Рисунки для номеров 5, 6, 7 находятся на последней странице документа.

№3

$A(3;1;-2)\quad B(3;-2;2)\quad C(2;3;-4)\quad D(3;4;0)$

$\overline{AB} = (3-3; -2-1; 2+2) = (0; -3; 4)$

$|\overline{AB}| = \sqrt{0^2+3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \bar i \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \bar k \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\bar i - 4\bar j - 3\bar k = (-2; -4; -3)$$

$|\overline{AC}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{2^2+4^2+3^2} = \sqrt{29}$

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -1\cdot 0 - 3\cdot 2 - 2\cdot 4 = -14$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = -\frac{14}{5\cdot 3} = -\frac{14}{15}$$

Векторы $3\overline{AB}$ и $5\overline{AC}$ имеют одинаковую длину => их сумма $\bar b$ направлена по биссектрисе угла φ. $\bar b = (0; -9; 12) + (-5; 10; -10) = (-5; 1; 2)$

По известным свойствам:

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{29}$

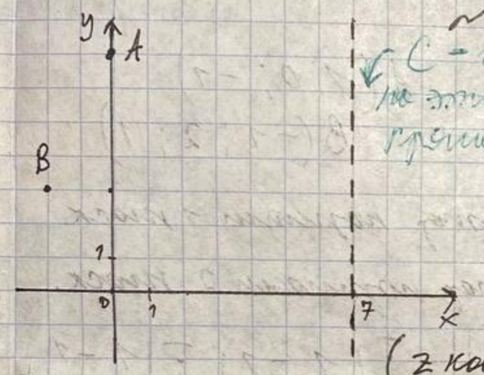
$V_{ABCD} = \left|\frac{1}{6}\,\overline{AB}\cdot(\overline{AC}\times\overline{AD})\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & -3 & 4\\ -1 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}\right| =$

$= \left|\frac{1}{6}\left(3\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}\right)\right| =$

$= \left|\frac{1}{6}(-6-12)\right| = 3$

$h_D = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{9}{\frac{1}{2}\sqrt{29}} = \frac{18}{\sqrt{29}}$

№4



C - где-то на этой прямой

$A(0;7)$ $B(-2;3)$

$C(7;y)$ $S_{\triangle ABC} = 3$

Перейдем в пространство (z коорд = 0 у всех точек)

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overline{CA}\times\overline{CB}| = 3 \Leftrightarrow |\overline{CA}\times\overline{CB}| = 6$

$\overline{CA} = (-7;\ 7-y;\ 0)$ $\overline{CB} = (-9;\ 3-y;\ 0)$

$\overline{CA}\times\overline{CB} = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -7 & 7-y & 0\\ -9 & 3-y & 0\end{vmatrix} = (0;\ 0;\ 42-2y)$

$|\overline{CA}\times\overline{CB}| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(42-2y)^2} = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |42-2y| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}42-2y=6\\ 42-2y=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=24\\ y=18\end{array}\right.$

$\Rightarrow A(0;7)\quad B(-2;3)\quad C(7;24) \,||\, C(7;18)$

$AB:\quad \frac{x}{-2} = \frac{y-7}{-4}$

$AC:\quad \frac{x}{7} = \frac{y-7}{17}$ или $\frac{x}{7} = \frac{y-7}{11}$

$BC:\quad \frac{x+2}{9} = \frac{y-3}{21}$ или $\frac{x+2}{9} = \frac{y-3}{15}$

№5

$l: \begin{cases} x+y-z=0 & \alpha \\ 3x-7y+3z=11 & \beta \end{cases}\qquad A(1;0;-1)\quad B(-1;2;1)$

$\overline{n}_\alpha = (1;1;-1)$ - вектор нормали 1 плоск.

$\overline{n}_\beta = (3;-7;3)$ - вектор нормали 2 плоск.

$\overline{v} = \overline{n}_\alpha \times \overline{n}_\beta = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -7 & 3 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} +$

$+\overline{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -4\overline{i} - 6\overline{j} - 10\overline{k} = (-4;-6;-10)$

- направляющий вектор прямой l

Найдем какую-нибудь точку M, принадлежащую прямой l

$\exists M(0;y;z)$ Подставим в систему

$\begin{cases} y-z=0 \\ -7y+3z=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ z=-2,75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2,75 \\ z=-2,75 \end{cases}$

№5 (продолжение)

