1 向量代数与空间解析几何

1.1 向量基本概念

数量积 $\vec{u}\cdot\vec{v}=|u||v|cos\ \theta$

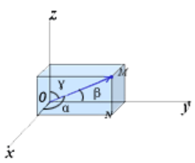
向量积 $\vec{a}\times\vec{b}=(a,b,c)\times(d,e,f)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=|\vec{a}||\vec{b}|sin\ \theta$

混合积 (平行六面体体积) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$

证明三线共面 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$

$\vec{r}$ **在** $\vec{c}$ **上的投影** $Prj_{\vec{c}}\vec{r}$

向量余弦 对于向量 $\vec{a}(a_x,a_y,a_z)$, 方向余弦为 $\begin{cases}cos\ \alpha=\dfrac{a_x}{|a|}\\cos\ \beta=\dfrac{a_y}{|a|}\\cos\ \gamma=\dfrac{a_z}{|a|}\end{cases}$



1.2 空间曲面与空间曲线

曲面方程 $F(x,y,z)=0$

曲线方程 两曲面交线: $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

1.2.1 平面方程

点法式方程 平面有法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$, 且经过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$

截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, a, b, c 为平面在 x, y, z 轴上的截距

1.3 空间直线方程

一般方程 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

方向方程, 对称式方程, 点向式方程 直线有方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$, 且经过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 直线方程为 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

参数方程 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

例 1.3.1 用对称式方程与参数方程表示 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$

解 两平面法向量分别为 $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,-1,3)$, 直线方向向量为

$$s=\vec{u}\times\vec{v}=(4,-1,-3)$$

在方程组中任取一点 $(1,0,-2)$, 可得对称式方程

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}$$

令 $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-3}=t$, 得参数方程:

$$\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$$

1.3.1 夹角

直线与直线夹角 $cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
直线与平面夹角 $sin\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n_{法}}|}{|\vec{u}||\vec{n_{法}}|}$
平面与平面夹角 $cos\varphi = \frac{|\vec{u_{法}}\cdot\vec{v_{法}}|}{|\vec{u_{法}}||\vec{v_{法}}|}$

1.3.2 平面束方程

平面束 通过定直线的所有平面的全体

对于直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

平面束方程为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

例 1.3.2 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$, 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程

解 过直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 的平面束方程为:

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$$
$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$

两平面垂直, 即 $(1+\lambda)(1)+(1-\lambda)(1)+(-1+\lambda)(1)=0 \Rightarrow \lambda=-1$

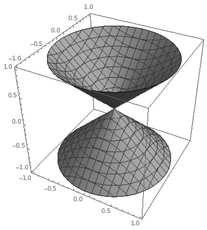
代入平面束方程得: $y-z-1=0$

所有投影直线方程为

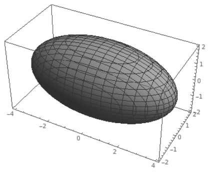
$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

1.4 空间曲面方程 (二次曲面)

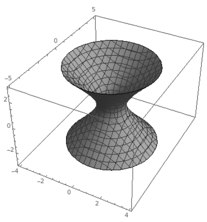
1. **椭圆锥面** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$



2. **椭球面** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

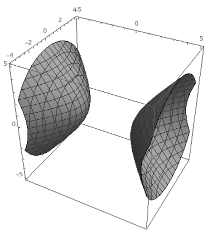


3. **单叶双曲线** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



旋转单叶双曲面 $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

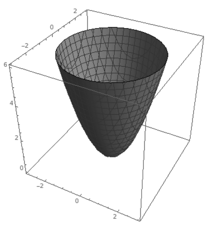
4. **双叶双曲线** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



旋转双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1$

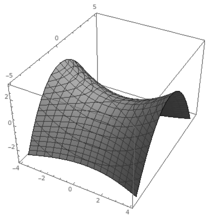
5. **椭圆抛物面** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

