Контрольная работа №1. Математический анализ

Орлов Александр Павлович

М3107

<u>Предел</u>

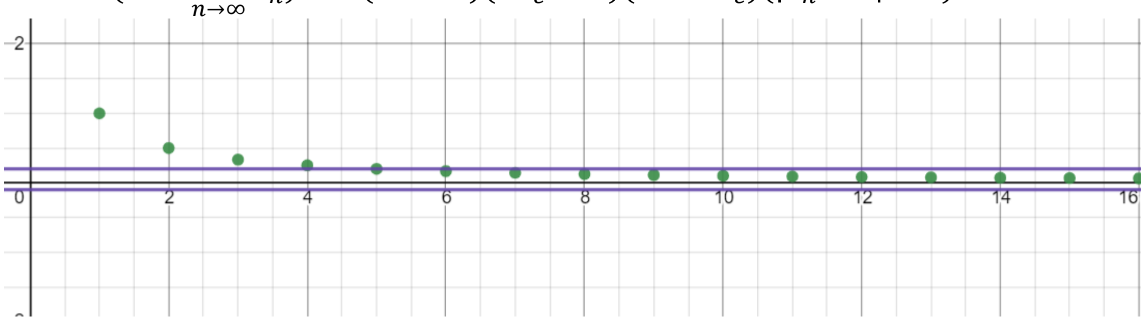
1) <u>Формулировка и иллюстрация определений</u>

- **Предел последовательности**

  <u>Опр</u>

  Число a называется пределом последовательности, если для любого положительного числа ε, сколько бы мало оно ни было, существует такой номер N, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, входят в эпсилон-окрестность точки a.

$$\left(a = \lim_{n\to\infty} x_n\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(\forall n > n_\varepsilon)(|x_n - a| < \varepsilon)$$

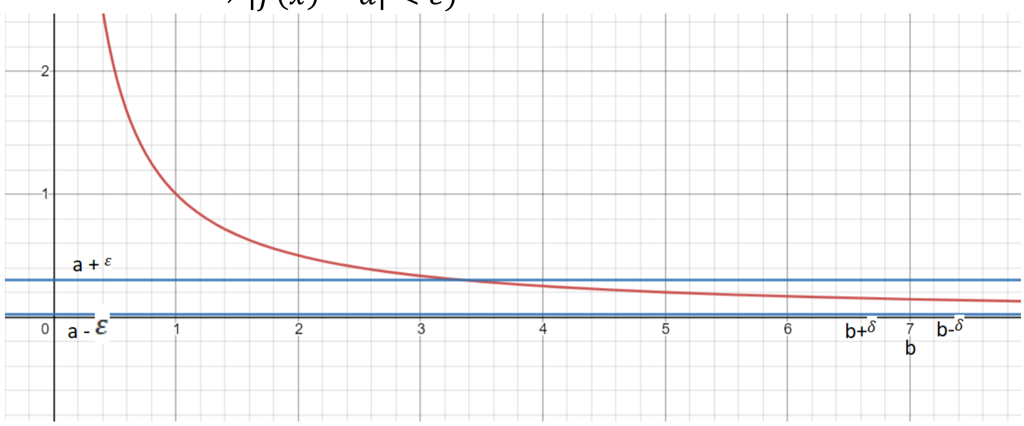


- **Предел функции в вещественной точке b**

  <u>Опр (по Коши)</u>

  Если функция $f(x)$ определена на окрестности (может быть проколотой) точки b, и существует число $a \in \mathbb{R}$ такое что для любой ε-окрестности точки a, найдется окрестность (может быть проколотой) точки b, для которой все соответствующие значения функции попадают в $\dot{u_\varepsilon}(a)$. Тогда говорят, что a – предел $f(x)$ при $x \to b$ по Коши.

$$a = \lim_{x\to b} f(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} D_f \supset \dot{u}(b) \; and \; (\exists a \in \mathbb{R} \;\; \forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0 \;\; 0 < |x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon)$$



