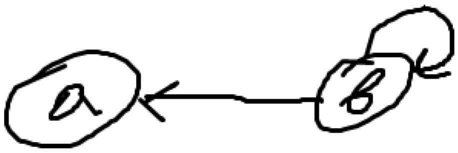
3. Бинарные отношения можно задать с помощью перечисления, правила, графа, таблицы и матрицы

4. Область определения отношения – множество всех первых координат отношения. Область значения отношения – множество всех вторых координат отношения.

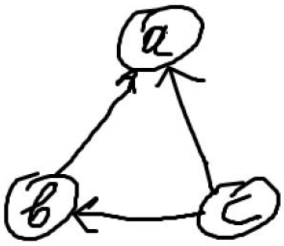
6. Композиция отношений R и S – это множество пар (a, c) таких, что (a, b) принадлежит R и (b, c) принадлежит S. Например: $R = \{(1,2),(3,4)\}$ $S = \{(2,5),(4,6)\}$ $R°S = \{(1,5),(3,6)\}$

7. Композиция отношений ассоциативна: $(R \circ S)°T = R \circ (S \circ T)$

10. Антисимметричное отношение – это такое отношение, что если в нем найдутся пары (a, b) и (b, a), то обязательно a = b. Либо если найдется пара (a, b) и a ≠ b, то обязательно не должно найтись пары (b, a). Пример: $\mathrm{A} = \{1\}, \mathrm{B} = \{1,2\} \mathrm{R} = \{(\mathrm{a},\mathrm{b}) | \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}$ и $R = \{(2,2),(2,3),(2,4)\}$



13. Транзитивное отношение – это такое отношение, что если найдутся пары (a, b) и (b, c), то обязательно должна найтись пара (a, c). Пример: $A = \{1,2,3\}$ $R = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$ и $R = \{(2,1),(1,1)\}$



14. Отношение эквивалентности – это такое отношение, которое одновременно является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Пример: $A = \{1,2,3\}$ $R = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$ и $R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

Задание 1

Доказать, что тождества верны не для всех A, B, C.

$\exists\ A=\{1,2,3\}\ B=\{2,3,4\}\ C=\{1,3,5\} \Rightarrow$

a) $A\setminus(B\Delta C) = (A\setminus B)\Delta(A\setminus C)$

$\{3\}$ $\quad = \{1,2\}$

b) $A\Delta(B\cap C) = (A\Delta B)\cap(A\Delta C)$

$\{1,2\}$ $\quad \emptyset$

Задание 2

Декартово произведение $A\times B$ содержит 12 элементов. Сколько собственных подмножеств в множестве B, если известно, что $A=\{a,b,c,d\}$; $A\cap B=\emptyset$?

в множестве B – три различных элемента $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 6 собств подмножеств.

Задание 3

Найти $|P(A)|$, если $|A^2| = 49$. $\Rightarrow |A|=7 \Rightarrow |P(A)| = 2^7 = 128$

Задание 4

Найти $|A|$; $|B|$; $|C|$; $|B\times(\bar{B}\cap C)|$, если $A\subset B\subset C$; $A\neq\emptyset$; $|A\cup B\cup C| = 3$.

$|A|=1$ $|B|=2$ $|C|=3$ $|\bar{B}\cap C|=1 \Rightarrow |B\times(\bar{B}\cap C)|=2$

Задание 5

Дан универсум $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и его подмножества $A=\{x|x - \text{четно}\}$, $B=\{x|x - \text{кратно четырем}\}$, $C=\{x|x - \text{простое}\}$, $D=\{1,3,5\}$.

$A=\{2,4,6,8\}$ $B=\{4;8\}$ $C=\{2,3,5,7\}$

Найти множества:

1. $2^A\cap 2^B = \{\emptyset, \{4\}, \{8\}, \{4,8\}\}$
2. $2^D\setminus 2^C = \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{1,3,5\}\}$

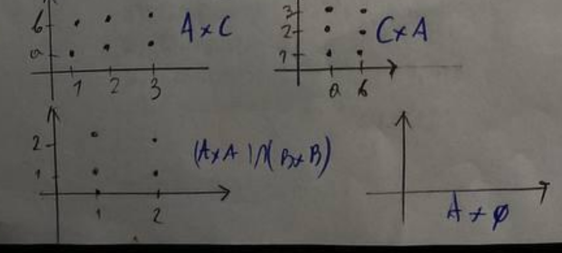
Задание 6

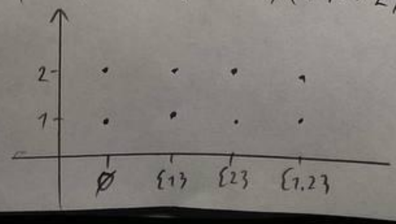
Пусть $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{a,b\}$. Определить следующие множества и представить их в графическом виде:

$A\times C,\ C\times A,\ (A\times A)\cap(B\times B),\ A\times\emptyset,\ 2^B\times B.$

$A\times C=\{(1;a),(1,b)(2,a)(2,b)(3,a)(3,b)\}$ $C\times A=\{(a,1)(a,2)(a,3)(b,1)(b,2)(b,3)\}$

$(A\times A)\cap(B\times B)=\{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)\}$ $A\times\emptyset=\emptyset$ $2^B\times B=\{(\emptyset,1)(\emptyset,2)(\{1\},1)(\{1\},2)$ $(\{2\},1)(\{2\},2)(\{1,2\},1)(\{1,2\},2)\}$





Определить множества B^3

$A \times B \times C$.