抛物线绕 z 轴旋转



旋转抛物面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}=z$

6. **双曲抛物面** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$



形成原理见 P44

7. **椭圆柱面** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

8. **双曲柱面** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

9. **抛物柱面** $x^2=ay$

1.4.1 曲面参数方程

$$\begin{cases} x=x(s,t) \\ y=y(s,t) \\ z=z(s,t) \end{cases}$$

对于空间曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ 绕 z 轴旋转得旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{\varphi(t)^2+\psi(t)^2}sin\ \theta \\ y=\sqrt{\varphi(t)^2+\psi(t)^2}sin\ \theta \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

球面 由 zOx 上的半圆周 $\begin{cases} x=asin\ \varphi \\ y=0 \\ z=zcos\ \varphi \end{cases},0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 绕 z 轴旋转所得

$$\begin{cases} x=asin\ \varphi cos\ \theta \\ y=asin\ \varphi sin\ \theta \\ z=acos\ \varphi \end{cases},0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

1.5 空间曲线方程

一般方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

1.5.1 空间曲线在座标面上的投影

例 1.5.1 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 在 xOy 轴上的投影

解 首先消去 z 轴

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases} \Rightarrow y+z=1$$

代入任一方程中得

$$x^2+2y^2-2y=0$$

得到投影方程为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

2 多元函数微分

2.1 多元函数的基本概念

2.1.1 平面点集

2.1.1.1 邻域

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}$$

去心邻域 $\mathring{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}$

领域描述点与点集关系 (图2.1)

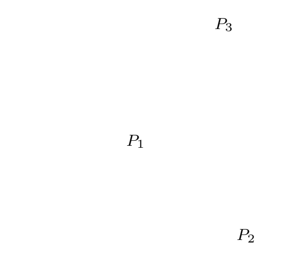
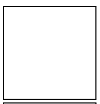
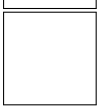


图 2.1: 点与点集关系

- 内点: P_1
- 外点: P_2
- 边界点: P_3
- 聚点: $\forall \delta > 0, \mathring{U}(P_0, \delta)$内有$E$中点

2.1.1.2 平面点集合分类

- 开集: 
- 闭集: 

- 连通集: 不是连通集
  - 区域 (开区域): 连通开集
  - 闭区域: 连通闭集
- 有界集
- 无界集

2.1.2 多元函数概念

极限 $P_0(x_0, y_0)$是D的聚点 $\exists A\ \forall\varepsilon\ P \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)\ |f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \delta$

连续 $P_0(x_0, y_0)$是D的聚点 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

- 间断点

有界连续多元函数点性质

- 具有最大最小值
- 介值定理
- 一致连续性: 各个二维切面上都连续

2.2 偏导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = f_x(x_0, y_0)$$

计算方法 把其他自变量看做常数

定理 2.2.1. 高阶混合偏导数在其连续的条件下与求导次序无关

2.3 全微分

偏增量和偏微分

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \approx f_x(x, y)\Delta x$$

左端是对 x偏增量, 右端是对 x偏微分

全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

可微与全微分 全方向切线在同一平面

若全增量 Δz 可表示为: $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ 其中 A, B 仅与 x, y 有关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 那么称 $z = f(x,y)$ 在 (x,y)可微分
$dz = A\Delta x + B\Delta y$ 为 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 的全微分

(全) 可微与 (偏) 可导的关系

$$\begin{aligned}&\text{可微} \Rightarrow \text{可导}\\&\text{可微} \Leftarrow \text{可导且导函数连续}\\&\text{可微} \Rightarrow \text{连续}\end{aligned}$$

定理 2.3.1 (可微一定可导)**.** 如果 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微, 那么该函数在点 (x,y) 点偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 必定存在, 且全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial x}dy$$

又称叠加原理

定理 2.3.2 (可导不一定可微)**.** 函数 $z = f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续, 那么该函数在该点可微分

2.3.1 全微分近似计算

例 2.3.1 求 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值
解 $f(x,y) = x^y$, $x = 1, y = 2, \Delta x = 0.04, \Delta y = 0.02$, $(1.04)^{2.02} \approx 1 + f_x(1,2) \times 0.04 + f_y(1,2) \times 0.02 = 1.08$

