una dall'altra, per cui l'energia di interazione del sistema delle tre cariche può considerarsi nulla. Cominciamo a portare B , per esempio, in presenza di A , nella posizione finale della configurazione che stiamo considerando. Per fare questo, occorrerà compiere un lavoro contro il campo generato da A , e quindi l'energia potenziale del sistema sarà (come abbiamo già visto)

$$U_{AB} = \int \rho_B(\mathbf{x}) V_A(\mathbf{x}) d^3x = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int d^3x d^3y \rho_A(\mathbf{x}) \rho_B(\mathbf{y}) / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

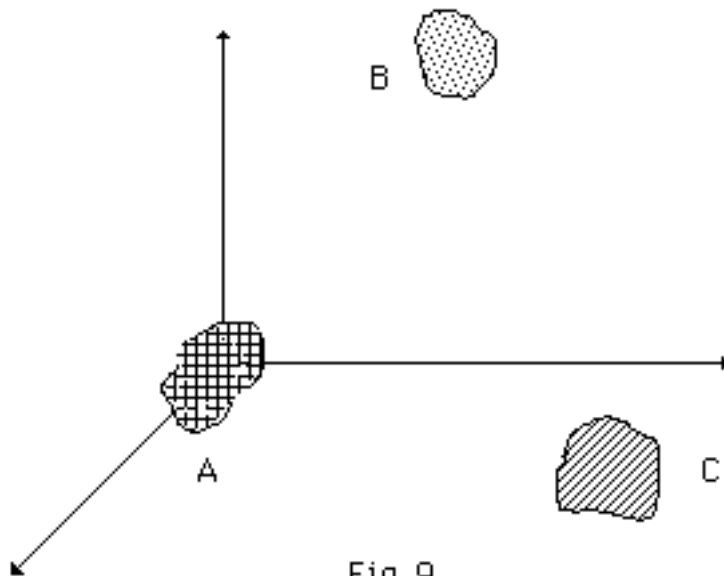


Fig. 9

Portiamo adesso anche C nella sua posizione finale, in presenza del sistema $A \cup B$: in completa analogia con quanto sopra, avremo

$$U_{C(AB)} = \int \rho_C(\mathbf{z}) V_{AB}(\mathbf{z}) d^3z$$

ma dalla definizione del potenziale segue immediatamente che

$$V_{AB}(\mathbf{z}) = V_A(\mathbf{z}) + V_B(\mathbf{z})$$

per cui è immediato che

$$U_{C(AB)} = U_{CA} + U_{CB}$$

ovvero, l'energia di interazione del sistema delle tre cariche risulta ($U_{CA} = U_{AC}$!!!)

$$U = U_{AB} + U_{AC} + U_{BC} = 1/2(U_{AB} + U_{BA} + U_{AC} + U_{CA} + U_{BC} + U_{CB})$$

Si osservi che l'espressione ottenuta è simmetrica nello scambio fra le cariche e quindi U risulta essere effettivamente indipendente dall'ordine secondo cui le cariche sono state riunite insieme.

Si noti che, se non fosse stato così, non avremmo potuto parlare correttamente di energia di interazione del sistema, ma avremmo dovuto specificare anche l'ordine secondo il quale il sistema era stato messo insieme...

Chiaramente, se invece di tre cariche A, B, C ne abbiamo n , cioè abbiamo a che fare con il sistema di cariche A_1, A_2, \dots, A_n , semplicemente iterando quanto fatto per il sistema delle tre cariche, concluderemo che l'energia di interazione del sistema vale

$$U = 1/2 \sum_{i \neq j} U_{ij}$$

dove U_{ij} è l'energia di interazione della carica A_i con la carica A_j nella posizione in cui si trovano nel sistema considerato, e cioè

$$U_{ij} = \int \rho_i(\mathbf{x}) V_j(\mathbf{x}) d^3x$$

essendo $\rho_i(\mathbf{x})$ la densità di carica del corpo i-esimo ed essendo $V_j(\mathbf{x})$ il potenziale elettrostatico prodotto nello spazio dalla carica j-esima.

Fin'ora abbiamo sempre parlato di "energia di interazione" di un sistema di cariche; adesso vogliamo studiare invece l'energia potenziale complessiva associata al sistema di cariche.

Sono la stessa cosa?

No, perchè l'energia di interazione prescinde dall'energia potenziale di ciascuna carica in assenza delle altre, mentre l'energia potenziale complessiva del sistema dovrà naturalmente tenerne conto !

Siamo condotti dunque al problema di valutare l'energia potenziale associata ad una carica A assegnata, definita da una certa distribuzione di carica $\rho(\mathbf{x})$ qualsiasi. Assumeremo comunque che $\rho(\mathbf{x})$ sia diversa da zero solo al finito.

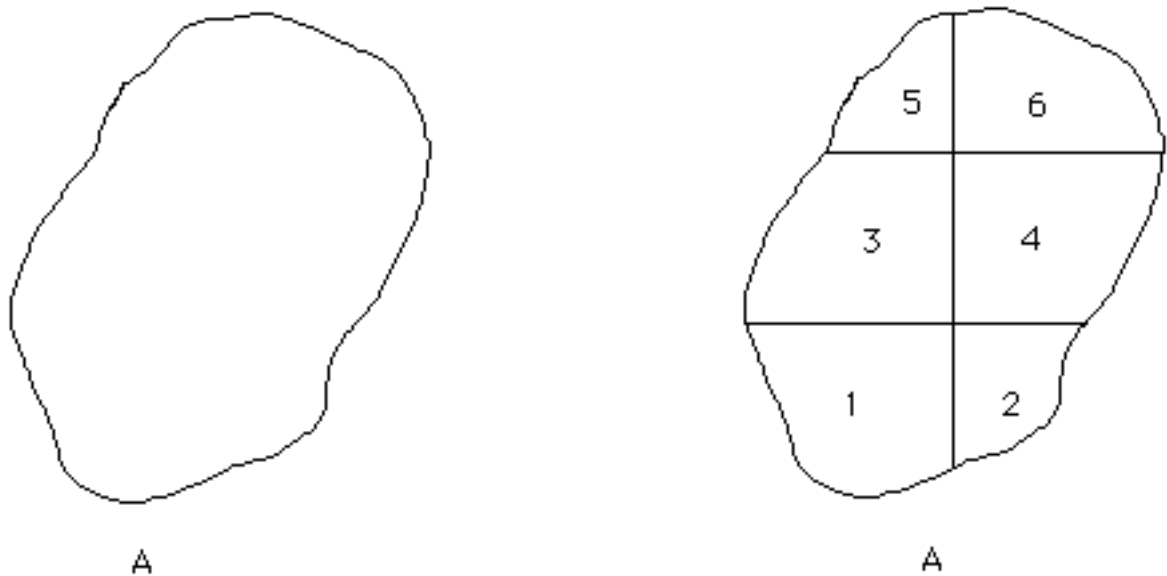


Fig.10

Immaginiamo, idealmente, di dividere la carica A in varie parti A_1, A_2, \dots, A_n : per quanto visto poch'anzi l'energia di interazione delle varie parti fra loro è

$$U = 1/2 \sum_{i \neq j} U_{ij}$$

dove

$$U_{ij} = \int \rho_i(\mathbf{x}) V_j(\mathbf{x}) d^3x$$

essendo $\rho_i(\mathbf{x})$ la densità di carica nella partizione i-esima del corpo (coincidendo quindi in tale parte con ρ ed essendo nulla altrove) ed essendo $V_j(\mathbf{x})$ il potenziale elettrostatico prodotto dalla partizione j-esima. Risulta quindi

$$\begin{aligned} U &= 1/2 \sum_{i \neq j} \int \rho_i(\mathbf{x}) V_j(\mathbf{x}) d^3x = \\ &= 1/2 \sum_{ij} \int \rho_i(\mathbf{x}) V_j(\mathbf{x}) d^3x - 1/2 \sum_i \int \rho_i(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}) d^3x = \\ &= 1/2 \sum_i \int \rho_i(\mathbf{x}) \sum_j V_j(\mathbf{x}) d^3x - 1/2 \sum_i \int \rho_i(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}) d^3x \end{aligned}$$

ma

$$\sum_j V_j(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$$

dove $V(\mathbf{x})$ è il potenziale elettrostatico prodotto nel punto \mathbf{x} da tutta la carica descritta dalla distribuzione $\rho(\mathbf{x})$, per cui è

$$\begin{aligned} U &= 1/2 \sum_i \int \rho_i(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x - 1/2 \sum_i \int \rho_i(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}) d^3x = \\ &= 1/2 \int \sum_i \rho_i(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x - 1/2 \sum_i \int \rho_i(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}) d^3x = \\ &= 1/2 \int \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x - 1/2 \sum_i \int \rho_i(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}) d^3x \end{aligned}$$

Nel limite in cui la partizione del corpo tende all'infinito ($n \rightarrow \infty$), la seconda sommatoria tende a zero poichè il numero degli addendi cresce linearmente con n , ma il loro valore decresce come $n^{-5/3}$. Infatti l'integrale

$$\int \rho_i(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}) d^3x = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int d^3x d^3y \rho_i(\mathbf{x}) \rho_i(\mathbf{y}) / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

scala come $(\delta q_i)^2/r$, dove r è la dimensione caratteristica del volumetto dove si trova la carica δq_i distribuita secondo ρ_i . Chiaramente mentre $(\delta q_i)^2$ scala come $1/n^2$, la dimensione caratteristica r va come il volume alla $1/3$, ovvero come $(1/n)^{1/3}$ per cui otteniamo che l'integrale scala come $n^{-5/3} \dots$ (c.v.d.).

Infittendo indefinitamente la partizione della carica data otteniamo dunque che l'energia di interazione delle varie parti fra loro diviene

$$U = 1/2 \int \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x$$

la quale, a buon diritto, rappresenta l'energia potenziale complessiva associata alla carica data, cioè l'energia che è servita per "costruirla" (cioè per metterla insieme ...), partendo da cariche infinitesime non interagenti.

Si osservi come risulti chiaro adesso chi rappresenta la quantità

$$1/2 \sum_i \int \rho_i(\mathbf{x}) V_i(\mathbf{x}) d^3x$$

Si tratta semplicemente della somma delle energie potenziali di ciascuna partizione, presa a se stante: chiaramente l'energia del sistema è questa stessa quantità più l'energia di interazione delle varie parti tra loro, cioè, di nuovo, abbiamo, senza bisogno di passare al limite per $n \rightarrow \infty$, che

$$U = 1/2 \int \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x = (8\pi\epsilon_0)^{-1} \int d^3x d^3y \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y}) / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

rappresenta l'energia elettrostatica associata ad una generica distribuzione di carica ρ .

Ricordiamo adesso che esiste un legame fra il potenziale $V(\mathbf{x})$ e la distribuzione di carica che lo produce, e precisamente che

$$\nabla^2 V = -\epsilon_0^{-1} \rho$$

Sostituendo, abbiamo quindi

$$U = 1/2 \int \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x = -1/2 \epsilon_0 \int V(\mathbf{x}) \cdot \nabla^2 V(\mathbf{x}) d^3x$$

ma

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) \cdot \nabla^2 V(\mathbf{x}) &= \partial_i \{ V(\mathbf{x}) \cdot \partial_i V(\mathbf{x}) \} - \partial_i V(\mathbf{x}) \cdot \partial_i V(\mathbf{x}) \\ &= \text{div} \{ V(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} V(\mathbf{x}) \} - |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \end{aligned}$$

per cui, sostituendo, si ha

$$\begin{aligned} U &= -1/2 \epsilon_0 \int \{ \text{div} (V(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} V(\mathbf{x})) - |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \} d^3x = \\ &= 1/2 \epsilon_0 \int \{ \text{div} (V(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})) + |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \} d^3x = \\ &= 1/2 \epsilon_0 \int \text{div} \{ V(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \} d^3x + 1/2 \epsilon_0 \int |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 d^3x \end{aligned}$$

Ma il primo integrale, usando il teorema della divergenza, si trasforma in un'integrale del flusso del vettore $V(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})$ attraverso la superficie all'infinito, che è appunto quella che racchiude il volume dove tale integrale della divergenza doveva essere calcolato (cioè tutto lo spazio...). Ovvero, se Σ è una superficie sferica di raggio r centrata nell'origine del sistema di riferimento, risulta

$$\int \text{div} (V(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})) d^3x = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} V(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\sigma$$

D'altronde, se la distribuzione di carica è diversa da zero solo al finito (come abbiamo ammesso...), ed è distribuita intorno all'origine del nostro sistema di coordinate, allora, allontanandoci indefinitamente da essa, la carica si comporterà asintoticamente come se fosse puntiforme e concentrata nell'origine, ovvero il potenziale si annullerà come R^{-1} , mentre il campo come R^{-2} e siccome la superficie di integrazione va, naturalmente, come R^2 , il contributo ad U di quell'integrale sarà nullo. Dunque abbiamo infine

$$U = 1/2 \int \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x = 1/2 \epsilon_0 \int |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 d^3x$$

ovvero l'energia elettrostatica associata ad una densità di carica qualsiasi ρ può anche essere scritta come l'integrale esteso a tutto lo spazio della quantità $\epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2$ che, a buon diritto, deve essere quindi interpretata come "densità di energia elettrostatica"

$$u(\mathbf{x}) = (1/2) \epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2.$$

Si osservi che l'energia potenziale elettrostatica di una qualsiasi distribuzione di carica è sempre positiva, ovvero qualunque sia la distribuzione di carica, per metterla insieme partendo da cariche infinitesime asintoticamente libere, cioè non interagenti occorre comunque spendere energia. Si noti invece che l'energia di interazione fra due cariche può essere sia positiva che negativa (dipende se sono di segno concorde o discorde...): quando si considera però anche l'energia di ciascuna carica, allora la somma è positiva.

Esercizio 1

Calcolare l'energia elettrostatica di una carica Q uniformemente distribuita in una sfera di raggio R_0 .

Soluzione:

Partiamo dalla definizione

$$U = 1/2 \int \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x = 1/2 \epsilon_0 \int |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 d^3x$$

Usiamo la seconda definizione: si ha

$$U = 1/2 \epsilon_0 \int_0^R [Q r / (4\pi \epsilon_0 R_0^3)]^2 r^2 dr d\Omega + 1/2 \epsilon_0 \int_R^\infty [Q / (4\pi \epsilon_0 r^2)]^2 r^2 dr d\Omega$$

ovvero, integrando sull'angolo solido, si ha

$$\begin{aligned} &= 1/(8\pi \epsilon_0) \int_0^R [Q^2/R_0^6] r^4 dr + 1/(8\pi \epsilon_0) \int_R^\infty Q^2 r^{-2} dr = \\ &= Q^2 / (8\pi \epsilon_0) [1/5 R_0^{-1} + R_0^{-1}] = 3 Q^2 / (20 \pi \epsilon_0 R_0) \end{aligned}$$

Domanda:

A parità di carica totale e di raggio è più grande l'energia potenziale di una distribuzione di carica uniforme solo sulla superficie della sfera oppure uniforme nel volume?

1.9 Sviluppo del potenziale in multipoli

Vogliamo verificare l'affermazione secondo la quale un corpo carico, visto a grande distanza, si comporta approssimativamente come una carica puntiforme. Abbiamo visto che, in simmetria sferica, questo è vero esattamente almeno fino a distanze dal centro della carica non inferiori al raggio della sfera su cui è distribuita.

Vediamo adesso cosa succede nel caso di una distribuzione di carica generica e quali sono i principali termini correttivi al potenziale coulombiano di cui possiamo aspettarci di dover tener conto se siamo "abbastanza" distanti dalla carica, ma non infinitamente lontani.

Immaginiamo dunque che sia data una distribuzione di carica $\rho(\mathbf{y})$ al finito, ed occupiamoci del potenziale V che essa produce a grande distanza (noto il potenziale è noto il campo elettrico!...). Risulta

$$V(\mathbf{x}) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int \rho(\mathbf{y}) d^3y / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

dove l'integrazione, a priori, avviene su tutto lo spazio, ma, essendo la carica non nulla solo al finito, avviene nel volume dove è distribuita la carica...

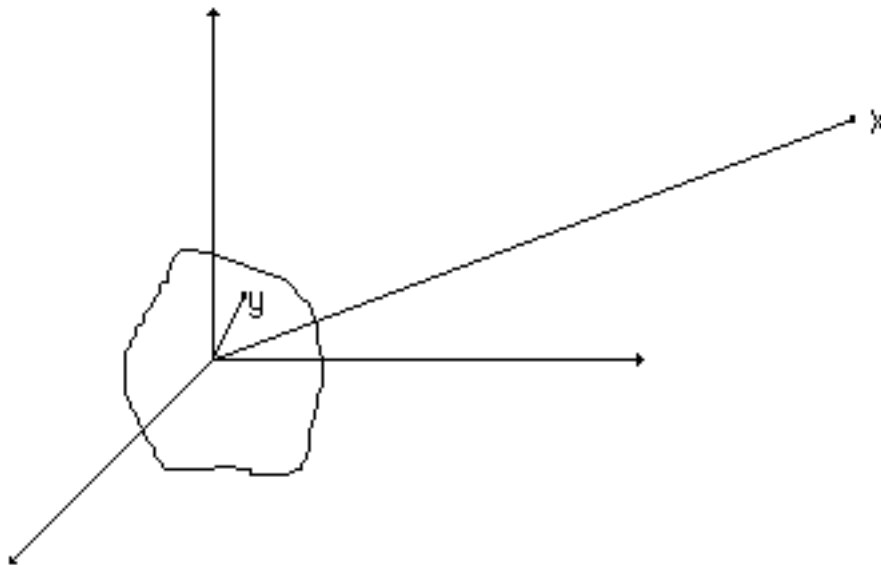


Fig. 11

Scegliamo il sistema di coordinate in modo che abbia l'origine nel corpo stesso e sia $|\mathbf{x}| \equiv R$. Sostituiamo il fattore $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}$ con il suo sviluppo in serie di Taylor, valutato intorno al punto $|\mathbf{y}| = 0$. Risulta

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} = |\mathbf{x}|^{-1} + y_k \partial_k |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} \Big|_{\mathbf{y}=0} + 1/2 y_j y_k \partial_j \partial_k |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} \Big|_{\mathbf{y}=0} + \dots$$

D'altronde è

$$\partial_k |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} \Big|_{\mathbf{y}=0} = x_k |\mathbf{x}|^{-3} ; \quad \partial_j \partial_k |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} \Big|_{\mathbf{y}=0} = (3x_j x_k - \delta_{jk} |\mathbf{x}|^2) |\mathbf{x}|^{-5}$$

e siccome risulta

$$(3x_j x_k - \delta_{jk} |\mathbf{x}|^2) y_j y_k = (3y_j y_k - \delta_{jk} |\mathbf{y}|^2) x_j x_k$$

si ha

$$V(\mathbf{x}) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int \rho(\mathbf{y}) d^3y \left\{ |\mathbf{x}|^{-1} + y_k x_k |\mathbf{x}|^{-3} + 1/2 (3y_j y_k - \delta_{jk} |\mathbf{y}|^2) x_j x_k |\mathbf{x}|^{-5} + \dots \right\}$$

ovvero, ricordando che $|\mathbf{x}| \equiv R$ e che sia R che x_k non dipendono dalle variabili di integrazione, risulta

$$V(\mathbf{x}) = (4\pi\epsilon_0 R)^{-1} \int \rho(\mathbf{y}) d^3y + (4\pi\epsilon_0)^{-1} x_k R^{-3} \int y_k \rho(\mathbf{y}) d^3y + \\ + 1/2 (4\pi\epsilon_0)^{-1} x_j x_k R^{-5} \int (3y_j y_k - \delta_{jk} |\mathbf{y}|^2) \rho(\mathbf{y}) d^3y + \dots$$

Come si vede, gli integrali contengono funzioni che dipendono ormai solo dalla distribuzione di carica e non dal punto dove si vuole conoscere il potenziale!

