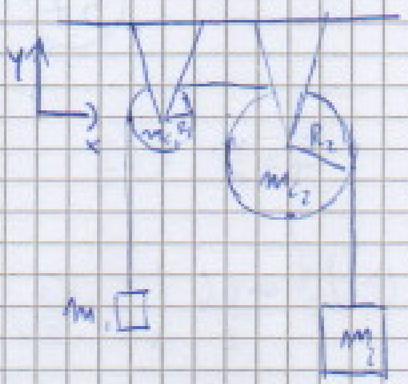


$m_1 = 5.00\,kg$
$m_{c_1} = 0.100\,kg$
$r_1 = 5.00 \cdot 10^{-2}\,m$
$h = 1.00\,m$
$M = 0.20\,N \cdot m$

Il sistema in esame è costituito da due corpi m_1 e m_2, collegati tra loro da una corda, di massa trascurabile rispetto a quella dei corpi, che scorre senza attrito su due carrucole (assimilabili a dischi di massa m_{c_1} e $m_{c_2} = 4 m_{c_1}$, e raggi r_1 e $r_2 = 2 r_1$).

a) Determinare il valore di m_2^* per cui il sistema rimane in equilibrio statico e le reazioni vincolari applicate dagli assi alle carrucole.

b) Se la massa $m_2 = 5 m_2^*$, determinare la velocità che la massa m_2 raggiunge dopo aver percorso un tratto h.

c) Come cambia il risultato della domanda b) se la corda invece di scorrere senza attrito sulle carrucole le trascina solidalmente al ~~loro~~ proprio moto?

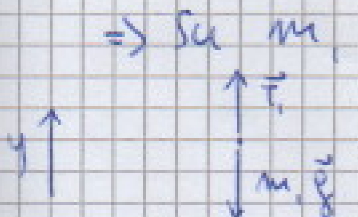
d) Come cambia il risultato della domanda c) se sulle due carrucole agisce un momento di forze resistente M?

---

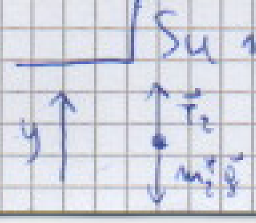
a) m_2^* t.c. situazione statica e reaz. vincolari $\vec{N}_{c_1}$, $\vec{N}_{c_2}$?

Fune ideale, in condizioni statiche $\Rightarrow$ tensione ~~iden~~ uguale in modulo in tutta la fune. $\Rightarrow \vec{T}_1 = T\hat{y}$; $\vec{T}_2 = T\hat{y}$

$\Rightarrow$ Su m_1 : $m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = 0 \Rightarrow \hat{y}: (T - m_1 g) = 0$



Su m_2: $m_2^*\vec{g} + T_2 = 0 \Rightarrow \hat{y}: (T - m_2^* g) = 0$

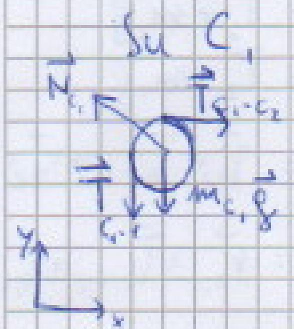


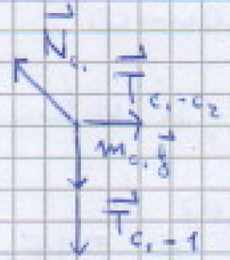
$\Rightarrow \boxed{m_2^* = m_1 = 5.00\,kg}$

Reazioni vincolari: $\vec{N}_{c_1} = N_{c_1x}\hat{x} + N_{c_1y}\hat{y}$

I eq. cardinale per corpi rigidi $\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = m_{c_1}\vec{g} + \vec{T}_{c_1-1} + \vec{T}_{c_1-c_2} + \vec{N}_{c_1} = 0$

Su C_1



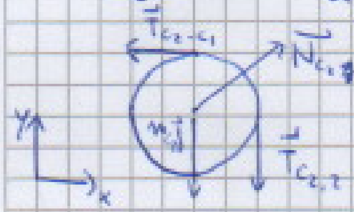


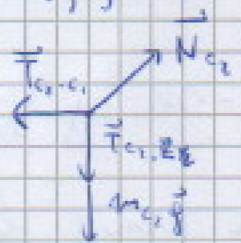
$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{x}: & +T\hat{x} + N_{c_1x}\hat{x} = 0 \Rightarrow N_{c_1x} = -T = -m_1 g \\ \hat{y}: & -m_{c_1}g - T + N_{c_1y} = 0 \Rightarrow N_{c_1y} = m_{c_1}g + T = (m_1 + m_{c_1})g \end{cases}$$

