1 复习

- 10 * 填空
- 10 * 选择
- 6 * 大题

1.1 大纲

1.1.1 数理逻辑

1. 相关定义和定理, 计算和证明
2. 命题符号化 (一阶逻辑) (例 4.1 4.2 P71 4, 5)
3. 判断命题类型
    1. 赋值
    2. 解释 (一阶逻辑) (P69-P71)
    3. 消去量词等值式 (一阶逻辑) (个体域为有限域) (例 5.3 P84 2 5)
4. 推理及推理规则 (+ 附加前提, 归谬法)

1.1.2 集合和二元关系

1. 相关定义和定理
2. 关系的表示 (3 种, $[\langle a, b\rangle]$, 矩阵, 图, P140 12) 及运算 (定义域, 值域, 逆, 复合, P140 16)
3. 关系的性质 (P140 21 22 24)
4. 关系的闭包 (P140 25 26)
5. 等价关系: 自反对称传递, 划分 (P140 31 32 33 36)
6. 偏序关系: 自反, 反对称, 传递, 哈斯图 (P143 43 46)
7. 函数及复合函数的性质: 函数, 单射, 满射, 双射 (反证明) (P171 6) **!! 注意!!**
    1. 复合函数 (P153 推理 2, 定理 8.2 8.3)

1.1.3 代数系统

1. 相关定义及定理

2. 二元运算 (判断封闭, 运算表) 模 n 加法, 模 n 乘法
3. 二元运算的性质 (运算表, 解析表达式) (P191 4 5 6 9 10)
    1. 交换律, 结合率, 幂等律
    2. 幺元, 零元, 逆元
4. 群 (运算表, 解析表达式) (封闭, 结合, 幺元, 逆元) (P217 3 8 10)
    1. 群中元素的幂和群方程求解 (定义 10.3)
    2. klein 群 (判断) **!! 注意!!**
        1. 子群即 (生成子群 + 群本身)(子群格)(P201 图 10.1 (1))
    3. 循环群 (判断) (P218 23 28)
        1. 子群即生成子群 (子群格)

1.1.3.1 重要的群

幺元和逆元

- 整数加群
- 模 n 整数加群
- 非零实数集合上的乘法运算构成的群
- 幂集上的对称差运算构成的群 **!! 注意!!**

1.1.4 图论

1. 相关定义及定理
2. 握手定理及应用
    1. 度数序列 (可图化, 可简单图化)
3. 图的矩阵
    1. 图的连通性
4. 特殊图的判断
    1. n 阶无向完全图, n 阶 k 正则图, 竞赛图? (度数, 边数, 和补图的关系) (P313 16)
    2. 二部图, 完全二部图, 互补顶点子集
    3. 欧拉图
    4. 哈密顿图

5. 树的等价定义（P3402 3 4 19 25）
6. 生成数和最小生成树
7. 树及根树, 5 阶以下非同构树

2　二元运算

封闭

幂等律 $\forall x \in S, x \times x = x$
吸收率 $\circ$, $\times$ 是两个可交换的二元运算, $x \times (x \circ y) = x \circ (x \times y) = x$

2.1　特殊元

{左, 右, } 幺元 (单位元) e_l $e_l \circ x = x$,
{左, 右, } 零元 θ_l $\theta_l \circ x = \theta_l$

2.2　特殊运算

- 模 n 加法 $\oplus$
- 模 n 乘法 $\otimes$
- r 整除 k $r|k$

3 代数系统

同类型代数系统 $\langle A, +, \times, 0, 1\rangle, \langle B, *, \circ, x, y\rangle$

3.1 同态映射

同态映射 {单, 满}(自) 同态, 同构, 零同态 (映射到幺元)

同态判定

$$V_1 = \langle A, \circ\rangle, V_2 = \langle B, *\rangle$$

1. $f : A \to B, \forall x \in A, f(x) \in B$
2. $\forall x, y \in A, f(x \circ y) = f(x) * f(y)$

