EvAU 2023: Matemáticas II

Manuel Lozano Bermúdez

7 de junio, 2023

Opción A:

A.1- En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Solución: En primer lugar, llamaremos al número de camiones de cada tipo A, B, C, respectivamente; y la capacidad total de esos camiones será la capacidad de un camión individual por el número de camiones de cada tipo. En forma de tabla, esto es:

# Camiones	A	B	C
Capacidades	$14A$	$24B$	$28C$

Como la capacidad total de todos los camiones (la suma de la segunda fila) tiene que ser 302 toneladas, obtenemos una primera ecuación.

$$\boxed{14A + 24B + 28C = 302} \tag{1}$$

Por otro lado, para que el número de camiones de tipo A sea igual al número de camiones de los tipos restantes, necesitamos añadir un camión de tipo A a los que ya tenemos. Esto es nuestra segunda ecuación.

$$\boxed{A + 1 = B + C} \tag{2}$$

Por último, sabemos que el 10% de la capacidad de B (10% de $24B$) supone un séptimo de la capacidad de los camiones de *mayor* tonelaje, es decir, la capacidad de C ($28C$). Con esto obtenemos nuestra última ecuación.

$$10\% \text{ de } 24B = \frac{1}{7} \text{ de } 28C \implies \boxed{2.4B = 4C} \tag{3}$$

Y tenemos finalmente un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 14A & + & 24B & + & 28C & = & 302 \\ A & - & B & - & C & = & -1 \\ & & 2.4B & - & 4C & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema puede resolverse de muchas maneras. En este caso, empleo la eliminación gaussiana. En forma matricial:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 24 & 28 & 302 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2.4 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2' = 14F_2 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 24 & 28 & 302 \\ 0 & -38 & -42 & -316 \\ 0 & 2.4 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3' = (38/2.4)\ F_3 + F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 24 & 28 & 302 \\ 0 & -38 & -42 & -316 \\ 0 & 0 & -316/3 & -316 \end{array}\right] \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -(316/3)\ C = -316 \\ \Longrightarrow C = 3 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -38B - 42C = -316 \\ \Longrightarrow B = 5 \end{array} \right.$$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 14A + 24B + 28C = 302 \\ \Longrightarrow A = 7 \end{array} \right.$$

Como nos preguntan cuánta tierra ha sido transportada por cada tipo de camión, el resultado final será: $A : 14 \times 7 = 98$ t, $B : 24 \times 5 = 120$ t y $C : 28 \times 3 = 84$ t.

A.2- Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

(a) Estudiar si es par o impar.

(b) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

(c) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Solución: $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = (x^2-1)^{2/3} \geq 0$:

(a) Si una función es *par*: $f(-x) = f(x)$. Si una función es *impar*: $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = f(x) \implies$ La función es **par.**

(b) Para que una función sea derivable en un punto, debe cumplir primero que sea continua en ese punto. Como la función $f(x)$ no tiene problemas de dominio ($D(f) = \mathbb{R}$), es continua en toda la recta real, y por tanto en $x = 1$. La condición de derivabilidad es que el límite en $x = 1$ de la derivada exista, es decir, $f'(1^+) = f'(1^-)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \cdot 2x = \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \\ &\to f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty \\ &\to f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{0^-} = -\infty \\ &\implies \nexists f'(1^\pm) \implies \text{La función } \textbf{no es derivable} \text{ en } x = 1. \end{aligned}$$

(c) Los extremos *relativos* se estudian igualando la derivada de $f(x)$ a cero y estudiando el crecimiento y decrecimiento de la función.

