3. $A\ and\ \big(B\ or\ not(A)\big) = A; A\ or\ \big(B\ and\ not(A)\big) = A$

4. Функция – правило, согласно которому каждому элементу x из области определения (X) ставится в соответствие определенный элемент из области значений (F).

5. Арность функции – число аргументов данной функции.

8. Функцию можно задать с помощью:

a) вектора значений (по сути просто переписанный столбец значений функции из таблицы истинности)

b) вектора минтермов, то есть представление функции в виде суммы минтермов

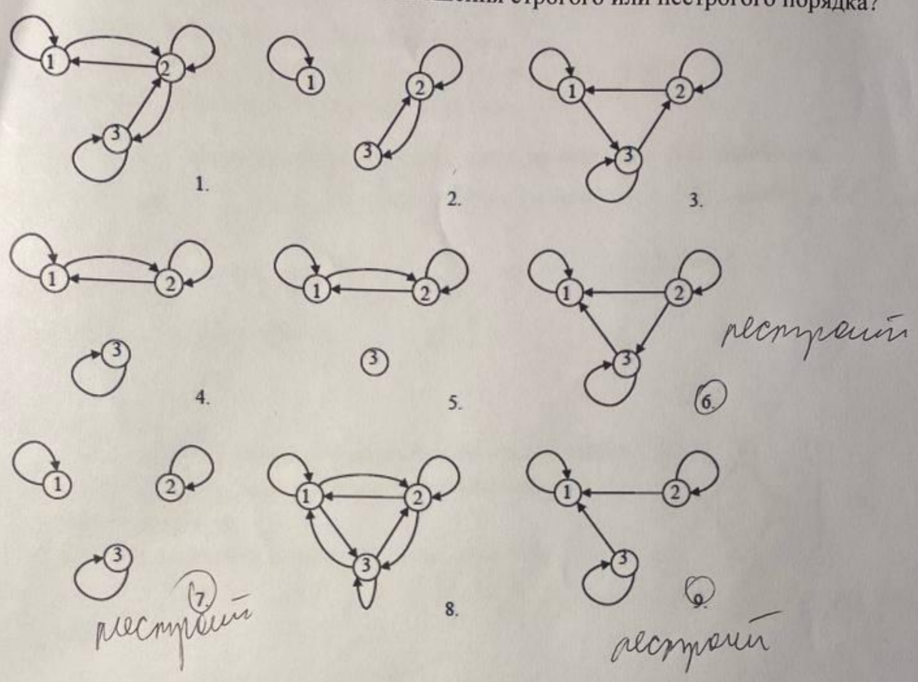
c) графически, то есть с помощью карт Вейча и Карно

9. Конъюнкт – конъюнкция n аргументов

11. ДНФ – дизъюнкция выражений, которые либо: отдельный аргумент, простая конъюнкция некоторых аргументов

Задание 1

Какие из диаграмм представляют отношения строгого или нестрогого порядка?



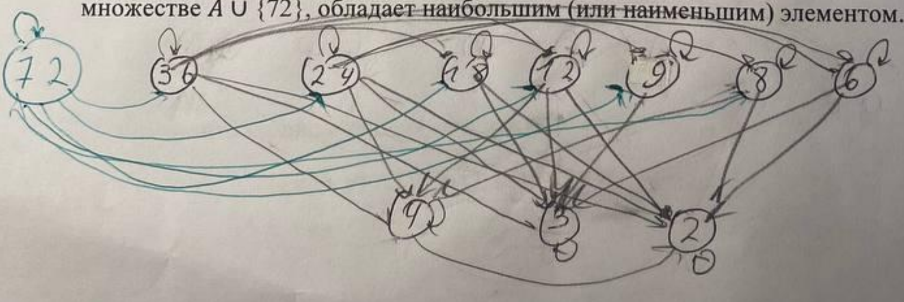
Задание 2

Построить диаграмму Хассе отношения $\preccurlyeq$ делимости на множестве $A =$
$= \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}$. Описать это отношение правилом.