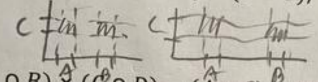
Задание 7

Выяснить, какие из следующих равенств справедливы для любых множеств A, B, C, D

– 1) $A \times B = B \times A$; например $A=\{1\}$ $B=\{2,3\}$

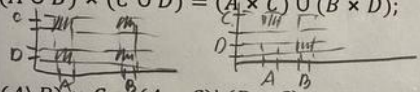
$A \times B = \{(1,2)\ (1,3)\}$ $B \times A = \{(2,1)\ (3,1)\}$

+ 2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;



3) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

– 4) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$;



5) $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$;

Задание 8

Доказать утверждение $A \subseteq B$ и $C \subseteq D \iff A \times C \subseteq B \times D$.

$(\Rightarrow)$ $A \subseteq B \Rightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B$ & $C \subseteq D \Rightarrow \forall c \in C \Rightarrow c \in D \Rightarrow A \times C = \{(a,c) \mid a \in A, c \in C\} \subseteq B \times D$

$(\Leftarrow)$ $A \times C \subseteq B \times D \Rightarrow A \times C = \{(a,c) \mid a \in A, c \in C\} \subseteq B \times D = \{(b,d) \mid b \in B\ d \in D\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in B$ & $c \in D \Rightarrow A \subseteq B$ & $C \subseteq D$

Задание 9

Опишите множества в пунктах (а, б, в, г) перечислением элементов. Укажите их области определения и области значений.

Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$, а S, T, U и V — отношения на A, где

$$S = \{(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (c,e), (e,d), (c,a)\};$$
$$T = \{(a,b), (b,a), (b,c), (b,d), (e,e), (d,e), (c,b)\};$$
$$U = \{(a,b), (a,a), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a)\};$$
$$V = \{(a,b), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (d,d), (a,c), (c,a)\}.$$

а) Опишите $U \cap V$: $= \{(a,b)\ (b,c)\ (b,b)\ (e,e)\ (b,a)\ (c,b)\ (d,d)\ (a,c)\ (c,a)\}$ $Dom = \{a, b, c, d, e\}$ $Im = \{a, b, c, d, e\}$

б) Опишите $S \cup T$: $= \{(a,a), (a,b), (b,a)\ (b,c)\ (b,d)\ (c,e)\ (e,d)\ (e,e)\ (d,e)\ (c,a)\ (c,b)\}$ $Dom = \{a, b, c, d, e\}$ $Im = \{a, b, c, d, e\}$

в) Опишите $U - T$: $= \{(a,a), (b,b), (c,c)\ (d,d)\ (a,c)\ (c,a)\}$ $Dom = \{a, b, c, d\}$ $Im = \{a, b, c, d\}$

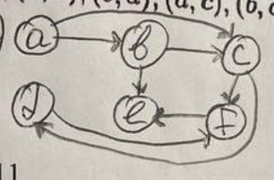
г) Опишите $U \triangle S$ $= \{(b,d)\ (c,e)\ (e,d)\ (b,b)\ (e,e)\ (b,a)\ (c,b)\ (c,c)\ (d,d)\ (a,c)\}$ $Dom = \{a, b, c, d, e\}$ $Im = \{a, b, c, d, e\}$

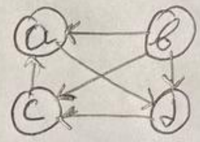
Задание 10

Постройте орграфы со следующими свойствами:

а) **Множество вершин** $\{a, b, c, d, e, f\}$ **и отношение** R **для ребер имеет вид** $R = \{(a, b), (b, c), (a, c), (b, e), (c, f), (c, d), (d, f), (f, e)\}$.

б) **Множество вершин** $\{a, b, c, d\}$ **и отношение** R **для ребер имеет вид** $R = \{(b, c), (a, d), (b, a), (d, c), (b, d), (c, a)\}$.

а)


б)


Задание 11

Отношения R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 заданы на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$R_1: \; aR_1b \;\leftrightarrow\; |a-b|=1;$ $R_1 = \{(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(2,1)(3,2)(4,3)(5,4)\}$

$R_2: \; aR_2b \;\leftrightarrow\; 0<a-b<3;$ $R_2 = \{(5,4)(5,3)(4,3)(4,2)(3,2)(3,1)(2,1)\}$

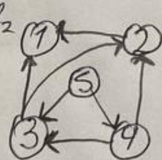
$R_3: \; aR_3b \;\leftrightarrow\; a+b$ – четное число; $R_3 = \{(1,1)(1,3)(1,5),(2,2)(2,4)(3,1)(3,3)(3,5)(4,2)(4,4)$ $(5,1)(5,3)(5,5)\}$

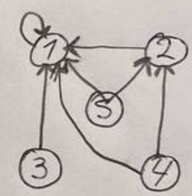
$R_4: \; aR_4b \;\leftrightarrow\; a \geq b^2;$ $R_4 = \{(1,1)(2,1)(3,1)(4,1)(4,2)(5,1)(5,2)\}$

$R_5: \; aR_5b \;\leftrightarrow\; НОД(a,b)=1$ $R_5 = \{\cancel{(1,1)}, \cancel{(1,2)}\cancel{(1,3)}\cancel{(1,4)}\cancel{(1,5)}(2,1)(2,3)\cancel{(2,5)}(3,1)(3,2)(3,4)(3,5)$ $(4,1)(4,3)(4,5)(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)\}$

Представить отношения матрицами (R_1, R_3, R_5) и в графическом виде (R_2, R_4).