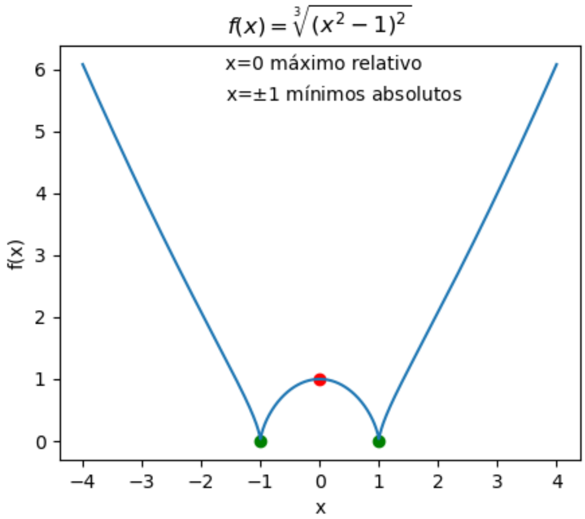
$$f'(x) = \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \equiv 0 \implies \boxed{x = 0} \text{ (posible extremo relativo).}$$

Otros puntos a considerar en el crecimiento y decrecimiento de la función son los puntos conflictivos de la derivada, que son $x = \pm 1$ ya que la función no es derivable en esos puntos pero $f(x)$ es continua.

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En $x = 0$, la función alcanza un **máximo relativo**, cuyo valor es $f(0) = 1$. Como la función crece hasta hacerse infinita en $x \to \pm\infty$, **no hay máximos absolutos**. Con respecto a los mínimos, como la función $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, en $x = \pm 1$ la función tiene **mínimos absolutos** ($f(\pm 1) = 0$), y **no hay mínimos relativos**.

Estos resultados que hemos obtenido pueden verse bien en la siguiente gráfica. Como se puede



$f(x)$ en $[-4, 4]$.

comprobar, la función presenta simetría par. En $x = \pm 1$ la función no es derivable ya que tenemos *picos* (derivadas $\to \pm\infty$) en esos puntos; y presenta un máximo relativo en $x = 0$ y mínimos absolutos en $x = \pm 1$.

A.3- Sean los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$. Se pide:

(a) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

(b) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.

(c) Determinar el perímetro del triángulo T.

Solución:

(a) Un triángulo está formado por tres lados y tres vértices *que no son colineales*, es decir, que los puntos no están alineados. La manera de comprobar que los puntos A, B y C forman un triángulo es, entonces, comprobar que los puntos no son colineales. Si tres puntos A, B, C *son* colineales, entonces los vectores que forman, $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$ deben ser *linealmente dependientes*. Esto es:

$$\vec{AB} = \lambda \vec{AC}$$

Los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ se calculan de la siguiente manera: $\vec{AB} = B - A = (0, 2, -1) - (1, -2, 3) = (-1, 4, -4)$, $\vec{AC} = C - A = (2, 1, 0) - (1, -2, 3) = (1, 3, -3)$, $\vec{BC} = C - B = (2, 1, 0) - (0, 2, -1) = (2, -1, 1)$. Entonces:

$$\vec{AB} = (-1, 4, -4) = \lambda \vec{AC} = \lambda(1, 3, -3) \implies \begin{cases} -1 = \lambda \cdot 1 \implies \lambda = -1 \\ 4 = \lambda \cdot 3 \implies \lambda = 4/3 \\ -4 = \lambda \cdot (-3) \implies \lambda = 4/3 \end{cases}$$

Como no hay un valor de λ único, los vectores son linealmente independientes, por lo que los puntos A, B, C **forman un triángulo**.

Por otro lado, la ecuación del plano que pasa por los tres puntos o, lo que es lo mismo, pasa por el punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y tiene como vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} AB_1 & AC_1 & x - a_1 \\ AB_2 & AC_2 & y - a_2 \\ AB_3 & AC_2 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & x - 1 \\ 4 & 3 & y + 2 \\ -4 & -3 & z - 3 \end{vmatrix}$$

Calculando el determinante y simplificando, obtenemos que la ecuación del plano $\boxed{\pi \equiv z + y = 1}$

