

Obsah

Úvod	2
I Konvexní optimalizace	3
1 Základní geometrické pojmy	4
1.1 Přímký a úsečky	4
1.2 Affiní prostory	4
1.3 Konvexní množiny	5
1.4 Kužely	5
1.5 Nadroviny a poloprostory	6
1.6 Polyedry a polytopy	8
2 Lineární programování	10
2.1 Formulace úlohy	10
2.2 Dualita	11
2.3 Komplementární skluzovost	12
3 Semidefinitní programování	14
4 Kuželové programování	15
II Kombinatorické úlohy	16
5 Shannonova kapacita	17
5.1 $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$	18
6 Problém maximálního řezu	21
7 Problém obchodního cestujícího	22

<i>OBSAH</i>	1
III Experimenty	23
8 Lovászova theta funkce	24
9 Problém maximálního řezu	25
Závěr	26

Úvod

Část I

Konvexní optimalizace

Kapitola 1

Základní geometrické pojmy

1.1 Přímky a úsečky

Mějme dva body $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $x_1 \neq x_2$ a parametr $\theta \in \mathbb{R}^n$. Potom výraz

$$y = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \quad (1.1)$$

popisuje **přímku** procházející body x_1 a x_2 . Pro $\theta = 0$ dostáváme bod x_2 a pro $\theta = 1$ bod x_1 . Omezíme-li θ na interval $\langle 0, 1 \rangle$, dostaneme **úsečku** s koncovými body x_1 a x_2 . Výraz 1.1 lze přepsat do tvaru

$$y = x_2 + \theta(x_1 - x_2),$$

který můžeme interpretovat jako součet počátečního bodu x_2 a nějakého násobku směrového vektoru $x_1 - x_2$.

1.2 Afinity prostory

Říkáme, že $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je **afinní prostor**, jestliže přímka procházející libovolnými dvěma různými body z C leží v C . Tedy C obsahuje lineární kombinace libovolných dvou bodů z C , jestliže součet koeficientů lineární kombinace je roven jedné. To lze zobecnit i pro více než dva body. Lineární kombinace $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$ bodů x_1, \dots, x_k taková, že $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$, se nazývá **afinní kombinace** bodů x_1, \dots, x_k . Indukcí z definice afinního prostoru lze snadno ukázat, že pokud C je afinní množina, $x_1, \dots, x_k \in C$ a $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$, potom bod $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \in C$.

Nechť C je afinní prostor a $x_0 \in C$, potom množina

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in C\}$$

je **vektorový prostor**, tj. množina, která je uzavřená na sčítání a násobení skalárem.

Afinní prostor C lze vyjádřit jako

$$C = V + x_0 = \{v + x_0 \mid v \in V\},$$

kde V je vektorový prostor a x_0 je počátek. Poznamenejme, že vektorový prostor V asociovaný s afinním prostorem C nezávisí na volbě počátku x_0 .

Dimenze afinního prostoru $C = V + x_0$ je definována jako dimenze vektorového prostoru $V = C - x_0$, kde x_0 je libovolný prvek z C . Množina všech afinních kombinací bodů množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **afiní obal** množiny C . Afinní obal množiny C budeme značit

$$\mathbf{aff} C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \dots, x_k \in C, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}.$$

Afinní obal je nejmenší afinní prostor, který obsahuje množinu C . Tedy, jestliže S je afinní prostor takový, že $C \subseteq S$, potom $\mathbf{aff} C \subseteq S$.

1.3 Konvexní množiny

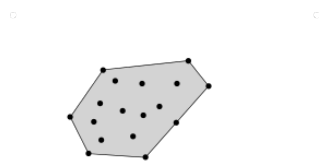
Říkáme, že množina C je **konvexní**, jestliže úsečka mezi libovolnými dvěma body z C leží také v C . Jinak řečeno, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in C$ a libovolné $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ platí, že $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C$. Poznamenejme, že každý afinní prostor je zároveň konvexní množinou. Podobně jako afinní kombinaci definujeme **konvexní kombinaci** bodů x_1, \dots, x_k jako $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0$ pro $i = 1, \dots, k$. **Konvexní obal** množiny C je množina všech konvexních kombinací bodů z množiny C , značíme

$$\mathbf{conv} C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}.$$

Analogicky, konvexní obal množiny C je nejmenší konvexní množina, která obsahuje množinu C . Pro představu viz obrázek 1.1.