Найти минимальные и максимальные элементы. Наименьший и наибольший элементы, если есть.

$x R y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \vdots y$

Показать, что отношение $\preccurlyeq^{+}$, заданное тем же правилом, но введенное на множестве $A \cup \{72\}$, ~~обладает наибольшим (или наименьшим)~~ элементом.



минимальные: 36, 24 максимальные: 2, 3
наименьший: нет наибольший: нет

Задание 3

Установить, является ли отношением порядка на множестве $\mathbb{Z}^2$

a) $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$;
b) $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ или $(x_1 = x_2$ и $y_1 \leq y_2)$;
c) $(x_1, y_1)R_3(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$.

Для каждого отношения порядка определить, является ли оно линейным.

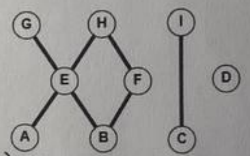
a) рефл., антисимм, транз. => нестрогий; ∃ либо a R b либо b R a => линейное

в) рефл, антисимм, транз. => нестрогий; линейное

c) рефл., симм, транз

Задание 4

Составить список упорядоченных пар принадлежащих отношению нестрогого порядка, представленного диаграммой Хассе.



Найти минимальные и максимальные элементы.

R = {(A, E), (A, H), (A, G), (B, E), (B, G), (B, F), (B, H), (E, G), (E, H), (F, H), (C, I)}

мин. элементы: A, B, C, D

макс. элементы: G, H, I D

Задание 5

Какие аргументы являются существенными, а какие – фиктивными для функции заданной вектором значений? Удалить фиктивные переменные.

а) (0011 1100); б) (0000 0101); в)(1010 0000 1111 1010).

000	0
001	0
010	1
011	1
100	1
101	1
110	0
111	0

C – фикт.

000	0
001	0
010	0
011	0
100	0
101	1
110	0
111	1

B – фикт.

A, B, C, D

1	1	0	0
0	0	0	0
1	1	0	0
1	1	1	1

C – фиктивная

Задание 6

Построить таблицы истинности для следующих формул.