(b) La recta que pasa por A y B es la recta que pasa por A y tiene un vector $\vec{AB} = (-1, 4, -4)$, que en ecuaciones parametricas es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

El corte de la recta con este plano es la intersección $r \cap (z = 1) \equiv P$.

$$r \cap (z = 1) : z = 1 = 3 - 4\lambda \iff \boxed{\lambda = 1/2} \to \begin{cases} x = 1 - 1/2 = 1/2 \\ y = -2 + 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \implies \boxed{P(1/2, 0, 1)}$$

(c) El perímetro del triángulo T se calcula como la suma de los tres lados, es decir:

$$\begin{aligned} p = |\vec{AB}| + |\vec{AC}| + |\vec{BC}| &= \sqrt{1^1 + 4^2 + 4^2} + \sqrt{1 + 3^2 + 3^2} + \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} = \boxed{12.55 \text{ u}} \end{aligned}$$

A.4- Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$:

(a) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.

(b) Otro suceso C cumple $P(C|A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \bar{C})$.

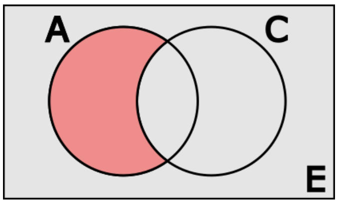
(c) Si se tiene un suceso D tal que $P(\bar{A}|D) = 0.2$ y $P(D|A) = 0.5$, calcule $P(D)$.

Solución:

(a) Al ser el suceso B independiente de A, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$.
La probabilidad $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.5 - 0.15 = \boxed{0.65}$

(b) La probabilidad que buscamos está representada en rojo en la siguiente imagen:

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{C}) &= P(A) - P(A \cap C) \\ P(C|A) = 0.5 &= \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \implies P(A \cap C) = 0.15 \\ P(A \cap \bar{C}) &= 0.3 - 0.15 = \boxed{0.15} \end{aligned}$$



(c) $P(\bar{A}|D) = 0.2 = \dfrac{P(\bar{A} \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D) - P(D \cap A)}{P(D)}$ (mismo razonamiento que ap. b)
Además:
$P(D|A) = 0.5 = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(D \cap A)}{0.3} \implies P(D \cap A) = 0.15$. Por tanto, obtenemos que:

$$0.2 = \frac{P(D) - 0.15}{P(D)} = 1 - \frac{0.15}{P(D)} \implies \boxed{P(D) = \frac{0.15}{0.8} = 0.1875}$$

Opción B:

B.1- Dado el sistema $\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3 \\ 4x + 2ay + z = 3 \end{cases}$, se pide:

(a) Discutirlo en función del parámetro a.

(b) Resolverlo para $a = 3$.

(c) Resolverlo para $a = 5$.

Solución:

(a) La discusión de este sistema de ecuaciones consistirá en clasificarlo en función de la existencia de soluciones, dependiendo del parámetro a. En primer lugar, para que un sistema posea una única solución (es decir, sea *compatible determinado*). El rango de la matriz asociada al sistema, M, debe ser el mismo que el de la matriz ampliada, M^*, que a su vez debe ser igual al orden de la matriz M.

$$r(M) = r(M^*) = N = 3 \iff \det(M) \neq 0$$

La matriz M y la ampliada M^* son:

$$M = \begin{bmatrix} (a+1) & 4 & 0 \\ 0 & (a-1) & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{bmatrix} \qquad M^* = \left[\begin{array}{ccc|c} (a+1) & 4 & 0 & 0 \\ 0 & (a-1) & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\det(M) = a^2 - 1 + 16 - 2a(a+1) \equiv 0 \to a^2 + 2a - 15 = 0 \implies \begin{cases} a = 3 \\ a = -5 \end{cases}$$

Es decir, si $a \neq \{-5, 3\}$, el sistema es **compatible determinado**.

$$\to a = -5 : M = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 4 & -10 & 1 \end{bmatrix}, \ M^* = \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

En este caso, el rango de M es el rango del mayor menor no nulo.