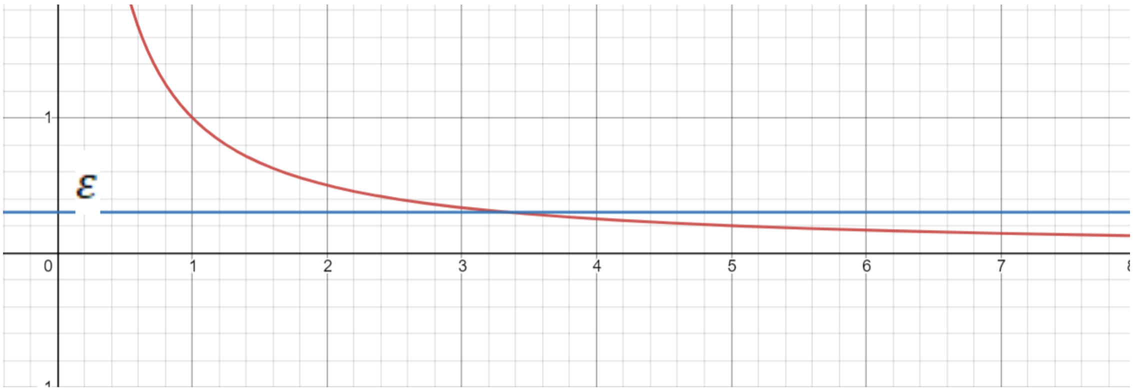
- **Бесконечно малая (большая) в точке функция**

Опр

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой/большой функцией, если для достаточно больших чисел, соответствующие им значения функции становятся и остаются по абсолютной величине меньше/больше сколь угодно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

$$\sqsupset D_f \supset (a,+\infty)\ f(x) - \text{БМФ на} + \infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists p \geq a)(\forall x > p)(|f(x)| < \varepsilon)$$

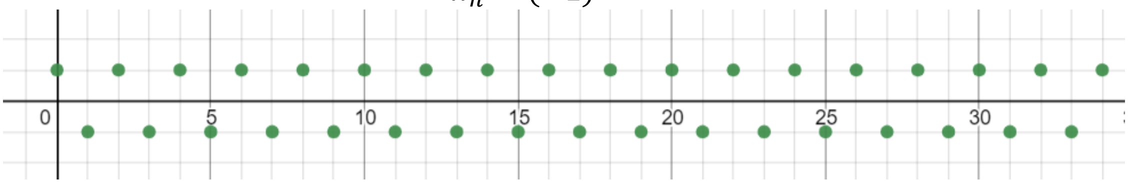
$$\sqsupset D_f \supset (a,+\infty)\ f(x) - \text{ББФ на} + \infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists p \geq a)(\forall x > p)(|f(x)| > \varepsilon)$$



2) Привести примеры

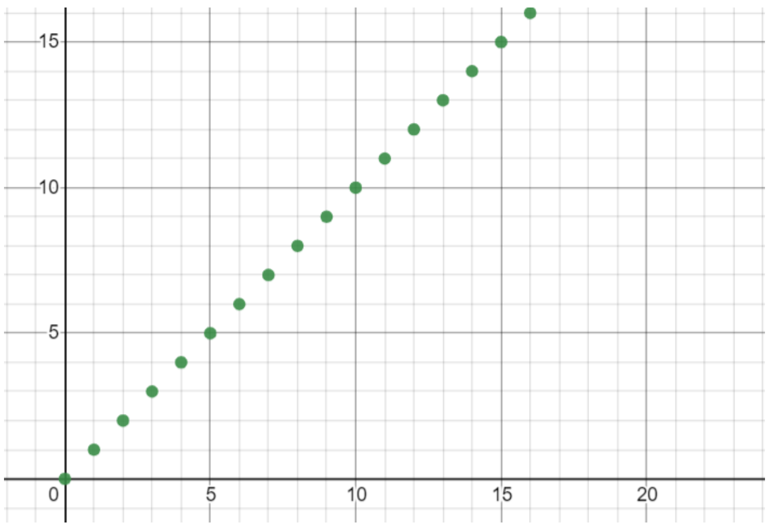
- **Последовательности, не имеющей предела**

$$x_n = (-1)^n$$



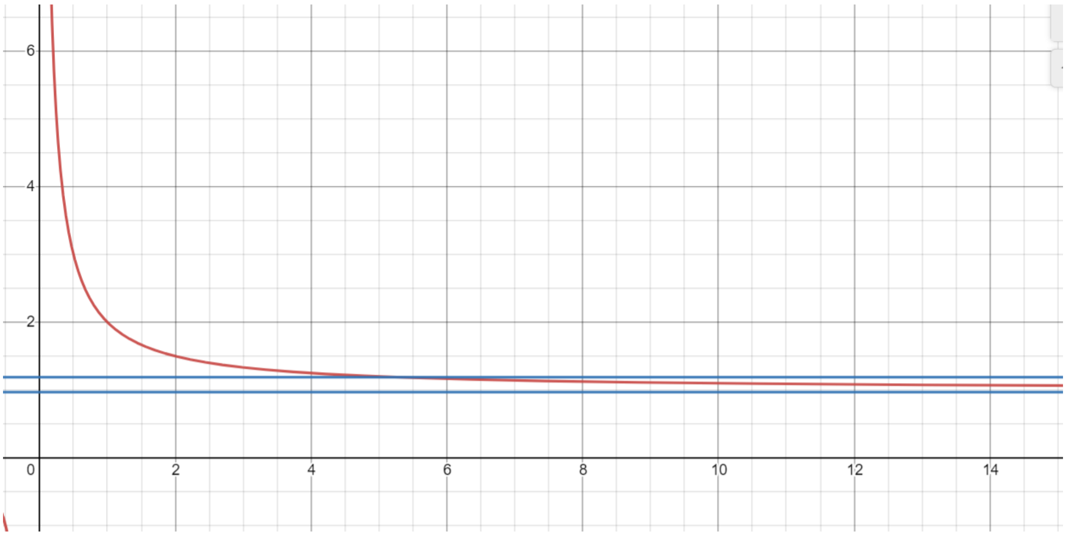
- **Бесконечно большой последовательности**

