0 Campi. I numeri complessi

0.1 Campi

Un *campo* $\mathbb{K}$ è un insieme su cui sono definite due operazioni $+$ e $\cdot$ che godono delle seguenti proprietà:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ *"associativà di +"*

(2) esiste $0 \in \mathbb{K}$ tale che $a + 0 = 0 + a$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ *"esistenza dello zero 0"*

(3) per ogni $a \in \mathbb{K}$ esiste $-a \in \mathbb{K}$ tale che $a + (-a) = -a + a = 0$ *"esistenza dell'opposto"*

(4) $a + b = a + b$ per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ *"commutatività di +"*

(5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $a \cdot (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ *"distributività"*

(6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{K}$ *"associativà di ·"*

(7) esiste $1 \in \mathbb{K}$ tale che $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ *"esistenza dell'uno 1"*

(8) $\forall\, a \in \mathbb{K}$ con $a \neq 0$ esiste $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tale che $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ *"esistenza inverso "*

(9) $a \cdot b = a \cdot b$ per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ *"commutatività di ·"*

Nomenclatura: Un insieme G dotato di una operazione che soddisfa le proprietà (1),(2) e (3) si dice *gruppo*; se vale anche la (4) si dice *gruppo commutativo o abeliano*. Dunque $\mathbb{K}$ con l'operazione $+$ è un gruppo abeliano e si vede facilmente che $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, considerato con l'operazione $\cdot$, è un gruppo abeliano.

Esempi: L'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ con la usuale somma è un gruppo abeliano. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, con le usuali operazioni di somma e prodotto, sono esempi di campi.

0.2 Il campo dei numeri complessi

Sull'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali siano definite operazioni di somma e di prodotto mediante

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \tag{1}$$

e

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu). \tag{2}$$

Con le operazioni 1 e 2, $\mathbb{R}^2$ ha una struttura algebrica di campo che denoteremo $\mathbb{C}$ e chiameremo il campo dei numeri complessi. Infatti si vede subito che la somma di numeri complessi è associativa, commutativa che l'elemento neutro della somma è il numero complesso $0 = (0, 0)$. Inoltre l'opposto di (a, b) è $(-a, -b)$. Si ha inoltre che il prodotto è associativo, commutativo con elemento neutro il numero complesso $1 = (1, 0)$. Il reciproco di $(a, b) \neq (0, 0)$ è dato da

$$(a, b)^{-1} = \frac{(a, -b)}{a^2 + b^2} \tag{3}$$

Infine vale la proprietà distributiva

$$(a_1, b_1)((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) = (a_1, b_1)(a_2, b_2) + (a_1, b_1)(a_3, b_3). \tag{4}$$

Il numero complesso $i = (0, 1)$ è tale che $i^2 = ii = -1$. A volte il numero i viene chiamato *unità immaginaria*. Evidentemente ogni numero complesso $z = (a, b)$ si ha

$$(a, b) = a + ib. \tag{5}$$

Allora per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ se $z = a + ib$ diremo che il numero (reale) $Re(z) = a$ è la *parte reale* di z e che il numero (reale) $Im(z) = b$ è la *parte immaginaria* di z. Il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ si identifica con il sottocampo di

$\mathbb{C}$ dei numeri complessi con parte immaginaria nulla (al quale è ovviamente isomorfo). Diremo quindi che un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è *reale* se la parte immaginaria di z è nulla. Una volta che i numeri complessi vengono scritti nella forma $z = a + ib$ suggerita da (5), le operazioni di somma e prodotto si possono interpretare in modo molto semplice e naturale. Infatti si possono intedere come somma e prodotto di polinomi di primo grado nella variabile i soggetta alla condizione $i^2 = -1$. Tutte le proprietà che abbiamo velocemente elencato diventano molto naturali e semplici da dimostrare (provare per credere!).

Il *coniugato* di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero $\overline{z} = a - ib$ e l'applicazione di $\mathbb{C}$ in sé definita da $z \mapsto \overline{z}$ si dice *coniugio*. Dunque $\mathbb{R}$ è esattamente l'insieme dei punti fissi del coniugio. Il coniugio è un automorfismo di $\mathbb{C}$ ossia

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad e \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}. \tag{6}$$

Inoltre il coniugio è involutivo, ossia $\overline{\overline{z}} = z$. È immediato verificare che

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad e \quad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Il *modulo* di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero reale

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Si osservi che da $|z|^2 = z\bar{z}$, se $z \neq 0$ si riottiene immediatamente

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{Re(z) - iIm(z)}{Re(z)^2 + Im(z)^2}.$$

Segnaliamo alcune proprietà del modulo. È immediato dalla definizione che

$$|z| \geq 0 \quad e \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$

e che

$$|zw| = |z||w| \qquad \text{e} \qquad |\bar{z}| = |z| = |-z|.$$

Dato che

$$|Re(z)|^2 \leq |Re(z)|^2 + |Im(z)|^2 = |z|^2 \qquad \text{e} \qquad |Im(z)|^2 \leq |Re(z)|^2 + |Im(z)|^2 = |z|^2$$

si ha

$$|Re(z)| \leq |z| \quad e \quad |Im(z)| \leq |z|.$$

Infine

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad e \quad |z - w| \geq ||z| - |w||.$$

Infatti

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

e

$$|z| \leq |z - w| + |w| \qquad \text{e} \qquad |w| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z|.$$

È molto utile rappresentare geometricamente i numeri complessi introducendo coordinate polari su $\mathbb{R}^2$. Per un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ abbiamo

$$(a, b) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

dove $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ è la distanza di (a, b) dall'origine e, per $(a, b) \neq (0, 0)$, θ è l'angolo fra il semiasse reale positivo e la semiretta uscente dall'origine e passante per (a, b). Allora con la notazione di numero complesso, se $z = a + ib$, avremo la seguente *forma trigonometrica* per z:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Per $z \neq 0$ l'angolo θ è determinato a meno di multipli interi di 2π; ogni tale angolo θ si dice *argomento* di z e si scrive $\theta = \arg z$. In forma trigonometrica il prodotto di due numeri complessi ha una semplice interpretazione geometrica. Se $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ allora da un calcolo immediato segue

$$zw = |z||w|(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)). \tag{7}$$

Dunque il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. Per evitare ambiguità in genere si fissa un intervallo di lunghezza 2π nel quale far variare l'argomento ad esempio l'intervallo $(-\pi, \pi]$. È molto utile usare la seguente notazione:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{8}$$

Dato che la (7) implica che $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$, la notazione (8) è coerente con le usuali proprietà dell'esponenziale.

