Dimostrare per induzione che $2^n \geq n + 10$ per ogni $n \geq 4$.

Induzione c'è di 2 tipi

1) P(0) vera
P(n+1), con P(n) supposto vero, dimostro che è vero

2) ... (proviamo prima con il metodo 1)

In matematichese
- zeri di una funzione = le vere soluzioni
- caso 0 = P_0 come se fosse la diffusione di un virus: dove tutto comincia. Il caso Iniziale.

P(0) in realtà non è scritto bene perché dovrebbe dire che al posto di n dovrei mettere 0

$2^0 \geq 0+10$

$1 \geq 10$ ovviamente falso

quindi si dice $P(n_0)$ con n_0 il primo elemento dal quale vale il tutto. cioè 4.

$2^4 \geq 4+10$

$16 \geq 14$. ok!

Inutile formalità

Δ_0, n_4, T_3, ℓ_2

lo schema è sempre il solito: una lettera con sotto un numero. Indica: il quarto elemento di "n"

$\Delta = \{0, \square, \lozenge\}$

$\Delta_1 = 0 \quad \Delta_2 = \square \quad \Delta_3 = \lozenge$

quindi P(n+1) sarebbe a dire di "sostituire al posto di n, n+1".

$2^{n+1} \geq (n+1)+10$

da qui dobbiamo ricondurci a

$2^n \geq (n)+10$

P(n+1) → P(n)

proprietà e ingegno e trucchi e concatenazione.

Prova 1

$2^n \cdot 2^1 \geq n+11$

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1$ proprietà delle potenze

$2^n \cdot 2^1 \geq 2^n \geq n+11$

alla fine nemmeno mi serviva

$2^n \geq n+11 \geq n+10$

$2^n \geq n+10$ per imparare a leggere bene le disuguaglianze bisogna tenere a mente "una catena" (da leggere in entrambi i sensi)

Catena

$a < b < c < d < e$

$e > a \quad c < d$

Come ho fatto?

(a) (b)

$2^{n+1} > (n+1)+10$

ho immaginato

$2^n > n+10$

dentro a quei due (a) (b) quindi ho cominciato a comparli

1.3.1 Relazioni ricorsive lineari omogenee

Algoritmo risolutivo di una relazione ricorsiva lineare omogenea:

Data la relazione ricorsiva lineare omogenea di grado k

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \cdots + \alpha_k a_{n-k}$$

1. Determinare il polinomio caratteristico
$$P(x) = x^k - \alpha_1 x^{k-1} - \alpha_2 x^{k-2} - \cdots - a_k$$
2. Risolvere $P(x) = 0$ e trovare le radici $x_1, x_2, \ldots, x_n$
3. Se le radici sono tutte distinte allora la formula chiusa è
$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \cdots + c_k x_k^n$$
altrimenti se le radici hanno molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_t$ tali che $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k$
$$a_n = (b_1 + b_2 n + \cdots + b_m n^{m-1}) x_1^n + \cdots + (d_1 + d_2 n + \cdots + d_{m_t} n^{m_t - 1}) x_t^n$$
4. Risolvo il sistema imponendo le condizioni iniziali

$$\frac{1}{3} a_n = a_{n-1} - \frac{2}{3} a_{n-2}$$

• Il grado maggiore:

$$\frac{1}{3} X^2 + X - \frac{2}{3} X$$

Praticamente i gradi si leggono da dx verso sx, ma non i fattori.

$$= \frac{1}{3} x^2 + x - \frac{2}{3}$$

da qui risolvo l'equazione di II° grado

WolframAlpha

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

, due "radici" cioè soluzioni diverse. quindi ricadiamo in 3

Esercizio 2. Risolvere (cioè: trovare la forma chiusa) la relazione ricorsiva

$$\frac{1}{3} a_n = a_{n-1} - \frac{2}{3} a_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

con le condizioni iniziali $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

La prima cosa è controllare che le "n" siano decrescenti, qui lo sono. se facessimo questa cosa l'avremmo in ordine crescente.

$a_{n-2} = m$

$a_{n-1} = m+1$

$a_n = m+2$, ma dato che negli appunti la relazione ricorsiva ha indici decrescenti, noi scriveremo così

Matematichese

Quando scompongo un polinomio in questo modo $(x+3)^5 (x+2)^3 (x-1)^2 (x-3)$

le soluzioni sono (-3) (-2) $(+1)$ $(+3)$ polinomio di fattorizzazione (completo)

le cui molteplicità

5 3 2 1

A quel punto io metto una costante da determinare che infatti chiamo "c" (costante) da risolvere con condizioni iniziali.

$a_0 = 1$

$a_1 = 2$

$$a_n = c_1 \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)^n + c_2 \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

Sto cercando due elementi c_1 e c_2 quindi faccio un sistema

tenendo conto del fatto che $a_0 = 1$ vuol letteralmente dire

"a, quando n è 0, equivale a 1"

$$\begin{cases} c_1 \cdot (\ldots)^0 + c_2 (\ldots)^0 = 1 \\ c_1 \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)^1 + c_2 \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right)^1 = 2 \end{cases}$$

sapendo come risolvere sistemi

Solution

$$c_1 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2\sqrt{17}}, \quad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2\sqrt{17}}$$

quindi la formula chiusa

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{17}}\right)\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2\sqrt{17}}\right)\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$