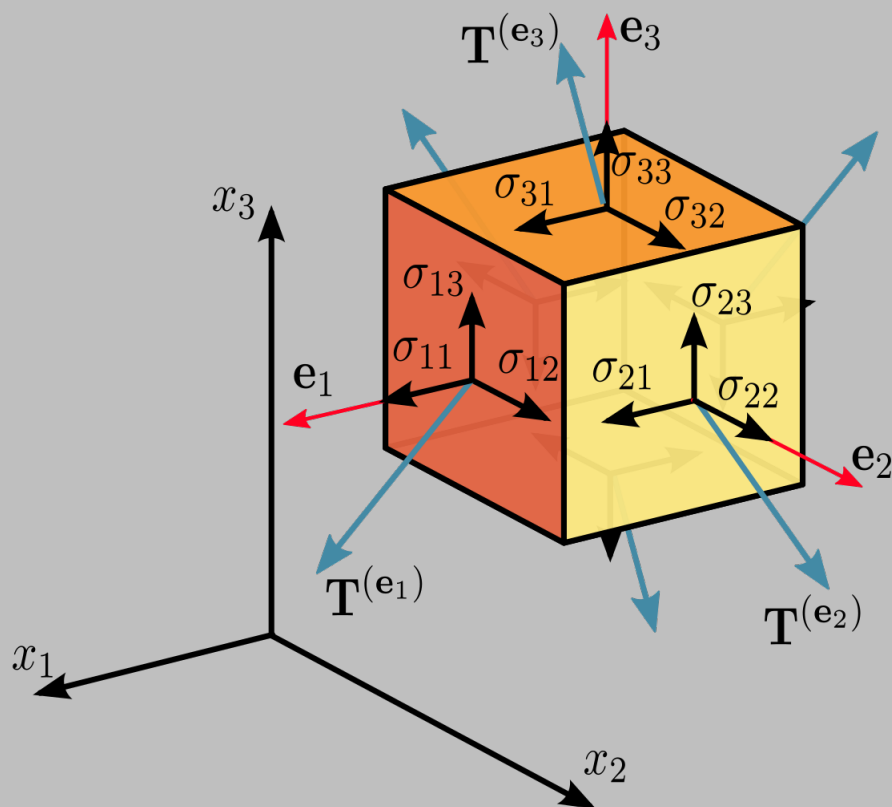

Geometría Diferencial & Cálculo Tensorial

Manuel Lozano Bermúdez

Curso 2022-2023, grupo C. Universidad Complutense de Madrid.



Comenzado el: 25 de enero, 2023
Terminado el: 9 de mayo, 2023

Agradecimientos

A Marcos, por revisar los apuntes, limpiarlos de erratas y por obligarme a mantener frescos mis conocimientos de la asignatura.

Índice de contenidos

I Teoría	4
1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n. Teoría de curvas	5
1.1. Definición	5
1.1.1. Producto vectorial y producto mixto	6
1.1.2. Isometrías en \mathbb{R}^3	7
1.2. Curvas parametrizadas	7
1.2.1. Reparametrizaciones	8
1.3. Longitud de arco	9
1.3.1. Longitud de arco de una circunferencia	9
1.3.2. Invariancia de la longitud de arco en \mathbb{R}^n	10
1.3.3. Parámetro natural de una curva	11
1.4. Curvatura	13
1.4.1. Variación de la curva	16
1.4.2. Curvaturas de una curva	17
1.4.3. Radio de curvatura	19
1.4.4. Sistema de Frenet en parametrización natural	20
1.4.5. Interpretación geométrica de la curvatura en \mathbb{R}^2	20
1.4.6. Reconstrucción de una curva a partir de su curvatura	20
1.5. Fórmulas de Frenet	21
1.5.1. Curvas planas en \mathbb{R}^3	23
2. Superficies. Primera forma fundamental y cálculo tensorial	25
2.1. Concepto de superficie	25
2.2. Curvas en una superficie	27
2.2.1. Curvas coordenadas y coordenadas curvilíneas	27
2.2.2. Vectores tangentes a la superficie S y espacio o plano tangente	28
2.3. Primera forma fundamental	29
2.3.1. Coordenadas ortogonales	31
2.3.2. Elemento de área de una superficie	31
2.4. Vectores contravariantes y covariantes	32
2.4.1. Reparametrizaciones	32
2.4.2. Leyes de transformación	34
2.4.3. Base dual. Componentes covariantes de un vector	35
2.4.4. Tensores	38
2.5. Geometría riemanniana	39
2.6. Fundamentos del cálculo tensorial	41
2.7. Tensores especiales	42
3. Segunda forma fundamental, curvatura media y gaussiana	44
3.1. Segunda forma fundamental	44
3.1.1. Clasificación de los puntos de una superficie	46
3.2. Curvaturas principales, media y gaussiana	47
3.2.1. Curvaturas normales principales (de S en P)	48
3.3. Fórmulas de Weingarten y de Gauss. Símbolos de Christoffel	50
3.4. Propiedades de los símbolos de Christoffel	51
3.4.1. Simetrías	51
3.4.2. Ley de transformación de los símbolos de Christoffel	53

3.5. Tensor de curvatura de Riemann	53
3.5.1. Tensor de curvatura de Riemann	54
3.6. Teorema egregio de Gauss	55
4. Curvatura geodésica y geodésicas	56
4.1. Curvatura geodésica	56
4.2. Geodésicas	57
4.2.1. Ecuación de las geodésicas	58
4.3. Propiedades extremales de las geodésicas: arcos de longitud mínima	59
 II Ejercicios sin corregir	 61
Tema 1	63
Tema 2	68
Tema 3	70

Parte I

Teoría

Capítulo 1

El espacio euclídeo \mathbb{R}^n . Teoría de curvas

1.1. Definición

El espacio vectorial \mathbb{R}^n está formado por vectores de la forma:

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Estos satisfacen las propiedades de espacio vectorial con respecto a las operaciones de producto interno y externo: $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\lambda \mathbf{x}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

La *base canónica* de \mathbb{R}^n es:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

En la base canónica, cualquier vector genérico $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se escribe como:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$$

Además, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, definimos su *producto escalar* como:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

y la norma euclídea de un vector.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Por tanto, la distancia entre dos puntos de \mathbb{R}^n puede definirse como:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

y el ángulo θ formado entre dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} se define como:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

Por lo tanto, la base canónica cumple que:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \{1 \text{ si } i=j, 0 \text{ si } i \neq j\}$$

Cualquier base que cumpla esa propiedad será una *base ortonormal*.

Por otro lado, los vectores de una base se escriben de forma ordenada, lo que lleva al concepto de *orientación* de una base. Dadas las bases de \mathbb{R}^n , $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ y $\tilde{B} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$, diremos que tienen la misma orientación si el *determinante de la matriz de cambio de base* es positivo.

Dados los vectores de \tilde{B} en la base B : $\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathbf{e}_j$,
 B y \tilde{B} tienen la **misma orientación** si $\det(C) > 0$

Ejemplo A: \mathbb{R}^3 . Las bases:

$$B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}, \quad \tilde{B} = \{\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\} \quad (\text{permutación cíclica})$$

tienen la misma orientación. Sin embargo, esto no se cumple con la base $\tilde{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{j}\}$. Las bases con idéntica orientación pueden transformarse entre ellas con un movimiento rígido (una rotación).

1.1.1. Producto vectorial y producto mixto

En \mathbb{R}^3 , se define el *producto vectorial* de $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ como:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k}$$

donde $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Propiedades:

1. $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \sin \theta$.
 El módulo de $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ es el área del paralelogramo determinado por \mathbf{x} e \mathbf{y} .
2. $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y} \implies \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{0}$
3. $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$

Se define el *producto mixto* de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ como:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = |\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{z}|$$

Geométricamente, el producto mixto se corresponde con el volumen del paralelepípedo con lados $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.

1.1.2. Isometrías en \mathbb{R}^3

Una isometría de \mathbb{R}^3 es una transformación (aplicación) que *preserva las distancias*,

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si T es una isometría, la distancia entre dos puntos del espacio se mantiene:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(T\mathbf{x}, T\mathbf{y})$$

Las isometrías en \mathbb{R}^3 (aunque se cumple en general en \mathbb{R}^n) son las *traslaciones*, las *rotaciones* y las *reflexiones*.

El conjunto de isometrías de \mathbb{R}^3 (y de \mathbb{R}^n) forman un *grupo*, conocido como *grupo de isometrías*. Las isometrías se pueden escribir como:

$$\boxed{T\mathbf{x} = R\mathbf{x} + \mathbf{b}} \quad , \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{b} \equiv \text{const.}$$

$$RR^t = \mathbb{I}, \quad (R \text{ es una matriz ortogonal})$$

Como consecuencia de esta propiedad,

$$(R\mathbf{x}, R\mathbf{y}) = (R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

$$\Rightarrow R \text{ conserva el producto escalar.}$$

Se cumple que R transforma bases ortonormales en ortonormales.

Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, tendremos el grupo de isometrías formado por las transformaciones ortogonales, $O(n)$ (en \mathbb{R}^3 , $O(3)$). El grupo de rotaciones con $\det(R) = +1$ es un subgrupo de $O(3)$ y se denomina grupo especial ortogonal, $SO(3)$, ($SO(n)$, en \mathbb{R}^n).

1.2. Curvas parametrizadas

Por definición, una curva parametrizada es una aplicación:

$$\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \longmapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

donde I es un intervalo de \mathbb{R} , las funciones $x_1(t), \dots, x_n(t)$ son continuas y la base empleada es la canónica. En esta ocasión, trabajaremos con curvas que sean infinitamente diferenciables, de clase C^∞ .

Definiremos la *velocidad de una curva* (parametrizada) como la derivada de \mathbf{x} con respecto al parámetro t (en general, elegiremos t por la analogía de la cinemática en física.)

En consecuencia:

$$\mathbf{x}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$$

Además, conocemos implícitamente la curva C asociada a la parametrizada, $\mathbf{x}(t)$, que es simplemente la imagen de dicha curva parametrizada (lo

que vemos en su representación gráfica). Se dice que tenemos una curva *regular* (de clase C^r , $r \geq 1$) si su velocidad no se anula.

Una curva parametrizada $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, de clase C^r , $r \geq 1$; es **regular** si: $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$, $\forall t \in I$.

Una curva parametrizada puede violar esta definición de dos maneras distintas.

- I) Puede ocurrir que la curva, efectivamente, tenga un punto en donde haya un pico (curva no suave).
- II) Puede ocurrir que la parametrización que usamos no sea la adecuada, aún siendo la curva suave.

Ejemplo B: Tomemos las siguientes curvas parametrizadas.

(i) $\mathbf{x}(t) = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} \Rightarrow x = y; \mathbf{x}'(t) = (1, 1) \neq \mathbf{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se trata de una curva regular en \mathbb{R}^2 .

(ii) $\mathbf{x}(t) = (t^5, t^5)$, la misma curva del apartado (i) con distinta parametrización.

$$\begin{cases} x(t) = t^5 \\ y(t) = t^5 \end{cases} \Rightarrow x = y \text{ (misma imagen que (i))}$$

No obstante, $\mathbf{x}'(t) = (5t^4, 5t^4)$, luego en $t = 0 \Rightarrow \mathbf{x}'(0) = \mathbf{0}$, es decir, esta parametrización **no** es regular en ese punto, como consecuencia de esa parametrización inadecuada. Este problema se resuelve llevando a cabo una *reparametrización*, como se verá más adelante.

(iii) $\mathbf{x} = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{x}'(t) = (2t, 3t^2), \quad \mathbf{x}'(0) = \mathbf{0}$$

En este caso, la curva tiene un pico no diferenciable en el punto $(0, 0)$.

1.2.1. Reparametrizaciones

Dados dos intervalos $I \subseteq \mathbb{R}$ y $J \subseteq \mathbb{R}$, una aplicación $\Phi : J \rightarrow I$ es un *difeomorfismo* si Φ es biyectiva, de clase $C^\infty(J)$ y $\Phi^{-1} \in C^\infty(I)$. Además, si Φ es un difeomorfismo, $\Phi'(t) \neq 0$ (por el *teorema de la función inversa*).

Ejemplo C: Sea $\Phi : (0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, +\infty)$.

Usaremos \bar{t} en los puntos de J y t para los puntos del intervalo inicial I .

$$\bar{t} \longmapsto \Phi(\bar{t}) = \ln \bar{t} = t$$

$$\Phi^{-1} : (-\infty, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$$

$$t \longmapsto \Phi^{-1}(t) = e^t$$

La aplicación Φ es un difeomorfismo.

Sea $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regular, y sea $\Phi : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ un cierto difeomorfismo. Llamaremos *reparametrización de $\mathbf{x}(t)$* con el difeomorfismo $\Phi(\bar{t})$ a la curva parametrizada regular:

$$\bar{\mathbf{x}} : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \longmapsto \mathbf{x}(\bar{t}) = \mathbf{x}(\Phi(\bar{t}))$$

Una reparametrización supone cambiar la variable t en la curva original por una función $\Phi(\bar{t})$ del nuevo parámetro, tal que Φ es un difeomorfismo.

Ejemplo D: Sea $\mathbf{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t, t)$$

y sea el difeomorfismo $\Phi(\bar{t}) = \ln \bar{t}$, $\bar{t} \in (0, +\infty)$.

$$\bar{\mathbf{x}} : J = (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\bar{t} \longmapsto \bar{\mathbf{x}}(\bar{t}) = (\ln \bar{t}, \ln \bar{t})$$

$$(t, t) \longrightarrow (\ln t, \ln t)$$

La imagen de \mathbf{x} y $\bar{\mathbf{x}}$ es la misma (son la misma curva). Como Φ es un difeomorfismo, el signo de su derivada *no cambia* en J . Por tanto, *de forma general*, hay dos posibilidades:

- (i) $\Phi'(\bar{t}) > 0$, $\forall \bar{t} \in J$: La reparametrización **conserva la orientación** con la que se recorre la curva.
- (ii) $\Phi'(\bar{t}) < 0$, $\forall \bar{t} \in J$: La reparametrización **invierte la orientación** con la que se recorre la curva.

1.3. Longitud de arco

1.3.1. Longitud de arco de una circunferencia

Sea $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada de clase C^r , con $r \geq 1$. Dado el subintervalo $[a, b] \subset I$, **¿cuál es la longitud entre $[a, b]$?**

Definiremos la *longitud de arco*, ℓ , de la curva $\mathbf{x}(t)$ entre $\mathbf{x}(a)$ y $\mathbf{x}(b)$ como:

$$\ell = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt$$

Ejemplo E: Supongamos, en \mathbb{R}^3 que tenemos una hélice parametrizada de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}(t) = (r \cos t, r \sin t, vt)$$

con la condición $r^2 + v^2 \neq 0$. Tomaremos t en el intervalo $[0, 2\pi] = [a, b]$ y supondremos que $r, v > 0$ (si $v = 0$, tendremos que la hélice degenera a una circunferencia de radio r . El parámetro v representa la 'rapidez' a la que se sube en el eje z).

$$\mathbf{x}'(t) = (-r \sin t, r \cos t, v), \quad \|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{r^2 + v^2} \equiv \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + v^2} dt \\ &= 2\pi \sqrt{r^2 + v^2} \end{aligned}$$

Esta situación está relacionada con el concepto de curva geodésica (las curvas geodésicas para una superficie plana son las rectas, que minimizan la distancia), y las hélices son geodésicas en el cilindro.

1.3.2. Invariancia de la longitud de arco en \mathbb{R}^n

Notación: Diremos que una transformación que suponga cambiar la curva desde dentro (reparametrizar la curva) será representada con una barra ($\bar{}$). Cuando transformamos la curva desde fuera (con traslaciones, rotaciones... en general, isometrías), representamos esta nueva curva mediante una tilde ($\tilde{}$).

1. Bajo isometrías:

Recordando isometrías: $\mathbf{x} \xrightarrow{T} \tilde{\mathbf{x}} = R\mathbf{x} + \mathbf{b}$, con R ortogonal, $\mathbf{b} \equiv \text{const.}$

$$\begin{aligned} \ell &= \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt, \text{ tras la isometría: } \tilde{\ell} = \int_a^b \|\tilde{\mathbf{x}}'(t)\| dt = \int_a^b \|R\mathbf{x}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt \\ &= \ell \end{aligned}$$

2. Bajo reparametrizaciones:

Al pasar del parámetro t al \bar{t} mediante el difeomorfismo Φ , la longitud

de arco cambia de la siguiente manera:

$$\ell = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt \longrightarrow \bar{\ell} = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \|\bar{\mathbf{x}}'(\bar{t})\| d\bar{t}$$

Pero conocemos $\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{x}'(\Phi(\bar{t})) \cdot \frac{d\Phi}{d\bar{t}} \implies \|\bar{\mathbf{x}}'\| = \|\mathbf{x}'(\Phi)\| \cdot |\Phi'(\bar{t})|$; y sustituyéndolo en la expresión de longitud de arco:

$$\bar{\ell} = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \|\mathbf{x}'(\Phi)\| \cdot \underbrace{|\Phi'(\bar{t})| d\bar{t}}_{dt} = \int_a^b \|\mathbf{x}'(\Phi)\| dt = \ell$$

$(t = \Phi(\bar{t}))$

Estos dos resultados implican que ℓ es *invariante bajo isometrías y reparametrizaciones*,

$$\boxed{\ell = \bar{\ell} = \tilde{\ell}}$$

lo cual significa que ℓ es un *invariante geométrico* o, dicho en otras palabras, una característica *intrínseca* de la curva.

Motivado por esta invariancia geométrica, introducimos la siguiente definición.

1.3.3. Parámetro natural de una curva

Sea una curva parametrizada regular de clase C^r , $r \geq 1$ ($\mathbf{x} : I \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto \mathbf{x}(t)$), y sea un punto $t_0 \in I$. Teniendo en cuenta el sentido en el que recorreremos la curva, entonces redefinimos la longitud de curva como sigue:

$$S_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}'(t)\| dt$$

La longitud depende de t_0 , pero podemos eliminar esa dependencia con una traslación en el parámetro t (que equivale a redefinir el instante inicial en cinemática).

Si omitimos tanto t_0 como la dependencia en t de $S_{t_0}(t)$:

$$S = \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}'(t)\| dt \quad , \quad (\text{se corresponderá con el origen de medida})$$

que es la longitud de arco que identificaremos con el *parámetro natural de la curva*.

Podemos observar que el parámetro t es escalar, así como S ; luego podemos buscar la relación entre t y S para escribir $\bar{\mathbf{x}}(S)$ (cuando sea posible).

Ejemplo F: Sea la hélice $\mathbf{x}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$, con $t_0 = 0$.

$$S = \int_0^t \|\dot{\mathbf{x}}\| dt = \int_0^t 5 dt = 5t = S(t)$$

La relación entre S y t permite intercambiarlos en la curva original, es decir, escribir $\mathbf{x}(t)$ en el parámetro nuevo S .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &\xrightarrow{t=t(S)} \tilde{\mathbf{x}}(S) \\ (3 \cos t, 3 \sin t, 4t) &\xrightarrow{t=S/5} \left(3 \cos\left(\frac{S}{5}\right), 3 \sin\left(\frac{S}{5}\right), \frac{4}{5}S \right) \end{aligned}$$

Cuando escribimos una curva usando S , la longitud de arco, como su parámetro; decimos que está escrita en *parametrización natural*.

Para que se puedan intercambiar los parámetros, tienen que ocurrir dos cosas:

1. La velocidad debe poder ser integrable.
2. El resultado de la integral tiene que poder ser invertible.

Además, la parametrización natural cumple una propiedad característica.