$T = m_1 g \simeq 49.0\,N \quad \Rightarrow N_{c_1x} \simeq -49.0\,N$

$m_{c_1} g \simeq 0.981\,N \quad \Rightarrow N_{c_1y} \simeq +50.0\,N$

$\vec{N}_{c_2} = N_{c_2x}\hat{x} + N_{c_2y}\hat{y}$





$\rightsquigarrow \vec{F}_{TOT} = m_{c_2}\vec{g} + \vec{T}_{c_2-c_1} + \vec{T}_{c_2-2} + \vec{N}_{c_2} = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \hat{x}: & -T + N_{c_2,x} = 0 \Rightarrow \underline{N_{c_2x} = T} = m_1 g \\ \hat{y}: & -T - m_{c_2}g + N_{c_2y} = 0 \Rightarrow \underline{N_{c_2y} = T + m_{c_2}g} = (m_1 + m_{c_2})g \end{cases}$$

$\Rightarrow N_{c_2x} \simeq +49.0\,N$;

$m_{c_2} = 4\,m_{c_1} \simeq 0.400\,Kg$

$\Rightarrow m_{c_2} g \simeq 3.92\,N \quad \Rightarrow N_{c_2y} \simeq 52.9\,N$

b) $m_1 = 5 m_2^*$ $\Rightarrow$ V_2 dopo che ha percorso tratto h?

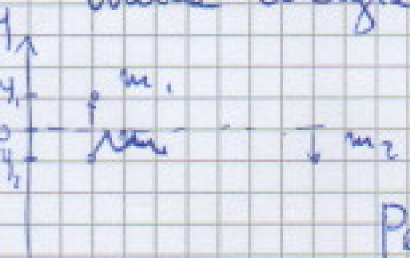
Nota su:
c) Si può risolvere il sistema dinamico che, con i vincoli di filo ideale, si riduce ad un sistema di 4 incognite per 4 equazioni (incognite: a_2, $|\vec{T}_1|$, $|\vec{T}_{c_1-c_2}|$, $|\vec{T}_2|$):

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_1 + m_1 \vec{g} \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{T}_2 + m_2 \vec{g} \\ I_{c_1} \ddot{\vec{\phi}}_1 = \vec{r}_{1,1} \times \vec{T}_{c_1-1} + \vec{r}_{1,2} \times \vec{T}_{c_1-2} \\ I_{c_2} \ddot{\vec{\phi}}_2 = \vec{r}_{2,1} \times \vec{T}_{c_2,c_1} + \vec{r}_{2,2} \times \vec{T}_2 \end{cases}$$

Il sistema, in assenza di attrito tra filo e carrucole, si riduce a 2 eq. e 2 incognite, a_2 e T.

Tuttavia, è più immediato svolgerlo con la __conservazione dell'energia__.

Unica energia potenziale è gravitazionale:



$$U(y_1, y_2) = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

Per l'inestensibilità del filo, rispetto a qualunque rif. comune deve valere: $\underline{y_1 = -y_2}$

$$\Rightarrow U(y_1, y_2) = U(y_2) = (m_2 - m_1) g y_2$$

Energia cinetica: carrucole prive di attrito $\Rightarrow$ __non ruotano__

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Inestensibilità filo $\Rightarrow$ $v_1 \hat{y} = -v_2 \hat{y}$ $\Rightarrow$ $T = \frac{(m_1 + m_2)}{2} v_2^2$

$$E(y_2, v_2) = \frac{m_1 + m_2}{2} v_2^2 + (m_2 - m_1) g y_2 .$$

All'istante iniziale, supp. $y_2 = 0$, $v_2 = 0$ (fermo)

$$\Rightarrow E(0, 0) = 0 .$$

Alla fine, $y_2 = -h$, $v_2 = v_2(h)$

$$\Rightarrow \boxed{E(-h, v_2(-h)) = E(0,0) = 0}$$ Per conservazione dell'energia

$$\Rightarrow \frac{m_1 + m_2}{2} v_2^2(-h) - (m_2 - m_1) g h = 0$$

$$\Rightarrow |v_2(-h)| = \sqrt{\frac{2(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)} g h} \underset{m_2 = 5m_1^* = 5m_1}{=} \sqrt{\frac{4}{6} g h} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \simeq 3.62 \frac{m}{s}$$

c) Se corde trascino solidalmente carrucole,

c_1 ruota con $\vec{\dot\phi}_1 = \frac{v_2}{r_1}\hat z$, $\vec{\dot\phi}_2 = \frac{v_2}{r_2}\hat z$, con $R_2 = 2r_1$ e $\hat z$ uscente dal foglio

$\Rightarrow$ L'energia meccanica diventa:

$$E = \frac{(m_1+m_2)v_2^2}{2} + \frac{I_{c_1}}{2}\dot\phi_1^2 + \frac{I_{c_2}}{2}\dot\phi_2^2 + (m_2-m_1) g y_2 .$$

Non vi è infatti variazione di e. potenziale sulle carrucole.

