№1

1 Область определения

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

2 Точки разрыва

$$\lim_{x\to+0} \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x}} = \lim_{x\to+0} \sqrt[3]{\frac{1}{+0}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-0} \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x}} = \lim_{x\to-0} \sqrt[3]{\frac{1}{-0}} = -\infty$$

Бесконечный разрыв.

3 Асимтоты

Бесконечный разрыв в точке $x = 0$, имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. Исследуем на наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x}}}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x}}}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

4 Критические точки

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)' \cdot \sqrt[3]{x} - (\sqrt[3]{x})' \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\frac{2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x-1}} - \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \frac{\frac{2x-x+1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x+1}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)}} = \frac{x+1}{3x\sqrt[3]{x(x-1)}}$$

Имеются данные критические точки:

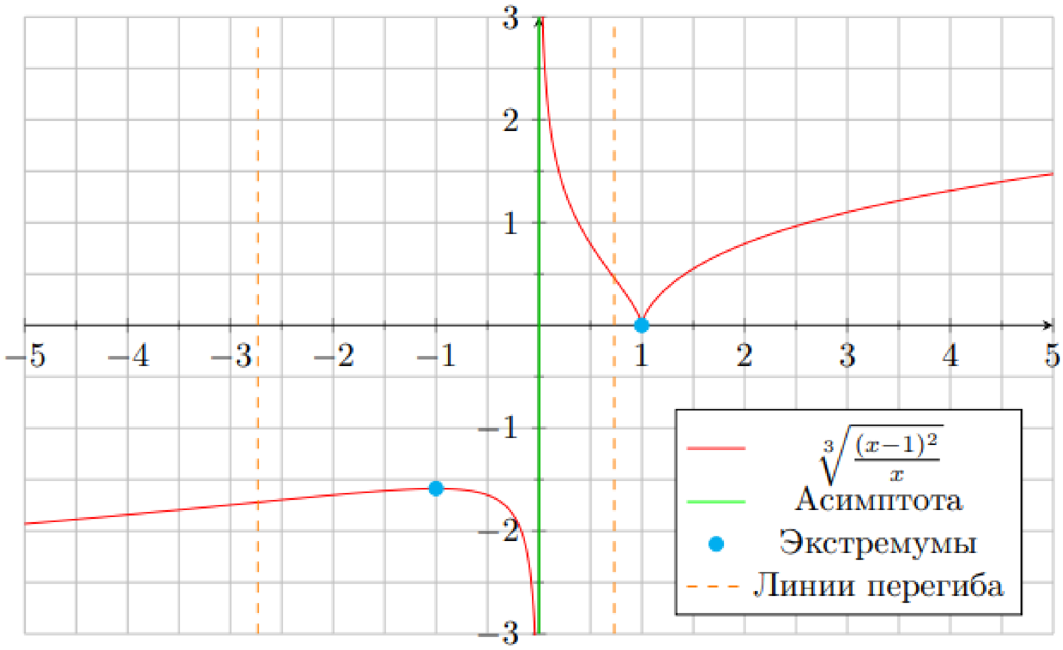
- $(-1, \sqrt[3]{-4})$ - гладкий экстремум (максимум)
- $(1, 0)$ - острый экстремум (минимум)

5 Точки перегиба

$$f''(x) = \left(\frac{x+1}{3x\sqrt[3]{x(x-1)}}\right)' = -\frac{x^2 + x(x-1) + x + 4(x-1)}{9x(x-1)\sqrt[3]{x(x-1)}} =$$
$$= -\frac{2x^2+4x-4}{9x(x-1)\sqrt[3]{x(x-1)}} = -\frac{(x-\sqrt{3}+1)(x+\sqrt{3}+1)}{9x(x-1)\sqrt[3]{x(x-1)}}$$

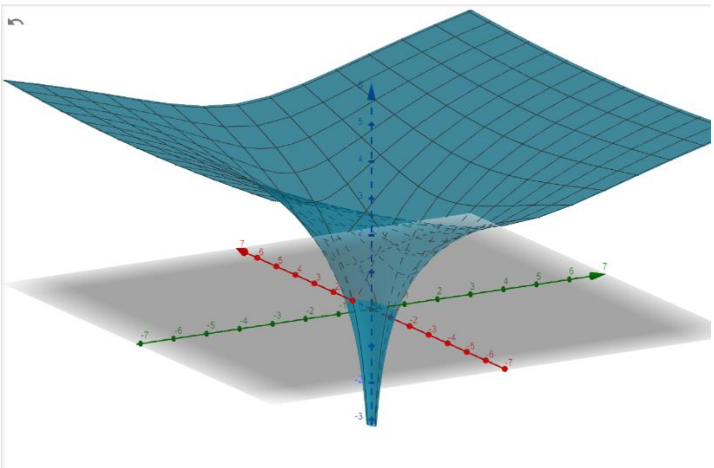
Точки перегиба:

- $\sqrt{3}-1$
- $-\sqrt{3}-1$



<u>№2</u>

График функции:



1) Найти область определения:

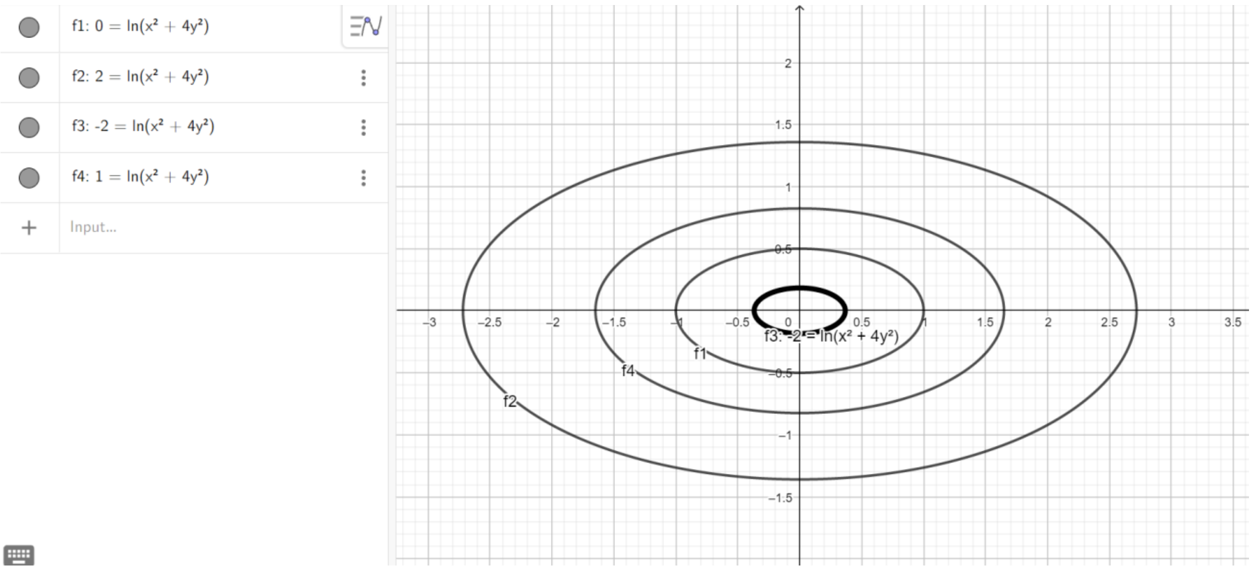
$$x^2 + 4 * y^2 \geq 0$$

Это все значения (x,y), кроме (0,0),

т.е. область определения - $R^2/\{0,0\}$

2)Построим линии уровня

1. *C = 0*
2. *C = 2*
3. *C = -2*
4. *C = 1*



Полученные кривые являются эллипсами, размер, которых уменьшается при приближении z (c) к нулю.

Найдём уравнение линии уровня при c = 0:

$$\ln(x^2 + 4y^2) = 0$$

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{y^2}{0.25} = 0$$

3) Выберем точку M (1, 1, ln(5)):

Проверим: функция определена в этой точке, частные производные в этой точке не равны нулю (от x – 0.4, от y – 1.6), следовательно точка не является ни стационарной, ни особой

Частные производные:

$$\frac{dz}{dx} = 2 * \frac{x}{x^2+4y^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{8y}{x^2 + 4y^2}$$

4)Найти вектор $\overline{m}$ – направление наискорейшего спуска в точке M:

Чтобы найти вектор нужно подставить в координаты вектора значения частных производных в точке M:

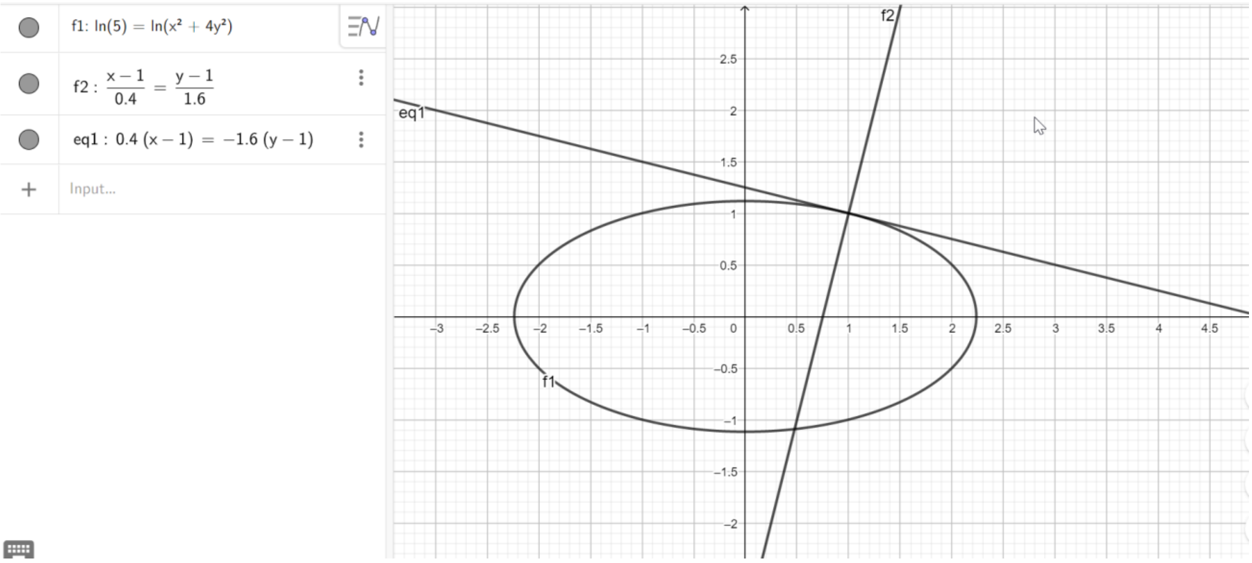
$\overline{m}(0.4, 1.6)$

5)

f1 – линия уровня

f2 – прямая, заданная вектором $\overline{m}$

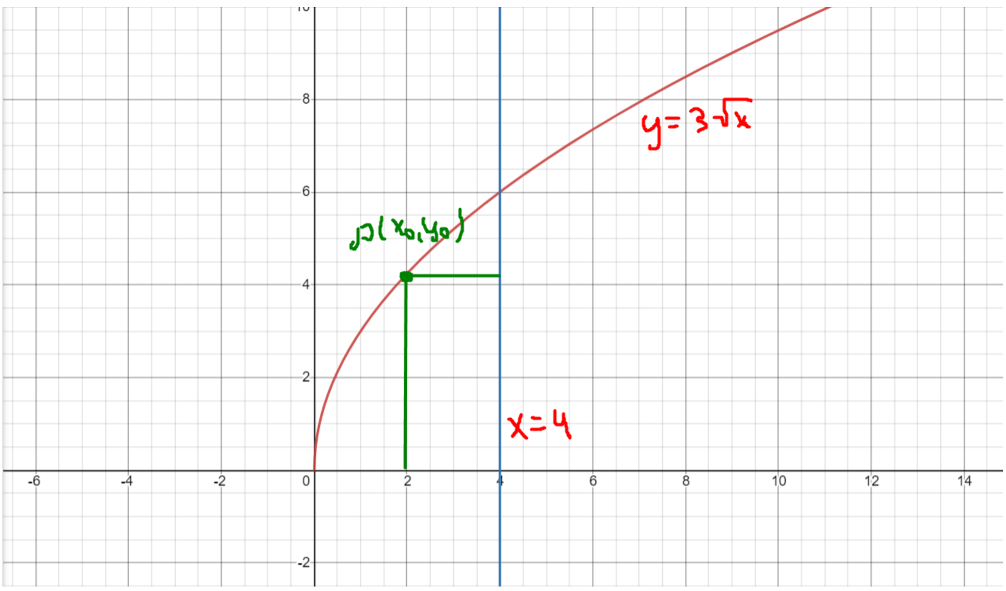
f3 – касательная к линии уровня в точке M



Как видим касательная к эллипсу и прямая по направлению вектора $\overline{m}$ ортогональны (по графику или с помощью скалярного произведения)

<u>№3</u>

1) Выполним графическое изображение задания. Построим графики функций ***y = 3√x*** и ***X = 4***. Отметим произвольную точку на графике ***y = 3√x,*** которая будет определять прямоугольник, который мы вытачиваем.