2.4 多元复合函数求导法则

2.4.1 通用复合

对于 $z = f(u,v)$, $u = \phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

例 2.4.1 $z = f(x+y, xy)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1^{'} + f_2^{'} y$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{11}^{''} + f_{12}^{''} x + f_2^{'} + y(f_{21}^{''} + f_{22}^{''} x)$$

2.4.2 全微分形式不变性质

对于 $z = f(u, v)$, $u = \phi(x, y)$, $v = \Psi(x, y)$, 且这两个函数具有连续偏导数

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \end{aligned}$$

例 2.4.2 设 $z = e^u sin\ v$, $u = xy$, $v = x + y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$
解

$$\begin{aligned} dz &= d(e^u sin\ v) \\ &= e^u sin\ vdu + e^u cos\ vdv \\ &= e^u sin\ vd(xy) + e^u cos\ vd(x+y) \\ &= e^u sin\ v(ydx + xdy) + e^u cos\ v(dx + dy) \end{aligned}$$

2.5 隐函数求导法

2.5.1 一个方程

对于 $F(x, y, z) = 0$ 若函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一领域内具有连续偏导数

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

2.5.2 方程组

对于 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$, 四个变量中一般只能有两个个变量独立变化, 因此可确定两个二元函数 $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases}$, 应用通用复合则对两边对 x 求导可得 $\begin{cases} F_x+F_u\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ G_x+G_u\frac{\partial u}{\partial x}+G_v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} \end{cases}$

定义 2.5.1 (雅可比行列式).

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

2.6 多元函数微分学的几何应用

2.6.1 一元向量值函数及其导数 (导向量)

2.6.2 空间曲线的切线和法平面

对于空间曲线 $\Gamma=\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ 切向量为

$$T=\begin{pmatrix} \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) & \omega'(t_0) \end{pmatrix}$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

例 2.6.1 对于空间曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 求切线与法平面

解 将 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 看作

$$\begin{cases} F(x,y(x),z(x))=0 \\ G(x,y(x),z(x))=0 \end{cases}$$

对两边求全导数得

$$\begin{cases} F_x + F_y\dfrac{\partial y}{\partial x} + F_z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_y\dfrac{\partial y}{\partial x} + G_z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

应用2.5.2可得到

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dx} & \dfrac{dy}{dx} & \dfrac{dz}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} & -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)} \end{pmatrix}, J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$$

乘 J 可得切向量

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} & \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} & \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \end{pmatrix}$$

由此可得切线方程和法平面

2.6.3 曲面的切平面与法线

对于隐式确定的曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 法向量为

$$n = (F_x, F_y, F_z)$$

切平面与法线参考空间曲线的切线和法平面

2.7 方向导数与梯度

2.7.1 方向导数

若 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分, 那么函数在该点沿任一方向 l 的方向导数存在

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x\ cos\ \alpha + f_y\ cos\ \beta$$

$cos\ \alpha$ 和 $cos\ \beta$ 是方向 l 的方向余弦, $(cos\ \alpha, cos\ \beta)$ 为 l 的单位向量

例 2.7.1 求 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 从 $P(1,0)$ 到 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数
解 方向为 $\vec{PQ} = (1,1)$, $\vec{e_l} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,0)} = 1, \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,0)} = 2$$

所以方向导数为 $\frac{\partial z}{\partial l}\big|_{(1,0)} = 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.7.2 梯度

对于 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度为

$$grad\ f = \nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j}$$

如果 f 在该点可微分, 那么

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}\bigg|_{(x_0,y_0)} &= f_x\ cos\ \alpha + f_y\ cos\ \beta \\ &= grad\ f \cdot \vec{e_l} = |grad\ f|\ cos\ \theta\end{aligned}$$

