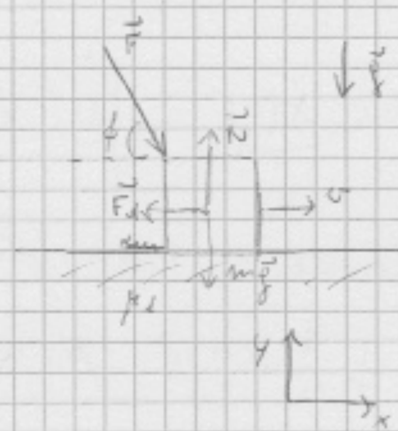
Esercizio 14 pag. 9 (sezione 3) File Esercizi Fisica Generale.



$m = 1.5\ Kg$

$\mu_d = 0.3$ attrito dinamico

$v_0 = 7\ \frac{m}{s} = v(t=0) = \dot{x}(t=0)$

$\vec{F}(t) = At$, con $A = 200\ \frac{N}{s}$

$\phi = 75° = \frac{5}{12}\pi$

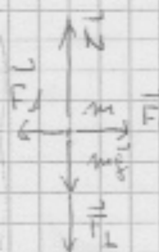
a) t_1 arresto $\Rightarrow t_1$ t.c. $v(t_1) = 0$

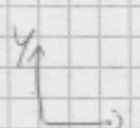
b) $x_1 = x(t_1)$

c) Lavoro delle forze non conservative $L_{nc} = ?$

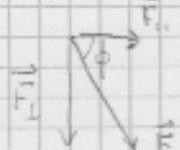
a) Scrivo eq. dinamica per m con obiettivo di integrare l'eq. del moto e trovare $v(t)$ ed $x(t)$.

$\rightsquigarrow \vec{F}_{TOT} = ma\,\hat{x}$. Scrivo $\vec{F} = F_{\parallel}\hat{x} - F_{\perp}\hat{y}$.





$$\begin{cases} \hat{x}: & F_{\parallel} - F_d = ma \\ \hat{y}: & N - F_{\perp} - mg = 0 \end{cases}$$



$F_{\parallel} = F\cos\phi$, $F_{\perp} = F\,\text{sen}\,\phi$

$$\Rightarrow N = F\,\text{sen}\phi + mg \qquad (\vec{N} = +N\,\hat{y})$$

$\vec{F}_d = -\mu_d N\,\hat{x}$, cioè $F_d = \mu_d N = \mu_d(F\,\text{sen}\,\phi + mg)$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{m}(F_{\parallel} - F_d) = \frac{1}{m}(F\cos\phi - \mu_d F\,\text{sen}\phi - \mu_d g m) =$$

$$a = \ddot{x} = \frac{F}{m}(\cos\phi - \mu_d\,\text{sen}\phi) - \mu_d g.$$

A questo punto devo integrare l'eq. del moto. Ma attenzione,

$F: F(t) = At \quad \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{A}{m}(\cos\phi - \mu_d \operatorname{sen}\phi)\, t - \mu_d g}$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\dot{x}(0)}_{= v_0} + \int_0^t dt'\, \ddot{x}(t') = v_0 + \frac{1}{2}\frac{A}{m}(\cos\phi - \mu_d \operatorname{sen}\phi)\, t^2 - \mu_d g t.$$

Per trovare t_1 t.c. $\dot{x}(t_1) = 0$, ~~introduco~~ calcolo:

$$\frac{1}{2}\frac{A}{m}(\cos\phi - \mu_d \operatorname{sen}\phi) = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}00}{1.5}\frac{N}{kg\cdot s}\left[\underbrace{\cos\left(\tfrac{5}{12}\pi\right)}_{\sim 0.259} - 0.3\,\underbrace{\operatorname{sen}\left(\tfrac{5}{12}\pi\right)}_{\sim 0.290}\right]$$