$$x_n = n$$



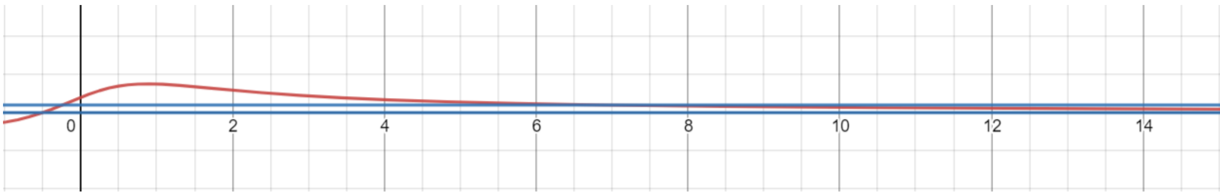
- **Функции, имеющей конечный предел в бесконечности**

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{x}} + 1;\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$$



- **Бесконечно малой функции**

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+5};\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+5} = 0 \Rightarrow \text{БМФ}$$



3) <u>Что значит, что одна бесконечно малая (большая) функция:</u>

- **Имеет больший порядок, чем другая**

<u>Опр</u>

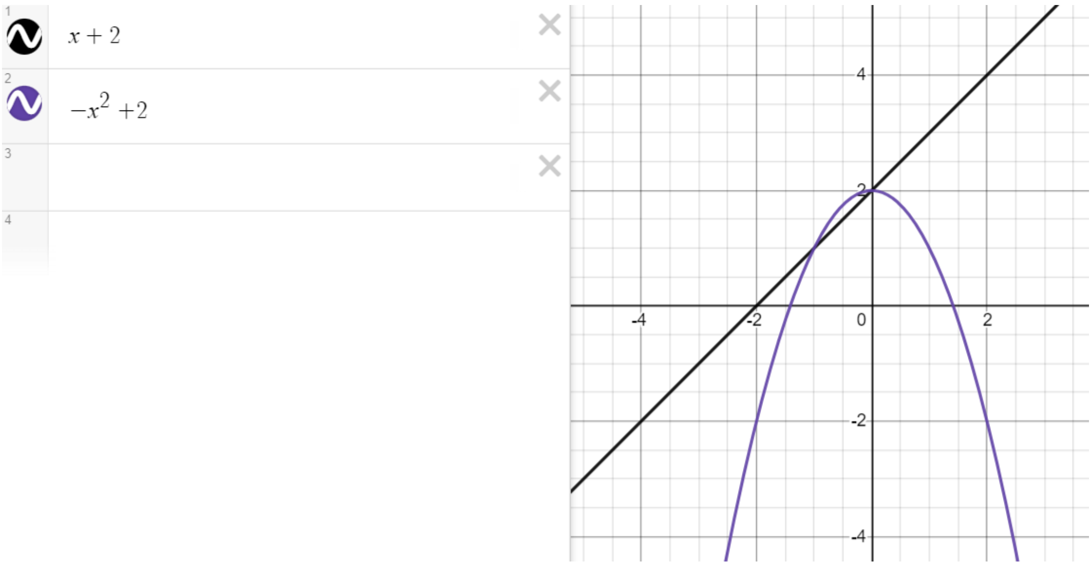
$\sqsupset \alpha(x), \beta(x)$ — БМ (ББ) в окрестности a; $\beta(a) \neq 0$

Если предел отношения двух БМ (ББ) функций равен нулю, то первая функция более высокого порядка малости, чем вторая