Si riconosce immediatamente che il primo integrale vale niente altro che la carica totale Q . Si chiama anche con il termine di "momento di monopolo elettrico" ed è, naturalmente, uno scalare:

$$\int \rho(\mathbf{y}) d^3y = Q$$

Il secondo integrale si trasforma invece come un vettore: è chiamato "momento di dipolo elettrico \mathbf{P} " associato alla distribuzione $\rho(\mathbf{y})$:

$$\int y_k \rho(\mathbf{y}) d^3y = P_k$$

Analogamente il terzo integrale è un tensore simmetrico a due indici, noto come "momento di quadrupolo elettrico \mathbf{Q} "

$$\int (3y_j y_k - \delta_{jk} |\mathbf{y}|^2) \rho(\mathbf{y}) d^3y = Q_{jk}$$

e così di seguito...

Il potenziale generato dalla distribuzione di carica $\rho(\mathbf{y})$ nel punto \mathbf{x} ha dunque la forma seguente:

$$V(\mathbf{x}) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} Q/R + (4\pi\epsilon_0)^{-1} R^{-3} P_k x_k + 1/2 (4\pi\epsilon_0)^{-1} R^{-5} Q_{jk} x_j x_k + \dots$$

Come si vede, il termine di monopolo (scalare per rotazioni del sistema di riferimento) contribuisce al potenziale nel punto \mathbf{x} con un termine puramente coulombiano, come se la carica fosse tutta concentrata nell'origine del sistema di riferimento scelto.

Consideriamo il secondo termine, quello associato al momento di dipolo elettrico. Verifichiamo che questo potenziale coincide, a grandi distanze, con il potenziale prodotto da due cariche puntiformi $+q$ e $-q$, uguali ed opposte, disposte ad una distanza (orientata da $-$ a $+$) \mathbf{d} , tale che

$$\mathbf{P} = q \mathbf{d}$$

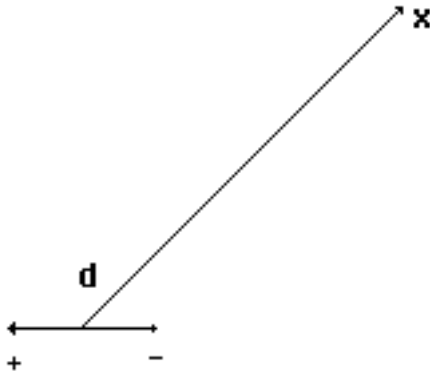


Fig.12

Risulta infatti (vedi Fig. 12) per $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{d}|$

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{x}) &= (4\pi\epsilon_0)^{-1} q / |\mathbf{-d/2 + x}| - (4\pi\epsilon_0)^{-1} q / |\mathbf{d/2 + x}| \\
 &= (4\pi\epsilon_0)^{-1} q / |\mathbf{x}| + (4\pi\epsilon_0)^{-1} 1/2 q \mathbf{d} \cdot \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3 - (4\pi\epsilon_0)^{-1} q / |\mathbf{x}| + \\
 &\quad + (4\pi\epsilon_0)^{-1} 1/2 q \mathbf{d} \cdot \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3 \\
 &= (4\pi\epsilon_0)^{-1} q \mathbf{d} \cdot \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3 = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3
 \end{aligned}$$

Si osservi che il momento di dipolo elettrico, per rotazioni del riferimento si trasforma come un vettore, mentre per traslazioni dell'origine degli assi esso è invariante solo se la carica totale è nulla. Infatti traslando l'origine degli assi del vettore \mathbf{v} (la coordinata y va in y' e la distribuzione di carica, nel nuovo riferimento, è $\rho'(\mathbf{y}') = \rho(\mathbf{y})$!!), risulta

$$\mathbf{P}' = \int \mathbf{y}' \rho'(\mathbf{y}') d^3y' = \int (\mathbf{y} + \mathbf{v}) \rho(\mathbf{y}) d^3y = \mathbf{P} + \mathbf{v} q$$

Risulta altresì chiaro che, quando $Q \neq 0$, si può sempre eliminare il contributo di dipolo attraverso una opportuna scelta del sistema di riferimento.

Un caso tipico in cui questo accade è nel caso del campo gravitazionale che, è descritto formalmente, da un potenziale perfettamente analogo: poichè le masse sono solo positive e dunque la massa totale M (analogo gravitazionale di Q) non può essere nulla, è sempre possibile scegliere il riferimento (mettendo l'origine nel baricentro della distribuzione di massa) in modo da annullare il contributo dipolare al potenziale ...

Ma tornando al caso elettrostatico, osserviamo che nel caso in cui $Q=0$, il potenziale generato a grandi distanze dalla distribuzione di carica, non possedendo il termine "di monopolio", sarà di tipo "di dipolo elettrico", ovvero andrà come R^{-2} e dunque il campo elettrico come R^{-3} .

Analogamente accade che, se $Q=0$ e anche $\mathbf{P}=0$, il potenziale a grande distanza è di quadrupolo elettrico, il quale va come R^{-3} mentre il campo decresce come R^{-4} .

Si osservi infine che solo se $Q=0$ allora \mathbf{P} è indipendente dal sistema di riferimento scelto e, analogamente, solo se $Q=0$ e $\mathbf{P}=0$ allora il momento di quadrupolo, a sua volta, non dipende dal sistema di riferimento, etc ...

1.10 Il dipolo elettrico

Abbiamo visto che un dipolo elettrico ideale è schematizzabile come l'insieme di due cariche puntiformi uguali ed opposte, poste ad una distanza \mathbf{d} piccola rispetto alla scala delle dimensioni che interessano.

Già sappiamo che, dal punto di vista meccanico, una carica elettrica puntiforme q posta in un punto \mathbf{x} di un campo elettrico sente una forza

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{x})$$

e possiede una energia potenziale

$$U = q V(\mathbf{x})$$

Vediamo adesso che cosa accade ad un dipolo elettrico di momento \mathbf{P} , posto nel punto \mathbf{x} . Con questa frase intendiamo dire che stiamo considerando due cariche puntiformi $+q$ e $-q$ poste rispettivamente in $\mathbf{x} + \mathbf{d}/2$ ed $\mathbf{x} - \mathbf{d}/2$ e vogliamo considerare il limite per $|\mathbf{d}| \rightarrow 0$, in modo però che il momento \mathbf{P} resti costante: questo corrisponde a considerare l'approssimazione di dipolo valida in tutto lo spazio... Cominciamo dalla **forza** \mathbf{F} . Sul dipolo avremo

$$\mathbf{F} = \lim_{|\mathbf{d}| \rightarrow 0} q [\mathbf{E}(\mathbf{x} + \mathbf{d}/2) - \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{d}/2)] = q \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{x})$$

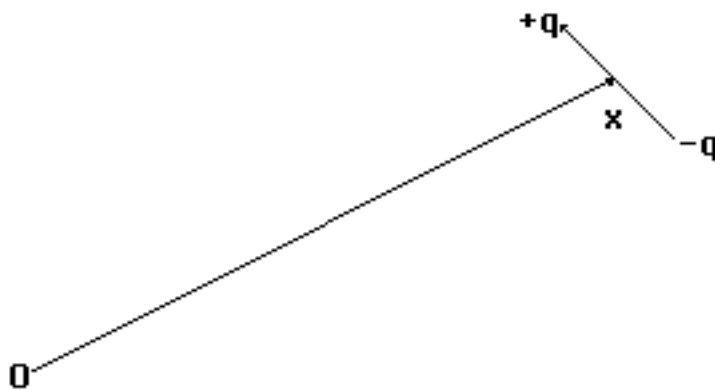


Fig. 13

ovvero, in termini di componenti, avremo (ricordiamo che \mathbf{E} è irrotazionale ...)

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{P}_j \partial_j \mathbf{E}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_j \partial_k \mathbf{E}_j(\mathbf{x}) = \partial_k (\mathbf{P}_j \mathbf{E}_j(\mathbf{x})) \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E})$$

Questa relazione mostra chiaramente, come d'altronde c'era da aspettarsi, che se il campo elettrico è uniforme, non c'è forza sul dipolo. Può invece esserci momento \mathbf{T} delle forze. Si ha infatti, dalla definizione di momento delle forze esterne, che

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (\mathbf{x} + \mathbf{d}/2) \times (q \mathbf{E}(\mathbf{x} + \mathbf{d}/2)) + (\mathbf{x} - \mathbf{d}/2) \times (-q \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{d}/2)) = \\ &= \mathbf{x} \times \mathbf{F} + \mathbf{d}/2 \times (q \mathbf{E}(\mathbf{x} + \mathbf{d}/2)) + (-\mathbf{d}/2) \times (-q \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{d}/2)) \\ &\approx \mathbf{x} \times \mathbf{F} + \mathbf{P} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

quindi, a meno che il momento di dipolo non sia parallelo o antiparallelo al campo elettrico, anche in campo uniforme esiste una coppia agente sul dipolo stesso, il cui modulo vale

$$T = P E(\mathbf{x}) \sin\theta$$

E veniamo adesso allo studio dell'energia potenziale di interazione di un dipolo quando si trova in un campo elettrostatico generico.

Sia $V(\mathbf{x})$ la funzione potenziale associata al campo in questione: da quanto detto precedentemente, l'energia potenziale del dipolo varrà

$$U = q V(\mathbf{x}+\mathbf{d}/2) - q V(\mathbf{x}-\mathbf{d}/2) = q \mathbf{d} \cdot \nabla V(\mathbf{x}) = - \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$$

da cui si conclude, in particolare, che essa è minima quando \mathbf{P} ed \mathbf{E} sono paralleli.

1.11 Elettrostatica di un conduttore

Quando si iniziò lo studio dei fenomeni elettrici, elettrizzando i corpi per strofinio, si scoprì rapidamente che alcuni corpi erano elettrizzabili ed altri apparentemente no...

Se prendiamo in mano un pezzo di plastica e lo strofiniamo con della stoffa, possiamo poi usarla per attrarre dei piccoli pezzetti di carta; ma se proviamo con una bacchetta metallica, difficilmente si riuscirà a vedere qualche effetto.

La ragione sta nel fatto che alcuni corpi come la plastica, il vetro, etc... sono isolanti o dielettrici, mentre altri, come appunto i metalli, sono conduttori. La differenza sta nel fatto che nei corpi isolanti le cariche **NON** sono libere di muoversi al suo interno, mentre nei conduttori **sì**.

Questo è dovuto alla loro struttura microscopica: nei metalli, ogni atomo mette circa un elettrone a disposizione di tutto il reticolo cristallino, legandosi agli altri attraverso un legame ionico, mentre negli isolanti questo non accade. Tipicamente in un metallo esistono dell'ordine di 10^{23} elettroni liberi per cm^3 (nella cosiddetta banda di conduzione), mentre in buoni isolanti questo numero può anche essere dell'ordine di poche unità.

Fra i conduttori e gli isolanti esistono poi i semiconduttori (silicio, germanio ...), nei quali si trovano mediamente, quando sono allo stato puro, dell'ordine di 10^{11} elettroni liberi per cm^3 : la loro principale caratteristica è che questo numero può essere modificato considerevolmente attraverso, per esempio l'aggiunta di impurezze (drogaggi), per riscaldamento, etc...

Trattiamo l'elettrostatica di un conduttore perfetto.

Una importante osservazione sperimentale è che in un conduttore isolato comunque carico **non si osserva nessun moto ordinato**, macroscopico, **di cariche** al suo interno, almeno in condizioni stazionarie...

Siccome sappiamo che al suo interno si trovano effettivamente delle cariche libere, il fatto che mediamente non si muovano significa che il campo elettrico medio al suo interno deve essere rigorosamente nullo.

D'altronde la legge di Gauss stabilisce che, fissata comunque una superficie chiusa Σ , è

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = q \epsilon_0^{-1}$$

dove q è la carica contenuta nel volume delimitato dalla superficie in questione. Dunque se Σ è una qualsiasi superficie chiusa tutta interna al conduttore, essendo \mathbf{E} nullo nel conduttore, sarà

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 0$$

ovvero la carica racchiusa nella superficie Σ sarà nulla. Data l'arbitrarietà completa nella scelta di Σ , con l'unico vincolo che sia interna al conduttore (vedi Fig.14a), ne segue che la densità di carica all'interno del conduttore deve essere identicamente nulla.

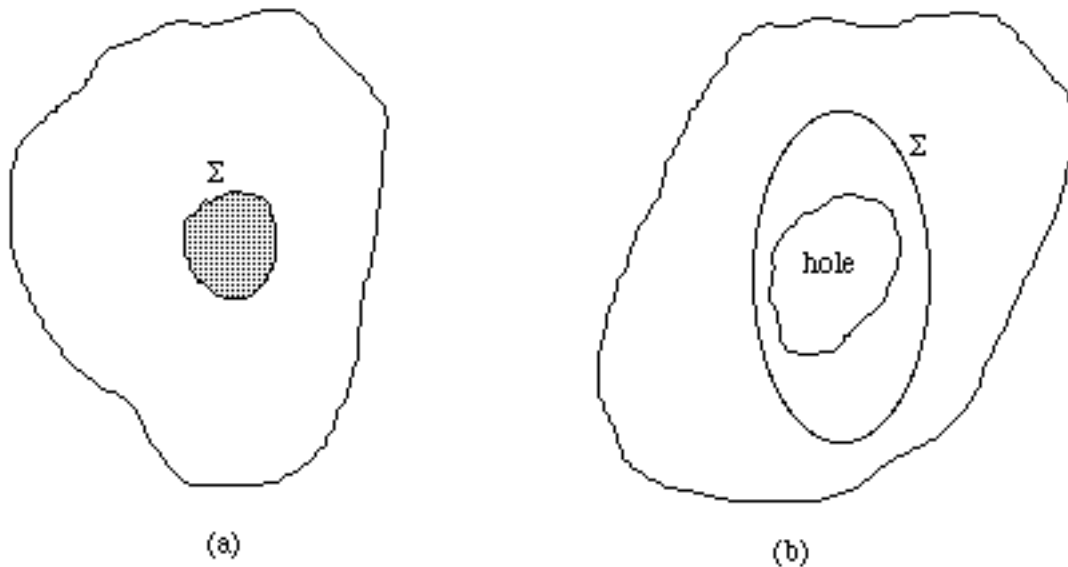


Fig. 14

Questo risultato non sembra in contraddizione con il fatto che, come abbiamo detto, in un conduttore ci sono elettroni liberi di muoversi, perché la loro carica, normalmente, è perfettamente bilanciata dalla carica degli ioni legati al reticolo cristallino (un atomo è neutro, anche se è fatto di cariche elettriche ...!).

Dunque se la carica non può stare all'interno di un conduttore, dovrà stare sulla sua superficie!

Osserviamo subito che questa deve essere la superficie esterna. Immaginiamo infatti che il nostro conduttore abbia un buco (vedi Fig.14b): usando una superficie Σ tutta interna al conduttore e tale da contornare il buco, si dimostra immediatamente che la carica totale sulla superficie interna del buco deve essere comunque nulla. Questo ancora non significa che essa sia localmente nulla ... Procediamo per assurdo. Immaginiamo che sulla superficie del buco ci siano cariche: debbono essercene di positive e di negative in ugual misura. Partiamo da un punto della superficie dove c'è carica positiva e dirigiamoci verso la zona della superficie del buco più vicina, dove si trova della carica negativa. Evidentemente su quel tratto di percorso orientato l'integrale di $\mathbf{E} d\mathbf{l}$ è positivo e non nullo. Chiudiamo il percorso all'interno del metallo, dove \mathbf{E} è nullo. Siamo arrivati all'assurdo che il campo \mathbf{E} non sarebbe conservativo...

Conclusione: all'interno di un conduttore (bucato o no), la densità di carica è identicamente nulla.

Come abbiamo visto, questa conclusione discende dal fatto che \mathbf{E} deve essere nullo nel conduttore.

Un'altra conseguenza ovvia di questa proprietà è che il potenziale elettrostatico V è lo stesso in tutto il conduttore.

1.12 Induzione elettrostatica

Immaginiamo di avere un conduttore cavo, inizialmente perfettamente scarico ed isolato, e di porlo in presenza di una carica esterna Q . Le cariche libere nel conduttore si adatteranno, dando luogo ad una densità superficiale di carica (sulla superficie esterna) in modo che il campo elettrico all'interno del corpo non cambi e resti nullo (buco compreso).

Si noti che il potenziale V , in generale, invece cambierà a seconda della posizione della carica esterna, rimanendo comunque costante all'interno del conduttore.

In sostanza, il conduttore si comporta come un perfetto schermo elettrostatico (vedi Fig.16a): le azioni elettriche provocate da corpi carichi al suo esterno non influenzano l'interno del conduttore.

Osserviamo che, mentre questo vale dall'esterno verso l'interno, non vale il viceversa.