Poiché $I_{c_1} = \frac{m_{c_1}}{2} r_1^2$ ed $I_{c_2} = \frac{m_{c_2}}{2} r_2^2$

$$\rightsquigarrow E = \frac{m_1+m_2}{2} v_2^2 + \frac{(m_{c_1}+m_{c_2})}{4} v_2^2 + (m_2-m_1) g y_2$$

$\Rightarrow E = E(y_2, v_2)$, è di nuovo una funzione di 2 variabili

Imponendo $E(0,0) = 0 = E(-h, v_2(-h))$

$$\Rightarrow \frac{v_2(-h)^2}{2}\left[(m_1+m_2) + \frac{(m_{c_1}+m_{c_2})}{2}\right] = (m_2-m_1) g h$$

$$\Rightarrow |v_2(-h)| = \sqrt{\frac{2(m_2-m_1) g h}{\left[m_1+m_2+\frac{m_{c_1}+m_{c_2}}{2}\right]}} =$$

$m_2 = 5m_1$; $m_{c_2} = 4m_{c_1}$

$$= \sqrt{\frac{8 m_1 g h}{\left(6m_1 + \frac{5}{2} m_{c_1}\right)}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3 + \frac{5}{4}\frac{m_{c_1}}{m_1}}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{12}\frac{m_{c_1}}{m_1}}}$$

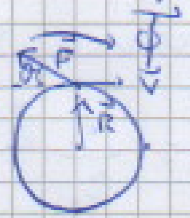
$$\simeq 3.62 \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{12}\frac{m_{c_1}}{m_1}}} \simeq 3.61 \frac{m}{s}$$

d) Momento resistente $\Rightarrow$ energia non conservata.

Tuttavia, vale $E(0,0) - E(-h, v_2(-h)) = -L_{nc}$

Qual è il lavoro del momento resistente? su una carrucola?

Supponiamo che $\vec{M}$ sia determinato da una forza costante $\vec{F}$: $|\vec{F}| = F$



$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} = RF\cos\theta\,\hat{z}$$

Il lavoro della forza $\vec{F}$, se agisce per un intervallo di tempo Δt in cui la carrucola ruota di $\Delta\phi$, è:

$$L_{nc} = +\int_0^t dt' (\vec{F}\cdot\vec{V}) = -F\cos\theta R \int_0^t dt' |\dot{\phi}| = -F\cos\theta R|\Delta\phi| = -M|\Delta\phi|$$

angolo tra $\vec{F}$ e $\vec{v} > \frac{\pi}{2}$

$|\vec{V}| = +R|\dot{\phi}|$

$\Rightarrow \boxed{L_{nc} = -M|\Delta\phi|}$, in quanto solo M agisce sullo sistema in modo non conservativo.

M agisce però su entrambe le carrucole:

$$L_{nc} = -M(|\Delta\phi_1| + |\Delta\phi_2|) = -M\left(\frac{h}{r_1} + \frac{h}{r_2}\right) = -Mh\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}$$

$E(0,0) = 0$

$$\Rightarrow E(-h, v_2(-h)) = L_{nc}$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_2^2(-h) + \frac{1}{4}(m_{c_1}+m_{c_2}) - (m_2-m_1)gh = -Mh\left(\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\right)$$

$m_2 = 5m_1$
$m_{c_2} = 4m_{c_1}$
$r_2 = 2r_1$

$$\Rightarrow |v_2(-h)| = \sqrt{\frac{2\left[(m_2-m_1)gh - Mh\left(\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\right)\right]}{\left[m_1+m_2+\frac{1}{2}(m_{c_1}+m_{c_2})\right]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\cancel{g}\left(4g - \frac{3}{8}\frac{M}{m_1 r_1}\right)h}{5\cancel{g}\left(1+\frac{5}{12}\frac{m_{c_1}}{m_1}\right)}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{3}{8}\frac{M}{g m_1 r_1}}}{\sqrt{1+\frac{5}{12}\frac{m_{c_1}}{m_1}}} \simeq 3.62\,\frac{m}{s} \cdot \frac{0.985}{(1.004)} \simeq$$

$$\simeq 3.55\,\frac{m}{s}$$

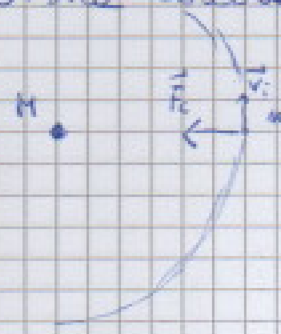
Es. 8.1 compito 31/7/2021 - Satelliti di un pianeta

Pianeta di massa M. Orbite satelliti circolari.

$\boxed{3 \text{ satelliti naturali con } m_1, m_2, m_3 \ll M}$, e periodi T_1, T_2, T_3.