Como $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(M) = 2$.

En el caso de M^*, el mayor menor no nulo también es de rango 2. Entonces, según el teorema de Rouché-Frobenius, como $r(M) = r(M^*) < 3$, el sistema es **compatible indeterminado**.

(b) $\to a = 3 : M = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

En este caso, $r(M) = r(M^*) = 2$, por lo que el sistema es **compatible indeterminado**. Resolvemos por eliminación gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3' = F_3 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \implies \boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\lambda - 3) \\ y = \frac{1}{2}(3 - \lambda) \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

(c) $a = 5$. Como $a \neq \{-5, 3\}$, el sistema es compatible determinado. Usando el método de la eliminación gaussiana, se puede reducir el sistema a:

$$\begin{cases} -11x + z = 3 \\ -6x + z = 3 \end{cases} \implies \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}}$$

B.2- Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2+x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & \text{si } x > -1 \end{cases},$$

se pide:

(a) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

(b) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

(c) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Nota: En el primer apartado, se pide estudiar la continuidad de la función en toda la recta real. No obstante, como se verá más adelante, existe un punto conflictivo en $x = 1$ que impide poder estudiar la continuidad en ese punto. Esto proviene del hecho de que la 'continuidad' o 'discontinuidad' de una función se define únicamente para puntos pertenecientes al dominio de la función, lo cual excluye a $x = 1$. Al evaluar este ejercicio, se contará como válido que sea discontinua en este punto, pero en principio no se debería poder llegar a esa conclusión.

Solución:

(a) La función $f(x)$ está compuesta de dos funciones racionales de polinomios, ambas continuas en sus dominios de definición *excepto* en $x = -1$, punto en el cual se anula el denominador de la función del segundo tramo. Por tanto, se debe estudiar la continuidad tanto en $x = 1$ como en el punto de cambio de dominio de definición, $x = -1$.

→ $x = -1$: La condición de continuidad para $f(x)$ en $x = -1$ es que:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{2x^2}{3-3x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{2+x^2} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2}{2+(-1)^2} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, como los límites laterales coinciden con el valor de la función en $x = -1$, **la función es continua** en $x = -1$.

→ $x = 1$:

$$\lim_{x\to1^\pm} \frac{2x^2}{3-3x} \overset{\overset{2/0^\pm}{\uparrow}}{=} \pm\infty \implies \nexists \lim_{x\to1} f(x)$$

Como los límites laterales no existen, la función **es discontinua** en $x = 1$ (inevitable, salto infinito).

(b)

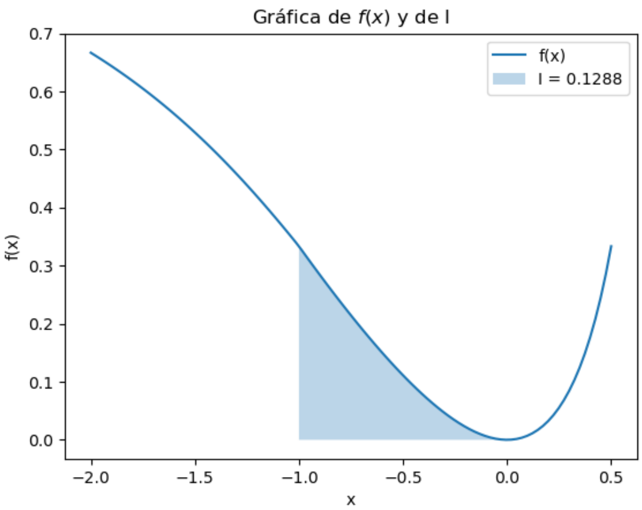
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1} &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = 1^{\infty}]_{\text{IND}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2-2}{x^2+2}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+2}-\frac{2}{x^2+2}\right)^{2x^2-1} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2+2}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+2/(-2)}\right)^{2x^2-1} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+2/(-2)}\right)^{\frac{x^2+2}{-2}\cdot\frac{-2}{x^2+2}\cdot(2x^2-1)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\cdot\frac{2x^2-1}{x^2+2}\right)} = \cdots = \boxed{e^{-4}}
\end{aligned}
$$