Ripartiamo dal nostro conduttore bucato, perfettamente scarico ed isolato. Immaginiamo di disporre una carica Q all'interno del buco (vedi Fig. 16b),

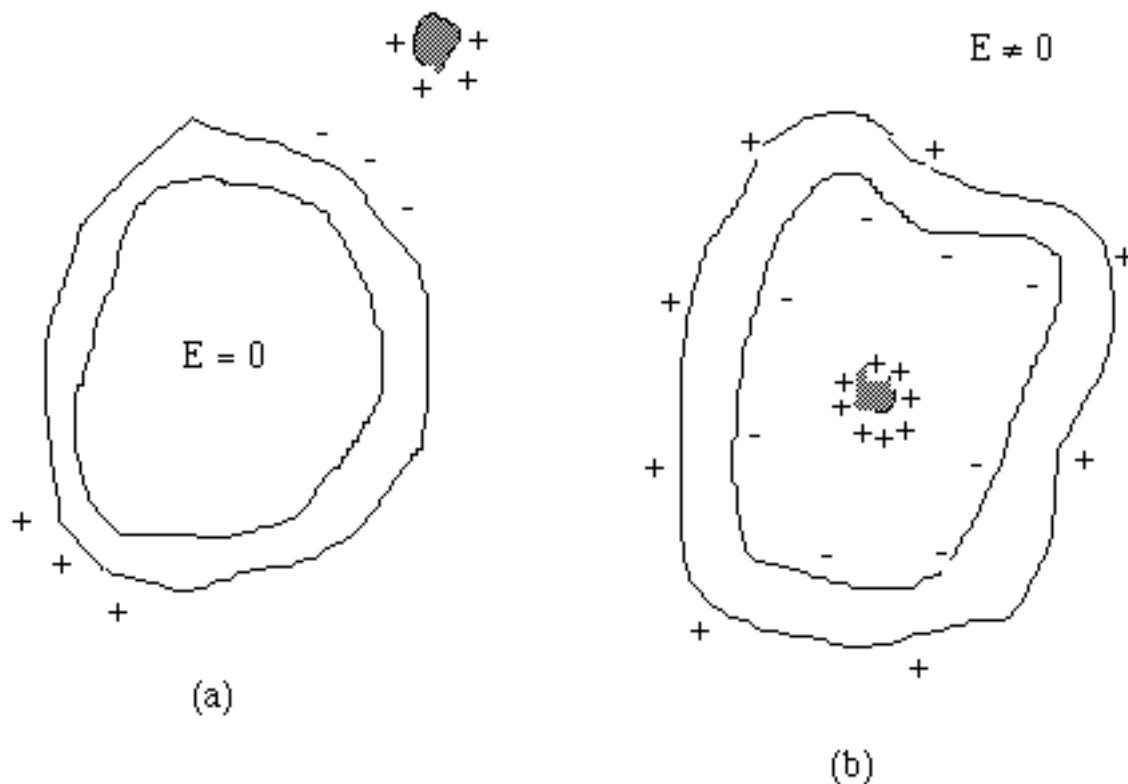


Fig. 16

Applicando di nuovo la legge di Gauss ad una superficie Σ interna al conduttore se ne conclude, visto che sappiamo che il corpo nel buco ha una carica complessiva Q , deve trovarsi una carica $-Q$ disposta sulla superficie interna del conduttore, cioè sulla parete che delimita il buco stesso.

Poiché, per ipotesi, il conduttore era inizialmente scarico, una carica $+Q$ deve trovarsi ormai sulla superficie esterna del conduttore e produrrà quindi un campo elettrico nell'ambiente esterno al conduttore. Si noti che, per il fenomeno dello schermo elettrostatico, possiamo modificare la carica

sulla superficie esterna del conduttore, per esempio, scaricandolo sommandogli la carica $-Q$; ma non si può, dall'esterno, alterare né la distribuzione né la carica totale sulla superficie interna.

Possiamo adesso chiederci come è nata la carica $-Q$ sulla superficie interna del conduttore.

Chiaramente il corpo che si trova nel conduttore produce un campo elettrico intorno a sé: nel momento in cui esso viene racchiuso dal conduttore, poiché nel conduttore non può sussistere campo elettrico, si manifesteranno degli spostamenti di cariche (correnti) al suo interno per garantire che il campo torni ad essere nullo. I tempi caratteristici sono dell'ordine delle dimensioni lineari del corpo divise per la velocità della luce (30 cm per nanosecondo).

Questo processo è noto come "induzione elettrostatica" e, nel caso particolare della carica nel buco, è **completa**, nel senso che, per induzione, si manifesta una carica proprio uguale ed opposta a quella inducente.

Si noti che questo fenomeno di totale induzione è "necessario" per la legge di Gauss, che trae la sua validità dalla legge di Coulomb, in particolare dall'andamento della forza con l'inverso del quadrato della distanza.

La verifica dell' induzione completa è dunque una verifica dell'andamento come $1/R^2$ della legge di forza.

Attualmente si è verificato che l'esponente di R è 2 entro 1 parte in 10^{16} .

Anche il fenomeno dello schermo elettrostatico ha luogo a causa dell'induzione elettrostatica; però, in tal caso la carica affacciata a quella inducente non è, in generale, proprio uguale ed opposta: in altri termini l'induzione, in generale, non è completa.

Osserviamo adesso che il fenomeno dell'induzione elettrostatica può, talvolta, complicare l'analisi di un problema per cui è necessario procedere con attenzione: immaginiamo, per esempio, di avere due sfere conduttrici cariche rispettivamente con una carica Q_1 e Q_2 . Sappiamo che il campo che esse generano singolarmente nello spazio è quello di una carica puntiforme concentrata nel loro centro. Però, nel momento in cui mettiamo le due sfere in presenza una dell'altra ci accorgiamo che la forza di attrazione non è proprio quella che darebbe la legge di Coulomb, ma è più intensa se Q_1 e Q_2 hanno segno discorde ed è meno intensa se Q_1 e Q_2 hanno lo stesso segno. La spiegazione si trova nel fenomeno dell'induzione, che è responsabile dell'alterazione della distribuzione superficiale di carica su ciascuna sfera affinché entrambe restino equipotenziali. Su ciascuna sfera le cariche dello stesso segno tenderanno ad allontanarsi, mentre quelle di segno opposto ad avvicinarsi, per cui questo fenomeno produrrà comunque una forza attrattiva che esalterà quella coulombiana se le cariche erano discordi, mentre la attenuerà se erano concordi.

1.13 Campo elettrico in prossimità di un conduttore

Abbiamo visto che in un conduttore carico la carica si dispone solo sulla superficie: di solito, per distinguere questa situazione da quella consueta della distribuzione di volume, invece del simbolo $\rho(\mathbf{x})$ si usa il simbolo $\sigma(\mathbf{x})$, dove \mathbf{x} è un punto della superficie. Cerchiamo di vedere come è fatto il campo elettrico nelle immediate vicinanze del conduttore. Già sappiamo che esso è nullo al suo interno: vediamo dunque com'è nelle immediate vicinanze del corpo.

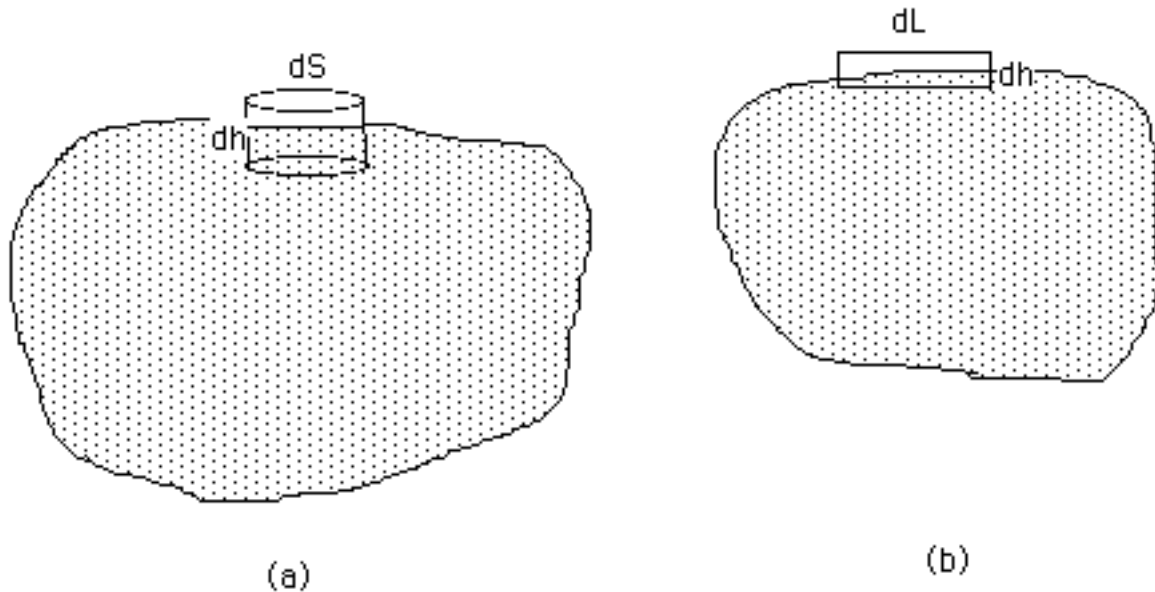


Fig.17

Consideriamo la Fig.17a. Ammettiamo che il corpo sia carico e che sia nota la distribuzione superficiale di carica $\sigma(\mathbf{x})$. Applichiamo la legge di Gauss al cilindretto retto infinitesimo disegnato in figura. Esso ha una base all'esterno ed una base all'interno del corpo, dove \mathbf{E} è certamente nullo. La legge di Gauss stabilisce che, se chiamiamo $d\Sigma$ la superficie totale del cilindretto e dS la sua superficie di base, allora

$$\Phi_{d\Sigma}(\mathbf{E}) = dq \epsilon_0^{-1} = \epsilon_0^{-1} \sigma(\mathbf{x}) dS$$

dove \mathbf{x} è la posizione del centro del cilindro, sulla superficie del conduttore. Osserviamo che la superficie di base interna al conduttore non contribuisce comunque al flusso, mentre il contributo dalla superficie laterale può essere fatto divenire piccolo quanto vogliamo pur di mandare l'altezza del cilindretto dh a zero.

L'unico contributo che resta è quello dalla superficie di base esterna, e vale (sempre nel limite per dh che va a zero)

$$\Phi_{d\Sigma}(\mathbf{E}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = E_{\perp}(\mathbf{x}) dS$$

dove abbiamo indicato con $E_{\perp}(\mathbf{x})$ il valore della componente del campo proiettata nella direzione della normale uscente alla superficie nel punto dato.

Uguagliando le due espressioni e dividendo per dS si ottiene infine il seguente risultato, noto anche come Teorema di Coulomb

$$E_{\perp}(\mathbf{x}) = \epsilon_0^{-1} \sigma(\mathbf{x})$$

il quale stabilisce che la componente del campo elettrico normale alla superficie del conduttore, immediatamente al suo esterno, è proporzionale alla densità superficiale di carica nel punto considerato, e la costante di proporzionalità è proprio ϵ_0^{-1} . Si noti che questa componente è necessariamente discontinua (mentre il potenziale, come abbiamo avuto modo di vedere in un esercizio, non lo è...)

Vogliamo dimostrare adesso che la componente di \mathbf{E} tangenziale alla superficie è invece continua e quindi è nulla nelle immediate vicinanze del conduttore. Procediamo per assurdo ed usiamo la seconda legge di Maxwell, relativa alla circuitazione del campo. Effettuiamo l'integrazione di Stokes su un percorso come quello di Fig.17b. Di nuovo, mandando a zero l'altezza del rettangolo e ricordando che all'interno del conduttore il campo elettrico è comunque nullo, otteniamo

$$0 = \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{L}$$

ovvero, essendo $d\mathbf{L}$ un elemento di linea qualsiasi appartenente al piano tangente alla superficie nel punto dato, ne concludiamo appunto che il campo elettrico non ha componente tangente, ma solo ortogonale al conduttore.

Il legame che abbiamo ottenuto fra il campo elettrico in prossimità del conduttore e la densità di carica presente sul corpo ci consente di spiegare anche il cosiddetto "effetto punta".

Consideriamo per questo due sfere conduttrici, di raggi, rispettivamente R ed r , con $R \gg r$.

Immaginiamo che esse siano abbastanza distanti fra loro da non influenzarsi troppo per induzione e che siano collegate elettricamente fra di loro attraverso un filo conduttore e quindi che si trovino allo stesso potenziale V .

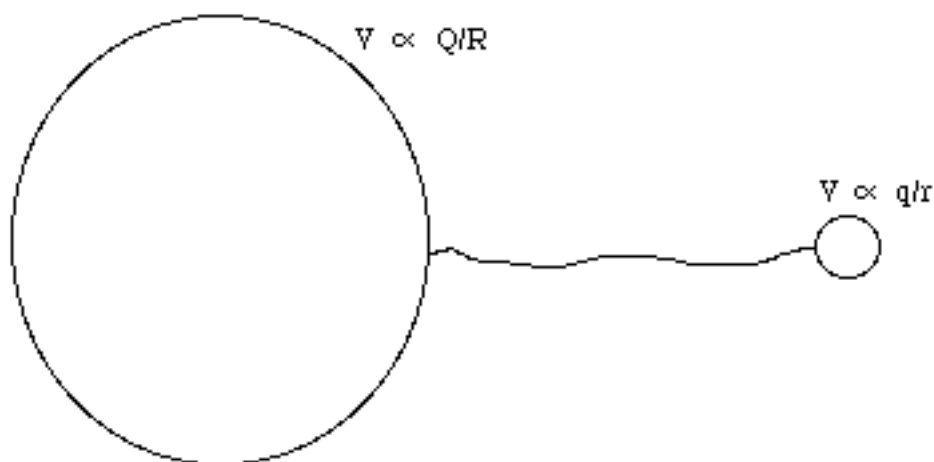


Fig.18

Da quanto abbiamo già visto, la carica sulle due sfere sarà rispettivamente pari a

$$Q = 4\pi \varepsilon_0 V R \quad ; \quad q = 4\pi \varepsilon_0 V r$$

e dunque le due densità di carica superficiali (abbiamo assunto che gli effetti di induzione siano trascurabili...) saranno rispettivamente

$$\Sigma = \varepsilon_0 V R^{-1} \quad ; \quad \sigma = \varepsilon_0 V r^{-1}$$

ovvero i due campi elettrici superficiali avranno intensità, rispettivamente V/R e V/r .
Come si vede, a parità di potenziale, il campo è molto più grande in prossimità della sfera piccola, e questo spiega il motivo per il quale vicino alle punte si realizzano, a parità delle altre condizioni, i campi più intensi.

1.14 La capacità di un conduttore isolato

Immaginiamo di disporre di un conduttore di dimensioni finite e sia Q la carica depositata su di esso. Come sappiamo esso si trova tutto allo stesso potenziale elettrostatico V_0 (misurato rispetto all'infinito ...).

E' un fatto sperimentale che la densità superficiale di carica $\sigma(\mathbf{y})$ sul conduttore, fissata la carica totale, è unica.

D'altronde, per quanto abbiamo già studiato, in ogni punto \mathbf{x} dello spazio, e quindi anche sul conduttore stesso, risulta

$$V(\mathbf{x}) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int \sigma(\mathbf{y}) \, ds / |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \quad (**)$$

Vogliamo adesso sapere quale sarà la distribuzione $\sigma'(\mathbf{y})$ della carica sul conduttore quando la carica totale è

$$Q' = \lambda Q$$

Consideriamo per questo la distribuzione

$$\sigma'(\mathbf{y}) = \lambda \sigma(\mathbf{y})$$

Questa è tale per cui

a) $\int \sigma'(\mathbf{y}) \, ds = Q' = \lambda Q$

b) determina un potenziale costante sul conduttore.

Ne segue che se immaginiamo di poter "congelare" la proprietà di conduzione del conduttore e poi di cambiare la distribuzione di carica sullo stesso in modo tale che

$$\sigma(\mathbf{y}) \rightarrow \sigma'(\mathbf{y}) = \lambda \sigma(\mathbf{y})$$

ecco che, se poi "scongeliamo" di nuovo la proprietà di conduzione del conduttore, NON ci sarà campo elettrico nel conduttore ($V' = \lambda V = \text{cost}$) e dunque la distribuzione $\sigma'(\mathbf{y})$ non muterà a conduttore "scongelato".

Per l'unicità della distribuzione di carica a carica totale fissata, ne segue che

$$\sigma'(\mathbf{y}) = \lambda \sigma(\mathbf{y})$$

è proprio la densità di carica corrispondente alla carica totale $Q' = \lambda Q$.

Ma allora, per il legame (**) esistente fra V e σ , ne segue che **il potenziale sul conduttore scala proporzionalmente alla carica totale** presente su di esso, ovvero risulta

$$Q = CV$$

La costante di proporzionalità C è nota come "capacità del conduttore": essa dipende solo dalla sua geometria come si può ben capire dalla relazione (**).

La sua unità di misura, nel Sistema Internazionale, è il Farad ed i suoi sottomultipli (milli, micro, nano e pico Farad).

Esercizio 1

Determinare la capacità di una sfera conduttrice isolata di raggio R pari al raggio della Terra.

Soluzione:

Abbiamo visto che il potenziale a cui si porta una sfera conduttrice di raggio R quando su di essa si trova una carica Q vale

$$V = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$$

per cui, dalla definizione, si ha

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi * 8.85418781762 * 10^{-12} * 6.37814 * 10^6 = 0.70966 \text{ mF}$$

1.15 Elettrostatica di un sistema di conduttori

Nel caso di un solo conduttore finito e isolato, abbiamo dimostrato che esiste un legame lineare fra la carica complessiva presente sul conduttore ed il potenziale (rispetto all'infinito) a cui esso si trova.

Questo risultato è molto più generale, infatti si dimostra che, dato comunque un sistema c_1, c_2, \dots, c_n , di n conduttori finiti e fissi l'uno rispetto all'altro, sui quali siano presenti le cariche (totali) Q_1, Q_2, \dots, Q_n , i potenziali V_1, V_2, \dots, V_n di questi conduttori (rispetto all'infinito) sono esprimibili attraverso una relazione lineare del tipo

$$V_i = \sum_k A_{ik} Q_k \equiv A_{ik} Q_k$$

dove la matrice A_{ik} è una matrice quadrata simmetrica e invertibile (ad autovalori strettamente positivi), detta "matrice delle ammettenze", i cui elementi dipendono esclusivamente dalla geometria di tutti i conduttori presenti.

Immaginiamo infatti di considerare il sistema dei conduttori dati, ma caricati in modo che tutti i conduttori, a parte il conduttore i -esimo, abbiano una carica totale $Q_j = 0$, mentre il conduttore i -esimo abbia la carica Q_i . Chiaramente, a causa dell'induzione elettrostatica, le densità di carica sui vari conduttori **NON saranno nulle**, però lo sarà il loro integrale (a parte quello relativo al corpo i -esimo).