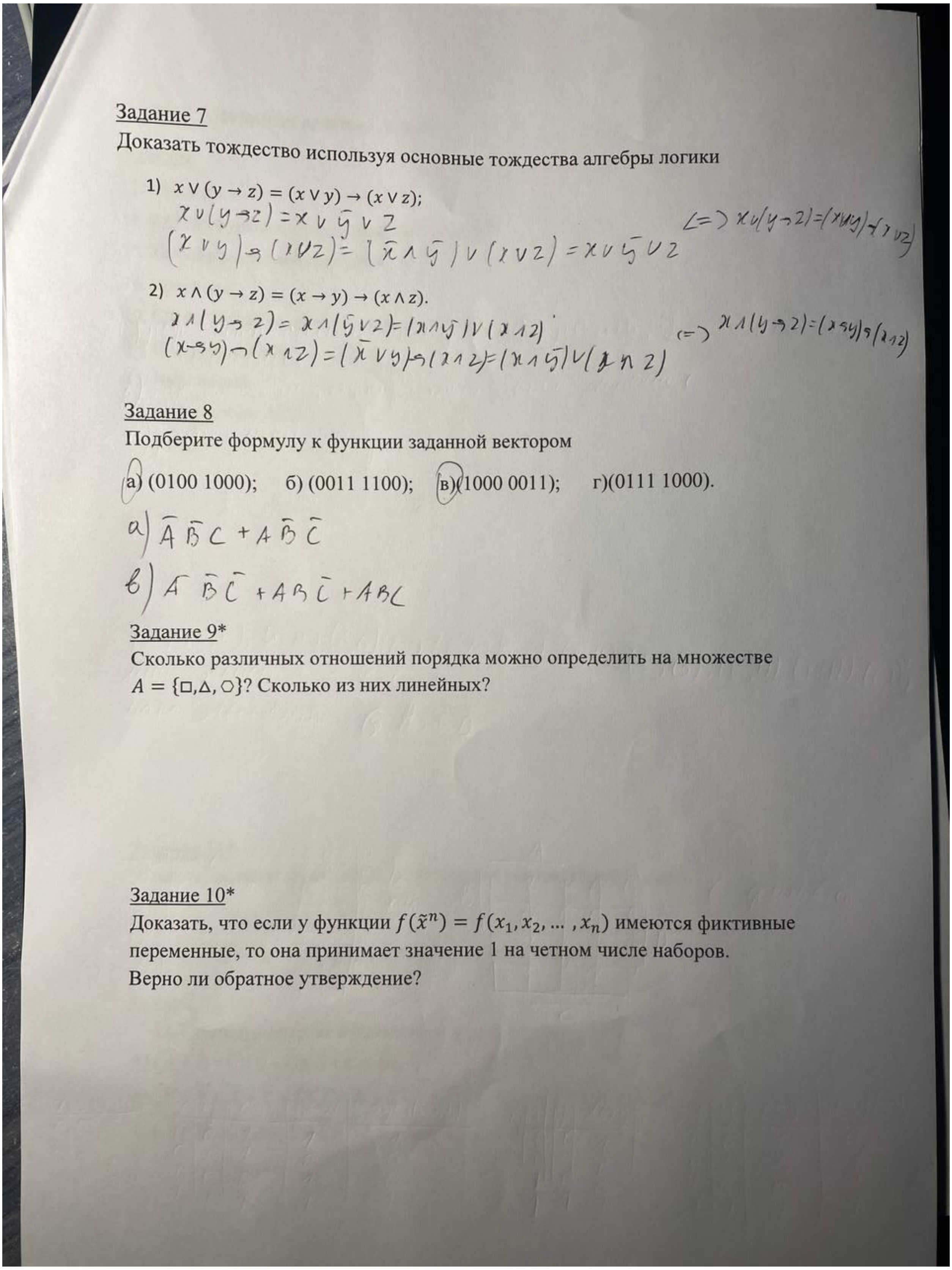
1) $x \vee y$; 2) $(x \to y) \wedge (y \to x)$; 3) $x \leftrightarrow y$; 4) $(x \to y) \to y$.

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \to y$	$y \to x$	$(x \to y) \wedge (y \to x)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x \to y$	$(x \to y) \to y$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1



Задание 7

Доказать тождество используя основные тождества алгебры логики

1) $x \vee (y \rightarrow z) = (x \vee y) \rightarrow (x \vee z)$;

$x \vee (y \rightarrow z) = x \vee \bar{y} \vee z$

$(x \vee y) \rightarrow (x \vee z) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \vee z) = x \vee \bar{y} \vee z$

$\Leftrightarrow x \vee (y \rightarrow z) = (x \vee y) \rightarrow (x \vee z)$

2) $x \wedge (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z)$.

$x \wedge (y \rightarrow z) = x \wedge (\bar{y} \vee z) = (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge z)$

$(x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z) = (\bar{x} \vee y) \rightarrow (x \wedge z) = (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge z)$

$\Leftrightarrow x \wedge (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z)$

Задание 8

Подберите формулу к функции заданной вектором

а) (0100 1000); б) (0011 1100); в) (1000 0011); г)(0111 1000).

а) $\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$

в) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$

Задание 9*

Сколько различных отношений порядка можно определить на множестве $A = \{\square, \triangle, \bigcirc\}$? Сколько из них линейных?

Задание 10*

Доказать, что если у функции $f(\tilde{x}^n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеются фиктивные переменные, то она принимает значение 1 на четном числе наборов. Верно ли обратное утверждение?

12. Минтерм – булева функция, которая принимает единичное значение только на одном наборе значений переменных.

17. СКНФ – КНФ, которая не имеет одинаковых дизъюнкций и все они полные. Тождественно истинную функцию невозможно представить в СКНФ.

