1 质点运动学

角速度 ω

角加速度 α

切向加速度 $\vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{e_t}$

法向加速度 $\vec{a_n} = v\frac{d\vec{e_t}}{dt} = v\frac{d\Theta}{dt}\vec{e_n} = v\omega\vec{e_n}$

径向速度 $v_r = \frac{d\vec{v}}{dt}$

曲率半径计算 $r = \frac{V^2}{a_n}$

2 牛顿定律

动量 $\vec{p} = m\vec{v}$
牛顿第一定律 惯性定律
牛顿第二定律 $F = \frac{d\vec{p}}{dt}$
牛顿第三定律 作用力与反作用力

2.1 几种常见的力

弹性力 F_N
摩擦力 $F = \mu F_N$

2.1.1 万有引力

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 \to m_2}{r^2}\vec{e_r}$$

$$dW = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr \Rightarrow W = \int_A^B dW = Gm_1m_2(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}) \Rightarrow E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

2.1.2 弹力

$$F = -kx$$

$$dW = -kxdr \Rightarrow W = \int_A^B dW = -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2) \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

3　动量

冲量 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \vec{p_2} - \vec{p_1}$

动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} F^{ex} dt = \vec{p} - \vec{p_0}$$

动量守恒定理 质点系没有受外力, 动量守恒, $\vec{P} = \sum m\vec{v}$

4 动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

元功 $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = mvdv$

功率 $P = \frac{dW}{dt}$

保守力 做功与路径无关

非保守力 做功与路径有关 (摩擦力)

动能定理 $W = E_{k2} - E_{k1}$

机械能守恒定理 $\sum E_{ki} + \sum E_{p_i} = \sum E_{k0} + \sum E_{p_0}$

5 静电场

- $e = 1.602 \times 10^{-19} C$
- $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$
- $1eV = 1.602 * 10^{-19} J$

电场强度 $E = \frac{F}{q_0}$
电场强度通量（电通量） $\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S}$
电势差 $U_{A \to B} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$
电势 $V_A = U_{Al_0}$, l_0 为零势能面
电势能 $E_{pA} = q_0 \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}\,(E_{pB} = 0)$
库伦定理 $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \Rightarrow q_2}{r^2} \vec{e_r}$
高斯定理 $\phi = \oint_S E \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$

5.1 常见带电物体

1. 点电荷

   电场强度 $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e_r}$
   电势 $V = \int_A^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$

2. 球面

   电场强度 $E = \begin{cases} 0 & r \leqslant R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} & r > R \end{cases}$
   电势 $V = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} & r \leqslant R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R \end{cases}$

   例 5.1.1 半径为 R, 均匀带电为 Q 的球面, 求电场强度, 球内任意两点电势差, 球外任意两点电势差, 球内任意点电势, 球外任意点电势
   解

   1. 电场强度

      以 r 为半径作一球面 O,

      当 $r \leqslant R$ **时**, O 内 $\sum q = 0$, $E \times 4\pi r^2 = 0$

      当 $r > R$ **时**, O 内 $\sum q = Q$, $E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

2. 球内两点电势差

$$E = 0 \Rightarrow U_{AB} = 0$$

3. 球外两点电势差

$$U_{AB} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B})$$

4. 球外任意点电势

$$V(r) = U_{r\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

5. 球内任意点电势

$$V(r) = V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

3. 无限均匀带电直线

电场强度 $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}$
电势 $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda ln\frac{r_B}{r}$

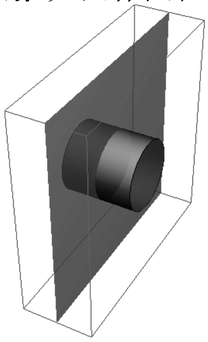
例 5.1.2 无限长均匀带电直线, 电荷线密度为 λ
解 作半径为 r, 高为 h 的圆柱面