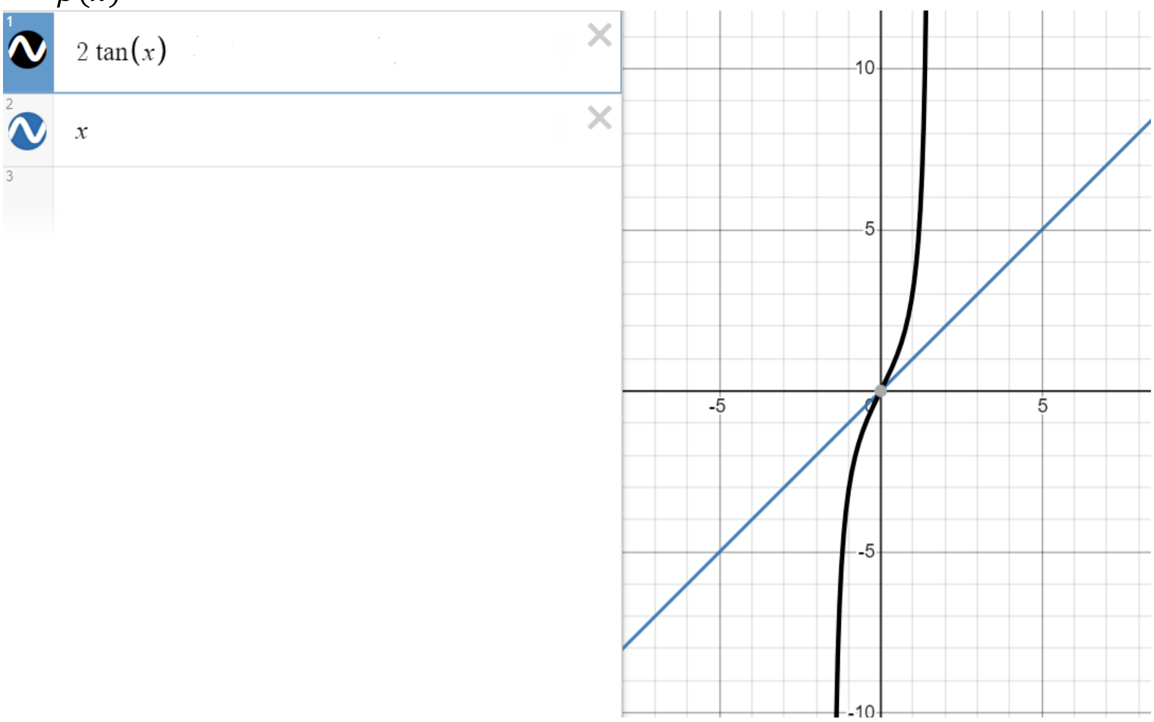
$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \alpha - \text{более высокого порядка малости, чем } \beta$$

Если предел отношения двух БМ (ББ) функций равен бесконечности, то вторая функция более высокого порядка малости, чем первая

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \beta - \text{более высокого порядка малости, чем } \alpha$$