其中 θ 为 $grad\ f$ 与 $\vec{e_l}$ 的夹角

由上式可得

$\theta = 0$ 方向导数取最大值
$\theta = \pi$ 方向导数取最小值
$\theta = \frac{\pi}{2}$ 方向导数取 0

2.8 多元函数的极值及其求法

2.8.1 无条件极值

若 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某领域内连续且有一阶及二阶连续偏导数, 又 $f_x(x_0,y_0) = 0$, $f_y(x_0,y_0) = 0$, 令

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0,y_0) = A \\ f_{xy}(x_0,y_0) = B \\ f_{yy}(x_0,y_0) = C \end{cases}$$

则取得极值条件如下:

- $AC - B^2 > 0$ 时具有极值, 且当 $A < 0$ 时有极大值, $A > 0$ 时有极小值
- $AC - B^2 < 0$ 时没有极值
- $AC - B^2 = 0$ 时不能确定

2.8.2 条件极值拉格朗日乘数法

对于函数 $z = f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的可能极值点, 作拉格朗日函数

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = 0$$

求解方程组

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

解得 (x,y) 即可能极值点

可扩展为三维形式

3 重积分

3.1 二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$$

3.1.1 换元法

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv$$

其中 $J(u,v)$ 为雅可比式 $J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

极座标 $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\rho cos\ \theta, \rho sin\ \theta)\rho d\rho d\theta$

3.2 三重积分

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$$

3.3 重积分的应用

3.3.1 曲面的面积

对于曲面 $z = f(x,y)$ 面积可写为

$$A = \iint\limits_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}d\sigma$$

3.3.2 质心

对于面密度为 $\mu(x,y)$ 的薄片, 质心为

$$(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{\iint_D x\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma}, \frac{\iint_D y\mu(x,y)d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)d\sigma})$$

若密度均匀

$$(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{\iint_D xd\sigma}{A}, \frac{\iint_D yd\sigma}{A})$$

$A = \iint_D d\sigma$ 为面积

4 曲线积分与曲面积分

4.1 曲线积分

4.1.1 第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）

$$\int_L f(x,y,z)ds$$

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$,$(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 时, $\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

对于显函数也可以是:

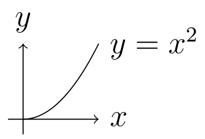
$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$$

典型例子 不均匀密度线质量

4.1.2 第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

$$\begin{aligned} \int_L \vec{A}(x,y)\cdot d\vec{r} &= \int_L Pdx+Qdy+Rdz \\ &= \int_L P(x(t),y(t),z(t))x^{'}(t)dt+\dots \end{aligned}$$

例 4.1.1 计算 $\int_L 2xydx + x^2dy$, 其中 L 为



解 $\int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1(2x\cdot x^2 + x^2\cdot 2x)dx = 1$

例 4.1.2 计算 $\int_\Gamma x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz$, 其中 Λ 是从点 $A(3,2,1)$ 到 $B(0,0,0)$ 的直线段 AB

解 直线 AB 方程为 $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$, 即 $\begin{cases} x=3t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$, t 从 1 到 0, 所以

$$
\begin{aligned}
&\int_\Gamma x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz \\
= &\int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t]dt \\
= &87\int_1^0 t^3dt \\
= &-\frac{87}{4}
\end{aligned}
$$

典型例子 变力沿曲线

4.1.2.1 与第一类曲线积分相互转换

$$
\int_\Gamma \vec{A} \cdot \underline{d\vec{r}} = \int_\Gamma \vec{A} \cdot \underline{\vec{r}ds}
$$

$$
\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)ds
$$

注意: 切向量方向余弦求法

4.1.3 格林公式

正向 沿曲线方向左侧为曲线围成区域 D

与牛顿-莱布尼兹公式相对应

平面闭区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分关系

定理 4.1.1. 格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$
\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy
$$

复连通区域右侧应包含所有曲线

定理 4.1.2. 单连通域内, 若 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 则曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在区域内与积分路径无关, 且 $Pdx+Qdy$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分