Noto R_3:
$$\begin{cases} T_1 = 1.77 \text{ giorni terrestri} \\ T_2 = 3.55 \quad " \quad " \\ T_3 = 7.16 \quad " \quad " \end{cases} \qquad R_3 = 1.070.400 \text{ km} \qquad G = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 Kg^{-2}.$$

1. Calcolare R_1 e R_2, raggi delle orbite degli altri due satelliti.
   Studio problema nel r.f. solidale con M, per generico satellite i $(i \in \{1, 2, 3\})$
   Orbita circolare $\Rightarrow$ accelerazione centripeta costante: $\vec{a}_{c_i} = -\cancel{m}\,\omega_i^2 R_i \hat{r}$



$\Rightarrow$ vel angolare ω_i costante e periodo $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$

La forza centripeta è la forza gravitazionale: $\vec{F}_{c_i} = \vec{F}_{g_i}$

$$\vec{F}_{g_i} = \cancel{m} - G \frac{m_i M}{R_i^2} \hat{r}$$
$$\vec{F}_{c_i} = -m_i \omega_i^2 R_i \hat{r}$$

$$\vec{F}_{c_i} = \vec{F}_{g_i} \Rightarrow \frac{GM}{R_i^2} = \omega_i^2 R_i$$
$$\Rightarrow \boxed{\omega_i^2 R_i^3 = GM} \text{ costante}$$

$$\omega_i^2 R_i^3 \text{ costante} \Rightarrow \boxed{\frac{R_i^3}{T_i^2} = \frac{GM}{4\pi^2}}$$ (III legge di Keplero $T_i^2 = K R_i^3$, con $K = \frac{4\pi^2}{GM}$)

$$\Rightarrow \boxed{R_i = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2} T_i^2}}.$$

(1 giorno terrestre $= 3600 \cdot 24\,s = 86400\,s = 0.86400 \cdot 10^5 s$
$\Rightarrow T_3 = 7.16 \cdot 0.86400 \cdot 10^5 s \simeq 0.619 \cdot 10^6 s$

Sapendo $\frac{R_3^3}{T_3^2}$, si calcola $\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{R_3^3}{T_3^2} = \frac{(1.07040 \cdot 10^9 m)^3}{(0.619 \cdot 10^6 s)^2} \simeq 3.20 \cdot 10^{15} \frac{m^3}{s^2}$

Per calcolare R_1 ed R_2, conviene sfruttare però R_3 e T_3:

$$R_i = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2} T_i^2} = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2} T_3^2 \left(\frac{T_i}{T_3}\right)^2} = R_3 \left(\frac{T_i}{T_3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Es. 31 Compito 9/7/2021 - Satelliti di un pianeta

Pianeta di massa M. Orbite satelliti circolari.

3 satelliti naturali con $m_1, m_2, m_3 \ll M$, e periodi T_1, T_2, T_3.

Noto R_3:

$T_1 = 1.77$ giorni terrestri
$T_2 = 3.55$ " "
$T_3 = 7.16$ " "

$R_3 = 1.070.400$ km
$G = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 Kg^{-2}$.

1. Calcolare R_1 e R_2, raggi delle orbite degli altri due satelliti.

Studio problema nel rif. solidale con M, per generico satellite i ($i \in \{1, 2, 3\}$)

Orbita circolare ⇒ accelerazione centripeta costante:

$$\vec{a}_{c_i} = -\cancel{m}\,\omega_i^2 R_i \hat{r}$$

⇒ vel angolare ω_i costante e periodo $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$.

La forza centripeta è la forza gravitazionale: $\vec{F}_{c_i} = \vec{F}_{g_i}$.

$$\vec{F}_{g_i} = -G\frac{m_i M}{R_i^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}_{c_i} = -m_i \omega_i^2 R_i \hat{r}$$

$$\vec{F}_{c_i} = \vec{F}_{g_i} \Rightarrow \frac{GM}{R_i^2} = \omega_i^2 R_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_i^2 R_i^3 = GM} \text{ costante}$$

$\omega_i^2 R_i^3$ costante $\Rightarrow \boxed{\frac{R_i^3}{T_i^2} = \frac{GM}{4\pi^2}}$ (III legge di Keplero $T_i^2 = K R_i^3$, con $K = \frac{4\pi^2}{GM}$)

$$\Rightarrow \boxed{R_i = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2} T_i^2}}.$$

(1 giorno terrestre $= 3600 \cdot 24 s = 86400 s = 0.86400 \cdot 10^5 s$

$\Rightarrow T_3 = 7.16 \cdot 0.86400 \cdot 10^5 s \simeq 0.619 \cdot 10^6 s$

Sapendo $\frac{R_3^3}{T_3^2}$, si calcola $\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{R_3^3}{T_3^2} = \frac{(1.0704 \cdot 10^9 m)^3}{(0.619 \cdot 10^6 s)^2} \simeq 3.20 \cdot 10^{15} \frac{m^3}{s^2}$

