Enunciado:

En una de las escenas más famosas de la película *Gladiator*, la que recreaba la batalla de Zama, uno de los cartagineses, punto C de la figura, recorría el perímetro de la arena del coliseo – que asimilaremos aquí a un círculo de radio R –, con una velocidad $\vec{v}_C$ de módulo constante $|\vec{v}_C| = v_0$.

En la misma escena, el gladiador Máximo, – representado por el punto M de la figura –, intentaba alcanzar al carro para dar muerte a su auriga. En su estrategia, partiendo del centro O de la arena, momento en el que el carro se encontraba en el punto A de la figura, espoleaba a su caballo haciendo que éste se moviera con una velocidad $\vec{v}_M$ cuya magnitud, $|\vec{v}_M| = \lambda v_0$, mantenía constante a lo largo de toda la persecución, y siguiendo una curva Γ tal que, **en todo momento, el centro O del Coliseo, el carro C y el propio gladiador M permanecían alineados.**

Tomando como datos del problema los valores de R y v_0, y para un valor genérico de λ, determine en el triedro $Oxyz$ mostrado:

1. Las coordenadas polares $r_M(t)$ y $\theta_M(t)$ que describen la posición M del gladiador en función del tiempo t.
2. Valor mínimo, $\lambda_{\text{mín}}$, de λ para que el gladiador alcance al carro.
3. La ecuación implícita, $y_M = y_M(x_M)$, de la trayectoria del gladiador en coordenadas cartesianas. Identifique dicha trayectoria.
4. Para el valor de $\lambda = \sqrt{2}$, y en el instante t^* en el que el gladiador alcanza el carro, encuentre:
   a) El espacio recorrido por el gladiador $s_M(t^*)$ y por el carro $s_C(t^*)$.
   b) El área $A_M(t^*)$ descrita por el vector de posición del gladiador $\vec{r}^{\,M}(t)$ en el intervalo $[0, t^*]$.
   c) Las componentes intrínsecas $\vec{a}_T^M(t^*)$ y $\vec{a}_N^M(t^*)$ de la aceleración del gladiador.
   d) La velocidad relativa $\vec{v}_{21}^M(t^*)$ y la aceleración relativa $\vec{a}_{21}^M(t^*)$ del gladiador a un triedro de referencia S_1 fijo al carro y en el que el eje X_1 contiene a los puntos O y C.
5. Las ecuaciones horarias de la trayectoria de M en el triedro móvil S_1. Identifique la trayectoria del gladiador en este triedro.

NOTA: En la resolución del problema puede ser útil recordar que:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{B^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{B}\right)$$

1. En primer lugar, planteemos los datos que tenemos. El objetivo es obtener las coordenadas polares del gladiador M, que están relacionadas de alguna manera con las del carro, C. Sabemos que el gladiador siempre se mantiene alineado con el carro, que gira en movimiento circular uniforme. Por tanto, los vectores posición de ambos **deben ser proporcionales**. Esto es:

$$\vec{r}^{\,M}(t) = k\vec{r}^{\,C}(t) \tag{1}$$

donde $k = k(t)$ es una función del tiempo en general. Sabiendo que el carro parte inicialmente del punto $A(R, 0)$ y que se mueve en movimiento circular uniforme, el vector posición del carro en coordenadas cartesianas es:

$$\vec{r}^{\,C}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)) \qquad \omega \equiv \frac{v_0}{R}$$

Derivando la expresión (1) con respecto al tiempo, obtenemos la velocidad del gladiador.

$$\vec{v}^M(t) = \dot{\vec{r}}^{\,M}(t) = \dot{k}\vec{r}^{\,C}(t) + k\dot{\vec{r}}^{\,C}(t) = \dot{k}\vec{r}^{\,C}(t) + kR\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$$

Calculando el módulo al cuadrado, sabemos que debe ser constante e igual a:

$$|\vec{v}^M(t)|^2 = \dot{k}^2 R^2 + k^2 R^2 \omega^2 \equiv \lambda^2 v_0^2$$

Lo cual nos permite encontrar una ecuación diferencial para $k = k(t)$.

$$\dot{k}^2 + k^2\omega^2 = \lambda^2\omega^2 \tag{2}$$

Despejando $\dot{k}$ (sabiendo que $\dot{k} > 0$) y separando variables, llegamos a que:

$$\int \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} = \int \omega \, \mathrm{d}t$$

La primitiva de la función de la derecha es trivial, y la de la izquierda es exactamente la ayuda proporcionada; de manera que:

$$\arcsin\left(\frac{k}{\lambda}\right) = \omega t + \cancelto{0}{C}$$

donde la constante de integración C se anula ya que $k(t = 0) = 0$. Despejando finalmente para $k = k(t)$:

$$\boxed{k(t) = \lambda \sin(\omega t)}$$

Una vez conocida la expresión de $k(t)$, podemos hallar las coordenadas polares. En este caso,

$$\vec{r}^{\,M}(t) = r_M(t)\hat{e}_r = k(t)R\;\hat{e}_r \implies \boxed{r_M(t) = \lambda R \sin(\omega t)}$$