Per quanto riguarda potenze (intere positive) di un numero complesso si ha il seguente elementare

Teorema 1 *Siano $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ e $n \geq 1$ un numero intero. Allora si ha la seguente formula di* De Moivre*:*

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{9}$$

Dimostrazione. La (9) si dimostra per induzione su n usando (7). Evidentemente è vera per $n = 1$. Supponiamo che sia vera per $n-1$ e calcoliamo la potenza n-esima:

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1}(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= |z|^n(\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \end{aligned}$$

□

Il campo complesso è il campo numerico "adatto" allo studio della risolubilità delle equazioni algebriche

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0. \tag{10}$$

Un numero complesso z_0 si dice radice del polinomio $P(z)$ se $P(z_0) = 0$. Ricordiamo che dati dati un polinomio $P(z)$ di grado n e un polinomio $D(z)$ di grado $d \leq n$ esiste un polinomio $Q(z)$ di grado $n-d$ e un polinomio $R(z)$ di grado $r < d$ chiamato *resto* tale che

$$P(z) = Q(z)D(z) + R(z). \tag{11}$$

Si dice che il polinomio $D(z)$ *divide* $P(z)$ se il resto è il polinomio nullo: $R(z) = 0$. Se z_0 è una radice del polinomio $P(z)$, allora il polinomio $z - z_0$ *divide* $P(z)$. Infatti se z_0 è una radice e si pone $D(z) = z - z_0$ in (11), allora $R(z)$ è un polinomio di grado 0 e quindi $R(z) = R_0$ è costante e $R_0 = P(z_0) - Q(z_0)D(z_0) = 0$. Si dice *molteplicità* della radice z_0 di $P(z)$ il più grande intero positivo m tale che $(z - z_0)^m$ divide $P(z)$. Di conseguenza un'equazione del tipo (10) ha *al più* n radici contate con la loro molteplicità. Come tutti sanno un'equazione del tipo (10) per un polinomio con coefficienti reali non sempre ha radici reali. Invece nel campo complesso si ha il seguente importante teorema:

Teorema 2 (Teorema Fondamentale dell'Algebra) *Se $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ è un polinomio di grado n con coefficienti complessi, esistono esattamente n radici (contate con la loro molteplicità) di $P(z)$.*

Una dimostrazione di questo teorema che usa solo le nozioni di analisi matematica del primo anno si può trovare nelle pagine 86-88 di Abate - de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, (sec. ediz.), McGraw-Hill, 2010. In questa sede ci accontentiamo trovare le radici di un numero complesso ossia di risolvere l'equazione $w^n = z$:

Proposizione 3 *Sia $n \geq 1$ un numero intero. L'equazione $w^n = 0$ ha soluzione unica $w = 0$ con molteplicità n. Per $0 \neq z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, le soluzioni dell'equazione $w^n = z$ sono gli n numeri complessi distinti*

$$\begin{aligned} w_0 &= |z|^{1/n}(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) = |z|^{1/n}e^{i\theta_0}, \\ &\vdots \\ w_{n-1} &= |z|^{1/n}(\cos\theta_{n-1} + i\sin\theta_{n-1}) = |z|^{1/n}e^{i\theta_{n-1}} \end{aligned} \tag{12}$$

dove, per $j = 0, \ldots, n-1$, si ha $\theta_j = \frac{\theta + 2\pi j}{n}$.

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato è ovvia. Per quanto riguarda la seconda si osservi che i numeri $w_0, \ldots, w_{n-1}$ in (12) sono tutti distinti (sono i vertici di un n-ennagono regolare inscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio $|z|^{1/n}$) e che, usando (9), per ogni $j = 0, \ldots, n-1$ si ha immediatamente che $w_j^n = z$. □

1 Matrici

In questo paragrafo diamo alcune notazioni e definizioni riguardanti le matrici e le operazioni fra matrici. Denoteremo con $\mathbb{K}$ l'insieme dei numeri che useremo. In genere si intenderà $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ossia utilizzeremo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. D'altra parte quello che ci servirà saranno solo le proprietà formali del prodotto e della somma fra numeri reali. Queste valgono ad esempio anche per $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali o per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, i numeri complessi di cui ci occuperemo più in là. Dunque le nozioni che introduciamo valgono anche per questi altri campi numerici.

Siano $m, n \geq 1$ due numeri interi ≥ 1. Una matrice A di con m righe e n colonne (o semplicemente $m \times n$ è una tabella

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{13}$$

di $m \times n$ numeri disposti su m righe e n colonne. I numeri a_{ij} si dicono elementi o entrate della matrice A e si dice a coefficienti in $\mathbb{K}$ se tutti gli elementi di A sono nell'insieme $\mathbb{K}$. In genere avremo a che fare con matrici a coefficienti nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Denotiamo $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici a coefficienti in $\mathbb{K}$. Nel caso in cui $m = n$ ossia in cui il numero delle righe sia uguale al numero delle colonne scriveremo semplicemente $M_n(\mathbb{K})$ invece di $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