Per calcolare R_1 ed R_2, conviene sfruttare però R_3 e T_3:

$$R_i = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2} T_i^2} = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2} T_3^2 \left(\frac{T_i}{T_3}\right)^2} = R_3 \left(\frac{T_i}{T_3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$R_1 = 1.0704 \cdot 10^9 m \left(\frac{1.77}{7.16}\right)^{\frac{2}{3}} \simeq 4.22 \cdot 10^8 m$$

$$R_2 = 1.0704 \cdot 10^9 m \left(\frac{3.55}{7.16}\right)^{\frac{2}{3}} \simeq 0.671 \cdot 10^9 m$$

2. $\vec{g}_i = ?$

Acc. gravità pianeta $\vec{g}_i = -\frac{GM}{R_i^2}\hat{r}$.

$$GM = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right) \simeq 1.26 \cdot 10^{17} m^3 s^{-2}$$

$$\Rightarrow g_i = |\vec{g}_i| = \frac{GM}{R_i^2}$$

$$\Rightarrow g_1 = \frac{1.26 \cdot 10^{17}}{(4.22 \cdot 10^8)^2 \cancel{m^2}} \frac{m^{\cancel{3}}}{s^2} \simeq 0.710 \frac{m}{s^2}.$$

$$g_2 = \frac{1.26 \cdot 10^{17}}{(0.668 \cdot 10^9)^2 \cancel{m^2}} \frac{m^{\cancel{3}}}{s^2} \simeq 0.283 \frac{m}{s^2}$$

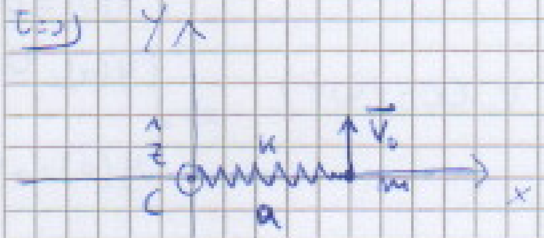
$$g_3 = \frac{1.26 \cdot 10^{17}}{(1.0704 \cdot 10^9)^2 \cancel{m^2}} \cdot \frac{m^{\cancel{3}}}{s^2} \simeq 0.110 \frac{m}{s^2}.$$

3. $M = ?$

$$M = \frac{GM}{G} = \frac{1.26 \cdot 10^{17}}{6.67 \cdot 10^{-11}} \frac{\cancel{m^3} Kg^2}{s^2 N \cdot \cancel{m^2}} \simeq 1.89 \cdot 10^{27} Kg.$$

[Pianeta è Giove, i satelliti Io, Europa e Ganimede].

Es. 1 Compito 24/01/2023 - Orbita elastica



Lunghezza molla a riposo: 0

NO ATTRITO

$\vec{v}_0 = v_0 \hat{y}$

$m = 3\,kg$
$a = 7\,m$
$K = 12\,\frac{N}{m}$
$v_0 = 5\,\frac{m}{s}$

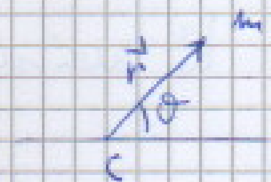
Momento angolare
1. $\vec{L}$: ?

Velocità areolare
$\vec{A}$ = ?

All'istante iniziale $\vec{L}(t=0) = \vec{r} \times m\vec{v}_0 = a m v_0 \hat{z} \simeq 105\,J\cdot s\,\hat{z}$

La velocità areolare $\vec{A}(t=0) = \frac{\vec{r}\times\vec{v}_0}{2} = \frac{a v_0}{2}\hat{z} \simeq 17.5\,J\cdot s\,\hat{z}$

Poiché la forza elastica è centrale,



$$\vec{F}_{el} = -Kr\hat{r} = -K\vec{r} \qquad m\vec{a} = \vec{F}_{el} = -Kr\hat{r}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \cancel{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times m\vec{v}} + \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} = -Km\,\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{0} = 0$$

$\vec{v}\times m\vec{v} = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\vec{L}\text{ è conservato}}$, così come la velocità areolare $\vec{A}$

$\rightarrow$ II legge di Keplero generalizzata

2. Scrivere le coordinate del corpo in funzione del tempo, $x(t)$ ed $y(t)$

Scompongo $\vec{F}_{el} = m\vec{a}$ su $\hat{x}$ ed $\hat{y}$

$$\vec{F}_{el} = -K(x\hat{x} + y\hat{y})$$

$$\hookrightarrow \quad m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$
$$m\ddot{y} = -Ky \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + \omega^2 y = 0}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{K}{m} = 4\,s^{-2}}$$

Quali sono le C.I.? $x(0) = a$ $\quad y(0) = 0$

$\dot{x}(0) = 0$ $\quad \dot{y}(0) = +v_0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\omega t) \\ y(t) &= \frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}(\omega t) \end{aligned}} \begin{aligned} &\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega a\,\text{sen}(\omega t) \Rightarrow \begin{cases} x(0) = a \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \text{ ok} \\ &\Rightarrow \dot{y}(t) = v_0\cos(\omega t) \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = +v_0 \end{cases} \text{ ok} \end{aligned}$$

3) Orbita ellittica, periodo dell'orbita, asse maggiore e minore?