3.2 群

半群 $V = \langle S, \circ\rangle$, $\circ$ 是二元运算, 满足结合律
幺半群 (独异点) $e \in S$
群 $\forall a \in S, a^{-1} \in S$
平凡群 只有幺元
交换群, Abel 群 可交换

3.2.1 特殊群

3.2.1.1 Klein 四元群

$$G = e, a, b, c$$

1. e 为幺元
2. G 中运算可交换
3. $\forall x \in G, x^{-1} = x$
4. 任意两个元素运算的结果都等于另一个元素

子群: 生成子群 + 群本身

3.2.1.2 循环群

$G = \langle a \rangle$

子群: 生成子群

例题

1. 判定, 求单个生成元: $\exists a \in G, |a| = |G|$
2. 生成元: 生成元$^{与|G|互质}$
3. $\{n = |G|的正因子\}$ 阶子群: $\langle 生成元^{\frac{|G|}{n}} \rangle$

4 图论

4.1 图

零图 没有边的图
n 阶零图 N_n
平凡图 N_1

孤立点 顶点无关联边
环 e_k 与 v_i 关联次数为 2

多重图 含平行边的图
简单图 不含平行边也不含环的图
握手定理 $\sum d(v) = 2e$
最大入度 $\Delta^-(D)$
最小出度 $\delta^+(D)$
竞赛图 D 的基图为无向完全图
正则图 各顶点的度均相同的无向简单图

4.2 可图化

$(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ **可 (简单) 图化**

4.2.0.1 可简单图化为 n 阶 G 条件

1. 必要: $\Delta(G) \leqslant n-1$

4.3 矩阵表示方法

关联矩阵 $V \times E$
邻接矩阵 $V \times V$
可达矩阵 $p_{ij} = v_i\text{可达}v_j?1:0$

4.4 通路和回路

简单通路 (回路) 无重复边
初级通路, 路径 无重复顶点 (v_{i_0}, v_{j_0} 除外) 的简单通路
初级通路, 圈 无重复顶点 (v_{i_0}, v_{j_0} 除外) 的简单回路

4.5 图的连通性

4.5.1 无向图

连通分支数 $p(G)$ $p(G) = 1$ 时, G 为连通图
短程线 u 与 v 间最短通路
距离 $d(u, v)$ 短程线的长度

4.5.2 有向图

短程线 同无向图

4.6 特殊图

4.6.1 二部图

G 是二部图 $\Leftrightarrow$ G 中无奇圈

4.6.2 欧拉图

欧拉图 存在通过图中所有边仅一次行遍的**回路**

G 是欧拉图 $\Leftrightarrow$ G 连通且没有奇度顶点

G 是半欧拉图 $\Leftrightarrow$ G 连通且恰有两个奇度顶点

4.6.3 哈密顿图

哈密顿图 存在通过图中所有顶点仅一次行遍的**回路**

G 是哈密顿图 $\Rightarrow \forall V_1 \in V \wedge V_1 \neq \varnothing, p(G-V_1) \leqslant |V_1|$

G 是半哈密顿图 $\Rightarrow \forall V_1 \in V \wedge V_1 \neq \varnothing, p(G-V_1) \leqslant |V_1|+1$

G 是二部图, 且 $|V_1| \leqslant |V_2|, |V_1| \geqslant 2, |V_2| \geqslant 2 \Rightarrow G$ 是哈密顿图 $\rightarrow |V_1| = |V_2| \vee$ G 是半哈密顿图 $\rightarrow |V_2| = |V_1|+1$

4.7 树

平凡树 平凡图

G 两顶点间存在唯一路径 $\Leftrightarrow$ G 中无回路且 $m=n-1 \Leftrightarrow$ G 连通且 $m=n-1$ $\Leftrightarrow$ G 连通且任何表均为桥 $\Leftrightarrow$ G 中没有回路, 添加任意边含有唯一的一个含新边的圈

非平凡无向树至少有两片叶子