La velocidad del gladiador, en coordenadas polares, es:

$$\vec{v}^{\,M}(t) = \dot{r}_M \hat{e}_r + r_M \dot{\theta}_M \hat{e}_\theta$$

Tomando el módulo al cuadrado:

$$\begin{aligned} \lambda^2 v_0^2 = \dot{r}_M^2 + r_M^2\dot{\theta}_M^2 &= \lambda^2 R^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + \lambda^2 R^2 \sin^2(\omega t)\dot{\theta}_M^2 \\ &= \lambda^2 v_0^2 \cos^2(\omega t) + \lambda^2 R^2 \sin^2(\omega t)\dot{\theta}_M^2 \end{aligned}$$

y despejando para $\dot{\theta}_M^2$:

$$\begin{aligned} \lambda^2 v_0^2[1 - \cos^2(\omega t)] = \lambda^2 v_0^2 \sin^2(\omega t) &= \lambda^2 R^2 \sin^2(\omega t)\dot{\theta}_M^2 \\ \implies \dot{\theta}_M^2 &= \frac{v_0^2}{R^2} = \omega^2 \\ \implies \theta_M(t) &= \omega t + \cancelto{0}{\theta_0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{cases} r_M(t) = \lambda R \sin\left(\dfrac{v_0}{R}t\right) \\ \theta_M(t) = \dfrac{v_0}{R}t \end{cases}}$$

2. La condición a imponer para que el gladiador alcance al carro es que la coordenada radial del gladiador sea igual al radio de la trayectoria del carro. Es decir:

$$r_M(t^*) = R \implies \lambda \cancel{R} \sin(\omega t^*) = \cancel{R} \implies \lambda = \frac{1}{\sin(\omega t^*)}$$

Como el seno está acotado, el valor mínimo que puede alcanzar es de $\boxed{\lambda_{\text{mín}} = 1}$, para seno igual a 1.

3. Conociendo las coordenadas cartesianas $x_M(t), y_M(t)$, podemos obtener la relación $y_M(x_M)$. Partiendo de x e y:

$$\begin{cases} x(t) = \lambda R \sin(\omega t)\cos(\omega t) \implies x^2(t) = \lambda^2 R^2 \sin^2(\omega t)\left[1 - \sin^2(\omega t)\right] \\ y(t) = \lambda R \sin^2(\omega t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^2(t) = \lambda R y(t) - y^2(t)$$
$$\Longrightarrow \boxed{y^2(t) - \lambda R y(t) + x^2(t) = 0}$$

Esta es una ecuación de segundo grado para $y(t)$, y las soluciones dependerán de $x(t)$. Al tratarse de una ecuación de segundo grado, podemos deducir que se trata de una **circunferencia**. De hecho, si completamos el cuadrado para y:

$$y^2 - \lambda R y + x^2 = y^2 - \lambda R y + \frac{1}{4}\lambda^2 R^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 R^2 + x^2 = 0$$
$$= \boxed{\left(y - \frac{\lambda R}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4}\lambda^2 R^2}$$

que es la ecuación de una circunferencia centrada en el punto $\left(0, \frac{\lambda R}{2}\right)$ y de radio $\frac{\lambda R}{2}$. La ecuación explícita para esta circunferencia se obtiene resolviendo la ecuación de segundo grado.

$$\boxed{y_M(x_M) = \frac{\lambda R}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{x_M}{\lambda R}\right)^2}}$$

4. Para $\lambda = \sqrt{2}\ (> 1)$, el gladiador interceptará al carro en el tiempo $t^* = (1/\omega)\arcsin\big(1/\sqrt{2}\big) = \frac{\pi}{4\omega}$.

   a) El espacio recorrido por el carro hasta el tiempo t^* será la fracción de la circunferencia determinada por el ángulo ωt^*.

   $$s_C(t^*) = 2\pi R \times \frac{\omega t^*}{2\pi} = R\omega t^* = v_0 t^* = \boxed{\frac{\pi R}{4}}$$

   Como en $t^* = \pi/(4\omega)$ el gladiador recorre un cuarto de su circunferencia completa, el espacio recorrido será

   $$2\pi \times \frac{\lambda R}{2 \times 4} = \boxed{\pi R\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

   b) El área $A_M(t^*)$ se calcula como el área debajo de la trayectoria descrita por M hasta el punto de interceptación. En este caso, corresponde al área de un cuadrado de lado $\lambda R/2$ menos un cuarto de circunferencia de radio igual al lado del cuadrado. Es decir:

   $$\frac{\lambda^2 R^2}{4} - \pi\frac{\lambda^2 R^2}{16} = \boxed{\frac{R^2}{8}(4 - \pi)}$$

   c) Las componentes intrínsecas de la aceleración son la descomposición del vector $\vec{a}^M(t)$ en componente radial (o normal) y componente angular (o tangencial).

   $$\vec{a}^M(t) = a_T^M(t)\vec{T} + a_N^M(t)\vec{N}$$

   Si se deriva la expresión de la velocidad en coordenadas polares del gladiador, se llega a esto mismo.

   $$\vec{a}^M(t) = (\ddot{r}_M + r_M\dot{\theta}_M)\hat{e}_r + (2\dot{r}_M\dot{\theta}_M + \cancelto{0}{r_M\ddot{\theta}_M})\hat{e}_\theta$$

   Usando las expresiones obtenidas para las coordenadas polares y evaluando en t^*, se llega a lo siguiente

   $$\boxed{\begin{cases} \vec{a}_T^M(t^*) = \vec{0} \\ \vec{a}_N^M(t^*) = 2\dfrac{v_0^2}{R}\hat{e}_\theta \end{cases}}$$

   d)