Orbita è ellittica, infatti:

$$\boxed{\frac{x^2(t)}{a^2} + \frac{\omega^2 y^2(t)}{v_0^2} = \cos^2(\omega t) + \text{sen}^2(\omega t) = 1}$$

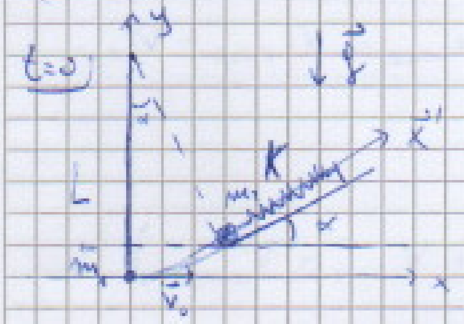
Il periodo è $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \text{ s}}$

$\omega = 2\,\text{s}^{-1}$

L'asse maggiore è $a = 7$ m

" minore è $b = \frac{v_0}{\omega} = 2.5$ m

Esercizio 2 compito 15/2/2021



m_1 pendolo, lunghezza L

m_1 urta m_2 in modo elastico e centrato.

$\left[L = 3\,m \;;\; m_1 = 2\,kg \;;\; m_2 = 5\,kg \;;\; K = 7\,\frac{N}{m} \;;\; \alpha = 30° \;;\; v_0 = 4\,\frac{m}{s} \right.$.

1. Velocità di m_1 ed m_2 subito dopo l'urto.

Pendolo semplice è sistema conservativo

A $t=0$, $E_{1,0} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$

Prendo lo 0 dell'energia potenziale gravitazionale nel punto di altezza minima del pendolo.

All'istante dell'urto $E_{1,pre} = \frac{1}{2} m_1 v_{1,pre}^2 + m_1 g L (1-\cos\alpha)$

Poiché

$\underline{E_{1,0} = E_{1,pre}} \Rightarrow |\vec v_{1,pre}| = \sqrt{v_0^2 - 2gL(1-\cos\alpha)} \simeq \sqrt{\left(16 - 2\cdot 9.81\cdot 3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\frac{m^2}{s^2}} \simeq 2.85\,\frac{m}{s}$

Nell'urto tra m_1 ed m_2, si conserva l'en. cinetica, oltre all'impulso (l'energia gravitazionale o elastica, in generale potenziale, è invariata nell'approssimazione di urto istantaneo).

Conviene studiare l'urto lungo un asse $\hat x'$ inclinato di α rispetto ad $\hat x$, in modo che urto sia lineare.

$\Rightarrow \vec v_{1,pre} = |\vec v_{1,pre}|\hat x' = v_{1,pre}\hat x' \;;\; \vec v_{2,pre} = 0 \;;\; \vec v_{1,post} = v_{1,post}\hat x'$

$\vec v_{2,post} = v_{2,post}\hat x'$

$\vec P_{pre} = m_1 \vec v_{1,pre} = \vec P_{post} = m_1 \vec v_{1,post} + m_2 \vec v_{2,post}$

$E_{k,pre} = \frac{1}{2} m_1 v_{1,pre}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,post}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,post}^2$

In generale:

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \hat x': \\ E_k: \end{array} \begin{cases} m_1 (v_{1,pre} - v_{1,post}) = m_2 (v_{2,post} - v_{2,pre}) \\ \frac{1}{2} m_1 (v_{1,pre}^2 - v_{1,post}^2) = \frac{1}{2} m_2 (v_{2,post}^2 - v_{2,pre}^2) \end{cases}$$

Dividendo la II per la I, trovo

$V_{1\,PRE} + V_{1\,POST} = V_{2\,PRE} + V_{2\,POST} \Rightarrow \boxed{V_{1\,PRE} - V_{2\,PRE} = V_{2\,POST} - V_{1\,POST}}$

$\Rightarrow \boxed{V_{2\,POST} = V_{1\,PRE} - V_{2\,PRE} + V_{1\,POST}}$

$\Rightarrow m_1 (V_{1\,PRE} - V_{1\,POST}) = m_2 (V_{1\,PRE} - V_{2\,PRE} + V_{1\,POST} - V_{2\,PRE})$