$$\simeq -\frac{10^2}{1.5}(0.031)\,\frac{m}{s^3} \simeq \underbrace{-2.1\,\frac{m}{s^3}}_{<0} \doteq -\alpha \qquad (\alpha > 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = v_0 - \mu_d g t - \alpha t^2}$$

$$\dot{x}(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1^2 + \frac{\mu_d g}{\alpha} t_1 - \frac{v_0}{\alpha} = 0$$

$$t_{1\pm} = -\frac{\mu_d g}{2\alpha} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu_d g}{\alpha}\right)^2 + \frac{4 v_0}{\alpha}} \qquad t_{1-} < 0 \Rightarrow \text{NON ACC.}$$

$$t_{1+} = \frac{\mu_d g}{2\alpha}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4 v_0 \alpha}{(\mu_d g)^2}}\right] \simeq \frac{0.3\cdot 9.81}{2\cdot 2.1}\,\frac{\cancel{m}}{s^2}\,\frac{s^3}{\cancel{m}}\left(-1 + \sqrt{1 + \underbrace{\frac{4\cdot 7\cdot 2.1}{(0.3\cdot 9.81)^2}}_{\sim 6.789}}\right)$$

$$\simeq +1.3\,s \doteq t_1$$

b) $x_1 \doteq x(t_1)$

$$\rightsquigarrow \text{Integro } x(t) = \overset{0}{\cancel{x(0)}} + \int_0^t dt'\, \dot{x}(t') =$$

$$x(t) = \int_0^t dt'\left[v_0 - \mu_d g t' - \alpha t'^2\right] = v_0 t - \mu_d g \frac{t^2}{2} - \alpha\frac{t^3}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = x(t_1) = v_0 t_1 - \mu_d g \frac{t_1^2}{2} - \alpha\frac{t_1^3}{3} \simeq \cancel{7\cdot 1.3\,\tfrac{m}{s}\,s}$$

$$\simeq \underbrace{7\cdot 1.3\,\frac{m}{\cancel{s}}\,\cancel{s}}_{\sim 9.1} - \underbrace{0.3\cdot 9.81\cdot\frac{(1.3)^2}{2}\frac{m}{s^2}s^2}_{\sim 2.49} - \underbrace{2.1\,\frac{m}{s^3}\frac{(1.3)^3}{3}s^3}_{\sim 1.54} \simeq 5.1\,m$$

c) Lavoro delle forze non conservative $L_{nc} = ?$

Dato che l'unica forza conservativa è la forza peso, ed il moto è ~~ortogonale ad essa~~ orizzontale, non vi è variazione di energia potenziale $\Rightarrow \boxed{E = T}$

Ne consegue che $E_{in} = E(t=0) = \frac{1}{2} m v_0^2$

mentre $E_{fin} = E(t=t_1) = 0$

Ma $\boxed{E_{fin} - E_{in} = + L_{nc}}$ [Analogamente, $\Delta T = L_{forze} = L_{nc}$ $\Rightarrow L_{nc} = -T_{in}$

Teorema delle forze vive

in questo caso f. conservative non fanno lavoro

$$\Rightarrow L_{nc} = -E_{in} = -\frac{1}{2} m V_0^2 = -\frac{1}{2} 5\,\text{kg} \cdot \left(7\,\frac{m}{s}\right)^2 \simeq -37\,J$$

[Nota: $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{v} = m\vec{a}\cdot\vec{v}$

Ma $m\vec{a}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2\right) = \frac{d}{dt} T$

$L = \int_{t_0}^{t} (\vec{F}\cdot\vec{v})\, dt'$ lavoro totale delle forze ~~~~

$\Rightarrow$ Integrando nel tempo trovo che: $\boxed{\Delta T = L}$ Teorema delle forze vive.