Il potenziale sarà comunque costante sui vari conduttori e, per quanto visto quando abbiamo considerato il caso di un solo conduttore isolato, scalerà proporzionalmente alla carica totale presente sul corpo i -esimo, infatti se **TUTTE** le densità di carica vengono moltiplicate per λ , il potenziale sui vari conduttori cambia proporzionalmente al fattore di scala, le cariche sui vari corpi restano nulle, a parte quella sul corpo i -esimo che, anch'essa, scala di λ . Dunque

$$V_j^{(i)} = A_{ji} Q_i \quad (\text{non sommato su } i \dots)$$

Quando sono carichi tutti i corpi, per il principio di sovrapposizione lineare, il potenziale sul corpo j -esimo è la somma dei potenziali determinati su quel corpo dalle varie configurazioni di carica in cui una sola è non nulla; ovvero abbiamo il risultato cercato, cioè che

$$V_j = \sum_k A_{jk} Q_k$$

I coefficienti A_{jk} dipendono solo dalla geometria relativa dei vari corpi, quando sono tutti presenti: essi tengono conto implicitamente dei fenomeni induttivi che si manifestano fra i vari conduttori.

Dal punto di vista energetico, al sistema di conduttori carichi sarà associata, naturalmente, una energia elettrostatica totale che, per quanto visto precedentemente, risulterà pari a

$$U = 1/2 \epsilon_0 \int |E(\mathbf{x})|^2 d^3x = 1/2 \int \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) d^3x$$

D'altronde la carica è diversa da zero solo sulle superfici esterne dei conduttori che si trovano comunque a potenziale costante, per cui risulta infine

$$U = 1/2 Q_i V_i = 1/2 Q_i A_{ik} Q_k$$

Essendo l'energia potenziale elettrostatica una grandezza definita positiva, ne segue che la matrice delle ammettenze, come avevamo già preannunciato, è una matrice invertibile (con autovalori tutti strettamente positivi), per cui la relazione lineare fra potenziali e cariche può essere anche riscritta come relazione fra cariche e potenziali... Si avrà

$$Q_i = C_{ik} V_k$$

dove la matrice C_{ik} , inversa della A_{ik} , è detta matrice delle capacità (anch'essa, ovviamente, simmetrica e definita positiva) e generalizza la relazione che abbiamo dimostrato per il conduttore isolato.

Per quanto riguarda l'energia potenziale, essa può essere altresì espressa come

$$U = 1/2 C_{ik} V_k V_i$$

Ma ritorniamo sul problema dei coefficienti di ammettenza e sulla loro dipendenza dalla presenza di tutti i conduttori facenti parte del sistema.

Per convincerci di questo punto, consideriamo il caso semplicissimo di due soli conduttori sferici ed immaginiamo che il primo abbia carica $Q > 0$ ed il secondo sia globalmente scarico. Supponiamo dapprima di allontanare i due conduttori uno dall'altro fino a poter considerare trascurabili gli effetti di induzione reciproca. Il primo possederà una densità di carica uniforme sulla sua superficie, ed il secondo avrà invece una densità superficiale nulla. Dal punto di vista energetico, solo il primo contribuirà, per cui avremo

$$U = Q^2 / (8\pi \epsilon_0 R_1)$$

la quale, dovendosi anche poter esprimere attraverso la relazione

$$U = 1/2 A_{ij} Q_i Q_j \Rightarrow U = 1/2 A_{11} Q^2$$

mostra che, nel caso particolare, risulta appunto

$$A_{11} = 1/(4\pi \epsilon_0 R)$$

ovvero che A_{11} dipende solo dalla geometria del primo conduttore.

Supponiamo adesso di avvicinare la seconda sfera alla prima, ed immaginiamo di poterlo fare avendo "congelato" le caratteristiche conduttrici del corpo. Chiaramente, a causa del primo corpo carico, all'interno del secondo esisterà un campo elettrico diverso da zero.

Se immaginiamo di "scongelerare" il conduttore, le cariche libere al suo interno si sposteranno sotto l'effetto del campo elettrico, fino a che il controcampo da esse prodotto non annullerà completamente il campo elettrico altrimenti presente nel conduttore. Naturalmente questo riassetto produce un campo all'esterno il quale provoca un riassetto della carica anche nel primo conduttore, etc...

I tempi caratteristici sono dell'ordine delle dimensioni del conduttore diviso la velocità della luce, che è la velocità con la quale si propagano le perturbazioni elettromagnetiche.

La cosa importante è che, a causa dell'induzione, le cariche sul corpo che era globalmente scarico affacciate verso quello carico, sono di segno opposto a quelle di quest'ultimo. E' vero che, dalla parte opposta, si trova una uguale carica di segno opposto, ma a causa della dipendenza dalla distanza, ne consegue una forza attrattiva fra i due conduttori, anche se uno è globalmente scarico.

In sostanza, per via dell'induzione, un conduttore carico è in grado di attrarre anche un conduttore scarico!

Una conseguenza di questo è che, venendo dall'infinito con il secondo conduttore globalmente scarico, per la presenza del primo, si guadagna lavoro meccanico per via dell'attrazione fra i due corpi. Questo lavoro va a spese dell'energia elettrostatica globale del sistema la quale, pur continuando ad essere espressa dalla relazione

$$U = 1/2 A_{11} Q^2$$

(solo il primo corpo é carico ...) diminuisce all'avvicinarsi dei due corpi. Questo implica, naturalmente, che A_{11} diminuisca all'avvicinarsi del secondo conduttore (scarico) a quello carico e quindi dipenda anche dalla posizione (e geometria) di quest'ultimo.

La forza che agisce sui due conduttori è dovuta all'induzione ed è legata proprio alla dipendenza di A_{11} dalla distanza relativa dei due corpi dalla equazione

$$\mathbf{F} = - \mathbf{grad}(U) = - 1/2 Q^2 \mathbf{grad}(A_{11})$$

Questo risultato mostra chiaramente che A_{11} in generale, pur descrivendo il coefficiente di proporzionalità fra la carica ed il potenziale a cui lo stesso corpo si è portato, dipende necessariamente, in generale, anche dalla posizione dell'altro conduttore presente !

E questo, come abbiamo già detto, è un fatto completamente generale: solo nel caso che due conduttori siano schermati l'uno rispetto all'altro non avremo dipendenza dalla loro distanza reciproca dei rispettivi coefficienti diagonali dell'ammettenza (mentre quelli misti saranno nulli).

1.16 Il condensatore

Consideriamo adesso il caso di due soli conduttori, interagenti fra loro. La matrice delle ammettenze è una matrice 2x2 e risulta

$$V_1 = A_{11} Q_1 + A_{12} Q_2 \quad ; \quad Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2$$

$$V_2 = A_{21} Q_1 + A_{22} Q_2 \quad ; \quad Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2$$



Fig.19

La differenza di potenziale fra il primo ed il secondo conduttore vale

$$\begin{aligned} \Delta V \equiv V_1 - V_2 &= A_{11} Q_1 + A_{12} Q_2 - (A_{21} Q_1 + A_{22} Q_2) = \\ &= Q_1 (A_{11} - A_{21}) + Q_2 (A_{12} - A_{22}) \end{aligned}$$

e, nel caso particolare in cui le cariche sui due conduttori siano uguali ed opposte, si ha

$$Q_1 = Q \quad ; \quad Q_2 = -Q$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = Q (A_{11} - A_{21} - A_{12} + A_{22}) = Q (A_{11} - 2A_{21} + A_{22})$$

Se possiamo trascurare gli effetti di induzione fra i due conduttori in questione e tutti gli altri eventualmente presenti, si dice che il sistema dei due conduttori forma un **condensatore elettrostatico**, di cui i due conduttori costituiscono le “armature”.

Immaginiamo ora di caricare i due conduttori con cariche uguali ed opposte: se possono comunque essere trascurati gli effetti di induzione con altri conduttori eventualmente presenti, è evidente che il campo elettrico dovrà essere confinato solo fra i due conduttori.

In ogni buon condensatore, infatti, l'energia elettrostatica (la cui densità è proporzionale al quadrato del campo elettrico...) è "racchiusa" nel volume compreso fra le due armature e quella "dispersa" nello spazio circostante è tanto più trascurabile quanto più il condensatore è realizzato propriamente.

Questo significa che se il condensatore è ben realizzato, tutte le azioni elettriche si manifesteranno solo fra i due conduttori (si ricordi che la carica totale del sistema è per ipotesi nulla ...)

Quanto alla differenza di potenziale fra le due armature del condensatore, essa è data dalla relazione

$$\Delta V = Q (A_{11} - A_{21}) - Q (A_{12} - A_{22}) = Q (A_{11} - 2A_{21} + A_{22})$$

Analogamente come nel caso del conduttore isolato, la quantità $(A_{11} - 2A_{21} + A_{22})^{-1}$ viene chiamata "capacità" del condensatore

$$C = (A_{11} - 2A_{21} + A_{22})^{-1}$$

Essa dipende solo dalla geometria del sistema formato dai due conduttori, ed è tale che il suo prodotto per il modulo della d.d.p. fra le armature fornisce la carica Q sull'armatura positiva (sull'altra, ovviamente, la carica è opposta...)

$$Q = C \Delta V$$

Dal punto di vista energetico, l'energia elettrostatica associata al condensatore carico è esprimibile attraverso la relazione generale, valida per conduttori comunque carichi

$$U = 1/2 C_{ik} V_k V_i = 1/2 Q_i A_{ik} Q_k$$

Nel caso particolare del condensatore (per ipotesi, sulla prima armatura è presente la carica $+Q$, mentre sulla seconda la carica $-Q$) essa diventa

$$U = 1/2 Q^2 (A_{11} - 2A_{21} + A_{22}) = 1/2 Q^2 C^{-1} = 1/2 C \Delta V^2 = 1/2 Q \Delta V$$

Veniamo adesso a considerare qualche esempio di condensatore.

Come primo esempio, iniziamo dal caso "sferico", ovvero dal caso in cui il primo conduttore sia una sfera di raggio r , mentre il secondo sia un'altra sfera cava, concentrica con la prima, avente raggio interno $R_1 > r$ e raggio esterno $R_2 > R_1$.

Chiaramente il sistema dei due conduttori presenta una perfetta simmetria sferica.

Iniziamo calcolando la matrice delle ammettenze.

Procederemo seguendo la definizione. Supponiamo dunque che la carica totale sulla sfera interna sia Q , mentre che quella presente sul guscio esterno sia nulla. Per il meccanismo dell'induzione, sulla superficie interna del guscio sarà presente una carica $-Q$, mentre la carica $+Q$ si troverà sulla

superficie esterna dello stesso. Determiniamo, in queste condizioni, il potenziale elettrostatico a cui si trovano i due conduttori.

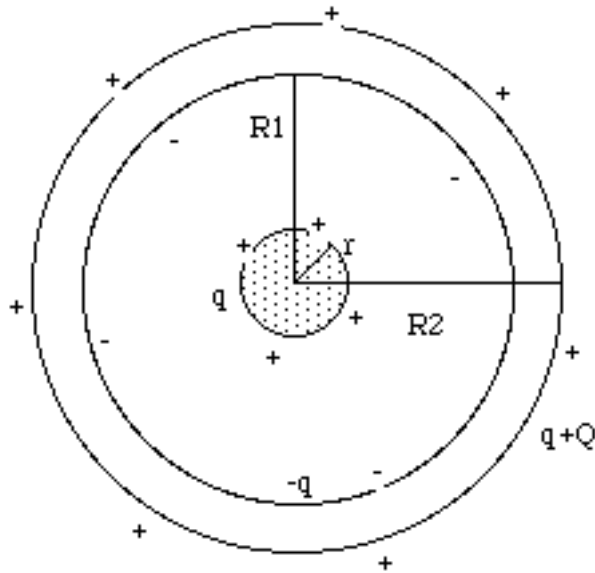


Fig.20

E' opportuno, a questo punto, ricordare un risultato ottenuto quando abbiamo studiato il potenziale generato da una carica Q distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio ρ : avevamo visto che

$$V(r) = Q/(4\pi \epsilon_0 r) \quad \text{quando } r > \rho$$

$$V(r) = Q/(4\pi \epsilon_0 \rho) \quad \text{quando } r < \rho$$

Ne segue che, applicando il principio di sovrapposizione lineare per i potenziali prodotti dalle tre distribuzioni di carica a simmetria sferica, avremo

$$V(x) = Q/(4\pi \epsilon_0 x) - Q/(4\pi \epsilon_0 R_1) + Q/(4\pi \epsilon_0 R_2) \quad \text{quando } x \leq r$$

$$V(x) = Q/(4\pi \epsilon_0 x) - Q/(4\pi \epsilon_0 R_1) + Q/(4\pi \epsilon_0 R_2) \quad \text{quando } r \leq x \leq R_1$$

$$V(x) = Q/(4\pi \epsilon_0 x) - Q/(4\pi \epsilon_0 x) + Q/(4\pi \epsilon_0 R_2) \quad \text{quando } R_1 \leq x \leq R_2$$

$$V(x) = Q/(4\pi \epsilon_0 x) - Q/(4\pi \epsilon_0 x) + Q/(4\pi \epsilon_0 x) \quad \text{quando } x \geq R_2$$

Si vede chiaramente che il potenziale è costante nella sfera interna, dove vale

$$V_1 = Q \left\{ 1/(4\pi \epsilon_0 r) - 1/(4\pi \epsilon_0 R_1) + 1/(4\pi \epsilon_0 R_2) \right\}$$

ed analogamente lo è nel guscio, dove vale

$$V_2 = Q/(4\pi \epsilon_0 R_2)$$

da cui, in base alla definizione dell'ammettenza, ricaviamo:

$$A_{11} = 1/(4\pi \epsilon_0 r) - 1/(4\pi \epsilon_0 R_1) + 1/(4\pi \epsilon_0 R_2)$$

$$A_{21} = 1/(4\pi \epsilon_0 R_2)$$

Per conoscere gli altri due coefficienti di ammettenza, occorre procedere caricando il conduttore esterno con una carica Q e mantenendo scarico quello interno. In questo caso la carica si disporrà solo sulla superficie esterna del guscio, e, per quanto già sappiamo, avremo

$$V(x) = Q/(4\pi \epsilon_0 R_2) \quad \text{per } x \leq R_2$$

$$V(x) = Q/(4\pi \epsilon_0 x) \quad \text{per } x > R_2$$

per cui, in questo caso, risulta

$$V_1 = V_2 = Q/(4\pi \epsilon_0 R_2)$$

ovvero, dalla definizione di A_{ij} risulterà

$$A_{12} = A_{22} = 1/(4\pi \epsilon_0 R_2)$$

La capacità del condensatore sferico vale dunque

$$C = (A_{11} - 2A_{21} + A_{22})^{-1} = \left\{ 1/(4\pi \epsilon_0 r) - 1/(4\pi \epsilon_0 R_1) + 1/(4\pi \epsilon_0 R_2) - 2/(4\pi \epsilon_0 R_2) + 1/(4\pi \epsilon_0 R_2) \right\}^{-1} = \left\{ 1/(4\pi \epsilon_0 r) - 1/(4\pi \epsilon_0 R_1) \right\}^{-1} = 4\pi \epsilon_0 r R_1 / (R_1 - r)$$

Come si vede essa può divenire molto maggiore della capacità della sfera conduttrice isolata, che vale semplicemente $4\pi \epsilon_0 r$, nel caso in cui R_1 ed r siano molto vicini fra loro per cui il denominatore della frazione divenga prossimo a zero. In questo caso, ponendo $R_1 = r + \delta$ e sviluppando l'espressione della capacità al primo ordine in δ , otteniamo

$$C = 4\pi \epsilon_0 r^2 / \delta = \epsilon_0 S / \delta$$

dove S é la supecifie delle due armature affacciate, che, essendo molto vicine, possiamo considerare uguali.

L'espressione ultima ottenuta è quella della capacità di un condensatore piano, fatto da due superfici conduttrici piane e parallele, poste ad una distanza δ , aventi la prima una distribuzione uniforme di carica σ e la seconda $-\sigma$.

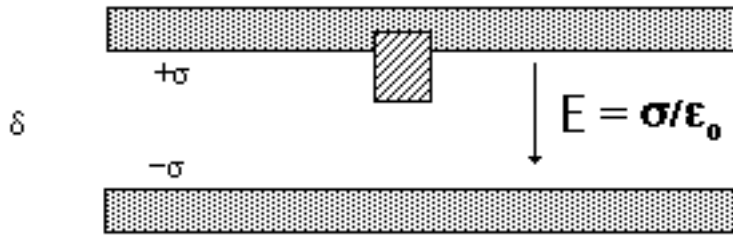


Fig. 21

Trascurando gli effetti di bordo (... questo corrisponde ad assumere che non ci sia, sostanzialmente, campo elettrico “disperso” e questo è tanto più vero quanto più le dimensioni lineari dei conduttori sono grandi rispetto alla loro distanza), per sole ragioni di simmetria il campo elettrico deve essere ortogonale ai due piani e, per la legge di Gauss, è immediato mostrare che il suo modulo deve valere

$$E = \sigma/\epsilon_0$$

Ne segue, dalla definizione, che la d.d.p. fra le due armature varrà

$$\Delta V = E \delta = \sigma\delta/\epsilon_0$$

Ma, per definizione $Q = S \sigma$ per cui si ha infine che

$$\Delta V = Q\delta/S\epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad C = \epsilon_0 S/\delta$$

Esercizio 1

Calcolare la capacità di un condensatore cilindrico, costituito da due conduttori di raggio R_i ed R_e .

Soluzione:

Il campo elettrico è radiale ed è diverso da zero solo fra i due conduttori se la densità lineare di carica λ su di essi è uguale ed opposta. Risulta

$$E(r) = \lambda / (2\pi \epsilon_0 r)$$

ovvero la ddp fra le due armature risulta, integrando l'espressione di sopra

$$\Delta V = \lambda \ln(R_e/R_i) / (2\pi \epsilon_0)$$

da cui segue che la capacità vale

$$C = Q/\Delta V = L 2\pi \epsilon_0 / \ln(R_e/R_i)$$

dove L è la lunghezza complessiva del sistema, ovvero C/L è la capacità per unità di lunghezza, se il condensatore, come noi lo abbiamo concepito fin'ora, è infinito.

Osserviamo, di nuovo, che, nel caso i due raggi siano molto prossimi, ovvero se

$$R_e = R_i + \delta \quad \text{con} \quad \delta \ll R_i$$

risulta

$$C = L 2\pi \epsilon_0 R_i / \delta = \epsilon_0 S / \delta$$

di nuovo come nel condensatore piano ...