2) Пусть точка ***p***, которая задаёт прямоугольник имеет координат x0 и y0. Тогда стороны прямоугольника будут равны ***4-x0*** и ***3√x.*** Значение площади будет равно произведению сторон. Значит ***S = (4-x0)*(3√x0).*** Необходимо найти, когда эта функция принимает наибольшее значение.

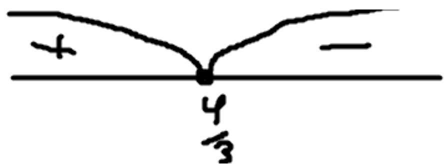
3)

f(x) = (4 – x0) * (3√x0) = 12√x0 – 3x0*√x0

f’(x) = (6/√x0) –(9√x0/2)

4 – 3x = 0 // x != 0

X = 4/3



S = (4 – 4/3) * 3*sqrt(4/3) = 16/sqrt(3)

Ответ: 16/sqrt(3)

№4

Функция: $f(x, y) = -x^2 - 2x - y^2 - 4y - 6$ D: $-2 \le x \le 0, -4 \le y \le 0$

1) *Для начала найдем частные производные, чтобы найти стационарные точки:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2(x+1);\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2(y+2)$$

Находим стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x+1) = 0 \\ -2(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$M_0(-1;\ -2) \in D$$

2) *Проверим является ли эта точка точкой экстремума:*

$$A = z''_{xx}(M_0) = -2; B = z''_{xy}(M_0) = 0;\ C = z''_{yy}(M_0) = -2$$

$$AC - B^2 = 4 - 0 = 4 > 0\ \Rightarrow \text{в точке } M_0 - \text{экстремум}$$

3) *Исследуем границу области:*

- *Подставим $y = 0$:*

$$z = -x^2 - 2x - 6$$

Вершина этой параболы – ‘’подозрительная’’. Проверим ее:

$$z' = (-x^2 - 2x - 6)' = -2x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow x = -1; M_1(-1; 0) \in D$$
$$z(M_1) = -5$$

Также проверим концы отрезка:

$$M_2(-2; 0) \quad z(M_2) = -6$$
$$M_3(0;\ 0) \quad z(M_3) = -6$$

- *Подставим $y = -4$:*

$$z = -x^2 - 2x - 6$$

Аналогично найдем вершину этой параболы:

$$z' = (-x^2 - 2x - 6)' = -2x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow x = -1; M_4(-1; -4)$$
$$\in D \quad z(M_4) = -5$$

Также проверим концы отрезка:

$$M_5(-2; -4) \quad z(M_5) = -6$$
$$M_6(0;\ -4) \quad z(M_6) = -6$$

- *Подставим $x = 0$:*

$$z = -y^2 - 4y - 6$$

Аналогично найдем вершину этой параболы:

$$z' = (-y^2 - 4y - 6)' = -2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2;\ M_7(0;\ -2)$$
$$\in D \quad z(M_7) = -2$$

Концы отрезка уже были проверены в предыдущих пунктах

- *Подставим $x = -2$:*

$$z = -y^2 - 4y - 6$$

Аналогично найдем вершину этой параболы:

$$z' = (-y^2 - 4y - 6)' = -2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2;\ M_8(-2;\ -2)$$
$$\in D \quad z(M_8) = -2$$

Концы отрезка уже были проверены в предыдущих пунктах

4) *Определим точки, в которых достигается наибольшее и наименьшее значения, и их значения:*

$$z(M_0) = z(-1;\ -2) = -1$$
$$z(M_1) = z(-1; 0) = -5$$
$$z(M_2) = z(-2; 0) = -6$$
$$z(M_3) = z(0; 0) = -6$$
$$z(M_4) = z(-1;\ -4) = -5$$
$$z(M_5) = z(-2;\ -4) = -6$$
$$z(M_6) = z(0;\ -4) = -6$$
$$z(M_7) = z(0;\ -2) = -2$$
$$z(M_8) = z(-2;\ -2) = -2$$

$$\max_D z = z(M_0) = -1$$
$$\min_D z = z(M_2) = z(M_3) = z(M_5) = z(M_6) = -6$$

Работу выполнили: Орлов Александр, Фаткулов Марат, Гомзяков Игнат, Кузнецов Павел, Казаков Андрей