Un caso particolare importante è quello delle matrici con una sola colonna $M_{m,1}(\mathbb{K})$ che in genere si denota semplicemente $\mathbb{K}^m$: l'insieme delle m-uple di elementi di $\mathbb{K}$ disposti in colonna. Dunque identificheremo sempre

$$\mathbb{K}^m = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{K} \right\} = M_{m,1}(\mathbb{K}) \tag{14}$$

È anche utile a volte considerare l'insieme delle m-uple di elementi di $\mathbb{K}$ disposti in riga. Lo denoteremo $(\mathbb{K}^m)^*$ e lo identificheremo con l'insieme delle matrici $M_{1,m}(\mathbb{K})$:

$$(\mathbb{K}^m)^* = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix} \mid y_i \in \mathbb{K} \right\} = M_{1,m}(\mathbb{K}) \tag{15}$$

Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, a volte denoteremo $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m\ j=1,\dots,n}$ o semplicemente $A = (a_{ij})$. Inoltre spesso è utile evidenziare le colonne $A^1, \dots A^n$ e le righe $A_1, \dots A_m$ di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \tag{16}$$

dove per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}, \qquad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Da questo punto in poi $\mathbb{K}$ sarà il campo reale $\mathbb{R}$ o il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Definiamo ora alcune operazioni fra matrici e fra numeri e matrici.

Somma di matrici.
Date due matrici $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, la loro *somma* $A + B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è definita da

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =_{def.} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Si noti che con $A-B$ intenderemo la matrice $A+(-B)$ dove $-B=(b_{ij})$, la matrice ottenuta da B moltiplicando per -1 tutti gli elementi di B. Dunque:

$$A-B =_{def.} A+(-B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_{11} & \dots & -b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{m1} & \dots & -b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Prodotto di una matrice per uno scalare.
Date una matrice $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e un numero $t \in \mathbb{K}$ – o come si dice spesso *uno scalare* – il prodotto $tA \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ di A per lo scalare t è definito da

$$tA = t \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =_{def.} \begin{pmatrix} ta_{11} & \dots & ta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ta_{m1} & \dots & ta_{mn} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Prodotto di una matrice riga per una matrice colonna.

Sia $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix} \in (\mathbb{K}^n)^* = M_{1,n}(\mathbb{K})$ una riga costituita da n elementi e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$ una costituita da n elementi colonna. Il *prodotto riga per colonna* di Y per X è definito da

$$YX =_{def.} y_1x_1 + \dots + y_nx_n = \sum_{j=1}^{n} y_jx_j. \quad (21)$$

Prodotto righe per colonne di matrici.
Il prodotto definito da (21) si estende al caso di due matrici dove la prima ha un numero di colonne pari al numero di righe della seconda. Se $A=(a_{il}) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ e $B=(b_{lj}) = \begin{pmatrix} B^1 & \dots & B^n \end{pmatrix} \in M_{k,n}(\mathbb{K})$ (in questo ordine!), il *prodotto righe per colonne* di A per B è la matrice $AB \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ definita da:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1 & \dots & B^n \end{pmatrix} =_{def.} \begin{pmatrix} A_1B^1 & \dots & A_1B^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_mB^1 & \dots & A_mB^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^k a_{1l}b_{l1} & \dots & \sum_{l=1}^k a_{1l}b_{ln} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{l=1}^k a_{ml}b_{l1} & \dots & \sum_{l=1}^k a_{ml}b_{n1} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Osservazione. Il caso del prodotto di una matrice per una colonna (delle giuste dimensioni) sarà utilizzato in molti contesti e si vede subito che, utilizzando tuttle le notazioni che abbiamo introdotto, per $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$ si ha:

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1l}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = x_1A^1 + \dots x_nA^n. \quad (23)$$

2 Sistemi lineari.

2.1 Generalità e Eliminazione di Gauss

Un sistema lineare è una collezione di m equazioni lineari in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{24}$$

Chiameremo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A' = (A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{25}$$

rispettivamente: *matrice dei coefficienti*, *colonna dei termini noti*, *matrice completa*, colonna delle incognite del sistema (24).

Usando le notazioni introdotte nel paragrafo precedente, se $A^1, \ldots, A^n$ sono le colonne di A e $A_1, \ldots, A_m$ sono le righe di A, abbiamo che il sistema (24) è equivalente a una delle seguenti:

$$Ax = b \qquad \text{oppure} \qquad x_1A^1 + \ldots + x_nA^n = b \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} A_1x = b_1 \\ \quad\vdots \\ A_mx = b_m \end{cases}. \tag{26}$$

Definizione. Una soluzione del sistema (24) è una n–upla di numeri $v_1, \ldots, v_n$ che, sostituiti alle incognite $x_1, \ldots, x_n$, verificano tutte le equazioni del sistema (24). Diremo in anche, in questo caso, che la colonna $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ è una soluzione del sistema (24).

Definizione. Dato un sistema $\mathcal{S}$, indicheremo con $Sol(\mathcal{S})$ l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}$. Due sistemi lineari $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni, ossia se $Sol(\mathcal{S}) = Sol(\mathcal{S}')$.

Si ha immediatamente la seguente importante osservazione:

Proposizione 4 *Dato un sistema lineare $\mathcal{S}$, se il sistema lineare $\mathcal{S}'$ è ottenuto da $\mathcal{S}$ mediante una successione delle seguenti operazioni:*
(i) lo scambio di due equazioni,
(ii) la sostituzione di un'equazione con la somma di questa con un multiplo di un'altra.
Allora $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ sono equivalenti, ossia $Sol(\mathcal{S}) = Sol(\mathcal{S}')$.