例 4.1.3 $\int_{(0,0)}^{(a,b)} xe^{x^2+y^2}dx+ye^{x^2+y^2}dy$
解 令 $P=xe^{x^2+y^2}$, $Q=ye^{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xye^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2xye^{x^2+y^2}$$

所以在实数域内与曲线路径无关

取路径 $(0,0)\to(a,0)\to(a,b)$

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(a,b)} xe^{x^2+y^2}dx+ye^{x^2+y^2}dy &= \int_{(0,0)}^{(a,0)} xe^{x^2+y^2}dx+ye^{x^2+y^2}dy+\int_{(a,0)}^{(a,b)} xe^{x^2+y^2}dx+ye^{x^2+y^2}dy\\ &= \int_0^a xe^{x^2}dx+\int_0^b ye^{a^2+y^2}dy\\ &= \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^a+\frac{1}{2}e^{a^2+y^2}\Big|_0^b\\ &= \frac{1}{2}(-1+e^{a^2})\end{aligned}$$

例 4.1.4 $xe^{x^2+y^2}dx+ye^{x^2+y^2}dy$ 是否是某个函数全微分
解 令 $P=xe^{x^2+y^2}$, $Q=ye^{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xye^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2xye^{x^2+y^2}$$

所以是

4.1.3.1 特殊情况

例 4.1.5 对于 L : 包含原点的正向闭合曲线, 求 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}ds$
解 因为包含原点, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 存在不存在的情况. 作与顺时针 $x^2+y^2=r^2$ 曲线 l 的复连通区域 D

$$\iint\limits_D 0dxdy = 0 = \oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}ds + \oint\limits_l \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}ds$$
$$\Rightarrow \oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}ds = -\oint\limits_l \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}ds$$
$$= -\int_{2\pi}^{0} 1d\Theta = 2\pi$$

4.2 曲面积分

4.2.1 第一类曲面积分（对面积的曲面积分）

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$

4.2.2 第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）

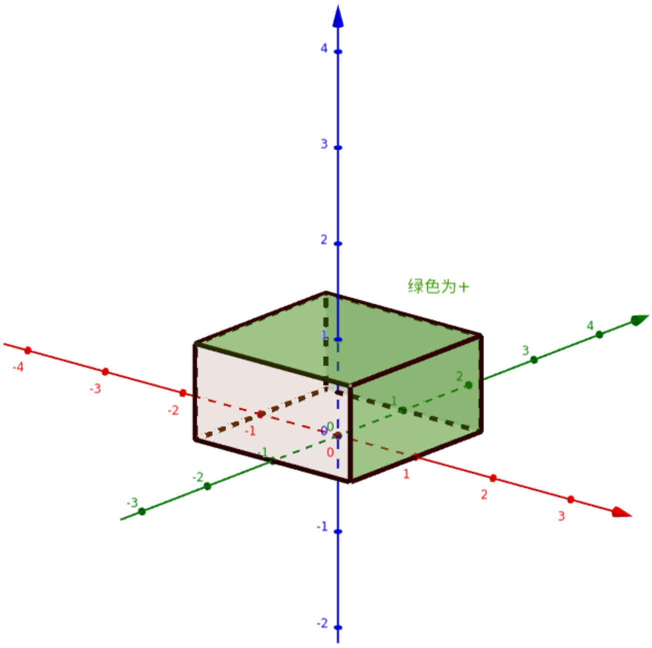
有向曲面 有法向量定义了侧的曲面

$$\iint\limits_\Sigma Pdydz + \iint\limits_\Sigma Qdzdx + \iint\limits_\Sigma Rdxdy$$

4.2.2.1 计算方法

$$\iint\limits_\Sigma Pdxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} P[x,y,z(x,y)]dxdy$$

符号由有向曲面 Σ 方向与对应投影平面法坐标方向是否同向有关



4.2.3 高斯公式

空间闭区域上的三重积分与其边界面上的曲面积分关系

定理 4.2.1. 高斯公式

设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 若函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv &= \oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy \\ &= \oiint\limits_{\Sigma}(Pcos\ \alpha+Qcos\ \beta+Rcos\ \gamma)dS\end{aligned}$$