Allo stesso tempo, se ci sono forze conservative, $L = L_c + L_{nc}$

Le forze conservative posso scriverle come $\vec{F}_c = -\nabla V$

$$\Rightarrow L_c = \int_{t_0}^{t} -\nabla V(\vec{x}(t')) \cdot \vec{v}(t')\, dt' = V(t_0) - V(t) = -\Delta V$$

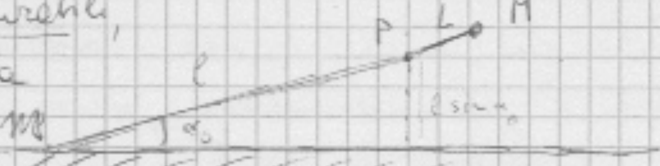
Ma allora $\Delta T = L_c + L_{nc} = -\Delta V + L_{nc} \Rightarrow \boxed{\Delta E = L_{nc}}$

Anche nel nostro esercizio, si sarebbe potuti partire da:

$$L = L_{nc} = \int_0^{t_1} (\vec{F}_{TOT} \cdot \vec{v})\, dt = \int_0^{t_1} \underbrace{(F_1(t) - F_d)}_{ma(t)} V(t)\, dt = \frac{1}{2} m \cancel{v^2(t_1)}_{0} - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Es. 1 Compito 19.07.2017 "Trabucco"

Asta di massa e dimensioni trascurabili, che ruota intorno a P. M a distanza L da P, m a distanza ℓ da P.



Asta inclinata di $\alpha_0 = 15° = \frac{\pi}{12}$.

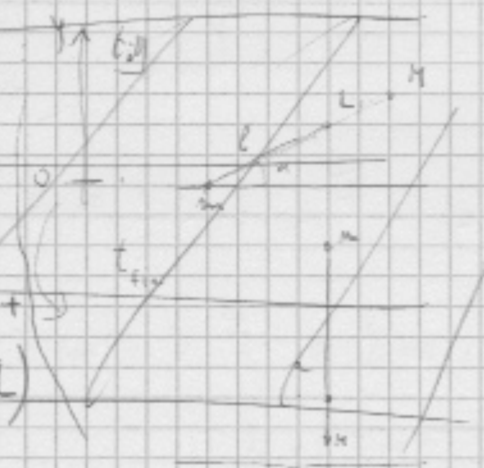
$M = 1000\ kg$, $L = 1\ m$, $\ell = 10\ m$,

1) Variazione energia potenziale gravitazionale tra istante iniziale e quello in cui l'asta è verticale con m in alto:

~~Prendendo $y = 0$ al suolo~~

$\cancel{U_{in} = U(t=0) = Mg(\ell + L)\sin\alpha}$

$\cancel{U_{fin} = U(t=t_f) = mg\ell(1+\sin\alpha) + Mg(\ell\sin\alpha - L)}$

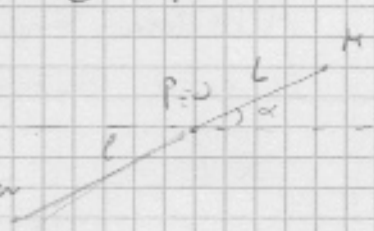


$\cancel{\Delta U = U_{fin} - U_{in} =}$

Prendo un sistema di riferimento in cui $O = P$

In tale riferimento: $y_M = L\sin\alpha$

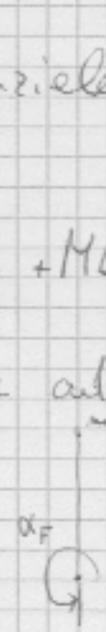
$y_m = \ell\sin(\pi + \alpha) = -\ell\sin\alpha$



Posso esprimere allora l'energia potenziale gravitazionale come funzione di α:

$$U(\alpha) = mg\,y_m + Mg\,y_M = g(-m\ell + ML)\sin\alpha$$

La configurazione iniziale corrisponde ad $\alpha = \alpha_0$; quella finale ad $\alpha = \alpha_F = \frac{3}{2}\pi$



$$\Delta U = U_{fin} - U_{in} = U\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) - U(\alpha_0) =$$

$$= g\left(ML - m\ell\right)\left(\underbrace{\operatorname{sen}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)}_{=-1} - \operatorname{sen}\alpha_0\right) = -g\left(ML - m\ell\right)(1+\operatorname{sen}$$

$$\rightsquigarrow \Delta U = -9.81\tfrac{N}{Kg}\underbrace{\left(10^3\cdot 1 - 10\cdot 10\right)}_{=900}Kg\cdot m\cdot\underbrace{\left(1+\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{12}\right)\right)}_{1.259} \simeq -1.11\cdot 10^4$$