Notación: Denotamos las derivadas con respecto a un parámetro arbitrario (t) mediante primas ($'$):

$$\mathbf{x}(t) \longrightarrow \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{x}'(t)$$

Las derivadas con respecto al parámetro privilegiado (natural, S), o longitud de arco, las representaremos mediante un punto ($\dot{}$):

$$\mathbf{x}(S) \longrightarrow \frac{d\mathbf{x}(S)}{dS} = \dot{\mathbf{x}}(S)$$

Para identificar si la parametrización es natural haremos lo siguiente: cuando una curva está escrita en parámetro natural:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(S) &= \frac{d\mathbf{x}(S)}{dS} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{dS}}^{\frac{1}{\frac{dS}{dt}}} \quad , \text{ pero } dS = \|\mathbf{x}'(t)\| dt \iff \frac{dS}{dt} = \|\mathbf{x}'(t)\| \\ &\text{por lo que: } \dot{\mathbf{x}}(S) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \\ &= \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \end{aligned}$$

La parametrización $\mathbf{x}(S)$ da lugar a una velocidad $\dot{\mathbf{x}}(S)$, que es *unitaria*. Es decir,

En parametrización **natural**, el vector de velocidad de una curva es **unitario**.

$$||\dot{\mathbf{x}}(S)|| \equiv 1$$

Es decir, que el modo de decidir si una curva se encuentra parametrizada en términos del parámetro natural será calcular la velocidad $d\mathbf{x}(\lambda)/d\lambda$ y su módulo. Si está normalizada, entonces se trata del parámetro natural, y está parametrizada en términos de la longitud de arco.

1.4. Curvatura

Normalmente, al escribir la parametrización de una curva utilizamos la base canónica de \mathbb{R}^n ,

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \mathbf{e}_i$$

Al escribir la velocidad de la curva, hacemos lo mismo.

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{dx_1}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{dt} \mathbf{e}_2 + \dots + \frac{dx_n}{dt} \mathbf{e}_n$$

Como ventaja, los vectores \mathbf{e}_i de la base canónica son fijos, es decir, no varían con el parámetro t . Sin embargo, puede resultar útil usar una base que también se desplace junto al vector velocidad de la curva.

Para describir la curva $\mathbf{x}(t)$ mediante un sistema (o base) intrínseco a la curva—un sistema móvil—, de vectores que varían con el parámetro t , utilizaremos el *método de Gram-Schmidt* de ortonormalización.

Vamos a construir una nueva base que se desplazará (y rotará) al movernos a lo largo de la curva. Este se conoce como *sistema o base de Frenet*.

La idea es construir una base que se aproxime a la curva $\mathbf{x}(t)$, como el desarrollo en serie de Taylor de una función $f(t)$ se aproxima a dicha función

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots$$

Como hemos dicho, el sistema de Frenet es una base móvil, que variará según lo haga el parámetro t de la curva.

Sea $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada de clase C^r , $r \geq n - 1$. Supondremos que sus derivadas, $\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t)$, son linealmente independientes (o sea, que forman una 'base').

A esas derivadas les aplicaremos el *método de ortogonalización de Gram-Schmidt* para construir una base ortogonal y normalizada.

MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT:

- 1 Dado el vector $\mathbf{x}'(t)$, definimos el primer vector de nuestra base como

$$\mathbf{e}_1(t) \equiv \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|},$$

el cual cumple que $\|\mathbf{e}_1(t)\| = 1$, $\forall t$.

- 2 Definimos el vector $\mathbf{v}_2(t)$ como la segunda derivada de $\mathbf{x}(t)$ sin su contribución en la proyección de \mathbf{e}_1 , es decir:

$$\mathbf{v}_2(t) = \mathbf{x}'' - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x}'')\mathbf{e}_1$$

y lo normalizamos para obtener el segundo vector de nuestra base,

$$\mathbf{e}_2(t) = \frac{\mathbf{v}_2(t)}{\|\mathbf{v}_2(t)\|}$$

- 3 El siguiente vector se construye como sigue.

$$\mathbf{v}_3(t) = \mathbf{x}'''(t) - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x}''')\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}''')\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_3(t) = \frac{\mathbf{v}_3(t)}{\|\mathbf{v}_3(t)\|}$$

- n-1 De forma general hasta el paso $n - 1$:

$$\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{x}^{(n-1)} - \sum_{i=1}^{n-2} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}^{(n-1)}) \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{e}_{n-1}(t) = \frac{\mathbf{v}_{n-1}(t)}{\|\mathbf{v}_{n-1}(t)\|}$$

Para completar nuestra base de n vectores ortonormales, podemos elegir el vector \mathbf{e}_n de tal modo que $\|\mathbf{e}_n\| = 1$, que sea ortogonal al resto, es decir: $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_n = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$; y la base completa $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ esté orientada positivamente. Esto será sencillo en el caso de \mathbb{R}^3 , ya que podemos utilizar el producto vectorial para encontrar el vector que nos falta. Resumiendo, utilizando este método obtendremos la base de Frenet característica de la curva.

Ejemplo G: Sea la hélice $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ en \mathbb{R}^3 . Queremos averiguar el sistema de Frenet de esta curva. Usando el método de Gram-Schmidt:

1

$$\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow \mathbf{e}_1(t) = \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1)$$

2

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(t) &= (-\cos t, -\sin t, 0) \\ \Rightarrow \mathbf{v}_2 &= (-\cos t, -\sin t, 0) \\ &\quad - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1) \cdot (-\cos t, -\sin t, 0) \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1) = \mathbf{x}''(t) \\ \Rightarrow \mathbf{e}_2(t) &= (-\cos t, -\sin t, 0) \end{aligned}$$

Para elegir \mathbf{e}_3 , como nos encontramos en \mathbb{R}^3 , podemos usar el producto vectorial,

$$\mathbf{e}_3(t) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1)$$

El sistema de Frenet varía en el parámetro t al desplazarnos por la curva.

Sea la base (sistema de Frenet) ortonormal de vectores $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)\}$. Si calculamos la evolución de esta base en t (es decir, las variaciones o derivadas a primer orden de sus vectores), tendremos los vectores $\{\mathbf{e}'_1(t), \dots, \mathbf{e}'_n(t)\}$, que pueden a su vez expresarse en la base de Frenet como combinaciones lineales de estos.

$$\mathbf{e}'_i(t) = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

con $\omega_{ij}(t) = \mathbf{e}'_i(t) \cdot \mathbf{e}_j(t)$

Por ortonormalidad, sabemos que los vectores de la base de Frenet cumplen que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\forall t \in I$, por lo que si derivamos esa identidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j &= 0 \quad \forall t \\ \Rightarrow \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j &= -\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j \\ \Leftrightarrow \omega_{ij}(t) &= -\omega_{ji}(t) \quad (\omega_{ij} \text{ es antisimétrico}). \end{aligned}$$

Además, por construcción del sistema de Frenet:

$\mathbf{e}_1(t)$ contiene a $\mathbf{x}'(t)$,

$\mathbf{e}_2(t)$ contiene a $\mathbf{x}'(t)$ y $\mathbf{x}''(t)$,

$\mathbf{e}_3(t)$ contiene a $\mathbf{x}'(t)$, $\mathbf{x}''(t)$ y $\mathbf{x}'''(t)$.

y así sucesivamente. Por otro lado:

$\mathbf{e}'_1(t)$ contiene a $\mathbf{x}''(t)$ (y también a \mathbf{x}'),

$\mathbf{e}'_2(t)$ contiene a $\mathbf{x}'''(t)$ (y también a \mathbf{x}' y \mathbf{x}'').

y así sucesivamente. Por lo tanto, $\omega_{ij} = 0$ si $j > i + 1$, luego:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\omega_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

y para el caso de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ 0 & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

y la matriz de coeficientes ω_{ij} se denominará *matriz de curvaturas* (con un matiz).

1.4.1. Variación de la curva

Ahora veremos qué ocurre con nuestro sistema de Frenet si realizamos los dos tipos de transformaciones que hemos estudiado previamente.

↪ Isometrías (traslaciones, reflexiones, etc.)

Sea $\tilde{\mathbf{x}} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto \tilde{\mathbf{x}}(t) = R\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$, con $RR^t = \mathbb{1}$, y \mathbf{b} constante.

$\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n\}$ es el sistema de Frenet tras la isometría.

Además, las derivadas de \mathbf{x} se expresan como $\tilde{\mathbf{x}}^{(n-1)}(t) = R\mathbf{x}^{(n-1)}(t)$, luego la transformación de los vectores de la base será

$$\tilde{\mathbf{e}}'_1(t) = R\mathbf{e}'_1(t), \quad \tilde{\mathbf{e}}'_2(t) = R\mathbf{e}'_2(t), \quad \dots$$

de donde se deduce que $\tilde{\mathbf{e}}'_i(t) = R\mathbf{e}'_i(t)$ y, finalmente: $\tilde{\omega}_{ij}(t) = \tilde{\mathbf{e}}'_i(t)\tilde{\mathbf{e}}_j(t) = R\mathbf{e}'_i(t)R\mathbf{e}_j(t) = \omega_{ij} \odot$. Es decir, los coeficientes ω_{ij} son invariantes bajo isometrías.

↪ Reparametrizaciones

Sea $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\{\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)\}$ el sistema de Frenet. Tras la reparametrización: $\tilde{\mathbf{x}} : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y $\{\tilde{\mathbf{e}}_1(t), \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n(t)\}$ el sistema de Frenet reparametrizado (recordamos que estamos pasando de $t \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} =$

$\mathbf{x}(\Phi(t))$, con $\Phi : J \rightarrow I$ el difeomorfismo de nuestra elección).

Consideramos que el difeomorfismo Φ es una función *creciente*, es decir, $\Phi' > 0 \forall t \in J$.

Como la base es ortonormal, las bases antes y después son *iguales*, con la salvedad de que están escritos en función de parámetros distintos.

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{x}'(\bar{t})}{\|\mathbf{x}'(\bar{t})\|} = \frac{\mathbf{x}'(\Phi(\bar{t}))}{\|\mathbf{x}'(\Phi(\bar{t}))\|} \cdot \underbrace{\frac{\Phi'(\bar{t})}{\|\Phi'(\bar{t})\|}}_1 = \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|} = \mathbf{e}_1$$

En general, $\bar{\mathbf{e}}_i(t) = \mathbf{e}_i(t)$

pero $\bar{\omega}_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_i' \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_i'(\Phi(\bar{t})) \cdot \Phi'(\bar{t}) \cdot \mathbf{e}_j(\Phi(\bar{t})) = \Phi'(\bar{t})\omega_{ij}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\omega}_{ij} = \Phi' \omega_{ij}} \odot$$

Es decir, que los coeficientes **no** son invariantes bajo reparametrizaciones.

Como $\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{x}'(\Phi'(t)) \rightarrow \|\bar{\mathbf{x}}'\| = \|\mathbf{x}'\| \cdot \|\Phi'\|$, el cociente

$$\frac{\bar{\omega}_{ij}(t)}{\|\bar{\mathbf{x}}'\|} = \frac{\omega_{ij} \cdot \Phi'}{\|\mathbf{x}'\| \cdot \|\Phi'\|} = \frac{\omega_{ij}}{\|\mathbf{x}'\|}$$

de modo que las cantidades

$$\boxed{\frac{\omega_{ij}(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}} \odot$$

sí son invariantes bajo reparametrizaciones (e isometrías). Es decir, son *invariantes geométricos*.

1.4.2. Curvaturas de una curva

Dados los resultados de los coeficientes ω_{ij} obtenidos y los invariantes que surgen de ellos, redefiniremos esos invariantes como las *curvaturas de una curva*:

Las **curvaturas de una curva**, $K_i(t)$, se definen como los invariantes geométricos:

$$K_i(t) = \frac{\omega_{i,i+1}(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{\mathbf{e}_i'(t) \cdot \mathbf{e}_{i+1}(t)}{\|\mathbf{x}'\|}$$

donde $\{\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)\}$ son los vectores del sistema de Frenet.

Por tanto, para el caso general, ya en términos de los auténticos invariantes geométricos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_3' \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n' \end{pmatrix} = \|\mathbf{x}'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & K_1(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -K_1(t) & 0 & K_2(t) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -K_2(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -K_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

Por el método de Gram-Schmidt, los $K_i(t) > 0$ con $i = 1, \dots, n-2$. $K_{n-1}(t)$, sin embargo, puede tener cualquier signo, o incluso anularse.

En nuestro caso en \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1'(t) \\ \mathbf{e}_2'(t) \\ \mathbf{e}_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K_1(t) & 0 \\ -K_1(t) & 0 & K_2(t) \\ 0 & -K_2(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1(t) \\ \mathbf{e}_2(t) \\ \mathbf{e}_3(t) \end{pmatrix}$$

Caso particular: curvas en \mathbb{R}^2 En este caso, las curvas parametrizadas sólo tienen *una curvatura*.

$$\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{curva parametrizada de clase } C^r, \quad r \geq 2$$

$$\mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t)) \longrightarrow \mathbf{e}_1(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

$$K(t) = \frac{\mathbf{e}_1'(t) \cdot \mathbf{e}_2(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}$$

\mathbf{e}_n , en este caso, es \mathbf{e}_2 . Recordamos que se calcula imponiendo que $\|\mathbf{e}_2\| = 1$ y que $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$ (además de la orientación positiva como $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$). Por ello, tomamos el último vector como

$$\mathbf{e}_2(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

El vector $\mathbf{e}_1'(t)$ es por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1'(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{e}_1(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right) \cdot (x'(t), y'(t)) + \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \cdot (x''(t), y''(t)) \end{aligned}$$

Tras derivar y simplificar, nos queda:

$$K(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

Cabe destacar que el numerador puede ser positivo, negativo, o incluso nulo.

Ejercicio: Calcular $K(t)$ para $\begin{cases} x(t) = r \cos(t) \\ y(t) = r \sin(t) \end{cases}$ (parametrización en coordenadas polares).

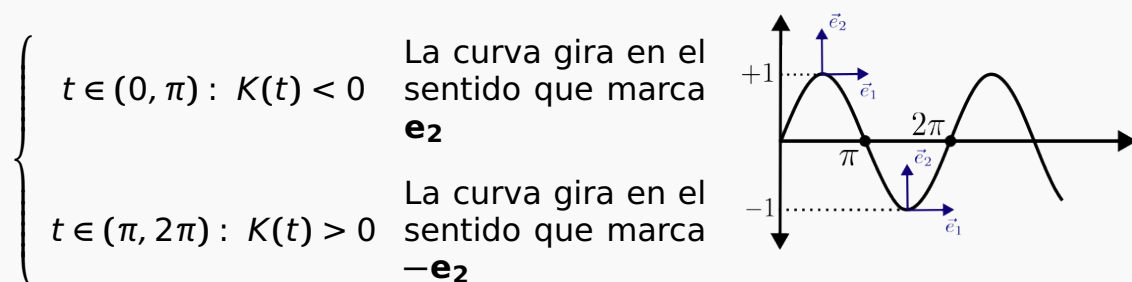
$$K(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

Ejemplo H: Sea la curva $\mathbf{x}(t) = (t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Calcular la curvatura $K(t)$.

$$\mathbf{x}'(t) = (1, \cos t), \quad \mathbf{x}''(t) = (0, -\sin t) \Rightarrow K(t) = -\frac{\sin t}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}}$$

La curvatura va cambiando de signo con el seno:

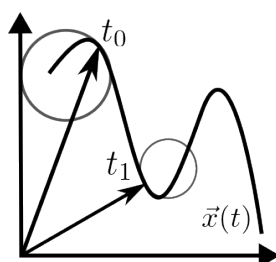


Observación: Para ciertos valores de t , la curvatura se puede *anular*. Un *punto de inflexión* es aquel en el que ocurre que $K = 0$ y $K' = 0$.

1.4.3. Radio de curvatura

Diremos que el **radio de curvatura** en un punto con $K(t) \neq 0$ se define como:

$$\rho(t) = \frac{1}{|K(t)|}$$



Para el caso anterior de $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$; $\rho(t) = r \equiv \text{constante}$. Geométricamente, $\rho(t)$ representa el *radio instantáneo de una circunferencia* que aproxima *cuadráticamente* la curva en un punto t .

1.4.4. Sistema de Frenet en parametrización natural

Dada nuestra curva $\mathbf{x}(S) = (x(S), y(S))$ en \mathbb{R}^2 en términos del parámetro privilegiado S , nuestro sistema de Frenet se construye de la siguiente forma:

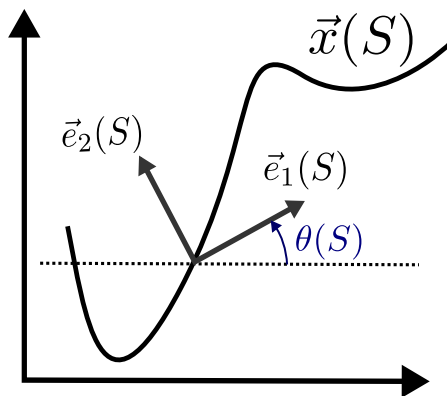
$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{x}}(S) = (\dot{x}(S), \dot{y}(S)) \\ \mathbf{e}_2 = (-\dot{y}(S), \dot{x}(S)) \end{cases} \Rightarrow K(S) = \mathbf{e}_1(S) \cdot \mathbf{e}_2(S) = -\ddot{x}(S)\dot{y}(S) + \ddot{y}(S)\dot{x}(S)$$

$$K(t) = \dot{x}(S)\ddot{y}(S) - \ddot{x}(S)\dot{y}(S)$$

(Resulta más sencillo calcular la curvatura en parametrización natural).

1.4.5. Interpretación geométrica de la curvatura en \mathbb{R}^2

Sea $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^r , $r \geq 2$, escrita en términos del parámetro natural.



$\theta(S)$ es el ángulo que forma el primer vector del sistema de Frenet, que coincide con $\dot{\mathbf{x}}(S)$, con el eje horizontal. Recordamos que estas derivadas en términos de S cumplen que $\|\dot{\mathbf{x}}(S)\| = 1$, por lo que

$$\dot{x}(S)^2 + \dot{y}(S)^2 = 1$$

Además, si descomponemos este vector velocidad en términos de sus proyecciones horizontales y verticales, obtenemos que

$$\begin{cases} \dot{x}(S) = \cos \theta(S) \\ \dot{y}(S) = \sin \theta(S) \end{cases}$$

Por lo que la curvatura $K(S)$ queda escrita como:

$$\begin{aligned} K(S) &= \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} \\ &= \cos \theta(S) \cdot \cos \theta(S) \cdot \dot{\theta}(S) + \sin \theta(S) \cdot \dot{\theta}(S) \cdot \sin \theta(S) = \dot{\theta}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &\Rightarrow \boxed{K(S) = \dot{\theta}(S)} \end{aligned}$$

La curvatura representa la variación del ángulo θ en términos de la longitud de arco.