Dimostrazione. Il fatto che lo scambio di equazioni produce un sistema equivalente è evidente. Dato che scambiando equazioni si ottengono sistemi equivalenti, per dimostrare che operazioni del tipo (ii) produce sistemi equivalenti, basta limitarsi a esaminare il caso nel quale si sostituisca la prima equazione del sistema con la sua somma con un multiplo della seconda, ossia che i sistemi

$$\mathcal{S} : \begin{cases} A_1x = b_1 \\ A_2x = b_2 \\ \quad\vdots \\ A_mx = b_m \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{S}' : \begin{cases} A_1x + kA_2x = b_1 + kb_2 \\ \qquad A_2x = b_2 \\ \qquad\quad\vdots \\ \qquad A_mx = b_m \end{cases} \tag{27}$$

sono equivalenti. Se $v \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione di $\mathcal{S}$, risolve tutte le equazioni di $\mathcal{S}$ e quindi tutte le equazioni di $\mathcal{S}$ e quindi è una soluzione di $\mathcal{S}'$. Se $w \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione di $\mathcal{S}'$, allora

$$A_1w + kA_2w = b_1 + kb_2 \qquad \text{e} \qquad A_2w = b_2.$$

Dunque $kA_2w = kb_2$ e quindi $A_1w + kb_2 = A_1w + kA_2w = b_1 + kb_2$. Pertanto $A_1x = b_1$ e allora w è soluzione anche di $\mathcal{S}$. □

NOMENCLATURA: Diremo che un sistema lineare $\mathcal{S}'$ si ottiene mediante *Eliminazione di Gauss* da un altro sistema lineare $\mathcal{S}$ (o, equivalentemente, che $\mathcal{S}'$ è una *riduzione di Gauss* di $\mathcal{S}$) se $\mathcal{S}'$ si ottiene effettuando su $\mathcal{S}$ una successione (finita) delle seguenti operazioni:

(EG1) scambio di due equazioni;

(EG2) sostituzione di un'equazione con la somma di questa con un multiplo di un'altra.

Useremo lo stesso linguaggio per lae matrici. Più precisamente, diremo una matrice A' si ottiene mediante *Eliminazione di Gauss* da un'altra matrice A (o, equivalentemente, che A' è una *riduzione di Gauss* di A) se A' si ottiene effettuando su A una successione (finita) delle seguenti operazioni:

(EG1) scambio di due righe;

(EG2) sostituzione di una riga con la somma di questa con un multiplo di un'altra.

Si vede subito che una riduzione di Gauss operata su un sistema $Ax = b$ corrisponde a una riduzione di Gauss sulla matrice completa $(A|b)$ del sistema e viceversa. Useremo indifferentemente i due procedimenti a seconda della comodità e dell'opportunità.

2.2 Un caso speciale importante: i sistemi quadrati.

Un sistema $Ax = b$ si dice quadrato se la matrice A è *quadrata* ossia ha il numero di righe è uguale al numero delle colonne: $A \in M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$. Diremo che il sistema è *triangolare superiore* se è quadrato e la matrice dei coefficienti A è *triangolare superiore* ossia se per $i > j$ si ha $a_{ij} = 0$: gli elementi sotto la diagonale principale della matrice A sono tutti nulli. Per i sistemi triangolari l'esitenza e l'unicità delle soluzioni è caratterizzato dal seguente risultato:

Proposizione 5 *Sia $S \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice triangolare superiore. Il sistema lineare triangolare superiore $Sx = b$ ha soluzione unica se e solo se i termini sulla diagonale di $S = (s_{ij})$ sono tutti non nulli, ossia $s_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Il sistema $Sx = b$ per una matrice triangolare S si scrive:

$$\begin{cases} s_{11}x_1 + \dots\dots\dots\dots + s_{1n}x_n = b_1 \\ \hfill \vdots \hfill \\ \hfill s_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{28}$$

Se $s_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$, ossia se tutti gli elementi sulla diagonale di S sono non nulli, possiamo risolvere l'ultima equazione ottenedo $x_n = (s_{nn})^{-1}b_n$. Sostituendo nella penultima equazione, troviamo x_{n-1} e quindi, iterando troviamo, per "sostituzione all'indietro", l'unica soluzione del sistema. Viceversa assumiamo che il sistema $Sx = b$ abbia soluzione unica. Supponiamo che qualcuno degli s_{ii} sia nullo. Dimostreremo che questo fatto contraddice l'esistenza di un'unica soluzione per il sistema. Sia $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ l'unica soluzione di $Sx = b$. Sia k il più piccolo indice tale che $s_{kk} = 0$. Dunque, in particolare, per ogni $j < k$ si avrà $s_{jj} \neq 0$. Allora il sistema formato dalle ultime $n - k + 1$ equazioni di $Sx = b$ ammette soluzione $\begin{pmatrix} v_k \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. In particolare allora

$$s_{kk}v_k + s_{kk+1}v_{k+1} + \ldots + s_{kn}v_n = b_k.$$

D'altra parte, dato che $s_{kk} = 0$, per ogni $t \in \mathbb{K}$ con $t \neq v_k$ si ha

$$s_{kk}t + s_{kk+1}v_{k+1} + \ldots + s_{kn}v_n = b_k$$

e quindi il sistema formato dalle ultime $n-k+1$ equazioni di $Sx=b$ ammette come soluzione anche $\begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ per ogni $t \in \mathbb{K}$ con $t \neq v_k$. Ma allora, dato che per $i=1,\dots,k-1$ si ha $s_{ii} \neq 0$, come abbiamo fatto prima, sostituendo all'indietro, troviamo, contro l'ipotesi, una soluzione $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ t \\ v_{k-1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_k \\ v_{k-1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. □

Proposizione 6 (Riduzione di sistemi quadrati a forma triangolare superiore mediante Eliminazione di Gauss) *Ogni sistema quadrato $Ax=b$ ha una riduzione di Gauss triangolare superiore.*

Dimostrazione. Sia $A' = (A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{nn} & | & b_n \end{pmatrix}$ la matrice completa del sistema. Per la prima colonna di A, ci sono due possibilità:

$$\text{(P1): } A^1 \text{ non è tutta nulla,} \qquad \text{(P2): } A^1 \text{ è tutta nulla.}$$