Орлов

$\Rightarrow M(0; -2,75; -2,75) \in \ell$

Запишем ур-ие прямой ℓ, проходящей через точку M и с напр. вект $\bar{v}$:

$$\ell: \frac{x}{-4} = \frac{y+2,75}{-6} = \frac{z+2,75}{-10}$$

$\exists T \in \ell$ — искомая равноудаленная от A и B точка

$\exists x_T = t$: выразим остальные координаты:

$$\frac{t}{-4} = \frac{y+2,75}{-6} \Leftrightarrow 3t = 2y + 5,5 \Leftrightarrow y = 1,5t - 2,75$$

$$\frac{t}{-4} = \frac{z+2,75}{-10} \Rightarrow 5t = 2z + 5,5 \Leftrightarrow z = 2,5t - 2,75 \Rightarrow$$

$\overline{AT} = (t-1;\ 1,5t - 2,75;\ 2,5t - 1,75) \Rightarrow$

$\overline{BT} = (t+1;\ 1,5t - 4,75;\ 2,5t - 3,75)$

$\Rightarrow |\overline{AT}| = |\overline{BT}| \overset{\Leftrightarrow \text{равноудаленна}}{\Leftrightarrow} (t-1)^2 + (1,5t - 2,75)^2 + (2,5t - 1,75)^2 =$

$= (t+1)^2 + (1,5t - 4,75)^2 + (2,5t - 3,75)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9,5t^2 - 19t + 11,625 = 9,5t^2 - 31t + 37,625 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12t = 26 \Leftrightarrow t = \frac{13}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{2};\ z = \frac{8}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{T = \left(\frac{13}{6};\ \frac{1}{2};\ \frac{8}{3}\right)}$ — искомая точка

№6

Так как действительная ось гиперболы лежит на OX, а центр в начале координат, то её ур-ие имеет канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

асимптота гиперболы имеет следующий вид: $y=\pm\frac{b}{a}x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ угловой коэф. $k=\pm\frac{b}{a}$

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

т. к. $\varepsilon=2k \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2b}{a}$

т. к. $M(3;-1)\in$ гиперболе $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$ составим систему:

$$\begin{cases}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2b}{a}\\ \frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\end{cases} \overset{\frac{2b}{a}>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases}1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{4b^2}{a^2}\\ \frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3b^2}{a^2}=1\\ \frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=3b^2\\ \frac{9}{3b^2}-\frac{1}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 = 3b^2 \\ \frac{2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3b^2 \\ b = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{6} \\ b = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ур-ие гиперболы: $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$

найдем пересечение гиперболы с окр $x^2 + y^2 = 10$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{6} - \frac{10 - x^2}{2} = 1 \\ y^2 = 10 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 30 + 3x^2 = 6 \\ y^2 = 10 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 36 \\ y^2 = 10 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

точки $(3; 1)$, $(3; -1)$, $(-3, 1)$, $(-3, -1)$ – точки пересечения гиперболы с окружностью

№7

$$5x^2+5y^2-8xy-18\sqrt{2}x+18\sqrt{2}y+27=0$$

Выполним поворот осей по формулам: $x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha$

$y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha$

$5(x_1^2\cos^2\alpha-2x_1y_1\cos\alpha\sin\alpha+y_1^2\sin^2\alpha)+$
$+5(x_1^2\sin^2\alpha+2x_1y_1\sin\alpha\cos\alpha+y_1^2\cos^2\alpha)-$
$-8(x_1^2\sin\alpha\cos\alpha+x_1y_1(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-$
$-y_1^2\sin\alpha\cos\alpha)-18\sqrt{2}(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)+$
$+18\sqrt{2}(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)+27=0$

Приравняем к нулю коэффициент при x_1y_1:

$-10x_1y_1\cos\alpha\sin\alpha+10x_1y_1\sin\alpha\cos\alpha-$
$-8(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)x_1y_1=$
$=-8(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)x_1y_1$

$-8(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0 \Leftrightarrow$ считаем угол поворота острым

$\Rightarrow \cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0 \Leftrightarrow tg^2\alpha=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow tg\,\alpha=1 \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Подставим в ур-ие:

$\frac{5}{2}x_1^2+\frac{5}{2}y_1^2+\frac{5}{2}x_1^2+\frac{5}{2}y_1^2-4x_1^2+4y_1^2-18x_1+18y_1$
$+18x_1+18y_1+27=0 \Leftrightarrow$

№7 (продолжение) Орлов

$\Rightarrow x_1^2+9y_1^2+36y_1+27=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2+9(y_1^2+4y_1+4)-9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2+9(y_1+2)^2-9=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{9}+\frac{(y_1+2)^2}{1}=1$