1.4.6. Reconstrucción de una curva a partir de su curvatura

Supongamos que conocemos la curvatura $K(S)$ de una curva, donde S es el parámetro natural. Recordemos que $K(S) = \dot{\theta}(S)$, con $\dot{x} = \cos \theta$, $\dot{y} = \sin \theta$. Entonces,

$$\theta(S) = \int K(S) dS + \theta_0 \quad \text{con una constante de integración asociada a la libertad de rotación.}$$

y

$$\begin{aligned} x(S) &= \int \cos \theta(S) dS + x_0 \\ y(S) &= \int \sin \theta(S) dS + y_0 \end{aligned} \quad \text{con } x_0, y_0 \text{ constantes de integración asociadas a la libertad de traslación.}$$

Ejemplo I: $K(S) = 1/(1 + S^2)$. Hallar la curva paramétrica.

$$\theta(S) = \int K(S) dS = \int \frac{dS}{1 + S^2} = \arctan S + \theta_0 \rightarrow 0$$

→ $x(S)$:

$$x(S) = \int \cos \theta(S) dS = \int \cos[\arctan S] dS$$

Por trigonometría: $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} / \cos \alpha$, por lo que $\cos \alpha = \sqrt{1/(1 + \tan^2 \alpha)}$

$$x(S) = \int \cos[\arctan S] dS = \int \sqrt{\frac{1}{1 + S^2}} dS = \sinh^{-1}(S) + x_0 \rightarrow 0$$

→ $y(S)$:

$$\begin{aligned} y(S) &= \int \sin \theta(S) dS \\ &= \int \sin \arctan \theta dS = \int \frac{S dS}{\sqrt{1 + S^2}} = \sqrt{1 + S^2} + y_0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

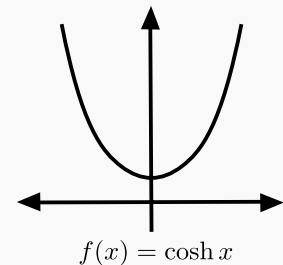
Finalmente:

$$\begin{cases} x(S) = \sinh^{-1}(S) \\ y(S) = \sqrt{1 + S^2} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(S) = (\sinh^{-1}(S), \sqrt{1 + S^2})$$

Representar esta curva mediante este parámetro es complicado, por lo que en este caso es útil utilizar una reparametrización.

$$t = \sinh^{-1}(S) \implies \sinh t = S, \sqrt{1 + S^2} = \cosh t$$



1.5. Fórmulas de Frenet

Ya hemos tratado el problema del sistema de Frenet en dos dimensiones e introducido el concepto de curvatura a través de la parametrización natural. En el caso de \mathbb{R}^3 , nuestro parámetro $S \in I$ define la curva como

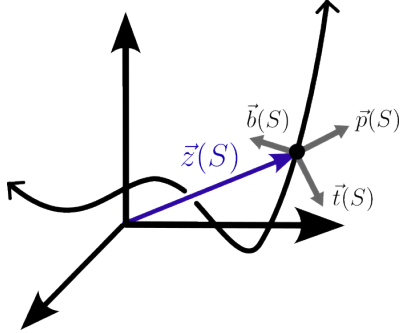
$$S \mapsto \mathbf{x}(S) = (x(S), y(S), z(S))$$

y nuestro sistema de Frenet toma una forma sencilla, porque $\|\dot{\mathbf{x}}(S)\| = 1$.

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1(S) = \dot{\mathbf{x}}(S) \\ \mathbf{e}_2(S) = \ddot{\mathbf{x}}(S) / \|\ddot{\mathbf{x}}(S)\| \\ \mathbf{e}_3(S) = \mathbf{e}_1(S) \wedge \mathbf{e}_2(S) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(S) \wedge \ddot{\mathbf{x}}(S)}{\|\ddot{\mathbf{x}}(S)\|} \end{cases}$$

La notación clásica para el *triedro de Frenet* es:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(S) = \mathbf{e}_1 & : \text{ Vector } \textit{tangente unitario}. \\ \mathbf{p}(S) = \mathbf{e}_2 & : \text{ Vector } \textit{normal principal}. \\ \mathbf{b}(S) = \mathbf{e}_3 & : \text{ Vector } \textit{binormal}.\end{aligned}$$



Se puede ver de forma muy sencilla que, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y un cierto S fijo, $\mathbf{x}(S)$, $\mathbf{t}(S)$, $\mathbf{p}(S)$, $\mathbf{b}(S)$ quedan totalmente fijados. Entonces, para ese punto de coordenadas $\mathbf{z}(S) = (x(S), y(S), z(S))$, los vectores del triedro de Frenet forman tres planos, llamados *normal*, *rectificante* y *osculador*, que quedan determinados respectivamente por:

$$\begin{aligned}(\mathbf{z} - \mathbf{x}(S)) \cdot \mathbf{t} &= 0 \\ (\mathbf{z} - \mathbf{x}(S)) \cdot \mathbf{p} &= 0 \\ (\mathbf{z} - \mathbf{x}(S)) \cdot \mathbf{b} &= 0\end{aligned}$$

En el caso de una curva en \mathbb{R}^3 , recordamos que tenemos dos curvaturas:

$$K_1(S) \equiv \underbrace{K(S)}_{(>0)} : \text{ curvatura}$$

$$K_2(S) \equiv \tau(S) : \text{ torsión}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}}(S) \\ \dot{\mathbf{p}}(S) \\ \dot{\mathbf{b}}(S) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K(S) & 0 \\ -K(S) & 0 & \tau(S) \\ 0 & -\tau(S) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(S) \\ \mathbf{p}(S) \\ \mathbf{b}(S) \end{pmatrix}$$

La forma explícita de la curvatura y la torsión es:

$$(i) \quad K(S) = K_1(S) = \dot{\mathbf{e}}_1(S) \cdot \mathbf{e}_2(S) = (\ddot{\mathbf{x}}(S) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(S)) / \|\ddot{\mathbf{x}}(S)\| = \|\ddot{\mathbf{x}}(S)\| > 0.$$

$$K(S) = \|\ddot{\mathbf{x}}(S)\|$$

$$(ii) \quad \tau(S) = K(S) = \dot{\mathbf{e}}_2(S) \cdot \mathbf{e}_3(S)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\ddot{\mathbf{x}}}{\|\ddot{\mathbf{x}}\|} \Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_2 = \ddot{\mathbf{x}}'(S) \cdot \frac{1}{\|\ddot{\mathbf{x}}(S)\|} + \ddot{\mathbf{x}}(S) \cdot \frac{d}{dS} \left(\frac{1}{\|\ddot{\mathbf{x}}\|} \right)$$

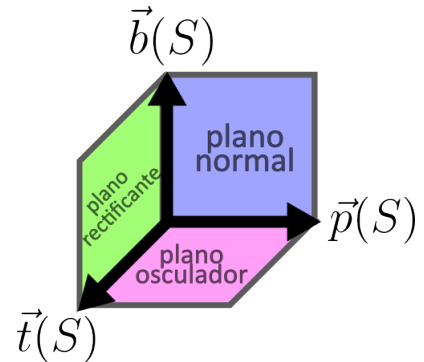
pero $\ddot{\mathbf{x}}(S) = \mathbf{e}_2 \cdot \|\ddot{\mathbf{x}}(S)\|$

es decir, el término de la derivada del módulo no contribuye, quedando únicamente la tercera derivada.

$$\tau(S) = \dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \dot{\mathbf{e}}_2 \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \frac{\ddot{\mathbf{x}}'(S)}{\|\ddot{\mathbf{x}}(S)\|} \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$$

$$\tau(S) = \frac{\det\{\ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}', \ddot{\mathbf{x}}''\}}{\|\ddot{\mathbf{x}}\|^2}$$

luego tenemos que $\|\ddot{\mathbf{x}}\| \neq 0$



Se define el vector de curvatura como:

$$\mathbf{K}(S) = K(S) \cdot \mathbf{p}(S),$$

el centro de curvatura (para cada punto de la curva) como:

$$\mathbf{x}_{cc}(S) = \mathbf{x}(S) + \frac{1}{K(S)} \mathbf{p}(S)$$

y el radio de curvatura como:

$$\rho(S) = \frac{1}{K(S)}$$

Hasta este punto, todo este desarrollo se aplica para la parametrización natural, especialmente simple por la condición de $\|\dot{\mathbf{x}}(S)\| = 1$. En casos de la parametrización *arbitraria*, se arrastran términos de $\|\dot{\mathbf{x}}(S)\| = 1$ debido a su no unitariedad.

En este caso, el triedro de Frenet es:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(t) &= \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \equiv \mathbf{t}(t) \\ \mathbf{e}_3(t) &= \frac{\mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{x}''(t)}{\|\mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{x}''(t)\|} \equiv \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{e}_2(t) &= \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t) \equiv \mathbf{p}(t) \end{aligned}$$

Para calcular la curvatura y la torsión, recordamos que:

$$K(S) = \|\ddot{\mathbf{x}}(S)\| :$$

Como se trata de un cambio de variable: $d/dS = 1/\|\mathbf{x}'\| d/dt$

$$\xrightarrow{1} \dot{\mathbf{x}}(S) = \frac{d\mathbf{x}}{dS} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|}$$

$$\xrightarrow{2} \ddot{\mathbf{x}}(S) = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dS} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|} \right) \right) = \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}'\|^2} + \mathbf{x}' \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}'\|} \right)$$

Utilizando los cálculos anteriores,

$$K(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det\{\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}\}}{\|\mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{x}''(t)\|^2}$$

1.5.1. Curvas planas en \mathbb{R}^3

Una curva plana es aquella que está *contenida en un plano* de \mathbb{R}^3 . Eso significa que uno de los vectores del triedro de Frenet no se está moviendo, en este caso $\mathbf{b}(S)$; es decir, es *constante*.

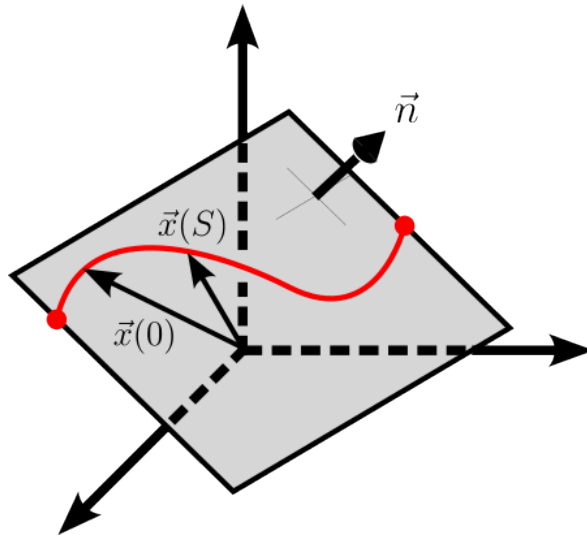
El trabajar con una curva plana hace que se cumpla que $(\mathbf{x}(S) - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{n} = 0$, donde \mathbf{n} es un vector normal al plano que contiene la curva. Si derivamos esta expresión, obtenemos $\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = 0$, y $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = 0$, de donde podemos deducir que $\ddot{\mathbf{x}} \sim \mathbf{b} \implies \mathbf{m} \parallel \mathbf{b}(S)$. En consecuencia, $\mathbf{b} \equiv \text{const.}$, con $\|\mathbf{b}(S)\| = 1$.

Por lo tanto, una curva (en \mathbb{R}^3) con curvatura distinta de 0 es plana si y solo si $\tau(S)$ es nula ($\dot{\mathbf{b}}(S) = -\tau(S)\mathbf{p}(S) \equiv 0 \iff \tau(S) = 0$).

Condiciones equivalentes

Una curva es **plana** si y solo si:

$$\mathbf{b}(S) \equiv \text{constante} \iff (\mathbf{x}(S) - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{n} = 0 \iff \tau(S) = 0$$



Capítulo 2

Superficies. Primera forma fundamental y cálculo tensorial

2.1. Concepto de superficie

Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una *superficie regular* de \mathbb{R}^3 si para cada punto $P \in S$ existe un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 , $U \subseteq \mathbb{R}^2$, un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ y una aplicación:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V \cap S \\ (u, v) &\longmapsto \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

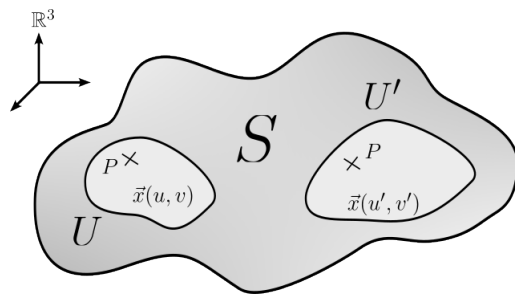
tal que:

- (i) $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ es de clase $C^\infty(U)$, (es decir, $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ son funciones de clase C^∞ en su dominio).
- (ii) $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ es un *homomorfismo*, es decir, es *biyectiva* (uno a uno), y su aplicación inversa es continua (esta condición evita que la superficie tenga auto intersecciones).
- (iii) $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ es *regular*, es decir, su imagen es bidimensional, si la matriz jacobiana de derivadas es de rango 2 en U .

$$J(u, v) = D\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rg}(J) = 2, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Esta condición evita que tengamos casos degenerados, como puntos o rectas (por ejemplo: $\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u + v, u + v)$, que es en realidad una recta $\mathbf{x}(t) = (t, t, t)$).

Notación: Al par $(U, \mathbf{x}(u, v))$ se le denomina *carta* (o entorno) local de la superficie S (típicamente en torno a un punto $P \in S$). La carta proporciona un sistema de coordenadas a través de una parametrización local de la superficie.



La suma de todas las cartas que permiten cubrir completamente una superficie se conoce como *atlas*.

Una superficie como \mathbb{R}^2 puede cubrirse mediante un atlas con una única carta (se conoce como superficie trivial). Si esta no es trivial, puede que hagan falta más de una carta para cubrir la superficie entera,

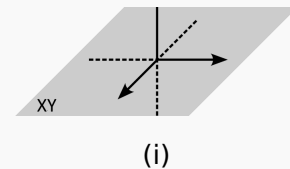
como en el caso de la esfera o del cono, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo A:

(i) El plano XY puede cubrirse con una única carta:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0), \text{ con } u, v \in \mathbb{R}$$

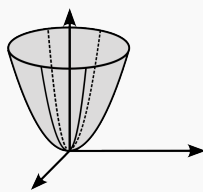
$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg}(J) = 2; \forall u, v$$



Lo mismo ocurre con las gráficas de las funciones de dos variables (representación en la carta de Monge):

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) \Rightarrow \mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \text{ que tiene } \text{rg}(J) = 2$$

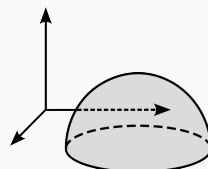


(ii) El paraboloides de revolución $z = x^2 + y^2$ se puede cubrir también con una carta:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \text{ con } u, v \in \mathbb{R}$$

(iii) El paraboloides hiperbólico $z = x^2 - y^2$ se puede cubrir con la carta

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$



(iv) La semiesfera (*hemisferio*) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (tomado de la esfera— que **no** es una función—: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Esta superficie **no** es regular a no ser que eliminemos de su dominio el ecuador (ya que para que sea regular, sus derivadas tienen que estar bien definidas, algo que no pasa cuando $z = 0$). En este caso, la carta es:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right), U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

(v) El cilindro $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ (en coordenadas cilíndricas):

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v), u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$$

Para cubrir el cilindro, es decir, el atlas del cilindro, hacen falta *dos* cartas (la razón es que el cilindro no se parece a \mathbb{R}^2 al tener una recta en la que está multievaluada. Esto implica que hagan falta operaciones para convertirlo en algo semejante a \mathbb{R}^2). *No obstante, si se elimina una recta del cilindro sí que puede cubrirse con una carta.*

(vi) La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ implica que se necesitan seis cartas para cubrir el atlas, pero si usamos coordenadas esféricas necesitamos dos.

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{1 - y^2 - z^2} \\ y = \pm \sqrt{1 - x^2 - z^2} \\ z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \\ U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < v < 2\pi, 0 < u < \pi\} \end{cases}$$

(vii) Cono: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Esta superficie tiene un problema de derivabilidad en el origen de coordenadas (pico), por lo que **no** es regular en ese punto. Para construir una carta de la superficie podemos trabajar en coordenadas cilíndricas. En este caso necesita dos cartas *:

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad 0 < u < \infty, 0 < v < 2\pi$$

(viii) Helicoide (escalera de caracol): $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, con $0 < u < \infty$ y $v \in \mathbb{R}$.

*Como con el cilindro, puede cubrirse con una carta si se elimina una recta.

2.2. Curvas en una superficie

Sea una superficie regular S y una carta local $(U, \mathbf{x}(u, v))$ de dicha superficie; y sea la aplicación σ ,

$$\begin{aligned} \sigma : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \sigma(t) = (u(t), v(t)), \end{aligned}$$

suficientemente suave, es decir, de clase C^r con $r \geq 1$ en el intervalo I . La aplicación $\sigma(t)$ representa una curva dentro de la superficie S , en concreto dentro de U .

$$\mathbf{x}(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$$

2.2.1. Curvas coordenadas y coordenadas curvilíneas

Dado un punto $P(u_0, v_0)$ hay dos curvas importantes que pasan por él, que son las curvas *paralelas a los ejes u, v* , y se conocen como *curvas coordenadas*.

Las curvas coordenadas generan una malla que recubre completamente la superficie. Por otro lado, estas coordenadas u, v son lo que se conoce como *coordenadas curvilíneas* sobre la superficie S , asociadas a una cierta carta local $(U, \mathbf{x}(u, v))$.

2.2.2. Vectores tangentes a la superficie S y espacio o plano tangente

En cada punto de S hay dos valores únicos de u y v , en el cual podemos definir dos vectores tangentes a la superficie, mediante las derivadas parciales direccionales, a lo largo de la dirección \mathbf{x}_u (y lo mismo para la dirección v).

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial}{\partial u} x(u, v), \frac{\partial}{\partial u} y(u, v), \frac{\partial}{\partial u} z(u, v) \right)$$

El rango del jacobiano J es $rg(J) = 2$ al estar en el espacio bidimensional.

$$rg(J) = rg \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \right] \rightarrow \text{Los vectores } \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \text{ son linealmente independientes. Esto significa que definen un plano tangente a la superficie } S \text{ en } P(u, v).$$

Además, su producto vectorial genera un vector perpendicular al plano tangente de la superficie (o a la superficie mismamente) en $P(u, v)$.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$$

El conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , en cualquier punto de la superficie S . La base en principio *no* es *ortogonal* (en general $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \neq 0$).

Los vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ son vectores **tangentes** a la superficie y definen un **espacio bidimensional** que es el plano tangente a la superficie en un punto P .

$$\begin{aligned} T_p(S) &= \text{lin}\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}, \\ \text{si } \mathbf{w} \in T_p(S): \mathbf{w} &= a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v, \\ \{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}\} &\text{ es base de } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Si tenemos una curva contenida en S , $\mathbf{x}(u(t), v(t))$, y pasa por un punto $P \in S$, entonces su vector tangente o velocidad puede escribirse como combinación lineal de la base.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{du(t)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{dv(t)}{dt} \\ &= u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v \end{aligned}$$

Esto significa que el vector velocidad está contenido en $T_p(S)$.

Notación: Para volver más compacta la notación, hacemos el cambio:

$$\begin{cases} u \equiv u^1 \\ v \equiv u^2 \end{cases}$$

y la superficie queda parametrizada entonces es $\mathbf{x}(u^1, u^2)$. Los vectores de la base $T_p(S)$ los redefinimos de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{u^1} &= \frac{\partial \mathbf{x}(u^1, u^2)}{\partial u^1} \equiv \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{u^2} &= \frac{\partial \mathbf{x}(u^1, u^2)}{\partial u^2} \equiv \mathbf{x}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\mathbf{x}_\alpha(u^1, u^2) \text{ representará las} \\ &\text{derivadas direccionales, con} \\ &\alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

En el caso de las derivadas superiores, usamos un doble índice $\alpha\beta$.