这里的 Σ 是整合边界曲面的外侧, $cos\ \alpha$, $cos\ \beta$, $cos\ \gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

5 无穷级数

5.1 常数项无穷级数

(常数项) 无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \dots$
一般项 u_n
部分和 $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \dots$
收敛 $\lim_{n->\infty} s_n = s$, s 也叫做这级数的**和**
发散 $\lim_{n->\infty} s_n$ 不存在
余项 $r_n = s - s_n$

5.1.1 常见无穷级数

等比级数 (几何级数) $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}, (|q| < 1)$
调和级数 调和级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

5.1.2 性质

性质 5.1.1. 在级数中增删改有限项, 不会改变级数的收敛性

性质 5.1.2. $\lim_{n->\infty}^{\infty} u_n = 0 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛

反例: 调和级数

5.1.3 柯西审敛原理

$$\text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} \text{收敛} \Leftrightarrow \forall \varepsilon,\ \exists N, n > N, \forall p,\ |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots u_{n+p}| < \varepsilon$$

5.2 常数项级数的审敛法

5.2.1 正项级数的审敛法

正项级数 各项都是正数或零的级数

定理 5.2.1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Leftrightarrow$ 它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界

定理 5.2.2 (<u>比较审敛法</u>). 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_v$, 且 $u_n \leqslant u_v$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_v$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 发散同理

例 5.2.1 $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots (p > 1)$ 收敛性
解 对于 $x(k-1 \leqslant x \leqslant k)$, $\frac{1}{k^p} \leqslant \frac{1}{x^p} \Rightarrow$

$$\frac{1}{k^p} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^p} dk \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p} dx (k = 2, 3, \ldots)$$

所以

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^p} dx = 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{x^p} dx \\ &= 1 + \frac{1}{p-1}(1 - \frac{1}{n^{p-1}}) < 1 + \frac{1}{p-1} (n = 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

所以收敛

定理 5.2.3 (比较审敛法极限形式). 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_v$

1. 如果 $\lim_{n->\infty} \frac{u_n}{v_n} = l(0 \leqslant l < +\infty)$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_v$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
2. 如果 $\lim_{n->\infty} \frac{u_n}{v_n} = l(0 < l \text{ or } l = +\infty)$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_v$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

定理 5.2.4 (<u>比值审敛法</u>, 达朗贝尔 (d'Alembert) 判别法). 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 如果

$$\lim_{n->\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho, \begin{cases} \rho < 1 & \text{级数收敛} \\ \rho > 1 & \text{级数发散} \\ \rho = 1 & \text{都有可能} \end{cases}$$

定理 5.2.5 (根值判别法, 柯西判别法). 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 如果

$$\lim_{n->\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} \rho < 1 & \text{级数收敛} \\ \rho > 1 & \text{级数发散} \\ \rho = 1 & \text{都有可能} \end{cases}$$

定理 5.2.6 (极限审敛法). 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 如果

$$\begin{cases} \lim_{n->\infty} n u_n = l > 0 & \text{级数发散} \\ \exists p > 1, \lim_{n->\infty} n^p u_n = l, 0 \leqslant l < +\infty & \text{级数收敛} \end{cases}$$

即 u_n 与 $\frac{1}{n^p}$ 的比较审敛法极限形式

5.2.2 交错级数的审敛法

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \dots$

定理 5.2.7 (莱布尼兹定理)**.**

$$\begin{cases} u_n \geqslant u_{n+1} \\ \lim_{n->\infty} u_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{级数收敛}, \text{且} s \leqslant u_1, \text{其余项} r_n \text{的绝对值} |r_n| \leqslant u_{n+1}$$