Выполнив параллельный перенос по формулам $x_1=X$; $y_1+2=Y$:

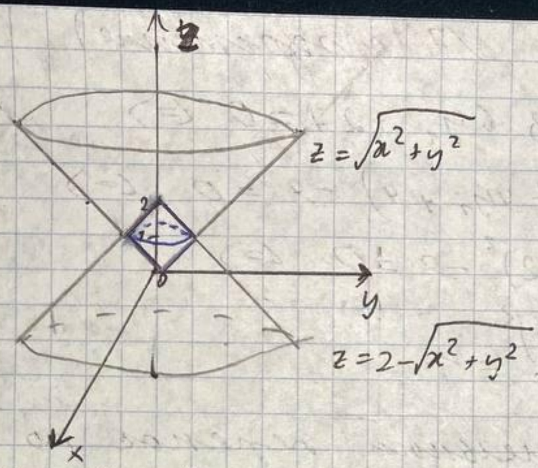
$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{1}=1$ это эллипс с полуосями 3 и 1

№8

а) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ – это конус, а точнее его половина, расположенная в положительной части оси z

$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ – аналогичный конус, только другая его половина и смещенная на 2 единица вверх по оси z



$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-z^2=0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{1}=0$

в) $x^2+z^2=4$; $y=x^2+z^2-4$; $y=3$

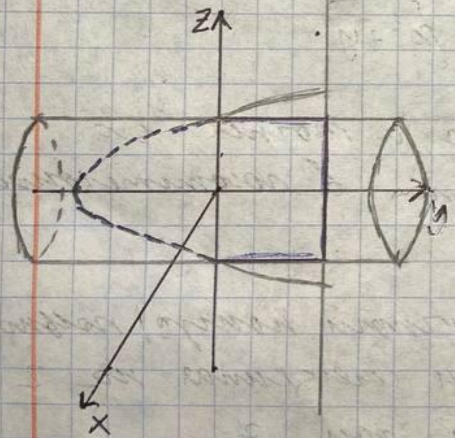
$x^2+z^2=4$ − цилиндр, ось симметрии − Ox

$y=x^2+z^2-4$ − параболоид

$y=3$ − плоскость

$y=x^2+z^2-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+z^2=y+4$



c) $z=-1+\sqrt{2-x^2-y^2}$ $z=-\sqrt{x^2+y^2-1}$

$z=-1-\sqrt{3}+\sqrt{x^2+y^2+1}$

$z=-1+\sqrt{2-x^2-y^2}$ — полусфера (верхняя часть сферы) (половина)

$z=-1+\sqrt{2-x^2-y^2} \Leftrightarrow z+1=\sqrt{2-x^2-y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (z+1)^2=2-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+(z+1)^2=2$

$z=-\sqrt{x^2+y^2-1}$ — нижняя (половина) часть однополостного гиперболоида

$z=-\sqrt{x^2+y^2-1} \Rightarrow z^2=x^2+y^2-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-z^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{1}=1$