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}, \text{ con } \alpha, \beta = 1, 2$$

2.3. Primera forma fundamental

Sea S una superficie parametrizada mediante una carta local $(U, \mathbf{x}(u^1, u^2))$ y C una curva sobre ella. Nos planteamos cuál es la longitud del arco de la curva C sobre la superficie,

$$\ell = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt$$

donde $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}_1(u^1)' + \mathbf{x}_2(u^2)'$.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|^2 &\equiv \mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t) \\ &= (u^1)'(t)(u^1)'(t)\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + (u^1)'(t)(u^2)'(t)\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 + (u^2)'(t)(u^1)'(t)\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \\ &\quad + (u^2)'(t)(u^2)'(t)\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Tenemos cuatro productos escalares. Para representarlos de forma más compacta, introducimos el siguiente símbolo:

Notación: $\boxed{\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta = g_{\alpha\beta}}$, con $\alpha, \beta = 1, 2$

- $g_{\alpha\beta}$ están definidos sobre la superficie S , es decir, *dependen de la superficie*.

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(u^1, u^2) = \mathbf{x}_\alpha(u^1, u^2) \cdot \mathbf{x}_\beta(u^1, u^2)$$

Estas cantidades *caracterizan a la superficie*.

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 g_{\alpha\beta}(u^1, u^2) (u^\alpha)'(t) (u^\beta)'(t)$$

Para aliviar la notación sobre el doble sumatorio, introducimos la *convención de Einstein*:

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2 = g_{\alpha\beta}(u^1(t), u^2(t)) \cdot (u^\alpha)'(t) (u^\beta)'(t)$$

La suma en todos los valores de α y β está implícita en los índices repetidos. Tomando la raíz cuadrada, la longitud de arco es finalmente:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta}(u^1(t), u^2(t)) \cdot (u^\alpha)'(t) (u^\beta)'(t)} dt$$

o de forma más compacta, usando que $(u^\alpha)' = du^\alpha(t)/dt$:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}$$

El radicando tiene unidades de longitud al cuadrado, luego ℓ es una longitud, como debe ser.

De hecho, este radicando representa una *longitud infinitesimal o elemento de línea al cuadrado*, dS^2

$$dS^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

En conclusión, al calcular ℓ hemos encontrado cantidades que dependen de la curva, como las coordenadas curvilíneas u^α , y cantidades que dependen de la *superficie*, que son los coeficientes $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$. Estas cantidades, que son fáciles de encontrar, se conocen como la *primera forma fundamental* de la superficie S , en las coordenadas locales (u^1, u^2) ; y pueden escribirse en forma matricial.

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, g_{12} = g_{21} \quad \left(\begin{array}{l} \text{proviene de productos} \\ \text{escalares que conmutan} \end{array} \right)$$

La primera forma fundamental también se conoce por el nombre de *tensor métrico*.

Ejemplo B:

(i) Plano XY en coordenadas cartesianas. Se puede cubrir con una única carta (que es el atlas de la superficie).

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0); u^1, u^2 \in \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow \mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = (1, 0, 0), \mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = (0, 1, 0) \quad (\mathbf{n} = (0, 0, 1))$$

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{2 \times 2}$$

(ii) Plano XY en coordenadas polares.

$$\mathbf{x}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = (\bar{u}^1 \cos \bar{u}^2, \bar{u}^1 \sin \bar{u}^2, 0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}^1 > 0 \\ \bar{u}^2 \in [0, 2\pi) \end{array} \right.$$

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = (\cos \bar{u}^2, \sin \bar{u}^2, 0), \bar{\mathbf{u}}_2 = (-\bar{u}^1 \sin \bar{u}^2, \bar{u}^1 \cos \bar{u}^2, 0)$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\bar{u}^1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(r, \theta)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

(iii) Cilindro en carta local: $\mathbf{x}(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_1 = (-\sin u^1, \cos u^1, 0) \\ \mathbf{x}_2 = (0, 0, 1) \end{array} \right\} g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{2 \times 2}$$

Ahora bien, ¿por qué llamamos $g_{\alpha\beta}$ una *forma*?

En el plano tangente $T_p(S)$, los vectores \mathbf{x}_α , con $\alpha = 1, 2$, son una base. Esto significa que cualquier vector $T_p(S)$ es combinación lineal de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$.

$$\mathbf{v} \in T_p(S) \implies \mathbf{v} = v^1 \mathbf{x}_1 + v^2 \mathbf{x}_2$$

A las componentes de \mathbf{v} en la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ se las llaman componentes *contravariantes*, como veremos más adelante.

Suponemos ahora que tenemos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v^1 \mathbf{x}_1 + v^2 \mathbf{x}_2 = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha \\ \mathbf{w} &= w^1 \mathbf{x}_1 + w^2 \mathbf{x}_2 = w^\beta \mathbf{x}_\beta\end{aligned}$$

según el convenio de Einstein. Entonces, el producto escalar de ambos es:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (v^\alpha \mathbf{x}_\alpha) \cdot (w^\beta \mathbf{x}_\beta) = v^\alpha w^\beta \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta = v^\alpha w^\beta g_{\alpha\beta} \\ &= (v^1 \ v^2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = g(\mathbf{v}, \mathbf{w})\end{aligned}$$

Esto significa que esta cantidad que hemos llamado primera forma fundamental define el producto escalar mediante una *forma cuadrática* de vectores en el plano tangente.

Como en $T_p(S)$ tenemos un producto escalar, podemos hablar de norma y de ángulo entre sus vectores.

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S) \implies \mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha, \ \mathbf{w} = w^\beta \mathbf{x}_\beta$$

- $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^\alpha v^\beta g_{\alpha\beta}$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^\alpha w^\beta g_{\alpha\beta} \implies \cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}$

2.3.1. Coordenadas ortogonales

Tomaremos \mathbf{v}, \mathbf{w} como los vectores de la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$.

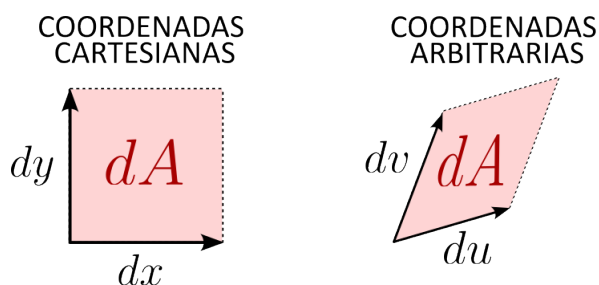
$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 = 1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 \implies v^1 = 1, \ v^2 = 0$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}_2 = 0 \cdot \mathbf{x}_1 + 1 \cdot \mathbf{x}_2 \implies w^1 = 0, \ w^2 = 1$$

$$\implies \cos \theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}$$

- Si $g_{12} = 0$, la parametrización local de la superficie S se dice *ortogonal*, y las coordenadas se conocen como *coordenadas ortogonales*.
- Si $g_{12} = 0$ y $g_{11} = g_{22} = 1$, entonces la parametrización de S es *ortonormal*.

2.3.2. Elemento de área de una superficie



En el caso de las coordenadas cartesianas, el elemento diferencial de área se calculará como $dA = dx dy$. Cuando usemos coordenadas arbitrarias, veremos que necesitaremos un 'determinante' que transforme el elemento de área cartesiano.

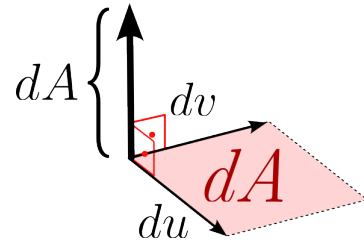
Sea una superficie con una carta local,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V \cap S \\ (u^1, u^2) &\longmapsto \mathbf{x}(u^1, u^2); \end{aligned}$$

y $\Omega \subset U$ es un dominio cerrado de U . Bajo estas condiciones, el área de $\mathbf{x}(\Omega) = \Sigma$ es:

$$A(\Sigma) = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\| du^1 du^2$$

En este caso, lo que actúa para modificar el elemento diferencial de área es el módulo del producto vectorial de los dos vectores de nuestra base de $T_p(S)$. Sustituyendo sus expresiones en el integrando, llegamos a que:



$$A(\Sigma) = \iint_{\Omega} \|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\| du^1 du^2$$

Ahora queda calcular el módulo de ese vector,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|^2 &= (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2) \\ &= \|\mathbf{x}_1\|^2 \|\mathbf{x}_2\|^2 \sin^2 \theta = \|\mathbf{x}_1\|^2 \|\mathbf{x}_2\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= g_{11} \cdot g_{22} (1 - \cos^2 \theta) = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \equiv g \quad (= \det\{g_{\alpha\beta}\}) \end{aligned}$$

Y finalmente:

$$A(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2$$

2.4. Vectores contravariantes y covariantes

Ahora nos planteamos qué tipo de reparametrizaciones podemos usar.

Es importante recordar que las longitudes *no cambian* bajo reparametrizaciones. El tensor métrico que hemos calculado servirá como regla de medida, e independientemente del convenio que usemos, estas longitudes siempre serán las mismas.

$$t \xrightarrow{\text{difeomorf.}} \bar{t}(t)$$

2.4.1. Reparametrizaciones

Sea $\bar{\Phi}$ un difeomorfismo de \bar{U} en U :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} : \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (\bar{u}^1, \bar{u}^2) &\longmapsto (\bar{u}^1(u^1, u^2), \bar{u}^2(u^1, u^2)) \end{aligned}$$

$\tilde{\Phi}$ es un *homeomorfismo* diferenciable, con función inversa diferenciable. Es decir, en la región de intersección entre dos cartas de una superficie, la función de transición tiene que ser un difeomorfismo. Se cumple por tanto que:

- I) $\tilde{\Phi} : \bar{U} \longrightarrow U$ es *biyectiva*.
- II) $\tilde{\Phi} : \bar{U} \longrightarrow U$ es diferenciable ($\tilde{\Phi} \in C^\infty$).
- III) $\tilde{\Phi}^{-1} : U \longrightarrow \bar{U}$ es diferenciable (de clase C^∞).

En notación más compacta, escribiremos el difeomorfismo como:

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^\beta) , \text{ con } \alpha, \beta = 1, 2$$

El jacobiano de la *transformación directa* es el determinante:

$$D = \det \left\{ \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \right) \right\}$$

y el de la *transformación inversa* es:

$$\bar{D} = \det \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \right) \right\} ;$$

ambos con $\alpha, \beta = 1, 2$. Además, por el *Teorema de la función inversa*, se cumple que:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \cdot \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \xleftrightarrow{\text{matric.}} D \cdot \bar{D} = \mathbb{I}$$

Ejemplo C: $u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = e^{\bar{u}^1 + \bar{u}^2}$, $u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = e^{\bar{u}^1 - \bar{u}^2}$

\hookrightarrow La transformación inversa es: $\begin{cases} \bar{u}^1 = 1/2 \log(u^1 \cdot u^2) \\ \bar{u}^2 = 1/2 \log(u^1/u^2) \end{cases} (\bar{u}^\alpha(u^\beta))$

$$\rightarrow D^\alpha_\beta = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \right) = \begin{pmatrix} e^{\bar{u}^1 + \bar{u}^2} & e^{\bar{u}^1 + \bar{u}^2} \\ e^{\bar{u}^1 - \bar{u}^2} & -e^{\bar{u}^1 - \bar{u}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 & u^1 \\ u^2 & -u^2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = -2u^1u^2$$

$$\rightarrow \bar{D}^\alpha_\beta = \left(\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \right) = \dots = \begin{pmatrix} 1/(2u^1) & 1/(2u^2) \\ 1/(2u^1) & -1/(2u^2) \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{D} = -\frac{1}{2u^1u^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\gamma} \right) = \delta^\alpha_\gamma \quad (D^\alpha_\beta \bar{D}^\beta_\gamma = \delta^\alpha_\gamma)$$

Veamos cómo se relacionan las bases en el plano tangente $T_p(S)$ tras una reparametrización.

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \mathbf{x}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2))$$

En notación compacta, diremos que $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^\beta) = \mathbf{x}(u^\alpha(\bar{u}^\beta))$. Cada carta $(U, \mathbf{x}(u^\alpha))$ y $(\bar{U}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^\beta))$ tiene un plano tangente, o más bien, una base de vectores del plano tangente $T_p(S)$.

$$\left\{ \mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\} , \left\{ \bar{\mathbf{x}}_1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{u}^1}, \bar{\mathbf{x}}_2 = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{u}^2} \right\}$$

Busquemos la relación entre \mathbf{x}_α y $\bar{\mathbf{x}}_\beta$. Por la regla de la cadena,

$$\bar{\mathbf{x}}_\beta = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{u}^\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \mathbf{x}_\alpha$$

Es decir:

$$\bar{\mathbf{x}}_\beta = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \mathbf{x}_\alpha$$

Esta es la relación entre las bases $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ y $\{\bar{\mathbf{x}}_\beta\}$ tras el cambio de coordenadas. $\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}\right)$ es la *matriz de cambio de base*. Su transformación inversa es:

$$\mathbf{x}_\alpha = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} \bar{\mathbf{x}}_\beta$$

ORIENTABILIDAD

Para que las cartas $(U, \mathbf{x}(u^\alpha))$ y $(\bar{U}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^\beta))$ describan la misma superficie y den lugar al mismo plano tangente (con el vector perpendicular en la misma orientación), se tiene que cumplir que

$$D = \det \left\{ \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \right\} > 0$$

Si no lo cumple, hacemos el cambio $\bar{u}^1 \leftrightarrow \bar{u}^2$.

Resumiendo, bajo difeomorfismos, tenemos las siguientes *reglas de cambio de base*.

CAMBIO DE BASE

Bajo difeomorfismos (por la regla de la cadena), tenemos que, en las bases $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ y $\{\bar{\mathbf{x}}_\beta\}$.

$$\mathbf{x}_\alpha = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} \bar{\mathbf{x}}_\beta \quad \bar{\mathbf{x}}_\beta = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \mathbf{x}_\alpha$$

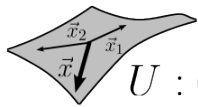
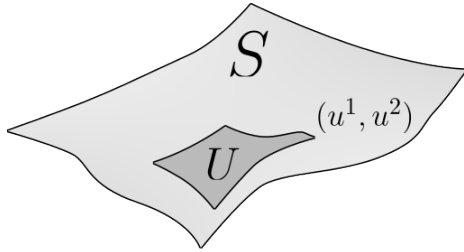
2.4.2. Leyes de transformación

Sea $\mathbf{v} \in T_p(S)$. Entonces, $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha$ (con el convenio de Einstein), o bien, si decidimos transformarlo a otras coordenadas, $\mathbf{v} = \bar{v}^\beta \bar{\mathbf{x}}_\beta$. v^α y \bar{v}^β son las componentes del vector entre las bases $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ y $\{\bar{\mathbf{x}}_\beta\}$. Usando la información del cambio de base visto anteriormente, decimos que:

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha = v^\alpha \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} \bar{\mathbf{x}}_\beta = \bar{v}^\beta \bar{\mathbf{x}}_\beta$$

$$\bar{v}^\beta = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} v^\alpha$$

Esta es la *ley de transformación de las componentes contravariantes* de un vector (veremos más adelante por qué las llamaremos contravariantes). De hecho, las relaciones de cambio de base serán las leyes de transformación de los vectores covariantes de la base en $T_p(S)$.



$$U : (u^1, u^2) \longrightarrow (\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

$$g_{\alpha\beta}(u^1, u^2) \longrightarrow \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

Veamos ahora cuál es la regla de transformación de la primera forma fundamental bajo reparametrizaciones (con difeomorfismos).

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta &\longrightarrow \bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{x}}_\beta \\ &= \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} \mathbf{x}_\mu \right) \cdot \left(\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} \mathbf{x}_\nu \right) \\ &= \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} \mathbf{x}_\mu \cdot \mathbf{x}_\nu \\ &= \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} g_{\mu\nu}}$$

- *Comentario:* Los índices α, β, μ, ν que aparecen *abajo* son índices *covariantes*.

Bajo difeomorfismos, el determinante de la primera forma fundamental se transforma según la siguiente ley:

$$\begin{aligned} g &= \det\{g_{\alpha\beta}\} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \\ \Rightarrow \bar{g} &= \bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21} \\ &= \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^1} \right) g_{\mu\nu} \cdot \left(\frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^2} \right) g_{\rho\sigma} - \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^2} \right) g_{\mu\nu} \cdot \left(\frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^1} \right) g_{\rho\sigma} \\ &= g \cdot D^2, \quad \text{con } D \text{ el determinante jacobiano} \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{g} = gD^2}$$

Y, por lo tanto, la ley de transformación de g asegura que el área de una superficie sea invariante bajo reparametrizaciones por un difeomorfismo.

$$A(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2$$

$$\bar{A}(\Sigma) = \iint_{\bar{\Omega}} \sqrt{\bar{g}} d\bar{u}^1 d\bar{u}^2 = \iint_{\Omega} \sqrt{D^2 g} |\bar{D}| du^1 du^2 = \iint_{\Omega} \sqrt{g} du^1 du^2 = A(\Sigma) \odot$$

2.4.3. Base dual. Componentes covariantes de un vector

Dado el plano tangente a la superficie $T_p(S)$, una base de dicho plano es $\{\mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}\} \equiv B$. Una base del espacio vectorial *dual* a $T_p(S)$, $T_p^*(S)$, será:

$$\{\mathbf{x}^{1*}, \mathbf{x}^{2*}\} = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2\}.$$

En esta base, los vectores tienen *superíndices* en vez de subíndices. y cumplen que:

$$\mathbf{x}^\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta = \delta^\alpha_\beta$$

Ejemplo D: En \mathbb{R}^2 , $\{\mathbf{x}_1 = (2, 0), \mathbf{x}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$. La base dual debe cumplir que:

- \mathbf{x}^2 debe ser ortogonal a \mathbf{x}_1 y paralelo a \mathbf{x}_2 .
 $\Rightarrow \mathbf{x}^2$ es de la forma $\mathbf{x}^2 = (0, a)$ ($\mathbf{x}^2 \cdot \mathbf{x}_1 = 0$)
 $\Rightarrow a = \sqrt{2}$ (por la condición $\mathbf{x}^2 \cdot \mathbf{x}_2 = 1$)

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}^2 = (0, \sqrt{2})$$

- \mathbf{x}^1 debe ser ortogonal a \mathbf{x}_2 y paralelo a \mathbf{x}_1 .
 $\Rightarrow \mathbf{x}^1 = (b, -b)$ ($\mathbf{x}^1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$)
 $\Rightarrow b = 1/2$ ($\mathbf{x}^1 \cdot \mathbf{x}_1 = 1$)

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}^1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$B^* = \left\{ \mathbf{x}^1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \mathbf{x}^2 = (0, \sqrt{2}) \right\}$$

que es una base de $(\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2$ (espacios auto-duales).

La idea de introducir la base dual es para poder calcular las componentes *contravariantes* de un vector mediante productos escalares. Supongamos que tenemos $\mathbf{v} \in T_p(S)$, $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ una base de ese espacio y $\{\mathbf{x}^\beta\}$ del espacio dual.