$\Rightarrow (m_1 + m_2) V_{1\,POST} = (m_1 - m_2) V_{1\,PRE} + 2 m_2 V_{2\,PRE}$

e sostituendo in $V_{2\,POST}$:

$$\begin{cases} V_{1\,POST} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1\,PRE} + \dfrac{2 m_2}{m_1 + m_2} V_{2\,PRE} \\ V_{2\,POST} = \dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2} V_{1\,PRE} + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_{2\,PRE} \end{cases}$$

Nel nostro caso, $V_{2\,PRE} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{1\,POST} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1\,PRE} = -\dfrac{3}{7} \overbrace{V_{1\,PRE}}^{2.85\,\frac{m}{s}} \simeq -1.22\,\dfrac{m}{s} \\ V_{2\,POST} = +\dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2} V_{1\,PRE} = +\dfrac{4}{7} V_{1\,PRE} \simeq +1.63\,\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

b.) Contrazione massima della molla dopo l'urto $\Delta x'_{max} = ?$

m_2 + Molla è sistema conservativo ⇒ posso trovare $\Delta x'_{max}$ con cons. dell'energia. Scrivo l'energia meccanica della molla e di m_2:

$$E = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \underbrace{\frac{1}{2} K \Delta x'^2 + m_2 g \, \Delta x'_{max} \operatorname{sen}\alpha}$$

↳ Prendo lo 0 di entrambe le energie potenziali in $\Delta x' = 0$

All'istante iniziale, $v_2 = v_{2,POST}$; $\Delta x' = 0$

" " di elongazione massima della molla, $v_2 = 0$, $\Delta x' = \Delta x'_{max}$

Per la conservazione dell'energia: $\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} K \Delta x'^2_{max} + m_2 g \, \Delta x'_{max} \operatorname{sen}\alpha$

$$\rightsquigarrow \Delta x'^2_{max} + 2\underbrace{\frac{m_2 g}{K}}_{\omega_2^{-2}} \sin\alpha\, \Delta x'_{max} - \underbrace{\frac{m_2}{K}}_{\omega_2^{-2}} v_2^2 = 0 \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m_2}} \simeq \sqrt{\frac{7}{5}}\ s^{-1}$$

$$\Delta x'_{max} = -\frac{g \sin\alpha}{\omega_2^2} \underbrace{\pm}_{\text{corrisponde al min}} \sqrt{\left(\frac{g\sin\alpha}{\omega_2^2}\right)^2 + \frac{v_2^2}{\omega_2^2}}$$

$$\rightsquigarrow \Delta x'_{max} = +\frac{g\sin\alpha}{\omega_2^2}\left[\sqrt{1 + \frac{\omega_2^2 v_2^2}{g^2 \sin^2\alpha}} - 1\right] \simeq$$

$\omega_2^2 = \frac{7}{5}\ s^{-2}$

$$\rightarrow \simeq 9.81 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}\left[\sqrt{1 + \frac{7 \cdot 4 \cdot (1.8)^2}{5 \cdot (9.81)^2}} - 1\right] \simeq 0.261\ m$$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$

3) Angolo massimo raggiunto dal pendolo: $\theta_{max} = ?$

Energia meccanica pendolo: $E = \frac{m_1}{2} L^2 \dot\theta^2 + m_1 g L (1 - \cos\theta)$

Cons. energia meccanica con $\dot\theta = \frac{v_1}{L}$

$$\Rightarrow E\left(\theta = \alpha;\ \dot\theta = \frac{v_{1post}}{L}\right) = E\left(\theta = \theta_{max};\ \dot\theta = 0\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m_1}}{2} v_{1post}^2 + \cancel{m_1} g L (1 - \cos\alpha) = \cancel{m_1} g L (1 - \cos\theta_{max})$$

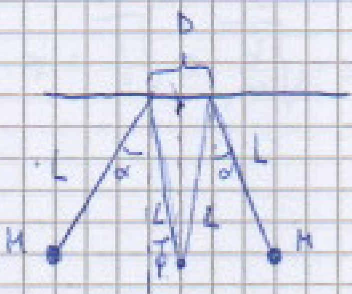
$$\frac{v_{1post}^2}{2gL} - \cos\alpha = -\cos\theta_{max}$$

$$\cancel{\Rightarrow \theta_{max} = \cos^{-1}\left[\right.}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{max} = \cos\alpha - \frac{v_{1post}^2}{2gL} \simeq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{(1.22)^2}{2 \cdot 9.81 \cdot 3} \simeq 0.841$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{max} \simeq 32.8^\circ}$$

Es. 2 COMPITO 07/09/2021 - Due pendoli che urtano



Pendoli distanziati di D ~~da~~ tra i punti di attacco; lunghi L e di massa M, lasciati da fermo con angolo α. $\left[M = 3\,kg\ ;\ L = 5\,m\ ;\ \alpha = 30° \atop D = 1.0\,m \right.$