18. Для функции f найти $\bar{f}$. В аналитической записи $\bar{f}$ по теореме де Моргана проинвертировать результат.

19. Импликанта функции – функция, все минтермы которой входят в множество минтермов исходной функции

20. Сокращенная ДНФ – запись функции, в которой любые два слагаемых отличаются минимум в двух местах и ни один их конъюнкт не содержится в другом.

ЗАНЯТИЕ 5: ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Вопросы:

13. Минтерм.
14. СДНФ. Функции, непредставимые в СДНФ.
15. Теорема разложения для ДНФ.
16. Макстерм.
17. СКНФ. Функции, непредставимые в СКНФ.
18. Построение СКНФ по СДНФ.
19. Импликанта.
20. Сокращенная ДНФ.

Простая импликанта.

Задание 11*

Сколько булевых функций от n аргументов удовлетворяют равенству:

а) $f(0,0,\dots,0) = f(1,1,\dots,1) = 0$;

б) $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$?

Задание 12

Найдите инверсию выражения и упростите:

1) $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$; $ABC+BC+BCD=BC$

2) $(\overline{X}+\overline{Y})(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})(T+\overline{X}+\overline{Y})$; $XY+XYZ+\overline{T}XY=XY$

3) $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$. $ABC+\overline{A}BC+BCD=BC$

Задание 13

Доказать тождество используя основные тождества алгебры логики

1) $A \leftrightarrow B = (A \to B) \cdot (B \to A)$;

$A \leftrightarrow B = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$

$(A \to B) \wedge (B \to A) = (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee A)$ $\Leftrightarrow A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$

2) $X \cdot (Y \leftrightarrow Z) = (X \cdot Y) \leftrightarrow (X \cdot Z) \leftrightarrow X$.

$x \cdot (y \leftrightarrow z) = x\bar{y}\bar{z} + xyz$

$(xy) \leftrightarrow (xz) \leftrightarrow x = (\overline{xy} \cdot \overline{xz} + xyz) \leftrightarrow x = x(\overline{xy} \cdot \overline{xz} + xyz) =$
$= x\bar{y}\bar{z} + xyz$

Задание 14 ("~" означает эквивалентность "↔")

Решить систему булевых уравнений:

а) $\begin{cases} y \vee \bar{x} \cdot z = 0 \\ (x \oplus y) \cdot (z \oplus 1) = 1 \end{cases}$ $y = 0$ $\Rightarrow x = 1$ $z = 0$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \to (y \sim \bar{z}) = 0 \\ \bar{x} \vee (\bar{y} \to z) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Задание 15

Упростить формулу:

а) $(x \to y) \& (x \vee y)$; б) $\overline{x \vee y} \vee y \& z \vee y$.

а) $(x \to y)(x + y) = (\bar{x} + y)(x + \bar{y})(x + y) =$
$= (\bar{x} + y)(x + (y\bar{y})) = x(\bar{x} + y) = x\bar{x} + y = y$

б) $(\overline{x + y} + y)(z + y) = \overline{x + y} + yz + y = \bar{x}\bar{y} + y = y + \bar{x}$

Задание 16

Для указанной функции написать СДНФ:

а) $f = (0110\ 1011)$; б) $f = (0100\ 1110)$.

а) $f = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$

б) $f = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C}$

Задание 17

Получить СДНФ для функции. Представить функцию в виде вектора минтермов.

а) $f = (x \oplus y) \to y \cdot z$; б) $f = x \sim (y \downarrow \bar{z})$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	1	1	1
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1
1			

$f = (0, 1, 3, 6, 7)$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$f = (1, 2, 3, 4)$