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}^\beta = (v^\alpha \mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{x}^\beta = v^\alpha (\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}^\beta) = v^\alpha \delta_\alpha^\beta = v^\beta$$

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}^\beta = v^\beta}$$

Veamos ahora la relación entre las bases B y B^* . Definiremos para eso la inversa de la primera forma fundamental como:

$$g_{\alpha\beta}^{-1} = g^{\alpha\beta} \quad \text{como matrices, } g_{\alpha\beta} \cdot g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$$

Los vectores de esta base dual B^* , $\{\mathbf{x}^\alpha\}$ cumplen entonces que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\alpha &= g^{\alpha\beta} \mathbf{x}_\beta \longrightarrow \mathbf{x}^\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta = g^{\alpha\beta} \mathbf{x}_\rho \cdot \mathbf{x}_\beta \\ &= g^{\alpha\rho} g_{\rho\beta} = \delta^\alpha_\beta \end{aligned}$$

Las componentes de un vector en la base dual B^* se denominan, por tanto, *componentes covariantes* del vector, y se tiene que

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha = v_\beta \mathbf{x}^\beta = v_\beta g^{\alpha\beta} \mathbf{x}_\alpha$$

$$\boxed{v^\alpha = v_\beta g^{\beta\alpha} = g^{\alpha\beta} v_\beta}$$

Es decir, $g^{\alpha\beta}$ permite subir índices. De forma análoga, $g_{\alpha\beta}$ permite bajar índices,

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta$$

COMPONENTES COVARIANTES Y CONTRAVARIANTES

Las componentes **contravariantes** de \mathbf{v} son v^α . Las componentes **covariantes** de \mathbf{v} son v_α . Por convenio, usamos la notación *covariante* para denotar *subíndices*; y *contravariante* para denotar *superíndices*. La relación entre componentes covariantes y contravariantes es:

$$v^\alpha = g^{\alpha\beta} v_\beta \quad v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta$$

con $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1}$ la inversa de la primera forma fundamental.

Los nombres se deben a la manera en la que se transforman bajo cambios de coordenadas o difeomorfismos.

Sea $u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^\beta)$ el cambio de coordenadas. Por la regla de la cadena:

$$\bar{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} \mathbf{x}_\beta$$

⇒ Los vectores covariantes se transforman con la matriz $\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}$

Las componentes contravariantes $\bar{v}^\alpha = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} v^\beta$ se transforman con la matriz inversa.

$\underbrace{\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}}_{\text{Matriz directa}}$	$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}}_{\text{Matriz inversa}}$
Prefijo 'co'	Prefijo 'contra'

Las componentes covariantes se transforman con la primera forma fundamental transformada, $\bar{g}_{\alpha\beta}$, como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{v}_\alpha = \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{v}^\beta &= \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\beta} g_{\rho\sigma} \bar{v}^\beta = \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\beta} g_{\rho\sigma} \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\gamma} v^\gamma \\ &= \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha} \delta^\sigma_\gamma g_{\rho\sigma} v^\gamma = \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha} v_\rho = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} v_\beta \end{aligned}$$

$$\bar{v}_\alpha = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} v_\beta$$

LEYES DE TRANSFORMACIÓN DE COMPONENTES

Matriz directa	Matriz inversa
$\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}$	$\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}$
$\bar{v}_\alpha = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} v_\beta$	$\bar{v}^\alpha = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} v^\beta$

En $T_p(S)$ tenemos un producto escalar. Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(S)$, entonces:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= v^\alpha \mathbf{x}_\alpha \\ \mathbf{w} &= w^\beta \mathbf{x}_\beta \end{aligned} \right\} \longrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^\alpha w^\beta \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta = v^\alpha w^\beta g_{\alpha\beta} \\ = v_\beta w^\beta = v^\alpha w_\alpha$$

La contracción de los índices covariantes y contravariantes de las componentes de un vector da lugar a una cantidad *escalar* (que más adelante veremos que es invariante).

2.4.4. Tensores

El cambio de índices o componentes covariantes a contravariantes y viceversa se lleva a cabo mediante la inversa de la primera forma fundamental, o mediante la propia primera forma fundamental.

→ BAJAR ÍNDICES: Contravariante → covariante

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta$$

→ SUBIR ÍNDICES: Covariante → contravariante

$$v^\alpha = g^{\alpha\beta} v_\beta$$

La primera forma fundamental $g_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta$ con dos índices no repetidos (o libres) es un ejemplo de *tensor* de segundo orden.

- El número de índices del tensor indica su *orden tensorial*.
- Si los índices están *abajo*, como $g_{\alpha\beta}$, el tensor se dice *dos veces covariante*.
 ↪ Covariante dos veces: $\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} g_{\mu\nu}$
- Si los índices están *arriba*, como $g^{\alpha\beta}$, el tensor se dice *dos veces contravariante*.
 ↪ Contravariante dos veces: $\bar{g}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\mu} \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\nu} g^{\mu\nu}$
- Cuando un tensor tiene tanto índices covariantes como índices contravariantes, se conoce como tensor *mixto* (que puede ser k veces covariante y j veces contravariante).

↪ Para la primera forma fundamental:

$$\bar{g}^\alpha_\beta = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\mu} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} g^\mu_\nu \longrightarrow g^\mu_\nu = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$$

- Los tensores con más de dos índices son tensores de orden superior.

2.5. Geometría riemanniana

La geometría riemanniana extiende la noción de superficie a lo que se conoce como *variedades* de dimensión n (las superficies son variedades bidimensionales). Localmente, en una variedad diferenciable de dimensión n , podemos introducir un sistema de coordenadas (u^1, u^2, \dots, u^n) y un conjunto de n^2 funciones $g_{\alpha\beta}(u^1, u^2, \dots, u^n)$, donde $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$, y ordenadas matricialmente; que cumplen lo siguiente:

- I) La matriz es simétrica, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$
- II) La matriz es definida positiva, es decir, todos sus menores son positivos.
- III) Al cambiar de carta por una reparametrización,

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} g_{\mu\nu}$$

(El segundo requerimiento puede no cumplirse en el caso de encontrarnos en geometría pseudo-riemanniana, como en Relatividad General.)

En geometría riemanniana, las funciones $g_{\alpha\beta}$ se conocen como *métrica* o *tensor métrico*.

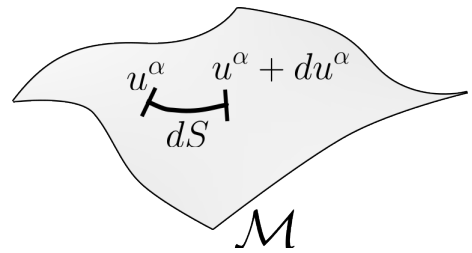
$$dS^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

Para el caso en el que la dimensión $n = 2$, recuperamos las variedades o superficies bidimensionales. De forma general, el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ representa el *elemento de línea* de la variedad, $dS^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$.

Dada la variedad \mathcal{M} de dimensión n , para construir el espacio $T_p(\mathcal{M})$, de dimensión n , necesitamos las derivadas direccionales \mathbf{x}_α , con $\alpha = 1, 2, \dots, n$.

En el caso de las superficies bidimensionales conocemos $\mathbf{x}(u^1, u^2)$, esto es, la carta local de la superficie S . En general, para variedades \mathcal{M} no se conoce $\mathbf{x}(u^1, \dots, u^n)$.



Como no disponemos de \mathbf{x} , lo eliminaremos de la definición de las derivadas direccionales.

$$\mathbf{x}_\alpha = \left. \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right|_{(u^1, u^2, \dots, u^n)}$$

De este modo: $\mathbf{v} \in T_p(\mathcal{M})$, $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha = v^\alpha \partial_\alpha$ con $\alpha = 1, \dots, n$ y $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$.

Con esta definición, v^α son las componentes contravariantes del vector $\mathbf{v} \in T_p(\mathcal{M})$. Para verlo, basta con cambiar de parametrización en \mathcal{M} ,

$$(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \dots, \bar{u}^n) \longrightarrow (u^1, u^2, \dots, u^n).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^\alpha \mathbf{x}_\alpha = v^\alpha \partial_\alpha = v^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \\ &\downarrow \\ \bar{\mathbf{v}} &= \bar{v}^\beta \bar{\mathbf{x}}_\beta = \bar{v}^\beta \bar{\partial}_\beta = \bar{v}^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\beta} \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$:

$$v^\alpha \partial_\alpha = v^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} = v^\alpha \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\beta} = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} v^\alpha \bar{\partial}_\beta$$

$$\bar{v}^\beta = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} v^\alpha$$

que es la ley de transformación de las componentes contravariantes de \mathbf{v} .

Para una variedad \mathcal{M} de dimensión n , la base dual del espacio tangente, $\{\mathbf{x}^\alpha\}$, se construye a través del producto interno (o escalar) definido en $T_p(\mathcal{M})$. Para asegurar que se cumple que $\langle \mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta$ (el producto que define el espacio vectorial dual), basta con tomar los \mathbf{x}^α como:

$\mathbf{x}^\alpha = du^\alpha$

,

que son los diferenciales de línea, conocidos también como 1-formas diferenciables de Cartan. Los elementos de la base dual, $\{du^\alpha\}$, cumplen que:

$$\bar{\mathbf{x}}^\alpha = d\bar{u}^\alpha = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \mathbf{x}^\beta,$$

que es la ley de transformación contravariante.

$\begin{cases} \mathbf{x}_\alpha &= \partial_\alpha \\ \mathbf{x}^\alpha &= du^\alpha \end{cases} \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, n$	El espacio dual a $T_p(\mathcal{M})$, cuya base es $\{\mathbf{x}^\alpha\} = \{du^\alpha\}$, se conoce como el espacio cotangente a \mathcal{M} en el punto P .
---	---

De esta forma, para la variedad \mathcal{M} , el producto escalar en $T_p(\mathcal{M})$ está definido como:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^\alpha \mathbf{x}_\alpha \\ \mathbf{w} &= w^\beta \mathbf{x}_\beta \end{aligned} \quad ; \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p(\mathcal{M}) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_\alpha w^\alpha = v^\beta w_\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta$$

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha = v_\alpha \mathbf{x}^\alpha$$

Donde hemos usado $\mathbf{w} = w^\beta \mathbf{x}_\beta = w_\beta \mathbf{x}^\beta$

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta \text{ (subir y bajar índices)}$$

El espacio de 1-formas en el espacio cotangente y las derivadas direccionales en el espacio tangente permiten construir tensores como aplicaciones, en base a su regla o ley de transformación.

De acuerdo con su ley de transformación, podemos clasificar los tensores de la siguiente manera:

- (i) Escalares: Una aplicación es un escalar si $h = \bar{h}$. Explícitamente:

$$\bar{h}(\bar{u}^\alpha) = h(u^\alpha)$$

Un escalar es una cantidad puramente geométrica e invariante frente al sistema de coordenadas elegido.

- (ii) Vectores o tensores de orden uno:

En componentes contravariantes $\rightarrow \bar{v}^\beta = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} v^\alpha$

En componentes covariantes $\rightarrow \bar{u}_\beta = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} v_\alpha$

- (iii) Tensores de orden dos:

Dos veces contravariante $\rightarrow \bar{a}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\mu} \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\nu} a^{\mu\nu}$

Dos veces covariantes $\rightarrow \bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} a_{\mu\nu}$

Tensor mixto (1 covariante 1 contravariante) $\rightarrow \bar{a}^\alpha_\beta = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\mu} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} a^\mu_\nu$

- (iv) Tensor de orden $r + s$ (r veces covariante, s veces contravariante):

$$\bar{h}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}^{\beta_1, \dots, \beta_s} = \frac{\partial u^{\mu_1}}{\partial \bar{u}^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial u^{\mu_r}}{\partial \bar{u}^{\alpha_r}} \frac{\partial \bar{u}^{\beta_1}}{\partial u^{\nu_1}} \dots \frac{\partial \bar{u}^{\beta_s}}{\partial u^{\nu_s}} h_{\mu_1, \dots, \mu_r}^{\nu_1, \dots, \nu_s}$$

2.6. Fundamentos del cálculo tensorial

- La *suma* de tensores está definida para tensores del mismo tipo (con la misma disposición de índices).

Por ejemplo: $a^\mu_\nu + b^\mu_\nu = c^\mu_\nu$.

- El *producto tensorial* está definido para tensores de cualquier tipo.

Por ejemplo: $a^\mu_\nu b^\rho = c^\mu_{\nu\rho} \rightarrow$ Tensor de orden tres, dos veces contravariante, una vez covariante.

- La *contracción de índices* reduce el orden del tensor.

Dado $a^\mu_\nu : a^\mu_\nu \rightarrow a^\mu_\mu = a^1_1 + a^2_2 + \dots + a^n_n$, que es un escalar.

La contracción de índices en un tensor mixto de orden 2 es la traza de la matriz asociada a dicho tensor.

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} \xrightarrow{\mu=\rho} R^\mu_{\nu\mu\sigma} = R_{\nu\sigma}$$

(la contracción en $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$, que es el tensor de Riemann, da lugar al tensor de Ricci).

- La bajada y subida de índices puede llevarse a cabo mediante el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y su inverso, $g^{\mu\nu}$.

Además, un tensor se dice *simétrico* cuando, al intercambiar los índices, permanece invariante ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$). Por el contrario, un tensor se dice *antisimétrico* cuando, al intercambiar dos índices, cambia de signo: $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$.

2.7. Tensores especiales

La *delta de Kronecker*, definida como $\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & , \alpha = \beta \\ 0 & , \alpha \neq \beta \end{cases}$, es válida para cualquier sistema de coordenadas. Veamos cómo se transforma bajo cambios de coordenadas.

$$\bar{\delta}_\alpha^\beta = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\mu} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\alpha} \delta_\nu^\mu = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\mu} \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} = \delta_\alpha^\beta$$

Se trata de un tensor mixto, que no cambia bajo transformaciones de coordenadas.

No obstante, no todo aquello que tiene índices se comporta como un tensor. Por ejemplo, la cantidad conocida como el *símbolo de Levi-Civita*, definido como:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = \beta = 1 \text{ ó } 2 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1, \beta = 2 \text{ (permutación par)} \\ -1 & \text{si } \alpha = 2, \beta = 1 \text{ (permutación impar)} \end{cases}$$

La definición de $\epsilon_{\alpha\beta}$ no depende del sistema de coordenadas. Veamos si es un tensor (invariante). Como se da que si $\alpha = \beta$, $\epsilon_{\alpha\beta} = 0$; solo hay que comprobar los casos de ϵ_{12} y ϵ_{21} .

→ $\mu = 1, \nu = 2$:

$$\bar{\epsilon}_{12} = \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^2} = \underbrace{\epsilon_{12}}_1 \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} + \underbrace{\epsilon_{21}}_{-1} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} = D$$

donde D es el determinante jacobiano de la transformación.

→ $\mu = 2, \nu = 1$:

$$\bar{\epsilon}_{21} = \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^1} = \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} - \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} = -D$$

Finalmente, lo que vemos es que:

$$\bar{\epsilon}_{\mu\nu} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\mu} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\nu} \epsilon_{\alpha\beta} = D \epsilon_{\mu\nu}$$

En este caso, no vemos que $\epsilon_{\mu\nu} \leftrightarrow \bar{\epsilon}_{\mu\nu} \implies \epsilon_{\alpha\beta}$ **no** es invariante. Es decir, no se trata de un tensor. Si recordamos que $\bar{g} = D^2 g$,

$$|D| = \sqrt{\bar{g}/g}$$

Las cantidades $\sqrt{g} \epsilon_{\alpha\beta}$ sí son invariantes (de acuerdo con las leyes de transformación), y se transforman como un tensor de segundo orden.

TENSOR DE LEVI-CIVITA

El tensor definido como:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{g}\epsilon_{\alpha\beta}$$

se transforma de acuerdo con las leyes de transformación de tensores. Esta cantidad se conoce como **pseudo-tensor de Levi-Civita**. Si la transformación de coordenadas cambia la orientación ($D < 0$), la regla de transformación tiene un signo negativo global.

En dimensión n se define el pseudo-tensor (o símbolo) de Levi-Civita como:

$$\epsilon_{\mu_1, \dots, \mu_n} = 0 \quad \text{si hay dos índices repetidos}$$

$$\epsilon_{\mu_1, \dots, \mu_n} = 1 \quad \text{si } (\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ es una permutación par de } (1, 2, \dots, n)$$

$$\epsilon_{\mu_1, \dots, \mu_n} = -1 \quad \text{si } (\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ es una permutación impar de } (1, 2, \dots, n)$$

$$\boxed{\varepsilon_{\mu_1, \dots, \mu_n} = \sqrt{g}\epsilon_{\mu_1, \dots, \mu_n}}$$

En Relatividad General, ocurre que $g < 0$. Se define $\varepsilon_{\mu_1, \dots, \mu_n} = \sqrt{-g}\epsilon_{\mu_1, \dots, \mu_n}$.

Capítulo 3

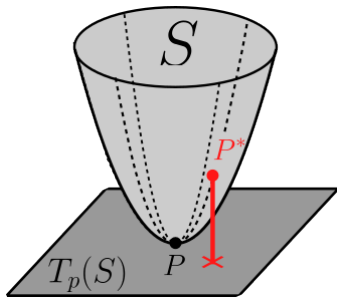
Segunda forma fundamental, curvatura media y gaussiana

3.1. Segunda forma fundamental

Sea una superficie parametrizada S ,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V \cap S \\ (u^1, u^2) &\longmapsto \mathbf{x}(u^1, u^2),\end{aligned}$$

y un punto genérico de la superficie S , P . Además, sea $T_P(S)$ el espacio o plano tangente a S en el punto P . En este punto P , el conjunto de vectores $\left\{ \mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}, \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|} \right\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .



Consideramos un punto $P^* \in S$ infinitesimalmente próximo al punto P , de tal modo que las coordenadas de P y P^* son, respectivamente, $(u^1, u^2), (u^1 + h^1, u^2 + h^2)$. Para medir la curvatura, estudiaremos cuánto se separa la superficie S de $T_P(S)$.

$$d(P^*, T_P(S)) = (\mathbf{x}(u^p + h^p) - \mathbf{x}(u^p)) \cdot \mathbf{n}$$

Como P y P^* están infinitamente cerca, podemos expandir en serie de Taylor:

$$\mathbf{x}(u^p + h^p) = \mathbf{x}(u^p) + \mathbf{x}_\alpha \cdot h^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{\alpha\beta}(u^p) \cdot h^\alpha h^\beta + \mathbf{R}_2$$

Por lo que la distancia queda como:

$$\begin{aligned}d(P^*, T_P(S)) &= \left(\mathbf{x}_\alpha(u^p) \cdot h^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{\alpha\beta}(u^p) \cdot h^\alpha h^\beta + \dots \right) \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} h^\alpha h^\beta \quad \text{porque } \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0\end{aligned}$$

Al producto escalar de la segunda derivada con el vector perpendicular a $T_P(S)$ lo llamaremos *segunda forma fundamental*.

$b_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}$

Otra manera alternativa de expresar la segunda forma fundamental se obtiene derivando la expresión $\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{x}_\alpha \mathbf{n}_\beta = 0 \implies \boxed{b_{\alpha\beta} = -\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta}$$

Para el determinante de esta matriz, utilizaremos la notación $b = \det\{b_{\alpha\beta}\}$. El nombre de segunda forma fundamental proviene de que la distancia $d(P^*, T_p(S)) = 1/2 b_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta + \dots$ es, a orden dominante, una forma cuadrática:

$$Q(h^\alpha) = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta$$

No obstante, al contrario que de la primera forma fundamental, esta *no* tiene porqué ser definida positiva.

SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta$$

Propiedades:

1. Si $b_{\alpha\beta} = 0$ sobre una cierta carta local, la superficie en esa carta es un **plano**, y viceversa.
2. $b_{\alpha\beta}$ son las componentes covariantes de un (pseudo-)tensor de segundo orden.
3. La ley de transformación de b es $\bar{b} = D^2 b$.