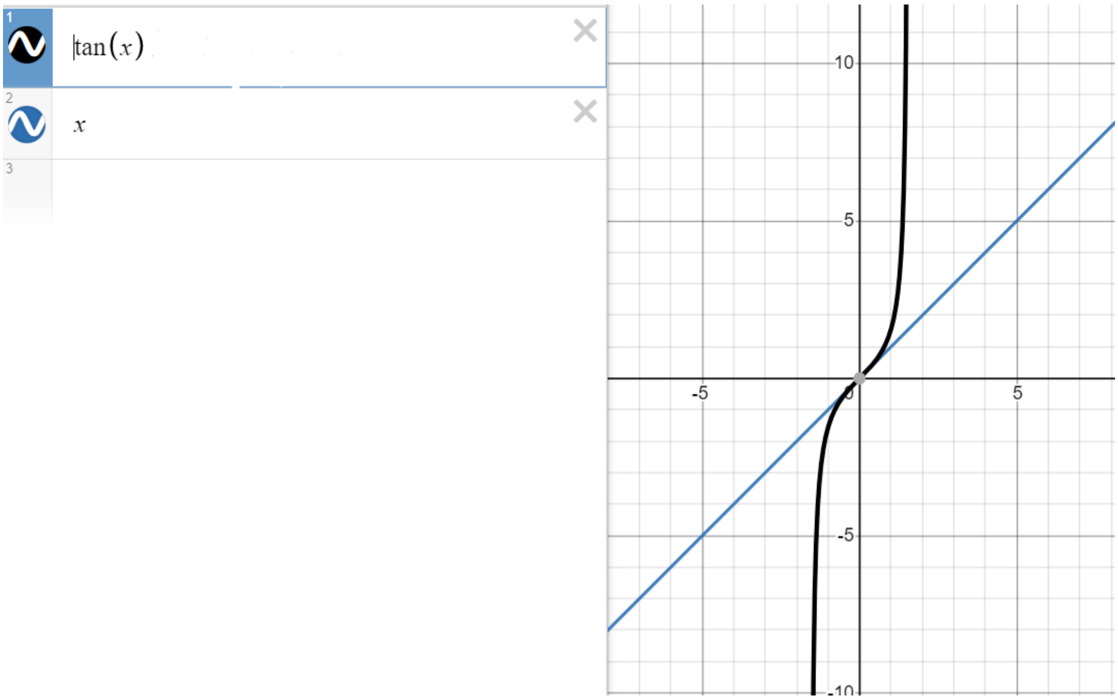


- **Имеет тот же порядок, что и другая**
  <u>Опр</u>
  $\sqsupset\ \alpha(x), \beta(x)$ — БМ (ББ) в окрестности a; $\beta(a) \neq 0$
  Если предел отношения двух БМ (ББ) функций конечен и не равен нулю, то функции одного порядка малости
  $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k\ \&\ k \neq 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \alpha$ и β — одного порядка малости



- **Эквивалентна другой**
  <u>Опр</u>
  $\sqsupset\ \alpha(x), \beta(x)$ — БМ (ББ) в окрестности a; $\beta(a) \neq 0$
  Если предел отношения двух БМ (ББ) функций равен единице, то функции называются эквивалентными.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \alpha(x)\sim\beta(x) \text{ при } x \to a$$



4) Привести примеры

- **Трансцендентной функции, эквивалентной в точке a=1 полиному второй степени**

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x))^2}{(x-1)^2}=1$$

- **Бесконечно больших функций одного порядка не равного единице**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2+1}{2x^3+x-4}=2$$

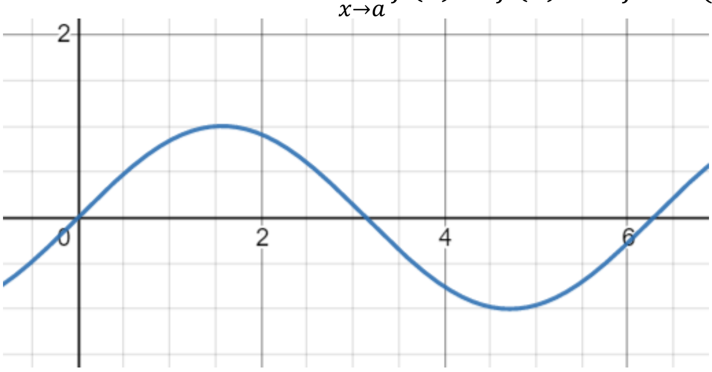
5) Сформулировать и проиллюстрировать

- **Определение непрерывной в точке функции**

Опр

Если $f(x)$ определена в $\dot{u}(a)$ и в самой a и существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, то говорят, что $f(x)$ непрерывна в точке a

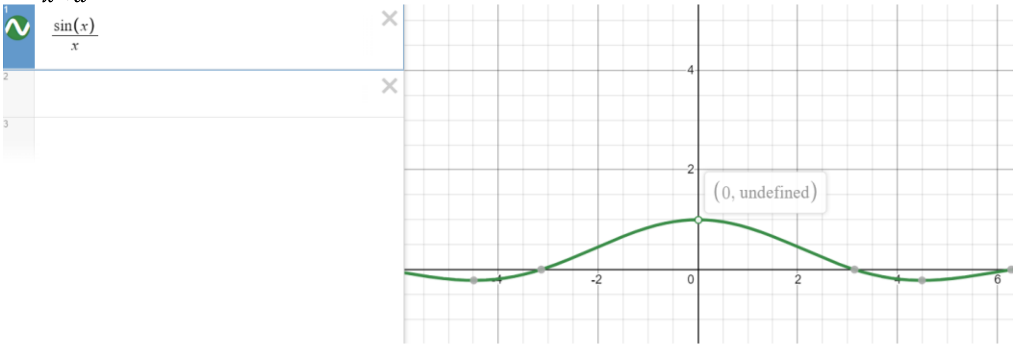
$$\exists \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f\in C(a)$$