$$E \times 2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

4. 无限均匀带电平面

电场强度 $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

例 5.1.3 无限长均匀带电平面, 电荷面密度为 σ
解 如图作圆柱体



(前后两个圆面) 电场强度通量为 $E \times 2\pi r^2$，所包含的电量 $\sigma \times \pi r^2$

可得 $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

6 静电场中的导体与电介质

6.1 静电平衡条件

电荷 导体内没有电荷作用定向运动

电场强度 满足以下两个条件

- 导体内部任何一点处的电场强度为 0
- 导体表面处电场强度方向都与导体表面垂直

电势 导体内任意两点间的电势相等

6.2 静电平衡时导体上的电荷分布

- 实心导体电荷只分布在导体表面上
- 带空腔的导体电荷只分布在外表面上
- 带电导体表面曲率半径较小处的附近的电场要强一些

6.3 静电屏蔽

- 空腔导体屏蔽外电场
- 接地空腔导体屏蔽内电场

6.4 电介质中的高斯定理

极化电荷密度 σ'

电极化密度 $\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\vec{E}$

两平板间 $P = \sigma'$

电位移 $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

电介质中的高斯定理 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_0$

例 2

图 6-16 是由半径为 R_1 的长直圆柱导体和同轴的半径为 R_2 的薄导体圆筒组成，并在直导体与导体圆筒之间充以相对电容率为 ε_r 的电介质. 设直导体和圆筒单位长度上的电荷分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$. 求：(1) 电介质中的电场强度、电位移和极化强度；(2) 电介质内、外表面的极化电荷面密度.

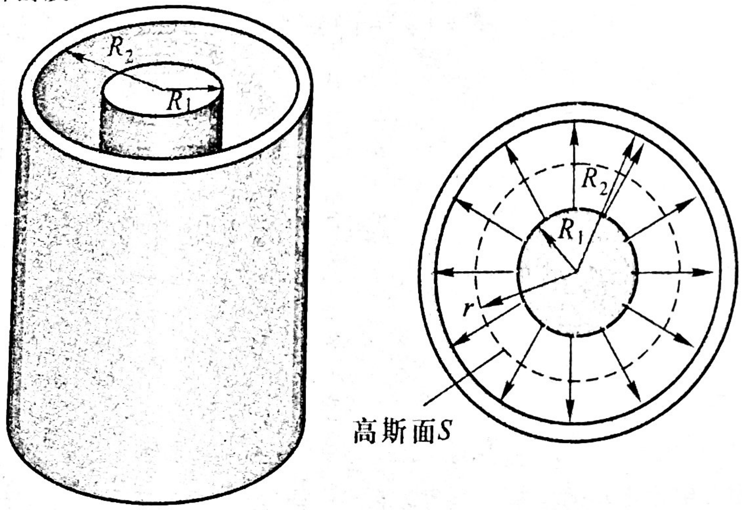


图 6-16

解 (1) 由于电荷分布是均匀对称的，所以电介质中的电场也是柱对称的，电场强度的方向沿柱面的径矢方向. 作一与圆柱导体同轴的柱形高斯面，其半径为 $r(R_1<r<R_2)$、长为 l. 因为电介质中的电位移 $\boldsymbol{D}$ 与柱形高斯面的两底面的法线垂直，所以通过这两底面的电位移通量为零. 根据电介质中的高斯定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\lambda l,\quad 即\ D\cdot 2\pi r l=\lambda l$$

得

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r} \tag{1}$$

由 $E=D/\varepsilon_0\varepsilon_r$，得电介质中的电场强度为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\quad (R_1<r<R_2) \tag{2}$$

电介质中的极化强度为

$$P=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E=\frac{\varepsilon_r-1}{2\pi\varepsilon_r r}\lambda$$

或将式(1)和式(2)代入 $P=D-\varepsilon_0 E$，也可以得到相同的结果。

(2) 由式(2)可知电介质两表面处的电场强度分别为

$$E_1=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1}\quad (r=R_1)$$

和

$$E_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2}\quad (r=R_2)$$

所以，电介质两表面极化电荷面密度的值分别为

$$-\sigma'_1=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E_1=(\varepsilon_r-1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_1}$$

$$\sigma'_2=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E_2=(\varepsilon_r-1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_2}$$

6.5 电容

孤立导体电容 $C=\frac{Q}{V}$
电容器（两导体） $C=\frac{Q}{U}$
平板电容器 $C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$