[1] *Demostración.* Suponemos que $b_{\alpha\beta} = 0$, y sabemos que $\|\mathbf{n}\| = 1 \leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$. Derivando: $\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\alpha \implies \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\alpha = 0 \iff \mathbf{n}_\alpha \in T_p(S)$. Esto significa que \mathbf{n}_α puede expresarse como combinación lineal de la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$. Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{\alpha\beta} = 0 \\ \mathbf{n}_\alpha \in T_p(S) \end{array} \right\} \implies \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta = 0 \iff \mathbf{n} \equiv \text{const.}$$

Entonces:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})_\alpha = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_\alpha + \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{x} = 0$$

Luego:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \equiv \text{const.} \quad \text{Ecuación de un plano.}$$

□

[2] *Demostración.* Si cambiamos de coordenadas u^α a \bar{u}^β :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}} &= \frac{\bar{\mathbf{x}}_1 \wedge \bar{\mathbf{x}}_2}{\|\bar{\mathbf{x}}_1 \wedge \bar{\mathbf{x}}_2\|} \longrightarrow \bar{b}_{\alpha\beta} = -\bar{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{n}}_\beta = -\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} \mathbf{x}_\mu\right) \cdot \left(\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} \mathbf{n}_\nu\right) \\ &= -\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} \underbrace{\mathbf{x}_\mu \cdot \mathbf{n}_\nu}_{-b_{\mu\nu}} \\ &= \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta} b_{\mu\nu} \end{aligned}$$

□

3.1.1. Clasificación de los puntos de una superficie

Dada la superficie S , el plano tangente $T_p(S)$ y el punto P^* de la superficie infinitesimalmente cerca de P , podemos clasificar las superficies en función de las diferentes separaciones del plano tangente.

- **PUNTO ELÍPTICO:** Si $b > 0$, la superficie se comporta localmente como un paraboloide de revolución (o elíptico).

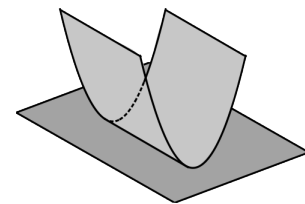
$$Q(h^\alpha) = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta$$

Además, si $b_{11} > 0$, la superficie está orientada en el sentido de \mathbf{n} (como el paraboloide elíptico, por ejemplo).

Por el contrario, si $b_{11} < 0$, la superficie está orientada en el sentido contrario a \mathbf{n} .

- **PUNTO HIPERBÓLICO:** Si $b < 0$, la superficie se comporta localmente como un paraboloide hiperbólico (punto de silla).
- **PUNTO PARABÓLICO:** Si $b = 0$ pero $b_{\alpha\beta} \neq 0$, la superficie se comporta localmente como un cilindro parabólico.

Si $b_{\alpha\beta} = 0$ (es decir, la segunda forma fundamental se anula), entonces no podemos conocer la forma local de la superficie. En este caso, es necesario tomar el siguiente orden de aproximación en el desarrollo en serie de Taylor. A este tipo de puntos se les conoce como **PUNTOS PLANARES**.



Cilindro parabólico

Ejemplo A: $\mathbf{x}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, (u^1)^2 + (u^2)^3)$

$$\mathbf{x}_1 = (1, 0, 2u^1), \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, 3(u^2)^2)$$

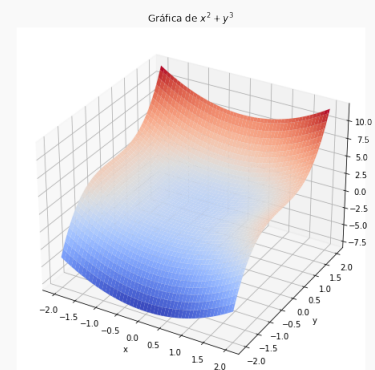
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2\|} = \frac{(-2u^1, -3(u^2)^2, 1)}{\sqrt{1 + (u^1)^2 + 9(u^2)^4}}$$

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{11} = (0, 0, 2) \\ \mathbf{x}_{12} = (0, 0, 0) \\ \mathbf{x}_{22} = (0, 0, 6u^2) \end{cases} = \mathbf{x}_{21}$$

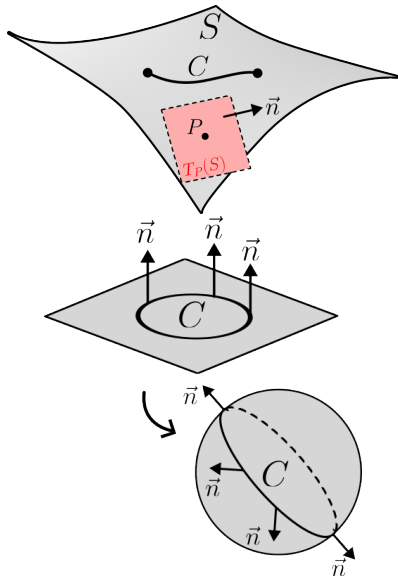
$$\Rightarrow \begin{cases} b_{11} = \frac{2}{\sqrt{1+(u^1)^2+9(u^2)^4}} \\ b_{12} = 0 \\ b_{22} = \frac{6u^2}{\sqrt{1+(u^1)^2+9(u^2)^4}} \end{cases} = b_{21}$$

Es decir: $b > 0$ si $u^2 > 0$: puntos elípticos
 $b < 0$ si $u^2 < 0$: puntos hiperbólicos
 $b = 0$ si $u^2 = 0$: puntos parabólicos



Gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^3$

3.2. Curvaturas principales, media y gaussiana



La curvatura de una curva contenida dentro de una superficie dependerá de la propia curva y de la curvatura de la superficie. Como ejemplo, podemos pensar en una circunferencia contenida en un plano, o la misma circunferencia entendida como el ecuador de una esfera.

La contribución a la curvatura de la curva que proviene de la superficie se debe a cómo varía el vector normal sobre la superficie y, en concreto, del ángulo que forman entre \mathbf{n} y \mathbf{k} , con $\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{p}$, donde \mathbf{p} es el vector normal principal de la curva. Para ver esto, descompondremos \mathbf{k} , el vector de curvatura, en una componente *normal* (o paralela a \mathbf{n}); y en otra no paralela.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_g \quad \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\mathbf{k}_n \parallel \mathbf{n})$$

\mathbf{k}_g será entonces el vector de curvatura *geodésica* (debida al tipo de curva).

Sea S una superficie parametrizada, y C una determinada curva en S , parametrizada en términos de la longitud de arco ($\|\dot{\mathbf{x}}(S)\| = 1$).

$$\mathbf{k}_n = k_n \cdot \mathbf{n} \quad \text{y} \quad k_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$$

Como \mathbf{k} , para una curva en parámetro natural, es $\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{x}}$; al aplicar la regla de la cadena queda:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha} \dot{u}^\alpha = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \mathbf{x}_\alpha \ddot{u}^\alpha \\ \Rightarrow k_n &= \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{x}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \mathbf{x}_\alpha \ddot{u}^\alpha) \cdot \mathbf{n} = b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \end{aligned}$$

En el caso de encontrarnos en una parametrización arbitraria:

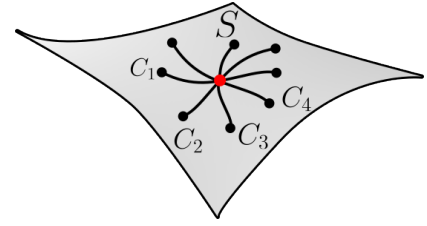
$$\dot{u}^\alpha = \frac{du^\alpha}{dS} = \frac{du^\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{dS} = (u^\alpha)' \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|}$$

De esta forma,

$$k_n = \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|^2} b_{\alpha\beta} (u^\alpha)' (u^\beta)' = \boxed{\frac{b_{\alpha\beta} (u^\alpha)' (u^\beta)'}{g_{\mu\nu} (u^\mu)' (u^\nu)'}} = k_n$$

La *curvatura normal* es el cociente entre la segunda y la primera forma fundamental, evaluadas sobre la curva (conocidas $u^\alpha = u^\alpha(t)$). La curvatura normal es, en realidad, el ángulo entre \mathbf{n} y el vector de curvatura \mathbf{k} (o \mathbf{p}).

La curvatura de cada curva C_i (las cuales pasan todas por el mismo punto), serán distintas, como aparece en la imagen. Para ello, definiremos las curvaturas normales principales de la superficie S en el punto P .



3.2.1. Curvaturas normales principales (de S en P)

Se definen como los valores mayor y menor de la curvatura normal para todas las curvas contenidas en esa superficie S y que pasan por el punto P .

Por comodidad, introducimos la siguiente notación:

Notación: $(u^\alpha)' = \frac{du^\alpha(t)}{dt} = \ell^\alpha \implies k_n = \frac{b_{\alpha\beta}\ell^\alpha\ell^\beta}{g_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu} = \frac{A}{B}$, con $A = b_{\alpha\beta}\ell^\alpha\ell^\beta$ y $B = g_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu$.

Para hallar los valores de k_n máximos y mínimos, derivamos la curvatura normal e imponemos que sea nula.

$$\frac{\partial k_n}{\partial \ell^\alpha} = 0 = \frac{B \partial A / \partial \ell^\alpha - A \partial B / \partial \ell^\alpha}{B^2}$$

Si multiplicamos por B y usamos que $k_n = A/B$, entonces la expresión anterior puede escribirse como:

$$\frac{\partial A}{\partial \ell^\alpha} - k_n \frac{\partial B}{\partial \ell^\alpha} = 0$$

y, junto con las expresiones explícitas de A y B , llegamos a que:

$$(b_{\alpha\beta}\ell^\beta + b_{\beta\alpha}\ell^\beta) - k_n(g_{\alpha\beta}\ell^\beta + g_{\beta\alpha}\ell^\beta) = 0$$

Como $g_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$ son simétricas en α y β , la expresión se simplifica:

$$\begin{aligned} (b_{\alpha\beta} - k_n g_{\alpha\beta})\ell^\beta &= 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \\ \alpha = 1 : (b_{11} - k_n g_{11})\ell^1 + (b_{12} - k_n g_{12})\ell^2 &= 0 \\ \alpha = 2 : (b_{21} - k_n g_{21})\ell^1 + (b_{22} - k_n g_{22})\ell^2 &= 0 \end{aligned}$$

que es un sistema homogéneo con $(\ell^1, \ell^2) \neq (0, 0)$. Por tanto, para las soluciones no triviales, el determinante de la matriz de coeficientes debe de ser nulo.

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k_n g_{11} & b_{12} - k_n g_{12} \\ b_{21} - k_n g_{21} & b_{22} - k_n g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Esta condición proporciona una ecuación con dos soluciones para k_n . Estas dos soluciones, que etiquetaremos k_1 y k_2 ($k_1 \geq k_2$), se conocen como las *curvaturas normales principales* de la superficie S en el punto P .

Para calcular las curvaturas normales k_1 y k_2 , introduciremos el *operador de Weingarten*, que es la segunda forma fundamental con un índice covariante y otro contravariante.

$b^\mu_\nu \equiv$ operador de Weingarten.

De la ecuación $(b_{\alpha\beta} - k_n g_{\alpha\beta})l^\beta = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu}(b_{\alpha\beta} - k_n g_{\alpha\beta})l^\beta &= 0 \\ \Rightarrow (b^\mu_\beta - k_n \delta^\mu_\beta)l^\beta &= 0 \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} b^1_1 - k_n & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 - k_n \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

(que es una ecuación de autovalores para el operador de Weingarten). Desarrollando:

$$k_n^2 - (b^1_1 + b^2_2)k_n + (b^1_1 b^2_2 - b^2_1 b^1_2) = 0$$

Si usamos que $b^1_1 + b^2_2 = b^\alpha_\alpha$ y que $\det(b^\mu_\nu) = \det(g^{\mu\alpha} b_{\alpha\nu}) = \det(g^{\mu\nu}) \det(b_{\alpha\nu}) = b/g$, obtenemos la siguiente expresión:

$$k_n^2 - b^\alpha_\alpha k_n + \frac{b}{g} = 0$$

Las ecuaciones algebraicas de segundo grado pueden escribirse en términos de sus soluciones.

$$\begin{aligned} (k_n - k_1)(k_n - k_2) &= 0 \\ &= k_n^2 - (k_1 + k_2)k_n + k_1 k_2 = 0 \\ \Rightarrow k_1 k_2 &= \frac{b}{g} \quad k_1 + k_2 = b^\alpha_\alpha \end{aligned}$$

Y, finalmente, usando estas relaciones, podemos definir dos curvaturas para la superficie:

CURVATURA MEDIA

$$H \equiv \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}b^\alpha_\alpha$$

Esta curvatura depende tanto de la primera forma fundamental como de la segunda forma fundamental.

CURVATURA GAUSSIANA

$$K \equiv k_1 \cdot k_2 = \frac{b}{g}$$

Al contrario de la curvatura media, esta curvatura **sólo depende de la primera forma fundamental**, al poder escribirse el determinante b en términos de g .

A partir de esta definición, se dice que una superficie es *minimal* si $H = 0$ en todos sus puntos (el nombre se debe a que este tipo de superficies

pueden probarse que tienen área mínima. Este es el caso del plano). Veamos cómo se transforman estas dos cantidades H y K bajo cambios de coordenadas.

Como $b_{\alpha\beta}$ es un pseudo-tensor y $g_{\alpha\beta}$ es un tensor, k_n sólo cambiará de signo si cambia el sentido de \mathbf{n} . Por tanto, el producto de $k_1 k_2 = K$ será *invariante* bajo cambios de coordenadas. En consecuencia, la curvatura gaussiana K es un *escalar*. (también puede verse este hecho con las leyes de transformación tensoriales).

3.3. Fórmulas de Weingarten y de Gauss. Símbolos de Christoffel

Como hemos visto en el capítulo 1, el sistema de Frenet se adapta a la geometría de la curva que estudiamos (se desplaza con el parámetro t). La evolución de este sistema da lugar a la noción de curvaturas de una curva en \mathbb{R}^n .

En el caso de las superficies, escribiremos $\{\mathbf{x}_{\alpha\beta}, \mathbf{n}_\beta\}$ en términos de $\{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{n}\}$, con $\alpha, \beta = 1, 2$. Derivaremos los vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}\}$ con respecto a las coordenadas curvilíneas locales,

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \partial_\beta \mathbf{x}_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{x}_\gamma + a_{\alpha\beta} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}_\beta = \partial_\beta \mathbf{n} = c_\beta^\gamma \mathbf{x}_\gamma + d_\beta \mathbf{n}$$

donde $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, a_{\alpha\beta}, c_\beta, d_\beta$ son los coeficientes. Analizamos primero la segunda ecuación: como $||\mathbf{n}||^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{n} = 0 \implies d_\beta = 0$.

Si usamos la base dual,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\gamma \cdot \mathbf{n}_\beta &= g^{\gamma\rho} \mathbf{x}_\rho \cdot \mathbf{n}_\beta = -g^{\gamma\rho} b_{\rho\beta} = -b^\gamma_\beta \\ \implies \mathbf{x}^\gamma \cdot \mathbf{n}_\beta &= c_\beta^\gamma = -b^\gamma_\beta \end{aligned}$$

De la primera ecuación, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$. Por definición, $b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\alpha\beta}$, de modo que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$.

Si utilizamos la base dual, $\mathbf{x}^\gamma \cdot \mathbf{x}_{\alpha\beta} = \boxed{\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}$. Estas cantidades se conocen como los *símbolos de Christoffel de segunda especie* (no son tensores). Los símbolos de Christoffel de primera especie son:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{x}_\gamma \cdot \mathbf{x}_{\alpha\beta} = g_{\mu\gamma} \Gamma^\mu_{\alpha\beta}$$

La notación usada en la literatura matemática es $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$. En física–y, en concreto, en Relatividad General– usamos la notación $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$.

Con esta definición, las ecuaciones anteriores pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{x}_\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} && : \text{Ecuación de Gauss} && [G] \\ \mathbf{n}_\beta &= -b^\gamma_\beta \cdot \mathbf{x}_\gamma && : \text{Ecuación de Weingarten} && [W] \\ b_{\alpha\beta} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\alpha\beta} && \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{x}^\gamma \cdot \mathbf{x}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

3.4. Propiedades de los símbolos de Christoffel

3.4.1. Simetrías

Del *teorema de Schwarz* *, $\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\beta\alpha}$, con $\alpha, \beta = 1, 2$, luego los símbolos de Christoffel, $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{x}^\gamma \cdot \mathbf{x}_{\alpha\beta}$ son simétricos bajo el intercambio de α y β .

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$$

Esto significa que, de los $2 \times 2 \times 2 = 8$ símbolos posibles en una superficie, sólo 6 de ellos son independientes (en dimensión n , serían $n^2(n+1)/2$).

Gracias a esta simetría, es posible obtener los símbolos de Christoffel en términos de derivadas de la primera forma fundamental. Esta expresión será la definición más común para estos símbolos.

Habíamos definido la primera forma fundamental como:

$$g_{\alpha\lambda} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\lambda, \text{ con } \alpha, \lambda = 1, 2.$$

Si derivamos con respecto a u^β :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta} &= \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{x}_\lambda + \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_{\lambda\beta} \\ &= \Gamma_{\alpha\beta\lambda} + \Gamma_{\lambda\beta\alpha} \end{aligned} \quad [*]$$

Si ahora rotamos los índices cíclicamente: $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \lambda \rightarrow \alpha$

$$\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^\lambda} = \Gamma_{\beta\lambda\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda\beta} \quad [**]$$

$$\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial u^\alpha} = \Gamma_{\lambda\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\alpha\lambda} \quad [***]$$

Si ahora calculamos $[*] + [***] - [**]$:

$$\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^\lambda} = 2\Gamma_{\alpha\beta\lambda}$$

Por lo que, finalmente, podemos escribir:

$$\Gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^\lambda} \right)$$

que es la definición para los símbolos de Christoffel de primera especie.

Para los símbolos de Christoffel de segunda especie, usamos la primera forma fundamental en notación contravariante.

*Básicamente, si $f(x, y)$ es continua en su dominio abierto D y es de clase C^2 , entonces $f_{xy} = f_{yx}$.

DEFINICIÓN DE SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

De primera especie:

$$\Gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^\lambda} \right)$$

De segunda especie:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu = g^{\mu\lambda} \Gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^\lambda} \right)$$

Ejemplo B:

- (i) Símbolos de Christoffel para coordenadas ortogonales sobre una superficie S .