Nel caso (P1), a meno di una operazione del tipo (EG1), scambio di righe, si può supporre $a_{11} \neq 0$. Allora, per ogni riga A'_i con $i \geq 2$ della matrice completa del sistema si effettui una operazione di tipo (EG2):

$$\text{si sostituisca} \quad A'_i \quad \text{con} \quad A'_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} A'_1.$$

Se invece vale (P2), la prima colonna di A contiene solo zeri, si proceda. Dopo aver fatto le queste operazioni elementari – l'eventuale scambio di righe e le sostituzioni di riga indicate – si ottiene una riduzione $\tilde{A}' = (\tilde{A}|\tilde{b})$ di $A' = (A|b)$ con la prima colonna che contiene solo zeri sotto il termine $\tilde{a}_{11}$:

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} & | & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & | & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} & | & \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

dove o $\tilde{a}_{11} \neq 0$ nel caso (P1) e $\tilde{a}_{11} = 0$ nel caso (P2). Si consideri ora la seconda colonna della matrice $\tilde{A}'$. Si presentano due possibilità:

$$\text{(P1): non tutti i termini } \tilde{a}_{22}, \dots, \tilde{a}_{m2} \text{ sulla seconda colonna sono nulli,} \qquad \text{(P2): } \tilde{a}_{22} = \dots = \tilde{a}_{m2} = 0.$$

Nel caso (P1), a meno di una operazione del tipo (EG1), scambio di righe, si può supporre $\tilde{a}_{22} \neq 0$. Allora, per ogni riga A'_i con $i \geq 2$ della matrice completa del sistema si effettui una operazione di tipo (EG2) per ottenere una riduzione di $\tilde{A}'$ con tutti termini sulla colonna successivi a $\tilde{a}_{22}$ uguali a 0. Se invece vale (P2), non occorre alcuna modifica. Si ottiene in questo modo una riduzione di Gauss della matrice completa $A' = (A|b)$ del sistema a una matrice con prima colonna con al più il primo elemento non nullo e seconda colonna con al più i primi due elementi non nulli. Ripetendo ulteriormente il procedimento per le successive $n-3$ colonne, si ottiene la desiderata riduzione a una matrice completa di un sistema triangolare superiore:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & * & * & \dots & \hat{a}_{1n} & | & \hat{b}_1 \\ 0 & \hat{a}_{22} & * & \dots & * & | & \hat{b}_2 \\ 0 & \tilde{0} & \hat{a}_{22} & * & * & | & \hat{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{nn} & | & \hat{b}_n \end{pmatrix}.$$

Proposizione 7 *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata. Il sistema quadrato $Ax = b$ ha soluzione unica se e solo se una sua qualunque riduzione di Gauss a sistema triangolare superiore $Sx = \tilde{b}$ è tale che i termini sulla diagonale di $S = (s_{ij})$ sono tutti non nulli, ossia $s_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Un sistema quadrato $Ax = b$ ha soluzione unica se e solo se una sua qualunque riduzione di Gauss a sistema triangolare superiore $Sx = \tilde{b}$ ha soluzione unica. A sua volta, come abbiamo visto, $Sx = \tilde{b}$ ha soluzione unica se e solo se i termini sulla diagonale di $S = (s_{ij})$ sono tutti non nulli, ossia $s_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. □

Concludiamo questa digressione sui sistemi quadrati con una definizione che useremo più avanti. Si osservi che, grazie alla Proposizione 7, la definizione che diamo è ben posta.

Definizione. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata. Diremo che A è *non singolare* se per una qualunque sua riduzione a scala $S = (s_{ij})$ i termini sulla diagonale di $S = (s_{ij})$ sono tutti non nulli, ossia $s_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ (ossia, equivalentemente, se il sistema $Ax = b$ ha soluzione unica), altrimenti si dice *singolare* (ossia, equivalentemente, se il sistema $Ax = b$ o non ha soluzione o ha soluzione non unica).

Osservazione. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata singolare. Dalla dimostrazione della Proposizione 7, segue immediatamente che, se il sistema $Ax = b$ ha una soluzione si possono costruire soluzioni distinte per ogni elemento del campo $\mathbb{K}$. Dunque, se $\mathbb{K}$ è infinito, il sistema $Ax = b$, se ha soluzioni, ha infinite soluzioni.

2.3 Sistemi lineari generali.

Discutiamo ora il caso di un sistema lineare generale:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{29}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A' = (A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{30}$$

sono rispettivamente la matrice dei coefficienti, la colonna dei termini noti, la matrice completa, la colonna delle incognite del sistema (29). La prima cosa da osservare è che il sistema (29), mediante una Eliminazione di Gauss, si può sempre ridurre a un sistema equivalente per il quale è semplice decidere se ci sono soluzioni e, in caso positivo, trovare tutte le soluzioni.

Definizione. Una matrice $S = (s_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si dice *matrice a scala* se ha la seguente proprietà: se in una riga i primi k elementi sono nulli allora la riga successiva (se esiste) o è tutta nulla o almeno i primi $k+1$ elementi sono nulli. In altre parole una matrice $S \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si dice una *matrice a scala* se è la matrice nulla o se è della forma

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & s_{1j_1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & s_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & s_{2j_2} & \ldots & \ldots & \ldots & s_{2n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & s_{3n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & s_{rj_r} & \ldots & s_{rn} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

dove $1 \leq r \leq m$ e $j_1, \dots, j_r$ sono interi tali che $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n$ e, per ogni $k = 1, \dots, r$ si ha $s_{kj} = 0$ per ogni $1 \leq j < j_k$ e $s_{kj_k} \neq 0$ mentre per $k > r$ si ha $s_{kj} = 0$ per ogni j. Gli elementi $s_{kj_k} \neq 0$ si dicono *pivot* della matrice S e il numero r dei pivot di S si dice *rango* della matrice S. Infine diremo che il sistema lineare $Sx = b$ è un *sistema a scala* se la matrice S è una matrice a scala. Per un sistema a scala $Sx = b$ con matrice $S = (s_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ data dalla (31) le incognite con gli indici uguali a quelli delle colonne su cui si trovano i pivot di S

$$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r},$$

si dicono *variabili dipendenti*, le altre, ossia

$$x_1, \ldots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \ldots, x_{j_2-1}, x_{j_2+1}, \ldots, x_{j_r-1}, x_{j_r+1}, \ldots \ldots, x_n$$

si dicono *variabili indipendenti (o libere)*.