$R_1: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $R_3: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R_5: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

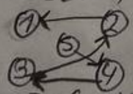
R_2


R_4


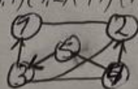
Задание 12

Для отношений из задания 11 представьте графически следующие отношения:

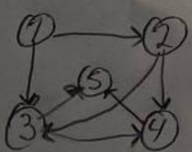
a) $R_1 \cap R_2 = \{(2,1)(3,2)(4,3)(5,4)\}$



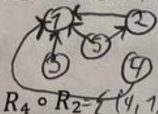
b) $R_1 \cup R_2 = \{(1,2)(2,1)(2,3)(3,1)(3,2)(3,4)(4,2)$ $(4,3)(4,5)(5,3)(5,4)\}$



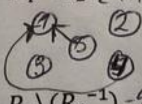
c) $R_2^{-1} = \{(4,5)(3,5)(3,4)(2,4)(2,3)(1,3)(1,2)\}$



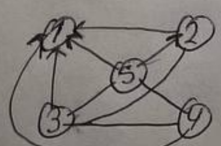
d) $R_2 \circ R_4 = \{(5,1)(5,2)(4,1)(3,1)(2,1)\}$



e) $R_4 \circ R_2 = \{(4,1)(5,1)\}$



f) $R_5 \backslash (R_4^{-1}) = \{(2,1)(2,3)(3,1)(3,2)(3,4)(3,5)$ $(4,1)(4,3)(4,5)(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)\}$



Задание 13

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\};$
$B = \{6, 7, 8, 9\};$
$C = \{10, 11, 12, 13\};$
$D = \{\square, \triangle, \bigcirc, *\}.$

Пусть $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ и $T \subseteq C \times D$ определены следующим образом

$$R = \{(1,7), (4,6), (5,6), (2,8)\};$$
$$S = \{(6,10), (6,11), (7,10), (8,13)\};$$
$$T = \{(11,\triangle), (10,\triangle), (13,*), (12,\square), (13,\bigcirc)\}.$$

Определить отношения

a) $R^{-1} = \{(7,1)(6,4)(6,5(8,2)\}$

b) $S^{-1} = \{(10,6),(11,6),(10,7),(13,8)\}$

c) $S^{-1} \circ S = \{(10,10)(10,11)(11,10)(11,11)(13,13)\}$

d) $S \circ S^{-1} = \{(6,6),(6,7),(7,6)(7,7)(8,8)\}$

e) $R \circ S = \{(1,10),(4,10)(4,11),(5,10),(5,11)(2,13)\}$

f) $S^{-1} \circ R^{-1} = \{(10,4),(10,5),(11,4),(11,5),(10,1),(13,2)\}$

g) $(R \circ S)^{-1} = \{(10,1),(10,4),(11,4),(10,5),(11,5),(13,2)\}$

h) $S \circ T = \{(6,\triangle),(7,\triangle),(8,*),(8,0)\}$

i) $(R \circ S) \circ T = \{(1,\triangle),(4,\triangle),(5,\triangle),(2,*)\}$

j) $R \circ (S \circ T) = \{(1,\triangle),(4,\triangle),(5,\triangle),(2,*),(2,0)\}$

Задание 14

Пусть $R_1 \subseteq A \times B, R_2 \subseteq B \times C, R_3 \subseteq C \times D, R \subseteq A \times B$. Доказать утверждения. Привести примеры.

a) $(R^{-1})^{-1} = R$

b) $(R_1 \cap R_3)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_3^{-1}$

c) $(R_1 \cup R_3)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_3^{-1}$ $R_1 \cup R_3 = \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ or } (x, y) \in R_3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (R_1 \cup R_3)^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R_1 \text{ or } (x, y) \in R_3\} = R_1^{-1} \cup R_3^{-1}$

d) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

e) $\overline{R^{-1}} = \bar{R}^{-1}$ (для R^{-1} универсум принять равным $B \times A$,
для R универсум принять равным $A \times B$)

$$\begin{cases} \overline{R^{-1}} = \{(y, x) \mid (y, x) \notin R^{-1} \ \& \ (y, x) \in B \times A\} = \{(y, x) \mid (y, x) \notin R^{-1} \ \& \ (x, y) \in A \times B\} \\ \bar{R}^{-1} = \{(y, x) \mid (y, x) \notin \bar{R}^{-1} \ \& \ (x, y) \in A \times B\} \end{cases} \Leftrightarrow \overline{R^{-1}} = \bar{R}^{-1}$$

ЗАНЯТИЕ 3: БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Вопросы:

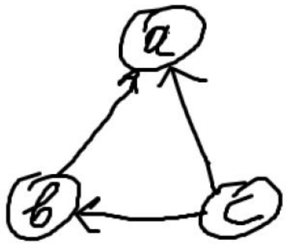
16. Что такое порождение элементом?
17. Определение разбиения.
18. Определение отношения нестрогого порядка, приведите три разных примера нестрогого порядка: а) заданное характеристикой, б) графом, с) перечислением.
19. Определение отношения строгого порядка, приведите три разных примера строгого порядка: а) заданное характеристикой, б) графом, с) перечислением.
20. Определение линейно упорядоченного множества, приведите три разных примера: а) заданное характеристикой, б) графом, с) перечислением.
21. Определение частично упорядоченного множества, приведите три разных примера: а) заданное характеристикой, б) графом, с) перечислением.
22. Определение отношений соответствия: взаимно-однозначное, одно-многозначное и т.д.
23. Определение функционального отношения, приведите примеры.
24. Определение всюду определенной функции, приведите примеры.
25. Определение недоопределенной (частично определенной) функции, приведите примеры.
26. Образ множества при заданном бинарном отношении.
27. Прообраз множества при заданном бинарном отношении.

16. Порождение класса, в отношении со всеми элементами которого находится данный элемент.

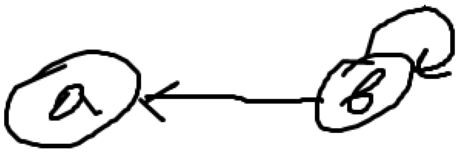
17. Разбиение <A> множества A – это такие непустые, попарно непересекающиеся множества, которые при объединении дают A.

19. Это такое отношение, которое обладает свойствами асимметричности и/или транзитивности.

A = {1} B = {2} R={(a, b) | a ∈ A b ∈ B} и R = {(1, 2), (1, 3)}



21. Частично упорядоченное множество – множество, не все элементы которого сравнимы (не для всех a, b найдутся пары aRb или bRa) Пример: A = {1} B = {1, 2} R = {(a, b)|a ∈ A b ∈ B} и R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3)}



22. Взаимно-однозначное – у каждого X один образ, у каждого Y один прообраз. Много-однозначные – у каждого X один образ, у каждого Y более одного образа. Одно-многозначное – у каждого X более одного образа, у каждого Y один прообраз. Много-многозначное – у каждого X более одного образа, у каждого Y более одного образа.

23. Функциональное отношение – каждому x ставится в соответствие не более одного y. Пример: R = {(1, 2), (2, 2)} и R = {(a, b), (c, d)}

26. Множество элементов, каждый из которых является образом хотя бы одного элемента из другого множества, называется образом.

Задание 15

Верно ли, что

✗ **1) существуют отношения, одновременно являющиеся асимметричными и несимметричными?**

✓ **2) существуют отношения, не являющиеся симметричными и не являющиеся асимметричными?**

✓ **3) если отношение асимметрично, то оно не является несимметричным?**

✓ **4) если отношение не является симметричным, то оно может быть асимметричным, либо несимметричным?**

✓ **5) если отношение aRb симметрично, то оно останется симметричным при перестановке элементов a и b?**

✓ **6) если отношение несимметрично, то оно не может быть асимметричным?**

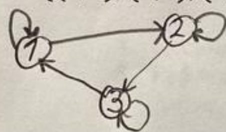
✗ **7) если отношение несимметрично, то оно одновременно является асимметричным?**

Задание 16

Дано антисимметричное бинарное отношение $R \subseteq A^2, A = \{1, 2, 3\}$

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1), X\}$$ $X = (3, 3)$

Найти X.



Задание 17

Доказать, что определения антисимметричности $R \subseteq A \times A$ эквивалентны.

1) $\forall a, b \in A$ верно $(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$;

2) $\forall a, b \in A$ верно $(a, b) \in R, a \neq b \Rightarrow (b, a) \notin R$.

1) $\forall a, b \in A \quad (a,b) \in R \quad (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

$\exists (x,y) \in R \quad \exists x \neq y \qquad \left.\begin{matrix} \exists (y,x) \in R \\ (x,y) \in R \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow$ пр-речие $\Rightarrow (y,x) \notin R \Rightarrow$ верно $\forall x, y$

2) $\forall a, b \in A \quad (a,b) \in R \quad a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin R$

$\exists (x,y) \in R \quad \exists (y,x) \in R$

$\left.\begin{matrix} \exists x \neq y \\ (x,y) \in R \end{matrix}\right\} \Rightarrow (y,x) \notin R -$ пр-речие $\Rightarrow x = y \Rightarrow$ верно $\forall x, y \in A$

Задание 18

✗ **1) может ли отношение быть интранзитивным и нетранзитивным одновременно?**

✗ **2) верно ли, что если отношение является нетранзитивным, то оно может быть транзитивным?**

✗ **3) существуют ли отношения, которые не являются транзитивными, не являются интранзитивными и не являются нетранзитивными одновременно?**

✓ **4) может ли отношение быть одновременно транзитивным и симметричным?**

✓ **5) существуют ли отношения, не являющиеся транзитивными и не являющиеся симметричными одновременно?**

✗ **6) верно ли, что если отношение нетранзитивно, то оно всегда несимметрично?**

✓ **7) может ли асимметричное отношение быть интранзитивным?**

Задание 19

Указать интранзитивные отношения:

1. квадратный корень (на $\mathbb{R}$)
2. старше, чем
3. больше в три раза (на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)
4. дружит
5. является предком
6. является матерью

Задание 20

Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$, а S, T, U и V — отношения на A, где