- **Условия нарушения непрерывности**

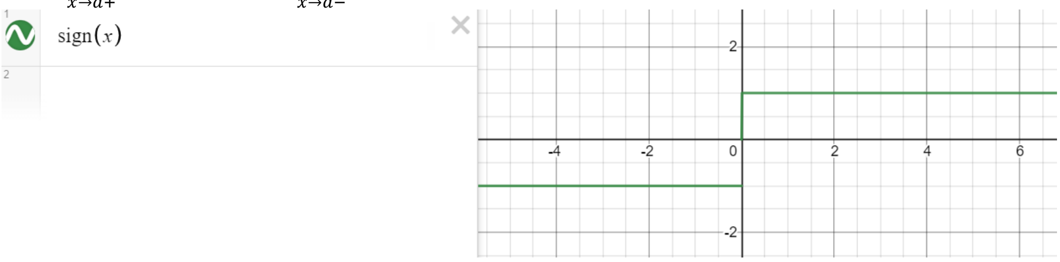
  a) *Значение функции в предельной точке численно не равно значению предела или функция не определена в предельной точке (устранимый разрыв)*

  $$\left(\exists \lim_{x\to a} f(x) = k \ and \ \exists f(a) \ and \ f(a) \neq k\right) \ or \ \left(\nexists f(a)\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \text{устранимый разрыв}$$

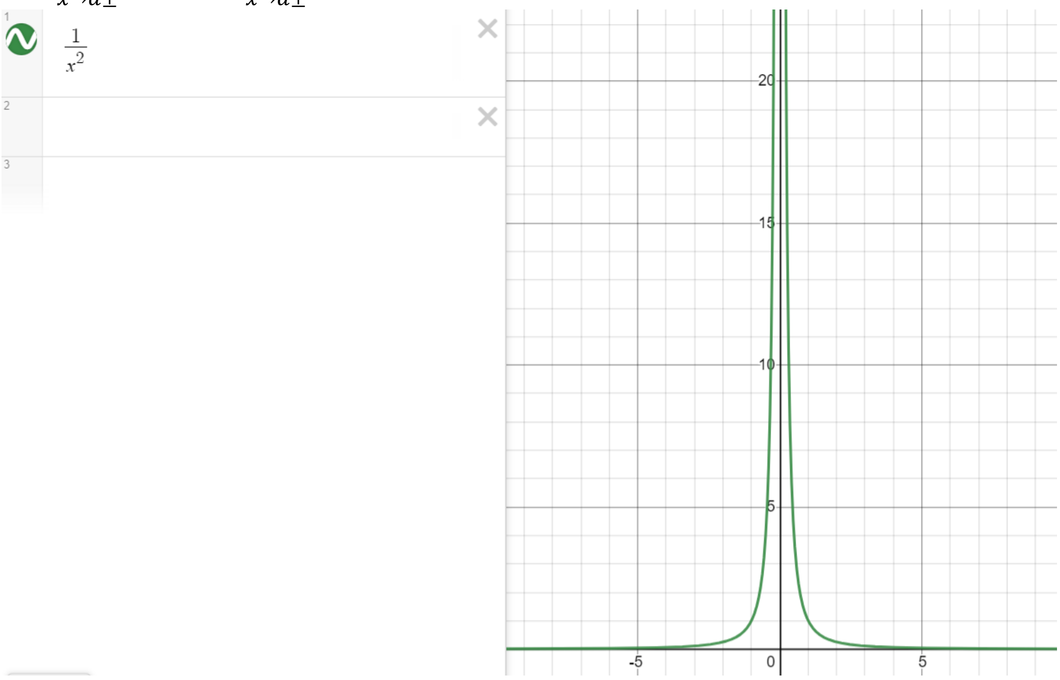
  b) *Существуют конечные левосторонний и правосторонний пределы, но они численно не равны (разрыв первого рода или скачок)*

  $$\exists \lim_{x\to a+} f(x) = k_1 \ and \ \exists \lim_{x\to a-} f(x) = k_2 \ and \ k_1 \neq k_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \text{разрыв первого рода (скачок)}$$

  c) *Хотя бы один односторонний предел равен бесконечности или его не существует*

  $$\nexists \lim_{x\to a\pm} f(x) \ or \ \exists \lim_{x\to a\pm} f(x) = \infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \text{разрыв второго рода (бесконечный)}$$

6) <u>Примеры функций, имеющие различные разрывы</u>

Все примеры уже приведены выше, в пункте 5

Производная

1) Сформулировать определения и проиллюстрировать геометрические смыслы

- **Дифференцируемой в точке функции**

  Опр

  Если в x_0 у функции существует дифференциал, то она называется дифференцируемой в точке x_0

  $$f \in Z(x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists d(x_0, \Delta x)$$

  Дифференцируемость функции в точке говорит о том, что к данной точке можно провести касательную, причем ее угловой коэффициент (тангенс угла наклона касательной) конечен. На рисунке касательная к точке x_0 изображена в виде красной прямой.