2) Velocità del corpo di massa m quando si trova in y_F, cioè sistema è ad $\alpha_F = \frac{3}{2}\pi$. $(v_{fin} = ?)$

Energia meccanica di un istante generico è:

$$E = \frac{1}{2}MV_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 + U(\alpha)$$

Posso esprimere $V_M = L\dot\alpha$ e $\boxed{v_m = \ell\dot\alpha}$, cosicché:

$$E(\alpha,\dot\alpha) = \frac{1}{2}\left(ML^2 + m\ell^2\right)\dot\alpha^2 + U(\alpha) = T(\dot\alpha) + U(\alpha)$$

Il sistema è conservativo $\Rightarrow E_{in} = E_{fin}$

$$\Rightarrow E_{in} = E(\alpha_0; \dot\alpha = 0) = E_{fin} = E\left(+\tfrac{3}{2}\pi; \dot\alpha_{fin}\right)$$

$$\Rightarrow U(\alpha_0) = U\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) + T_{fin}$$

$$T_{fin} = U(\alpha_0) - U\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -\Delta U$$

$$\Rightarrow \dot\alpha_{fin}^2 = -\frac{2\Delta U}{ML^2 + m\ell^2}$$

$$\Rightarrow v_{fin} = \ell\sqrt{\frac{-2\Delta U}{ML^2 + m\ell^2}} = \sqrt{\frac{-2\Delta U}{M\left(\frac{L}{\ell}\right)^2 + m}} \simeq \sqrt{\frac{2\cdot 1.11\cdot 10^4}{(10^3\cdot 10^{-2} + 10)}\frac{m^2}{s^2}}$$

$$= \sqrt{1.11\cdot 10^3}\ \frac{m}{s} \simeq 33.3\ \frac{m}{s}$$

3) gittata = ?

Una volta lanciato, il proiettile è indipendente dall'asta.
Il moto in dir. $\hat{x}$ è rett. uniforme, mentre in dir. $\hat{y}$ è una caduta libera

$\hat{x}$:

$$\vec{V}_0 = \ell \dot{\alpha}_{fin} \hat{x} = V_{fin} \hat{x} = V_0 \hat{x} \Rightarrow V_x(t) = V_0 \Rightarrow x(t) = V_0 t$$

$\hat{y}$: Il terreno si trova ad $y = -\ell \sin\alpha$; $y_0 = +\ell$

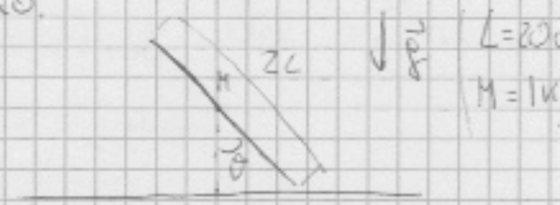
$$\Rightarrow y(t) = +\ell \cancel{+ \dot{y}(0) t} - \frac{1}{2} g t^2 \cancel{= -\ell \sin\alpha}$$

$$\Rightarrow y(t_F) = -\ell \sin\alpha \Rightarrow t_F = \sqrt{2\frac{\ell}{g}(1+\sin\alpha)}$$

$$\Rightarrow x(t_F) = V_0 \sqrt{2\frac{\ell}{g}(1+\sin\alpha)} \simeq 33.3 \frac{m}{s} \sqrt{\frac{2 \cdot 10 m}{9.81 m} s^2 \cdot 1.289} \simeq 53.4 \, m$$

Es 3 Compito 23/06/2020 - "Sbarretta che cade"

Una sbarretta di massa M, lunghezza 2L, ampiezza trascurabile, è appoggiata su un piano orizzontale liscio.