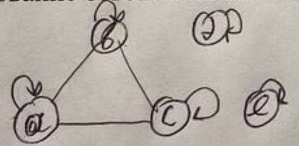
$$S = \{(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (c,e), (e,d), (c,a)\};$$
$$T = \{(a,b), (b,a), (b,c), (b,d), (e,e), (d,e), (c,b)\};$$
$$U = \{(a,b), (a,a), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a)\};$$
$$V = \{(a,b), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (d,d), (a,c), (c,a)\}.$$

Определите, какие отношения обладают свойствами:

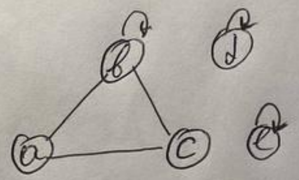
1. Симметричное U V
2. Антисимметричное S
3. Асимметричное S
4. Несимметричное T
5. Рефлексивное U
6. Антирефлексивное
7. Транзитивное U V
8. Интранзитивное S
9. Нетранзитивное T S

Обоснование ответа обязательно.

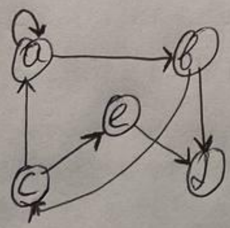
U:



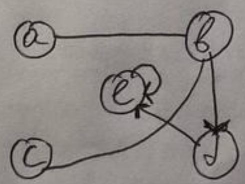
V:



S:



T:



Задание 21

Пусть $A \neq \emptyset$, $R \subseteq A \times A$. Доказать утверждение.

R симметрично $\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$.

R симметрично $\Leftrightarrow \forall a, b \in A:\ aRb \Rightarrow bRa \Leftrightarrow R = R^{-1}$

Задание 22

Отношения R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 заданы на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$R_1: \ aR_1b \ \leftrightarrow \ |a-b|=1;$

$R_2: \ aR_2b \ \leftrightarrow \ 0<a-b<3;$

$R_3: \ aR_3b \ \leftrightarrow \ a+b$ – четное число;

$R_4: \ aR_4b \ \leftrightarrow \ a \geq b^2;$

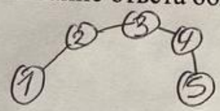
$R_5: \ aR_5b \ \leftrightarrow \ НОД(a,b)=1.$

Определить, какие отношения обладают свойствами:

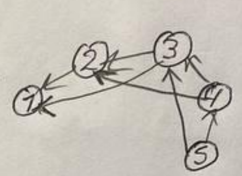
1. Симметричное R_1 R_3 R_5
2. Антисимметричное R_4
3. Асимметричное R_2
4. Несимметричное
5. Рефлексивное R_3
6. Антирефлексивное R_1 R_2
7. Транзитивное R_3 R_4 R_5
8. Интранзитивное R_1
9. Нетранзитивное R_5

Обоснование ответа обязательно.

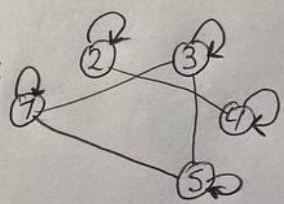
R_1:



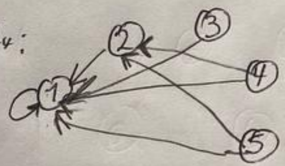
R_2:



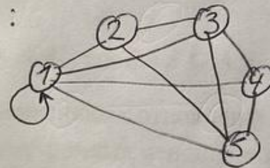
R_3:



R_4:



R_5:



Задание 23

Пусть $A \neq \emptyset$, $R \subseteq A \times A$, $B \neq \emptyset$, $S \subseteq B \times B$. Пусть $R \cap S \subseteq (A \cap B) \times (A \cap B)$.

(1) Доказать, что пересечение рефлексивных отношений R и S рефлексивно.

(2) Доказать, что пересечение симметричных отношений R и S симметрично.

(1) $\forall (a,b) \in R\cap S \Rightarrow \begin{cases} (a,b)\in R \overset{R\text{-рефл}}{\Rightarrow} (a,a)\in R \ \& \ (b,b)\in R \\ (a,b)\in S \overset{S\text{-рефл}}{\Rightarrow} (a,a)\in S \ \& \ (b,b)\in S \end{cases} \Rightarrow (a,a)\in R\cap S \ \& \ (b,b)\in R\cap S \Rightarrow R\cap S$ – рефлекс.

(2) $\forall (a,b) \in R\cap S \Rightarrow \begin{cases} (a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R \\ (a,b)\in S \Rightarrow (b,a)\in S \end{cases} \Rightarrow (b,a)\in R\cap S \Leftrightarrow R\cap S$ – симм.

Задание 24

Пусть $A \neq \emptyset$, $R \subseteq A \times A$. Доказать утверждение.

R асимметрично $\Leftrightarrow$ R антирефлексивно и антисимметрично.