Per quanto riguarda i sistemi a scala abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 8 *Sia $Sx = b$ un sistema a scala con matrice $S = (s_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ data dalla (31) dunque con pivots $s_{1j_1}, \ldots, s_{rj_r}$ e rango r. Il sistema ha soluzione se e solo se per il termine noto $b \in \mathbb{K}^m$ si ha $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$. Se il sistema ha soluzioni e $r < n$ allora il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da $n - r$ parametri. Se il sistema ha soluzioni e $r = n$ allora il sistema ha soluzione unica.*

Dimostrazione. Il sistema $Sx = b$ con matrice S data dalla (31) è dunque

$$\begin{cases} s_{1j_1}x_{j_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + s_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots \\ s_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + s_{rn}x_n = b_r \\ 0 = b_{j_r+1} \\ \vdots \\ 0 = b_m \end{cases} \tag{32}$$

e quindi si vede immediatamente che, affinché il sistema (32) abbia soluzione, si deve avere $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$. Supponiamo ora che in effetti si abbia $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$. Si osservi preliminarmente che allora il sistema (32) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} s_{1j_1}x_{j_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + s_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ s_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + s_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{33}$$

Se $r = n$ allora il sistema (33) è un sistema triangolare superiore con tutti i coefficienti sulla diagonale della matrice dei coefficienti non nulli. Per la Proposizione 5, allora il sistema (33), e quindi il sistema (32), ha soluzione unica. Se invece $r < n$, per ogni scelta di parametri

$$t_1, \ldots, t_{j_1-1}, t_{j_1+1}, \ldots, t_{j_2-1}, t_{j_2+1}, \ldots \ldots, t_{j_r-1}, t_{j_r+1}, \ldots, t_n \in \mathbb{K},$$

il sistema

$$\begin{cases} s_{1j_1}x_{j_1} + s_{1j_2}x_{j_2} + \ldots + s_{1j_r}x_{j_r} = b_1 - s_{1j_1+1}t_{j_1+1} + \ldots - s_{1j_2-1}t_{j_2-1} \ldots\ldots s_{rj_r+1}t_{j_r+1} + \ldots - s_{rn}t_n \\ \vdots \\ s_{rj_r}x_{j_r} = b_r - s_{rj_r+1}t_{j_r+1} + \ldots - s_{rn}t_n \end{cases} \tag{34}$$

ha soluzione unica (effettivamente calcolabile per "sostituzione all'indietro"), come indica la Proposizione 5, che si può esprimere nel modo seguente:

$$\begin{cases} x_{j_1} = F_1(t_{j_1-1}, t_{j_1+1}, \ldots, t_{j_2-1}, t_{j_2+1}, \ldots\ldots, t_{j_r-1}, t_{j_r+1}, \ldots, t_n) \\ x_{j_2} = F_2(t_{j_2-1}, t_{j_2+1}, \ldots\ldots, t_{j_r-1}, t_{j_r+1}, \ldots, t_n) \\ \vdots \\ x_{j_r} = F_r(t_{j_r+1}, \ldots, t_n). \end{cases} \tag{35}$$

Ma allora
$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ \quad\vdots \\ x_{j_1-1} = t_{j_1-1} \\ x_{j_1} = F_1(t_{j_1+1}, \dots, t_{j_2-1}, t_{j_2+1}, \dots\dots, t_{j_r-1}, t_{j_r+1}, \dots, t_n) \\ x_{j_1+1} = t_{j_1+1} \\ \quad\vdots \\ x_{j_2-1} = t_{j_2-1} \\ x_{j_2} = F_2(t_{j_2-1}, t_{j_2+1}, \dots\dots, t_{j_r-1}, t_{j_r+1}, \dots, t_n) \\ \quad\vdots \\ x_{j_r} = F_r(t_{j_r+1}, \dots, t_n) \\ x_{j_r+1} = t_{j_r+1} \\ \quad\vdots \\ x_n = t_n. \end{cases} \tag{36}$$
è una soluzione del sistema (34) per ogni scelta degli $n - r$ parametri
$$t_1, \dots, t_{j_1-1}, t_{j_1+1}, \dots, t_{j_2-1}, t_{j_2+1}, \dots\dots, t_{j_r-1}, t_{j_r+1}, \dots, t_n \in \mathbb{K}.$$
□

Per esaminare il caso generale cominciamo dimostriando che ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si può ridurre a una matrice a scala mediante una Eliminazione di Gauss.