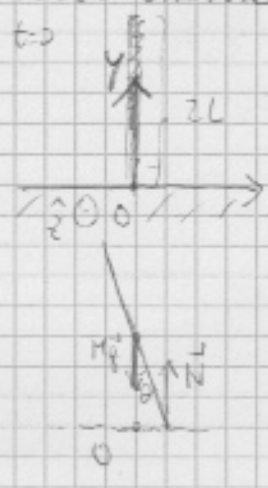


$\theta(t=0) = 0$

Durante caduta, $\theta \geq 0$; $\dot{\theta}(t=0) = 0$

$\dot{x}_{cm}(t=0) = \dot{y}_{cm}(t=0) = 0$ A t=0 la sbarretta, in equilib in posizione verticale, viene perturbata e cade.

a) Forze esterne e tipo di moto del c.m. della sbarretta.



Prendo O in p.to contatto con ~~piano~~ piano orizzontale a t=0.

Forze esterne sono la forza peso e la reazione normale del piano.

In assenza di forze orizzontali, il centro di massa cade verticalmente

$\Rightarrow x_{cm}(t) = 0$.

Inoltre $y_{cm}(t)$ soddisfa $M\ddot{y}_{cm} = N - Mg$

con $y_{cm}(0) = L$

$\dot{y}_{cm}(0) = 0$.

b) Relazione tra $\vec{v}_{CM}$ e $\dot{\theta}$ e ~~en. cinetica~~ $T(\dot{\theta}) = ?$

Poiché C.M. cade verticalmente, $x_{CM} = 0$ e $\vec{v}_{CM} = -v_{CM}\hat{y} = \dot{y}_{CM}\hat{y}$

inoltre vale $y_{CM}(t) = L\cos\theta(t)$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{y}_{CM} = -L\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} = -v_{CM}}$$

~~Allora~~ En. cinetica, per il Teorema di König:

$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\theta}^2$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12} M (2L)^2 = \frac{1}{3} M L^2$$ | mom. inerzia sbarretta rispetto a C.M.

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 \,\text{sen}^2\theta + \frac{1}{6} M L^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 \left(\text{sen}^2\theta + \frac{1}{3}\right)}$$

c) Il sistema è conservativo, perché $\vec{N}$ non fa lavoro.

Scrivo $\boxed{E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 \left(\text{sen}^2\theta + \frac{1}{3}\right) + M g L \cos\theta}$

Conservazione dell'energia $\Rightarrow E(\theta_{in} = 0, \dot{\theta} = 0) = E_{in} = MgL$

$E(\theta = \theta_{fin}, \dot{\theta} = \dot{\theta}_{max}) = E_{fin}$ ~~per~~ $E_{fin} = \frac{2}{3} M L^2 \dot{\theta}_{max}^2$

$\boxed{\theta_{fin} = \frac{\pi}{2}}$

$E_{in} = E_{fin} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{M} g \cancel{L} = \frac{2}{3} \cancel{M} L^{\cancel{2}} \dot{\theta}_{max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{max} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}} \simeq \sqrt{\frac{3}{2}\frac{9.81}{0.20}}\ s^{-1} \simeq 8.6\ s$$

Qui si è sfruttato il fatto che l'accelerazione del moto determina che $\dot{\theta}_{max}$ corrisponde all'istante finale, quando $\theta = \theta_{fin} = \frac{\pi}{2}$

Altrimenti ~~se no~~ si può comunque sfruttare la conservazione dell'energia:

$$E(\theta,\dot\theta) = E_{in} = MgL$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\dot\theta^2\left(\operatorname{sen}^2\theta+\frac{1}{3}\right) - \cancel{M}g\cancel{L}(1-\cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot\theta^2 = \frac{2g}{L}\,\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+\frac{1}{3}}}$$ Relazione tra $\dot\theta$ e θ;