Задание 18

Разложить до СДНФ по Шеннону. Не строить таблицу истинности!
($x \oplus 0 = x, x \oplus 1 = \bar{x}, x \to 0 = \bar{x}, x \to 1 = 1, x \downarrow 0 = \bar{x}, x \downarrow 1 = 0,$
$x \leftrightarrow 0 = \bar{x}, x \leftrightarrow 1 = x, 0 \to x = 1, 1 \to x = x,\ x \mid 0 = 1,\ x \mid 1 = \bar{x}$)

a) $f(x,y,z) = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z;$

b) $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z \oplus (\bar{x} \to z);$

c) $f(x,y,z) = (x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x});$

$(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x}) = x(y \to y) + \bar{x} = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y + x\bar{y} + xy$

d) $f(x,y,z) = x \oplus y \to y \cdot z;$

e) $f(x,y,z) = x \leftrightarrow (y \downarrow \bar{z}).$

$x \leftrightarrow (y \downarrow \bar{z}) = y(x \leftrightarrow 0) + \bar{y}(x \leftrightarrow z) = y\bar{x} + \bar{y}zx + \bar{y}\bar{z}\bar{x} =$
$= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Задание 19

Построить СКНФ функций из предыдущего задания по известным СДНФ.

c) —

e) $(x + y + \bar{z})(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$

Задание 20

Упростить функцию, заданную параметрически

a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{V}_{\sigma_1 \in \{0,1\}, \sigma_3 \in \{0,1\}}(x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^1 \cdot x_3^{\sigma_3} \cdot x_4^0);$

$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 =$
$= x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 x_3 \bar{x}_4 = x_2 \bar{x}_4$

b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{V}_{\sigma_1 \neq \sigma_2, \sigma_3 = \sigma_4}(x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot x_3^{\sigma_3} \cdot x_4^{\sigma_4}).$

Переменную с отрицанием или без будем называть литералом. Для простоты и универсальности записи введем следующее обозначение

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$$

Можно заметить, что при фиксированном параметре σ (задано $\sigma = 1$ или $\sigma = 0$), любая формула, использующая данную символику, обратится в формулу алгебры логики. (σ – греч. «сигма»)
Кроме того, можно видеть $x^\sigma = 1 \iff x = \sigma$,

а также $x^\sigma = x \leftrightarrow \sigma = x \oplus \sigma \oplus 1$
(данное тождество можно применять, если требуется переход в запись над функциями алгебры логики и в них допустимо применять параметры).

Задание 21

Сколько минтермов содержат следующие функции, если все они зависят от четырех аргументов?

1) $f = AB + CD$. 7 **3)** $f = P + QRS$. 9 **5)** $f = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. 1

2) $f = AC\bar{D}$. 2 4) $f = ABC + \bar{B}C$. 6

1) $ABCD$, $ABC\bar{D}$, $AB\bar{C}D$, $AB\bar{C}\bar{D}$, $ABCD$, $A\bar{B}CD$, $\bar{A}BCD$, $\bar{A}\bar{B}CD$
2) $ABC\bar{D}$, $A\bar{B}C\bar{D}$
3) $P\ldots \} 2^3$, $PQRS$, $\bar{P}QRS$
4) $ABCD$, $ABC\bar{D}$, $A\bar{B}CD$, $A\bar{B}C\bar{D}$, $\bar{A}\bar{B}CD$, $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

(φ “содержится в” f (f “содержит” φ) означает следующее отношение нестрогого порядка:
$\varphi \subseteq f \iff (\forall \alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B^n)\ \varphi(\alpha) = 1 \Rightarrow f(\alpha) = 1$,
где $B = \{0, 1\}$, φ и f – булевы функции арности n)

Задание 22

Указать номера функций представленных

а) в СДНФ; 1, 6 **б) в СКНФ;** 3

в) в ДНФ; 2, 5 **г) в КНФ.** 4, 7

1) $f(A, B) = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B}$;

2) $f(A, B, C) = AB + AC + BC$;

3) $f(A, B, C) = (A + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)$;

4) $f(A, B, C, D) = (\bar{A} + B + \bar{C} + D)(\bar{B} + C + D)(A + \bar{C} + D)$;

5) $f(A, B, C, D) = \bar{A}BC + \bar{B}CD + \bar{A}CD + \bar{A}BD$;

6) $f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$;

7) $f(A, B, C, D) = (A + \bar{B} + C)(A + B + C)(A + \overline{B + C})$.