($\Rightarrow$) R-асс $\Leftrightarrow \forall a,b\in A: aRb \ \& \ a\neq b \Rightarrow \neg bRa \Rightarrow \begin{cases} \forall a\in A \ \neg aRa \Leftrightarrow R\text{-антирефл} \\ \forall a,b\in A \ aRb \ \& \ bRa \Rightarrow a=b \Leftrightarrow R\text{-антисимм} \end{cases}$

($\Leftarrow$) $\begin{cases} R\text{-антирефл} \Leftrightarrow \forall a\in A \ \neg aRa \\ R\text{-антисимм} \Leftrightarrow \forall a,b\in A \ aRb \ \& \ bRa \Rightarrow a=b \end{cases} \Leftrightarrow \forall a,b\in A \ aRb \ \& \ a\neq b \Rightarrow \neg bRa \Rightarrow R$-асс.

Задание 25

Пусть $A \neq \emptyset$, $R \subseteq A \times A$, $B \neq \emptyset$, $S \subseteq B \times B$. Пусть $R \cup S \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$.

+1. Верно ли, что объединение рефлексивных отношений R и S рефлексивно?
+2. Верно ли, что объединение симметричных отношений R и S симметрично?
—3. Верно ли, что объединение антисимметричных отношений R и S антисимметрично?
—4. Верно ли, что объединение транзитивных отношений R и S транзитивно?

1) объединение множеств, где у каждого элемента есть петля => получим мн-во, где у каждого есть петля.

2) аналогично 1, только тут в R и S нет др

3) контр-пример: $R = \{(1,1)\ (1,2)\}$ $S = \{(1,1)\ (2,1)\}$ $R \cup S = \{(1,1)\ (2,1)\ (1,2)\}$ есть ребро.

4) контр-пример: $R = \{(1,2), (2,3)\ (1,3)\}$ $S = \{(1,3)\ (3,4)\ (1,4)\}$ =>
=> есть антитранзитивн. тройка

Задание 26

Пусть $A \neq \emptyset$, $R \subseteq A \times A$, $S \subseteq A \times A$. Пусть $R \circ S \subseteq A \times A$.

—1. Верно ли, что композиция рефлексивных отношений R и S рефлексивна?
—2. Верно ли, что композиция симметричных отношений R и S симметрична?
—3. Верно ли, что композиция антисимметричных отношений R и S антисимметрична?
—4. Верно ли, что композиция транзитивных отношений R и S транзитивна?

1) $R = \{(1,1)\ (1,2)\ (2,2)\}$ $R \circ S = \{(1,2)\ (1,3)\ (2,2)\ (2,3)\}$ не рефл.
$S = \{(2,2)\ (2,3)\ (3,3)\}$

2) $R = \{(1,2)\ (2,1)\}$
$S = \{(2,3)\ (3,2)\}$ $R \circ S = \{(1,3)\}$ не симм

3) $R = \{(1,2)\ (1,3)\ (1,1)\}$
$S = \{(2,3)\ (3,1)\ (3,3)\}$ $R \circ S = \{(1,3)\ (1,1)\ (3,3)\}$

4) $R = \{(1,2)\ (2,3)\ (1,3)\}$
$S = \{(4,5)\ (5,6)\ (4,6)\}$ $R \circ S = \emptyset$

Задание 27

Пусть $A \neq \emptyset$, $R \subseteq A \times A$, $R \neq \emptyset$. Выяснить, какие утверждения верны:

— a) всякое такое R должно обладать хотя бы свойством симметричности, либо антисимметричности. *оно м. б. несимметрич.*

\+ b) всякое такое R не может быть одновременно симметрично и антисимметрично. *очевидно*

— c) для любого такого R отношения $(R \cup R^{-1})$ и $(R \cap R^{-1})$ симметричны.

— d) для любого такого R отношение $R \setminus (R \cap R^{-1})$ антисимметрично.

\+ e) для любого такого R отношение $R \circ R^{-1}$ симметрично.

\+ f) для любого такого R отношение $R \circ R^{-1}$ рефлексивно.

c) пример $R = \{(1,2),(3,4)\} \Rightarrow R^{-1} = \{(2,1)(4,3)\} \Rightarrow R \cap R^{-1} = \emptyset$

d) пример $R = \{(1,2)(2,1)\} \Rightarrow R^{-1} = \{(1,2)(2,1)\} \Rightarrow R \cap R^{-1} = R \Rightarrow R \setminus (R \cap R^{-1}) = \emptyset$

e) для каждой пары (a,b) найдется $(b,a) \Rightarrow (a,a) \in R \circ R^{-1} \Rightarrow$ симметрично
или (b,b) и рефлексивно

Задание 28

Пусть $A = \{1,2,3\}$. Установите, является ли каждое из приведенных ниже отношений на A отношением эквивалентности. Для каждого отношения эквивалентности постройте классы эквивалентности.

— **а)** $R_1 = \{(2,2),(1,1)\}$;

— **б)** $R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$;

— **в)** $R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(3,1),(1,3)\}$;

— **г)** $R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(3,2),(2,1)\}$;

\+ **д)** $R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1)\}$. $[1]=\{1,2,3\}$
$[2]=\{1,2,3\}$
$[3]=\{1,2,3\}$

Задание 29

Установите, является ли каждое из перечисленных ниже отношений на A отношением эквивалентности. Для каждого отношения эквивалентности постройте классы эквивалентности.