1.17 Collegamenti fra condensatori

I condensatori vengono rappresentati simbolicamente nel modo seguente:

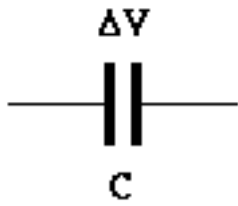
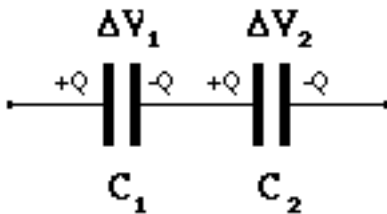


Fig. 22

Disponendo di due condensatori, questi possono essere collegati fra di loro in due modi

a) in serie



b) in parallelo

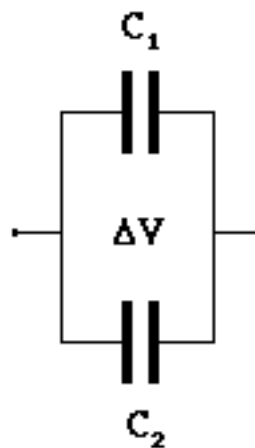


Fig. 23

Nel primo caso (serie) la conservazione della carica implica che entrambi i condensatori siano necessariamente caricati con la stessa carica Q . Osserviamo infatti che la carica totale sulle armature interne collegate fra loro è naturalmente nulla quando i condensatori sono scarichi e deve restare tale in ogni caso, poiché questi conduttori sono isolati ...

Come conseguenza, essendo la ddp ΔV ai capi del sistema dei due condensatori pari, per definizione, alla somma delle due ddp ΔV_1 e ΔV_2 ai capi di ciascuno di essi, risulta

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = Q/C_1 + Q/C_2 = Q (1/C_1 + 1/C_2)$$

e questa relazione mostra che l'insieme delle due capacità disposte in serie si comporta come una singola capacità C_{eq} tale che

$$1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 \quad \Rightarrow \quad C_{eq} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$$

Questa equivalenza la ritroviamo anche dal punto di vista energetico, infatti l'energia immagazzinata nell'insieme dei due condensatori vale

$$U = U_1 + U_2 = 1/2 Q^2/C_1 + 1/2 Q^2/C_2 = 1/2 Q^2/C_{eq}$$

Nel secondo caso (parallelo) è la ddp ad essere la stessa su entrambi i condensatori, per cui la carica totale accumulata su entrambi i condensatori vale

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = \Delta V (C_1 + C_2)$$

ovvero il parallelo dei due condensatori si comporta come un singolo condensatore avente capacità C_{eq} tale che

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

Di nuovo, questa "equivalenza" rispecchia anche l'aspetto energetico, infatti l'energia totale immagazzinata dall'insieme dei due condensatori vale

$$U = U_1 + U_2 = 1/2 \Delta V^2 C_1 + 1/2 \Delta V^2 C_2 = 1/2 \Delta V^2 C_{eq}$$

Esercizio 1

Calcolare la capacità di un condensatore piano definito da due placche di superficie pari a 1000 cm^2 , poste in vuoto ad una distanza di $10 \text{ }\mu\text{m}$.

Soluzione:

$$C = \epsilon_0 S/\delta = 8.85 \cdot 10^{-12} * (1000 \cdot 10^{-4}) / 10^{-5} = 8.85 \cdot 10^{-8} \text{ F} = 88.5 \text{ nF}$$

Esercizio 2

Calcolare l'energia immagazzinata in un condensatore avente capacità pari a $1 \text{ }\mu\text{F}$, caricato ad una ddp di 50 V .

Soluzione:

$$U = 1/2 C \Delta V^2 = 1/2 * 10^{-6} * 50^2 = 1.250 \text{ mJ}$$

Esercizio 3

Calcolare la capacità equivalente del parallelo e della serie di due condensatori di capacità pari, rispettivamente, a 120 nF e 240 nF

Soluzione:

$$C_{\text{parallelo}} = C_1 + C_2 = 120 + 240 = 360 \text{ nF}$$

$$C_{\text{serie}} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = 120 * 240 / 360 = 80 \text{ nF}$$

1.19 I Dielettrici

Se in un condensatore piano, di capacità C_0 , caricato con una carica Q_0 , si riempie la zona fra le due armature con una sostanza isolante (dielettrica), si osserva tipicamente che la ddp ai capi del condensatore diminuisce in proporzione fissa:

$$Q_0/C_0 = \Delta V_0 \Rightarrow \Delta V' = (1-\kappa)\Delta V_0$$

dove κ è una costante non negativa e minore di 1, caratteristica solo del mezzo dielettrico interposto. In altre parole, la capacità del condensatore riempito di dielettrico aumenta proporzionalmente alla quantità $(1-\kappa)^{-1}$ rispetto al valore C_0 che il condensatore avrebbe in vuoto. Si ha infatti

$$C_{\text{dielet}} = Q_0 / \Delta V' = (1-\kappa)^{-1} Q_0 / \Delta V_0 = C_0 (1-\kappa)^{-1}$$



Fig. 24

L'inverso del fattore di riduzione del campo elettrico $(1-\kappa)^{-1}$ viene chiamata "costante dielettrica relativa" del mezzo in questione:

$$\epsilon_r = (1-\kappa)^{-1} \Rightarrow \kappa = (\epsilon_r - 1)/\epsilon_r$$

Esso è un numero puro, maggiore o uguale all'unità (dato che κ è compreso fra zero ed uno...) : valori tipici di ϵ_r sono i seguenti:

$\epsilon_r = 80$	per l'acqua
$\epsilon_r = 1.00054$	per l'aria
$\epsilon_r = 3.7$	per la carta
$\epsilon_r = 4$	per il vetro
$\epsilon_r = 6$	per il neoprene (gomma)
.....	

Se invece di riempire tutta la zona fra le due armature del condensatore si riempie solo un certo tratto δ di dielettrico ($\delta < d =$ distanza fra le armature), sperimentalmente si osserva che la ddp fra le armature (sempre a carica Q_0 costante...) diviene

$$\Delta V' = [1 - (\delta/d) \kappa] \Delta V_0$$

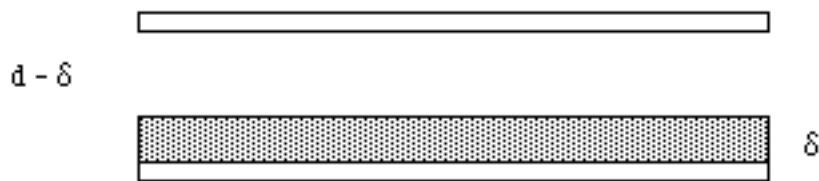


Fig. 25

D'altronde, per la legge di Gauss, se trascuriamo gli effetti di bordo, cioè se ammettiamo che le dimensioni lineari delle placche siano comunque molto più grandi della loro distanza (condensatore piano infinito...), non essendo cambiata la densità di carica sulle armature del condensatore poiché non è cambiata la carica Q_0 , non può essere cambiato nemmeno il campo nella zona "vuota", cioè senza dielettrico. Questa zona, dunque, contribuirà la potenziale $\Delta V'$ per la quantità

$$\Delta V'' = \Delta V (d-\delta)/d$$

dunque, il dielettrico, che ha spessore δ , contribuirà a sua volta alla ddp fra le armature per la quantità

$$\Delta V_d = \Delta V' - \Delta V'' = \Delta V \delta/d (1-\kappa)$$

Per poter spiegare i fatti sperimentali sopra esposti, dobbiamo dunque ammettere che, nella zona piena di dielettrico, il campo elettrico \mathbf{E} sia diminuito di un fattore $(1-\kappa)$ rispetto al valore \mathbf{E}_0 ivi presente in vuoto:

$$\mathbf{E} = (1-\kappa) \mathbf{E}_0$$

Ma noi sappiamo che la sorgente del campo elettrico sono le cariche elettriche, quindi questo significa che nel condensatore carico, in presenza del dielettrico, deve essersi originata una distribuzione di carica tale da ridurre il campo elettrico \mathbf{E} che sarebbe altrimenti presente.

Come può accadere che sia nata una distribuzione di carica nel dielettrico se questo non ha, al suo interno, cariche libere (come dimostrato anche dal fatto che, all'atto della sua inserzione, il condensatore non si è scaricato così come sarebbe accaduto se avessimo inserito del materiale conduttore...) ?

Per poter rispondere occorre considerare più in dettaglio la struttura microscopica delle sostanze.

Le molecole che costituiscono il materiale isolante sono globalmente neutre, però sono formate da cariche positive (nuclei atomici) ed cariche negative (elettroni).

In molti casi esse possiedono addirittura un momento di dipolo elettrico intrinseco.

Consideriamo, per esempio, la molecola dell'acqua.

I due atomi di idrogeno non sono disposti l'uno rispetto all'altro simmetricamente rispetto all'ossigeno, bensì le congiungenti tali atomi con l'ossigeno formano fra di loro un angolo di circa 108° .

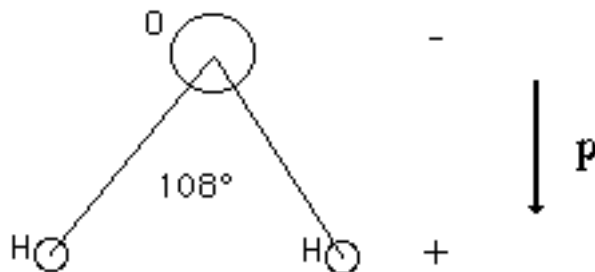


Fig. 26

Poiché l'ossigeno è più elettronegativo dell'idrogeno, la carica elettronica è più spostata verso l'ossigeno, per cui la molecola presenta un momento di dipolo elettrico permanente \mathbf{p} ($|\mathbf{p}| \approx 10^{-30}$ Coulomb*metro). In assenza di campi esterni, i dipoli saranno orientati casualmente, per via dell'agitazione termica per cui il momento di dipolo medio $\langle \mathbf{p} \rangle$ sarà nullo. Però, in un campo elettrico \mathbf{E} , le molecole tenderanno ad orientarsi nella direzione del campo, in modo da rendere minima l'energia potenziale del dipolo: la conseguenza è che il valor medio del momento di dipolo $\langle \mathbf{p} \rangle$ non resterà nullo! Se definiamo dunque il vettore di polarizzazione $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ come la densità di momento di dipolo nella sostanza, ovvero, detto N il numero di molecole per unità di volume,

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p} \rangle$$

esso sarà una funzione della posizione che, in generale, non risulterà più nulla come accade in assenza di campo elettrico.

Questo risultato non vale solo per le sostanze che presentano un momento di dipolo intrinseco, perché, anche nel caso che il dielettrico sia costituito da molecole non polari, come è illustrato nel § che segue, in presenza di campo esterno, finisce per nascere, comunque, una polarizzazione \mathbf{P} nel mezzo che è diversa da zero..

Osserviamo adesso che il fatto che nel corpo del dielettrico omogeneo ed isotropo ci sia polarizzazione conduce alla nascita di una distribuzione di carica "di polarizzazione", sulla superficie dello stesso, secondo il meccanismo illustrato nella figura che segue (per un condensatore a facce piane e parallele).

Questa densità di carica risulta proporzionale all'intensità della polarizzazione stessa.

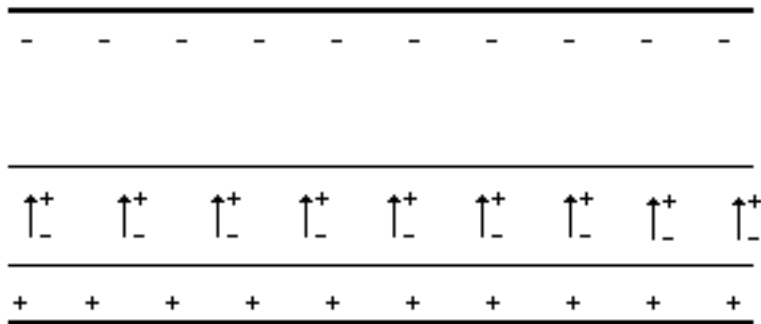


Fig. 28

La conseguenza, per la legge di Gauss, è che nel dielettrico, oltre al campo \mathbf{E}_0 prodotto dalle cariche "di conduzione" presenti sulle armature del condensatore, si manifesta un contro-campo elettrico \mathbf{E}_{pol} dovuto alle cariche di polarizzazione, per cui il campo risultante

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{pol}}$$

risulta attenuato.

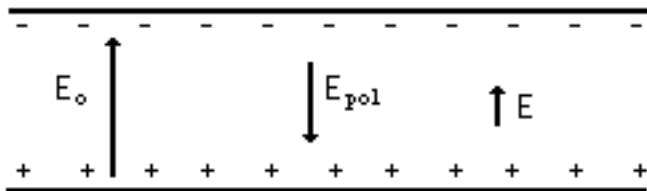


Fig. 29

Il fatto che l'attenuazione sia proprio

$$\mathbf{E} = (1-\kappa) \mathbf{E}_0$$

significa, per la legge di Gauss, che sulle superfici del dielettrico si deve essere formata una densità di carica superficiale pari a

$$\sigma_{\text{pol}} = -\kappa \sigma_0$$

dove σ_0 è la densità di carica di conduzione presente sulla armatura prospiciente la superficie del dielettrico considerata.

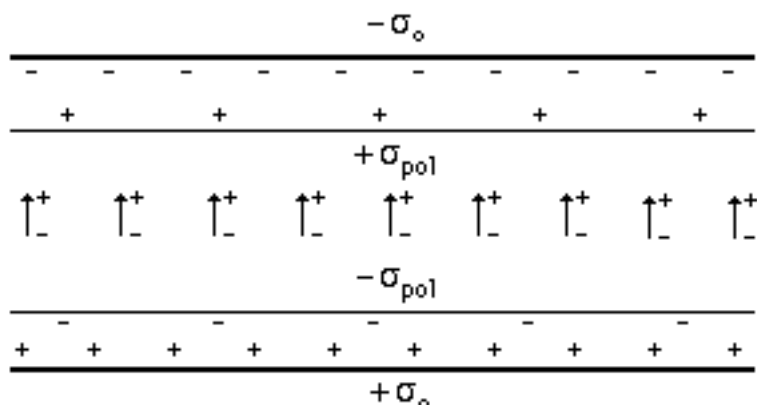


Fig. 30

Si ha infatti

$$E = (\sigma_0 - \sigma_{pol})/\epsilon_0 = (1-\kappa)E_0 = (1-\kappa) \sigma_0/\epsilon_0$$

da cui segue

$$\sigma_0 - \sigma_{pol} = (1-\kappa) \sigma_0$$

ovvero, appunto, che

$$\sigma_{pol} = \kappa \sigma$$

Fin'ora, comunque, abbiamo ragionato considerando quello che accade in condensatori a facce piane e parallele: vediamo adesso come possiamo generalizzare quanto ottenuto in questa configurazione al caso in cui la geometria non sia necessariamente piana ed il dielettrico non sia necessariamente omogeneo.

Abbiamo capito che la riduzione del campo elettrico nel dielettrico è dovuto alla nascita della carica di polarizzazione, legata, a sua volta, al fenomeno della polarizzazione dielettrica, ovvero alla nascita, all'interno del materiale, di una densità di momento di dipolo elettrico **P**.

Assumiamo dunque di avere a che fare con un mezzo in cui sia presente una densità di polarizzazione **P(y)**: cerchiamo di valutare quali sono le conseguenze elettrostatiche di questa densità di momento di dipolo. Come sappiamo, ciò che serve è determinare, per esempio, il potenziale prodotto da questa distribuzione...

Ricordiamo che il potenziale prodotto nel punto **x** da un dipolo di momento **p** presente nel punto **y**, vale

$$V(\mathbf{x}) = (4\pi \epsilon_0)^{-1} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3$$

Ne segue che il potenziale prodotto da una distribuzione di momenti di dipolo descritta dalla densità **P(y)**, sarà dato da

$$V(\mathbf{x}) = (4\pi \epsilon_0)^{-1} \int d^3y \mathbf{P}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3$$

D'altronde, ricordiamo che

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y}) / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3 = \text{grad}_y (|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1})$$

per cui possiamo scrivere la funzione integranda nel modo seguente:

$$\mathbf{P}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3 = \mathbf{P}(\mathbf{y}) \cdot \text{grad}_y (|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1})$$

In generale, però, se \mathbf{v} è un campo vettoriale ed f una funzione scalare qualsiasi, vale la seguente identità

$$\text{div}(f \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{grad}(f) + f \text{div}(\mathbf{v})$$

per cui, nel nostro caso, abbiamo

$$\mathbf{P}(\mathbf{y}) \cdot \text{grad}_y (|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}) = \text{div}(\mathbf{P}(\mathbf{y}) \cdot \text{grad}_y (|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1})) - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} \text{div}(\mathbf{P}(\mathbf{y}))$$

Ma l'integrale del primo addendo, per il Teorema della divergenza, è nullo se la distribuzione $\mathbf{P}(\mathbf{y})$ è diversa da zero solo al finito, per cui risulta infine

$$V(\mathbf{x}) = - (4\pi \epsilon_0)^{-1} \int d^3y \text{div}(\mathbf{P}(\mathbf{y})) / |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

che, si riconosce immediatamente, essere il potenziale elettrostatico prodotto da una distribuzione di carica “di polarizzazione” $\rho_p(\mathbf{y})$ legata a $\mathbf{P}(\mathbf{y})$ dalla relazione

$$\rho_p(\mathbf{y}) = - \text{div}(\mathbf{P}(\mathbf{y}))$$

Dunque, la presenza di una densità di polarizzazione $\mathbf{P}(\mathbf{y})$ determina la nascita di una densità di carica di polarizzazione $\rho_p(\mathbf{y})$, la quale, quindi, provoca le consuete manifestazioni elettrostatiche che sappiamo.

Vediamo allora come possiamo riscrivere la prima equazione di Maxwell in un mezzo dielettrico, tenendo conto anche delle cariche di polarizzazione. Avremo

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \epsilon_0^{-1} (\rho_c + \rho_p)$$

dove abbiamo distinto fra le cariche “consuete”, cioè “di conduzione”, descritte dalla densità ρ_c , e quelle generate dal meccanismo della polarizzazione dielettrica, descritte dalla densità ρ_p . Per quanto già detto, risulterà allora che

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \epsilon_0^{-1} (\rho_c - \text{div}(\mathbf{P}))$$

ovvero

$$\text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_c$$

Se definiamo allora il campo “spostamento elettrico” \mathbf{D} nel modo seguente

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

per quanto visto sopra, ne segue che \mathbf{D} ha come sorgenti le sole cariche di conduzione e non quelle di polarizzazione !