7 恒定磁场

毕奥-萨伐尔定律 $d\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{I}d\vec{l}\times\vec{e_r}}{r^2}$
磁矩 $\vec{m}=IS\vec{e_n}$
磁通量 $\vec{\Phi}=\vec{B}\cdot\vec{S}$

7.1 常见带电物体周围磁场

无限长直导线 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$

例 1

载流长直导线的磁场. 在真空中有一通有电流 I 的长直导线 CD,试求此长直导线附近任意一点 P 处的磁感强度 $\boldsymbol{B}$. 已知点 P 与长直导线间的垂直距离为 r_0.

解 选取如图 7-12 所示的坐标系,其中 Oy 轴通过点 P,Oz 轴沿载流直导线 CD. 在载流长直导线上取一电流元 $I\mathrm{d}z$,根据毕奥-萨伐尔定律,此电流元在点 P 所激起的磁感强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}z\sin\theta}{r^2}$$

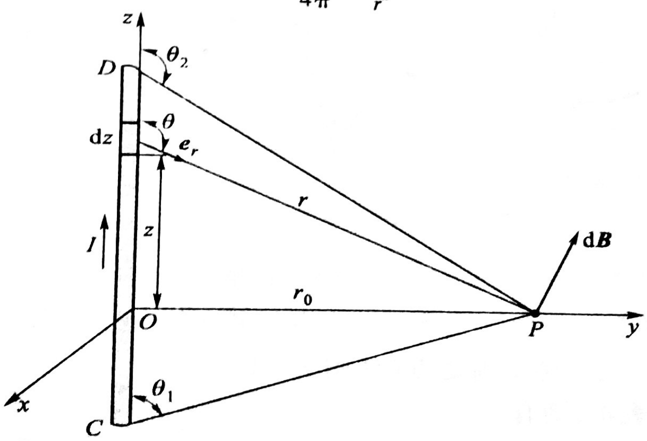


图 7-12

式中 θ 为电流元 $I\mathrm{d}z$ 与位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角. $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于 $I\mathrm{d}z$ 与 $\boldsymbol{r}$ 所组成的平面（即 yOz 平面），沿 Ox 负轴方向. 从图中可以看出，直导线上各个电流元的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向都相同. 因此点 P 的磁感强度的大小就等于各个电流元的磁感强度之和，用积分表示，有

$$B=\int \mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{CD}\frac{I\mathrm{d}z\sin\theta}{r^2}$$

从图 7-12 可以看出 z、r 和 θ 之间有如下关系：

$$z=-r_0\cot\theta,\quad r=r_0/\sin\theta$$

于是，$\mathrm{d}z=r_0\mathrm{d}\theta/\sin^2\theta$，因而上式可写成

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

θ_1 和 θ_2 分别是直电流的始点 C 和终点 D 处电流流向与该处到点 P 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 间的夹角（图 7-12）. 由上式的积分得

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2) \tag{1}$$

若载流直导线可视为“无限长”直导线，那么，可近似取 $\theta_1=0,\theta_2=\pi$. 这样由上式可得

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \tag{2}$$

这就是“无限长”载流直导线附近的磁感强度. 它表明，其磁感强度与电流 I 成正比，与场点到导线的垂直距离成反比. 可以指出，上述结论与毕奥-萨伐尔早期的实验结果是一致的.

圆环流 $B=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

例 2

圆形载流导线轴线上的磁场. 设在真空中，有一半径为 R 的载流导线，通过的电流为 I，通常称为圆电流. 试求通过圆心并垂直于圆形导线平面的轴线上任意点 P 处的磁感强度.

解 选取如图 7-13 所示的坐标系，其中 Ox 轴通过圆心 O，并垂直圆形导线的平面.