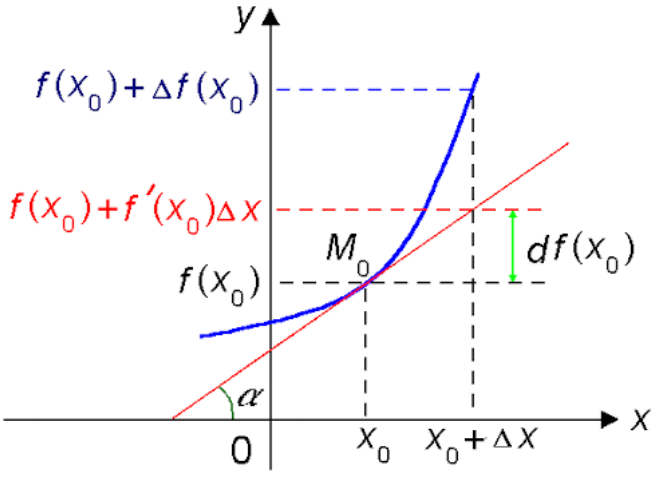


Рис. 1

- **Первого дифференциала**

  Опр

  Первым дифференциалом называется произведение конечной производной функции на дифференциал аргумента.

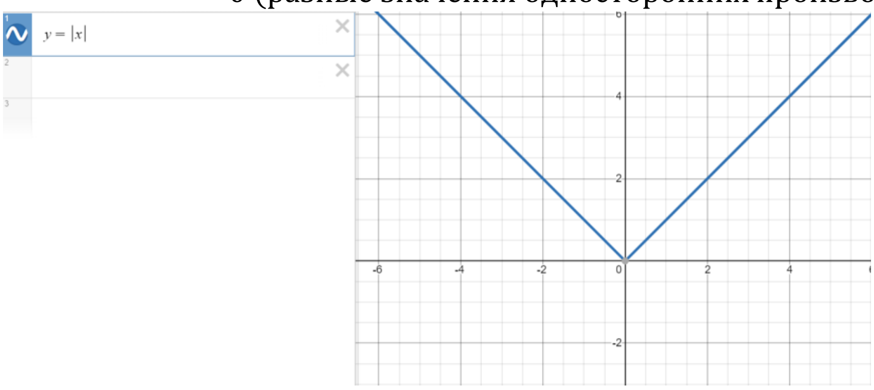
  $$df(x_0, dx) = f'(x_0)dx$$

  Дифференциал равен приращению ординаты касательной к графику в точке x_0, после того как x_0 получит приращение. На том же изображении изображен в виде зеленого отрезка.

2) Привести примеры

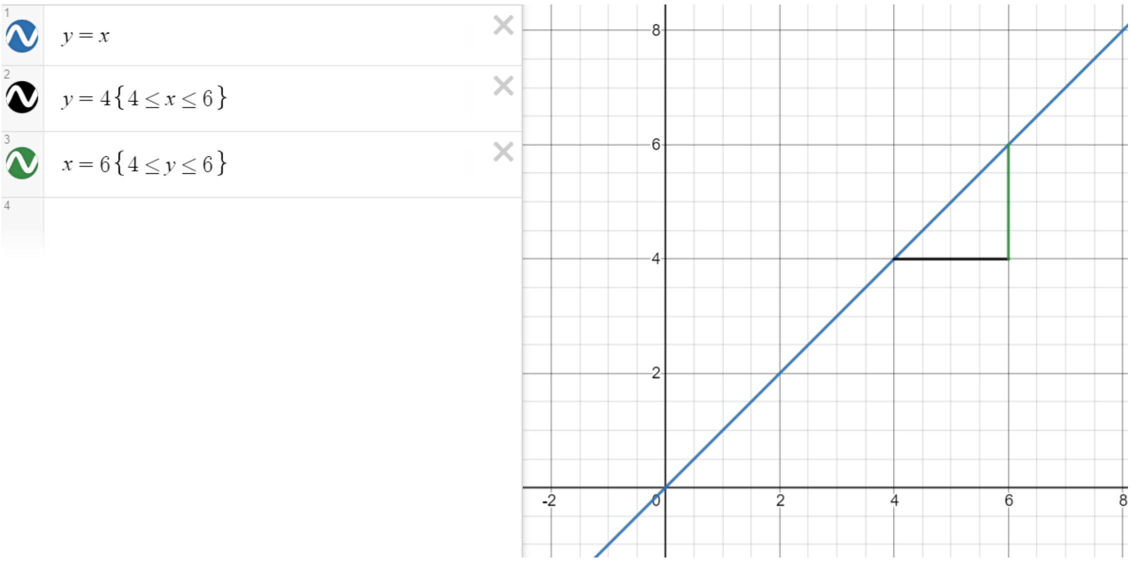
- **Непрерывной, но не дифференцируемой в точке функции**