Il legame fra \mathbf{E} e \mathbf{D} può essere precisato meglio ricordando che, in un normale mezzo omogeneo e isotropo, accade che la densità di polarizzazione \mathbf{P} sia proporzionale al campo elettrico \mathbf{E} (confronta il § che segue ...), ovvero

$$\mathbf{P}(\mathbf{y}) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{y})$$

dove la costante χ è la “suscettività elettrica” del mezzo. Risulta dunque

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}$$

Nel caso del condensatore piano riempito di dielettrico omogeneo e isotropo, per ragioni di simmetria anche \mathbf{D} sarà uniforme e costante nel condensatore: poichè esso ha origine nelle cariche di conduzione, per il teorema della divergenza avremo che, a parità di carica, **esso sarà lo stesso sia che ci sia o che non ci sia il dielettrico**; ovvero, detto \mathbf{E}_0 il campo elettrico in assenza di dielettrico, sarà comunque

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$$

Per quanto abbiamo già visto, dunque la quantità $(1 + \chi)$ altri non è che la grandezza che abbiamo già chiamato ϵ_r , cioè la costante dielettrica relativa del mezzo.

Il legame fra \mathbf{D} ed \mathbf{E} in un dielettrico omogeneo e isotropo è quindi il seguente

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

Osserviamo, in particolare, che alla superficie di separazione fra due dielettrici (o fra un dielettrico ed il vuoto ...),

- i) la componente di \mathbf{D} ortogonale alla superficie è continua (mentre la stessa componente di \mathbf{E} non lo è, a causa della presenza delle cariche di polarizzazione ...);
- ii) la componente di \mathbf{E} parallela alla superficie è continua, poichè il campo \mathbf{E} è conservativo (mentre \mathbf{D} , in generale, non lo è ...).

In particolare, in un mezzo dielettrico omogeneo ed isotropo, la prima legge di Maxwell può essere riscritta nel modo seguente

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho_c / (\epsilon_0 \epsilon_r)$$

dove ρ_c è la carica di "conduzione" presente, cioè depurata da quella originata dal meccanismo della polarizzazione.

Poiché la seconda equazione di Maxwell, anche in presenza di dielettrico, non cambia, ecco che se ci troviamo in un mezzo isolante omogeneo e isotropo, dal punto di vista elettrostatico tutto va come se $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$!

Consideriamo allora due cariche (puntiformi) ad una distanza fissata e confrontiamo la forza elettrostatica esistente fra di loro quando sono in vuoto e quando si trovano immerse in un mezzo dielettrico: per quanto detto sopra, la sostituzione

$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$ comporta una riduzione della forza elettrostatica per un fattore ϵ_r , quando le due cariche sono in un mezzo dielettrico. Questa è la ragione per la quale l'acqua, che ha $\epsilon_r = 80$, è in grado di sciogliere così bene i sali minerali, riducendo appunto di un fattore ϵ_r la forza elettrostatica fra gli ioni...

Per quanto riguarda l'energia potenziale elettrostatica, cioè l'energia che serve per realizzare la particolare disposizione di cariche di conduzione voluta, essa vale naturalmente

$$U = 1/2 \int d^3y \rho_c(\mathbf{y}) V(\mathbf{y})$$

Usando la relazione $\text{div } \mathbf{E} = \rho_c/(\epsilon_0 \epsilon_r)$ e la consueta relazione fra il potenziale ed il campo elettrico, ne segue che, nel caso di un mezzo dielettrico omogeneo ed isotropo in cui sia presente un campo \mathbf{E} , la densità di energia risulta aumentata in proporzione ad ϵ_r

$$\text{in vuoto:} \quad u = |\mathbf{E}|^2 \epsilon_0 / 2$$

$$\text{in un dielettrico} \quad u = |\mathbf{E}|^2 (\epsilon_0 \epsilon_r) / 2$$

in accordo con la conclusione tratta sopra circa la sostituzione $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$.

Si noti infine che questo risultato rispecchia il fatto che, come abbiamo visto, la capacità del condensatore pieno di dielettrico risulta aumentata del fattore ϵ_r rispetto al caso in cui è vuoto, per cui, fissato il campo (ovvero la ddp ai suoi capi) l'energia immagazzinata nel condensatore

$$U = 1/2 C \Delta V^2 \quad \text{aumenta in proporzione a quanto aumenta la sua capacità, ovvero a } \epsilon_r.$$

1.20 La polarizzazione

Iniziamo considerando il caso di una sostanza, costituita da $N \gg 1$ molecole per unità di volume, aventi ciascuna un momento di dipolo elettrico permanente \mathbf{p} (in modulo uguale per tutte, e pari a p_0), in equilibrio termico alla temperatura T .

Chiaramente, se indichiamo con \mathbf{P} la densità di momento di dipolo elettrico risultante (momento di dipolo per unità di volume), esso sarà normalmente nullo

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{0}$$

essendo nulla la media del momento di dipolo $\langle \mathbf{p} \rangle$. Questo accade perchè, non essendo definita nella sostanza (che assumiamo omogenea e isotropa) alcuna direzione privilegiata, in ogni volume di sostanza si troveranno tanti dipoli con orientamento in un verso quanti dipoli con orientamento in verso opposto ...

Supponiamo ora che la sostanza si trovi immersa in un campo elettrico \mathbf{E} uniforme e costante (che, senza perdita di generalità, assumeremo diretto lungo l'asse z).

L'energia potenziale U di ciascun dipolo dipende adesso dal suo orientamento relativo al campo elettrico e risulta

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -p_0 E \cos \theta$$

dove θ è l'angolo fra il campo elettrico \mathbf{E} ed il momento di dipolo \mathbf{p} , che, per comodità, rappresenteremo in seguito nel modo seguente

$$\mathbf{p} = p_0 (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

essendo ϕ l'angolo azimutale che la proiezione di \mathbf{p} nel piano xy forma con l'asse x .

L'orientamento spaziale dei dipoli viene alterato dalla presenza del campo elettrico, a causa della dipendenza dell'energia potenziale da θ : all'equilibrio termico la distribuzione dei dipoli è fornita dalla distribuzione di Boltzmann, secondo cui la probabilità di avere un dipolo orientato nella direzione definita dagli angoli θ e ϕ vale

$$P(\theta, \phi) = M^{-1} \exp\{-U/kT\} = M^{-1} \exp(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}/kT) = M^{-1} \exp(p_0 E \cos \theta / kT)$$

dove $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K è la costante di Boltzmann, mentre M è la costante di normalizzazione (in modo che l'integrale della probabilità faccia 1), definita da

$$M = \int \exp(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}/kT) d\Omega = \int \exp(p_0 E \cos \theta / kT) \sin \theta d\theta d\phi$$

essendo $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ l'elemento di angolo solido.

Vediamo quali sono le conseguenze sulla densità di momento di dipolo: si ha

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p} \rangle = \left\{ N \int \mathbf{p} \exp(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}/kT) d\Omega \right\} / M$$

dove $\langle \mathbf{p} \rangle$ è il valor medio del momento di dipolo della singola molecola.

E' abbastanza evidente che, essendo la densità di probabilità P indipendente da ϕ , le componenti x ed y del valor medio $\langle \mathbf{p} \rangle$ sono entrambe identicamente nulle: occupiamoci dunque della componente z . Si ha

$$P_z = N \langle p_z \rangle = \left\{ N \int p_z \exp(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}/kT) d\Omega \right\} / M =$$

$$= \left\{ N \int p_0 \cos\theta \exp(p_0 E \cos\theta / kT) \sin\theta d\theta d\phi \right\} / M$$

Poniamo adesso, per comodità

$$\xi = E/kT$$

in modo che risulti

$$P_z = \left\{ N \int p_0 \cos\theta \exp(p_0 \xi \cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi \right\} / M$$

$$M = \int \exp(p_0 \xi \cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi$$

E' immediato verificare che risulta

$$P_z = N \frac{d}{d\xi} \{ \ln(M) \}$$

Calcoliamo dunque, esplicitamente M : si ha

$$M = \int \exp(p_0 \xi \cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi \int \exp(p_0 \xi \cos\theta) \sin\theta d\theta$$

Ma ricordando che

$$\sin\theta d\theta = -d(\cos\theta)$$

e che l'integrale su θ va fatto da 0 a π , ovvero che l'integrale su $d(\cos\theta)$ va fatto fra 1 e -1, abbiamo

$$M = 2\pi \int \exp(p_0 \xi x) dx$$

dove l'integrale in $dx = d(\cos\theta)$ è fatto fra -1 ed 1 (abbiamo riassorbito il segno negativo dal cambiamento di variabile, scambiando gli estremi di integrazione). Risulta

$$M = 2\pi [\exp(p_0 \xi) - \exp(-p_0 \xi)] / (p_0 \xi) = 4\pi [\text{sh}(p_0 \xi) / (p_0 \xi)]$$

dove abbiamo usato la definizione del seno iperbolico di x , secondo cui

$$\text{sh}(x) = [\exp(x) - \exp(-x)]/2$$

Per quanto riguarda la componente z della densità di dipolo elettrico, si ha dunque

$$P_z = N \frac{d}{d\xi} \{ \ln(M) \} \Rightarrow P_z = N \frac{d}{d\xi} \{ \ln [\text{sh}(p_0 \xi) / (p_0 \xi)] \}$$

Ponendo allora $x = p_0 \xi$, risulta infine

$$\begin{aligned} P_z &= N p_0 \frac{d}{dx} \{ \ln [\text{sh}(x)/x] \} = N p_0 \{ [x \text{ch}(x) - \text{sh}(x)] / x \text{sh}x \} = \\ &= N p_0 \{ \text{cth}(x) - 1/x \} \end{aligned}$$

Quando $x = p_0 \xi = p_0 E/kT \ll 1$, risulta

$$\text{sh}(x) = x + x^3/6 + \dots$$

$$\text{ch}(x) = 1 + x^2/2 + \dots$$

per cui

$$\{ [x \text{ch}(x) - \text{sh}(x)] / x \text{sh}x \} \cong 1/3x$$

ovvero, nel limite in cui $x \ll 1$,

$$P_z = N p_0 \{ \text{cth}(x) - 1/x \} \cong N p_0 x / 3 = N p_0^2 E / (3kT)$$

In forma vettoriale abbiamo

$$\mathbf{P} = N p_0 \{ \text{cth}(x) - 1/x \} \mathbf{E}/E$$

e, nel caso in cui $x \ll 1$, questa diventa

$$\mathbf{P} \cong N p_0 x / 3 = N p_0^2 \mathbf{E} / (3kT)$$

la quale mostra come la densità di momento di dipolo indotta risulti proporzionale ad \mathbf{E} (se la condizione $x \ll 1$ non è soddisfatta, pur restando \mathbf{P} allineato con \mathbf{E} , in generale non c'è più proporzionalità fra le due grandezze).

Quanto alla condizione $x \ll 1$, essa è praticamente sempre soddisfatta, almeno a temperatura ambiente, infatti, anche assumendo che il dipolo elementare sia fatto da due distribuzioni di carica pari a quella dell'elettrone ($1.6 \cdot 10^{-19}$ C), poste a distanza interatomica (10^{-10} m), si ha

$$T = 300 \text{ K} \Rightarrow kT = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \approx 5 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ V/m} \Rightarrow p_0 E < (1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-10}) \cdot 2 \cdot 10^6 \approx 3 \cdot 10^{-23} \text{ J}$$

per cui l'approssimazione $x \ll 1$ è ampiamente giustificata.

In conclusione, se la molecola è polare, la presenza di un campo esterno conduce alla nascita di una densità di momento di dipolo elettrico \mathbf{P} proporzionale ad \mathbf{E} , che scriveremo come

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}$$

dove il coefficiente adimensionale χ , detto “coefficiente di suscettività elettrica”, è legato al momento di dipolo intrinseco p_0 della molecola, al numero di molecole per unità di volume N ed alla temperatura, dalla relazione

$$\chi \cong N p_0^2 / (3 \epsilon_0 k T)$$

Questo coefficiente, a temperatura ambiente, è dell'ordine di 80 per l'acqua, e vale alcune unità in altre sostanze come carta, gomme, etc...

Esistono tuttavia anche isolanti costituiti da molecole che non sono "polari", cioè sprovviste di momento di dipolo elettrico intrinseco. Anche in tal caso si osserva, comunque, che, se sono inseriti fra le armature di un condensatore, questo aumenta di capacità, anche se, in genere, questo aumento è meno vistoso che nel caso il dielettrico sia costituito da molecole polari. La ragione è ancora sostanzialmente la stessa, con la differenza che, nel caso di molecole non polari, il momento di dipolo viene indotto dal campo stesso.

Esso è infatti provocato dallo spostamento relativo dei due baricentri di carica (negativa e positiva) prodotto dal campo esterno, nella sua stessa direzione, rispetto alla posizione di equilibrio preesistente, nella quale i due baricentri di carica erano coincidenti.

Dunque, anche nel caso non polare, avremo che, in presenza di un campo elettrico esterno, il vettore di polarizzazione \mathbf{P} non resterà più nullo, e risulterà ancora proporzionale ad \mathbf{E} , ovvero

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}$$

con la differenza che adesso il coefficiente χ sarà sostanzialmente più piccolo di prima.

2.1 La corrente continua

Abbiamo visto che un conduttore, in condizioni elettrostatiche, può avere cariche solo sulla sua superficie esterna, come conseguenza del fatto che il campo elettrico deve essere nullo al suo interno, altrimenti ci sarebbe moto di cariche.

Supponiamo di disporre di un dispositivo che possieda una "forza elettro-motrice (f.e.m.)" in grado di mantenere **comunque** una certa differenza di potenziale ΔV diversa da zero fra due conduttori (detti "poli"): da quanto precede possiamo solo escludere che questo dispositivo possa essere basato su sole forze di natura elettrostatica...

Questi dispositivi esistono, si chiamano "generatori" ed un esempio di questi sono le comuni pile ed accumulatori, che coinvolgono forze di natura elettrochimica.

Se colleghiamo i poli di un generatore in grado di mantenere una ddp ΔV ai capi di un filo conduttore di raggio costante R e lunghezza $L \gg R$, avremo che il campo elettrico all'interno del filo non potrà più essere nullo (dovendosi avere ai suoi estremi una ddp ΔV ...). Il campo elettrico dovrà avere sostanzialmente la direzione dell'asse del filo e, se il filo è omogeneo, per ragioni di simmetria, dovrà essere lo stesso in tutti i punti, per cui il suo modulo varrà

$$E = \Delta V / L$$

In queste condizioni, quello che si osserva è un flusso di cariche in moto nel conduttore. Per misurare questo flusso, definiamo la grandezza fisica "intensità di corrente elettrica" I come il rapporto fra la carica dQ che attraversa nel tempo dt una sezione fissa qualsiasi del conduttore. L'unità di misura della corrente nel sistema SI è il Coulomb/secondo, che è chiamato "Ampere" (A). Si noti che, poiché in condizioni stazionarie non ci possono essere accumuli di carica in nessuna parte del conduttore, il valore di I non può dipendere dalla particolare sezione scelta ...

Per conduttori metallici valgono le seguenti due leggi sperimentali (di Ohm)

- 1) La corrente è proporzionale alla ddp applicata al conduttore

$$\Delta V = R I$$

La costante di proporzionalità R è chiamata "Resistenza elettrica del conduttore" e si misura in Volt/Ampere = Ohm (Ω).

- 2) La resistenza di un filo conduttore dipende dalla sua geometria nel modo seguente

$$R = \rho L / S$$

dove ρ è la resistività specifica del materiale, funzione solo del particolare materiale di cui il conduttore è fatto e della temperatura, L è la lunghezza del filo conduttore e S la sua sezione.

Valori tipici di ρ sono

Alluminio	$\rho = 2.82 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Rame	$\rho = 1.72 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$
Ferro	$\rho = 10.0 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$

Un modello classico molto "naive" in grado di spiegare il fenomeno della resistenza elettrica nei metalli è il **modello di Drude**.

Noi sappiamo che, nel conduttore, ci sono elettroni liberi di muoversi. In assenza di campi elettrici esterni, questi elettroni sono animati da un moto caotico dovuto all'agitazione termica. Risulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{3}{2} k T \quad \Rightarrow \quad v = (3 k T/m)^{1/2} = \\ &= [3 * 1.38 * 10^{-23} * 293 / (9.11 * 10^{-31})]^{1/2} \approx 1.2 * 10^5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Questi elettroni interagiscono l'uno con l'altro e con gli ioni del reticolo cristallino del metallo. Indichiamo con τ il tempo medio fra due urti ($\approx 10^{-14}$ s !). Mediando nel tempo su molti urti, essendo quello degli elettroni un moto caotico, risulterà

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0}$$

Supponiamo adesso che gli elettroni si trovino immersi in un campo elettrico \mathbf{E} . Fra un urto ed il successivo, essi acquistano un impulso

$$\mathbf{p} = e\mathbf{E} \tau$$

che si somma a quello che già hanno a causa dell'agitazione termica, il quale, però, ha media nulla. Siccome \mathbf{p} è diretto comunque come \mathbf{E} , ne segue che l'impulso medio dell'elettrone non è più nullo ma vale

$$\langle \mathbf{p} \rangle = e\mathbf{E} \tau \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v} \rangle = e\mathbf{E} \tau / m$$

Se ci sono N elettroni liberi per unità di volume, la carica dq che nel tempo dt attraversa la sezione S del filo sarà

$$dq = N e |\langle \mathbf{v} \rangle| S dt$$

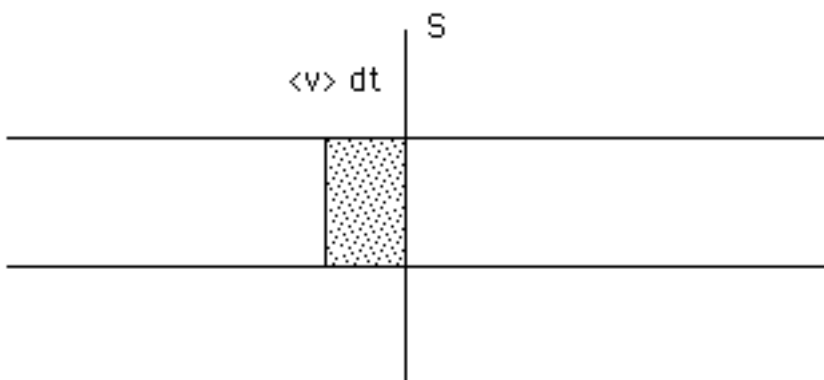


Fig. 31

ovvero il filo risulterà percorso da una intensità di corrente elettrica

$$I = dq/dt = N e |\langle v \rangle| S = N e S e |E| \tau / m = N e^2 (\tau / m) S (\Delta V / L)$$

La relazione ottenuta mostra che c'è linearità fra ΔV ed I (Prima legge di Ohm), e che la resistenza R del filo

$$R = m / (N e^2 \tau) * L / S$$

dipende dalla geometria del filo come stabilito dalla Seconda legge di Ohm ($\propto L/S$...).