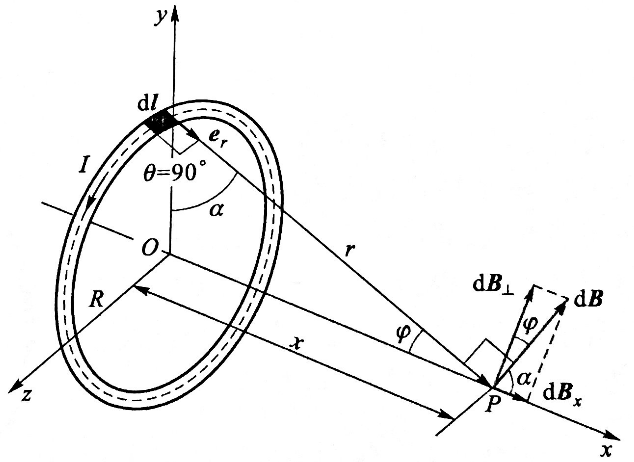


图 7-13

在圆上任取一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，这电流元到点 P 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，它在点 P 所激起的磁感强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$$

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 垂直，所以 $\theta=90°$，$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的值为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}$$

而 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 所组成的平面，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 与 Ox 轴的夹角为 α. 因此，我们可以把 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 分解成两个分量：一是沿 Ox 轴的分量 $\mathrm{d}B_x=\mathrm{d}B\cos\alpha$；另一是垂直于 Ox 轴的分量 $\mathrm{d}B_\perp=\mathrm{d}B\sin\alpha$. 考虑到圆上任一直径两端的电流元对 Ox 轴的对称性，故所有电流元在点 P 处的磁感强度的分量 $\mathrm{d}B_\perp$ 的总和应等于零. 所以，点 P 处磁感强度的数值为

$$B=\int_l \mathrm{d}B_x=\int_l \mathrm{d}B\cos\alpha=\int_l \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}\cos\alpha$$

由于 $\cos\alpha=R/r$，且对给定点 P 来说，r、I 和 R 都是常量，有

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{r^3}=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{(R^2+x^2)^{3/2}} \tag{1}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于圆形导线平面沿 Ox 轴正向.

由式(1)可以看出，当 $x=0$ 时，则圆心点 O 处的磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的数值为

$$\boxed{B=\frac{\mu_0}{2}\frac{I}{R}} \tag{2}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于圆形导线平面，沿 Ox 轴正向.

若 $x\gg R$，即场点 P 在远离原点 O 的 Ox 轴上，则 $(R^2+x^2)^{3/2}\approx x^3$. 由式(1)可得

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}$$

圆电流的面积为 $S=\pi R^2$，上式可写成

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{x^3} \tag{3}$$

无限长螺线管 $B=\mu_0 nI$

例 3

载流直螺线管内部的磁场. 如图 7-15 所示，有一长为 l，半径为 R 的载流密绕直螺线管. 螺线管的总匝数为 N，通有电流 I. 设把螺线管放在真空中，求管内轴线上一点处的磁感强度.