Задание 23

Нанесите функцию на карту Вейча четырех аргументов, записывая в клетках не более чем по одной единице. Определите число клеток, занятых единицами:

1) $f = AB + C\bar{D}$;

2) $f = A + \bar{B} + C$;

3) $f = ABCD + \bar{A}\bar{D}$;

4) $f = AB + C + \bar{D}$;

5) $f = A + \bar{D}$;

6) $f = A + C$.

3)

	A	A			
B			1	1	
B		1			D
					D
			1	1	
		C	C		

5

5)

	A	A			
B	1	1	1	1	
B	1	1			D
	1	1			D
	1	1	1	1	
		C	C		

12

6)

	A	A			
B	1	1	1		
B	1	1	1		D
	1	1	1		D
	1	1	1		
		C	C		

12

	A	A			
B	12	14	6	4	
B	13	15	7	5	D
	9	11	3	1	D
	8	10	2	0	
		C	C		

Задание 24

По построенной карте Вейча для каждой из функций из предыдущего задания получить вектор минтермов.

3) f=(1010 1010 0000 0001) 6) f=(0011 0011 1111 1111)

5) F=(1010 1010 1111 1111)

Задание 25

Перечислить импликанты функции

a) $f(x, y, z) = (4, 5, 6, 7)$;

b) $f(x, y, z) = \bar{x} \cdot y + y \cdot z$.

Задание 26

Определить число аргументов функции и число вхождений аргументов.

1) $f = A\bar{C} + B + \bar{A}\bar{C}$; 3 ар: A:2 B:1 C: 2

2) $f = Y + X\bar{Z} + \bar{X}\bar{Z}$; 3 ар X:2 Y:1 Z:2

3) $f = P + \bar{P}Q$; 2 ар P:2 Q:1

Найти минимальную ДНФ.

1)

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	1	1

$f = b\bar{c} + b = b \vee \bar{c}$

2)

Y \ XZ	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	1	1

$f = y\bar{z} + y = y \vee \bar{z}$

3)

P \ Q	0	1
0	0	1
1	1	1

$f = P + Q$

Задание 27

Запишите функцию в СДНФ:

$$f = AB\bar{D} + A\bar{B}D + ABC + \bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\,\bar{B}\bar{C}\,\bar{D}.$$

1) **Для ее СДНФ определите количество минтермов и число вхождений аргументов.**

2) **Выполните операции первого этапа метода Квайна, т. е. сравните все минтермы между собой. Найдите число минтермов, оставшихся неподчеркнутыми, и количество неповторяющихся конъюнкций, содержащих по три аргумента.**

3) **Выполните операции второго этапа метода Квайна. Определите число неподчеркнутых конъюнкций трех аргументов и число конъюнкций, содержащих по два аргумента.**

4) **Найдите число простых импликант и число вхождений аргументов сокращенной формы функции.**

5) Задайте перечислением отношение "содержится в" между конъюнктами исходной формулы и полученными простыми импликантами.

6) Подтвердите, что полученная на шаге (3) формула действительно обладает свойствами сокращенной ДНФ.

Определение:

Сокращенная ДНФ (англ. *reduced disjunctive normal form*) — форма записи функции, обладающая следующими свойствами:

- любые два слагаемых различаются как минимум в двух позициях,
- ни один из конъюнктов не содержится в другом.

Задание 28

Сколько существует импликант, содержащих точно два минтерма:

1) $f = (1, 3, 5, 7)$; 4
2) $f(A, B, C, D) = B$;
3) $f = (4, 9, 15, 20, 21, 30)$;
4) $f(A,B,C) = A + B + \bar{C}$? 9

Задание 29

Дано шесть конъюнкций:

1) AB; 2) BD; 3) AC; 4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; 5) AD; 6) $A\bar{B}C$.

Укажите номера тех конъюнкций, которые являются простыми импликантами функции 1 3 4

$$f = (0, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$