Il modello è anche in grado di legare la resistività specifica ai parametri microscopici del materiale in studio, poiché stabilisce che

$$\rho = m / (N e^2 \tau)$$

Fornisce anche un modo per capire come mai, nei metalli, ρ è una funzione crescente della temperatura, infatti, al suo aumentare, diminuendo τ , ρ dovrà crescere ...

Il modello consente anche di valutare la velocità $|\langle v \rangle|$ di "deriva" degli elettroni in un metallo.

Assumiamo una condizione realistica di corrente, ovvero

$I = 1 \text{ A}$, $S = 1 \text{ mm}^2$; $N = 10^{23} \text{ elettroni/cm}^3$. Otteniamo

$$|\langle v \rangle| = I / N e S = 1 / (10^{23} * 1.6 * 10^{-19} * 10^{-2}) \approx 6. * 10^{-3} \text{ cm/s} !!!$$

Domanda: Come mai le lampadine si accendono immediatamente nonostante la velocità di deriva degli elettroni nei conduttori sia così esigua ?

2.2 La densità di corrente

Introduciamo adesso il concetto di "densità di corrente".

Indichiamo con $N(\mathbf{x})$ la densità di elettroni liberi, presente nel punto \mathbf{x} : abbiamo visto che, in presenza di un campo elettrico gli elettroni liberi "derivano" con una certa velocità media \mathbf{v} . Definiamo la densità di corrente nel punto \mathbf{x} nel modo seguente

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x}) e \mathbf{v}$$

dove e è la carica dell'elettrone.

Per definizione, la corrente che attraversa una certa superficie S è pari al flusso di \mathbf{J} attraverso quella superficie

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

Vediamo adesso una proprietà molto importante del vettore densità di corrente.

Prendendo una qualunque superficie chiusa Σ ed indicando con Q la carica totale che si trova racchiusa nel volume V delimitato dalla superficie Σ , si osserva sperimentalmente che ogni volta che la carica Q varia nel volume considerato c'è stato un flusso di carica verso l'esterno o verso l'interno.

E' una legge sperimentale che **la carica elettrica si conserva**.

Siccome il moto delle cariche è descritto localmente dal vettore densità di corrente, la legge di conservazione della carica elettrica è espressa matematicamente attraverso la relazione integrale

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{J}) \equiv -dQ/dt$$

ovvero

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -d/dt \int_V \rho dv$$

D'altronde, dal teorema di Gauss sappiamo che

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \equiv \int_V \text{div}(\mathbf{J}) dv$$

per cui ricaviamo infine che la conservazione della carica elettrica è espressa, in generale, dalla relazione differenziale (equazione di continuità)

$$\text{div } \mathbf{J}(\mathbf{x}) + d\rho(\mathbf{x})/dt = 0$$

Nel caso particolare delle correnti continue, trovandoci in una situazione stazionaria (cioè indipendente dal tempo), l'equazione di continuità diviene

$$\text{div } \mathbf{J} = 0$$

Nel caso particolare di conduzione metallica (ohmica), la dipendenza lineare fra la ddp ΔV applicata ai capi del filo conduttore e la corrente totale che fluisce in esso (Prima legge di Ohm),

$$\Delta V = R I$$

unita alla Seconda legge di Ohm

$$R = \rho L/S \quad \Rightarrow \quad I = \Delta V/R = \rho^{-1} (\Delta V/L) S$$

implica (ed è implicata da...) una relazione lineare fra $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ ed il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ nel punto considerato.

Se riprendiamo, per convincercene, il modello di Drude, verifichiamo che

$$\mathbf{J} = Ne \mathbf{v} = Ne (e\mathbf{E}\tau/m) = Ne^2 \mathbf{E} \tau/m = \rho^{-1} \mathbf{E}$$

Questo risultato in realtà è indipendente dal modello ed ha validità generale in tutti i casi di conduzione metallica (ohmica), dove accade che

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \rho^{-1} \mathbf{E}(\mathbf{x})$$

Infatti, se vale la relazione di cui sopra, per un filo calibro (di sezione costante), che sia realizzato con un conduttore omogeneo e isotropo, l'intensità del campo elettrico sarà costante al suo interno, ed il campo sarà allineato con l'asse del filo; quindi $E = \Delta V/L$, essendo $L \gg r$ la sua lunghezza. Dunque, essendo la corrente attraverso il filo data dal flusso di \mathbf{J} attraverso una sua qualunque sezione, scegliendo questa ortogonale all'asse del filo, risulta

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = \rho^{-1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = \rho^{-1} E S = \rho^{-1} S \Delta V/L$$

ovvero

$$\Delta V = I \rho L/S$$

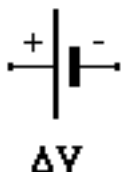
che compendia le due leggi di Ohm...

2.3 Condiderazioni su alcuni circuiti elettrici in cc

Un circuito elettrico in corrente continua è fatto, in generale, da generatori di fem e resistenze collegati fra loro insieme attraverso conduttori le cui resistenze o sono trascurabili rispetto a quelle esplicite nel circuito, oppure sono indicate in modo "concentrato", pur essendo esse distribuite lungo il conduttore...

In simboli, questi elementi circuitali, sono rappresentati nel modo seguente:

generatore



resistenza

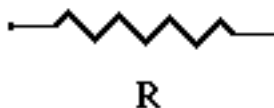


Fig. 32

Cominciamo dal circuito più semplice, costituito da un solo generatore e da una resistenza R. Assumeremo per il momento che il generatore sia capace di mantenere la stessa ddp ΔV ai suoi capi, qualunque sia la corrente erogata (generatore ideale di tensione).

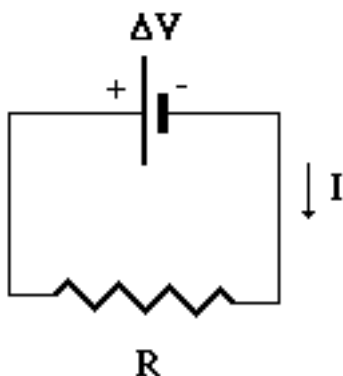


Fig.33

In questo circuito, per quanto abbiamo già visto, fluisce una corrente $I = \Delta V/R$ dal polo positivo (a potenziale più alto) verso il polo negativo (a potenziale più basso) del generatore: questo verso è "convenzionale" poiché è quello che seguirebbero davvero le cariche in movimento se esse fossero positive. In realtà, come sappiamo, sono gli elettroni a spostarsi nel conduttore, e questi vanno nel verso opposto (essi hanno carica negativa, quindi vanno dal - al + ...). Essendo il flusso di corrente costante sia nel tempo che lungo il circuito (conservazione della carica), ecco che nel tempo dt una carica $dQ = I dt$ passa dall'estremo della resistenza a potenziale maggiore a quello a potenziale minore, tutto il resto restando invariato. Ne segue che tale carica "perde" l'energia potenziale

$$dU = \Delta V dQ$$

la quale dovrà, per il principio di conservazione dell'energia, ritrovarsi sotto qualche altra forma.

Dal modello microscopico che abbiamo discusso precedentemente, possiamo capire che, se gli elettroni attraverso gli urti con gli ioni del reticolo del metallo, erano in equilibrio termico fra loro in assenza del campo elettrico prodotto dal generatore, nel momento che questo é presente, gli elettroni, poiché acquistano energia cinetica fra un urto e l'altro, non sono più in equilibrio termico con il reticolo, che quindi si riscalda sotto l'effetto del passaggio di corrente.

Si noti che, in assenza di perdite di calore da parte del metallo, il sistema non potrebbe mai raggiungere l'equilibrio termico in quanto gli elettroni continuano costantemente ad essere "riforniti" di energia dal generatore ...

La potenza dissipata nella resistenza vale dunque

$$W = dU/dt = \Delta V dQ/dt = \Delta V I = \Delta V^2/R = R I^2$$

che provoca, in generale, un riscaldamento della stessa, effetto noto come "effetto Joule".

Supponiamo adesso di disporre di due resistenze, R_1 ed R_2 .

Analogamente come nel caso dei condensatori, potremo disporle in due modi:

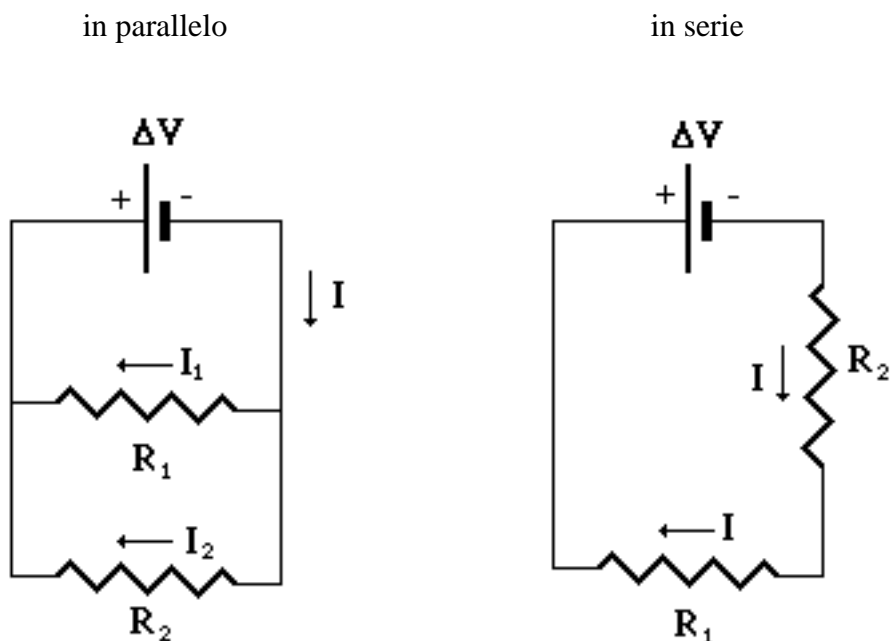


Fig.34

Nel primo caso (parallelo) la stessa ddp ΔV si trova applicata ai capi di entrambe le resistenze R_1 ed R_2 . Ne segue che in ognuna delle resistenze circolano, rispettivamente, le correnti

$$I_1 = \Delta V/R_1$$

$$I_2 = \Delta V/R_2$$

ed il generatore dovrà fornire la corrente totale (conservazione della carica applicata alla diramazione ...) I pari alla somma delle due correnti, cioè

$$I = I_1 + I_2 = \Delta V(1/R_1 + 1/R_2)$$

Dal punto di vista del generatore, le due resistenze in parallelo si comportano come una resistenza equivalente R_{eq} tale che

$$1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 \Rightarrow R_{eq} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$$

Chiaramente risulta sempre

$$R_{eq} < \min(R_1, R_2)$$

Nel secondo caso (serie) è la corrente I ad essere la stessa in entrambe le resistenze, poiché la corrente, come abbiamo visto, non può cambiare lungo uno stesso conduttore che non abbia diramazioni, a causa della legge di conservazione della carica elettrica. Dunque, poiché su ciascuna resistenza la ddp ai suoi capi è legata alla corrente che la attraversa (ed al suo verso: dal punto a potenziale maggiore verso quello a potenziale minore...) dalla Prima legge di Ohm, avremo

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = R_1 I + R_2 I = I (R_1 + R_2)$$

ovvero, stavolta, dal punto di vista del generatore, l'insieme delle due resistenze disposte in serie si comporta come una resistenza equivalente R_{eq} tale che

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Chiaramente, per la serie, risulta sempre

$$R_{eq} > \max(R_1, R_2)$$

Se le resistenze sono più di due, in molti casi (anche se non in tutti...) il circuito può essere "ridotto" sostituendo a gruppi di resistenze il loro valore equivalente.

Generalizzando quanto abbiamo visto, risulta

parallelo: $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + \dots$

serie $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$

Dal punto di vista della potenza, è il generatore che deve fornire comunque la potenza che viene dissipata sotto forma di calore nelle resistenze. Risulta

a) parallelo

$$U_1 = \Delta V I_1 ; U_2 = \Delta V I_2 \Rightarrow U = U_1 + U_2 = \Delta V (I_1 + I_2) = \Delta V^2 / R_{eq} = R_{eq} I^2$$

b) serie

$$U_1 = R_1 I^2 ; U_2 = R_2 I^2 \Rightarrow U = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2) I^2 = I^2 R_{eq} = \Delta V^2 / R_{eq}$$

2.4 Il generatore

Abbiamo parlato già varie volte di "generatori", ma non abbiamo ancora chiarito il loro principio di funzionamento: senza addentrarci nei dettagli, ci limiteremo ad alcune considerazioni generali.

Partiamo da un generatore isolato (circuito aperto...) che produce una ddp ΔV fra i suoi morsetti (poli) A e B.

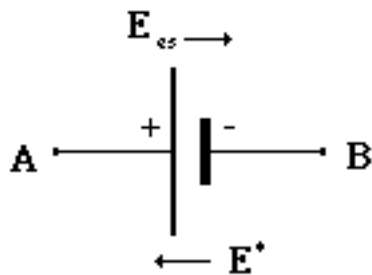


Fig. 35

Al suo interno sarà dunque presente un campo elettrico \mathbf{E}_{es} tale che

$$\Delta V = V_A - V_B = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Questa ddp è originata dal fatto che all'interno del generatore esiste un campo \mathbf{E}^* , che chiamiamo "campo elettromotore", il quale cerca di spostare le cariche positive dal polo negativo al polo positivo.

Si parla per questo di "generatore di forza elettromotrice (fem)".

Questo campo elettromotore può avere origini diverse, per esempio è di natura elettrochimica nelle pile e negli accumulatori (dove dell'energia chimica viene trasformata in energia elettrica), è di natura elettromeccanica nelle dinamo/alternatori (dove, appunto, è l'energia meccanica che viene trasformata in elettrica), etc...

Il campo elettromotore, quando il circuito è aperto, sposta cariche finché il campo elettrostatico \mathbf{E}_{es} che esse producono non lo equilibra esattamente. Ne segue che, a circuito aperto, avendo definito la fem \mathcal{E} del generatore nel modo seguente

$$\mathcal{E} = \int_B^A \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s}$$

risulta che la ddp ΔV ai capi del generatore è proprio uguale alla fem \mathcal{E} , infatti

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_A^B \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s} = \mathcal{E}$$

Immaginiamo ora di chiudere il circuito su una resistenza esterna R.

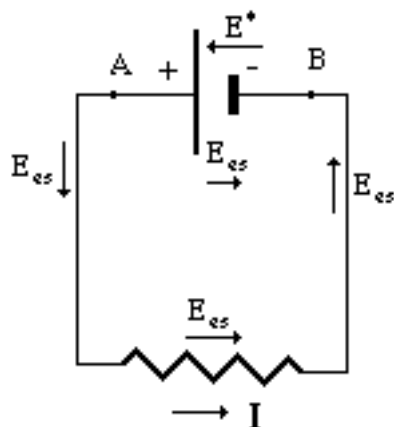


Fig. 36

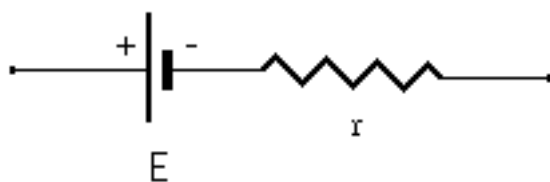
Le cariche potranno adesso tornare dal polo positivo A al polo negativo B dall'esterno, attraverso la resistenza R: è il fenomeno del passaggio di corrente.

Sperimentalmente si osserva, in generale, che nei generatori reali la ddp ΔV presente ai capi del generatore diminuisce rispetto ad E quando c'è erogazione di corrente. Come mai? La ragione è che anche il generatore reale di tensione ha una sua "resistenza interna" r , che esso oppone al passaggio della corrente che lo attraversa, per cui la ddp ΔV ai suoi capi a circuito chiuso è pari alla fem E del generatore, sottratta però della caduta ohmica al suo interno

$$\Delta V = E - r I$$

Ne segue che un generatore reale di tensione può essere schematizzato come un generatore di fem avente in serie una resistenza interna r .

generatore reale di tensione: Fig. 37



Risulta dunque

$$\Delta V = E - r I = R I \Rightarrow E = I(R + r) = I R_T$$

dove R_T è la resistenza totale presente nel circuito (esterna + interna...).

Questo risultato può essere espresso anche nella forma seguente, nota come "legge di Ohm generalizzata"

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = R_T I$$

dove l'integrazione è fatta sul circuito chiuso, orientato concordemente al verso di circolazione della corrente. Si ha infatti

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{E}_{es} \cdot d\mathbf{s} + \int \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s} = \int_B^A \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{s} = \mathcal{E}$$

dove si è tenuto conto del fatto che il campo elettrostatico è conservativo e della definizione della fem in base al campo \mathbf{E}^* (non conservativo!).

Dal punto di vista energetico, quando il circuito è chiuso ed è percorso da una corrente I , il campo elettromotore nel tempo dt fornisce alla carica $dQ = I dt$ una energia potenziale

$$dU = \mathcal{E} dQ = \mathcal{E} I dt$$

Questo avviene a spese dell'energia chimica in una pila, oppure dell'energia meccanica in un alternatore, etc... La potenza elettrica prodotta dal generatore è dunque

$$W_0 = \mathcal{E} I$$

D'altronde, la potenza che viene dissipata nel carico R vale

$$W = \Delta V I = R I^2$$

La differenza fra la potenza generata e quella dissipata nella resistenza esterna R vale

$$W_0 - W = (\mathcal{E} - \Delta V) I = r I^2$$

ovvero è pari alla potenza che viene dissipata nel generatore stesso, per effetto Joule (la pila si scalda quando eroga corrente !!).

Esercizio 1

Dato un generatore avente una certa fem ed una resistenza interna r , determinare per quale valore di resistenza esterna R si ottiene il massimo rendimento (definito come il rapporto fra la potenza assorbita e quella generata) e per quale valore si ha la massima potenza assorbita.

Soluzione:

Il rendimento vale

$$\eta = W/W_0 = \Delta V I / [(\Delta V + r I) I] = \Delta V / (\Delta V + r I) = R / (R + r)$$

Derivando rispetto ad R , la derivata è nulla per $R = \infty$.

Il massimo della potenza assorbita W si ha quando è massima la quantità $R I^2$:

$$W = R I^2 = R [E / (R + r)]^2$$

e questa quantità è massima rispetto ad R quando $R = r$.

2.5 Le leggi di Kirchhoff

Fino ad ora abbiamo considerato circuiti semplici, riconducibili a quello di un generatore di fem chiuso su una resistenza, eventualmente pari al valore equivalente di un insieme di resistenze connesse fra di loro in serie oppure in parallelo.

Abbiamo però detto anche che non tutti i circuiti sono riconducibili a questa situazione.