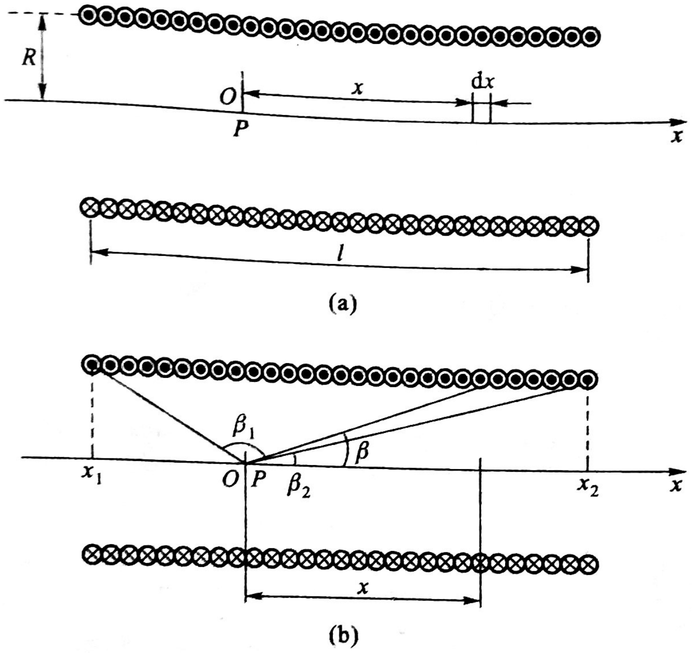


图 7-15

解 由于直螺线管上线圈是密绕的，所以每匝线圈可近似当作闭合的圆形电流. 于是，轴线上任意点 P 处的磁感强度 $\boldsymbol{B}$，可以认为是 N 个圆电流在该点各自激发的磁感强度的叠加. 现取图 7-15(a) 中轴线上的点 P 为坐标原点 O，并以轴线为 Ox 轴. 在螺线管上取长为 $\mathrm{d}x$ 的一小段，匝数为 $\frac{N}{l}\mathrm{d}x$，其中 $\frac{N}{l}=n$ 为单位长度上的匝数. 这一小段载流线圈相当于通有电流为 $In\mathrm{d}x$ 的圆形线圈. 利用例 2 中的式(1)，可得它们在 Ox 轴上点 P 处的磁感强度 $\mathrm{d}B$ 的值为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 In\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \tag{1}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向沿 Ox 轴正向. 考虑到螺线管上各小段载流线圈在 Ox 轴上点 P 所激发的磁感强度的方向相同，均沿 Ox 轴正向，所以整个载流螺线管在点 P 处的磁感强度为

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 nI}{2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{R^2\,\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \tag{2}$$

为便于积分，用角变量 β 替换 x，β 为点 P 到小段线圈的连线与 Ox 轴之间的夹角. 从图 7-15(b) 可以看出

$$x = R\cot\beta,\quad (R^2+x^2) = R^2(1+\cot^2\beta) = R^2\csc^2\beta$$

及

$$\mathrm{d}x = -R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$$

把它们代入式(2)，得

$$B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{R^3\csc^2\beta\mathrm{d}\beta}{R^3\csc^3\beta} = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\mathrm{d}\beta$$

积分有

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1) \tag{3}$$

β_1 和 β_2 的几何意义见图 7-15(b).

下面讨论几种特殊情况.

(1) 如点 P 处于管内轴线上的中点，在这种情况下，$\beta_1 = \pi - \beta_2$，$\cos\beta_1 = -\cos\beta_2$，而 $\cos\beta_2 = \dfrac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+R^2}}$. 由式(3)可得

$$B = \mu_0 nI\cos\beta_2 = \frac{\mu_0 nI}{2}\frac{l}{(l^2/4+R^2)^{1/2}}$$

若 $l \gg R$，即很细而很长的螺线管可看作是无限长的，由上式可得管内轴线上中点处的磁感强度的值为

$$B = \mu_0 nI$$

上述结果还可以由式(3)直接得到. 对“无限长”的螺线管来说，可以取 $\beta_1 = \pi$ 及 $\beta_2 = 0$，代入式(3)，亦得

$$\boxed{B = \mu_0 nI} \tag{4}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向沿 Ox 轴正向.

(2) 如点 P 处于半“无限长”载流螺线管的一端，则 $\beta_1 = \dfrac{\pi}{2}$，$\beta_2 = 0$，或 $\beta_1 = \pi$，$\beta_2 = \pi/2$，由式(3)可得螺线管两端的磁感强度的值均为

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI \tag{5}$$

比较上述结果可以看出，半“无限长”螺线管轴线上端点的磁感强度只有管内轴线中点磁感强度的一半.

图 7-16 给出了长直螺线管内轴线上磁感强度的分布. 从图 7-16 可以看出，密绕载流长直螺线管内轴线中部附近的磁场可以视作均匀磁场.

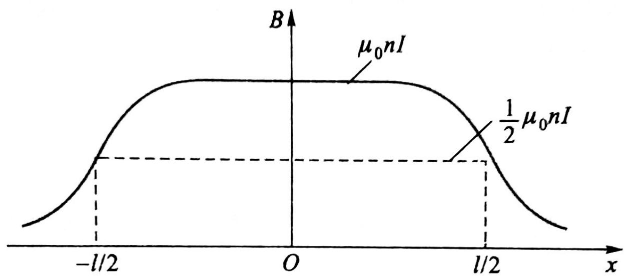


图 7-16

索引