(c) Resolvemos la integral $I=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2}{3-3x}\,\mathrm{d}x$. Para ello, primero realizamos la división de polinomios.

$$
\begin{array}{rl}
2x^2 & \big|\; -3x+3 \\
-2x^2+2x & \;\; -\frac{2}{3}x-\frac{2}{3} \\
\hline
2x & \\
-2x+2 & \\
\hline
2 &
\end{array}
\implies \frac{2x^2}{3-3x}=\frac{2}{3}\left[-x-1+\frac{1}{1-x}\right]
$$

Por lo que la integral a resolver es entonces:

$$
\begin{aligned}
I=\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\left[-\frac{x^2}{2}-x-\ln|1-x|\right]_{-1}^{0} \\
\text{(Regla de Barrow):}\quad &= -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{3}(2\ln 2-1)}
\end{aligned}
$$



B.3- Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto $A(1,1,1)$, se pide:

(a) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

(b) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

(c) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

Solución:

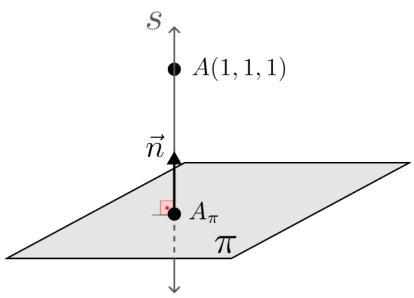
(a) Si la intersección entre el plano y la recta da un punto, la posición relativa entre ellos será secantes; si la intersección es la misma recta r, entonces r estará contenida en π; y si la intersección es nula, entonces la recta y el plano son paralelos. Calculamos la intersección: en primer lugar, la recta r en ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \implies r \cap \pi : x - z = (1 + 2\lambda) - (-1 - 2\lambda) = 2 \iff \lambda = 0$$

$$\implies \boxed{r \cap \pi = P(1, 0, -1)}$$

Como la intersección es un único punto, la recta y el plano son **secantes**.

(b) Buscamos ahora la proyección ortogonal de A en el plano π, como aparece representado en el siguiente diagrama:



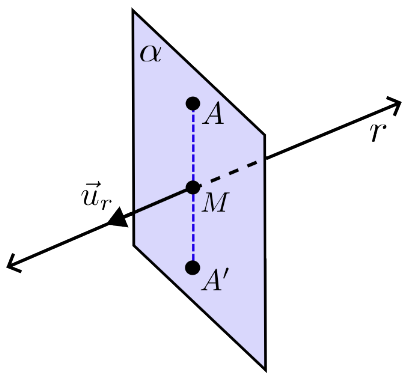
Para encontrar el punto A_π, trazaremos una recta perpendicular al plano π que pase por el punto A. Esta recta, s, tendrá como vector director $\vec{u}_s$ el vector normal del plano π, $\vec{n} = (1, 0, -1)$. Por tanto, la recta s tendrá como ecuaciones paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

La intersección entre el plano y la recta s es:

$$s \cap \pi : x - z = (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2 \implies \lambda = 1 \implies \boxed{A_\pi(2, 1, 0)}$$

(c) Buscamos ahora el punto simétrico de A, A', con respecto a la recta r, como se ve en el dibujo.