+а) $A = \{-10, -9, -8, -7, \dots 0, 1, \dots, 9, 10\}$, и $(a, b) \in R$, если $a^2 = b^2$;

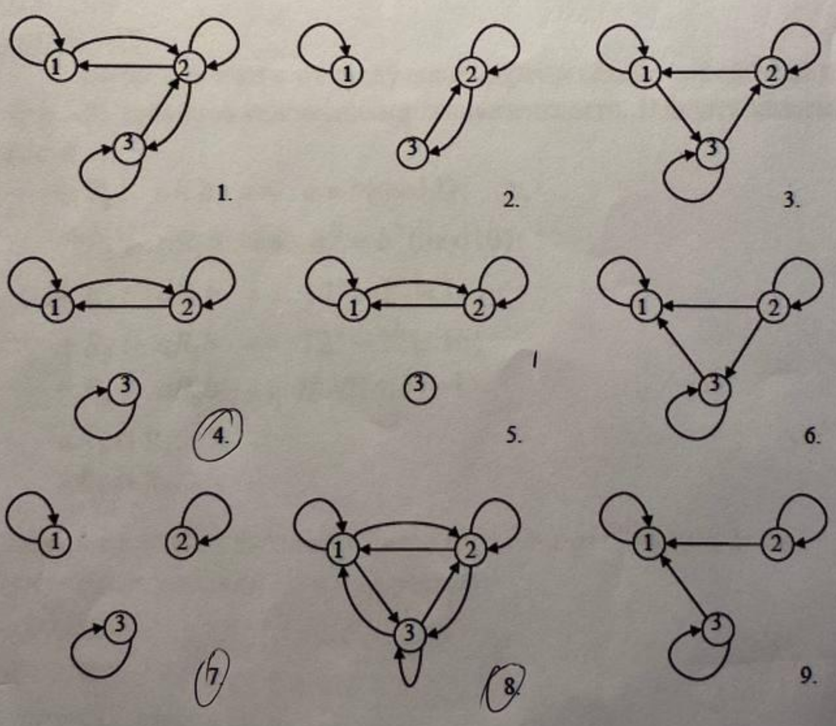
+б) A — множество упорядоченных пар целых чисел, и $(a, b)R(c, d)$, если $ad = bc$;

а) $[10] = \{-10; 10\}$ $[-9] = \{-9; 9\}$ аналогично $[-1] = \{-1; 1\}$ $[0] = \{0\}$
$[1] = \{-1; 1\}$ $[2] = \{-2; 2\}$ аналогично $[9] = \{-9; 9\}$ $[10] = \{-10; 10\}$

б) (a, b) $(c; d)$ $(e; f)$ $ad = bc = A$ $cf = fc = B$
$adcf = AB = af\,cd$
$bcdl = AB = be\,cd$ $\Rightarrow af = be \Rightarrow$ есть транзитивность. И очевидно, что есть рефлекс. и симметр

Задание 30

Какие из отношений являются отношениями эквивалентности. (Вспомните критерии рефлексивности, симметричности, транзитивности на графе)



Задание 31

Установите, какие из приведенных ниже совокупностей элементов составляют разбиение множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Если некоторая из совокупностей не входит в разбиение, объясните, почему. Для всех совокупностей, входящих в разбиение, перечислите элементы соответствующего отношения R, и если это перечисление представляется слишком длинным, опишите множество упорядоченных пар, не перечисляя их.

– а) $\{\{1, 2\}, \varnothing, \{3, 4, 5\}\{6, 7\}\}$;   + б) $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\{6, 7\}\}$;

– в) $\{\{1, 7\}, \{3, 4, 6\}\}$; нет 2 и 5   – г) $\{\{1, 5\}, \{3, 4, 5\}\{2, 6, 7\}\}$; пересекаются

+ д) $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$.

Задание 32

Выясните, какие из следующих перечисленных отношений на множестве $\{0,1,\ldots 9\}$ являются отношениями эквивалентности. Найдите классы эквивалентности.

+ $R_1: \ aR_1b \ \leftrightarrow \ a \equiv b \pmod 3$;
+ $R_2: \ aR_2b \ \leftrightarrow \ a^2 \equiv b^2 \pmod{10}$;
+ $R_4: \ aR_4b \ \leftrightarrow \ |2^a - 2^b| < 16$;
+ $R_5: \ aR_5b \ \leftrightarrow \ |2^a - 2^b| \le 16$;
– $R_6: \ aR_6b \ \leftrightarrow \ НОД(a,b) = 1$.

+ $R_1 \cap R_2$;
+ $R_1 \cap R_5$.

Запись $x \equiv y \pmod s$ означает $x = s \cdot p + k$, $y = s \cdot q + k$, где $0 \le k < s$.
(Остатки от деления x и y на s равны)

R_1: [0]={0, 3, 6, 9} [1]={1, 4, 7} [2]={2, 5, 8} [3]={0, 3, 6, 9} [4]={1, 4, 7} [5]={2, 5, 8} [6]={0, 3, 6, 9} [7]={1, 4, 7} [8]={2, 5, 8} [9]={0, 3, 6, 9}

R_2: [0]={0} [1]={1} [2]={2} [3]={3} [4]={4, 6} [5]={5} [6]={4, 6} [7]={7} [8]={
[9]={9}

R_4: [0]={0, 1, 2, 3, 4} [1]={0, 1, 2, 3, 4} [2]={0, 1, 2, 3, 4} [3]={0, 1, 2, 3, 4} [4]={0, 1, 2, 3, 4} [5]={5} [6]={6} [7]={7} [8]={8} [9]={9}