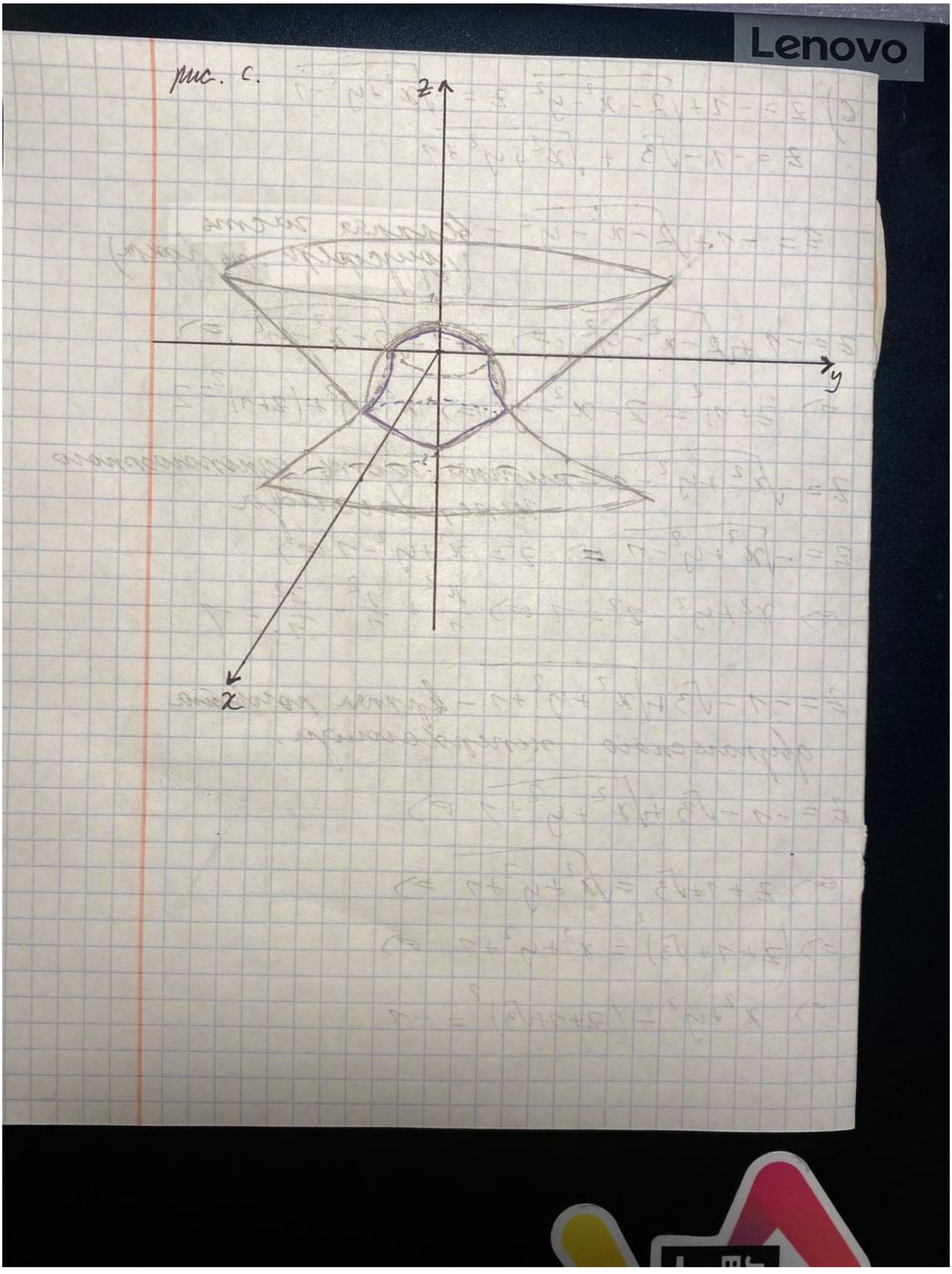
$z=-1-\sqrt{3}+\sqrt{x^2+y^2+1}$ — верхняя половина двуполостного гиперболоида.

$z=-1-\sqrt{3}+\sqrt{x^2+y^2+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z+1+\sqrt{3}=\sqrt{x^2+y^2+1} \Rightarrow$

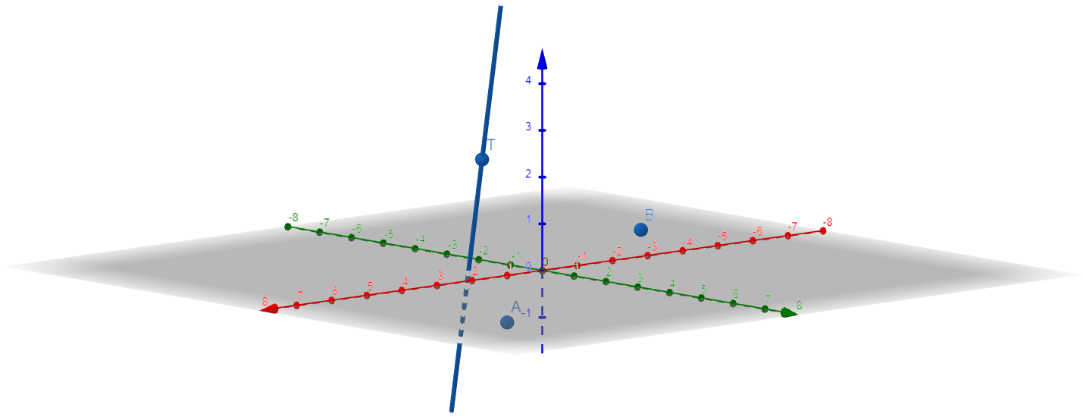
$\Rightarrow (z+1+\sqrt{3})^2=x^2+y^2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-(z+1+\sqrt{3})^2=-1$