Proposizione 9 *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Se A non è a scala, mediante una Eliminazione di Gauss, ossia una successione finita delle due seguenti operazioni sulle righe:*

(EG1) scambio di due righe,

(EG2) sostituzione di una riga con la somma di questa più un multiplo di un'altra,

si può sempre passare da A a una matrice a scala $S \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Dimostrazione. Sia $0 \leq k \leq n$ l'intero più grande tale che la matrice B costituita dalle prime k colonne di A è a scala. Se B non ha righe nulle, allora A è a scala e non c'è nulla da dimostrare. Se $k = n$, di nuovo A è a scala e non c'è nulla da dimostrare. Possiamo dunque assumere $0 \leq k < n$. Sia r l'indice della prima riga identicamente nulla di B se $k > 0$ e $r = 1$ se $k = 0$. Allora i numeri $a_{r\,k+1}, \dots, a_{m\,k+1}$ non possono essere tutti nulli, altrimenti esisterebbe una matrice a scala costituita da $k + 1$ colonne di A. A meno di scambiare le righe di A (operazione effettuabile mediante una successione finita di scambi di righe!) si può supporre che che $a_{r\,k+1} \neq 0$. Se per ogni indice $r < i \leq m$ si somma alla riga i-esima di A la r-esima riga moltiplicata per $-\frac{a_{i\,k+1}}{a_{r\,k+1}}$, si ottiene una una matrice A' tale che esiste una matrice a scala B' costituita da $k + 1$ colonne di A'. Iterando la procedura, con un numero finito di operazioni si ottiene una matrice a scala S come richiesto. □

Per il momento, combinando le Proposizioni 8, 9 e 7, possiamo concludere:

Teorema 10 *Sia $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ e $b \in \mathbb{K}^m$. Il sistema lineare $Ax = b$ ha soluzione se e solo se per una sua qualunque riduzione a scala $Sx = \tilde{b}$, se r è il rango di S (ossia il numero dei pivot di S), allora $\tilde{b}_{r+1} = \ldots = \tilde{b}_n = 0$. Se il sistema ha soluzioni e $r < n$ allora il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da $n - r$ parametri. Se il sistema ha soluzioni e $r = n$ allora il sistema ha soluzione unica. In particolare se $m = n$, allora il sistema ha soluzione unica se e solo se $r = n$.*

Dimostrazione. Immediata. $\square$

Concludiamo questo paragrafo riassumendo il metodo per determinare se un sistema $Ax = b$ è risolubile e in questo caso per trovare le soluzioni che si può ricavare dalle considerazioni fatte fino a questo punto.

ISTRUZIONI PER LA RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m, \quad \text{e} \quad A' = (A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix},$$

sono rispettivamente la matrice dei coefficienti del sistema, la colonna dei termini noti e la matrice completa del sistema. Mediante una Eliminazione di Gauss, ossia mediante operazioni del tipo

(EG1) scambio di due righe,

(EG2) sostituzione di una riga con la somma di questa più un multiplo di un'altra,

si ottiene $S' = (S|\tilde{b})$ la matrice completa di un sistema a scala $Sx = \tilde{b}$ dove S è una matrice a scala come in (31) e la matrice completa del sistema è dunque del tipo

$$S' = \left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & \dots & 0 & s_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & s_{1n} & | & \tilde{b}_1 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & s_{2j_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & s_{2n} & | & \tilde{b}_{21} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & s_{3j_3} & \dots & \dots & \dots & \dots & s_{3n} & | & \tilde{b}_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & s_{rj_r} & \dots & s_{rn} & | & \tilde{b}_r \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & | & \tilde{b}_{r+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & 0 & | & \tilde{b}_n
\end{array}\right). \tag{37}$$

Il sistema $Sx = \tilde{b}$ – e quindi il sistema $Ax = b$ che gli è equivalente – è dunque compatibile se $\tilde{b}_{r+1} = \ldots = \tilde{b}_n = 0$. Inoltre, quando sono compatibili, le soluzioni del sistema $Sx = \tilde{b}$, e quindi il sistema $Ax = b$, si calcolano nel modo seguente. Si osserva che il sistema $Sx = \tilde{b}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} s_{1j_1}x_{j_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + s_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \qquad s_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + s_{rn}x_n = \tilde{b}_r. \end{cases} \tag{38}$$

Se $r = n$ questo è un sistema quadrato con soluzione unica che si calcola per sostituzione all'indietro. Se invece $r < n$, per ogni assegnazione delle variabili libere

$$\begin{array}{ccccc} x_1 = t_1 \in \mathbb{K}, & x_{j_1+1} = t_{j_1+1} \in \mathbb{K}, & & x_{j_{r-1}+1} = t_{j_{r-1}+1} \in \mathbb{K}, & x_{j_r+1} = t_{j_r+1} \in \mathbb{K}, \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_{j_1-1} = t_{j_1-1} \in \mathbb{K}, & x_{j_2-1} = t_{j_2-1} \in \mathbb{K}, & & x_{j_r-1} = t_{j_r-1} \in \mathbb{K}, & x_n = t_n \in \mathbb{K}, \end{array}$$

in funzione di queste, si ricavano le variabili dipendenti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} s_{1j_1}x_{j_1} + s_{1j_2}x_{j_2} + \ldots + s_{1j_r}x_{j_r} = \tilde{b}_1 - s_{1j_1+1}t_{j_1+1} + \ldots - s_{1j_2-1}t_{j_2-1} \ldots\ldots s_{rj_r+1}t_{j_r+1} + \ldots - s_{rn}t_n \\ \qquad\qquad\vdots \\ \qquad s_{rj_r}x_{j_r} = \tilde{b}_r - s_{rj_r+1}t_{j_r+1} + \ldots - s_{rn}t_n \end{cases} \tag{39}$$

che ha soluzione unica calcolabile per sostituzione all'indietro. In questo modo si ottengono tutte le soluzioni che dipendono da $n - r$ parametri.