R_5: [0]={0, 1, 2, 3, 4} [1]={0, 1, 2, 3, 4} [2]={0, 1, 2, 3, 4} [3]={0, 1, 2, 3, 4} [4]={0, 1, 2, 3, 4, 5} [5]={4, 5} [6]={6} [7]={7} [8]={8} [9]={9}

$R_1 \cap R_2$: [0]={0} [1]={1} [2]={2} [3]={3} [4]={4} [5]={5} [6]={6} [7]={7} [8]={8} [9]={9}

$R_1 \cap R_5$: [0]={0, 3} [1]={1, 4}, [2]={2} [3]={0, 3} [4]={1, 4} [5]={5} [6]={6} [7]={7} [8]={8} [9]={9}

Задание 33

Даны бинарные отношения $R_1, \dots, R_9$ на указанных множествах.

1) «$a \in A$ на 4 больше, чем $b \in B$», где A — множество всех целых чисел; $A = B$; a

2) «$a \in A$ есть делитель $b \in B$», где $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{4, 8, 9, 25, 27, 125\}$; b

3) «пассажир $a \in A$ едет в вагоне $b \in B$», где A — множество пассажиров поезда; B — множество вагонов; $|B| > 1$; в каждом вагоне более одного пассажира; C

4) «$a \in A$ слушает лекцию в аудитории $b \in B$», где A — множество студентов; B — множество аудиторий; $|B| > 1$; в каждой аудитории более одного студента; C

5) «$2a \neq 3b$», где $a, b \in \{1, 2, 3\}$; d

6) «$a - b = 0$», где a и b — натуральные числа; a

7) «$a \geqslant b$», где $a \in \{6, 7, 9\}$; $b \in \{3, 4\}$; d

8) «$a + b$ — нечетное число», где $a \in \{2, 3, 4, 5\}$; $b \in \{6, 7, 8, 9\}$; d

9) «скрипка $a \in A$ находится в футляре $b \in B$», где A — множество скрипок, B — множество футляров. a

Указать a) взаимно-однозначные соответствия, b) одно-многозначные, c) много-однозначные, d) много-многозначные.

Задание 34

Упражнения

1. Чему равно значение функции $y = 3x^2 - 7$, если значение аргумента равно трем? 20

2. Дано: $y = F(x)$, где $F \subset X \times Y$; $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Функция y задана следующим образом:

$$y = 1, \text{ если } x \in X \text{ — четное число;}$$
$$y = 2, \text{ если } x \in X \text{ — нечетное число.}$$

Определите область значений функции y. $= \{1, 2\}$

Определите область определения функции y. $= \{1, 2, 3, 4\}$

3. Дано: $y = F(x)$, где $F \subset X \times Y$; $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Укажите функциональные отношения:

−1) $F = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5)\}$;

−2) $F = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}$;

+3) $F = \{(3, 1), (4, 5), (1, 5), (2, 2), (5, 3)\}$;

+4) $F = \{(5, 1), (1, 5), (2, 4), (4, 2)\}$;

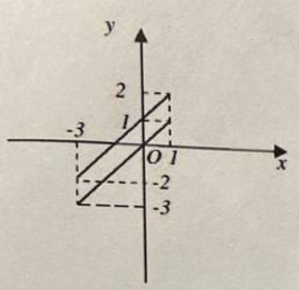
−5) $F = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$;

+6) $F = \{(2, 2), (3, 3), (4, 3), (5, 3)\}$.

4. В предыдущем упражнении укажите неполностью определенные функции. 4, 6

Задание 35

Пусть $X = [-3,1]$, $Y = [-3,2]$, $R \subseteq X \times Y$. R задано графиком.



$Dom(R) = \{x \mid x \in [-3,1]\}$

$Im(R) = \{y \mid y \in [-3,2]\}$

a) Найти $\mathrm{Dom}(R)$, $\mathrm{Im}(R)$;
b) Установить, какие записи верны: $1R1$, $1R2$, $-3R{-1}$;
c) Определить тип соответствия. много-многозначное

Задание 36*

Доказать утверждение. $S \subseteq T, U \subseteq V \Rightarrow S \circ U \subseteq T \circ V$.

Задание 37*

Доказать утверждение.

Если A – конечное множество мощности n, $R \subseteq A \times A$, то отношение $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$, будет наименьшим (по добавлению упорядоченных пар) транзитивным отношением, включающим R как подмножество.

Здесь R^k означает $\underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{k \text{ раз}}$ – композиция k отношений R.

Задание 38*

Пусть $A \neq \emptyset$, $R \subseteq A \times A$. Доказать утверждение.

$R = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad R$ антирефлексивно, симметрично, антисимметрично, асимметрично, транзитивно, антитранзитивно.

Задание 39* (Здесь Z – множество целых чисел)

Определите, какие из следующих отношений на Z^2 являются отношениями эквивалентности:

$R_1 : (x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 = x_2;$

$R_3 : (x_1, y_1) R_3 (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2;$

$R_4 : (x_1, y_1) R_4 (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2;$

$R_5 : (x_1, y_1) R_5 (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 < x_2$ **или** $x_1 = x_2,\ y_1 \le y_2?$

Найдите для них классы эквивалентности.

Для отношений с обнаруженными классами эквивалентности предоставьте изображение в виде графа над множеством $A \times A$, где $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.