Posso cercare il massimo in θ di $\dot\theta^2(\theta)$ ~~Il numeratore~~, ~~tra 0 e $\frac{\pi}{2}$~~

$\cancel{\frac{d\dot\theta^2}{d\theta} = \frac{2g}{L}\frac{\operatorname{sen}\theta}{(\operatorname{sen}^2\theta+\frac{1}{3})}}$ ~~è massimo per $\theta=\frac{\pi}{2}$ ($\Rightarrow \cos\theta = 0$)~~,

~~mentre~~

$$\frac{d\dot\theta^2}{d\theta} = \frac{2g}{L}\left[\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta+\frac{1}{3}} - 2\frac{(1-\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{(\operatorname{sen}^2\theta+\frac{1}{3})^2}\right] =$$

$$= \frac{2g}{L}\operatorname{sen}\theta\left[\frac{(\operatorname{sen}^2\theta+\frac{1}{3}) - 2\cos\theta + 2\cos^2\theta}{(\operatorname{sen}^2\theta+\frac{1}{3})^2}\right]$$

$\frac{2g}{L}\frac{\operatorname{sen}\theta}{(\operatorname{sen}^2\theta+\frac{1}{3})^2} \geq 0 \Rightarrow$ considero $\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}_{1-\cos^2\theta}+\frac{1}{3}-2\cos\theta+2\cos^2\theta \geq 0$

$$\Rightarrow \cos^2\theta - 2\cos\theta + \frac{4}{3} \geq 0$$

$$(\cos\theta-1)^2+\frac{1}{3} \geq 0 \quad \forall\theta$$

$\Rightarrow \frac{d\dot\theta^2}{d\theta} \geq 0$ sempre $\Rightarrow$ massimo all'estremo finale, ovvero

$\dot\theta_{max}$ corrisponde a $\theta_{fin} = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio tratto da sezione 8.4.3 del Morin "Introduction to Classical mechanics"

Un cilindro uniforme di massa M e raggio R è avvolto da una fune ideale ed appoggiato su un piano inclinato di un angolo θ. Il cilindro si può muovere di rotolamento puro lungo il piano. La fune, tramite una carrucola priva di massa, collega il cilindro ad un blocco di massa m, libero di cadere, come in figura.

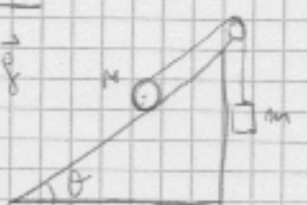
Assumendo la fune parallela al piano inclinato, determinare:

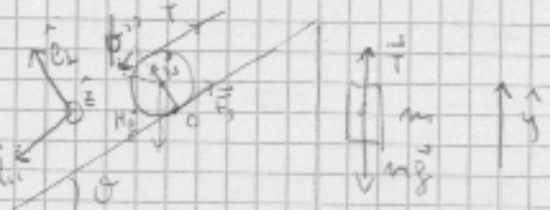
a) l'accelerazione del blocco di massa m;

b) la condizione sul rapporto $\frac{M}{m}$ t.c. il cilindro scenda lungo il piano.

c) la velocità del centro di massa del cilindro se il blocco percorre un tratto di lunghezza h, partendo da fermo.

a) $\downarrow \vec{g}$





$|\vec{T}|$ costante in modulo perché fune ideale e carrucola priva di massa

Su m: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \Rightarrow \hat{y}: \; m\vec{a} = ma\hat{y} = (-mg + T)\hat{y}$

$$\Rightarrow \boxed{ma = T - mg}$$

Su cilindro:

posso scrivere II eq. cardinale rispetto a qualunque punto posto sul piano, O'.

$$\vec{M}_{TOT,O'} = \vec{r}_{OO'} \times \vec{F}_{TOT} + \vec{M}_{TOT,O}$$

$$\vec{F}_{TOT} = M\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_s$$

Innanzitutto, $\vec{r}_{OO'} \parallel \hat{e}_\parallel \Rightarrow \vec{r}_{OO'} \times \vec{F}_{TOT} = \vec{r}_{OO'} \times (M\vec{g} + \vec{N}) =$

$= d_{OO'}\left(N - Mg\cos\theta\right)\hat{e}_\perp = 0$

perché $N = Mg\cos\theta$ garantisce che il centro di massa si muove lungo P.I.