- 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 收敛

5.2.3 绝对收敛与条件收敛

绝对收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

条件收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散

5.3 函数项级数

函数项级数 对于函数列 $u_n(x)$, $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ 为函数项无穷级数
收敛 (发散) 点 $x = x_0$ 时, 函数项级数收敛 (发散)
收敛区间 不包含边界点的收敛域
收敛 (发散) 域 收敛 (发散) 点的集合

5.4 幂级数

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 为幂级数的系数

定理 5.4.1 (阿贝尔 (Abel) 定理)**.** 对于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$,
当 $x = x_0, x_0 \neq 0$ 时, 该级数收敛, $|x| < |x_0|$ 使得该级数收敛
当 $x = x_0, x_0 \neq 0$ 时, 该级数发散, $|x| > |x_0|$ 使得该级数发散

定理 5.4.2 (阿贝尔 (Abel) 定理推论)**.** 对于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, 若不是仅在 $x = 0$ 或整个数轴上收敛, 那么存在一个**收敛半径** R, 使得

- $|x| < R$, 幂级数绝对收敛
- $|x| > R$, 幂级数发散
- $|x| = R$, 幂级数收敛性不确定

定理 5.4.3. 如果 $\lim_{n->\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho$, 那么

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \rho \ne 0 \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$$

注意上述定理对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 无效

补充例题 P277

5.4.1 幂级数运算

5.4.1.1 四则运算

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ OP } \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

加减乘 收敛半径取较小的
除 收敛半径可能比二者小得多

5.4.1.2 幂级数的和函数性质

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

定理 5.4.4. $s(x)$ 在收敛域上连续

定理 5.4.5. $s(x)$ 在收敛域上可积, 积分后收敛半径相同

定理 5.4.6. $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 上可导 (有任意阶导数), 求导后收敛半径相同

例 5.4.1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数
解

1. 先求收敛域

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1$$

收敛半径 $R = 1$

2. 收敛域

$x = -1$ **时** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛
$x = 1$ **时** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散

收敛域为 $[-1, 1)$

3. 设和函数为 $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

$$\begin{aligned} xs(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ (xs(x))' &= \sum_{n=0}^{\infty}x^n, x\in[-1,1) \\ &= \frac{1}{1-x} \\ xs(x) &= \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -ln(1-x) & x\in[-1,0)\cup(0,1) \\ 1 & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 5.4.2 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的和函数
解

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty}|\frac{n+1}{n}| = 1 \Rightarrow R = 1$$

当 $x = -1$ **时** $\sum_{n=0}^{\infty}n(-1)^n$ 发散
当 $x = 1$ **时** $\sum_{n=0}^{\infty}n$ 发散

因此, 收敛域为 $(-1, 1)$

$$
\begin{aligned}
s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\
\int_0^x s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x \\
\int_0^x s(x) &= \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \\
s(x) &= (\frac{x}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1
\end{aligned}
$$

5.5 函数展开称幂级数

泰勒级数

$$f(x) = \int_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

麦克劳林级数

$$f(x) = \int_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x)^n$$

5.5.1 常见泰勒级数

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow a^x = e^{ln\ a^x} = e^{xln\ a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ln\ a)^x}{n!} x^n$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (|x| < 1)$
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (|x| < 1)$
- $sin\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $cos\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
- $ln(1 + x)$
- ...注意简单的微积分

5.6 函数展开傅里叶级数

对于周期为 2π 的函数 $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k cos\ kx + b_k sin\ kx)$$

其中

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos\ nx dx & n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin\ nx dx & n \in \{1, 2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

索引

重点

- 二重积分, 15
- 方向导数, 12
- 函数展开傅里叶级数, 27
- 函数展开幂级数, 27
- 交错级数
  - 绝对收敛, 24
  - 条件收敛, 24
- 可微与可导的关系, 9
- 幂级数
  - 和函数, 25
  - 收敛半径, 24
  - 收敛区间, 24

偏导数, 8

- 多元复合, 9

平面与平面夹角, 3

曲线积分

- 第二类曲线积分, 17
- 第一类曲线积分, 17
- 与积分路径无关, 18

曲面积分

- 高斯公式, 21

三重积分, 15