  $f(x) = |x|$ Очевидно не дифференцируема в точке $x_0 = 0$ (разные значения односторонних производных)



- **Функции, дифференциал которой равен приращению**

  $f(x) = x$ Угол наклона касательной = $\frac{\pi}{4}$ => “катеты” будут равны, следовательно и приращение будет равно дифференциалу



3) <u>Записать соответствующие правила дифференцирования функции, если она является:</u>

- **Сложной функцией**

  Пусть даны функции, определенные в окрестностях на числовой прямой. Пусть эти функции дифференцируемы в точке x_0. Тогда композиция этих функций также дифференцируема в точке x_0 и имеет вид: $g'(f(x_0)) * f'(x)$

  $$\forall f \in Z(x_0)\ \forall g \in Z(x_0)\ \exists \left(g\left(f(x_0)\right)\right)'\ \left(g\left(f(x_0)\right)\right)' = g'\left(f(x_0)\right) * f'(x)$$

- **Обратной для некоторой функции**

  Для дифференцируемой функции с производной, отличной от нуля, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции

  $$f \uparrow (\downarrow) \text{ на } < a, b > and\ \exists x_0\ f'(x_0) \neq 0\ and\ x = g(y) - \text{обратная к } f\ \Rightarrow g \in Z(y_0)\ and\ g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

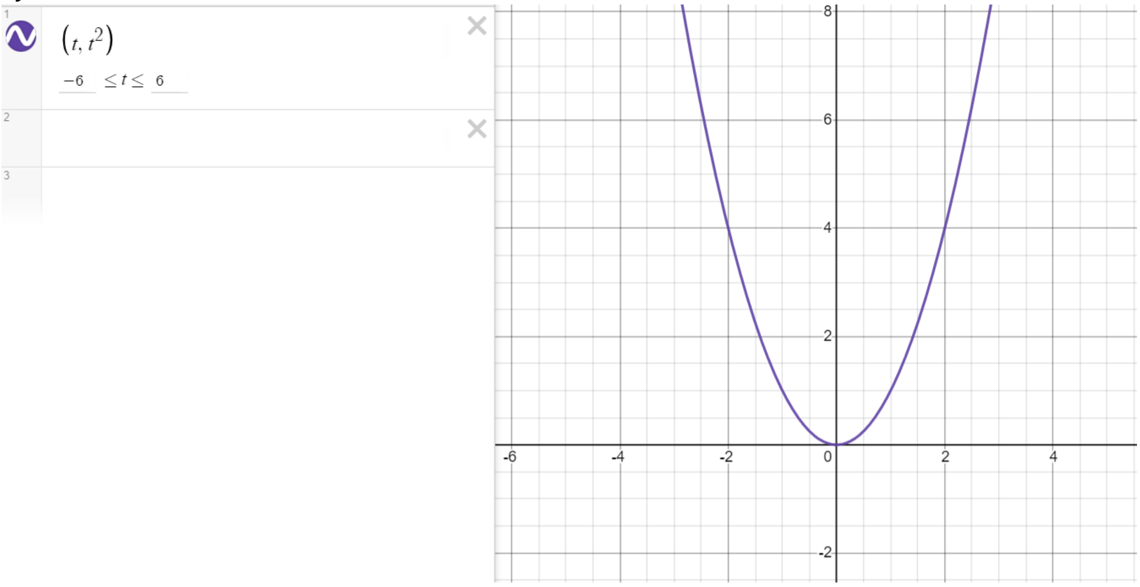
- **Параметрически заданной функцией**

  $$\sqsupset x = \varphi(t) - \text{дифференцируема и } y = \omega(t) - \text{дифференцируема причем } \varphi'(t) \neq 0\ and\ \exists x^{-1} = t(x) \text{ тогда } y(x) = \omega\left(t(x)\right) \Rightarrow \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{t})}$$

4) Решить задачу

- **Записать параметрическое уравнение параболы и нарисовать ее график**

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$



- **Выбрать любую точку параболы**

$\exists\, t_0 = 1$

- **Найти уравнение касательной к параболе в этой точке**

Общее уравнение касательной: $y = f(t_0) + f'(t_0) * (t - t_0)$

Производная исходной функции: $f'(t) = \dfrac{(t^2)'}{t'} = 2t \Rightarrow f'(t_0) = 2$

Таким образом уравнение касательной: $\boldsymbol{y = 2t - 1}$