Esempio. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 10 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$. La matrice completa del sistema è quindi data da

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 5 & -2 & 1 & -3 & 3 & | & 10 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & | & 5. \end{pmatrix}.$$

Riduciamo a scala usando l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 5 & -2 & 1 & -3 & 3 & | & 10 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 2 & | & 5 \\ 5 & -2 & 1 & -3 & 3 & | & 10 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 5 & | & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 8 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 8 & | & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 5 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque il sistema è equivalente al sistema a scala

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_4 - x_5 = -3 \end{cases}.$$

In questo sistema le variabili libere sono la x_3 e la x_5. Per qualunque scelta di $s, t \in \mathbb{R}$, posto $x_3 = s$ e la $x_5 = t$, deve essere allora

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 2 + s + t \\ x_2 + 2x_4 = 1 - 2s - 3t \\ x_4 = -3 + t \end{cases}$$

e pertanto le soluzioni del sistema sono date da

$$\begin{cases} x_1 = 3 - s - 2t \\ x_2 = 7 - 2s - 5t \\ x_3 = s \\ x_4 = -3 + t \\ x_5 = t \end{cases} \qquad \text{per ogni} \quad s, t \in \mathbb{R}. \tag{40}$$

Utilizzando le notazioni introdotte per la somma di colonne e il prodotto per scalari, si osservo che da (40), segue che possiamo descrivere le soluzioni $v \in \mathbb{R}^5$ del sistema in questo modo:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - s - 2t \\ 7 - 2s - 5t \\ s \\ -3 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2.4 Sistemi omogenei e teorema di struttura per sistemi lineari.

Un sistema lineare omogeneo è, per definizione un sistema lineare con colonna dei termini noti nulla: $\mathbb{O}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, dunque un sistema del tipo $Ax = \mathbb{O}_m$, dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ossia:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{41}$$

Dunque un sistema omogeneo (41) ha sempre almeno una soluzione, la *soluzione nulla*: $\mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

È utile riassumere alcune semplici proprietà dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo:

Proposizione 11 *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia $Sol_{\mathbb{O}}(A)$ l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = \mathbb{O}_m$. Allora*

(i) Se $v, w \in Sol_{\mathbb{O}}(A)$, allora $v + w \in Sol_{\mathbb{O}}(A)$;

(ii) Se $v \in Sol_{\mathbb{O}}(A)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $\lambda v \in Sol_{\mathbb{O}}(A)$.

Dimostrazione. Siano $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ e $w_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ due soluzioni di $Ax = \mathbb{O}_m$. Allora, se $A_1, \ldots, A_n$ sono le colonne di $A = (a_{ij})$, si deve avere:

$$v_1A_1 + \ldots + v_nA_n = Av = \mathbb{O}_m = Aw = w_1A_1 + \ldots + w_nA_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} A(v + w) &= (v_1 + w_1)A_1 + \ldots + (v_n + w_n)A_n \\ &= v_1A_1 + w_1A_1 + \ldots + v_nA_n + w_nA_n = v_1A_1 + \ldots + v_nA_n + w_1A_1 + \ldots + w_nA_n = \mathbb{O}_m \end{aligned}$$

e quindi $v + w \in Sol_{\mathbb{O}}(A)$. Analogamente si procede per dimostrare (ii). □

Per un sistema lineare $Ax = b$, dove $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $b \in \mathbb{K}^m$, il sistema $Ax = \mathbb{O}_m$ si dice *sistema omogeneo aassociato*. Se denotiamo con $Sol_b(A)$ l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = b$ e con $Sol_{\mathbb{O}}(A)$ l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato $Ax = \mathbb{O}_m$, si dimostra un utile risultato che lega $Sol_b(A)$ e $Sol_{\mathbb{O}}(A)$. Prima introduciamo una notazione che spesso si usa. Per un sottoinsieme $S \subset \mathbb{K}^n$ e per una colonna $z \in \mathbb{K}^n$ si definisce l'insieme $z + S \subset \mathbb{K}^n$ nel modo seguente:

$$z + S = \{v = s + w \in \mathbb{K}^n \mid w \in S\}\,. \tag{42}$$

Teorema 12 (Teorema di struttura dei sistemi lineari) *Sia $\underline{v} \in Sol_b(A)$ una qualunque soluzione del sistema $Ax = b$. Allora*

$$Sol_b(A) = \underline{v} + Sol_{\mathbb{O}}(A) = \{v = \underline{v} + w \in \mathbb{K}^n \mid w \in Sol_{\mathbb{O}}(A)\}\,. \tag{43}$$

In particolare, da (43) segue che se il sistema $Ax = b$ ha soluzione, questa è unica se e solo se il sistema omogeneo associato $Ax = \mathbb{O}_m$ ha soluzione unica.

Dimostrazione. Sia $v = \underline{v} + w \in \underline{v} + Sol_{\mathbb{O}}(A)$ dove, quindi, $w \in Sol_{\mathbb{O}}(A)$ è una soluzione di $Ax = \mathbb{O}_m$. Allora

$$\begin{aligned} Av &= A(\underline{v} + w) = (\underline{v} + w)_1A_1 + \ldots + (\underline{v} + w)_nA_n \\ &= \underline{v}_1A_1 + \ldots + \underline{v}_nA_n + w_1A_1 + \ldots + w_nA_n = A\underline{v} + Aw = A\underline{v} = b \end{aligned}$$

e quindi $v = \underline{v} + w \in Sol_b(A)$. Segue allora che $\underline{v} + Sol_{\mathbb{O}}(A) \subset Sol_b(A)$.

Sia ora $v \in Sol_b(A)$. Se $w = v - \underline{v}$ allora $v = \underline{v} + w$ e quindi per concludere che $Sol_b(A) \subset \underline{v} + Sol_{\mathbb{O}}(A)$ basta provare che $w = v - \underline{v} \in Sol_{\mathbb{O}}(A)$. Si tratta di una semplice verifica:

$$\begin{aligned} Aw &= A(v - \underline{v}) = (v - \underline{v})_1 A_1 + \ldots + (v - \underline{v})_n A_n \\ &= v_1 A_1 + \ldots + v_n A_n - (\underline{v}_1 A_1 + \ldots + \underline{v}_n A_n) = Av - A\underline{v} = b - b = \mathbb{O}_m. \end{aligned}$$

Dunque $Sol_b(A) = \underline{v} + Sol_{\mathbb{O}}(A)$ da cui segue è immediato concludere che, nel caso in cui il sistema $Ax = b$ abbia soluzione, questa è unica se e solo se il sistema omogeneo associato $Ax = \mathbb{O}_m$ ha soluzione unica. $\square$