Vediamo come si affronta dunque il problema generale di una rete lineare, ovvero di una rete elettrica composta da generatori di fem e resistenze comunque complessa.

Premettiamo un po' di nomenclatura.

- a) nodo: Un nodo è un punto della rete dove convergono almeno tre conduttori.
- b) ramo: Un ramo è un tratto di circuito fra due nodi contigui, composto, in generale da resistenze e/o generatori di fem in serie fra loro (dovendo unire un nodo ad un altro nodo contiguo...)
- c) maglia: E' un insieme di rami tale da formare un unico cammino chiuso (non suddividibile ulteriormente in modo che resti chiuso). Questo cammino deve essere tale che, fissato un senso di circolazione nella maglia, ogni ramo deve essere percorso una ed una sola volta prima di tornare al punto di partenza.

Vediamo adesso alcune conseguenze della legge $\text{div } \mathbf{J} = 0$.

- i) in un ramo, non essendoci per definizione diramazioni, la corrente deve restare costante (lungo il ramo). In particolare se un ramo è connesso solo da un lato, esso non è percorso da corrente.

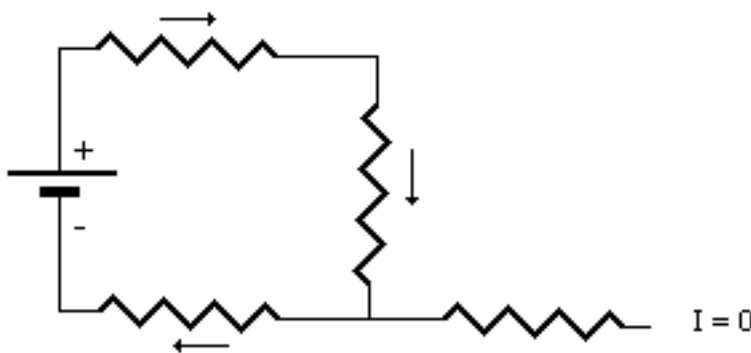


Fig. 38

- ii) Nel caso di un nodo, la somma delle correnti che convergono al nodo DEVE essere uguale alla somma delle correnti che si allontanano dallo stesso.

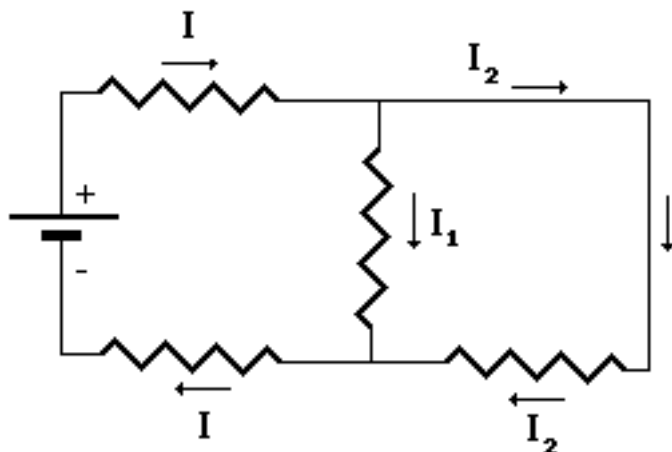


Fig. 39

Stabilendo allora che, dato un nodo, una corrente è negativa se confluisce verso il nodo ed è positiva se invece si allontana da esso, possiamo enunciare la legge seguente "Legge dei nodi"

$$\sum_k I_k = 0 \quad \text{prima legge di Kirchhoff}$$

dove la somma è estesa a tutti i rami confluenti verso il nodo assegnato.

Passiamo adesso a considerare una generica maglia m-esima, ed applichiamo ad essa la legge di Ohm generalizzata. Occorre per questo stabilire un verso di circolazione nella maglia.

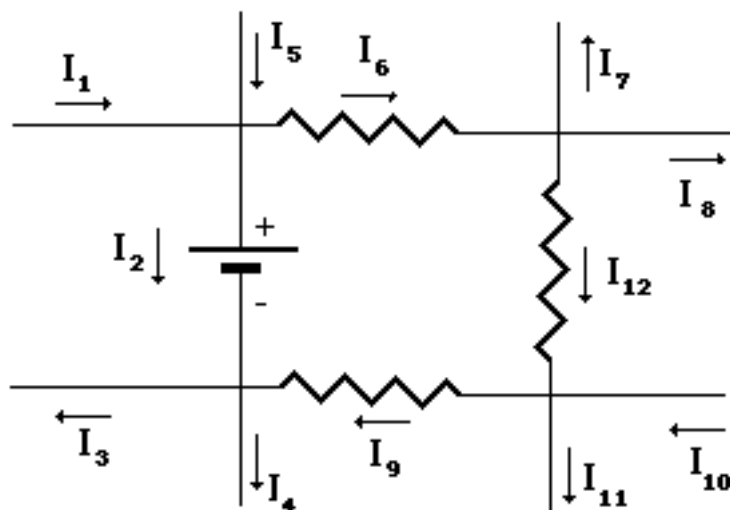


Fig. 40

Quando il circuito era fatto semplicemente da un solo generatore e da resistenze, questo verso di circolazione veniva scelto concorde con il verso della corrente: questa, però, non era una necessità, bensì solo una convenienza. Adesso questo criterio non sarebbe più nemmeno perseguibile perché la corrente può cambiare anche di verso da ramo a ramo della stessa maglia...

Il verso in questione è quello relativamente al quale si calcola la circuitazione del campo elettrico totale, ed è, a priori, arbitrario. Si sceglie quindi un verso di circolazione nella maglia qualsiasi e si considera positiva una caduta ohmica su una resistenza in cui la corrente che la attraversa sia concorde con il verso di circolazione scelto e negativa se invece è discorde. Risulta

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_j R_{(m)j} I_j$$

dove $R_{(m)j}$ è la resistenza appartenente alla maglia m-esima, percorsa dalla corrente j-esima I_j ed il segno della caduta ohmica è scelto in base al criterio esposto sopra.

D'altra parte, abbiamo visto anche che la circuitazione su un percorso chiuso del campo elettrico coincide con la somma delle forze elettromotrici dei generatori presenti sul circuito, con segno positivo se il generatore è "attraversato" dal polo negativo a quello positivo (cioè nel verso del campo elettromotore, opposto a quello elettrostatico che, invece va dal + al - ...), e con segno negativo nel caso opposto.

In formule, abbiamo così la "legge delle maglie", ovvero

$$\sum_k \mathbf{E}_k = \sum_j R_{mj} I_j \quad \text{seconda legge di Kirchhoff}$$

dove la somma su k è estesa a tutti i generatori presenti nella maglia, mentre la somma su j è estesa a tutte le resistenze incontrate nella maglia, percorse dalle correnti I_j .

Vediamo adesso come possiamo risolvere una rete lineare qualsiasi usando le due leggi di Kirchhoff.

Sia data dunque una rete lineare ed ammettiamo di conoscere le fem e le resistenze del circuito: vogliamo conoscere le correnti che percorrono ogni suo ramo.

Scomponiamo idealmente la rete in tante maglie quante ne servono affinché ogni ramo appartenga ad almeno una maglia ed ogni maglia abbia almeno un ramo che non appartiene a nessuna altra maglia.

Stabiliamo un verso di circolazione arbitrario in ogni maglia ed indichiamo con I_m

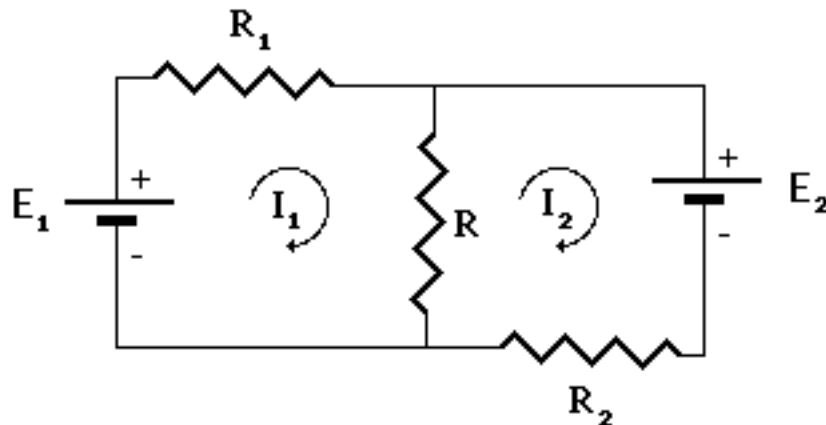
la corrente che fluisce nel ramo della maglia m-esima non in comune con altre maglie.

Applicando la prima legge di Kirchhoff possiamo scrivere le correnti in ogni ramo del circuito come combinazione delle correnti di maglia; infatti se quel ramo appartiene solo alla maglia m-esima allora, per definizione, sarà percorso dalla corrente I_m altrimenti, se il ramo è comune a varie maglie, la corrente che lo percorre sarà la somma algebrica di quelle correnti di maglia che confluiscono ai nodi caratteristici del ramo stesso.

Usando adesso la seconda legge di Kirchhoff applicata ad ogni maglia della nostra decomposizione, possiamo scrivere M equazioni lineari (quante sono le maglie) nelle M incognite I_m . Risolvendo il sistema si ha la soluzione al problema.

Esercizio 1

Calcolare le correnti nelle tre resistenze della seguente rete lineare



Soluzione:

Definite le due correnti di maglia I_1 e I_2 come in figura, la prima legge di Kirchhoff stabilisce che la corrente nella resistenza R è la differenza delle due correnti di maglia di cui sopra. Applicando la seconda legge di Kirchhoff alle due maglie scelte, otteniamo le due equazioni

$$E_1 = R_1 I_1 + R(I_1 - I_2)$$

$$-E_2 = R_2 I_2 + R(I_2 - I_1)$$

ovvero il sistema lineare non omogeneo seguente.

$$I_1(R + R_1) - I_2 R = E_1$$

$$I_1 R - I_2(R + R_2) = E_2$$

Il determinante della matrice

$$M = \begin{vmatrix} R+R_1 & -R \\ R & -(R+R_2) \end{vmatrix}$$

vale $R(R_1+R_2) + R_1 R_2$ e risulta

$$I_1 = [R(V_1 - V_2) + V_1 R_2] / [R(R_1 + R_2) + R_1 R_2]$$

$$I_2 = [R(V_2 - V_1) + V_2 R_1] / [R(R_1 + R_2) + R_1 R_2]$$

Osserviamo che, se $R \gg R_1, R_2$ allora abbiamo

$$I_1 \approx (V_1 - V_2) / (R_1 + R_2) \approx I_2$$

2.6 Carica e scarica del condensatore

Fin'ora abbiamo trattato il caso di circuiti in cui fluivano correnti continue. Vediamo adesso un caso in cui, invece, la corrente dipende dal tempo.

2.6.1 Carica del condensatore

Consideriamo il circuito costituito da un generatore di fem E , una resistenza R ed un condensatore.

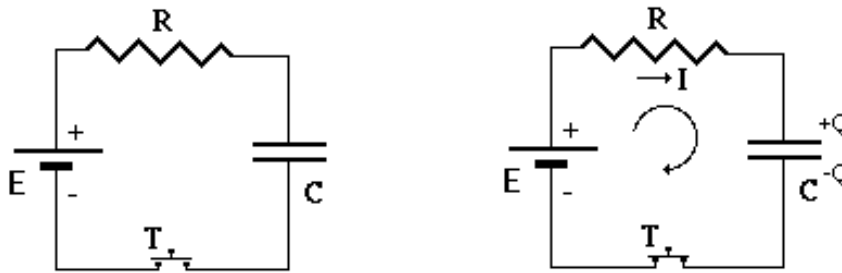


Fig.42

Immaginiamo che per $t < 0$ il tasto T sia aperto e che il condensatore C sia scarico.

Detta I la corrente nel circuito e V_c la ddp ai capi del condensatore, si ha chiaramente che

$$t < 0 : \quad I = 0 ; \quad V_c = 0$$

Supponiamo ora che al tempo $t=0$ il tasto T venga chiuso. La legge di Ohm generalizzata prevede che la fem E del generatore sia uguale alla somma della ddp ai capi della resistenza e di quella ai capi della capacità, ovvero

$$E = R I + V_c$$

Ricordando che $V_c(t) = Q(t)/C$ e che, essendo il condensatore in serie alla resistenza, $I = dQ(t)/dt$, si conclude che la carica $Q = Q(t)$ sull'armatura "positiva" soddisfa l'equazione differenziale

$$R \, dQ/dt + Q/C = E$$

ovvero

$$dQ/dt + Q/(RC) = E/R$$

Si tratta di una equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti, non omogenea.

La soluzione generale è la somma di una qualsiasi soluzione particolare dell'equazione non omogenea con la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Come soluzione particolare non omogenea, possiamo prendere la soluzione indipendente dal tempo, cioè:

$$Q(t) \equiv Q_0 = E C$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è la seguente

$$Q(t) = q \exp(-t/RC)$$

dove q è una costante di integrazione arbitraria.

In conclusione la soluzione cercata è del tipo

$$Q(t) = E C + q \exp(-t/RC)$$

La costante di integrazione q deve essere determinata attraverso le condizioni iniziali le quali stabiliscono che

$$Q(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad q = - E C$$

ovvero

$$Q(t) = E C (1 - \exp(-t/RC))$$

La quantità

$$\tau \equiv RC$$

che ha le dimensioni di un tempo, si chiama "costante di tempo caratteristica" del circuito.

Esempio: $R=1000\Omega$; $C=1\mu F \Rightarrow \tau = 1 \text{ ms}$.

Essa fornisce la "scala" temporale con la quale avviene il processo esponenziale di carica del condensatore.

Per esempio, dopo un tempo $\Delta t = \tau$ la carica sull'armatura positiva del condensatore è diventata

$Q(\tau) = Q_0(1-e^{-1})$, mentre dopo un tempo $\Delta t = 2\tau$ è diventata

$Q(2\tau) = Q_0(1-e^{-2})$, etc... .

Il risultato ottenuto mostra che la carica del condensatore è raggiunta asintoticamente, partendo dal valore $Q=0$ (condensatore scarico) per raggiungere il valore limite $Q_0 = E C$ (condensatore carico).

Circa la corrente nel circuito, abbiamo

$$I = dQ(t)/dt = - E C (-1/\tau) \exp(-t/\tau) = E R^{-1} \exp(-t/\tau)$$

ovvero è massima per $t = 0$, quando ha il valore istantaneo

$$I(t=0) = E R^{-1}$$

che avrebbe se il condensatore non ci fosse, e, asintoticamente, si annulla. Chiaramente, per la conservazione della carica elettrica, risulta

$$\int_0^{\infty} I(t) dt = Q_0 = E C$$

Vediamo ora che cosa succede all'energia.

La potenza istantanea prodotta dal generatore di fem vale

$$W_0(t) = E I(t)$$

mentre quella dissipata dalla resistenza per effetto Joule vale

$$W_R(t) = R I^2(t)$$

La differenza vale

$$\begin{aligned} W(t) &= \{ E - R I(t) \} I(t) = V_c(t) I(t) = C^{-1} Q(t) dQ(t)/dt = (1/2C) dQ^2(t)/dt = \\ &= d/dt \{ 1/2 C Q^2(t) \} \end{aligned}$$

cioè rappresenta la variazione di energia potenziale elettrostatica immagazzinata nel condensatore.

Dunque, istante per istante, il generatore "paga" la dissipazione che avviene nella resistenza e l'aumento di energia elettrostatica nella capacità.

Integrando nel tempo, si ottiene che l'energia generata U vale

$$U = \int_0^\infty W_0(t) dt = E Q_0 = E^2 C$$

L'energia dissipata nella resistenza durante tutto il processo di carica, a sua volta, vale

$$\begin{aligned} U_d &= \int_0^\infty W_R(t) dt = \int_0^\infty R I^2(t) dt = \int_0^\infty R (E/R)^2 \exp(-2t/\tau) dt = E^2/R \tau/2 = \\ &= 1/2 C E^2 \end{aligned}$$

Essa è metà dell'energia generata, ed è indipendente dal valore della resistenza R .

Questo è comprensibile dato che abbiamo visto che, istante per istante, l'energia prodotta è uguale alla somma di quella dissipata più quella immagazzinata come energia potenziale nel condensatore.

D'altronde l'energia totale generata vale $E Q_0 = E^2 C$ mentre quella immagazzinata è pari, a condensatore carico (asintoticamente) a $1/2 C E^2$...

2.6.2 Scarica del condensatore

Consideriamo ora il circuito di figura

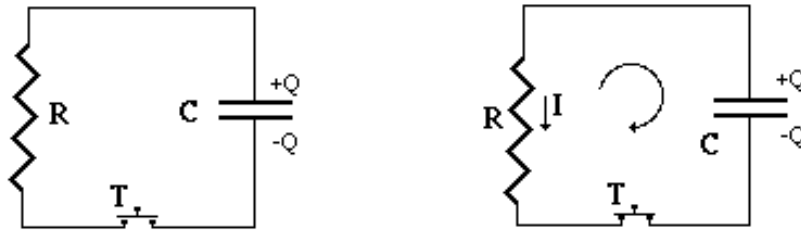


Fig.43

dove il condensatore di capacità C è, per $t < 0$, carico ad una ddp $\Delta V_0 = Q_0/C$. Al tempo $t=0$ il tasto T viene chiuso. La legge di Ohm generalizzata stabilisce che (non essendo presenti generatori di fem ...) risulta

$$0 = -R I + V_c$$

ma

$$I = -dQ/dt \quad \Rightarrow \quad R dQ/dt + Q/C = 0$$

Questa equazione differenziale omogenea è la stessa che quella incontrata per il processo di carica: la sua soluzione generale è

$$Q(t) = q \exp(-t/RC)$$

La costante di integrazione q viene fissata dalle condizioni iniziali e poiché $Q(t=0)$ vale Q_0 , risulta

$$Q(t) = Q_0 \exp(-t/RC)$$

La carica è massima a $t = 0$ e, asintoticamente, tende a zero. La costante di tempo del circuito è la stessa che nel processo di carica e vale $\tau = RC$.

La corrente nel circuito, durante la scarica, vale

$$I(t) = -dQ(t)/dt = Q_0/RC \exp(-t/RC) = \Delta V_0/R \exp(-t/RC)$$

Essa è esattamente la stessa funzione che durante il processo di carica: ne segue che l'energia dissipata vale di nuovo quanto valeva prima, ossia $1/2 C E^2$, cioè l'energia accumulata sotto forma di energia potenziale nel condensatore.

Si noti, comunque, che, rispetto all'armatura positiva del condensatore, la corrente procede ora in verso opposto a prima ...