$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_{TOT,O'} = \vec{M}_{TOT,O}}$

Rispetto ad O però $\vec{N}$ ed $\vec{F}_s$ non contribuiscono, per cui:

$$\vec{M}_{TOT,O} = \cancel{R(Mg\sin\theta)}\ \vec{r}_{C,O} \times M\vec{g} + \vec{r}_{P,O} \times \vec{T} =$$
$$= R\left(Mg\sin\theta - 2T\right)\hat{z}$$

La II eq. cardinale rispetto a qualunque O' è in effetti equivalente a quella scritta prendendo O come riferimento, infatti

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{C,O'} \times M\vec{v}_{c.m.} + I_{c.m.}\vec{\omega}_{c.m.} = \left[RMv_{cm} + I_{c.m.}\omega\right]\hat{z} = L_O\hat{z} \qquad (\omega = \dot{\phi})$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{M}_{O'}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O\right]$$

si riducono alla stessa espressione.

Inoltre, per la condizione di rotolamento puro, $v_{cm} = \omega R$

$$L_O = (MR^2 + \underbrace{I_{c.m.}}_{\frac{1}{2}MR^2})\,\omega\hat{z} \underset{\text{Huygens-Steiner}}{=} I_O\,\omega\hat{z}$$

; nel nostro caso $I_O = \frac{3}{2}MR^2$

Quindi, $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{TOT,O}$

$$\Rightarrow \boxed{I_O\,\ddot{\phi} = R\left(Mg\sin\theta - 2T\right)\hat{z}}$$

NOTA: ϕ è l'angolo di rotazione rispetto a C!

~~Per l'inestensibilità del filo, se quest'ultimo percorre tratto Δl, deve valere $\Delta l = R\Delta\phi$~~

~~ma per la condizione di rotolamento puro, deve valere $\Delta l = 2R\Delta\phi$~~

$$\boxed{\ddot{\phi} = \frac{a}{2R}}$$

Infatti, per rotolamento puro, $\ddot{\phi} = \frac{a_{cm}}{R}$; ma punto ~~del~~ P ~~estremo~~ ha sempre vel. istantanea doppia rispetto a C $\Rightarrow a_P = 2a_{cm}$.
Inoltre, per l'inestensibilità del filo, $a_P = a$.
Abbiamo quindi:

$$\Rightarrow \begin{cases} ma = T - mg \\ \frac{3}{2} M R^{\cancel{2}} \cdot \frac{a}{2\cancel{R}} = \cancel{R}\left(Mg \sin\theta - 2T \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{M}{2}\left(g \sin\theta - \frac{3}{4} a \right)$$

$$\Rightarrow ma = \frac{M}{2}\left(g \sin\theta - \frac{3}{4} a \right) - mg$$

$$\left(m + \frac{3}{8} M \right) a = \left[\frac{M}{2} \sin\theta - m \right] g$$

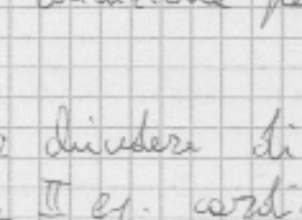
$$\Rightarrow \boxed{a = \left[\frac{M \sin\theta - 2m}{2m + \frac{3}{4} M} \right] g}$$

b) Condizione per discesa cilindro è $a > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{M}{m} > \frac{2}{\sin\theta}}$

Per chiudere discorso sul p.to rispetto a cui scrivere la II eq. cardinale, un'altra possibile scelta è il c.m.