1. Velocità di ciascun pendolo nell'istante dell'urto = ?

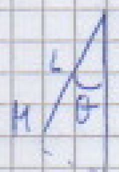
Per simmetria, essendo lasciati dalla stessa altezza, ~~ust~~ avendo la stessa lunghezza L, urtano nel mezzo; in tali condizioni, formano un angolo ϕ con la verticale:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{D}{2L} = 0.1 \Rightarrow \cos\phi = \frac{\sqrt{4L^2 - D^2}}{2L} = \sqrt{1 - \left(\frac{D}{2L}\right)^2} \simeq 0.995$$

$[\phi \simeq 5.74° \simeq 0.1\,rad$

Fino all'urto il sistema è conservativo.
L'energia di ciascun pendolo è:

$$E = \frac{Mv^2}{2} + MgL(1 - \cos\theta)$$



A $t = 0$, $v = 0$, $\theta = \alpha \Rightarrow E_0 = MgL(1 - \cos\alpha)$

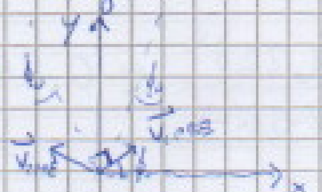
A $t = t_{urto}$, $v = v_{PRE}$, $\theta = \phi \Rightarrow E = \frac{M}{2} v_{PRE}^2 + MgL(1 - \cos\phi)$

$E_0 = E$ per cons. energia $\Rightarrow |v_{PRE}| = \sqrt{2gL(\cos\phi - \cos\alpha)}$

$$= \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 9.81 \left(0.995 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{m^2}{s^2}}$$

$$\simeq 3.56\,\frac{m}{s} = v_{PRE}$$

Per quanto riguarda la direzione e il verso, prendo sist. rif. con origine nel p.to dell'urto:



$$\Rightarrow \vec{v}_{1\,PRE} = v_{PRE}(\cos\phi_0\,\hat{x} + \operatorname{sen}\phi_0\,\hat{y})$$

$$\vec{v}_{2\,PRE} = v_{PRE}(-\cos\phi_0\,\hat{x} + \operatorname{sen}\phi_0\,\hat{y})$$

URTO ANELASTICO COMPLETAMENTE.

2. Minima ~~alt~~ distanza dal soffitto dopo l'urto ($d = ?$)

Urto completamente anelastico ⇒ corpi proseguono il moto con la stessa velocità, conservando l'impulso:

$$m_1 \vec{V}_{1PRE} + m_2 \vec{V}_{2PRE} = (m_1 + m_2)\vec{V}_{POST}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{POST} = \frac{m_1 \vec{V}_{1PRE} + m_2 \vec{V}_{2PRE}}{m_1 + m_2} \quad \left(= \vec{V}_{PRE} \text{ del centro di massa!} \right)$$

Nel nostro caso, $m_1 = m_2 = M$

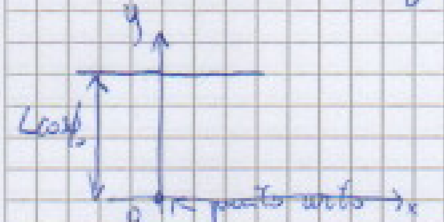
$$\Rightarrow \vec{V}_{POST} = \frac{M}{2M}\left\{ V_{PRE}\left((\cancel{\cos\phi_0 - \cos\phi_0})\hat{x} + 2\sin\phi_0\,\hat{y} \right) \right\} =$$

$$= V_{PRE}\underbrace{\sin\phi_0}_{\simeq \frac{1}{10}}\hat{y} \simeq 0.356\ \frac{m}{s}\,\hat{y}$$

Dopo l'urto, i fili non sono ~~tesi~~ tesi ⇒ non c'è tensione

⇒ moto in verticale in presenza di gravità

Cons. energia ⇒ $E = \frac{2M}{2}v^2 + 2Mgy$



$$E(0) = MV_{PRE}^2\sin^2\phi_0 = MV_{POST}^2$$

$$E(h_{max}) = 2Mg\,h_{max}$$

Cons. energia ⇒ $h_{max} = \frac{V_{POST}^2}{2g} \simeq 0.646\cdot10^{-2}\,m$

$$d = L\cos\phi_0 - h_{max} \simeq 5\cdot0.995\,m - 0.646\cdot10^{-2}\,m \simeq 4.97\,m$$

3. Tempo di passaggio da $y = 0$:

Legge oraria: $y(t) = V_{POST}\,t - \frac{1}{2}g t^2$.

Impongo $y(\tilde{t}) = 0$

$$\frac{1}{2} g \tilde{t}^2 - 2 v_{POST} \tilde{t} = 0$$

$$\tilde{t} \left(\tilde{t} - \frac{2 v_{POST}}{g} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{t} \simeq \frac{2 v_{POST}}{g} \simeq 0.726 \cdot 10^{-1} \text{ s.}$$