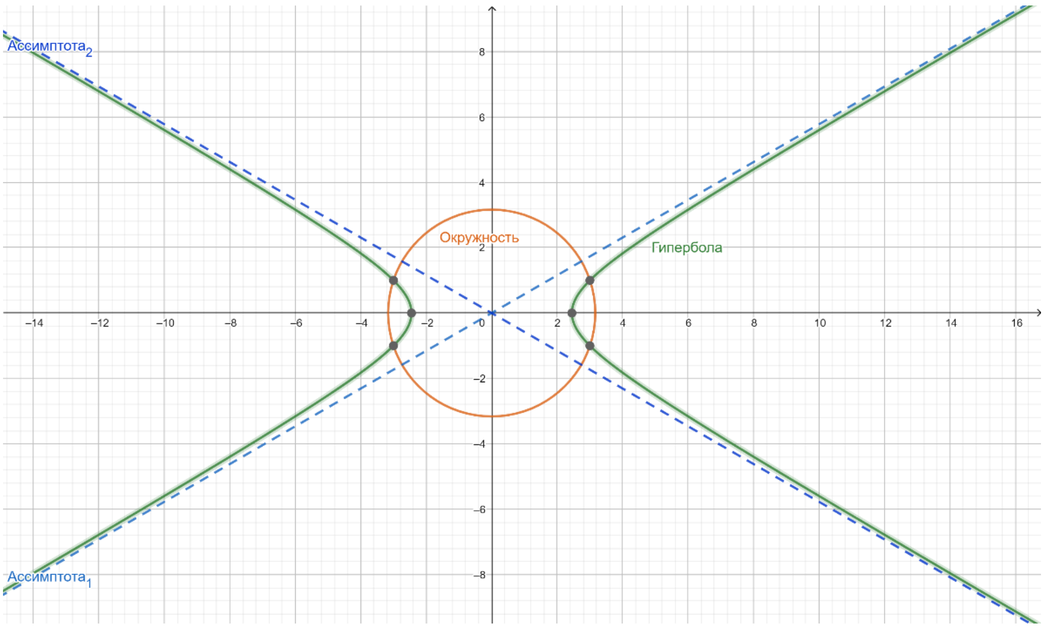


Изображения к номерам 5, 6, 7:

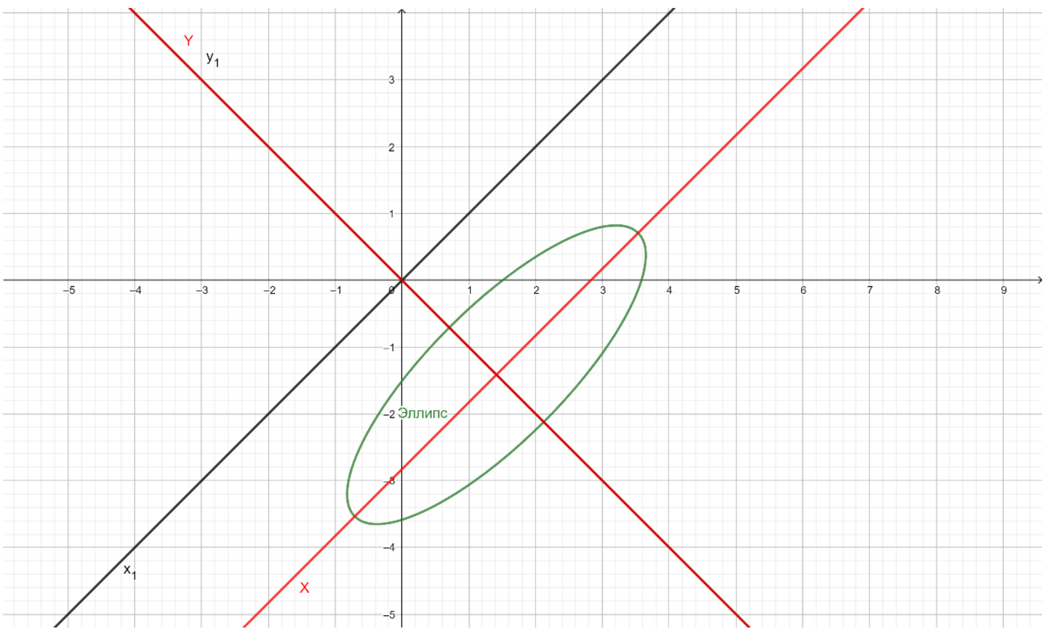
5)



6)


Ассимптота$_2$
Ассимптота$_1$
Окружность
Гипербола

7)


Y
y_1
x_1
X
Эллипс