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} g_{11} & \\ & g_{22} \end{pmatrix} \rightarrow g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1/g_{11} & \\ & 1/g_{22} \end{pmatrix}$$

Los símbolos de Christoffel son $\Gamma_{11}{}^1 = g^{1\lambda} \Gamma_{11\lambda}$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}{}^1 &= g^{11} \Gamma_{111} + \cancel{g^{12} \Gamma_{112}} = \frac{1}{2g_{11}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \cancel{\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}} - \cancel{\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}} \right) \\ &= \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}{}^1 &= -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{11}{}^2 = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{22}{}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \\ \Gamma_{12}{}^1 &= \Gamma_{21}{}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{12}{}^2 = \Gamma_{21}{}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \end{aligned}$$

- (ii) Símbolos de Christoffel para el plano en coordenadas polares:
 $\mathbf{x}(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, 0) \quad (r, \theta)$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & (u^1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{22}{}^1 = \Gamma_{rr}{}^\theta = -r, \quad \Gamma_{12}{}^2 = \Gamma_{21}{}^2 = \Gamma_{r\theta}{}^\theta = \Gamma_{\theta r}{}^\theta = 1/r$$

Una relación útil de los símbolos de Christoffel es la de la contracción de símbolos:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta} + \cancel{\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial u^\alpha}} - \cancel{\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\lambda}} \right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta}$$

Otra relación útil es la siguiente:

$$\frac{\partial g}{\partial u^\beta} = \frac{\partial}{\partial u^\beta} (g_{11}g_{22} - (g_{12})^2) = \partial_\beta g_{11}g_{22} + g_{11}\partial_\beta g_{22} - 2g_{12}\partial_\beta g_{12}$$

Además: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow g^{11} = g_{22}/g, g^{22} = g_{11}/g, g^{12} = g^{21} = -g_{12}/g$, luego:

$$\partial_\beta g = g g^{11} \partial_\beta g_{11} + g g^{22} \partial_\beta g_{22} + 2 g g^{12} \partial_\beta g_{12} = g g^{\alpha\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta}$$

Combinando los dos resultados:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^\beta} = \frac{\partial}{\partial u^\beta} [\log \sqrt{g}]$$

3.4.2. Ley de transformación de los símbolos de Christoffel

$(U, \mathbf{x}(u^\alpha)) \longrightarrow (\bar{U}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^\alpha))$: Al cambiar de parametrización:

$$\bar{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha} \mathbf{x}_\gamma, \quad \bar{\mathbf{x}}^\lambda = \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\sigma} \mathbf{x}^\sigma$$

La segunda derivada cumple:

$$\bar{\mathbf{x}}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\beta} \bar{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta} \mathbf{x}_{\gamma\mu} + \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha \partial \bar{u}^\beta} \cdot \mathbf{x}_\gamma$$

Es decir, los símbolos de Christoffel (de segunda especie) en las nuevas coordenadas (carta $(\bar{U}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^\alpha))$) son:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\lambda &= \bar{\mathbf{x}}_{\alpha\beta} \cdot \bar{\mathbf{x}}^\lambda = \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\sigma} \underbrace{\mathbf{x}_{\gamma\mu} \cdot \mathbf{x}^\sigma}_{\Gamma_{\gamma\mu}^\sigma} + \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha \partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\sigma} \underbrace{\mathbf{x}_\gamma \cdot \mathbf{x}^\sigma}_{\delta_\gamma^\sigma} \\ &= \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\sigma} \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma + \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha \partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\sigma} \end{aligned}$$

El término en rojo corresponde a la ley de transformación tensorial habitual. El término azul 'estropea' este carácter tensorial de los símbolos de Christoffel (salvo reparametrizaciones lineales).

3.5. Tensor de curvatura de Riemann

Ahora deduciremos las *ecuaciones de Mainardi-Codazzi*. Como hemos visto, a través de la superficie parametrizada podemos deducir información acerca de la curvatura de ésta:

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) \longrightarrow \mathbf{x}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{x} \longrightarrow g_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta \longrightarrow \mathbf{n} \longrightarrow b_{\alpha\beta} \longrightarrow g, b, H, K \longrightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$$

Las ecuaciones de Mainardi-Codazzi establecen, fundamentalmente, que $\mathbf{x}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{x}_{\alpha\gamma\beta}$, que es la condición de integrabilidad. Esto hace que la superficie no tenga ninguna obstrucción o patología, y existe una independencia sobre el camino que tomamos integrando entre dos puntos infinitesimalmente próximos.

Si derivamos la fórmula de Gauss, [G]:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathbf{x}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} \mathbf{n} \implies \mathbf{x}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^{\gamma}} \mathbf{x}_{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^{\gamma}} \mathbf{x}_{\alpha\beta} = \partial_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \cdot \mathbf{x}_{\sigma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \cdot \mathbf{x}_{\sigma\gamma} + \partial_{\gamma} b_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} + b_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}_{\gamma}$$

Y si ahora usamos la fórmula de Weingarten, [W]: $\mathbf{n}_{\gamma} = -b_{\gamma}^{\sigma} \cdot \mathbf{x}_{\sigma}$, y la de Gauss:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \mathbf{x}_{\sigma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} (\Gamma_{\sigma\gamma}^{\rho} \mathbf{x}_{\rho} + b_{\sigma\gamma} \cdot \mathbf{n}) + \partial_{\gamma} b_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} - b_{\alpha\beta} b_{\gamma}^{\sigma} \mathbf{x}_{\sigma}$$

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta\gamma} = (\partial_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\rho} \Gamma_{\rho\beta}^{\sigma} - b_{\alpha\beta} b_{\gamma}^{\sigma}) \cdot \mathbf{x}_{\sigma} + (\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} b_{\sigma\gamma} + \partial_{\gamma} b_{\alpha\beta}) \cdot \mathbf{n}$$

Como $\{\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{n}\}$ son vectores linealmente independientes, al imponer la condición de $\mathbf{x}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{x}_{\alpha\gamma\beta}$, los términos que vayan con cada vector deben ser idénticamente iguales, obteniéndose dos conjuntos de ecuaciones, que son las ecuaciones de Mainardi-Codazzi.

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} \Gamma_{\rho\gamma}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} \Gamma_{\rho\beta}^{\sigma} = b_{\alpha\beta} b_{\gamma}^{\sigma} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta}^{\sigma}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} b_{\sigma\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} b_{\sigma\beta} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} = 0$$

3.5.1. Tensor de curvatura de Riemann

Analizando la primera ecuación de M-C, el lado derecho es un producto de segundas formas fundamentales. La segunda forma fundamental, $b_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}$, es un pseudo-tensor. El producto da lugar, por tanto, a algo que se comporta de forma *tensorial*. En este caso, esto hace que sea un tensor de cuarto orden, tres veces covariante y una vez contravariante.

Por definición, el lado izquierdo de la primera ecuación se conoce como el *tensor de curvatura de Riemann*.

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\gamma\beta} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} \Gamma_{\rho\gamma}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} \Gamma_{\rho\beta}^{\sigma}$$

Para presentar las simetrías del tensor de Riemann, trabajaremos con su versión cuatro veces covariante.

$$R_{\mu\alpha\gamma\beta} = g_{\mu\sigma} R^{\sigma}{}_{\alpha\gamma\beta} = b_{\alpha\beta} b_{\gamma\mu} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\mu}$$

Este tensor cumple las siguientes propiedades:

- $R_{\mu\alpha\gamma\beta} = R_{\gamma\beta\mu\alpha}$ (simetría por pares de índices)
- $R_{\mu\alpha\gamma\beta} = -R_{\alpha\mu\gamma\beta}$ (antisimetría en los dos primeros índices)
- $R_{\mu\alpha\gamma\beta} = -R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ (antisimetría en los dos últimos índices)
- $R_{\mu\alpha\gamma\beta} + R_{\mu\beta\alpha\gamma} + R_{\mu\gamma\beta\alpha} = 0$ (propiedad cíclica)

La construcción $R^{\sigma}{}_{\alpha\gamma\beta}$ es general, válida en dimensión n . Sus simetrías nos permiten reducir el número de componentes independientes a $n^2(n^2 - 1)/12$. En nuestro caso, $n = 2$, una componente independiente. Las propiedades vistas anteriormente permiten reducir las componentes independientes de $n^4(n^2 - 1)/12$ a $n^2(n^2 - 1)/12$.

3.6. Teorema egregio de Gauss

Dada la superficie $\mathbf{x}(u^1, u^2)$, podemos calcular $g_{\alpha\beta} \rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\rho \rightarrow R^\mu_{\nu\sigma\rho}$. En el caso de $n = 2$, tiene $n^2(n^2 - 1)/12 = 1$ componente individual. De hecho, sus únicas componentes distintas de 0 son $R_{1212} = R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112}$. Además, $R_{\mu\alpha\gamma\beta} = b_{\alpha\beta}b_{\gamma\mu} - b_{\alpha\gamma}b_{\beta\mu}$, y sustituyendo nos queda:

$$R_{1212} = b_{22}b_{11} - b_{21}b_{21} = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = b$$

Para $n = 2$, $R_{1212} = b$. Y, si recordamos que la curvatura gaussiana se calcula como $K = k_1k_2 = b/g$:

$$K = \frac{R_{1212}}{g}$$

Este resultado se conoce como el *teorema egregio de Gauss*. Este teorema, fundamentalmente, establece que la curvatura gaussiana *solo depende de la primera forma fundamental*, como hemos visto anteriormente.

El teorema egregio nos proporciona una vía alternativa y rápida para calcular el tensor de Riemann de una superficie sin necesidad de obtener los símbolos de Christoffel.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u^1, u^2) \longrightarrow b_{\alpha\beta} &\xrightarrow{\det} \text{Tensor de Riemann (4 veces covariante)} \\ &\quad (n = 2, R_{1212}) \\ &\xrightarrow{g^{\sigma\mu}} \text{Tensor de Riemann } R^\sigma_{\alpha\gamma\beta} \end{aligned}$$

Comentarios:

- El teorema egregio de Gauss (*Theorema Egregium* en latín) establece que la curvatura de una superficie únicamente depende de la primera forma fundamental, como hemos visto anteriormente. Otra formulación distinta del teorema egregio es que la curvatura gaussiana es *invariante bajo isometrías*, ya que bajo isometrías se preservan los elementos de matriz de $g_{\alpha\beta}$. Una consecuencia de esto es que no se puede realizar una transformación de una esfera, con curvatura gaussiana constante de $1/r^2$, a un plano sin que conlleve una distorsión de ángulos y distancias; es decir, sin que cambie su curvatura.
- Otros tensores importantes derivados del tensor de Riemann son el *tensor de Ricci*, que se define como $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$; y el *tensor de Einstein* $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}R$, con $R = R^\mu_\mu$ el *escalar de curvatura de Riemann*.

Capítulo 4

Curvatura geodésica y geodésicas

4.1. Curvatura geodésica

El vector de curvatura \mathbf{k} de una curva C en una superficie S puede descomponerse en dos componentes, como hemos visto en el capítulo anterior. Una de estas componentes es paralela a \mathbf{n} y se conoce como *curvatura normal*. La otra componente se denomina *curvatura geodésica*.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_g$$

donde $\mathbf{k} = k\mathbf{p}$. Si nos fijamos en el plano formado por \mathbf{k} y \mathbf{k}_n , como $\mathbf{n} \perp \mathbf{t} \perp \mathbf{p}$, $\mathbf{k}_g \propto \mathbf{e}$, donde $\mathbf{e} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}$; luego lo que ocurre es que $k_g = \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}) \cdot \mathbf{k}$.

Si ahora usamos las fórmulas de Frenet, en parametrización natural,

$$\mathbf{k} = \ddot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{t} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \|\dot{\mathbf{x}}\| = 1 \quad \forall s$$

$$k_g = (\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{x}}) \cdot \ddot{\mathbf{x}} = [\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{n}]$$

$$k_g = \det\{\mathbf{n} \mid \dot{\mathbf{x}} \mid \ddot{\mathbf{x}}\}$$

En parametrización arbitraria:

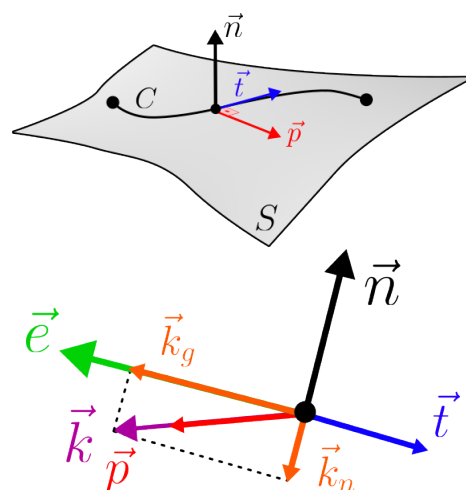
$$\frac{d}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d}{dt} = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|} \frac{d}{dt}$$

luego:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|} \longrightarrow \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}'\|^2} + \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}'\|} \right) \right) \cdot \mathbf{x}'$$

$$k_g = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^3} \det\{\mathbf{n} \mid \mathbf{x}' \mid \mathbf{x}''\}$$

No contribuye al determinante



4.2. Geodésicas

Una *pregeodésica* es una es una curva con *curvatura geodésica nula* en cualquier punto de la curva.

Una *geodésica* es una curva que:

1. Es *pregeodésica*, $k_g = 0$
2. Tiene un vector velocidad *constante*, $\|\mathbf{x}'\| \equiv \text{const.}$

Si reparametrizamos una geodésica, k_g seguirá siendo nulo, pero puede que la velocidad deje de ser constante. En consecuencia, una curva pregeodésica siempre mantiene su condición de pregeodésica.

Por otro lado, una geodésica es una pregeodésica parametrizada en su parámetro afín, donde el parámetro afín es una transformación lineal de la longitud de arco.

$$t_{\text{afín}} = aS + b, \quad a, b \equiv \text{const.}$$

Ejemplo A: $\mathbf{x}(t) = (\log t, \log t, \log t)$ es una pregeodésica

$$k_g = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|} \det\{\mathbf{n} \mid \mathbf{x}' \mid \mathbf{x}''\} = 0, \quad \|\mathbf{x}'\| \not\equiv \text{const.}$$

$\mathbf{x}(\bar{t}) = (\bar{t}, \bar{t}, \bar{t})$ ($\bar{t} = \log t$) $\iff \mathbf{x}(t)$ cumple que $k_g = 0$ y $\|\mathbf{x}'\| \equiv \text{const.} \forall \bar{t}$. Es decir, $\mathbf{x}(\bar{t})$ es una geodésica.

Un resultado muy importante es que la condición de $\|\mathbf{x}'\| \equiv \text{const.}$ de las geodésicas implica que, en una geodésica, la aceleración es *paralela a n*. El razonamiento es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}'\|^2 = 0 &\implies (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}')' = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'' = 2\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'' = 0 \\ &\iff \mathbf{x}' \perp \mathbf{x}'' \end{aligned}$$

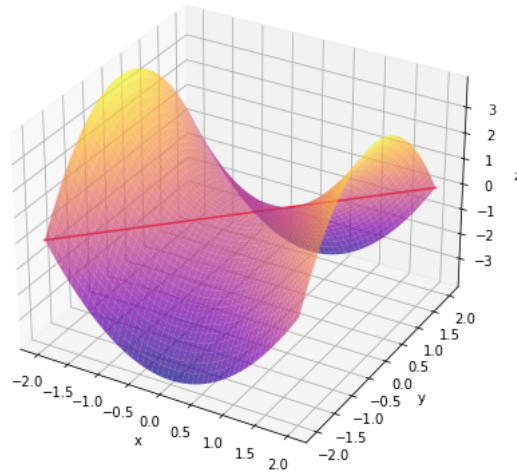
Además, $k_g = 0 = (\mathbf{n} \wedge \mathbf{x}') \cdot \mathbf{x}''$. Esto significa que $\mathbf{n}, \mathbf{x}', \mathbf{x}''$ son coplanares, lo que implica que $\mathbf{n} \parallel \mathbf{x}''$.

Las consecuencias de este resultado son que las rectas (con curvatura nula) son siempre pregeodésicas en cualquier superficie que las contiene.

Ejemplo B: S: Paraboloide hiperbólico: $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$.

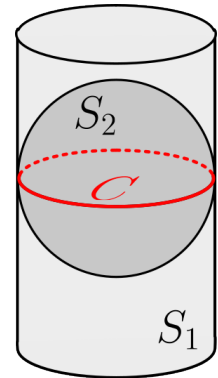
La curva $\mathbf{x}(t) = (t, t, 0)$ es una recta, y por tanto una pregeodésica (además de geodésica)

Paraboloide hiperbólico y curva parametrizada



Ejemplo B: Paraboloide hiperbólico y geodésica

Si S_1 y S_2 son dos superficies tangentes entre sí a lo largo de una cierta curva C , entonces el hecho de que C sea pregeodésica de S_1 implica que también lo es de S_2 .



4.2.1. Ecuación de las geodésicas

Sea C una curva sobre una superficie S :

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)) = \mathbf{x}(u^\alpha(s))$$

$$\mathbf{k} = k\mathbf{p} = \ddot{\mathbf{x}} \quad , \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_n \\ = \mathbf{k}_g + k \cdot \mathbf{n}$$

\mathbf{k}_g es la parte de $\ddot{\mathbf{x}}$ que es perpendicular a \mathbf{n} .

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \dot{u}^\alpha \implies \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \mathbf{x}_\alpha \cdot \ddot{u}^\alpha$$

$$[G] \rightarrow (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \cdot \mathbf{x}_\gamma + b_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}) \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \mathbf{x}_\alpha \cdot \ddot{u}^\alpha \\ = \underbrace{(\ddot{u}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)}_{\mathbf{k}_g} \mathbf{x}_\gamma + \underbrace{b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}_{\mathbf{k}_n} \mathbf{n}$$

La condición de geodésica, $k_g = 0$, además de que la velocidad sea constante, implica que, para este tipo de curva, se cumple la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{u}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0$$

donde los símbolos de Christoffel se evalúan sobre la curva. Si escribimos las derivadas explícitamente, entonces:

$$\frac{d^2 u^\gamma}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0$$

(La estructura de esta ecuación es válida para parámetros afines $t_a = aS + b$. Al resolver esta ecuación, se obtienen las curvas en parámetro afín.)

La ecuación es válida si trabajamos en una variedad de dimensión n (en Relatividad General, se usará como parámetro s el tiempo propio, λ).

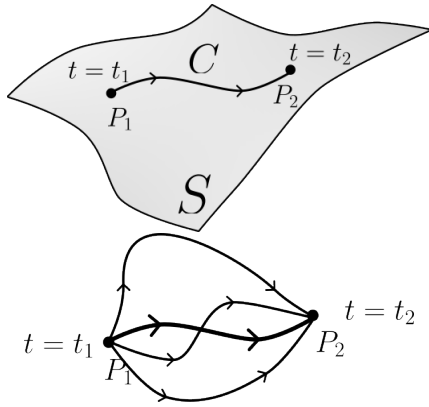
Ejemplo C: Plano XY en coordenadas cartesianas.