Para encontrar el punto simétrico A', trazaremos un plano auxiliar α perpendicular a la recta r, que tendrá por tanto vector perpendicular $\vec{n} = \vec{u}_r = (2, 1, -2)$; y que pase por el punto A. La intersección de la recta r con el plano auxiliar nos dará el punto medio entre A y A', M. Una vez encontrado el punto M, podemos obtener las coordenadas de A' sabiendo que es su punto medio con A. En primer lugar, la ecuación del plano auxiliar es:

$$\alpha : n_1 x + n_2 y + n_3 z = 2x + y - 2z = d$$

Sabiendo que el punto A pertenece a α, sustituimos las coordenadas de A para encontrar d.

$$2(1) + (1) - 2(1) = d = 1 \implies \alpha : 2x + y - 2z = 1$$

El punto M es la intersección entre α y r:

$$\alpha \cap r : 2x + y - 2z = 2(1 + 2\lambda) + \lambda - 2(-1 - 2\lambda) \iff \lambda = -1/3$$

$$\implies M(1/3, -1/3, -1/3)$$

Por último, M es el punto medio de A y A':

$$M = \frac{A+A'}{2} \implies \begin{cases} \dfrac{a_1+a'_1}{2} = \dfrac{1+a'_1}{2} = \dfrac{1}{3} & \implies a'_1 = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{a_2+a'_2}{2} = \dfrac{1+a'_2}{2} = -\dfrac{1}{3} & \implies a'_2 = -\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{a_3+a'_3}{2} = \dfrac{1+a'_3}{2} = -\dfrac{1}{3} & \implies a'_3 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{A'(-1/3, -5/3, -5/3)}$$

B.4- La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

(a) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

(b) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18 $\%$ de las sardinas capturadas.

(c) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Solución:

(a) La variable aleatoria que vamos a estudiar es la 'longitud de las sardinas':
$X \sim N(\mu = 175$ mm$, \sigma = 25.75$ mm$)$. Estamos interesados en saber el porcentaje de sardinas de calidad admitida, que son aquellas cuya longitud $X > 160$ mm. Por tanto, deberemos calcular la probabilidad de que $X > 160$, $P(X > 160)$. Para ello, primero tipificaremos la distribución normal de X.

$$X \longrightarrow Z \sim N(\mu = 0, \sigma = 1) \qquad Z \equiv \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$P(X > 160) \longrightarrow P\left(Z > \frac{160-\mu}{\sigma}\right) = P(Z > -0.58)$$

$$P(Z > -0.58) = P(Z < 0.58) = 0.7190 \quad \text{(mirado en la tabla)}$$

El porcentaje de sardinas de calidad es $\boxed{71.9\%}$.

(b) Buscamos una longitud $t < 175$ mm que cumpla que $P(t < X < 175 = \mu) = 0.18$. Pasando a variable tipificada, esto queda:

$$P\left(\frac{t-\mu}{\sigma} < Z < 0\right) = \underbrace{P(Z<0)}_{0.5} - P\left(Z < \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = 0.18 \implies P\left(Z < \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = 0.32$$

Como $(t-\mu)/\sigma$ es negativo, tenemos que convertirlo a un valor positivo.

$$P\left(Z < \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{\mu-t}{\sigma}\right) \implies P\left(Z < \frac{\mu-t}{\sigma}\right) = 0.68$$

$$\implies Z = 0.47 \quad \text{(valor de probabilidad más cercano es } 0.6808\text{)}$$

$$\implies \boxed{t \approx 162 \text{ mm}}$$

(c) La 'sardina procesada' (X) es una variable que toma dos valores: o bien es devuelta por pequeña ($X = 1$) o bien no es devuelta ($X = 0$). Por tanto, $X \sim$ Ber$(p = P(X < 150))$. Esta probabilidad p se calcula de la misma forma que hemos venido haciendo.

$$p = P(X < 150) = P(Z < -0.97) = 1 - P(Z < 0.97) = 0.166$$

La variable Y 'sardinas pequeñas en lotes de $n = 10$' sigue una distribución binormal:
$Y \sim$ Bin$(n = 10, p = 0.166)$. La probabilidad de que al menos una sardina haya sido devuelta es:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = 1 - (1 - 0.166)^{10} = \boxed{0.8372}$$