In tal caso, $\frac{d\vec{L}_c}{dt} = I_{c.m.} \ddot{\phi} \hat{z} = \vec{r}_{P,C} \times \vec{T} + \vec{r}_{O,P} \times \vec{F}_s =$

$$= R\left(F_s - T \right) \hat{z} \qquad \text{con } I_{cm} = \frac{MR^2}{2}$$



a cui $M\vec{g}$ non contribuisca perché applicata in C, mentre $\vec{N}$ ha braccio nullo.

Serve però in questo caso trovare F_s - Pa tramite la I eq. cardinale per il disco, in dir. $\hat{e}_{\parallel}$

$$M a_{cm} \hat{e}_{\parallel} = (Mg \sin\theta - T - F_s)\hat{e}_{\parallel}$$

Ricordando che $a_{cm} = \frac{a}{2}$ e che $\ddot{\phi} = \frac{a}{2R}$, si ha un sistema di 3 equazioni per trovare a:

$$\begin{cases} m a = T - mg \\ \frac{MR^2}{2}\ddot{\phi} = \frac{MR^{\cancel{2}}}{2}\frac{a}{2\cancel{R}} = \cancel{R}(F_s - T) \\ M a_{cm} = M\frac{a}{2} = Mg\sin\theta - T - F_s \end{cases}$$

Dall'ultima, $\boxed{F_s = M\left(g\sin\theta - \frac{a}{2}\right) - T}$

Da cui $R^2 M \frac{a}{4R} = R\left[M\left(g\sin\theta - \frac{a}{2}\right) - 2T\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}MR^2 \frac{a}{2R} = R(Mg\sin\theta - 2T)}$$

Che è la II eq. cardinale rispetto ad O!

È quindi equivalente la scelta del polo.

---

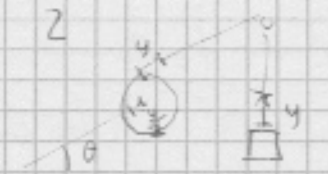
c) Per calcolare la relazione tra v ed h, scriviamo l'energia del sistema:

$$E = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\phi}^2 + g y\left(m - \frac{M\sin\theta}{2}\right) + \underbrace{\frac{m}{2}(2V_{cm})^2}_{\text{en. cinetica blocco}}$$

$$= \frac{3}{4}MV_{cm}^2 + g y\left(m - \frac{M\sin\theta}{2}\right) + 2mV_{cm}^2$$

$\dot{\phi} = \frac{V_{c.m.}}{R}$, $I_{c.m.} = \frac{MR^2}{2}$

Nello scrivere E, abbiamo scritto en. potenziale in modo che sia 0 all'istante iniziale; ed inoltre, se il blocco sale di y, il centro di massa del cilindro scende di $y\frac{\sin\theta}{2}$:



$$\Rightarrow U(y) = gy\left(m - M\frac{\sin\theta}{2}\right)$$

Con la nostra scelta, dato che all'inizio il sistema è fermo,

$$E_{in} = E(v_{cm}=0,\ y=0) = 0$$

$$E_{fin} = E(v_{cm},\ h)$$

Per cons. energia $E(v_{cm}, h) = 0$

$$= \left(m + \frac{3}{4}M\right)v_{cm}^2 - gh\left(\frac{M}{2}\sin\theta - m\right) = 0 \Rightarrow \boxed{v_{cm}^2 = \frac{gh\left(\frac{M}{2}\sin\theta - m\right)}{\left(2m + \frac{3}{4}M\right)}}$$

dove $\frac{M}{2}\sin\theta - m \geq 0$ se $\frac{M}{m} \geq \frac{2}{\sin\theta}$, cioè se cilindro scende! ok

—

Analogamente, $v_{cm} = a_{cm}t = \frac{a}{2}t$ (cm si muove di moto unif. accelerato con $a_{c.m.} = \frac{a}{2}$)

e $h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$

blocco sale con acc. a

$$\Rightarrow v_{cm}^2 = \frac{a^2t^2}{4} = \frac{2ah}{4_2} =$$

$$= h\frac{(2M\sin\theta - m)}{2m + \frac{3}{4}M}g$$

ok