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0) \longrightarrow g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{2 \times 2}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$$

Las geodésicas cumplirán:

$$\frac{d^2 u^\gamma}{ds^2} = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u^1}{ds^2} = 0 \implies u^1 = as + b \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} = 0 \implies u^2 = cs + d \end{array} \right\} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

4.3. Propiedades extremales de las geodésicas: arcos de longitud mínima



La longitud de arco de la curva C contenida en la superficie S que va desde el punto P_1 hasta el punto P_2 es:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g_{\alpha\beta} (u^\alpha)' (u^\beta)'} \quad g_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta$$

El integrando en la longitud de arco puede entenderse como un lagrangiano en Mecánica Clásica, que depende de las coordenadas (u^1, u^2) y sus velocidades $((u^1)', (u^2)')$:

$$\mathcal{L}(u^\alpha, (u^\beta)') = \sqrt{g_{\alpha\beta} (u^\alpha)' (u^\beta)'}$$

Y si pedimos que el arco que une P_1 y P_2 sea de longitud mínima, tenemos que imponer que se cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange (es decir, usamos un método variacional):

$$\begin{aligned} & \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (u^\mu)'} = 0} \\ \hookrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} &= \frac{1}{2 \sqrt{g_{\alpha\beta} (u^\alpha)' (u^\beta)'}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\mu} \cdot (u^\alpha)' (u^\beta)' \\ \hookrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (u^\mu)'} &= \frac{1}{2 \sqrt{g_{\alpha\beta} (u^\alpha)' (u^\beta)'}} \left[g_{\rho\sigma} \underbrace{\frac{\partial (u^\rho)'}{\partial (u^\mu)'}}_{\delta^\rho_\mu} \cdot (u^\sigma)' + g_{\rho\sigma} (u^\rho)' \underbrace{\frac{\partial (u^\sigma)'}{\partial (u^\mu)'}}_{\delta^\sigma_\rho} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta} (u^\alpha)' (u^\beta)'}} g_{\mu\sigma} (u^\sigma)' \end{aligned}$$

Este resultado es general hasta este punto y no depende de la parametrización de C . A partir de ahora, realizaremos el resto del cálculo en parametrización natural.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^\mu} &= g_{\mu\sigma} \dot{u}^\sigma \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial u^\mu} \dot{u}^\rho \dot{u}^\sigma \\
 \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^\mu} \right) &= \dot{g}_{\mu\sigma} \dot{u}^\sigma + g_{\mu\sigma} \ddot{u}^\sigma \\
 &= \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial u^\rho} \cdot \dot{u}^\rho \dot{u}^\sigma + g_{\mu\sigma} \ddot{u}^\sigma \\
 g_{\mu\sigma} \ddot{u}^\sigma + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial u^\rho} \dot{u}^\rho \dot{u}^\sigma - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial u^\mu} \dot{u}^\rho \dot{u}^\sigma &= 0 \\
 \ddot{u}^\nu + \frac{1}{2} g^{\nu\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial u^\rho} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial u^\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial u^\mu} \right) \dot{u}^\rho \dot{u}^\sigma &= 0 \\
 \Rightarrow \boxed{\ddot{u}^\nu + \Gamma_{\rho\sigma}^\nu \dot{u}^\rho \dot{u}^\sigma = 0} &\quad \text{Ecuación de las geodésicas}
 \end{aligned}$$

Es decir, las geodésicas son arcos de longitud mínima en la superficie parametrizada S .

Parte II

Ejercicios sin corregir

Aviso legal:

Porque me has caído bien (Marcos o quien tenga el link de este documento), te dejo lo que tengo de ejercicios compilado en el documento. Si quieres imprimirlo avísame para que lo quite. Te aviso de que **NO** están corregidos, de hecho hay alguno que estará mal. **Úsalos a tu discreción.**

Enjoy ☺.

Ejercicios de tema 1

- 1 (a) Reconstruya la curva en \mathbb{R}^2 cuya curvatura es $K(S) = 1/S$ ($S > 0$), efectuando las integraciones en la variable S con constantes de integración nulas y posteriormente la reparametrización $S = \exp(t - \pi/4)$.
- (b) Calcule la longitud de arco de dicha curva entre los puntos $(1/2, -1/2)$ y $(-e^{\pi/2}, e^{\pi/2})$.

(a) Dada la curva paramétrica $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}(S) = (x(S), y(S))$, reconstruimos la curva como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(S) = K(S) &\implies \theta(S) = \int K(S) dS + \theta_0^0 \\ x(S) &= \int \cos(\theta(S)) dS + x_0^0 \\ y(S) &= \int \sin(\theta(S)) dS + y_0^0\end{aligned}$$

La integral de $\theta(S)$ es inmediata: $\theta(S) = \ln S$, ($S > 0$). Calculamos las integrales de $x(S), y(S)$ usando el cambio de variable $x = \ln S$ e integrando por **partes**:

$$\rightarrow x(S) = \int \cos(\ln S) dS$$

$$\begin{aligned}x(S) &= I = \int \cos(\ln S) dS = I = \int \cos(x) e^x dx \\ &= e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx \\ &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \underbrace{\int e^x \cos(x) dx}_I \\ &= \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \sin(x)) \\ \implies y(S) &= \frac{S}{2} (\sin(\ln S) + \cos(\ln S))\end{aligned}$$

$$\rightarrow y(S) = \int \sin(\ln S) dS$$

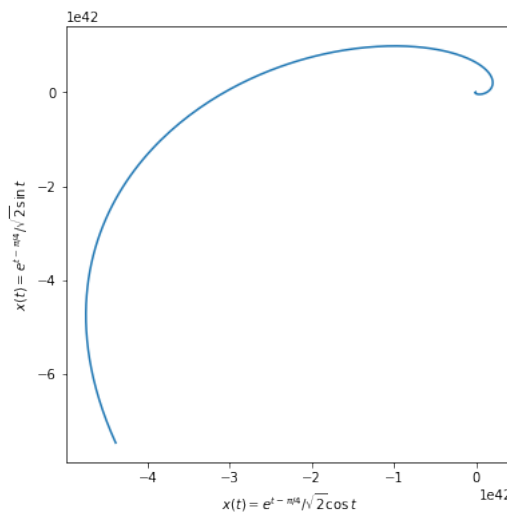
$$\begin{aligned} y(S) = I &= \int \sin(\ln S) dS = \int \sin(x) e^x dx \\ &= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx \\ &= -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \underbrace{\int e^x \sin(x) dx}_I \\ &= \frac{e^x}{2} (\cos(x) - \sin(x)) \\ \Rightarrow y(S) &= \frac{S}{2} (\sin(\ln S) - \cos(\ln S)) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(S) = (S/2(\sin(\ln S) + \cos(\ln S)), S/2(\sin(\ln S) - \cos(\ln S)))$$

Si reparametrizamos la curva con el parámetro t , obtenemos:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{t-\pi/4} \sin(t), e^{t-\pi/4} - \cos(t))$$

que tiene esta pinta:



Curva 1(a), $\mathbf{x}(t)$

10-abril-2024: Por favor, que se haga notar ese 10^{42} en la escala de la gráfica de la curva. El dibujo está mal (obviamente).

(b) Se puede calcular la longitud de arco en ambas parametrizaciones ya que esta es un invariante geométrico. No obstante, voy a usar la parametrización natural para aprovecharme de la propiedad de $\|\dot{\mathbf{x}}(S)\| = 1$. La longitud de arco se calcula como:

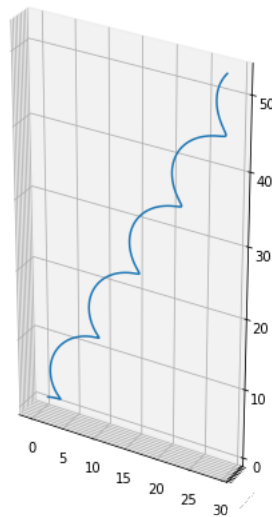
$$\ell = \int_A^B \|\dot{\mathbf{x}}(S)\| dS = S_B - S_A$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en cada punto, obtenemos que la S debe de cumplir, en cada caso, que $\sin(\ln S) = 0$, que da soluciones periódicas de la forma πk , $k \in \mathbb{Z}$, para el logaritmo. Como estamos en $S > 0$, las soluciones más próximas entre sí son 1 y e^π , por lo que la longitud de arco es:

$$\ell = e^\pi - 1$$

- 2] Demuestre que la curva en \mathbb{R}^3 dada por $\mathbf{x}(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t + 2, \sqrt{3} - \sin t)$ es una hélice circular y, calculando sendos triedros de Frenet en $\mathbf{x}(0)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(0)$, encuentre una isometría $\tilde{\mathbf{x}} = R\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ que lleve la hélice a la forma $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$.

Para empezar, podemos ver que la gráfica de esta curva en \mathbb{R}^3 representa, efectivamente, una hélice.



Curva 2(a)

Esta comienza en el punto $(0, 4, 0)$ y crece a lo largo de una dirección inclinada con respecto al eje vertical. En los ejemplos vistos en clase, no nos hemos encontrado en ningún momento una hélice que no tuviese como eje de simetría el eje Z . Por tanto, no servirá utilizar la ecuación genérica para ese tipo de hélices (que es la que proponen en el enunciado). No obstante, podremos ver que, una vez realicemos la isometría adecuada (es decir, traslaciones y rotaciones convenientes), podremos identificar la curva con la parametrización que ya conocemos.

- a) En primer lugar, debemos demostrar que se trata de una hélice. Para ello, mostramos que la curva $\mathbf{x}(t)$ se compone de una traslación a lo largo de una dirección y de una *curva plana* con radio de curvatura constante, es decir, $\rho(S) = 1/K(S) \equiv \text{constante}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t + 2, \sqrt{3} - \sin t) \\ &= (t, 2, \sqrt{3}t) + \underbrace{(\sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, -\sin t)}_{\mathbf{a}(t)} \end{aligned}$$

Como habíamos enunciado, el primer término de nuestra curva es tan solo una traslación (término lineal en t) a lo largo de la dirección $(1, 2, \sqrt{3})$.

Ahora nos centramos en el siguiente término del vector. Para demostrar que se trata de una curva plana, lo más sencillo es comprobar que su *vector binormal* es constante, y posteriormente calcular su radio de curvatura y ver que también es constante.

Primero calculamos su primer vector del triedro de Frenet:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}'(t)}{\|\mathbf{a}'(t)\|} = \mathbf{a}'(t) \cdot 1/2 = 1/2 (\sqrt{3} \cos t, -2 \sin t, -\cos t)$$

El vector binormal \mathbf{b} se obtiene como:

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{x}''(t)}{\|\mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{x}''(t)\|} = 1/4 (-2, 0, -2\sqrt{3}) \equiv \text{const.}$$

Por último, la curvatura se calcula como $K = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3} = \frac{4}{8} = 1/2$.

Por tanto, el radio de curvatura es $\rho(t) = 2$. Al tener una curva plana (vector binormal constante en la dirección de la traslación) con radio de curvatura constante, concluimos que se trata de una circunferencia y, por lo tanto, la curva parametrizada completa es una hélice.

[Corrección] $\mathbf{x}(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t + 2, \sqrt{3} - \sin t)$.

Hélice circular:

Curva de \mathbb{R}^3 con sus dos curvaturas **constantes**.

$$K = \frac{w_{12}}{\|\mathbf{x}'\|}, \quad \tau = \frac{w_{23}}{\|\mathbf{x}'\|}$$

- 3] Considere la curva $\mathbf{x}(t) = (\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t)$. Demuestre que es una circunferencia y calcule su radio, su centro y la ecuación cartesiana del plano en que se encuentra.

Una circunferencia es una curva *plana*, que tiene la condición de que su vector $\mathbf{b}(t)$ tiene que ser *constante* para cualquier valor de t . Entonces, el procedimiento va a ser el siguiente:

- Comprobar que estamos en parametrización natural (para aliviar cálculos).
- Calcular $\mathbf{b}(t)$ junto con el triedro de Frenet y probar que es constante.
- Hallar la ecuación del plano con el vector $\mathbf{b}(t)$.
- Calcular su radio de curvatura y ver que es constante.

En primer lugar, comprobamos que $\|\mathbf{x}'(t)\| = 1$ (parámetro natural):

$$\mathbf{x}'(t) = \left(-\frac{4}{5} \sin t, -\cos t, \frac{3}{5} \sin t \right)$$

$$\|\mathbf{x}'(t)\|^2 = \frac{16}{25} \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25} \sin^2 t = \sin^2 t + \cos^2 t \equiv 1 \odot$$

\Rightarrow Estamos en parametrización natural.

Ahora, calculamos los vectores del triedro de Frenet:

$$\dot{\mathbf{x}}(S) = \left(-\frac{4}{5} \sin S, -\cos S, \frac{3}{5} \sin S \right) \equiv \mathbf{t}(S)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(S) = \left(-\frac{4}{5} \cos S, \sin S, \frac{3}{5} \cos S \right)$$

$\Rightarrow K(S) = \|\ddot{\mathbf{x}}(S)\| = 1 = \rho(S)$ (el radio de curvatura es constante)

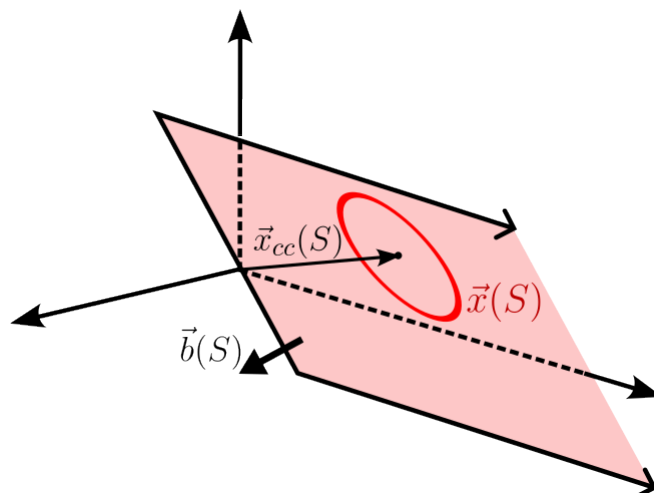
$$\Leftrightarrow \mathbf{b}(S) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(S) \wedge \ddot{\mathbf{x}}(S)}{\|\dot{\mathbf{x}}(S) \wedge \ddot{\mathbf{x}}(S)\|} = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right) \equiv \text{const.}$$

Es decir, que la curva es plana y su radio de curvatura es constante. Por tanto, se trata de una circunferencia. El centro de curvatura es el centro de esta circunferencia,

$$\mathbf{x}_{cc} = \mathbf{x}(S) + \frac{1}{K(S)} \underbrace{\mathbf{p}(S)}_{=\mathbf{b} \wedge \mathbf{t}} = \left(-\frac{4}{5} \cos S, \sin S, \frac{3}{5} \cos S \right)$$

La circunferencia vive en el plano *perpendicular* a $\mathbf{b}(S) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right)$. El plano tendrá por ecuación:

$$((x, y, z) - \overbrace{(0, 0, 0)}^{\in \mathbf{x}(S)}) \cdot \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \boxed{-3x + 4z = 0}$$



Ejercicios de tema 2

1 Sea S la superficie parametrizada $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$, ($0 < u$, $0 < v < 2\pi$), y sean C_1 y C_2 las curvas sobre S dadas por $(u(t), v(t)) = (t, t+1)$ y $(u(t), v(t)) = (t, 3-t)$, respectivamente. Calcule el ángulo que forman dichas curvas en el punto P en que se cortan sobre S :

- Encontrando parametrizaciones de las curvas en \mathbb{R}^3
- Operando en la base coordenada del plano $T_p(S)$ tangente a S en el punto P .

En primer lugar, podemos ver que la superficie determina un paraboloide de revolución: $x(u, v)^2 + y(u, v)^2 = u^2 = z(u, v)$. Las curvas C_1, C_2 dentro de este paraboloide se cortan en el punto de intersección, que cumple que:

$$C_1 \cap C_2 \begin{cases} C_1: (u, v) = (t, t+1) \\ C_2: (u, v) = (t^*, 3-t^*) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t = t^* \\ 1+t = 3-t^* \end{matrix} \Rightarrow t = t^* = 1 \iff P(1, 2)$$

Las curvas tienen por ecuación:

- $\mathbf{x}(\sigma_1(t)) = (t \cos(1+t), t \sin(1+t), t^2)$
 $\hookrightarrow \mathbf{x}'(\sigma_1(t)) = (\cos(1+t) - t \sin(1+t), \sin(1+t) + t \cos(1+t), 2t)$
 $\hookrightarrow \mathbf{x}'(\sigma_1(1)) = (\cos(2) - \sin(2), \sin(2) + \cos(2), 2)$
- $\mathbf{x}(\sigma_2(t)) = (t \cos(3-t), t \sin(3-t), t^2)$
 $\hookrightarrow \mathbf{x}'(\sigma_2(t)) = (\cos(3-t) + t \sin(3-t), \sin(3-t) - t \cos(3-t), 2t)$
 $\hookrightarrow \mathbf{x}'(\sigma_2(1)) = (\cos(2) + \sin(2), \sin(2) - \cos(2), 2)$

El coseno del ángulo formado entre las dos curvas se calcula como el del ángulo de los vectores velocidad de las curvas:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x}'(\sigma_1(1)) \cdot \mathbf{x}'(\sigma_2(1))}{\|\mathbf{x}'(\sigma_1(1))\| \cdot \|\mathbf{x}'(\sigma_2(1))\|}$$

Calculando los módulos y el producto escalar, se llega a que:

$\mathbf{x}'(\sigma_1(1)) \cdot \mathbf{x}'(\sigma_2(1)) = 4$, $\|\mathbf{x}'(\sigma_1(1))\|^2 = \|\mathbf{x}'(\sigma_2(1))\|^2 = 6$ y finalmente:

$$\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \arccos \frac{2}{3} = 48,2^\circ$$

Para calcular el ángulo con el plano $T_p(S)$, primero necesitaremos la base coordenada $\{\mathbf{x}_\alpha\} \equiv \{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$.

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 2u), \quad \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

En el punto $P(1, 2)$, el plano tangente viene definido por $\mathbf{x}_u(1, 2) = (\cos 2, \sin 2, 2)$, $\mathbf{x}_v(1, 2) = (-\sin 2, \cos 2, 0)$. La primera forma fundamental:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \longrightarrow g_{\mu\nu}(1, 2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El ángulo formado por dos vectores del plano $T_p(S)$, \mathbf{v} , \mathbf{w} , se calcula como:

$$\cos \theta = \frac{g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu} \sqrt{g_{\rho\sigma} w^\rho w^\sigma}}$$

con las coordenadas de \mathbf{v} y \mathbf{w} en la base de $T_p(S)$. En esta base, estas coordenadas son: $(v^\alpha) = (1, 1)$, $(w^\alpha) = (1, -1)$.

$$\cos \theta = \frac{5 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1)}{\sqrt{5 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1} \sqrt{5 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1)}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Es decir, $\theta = 48,2^\circ$.

-
- 3 a) Calcule la primera forma fundamental de la superficie parametrizada $\mathbf{x}(u^1, u^2) = (u^1 + u^2, u^1 - u^2, u^1 u^2)$.
- b) Utilizando la regla tensorial, calcule la primera forma fundamental al efectuar la reparametrización $u^1 = (\bar{u}^1 + \bar{u}^2)/2$, $u^2 = (\bar{u}^1 - \bar{u}^2)/2$.
- c) Compruebe el resultado calculando $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ y obteniendo la primera forma fundamental de esta reparametrización.

Ejercicios de tema 3

- 6] A partir del tensor de Riemann $R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma}$ se definen el tensor de Ricci: $R_{\nu\sigma} = R^\mu{}_{\nu\mu\sigma}$ y la curvatura escalar $R = R^\mu{}_\mu$. Sabiendo que en dimensión 2 (es decir, para una superficie) el tensor de Riemann se puede escribir como: $R_{\kappa\nu\lambda\sigma} = K(g_{\kappa\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\kappa\sigma}g_{\nu\lambda})$, donde K es la curvatura gaussiana, calcule:
- La forma del tensor de Ricci de una superficie
 - La curvatura escalar de una superficie
 - $R_{\kappa\nu\lambda\sigma}\epsilon^{\kappa\nu}\epsilon^{\lambda\sigma}$, donde $\epsilon^{\alpha\beta}$ es el tensor de Levi-Civita.

(a) Tensor de Ricci de una superficie:

$$\begin{aligned}
 R_{\nu\sigma} &= R^\mu{}_{\nu\mu\sigma} = g^{\mu\kappa}R_{\kappa\nu\mu\sigma} = g^{\mu\kappa}K(g_{\kappa\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\kappa\sigma}g_{\nu\lambda}) \\
 &= K[g^{\mu\kappa}g_{\kappa\lambda}g_{\nu\sigma} - g^{\mu\kappa}g_{\kappa\sigma}g_{\nu\lambda}] \\
 &= K[\delta^\mu{}_\lambda g_{\nu\sigma} - \delta^\mu{}_\sigma g_{\nu\lambda}] \\
 &= K[2g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}] \\
 &= \boxed{Kg_{\mu\sigma}}
 \end{aligned}$$