1.4 Kužely

Množina C se nazývá **kužel**, jestliže pro každé $x \in C$ a $\theta \geq 0$ platí, že $\theta x \in C$. Je-li C navíc konvexní, pak se C nazývá **konvexní kužel**. Tedy C je konvexní kužel, jestliže pro libovolné $x_1, x_2 \in C$ a $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ platí, že $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$. Říkáme, že bod ve tvaru $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1, \dots, \theta_k \geq 0$ je **kuželovou kombinací** bodů x_1, \dots, x_k . Dále, pokud x_i leží v konvexním kuželu množiny C , potom libovolná kuželová kombinace bodu x_i leží rovněž

(a) Množina bodů C (b) $\text{conv } C$

Obrázek 1.1: Konvexní obal množiny

v konvexním kuželu množiny C . Platí, že množina C je konvexní kužel právě tehdy, když C obsahuje všechny kuželové kombinace svých bodů. **Kuželový obal** množiny C je množina, která obsahuje všechny kuželové kombinace množiny C , tj.

$$\text{cone } C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \dots, k\}.$$

Kuželový obal množiny C je zároveň nejmenší konvexní kužel, který obsahuje množinu C . Pro představu viz obrázek 1.2.

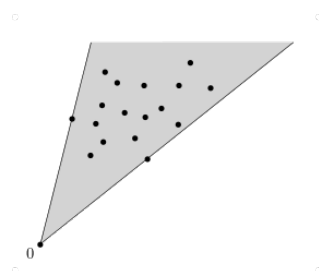
1.5 Nadroviny a poloprostory

Nadrovina je množina ve tvaru

$$\{x \mid a^T x = b\},$$

kde $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Analyticky se na nadrovinu koukáme jako na množinu všech řešení netriviální lineární rovnice. Geometricky zase jako na množinu všech bodů takových, že mají konstantní skalární součin s normálovým vektorem a . Konstanta b značí posunutí nadroviny od počátku. Nadrovinu také můžeme vyjádřit jako

$$\{x \mid a^T(x - x_0) = 0\} = x_0 + \{v \mid a^T v = 0\},$$

(a) Množina bodů C (b) **cone** C

Obrázek 1.2: Kuželový obal množiny

kde x_0 je libovolný bod této nadroviny a $\{v \mid a^T v = 0\}$ je množina všech vektorů, které jsou kolmé k normálovému vektoru a . Nadrovina je tedy množina, která obsahuje bod x_0 a libovolný bod ve tvaru $x_0 + v$, kde v je vektor, který je kolmý k normálovému vektoru a . Pro ilustraci v \mathbb{R}^2 viz obrázek 1.3a.

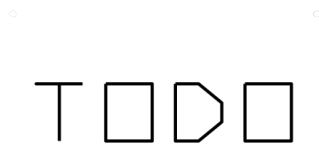
Nadrovina dělí \mathbb{R}^n na dva poloprostory. Množina

$$\{x \mid a^T x \leq b\}, \text{ resp. } \{x \mid a^T x < b\},$$

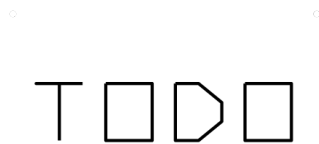
kde $a \neq 0$ se nazývá (uzavřený) **poloprostor**, resp. **otevřený poloprostor**. Je to tedy množina všech řešení netriviální lineární nerovnice. Podobně jako nadrovinu, můžeme poloprostor vyjádřit ve tvaru

$$\{x \mid a^T(x - x_0) \leq 0\}, \text{ resp. } \{x \mid a^T(x - x_0) < 0\},$$

kde $a \neq 0$ a x_0 je libovolný bod z nadroviny $\{x \mid a^T x = b\}$. Poloprostor tedy obsahuje bod x_0 a libovolný bod $x_0 + v$, kde v je vektor, který s vnějším normálovým vektorem svírá tupý nebo pravý úhel. Tato interpretace je v \mathbb{R}^2 ilustrována na obrázku 1.3b. Ještě poznamenejme, že poloprostory jsou konvexní množiny, ale samozřejmě nejsou affíní.



(a) Nadrovina



(b) Poloprostor

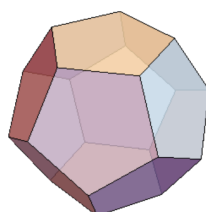
Obrázek 1.3: Nadrovina a poloprostor v \mathbb{R}^2 .

1.6 Polyedry a polytopy

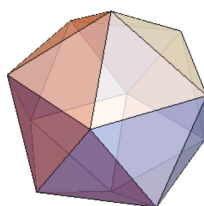
Mějme konečně mnoho uzavřených poloprostorů v \mathbb{R}^n . Množina, která vznikne jejich průnikem se nazývá **polytop**. Je-li navíc polytop omezený, potom ho nazýváme **polyedr**. Polyedr lze také ekvivalentně definovat jako konvexní obal konečně mnoha bodů v \mathbb{R}^n . Příkladem polyedrů v \mathbb{R}^3 jsou např. platónská tělesa, viz obrázek 1.4. Důležitý fakt říká Minkowského-Weyleova věta: každý polytop P je konečně generovaný a můžeme ho vyjádřit jako

$$P = \mathbf{conv} (u_1, \dots, u_r) + \mathbf{cone} (v_1, \dots, v_s),$$

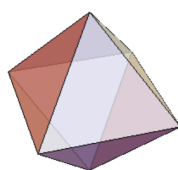
kde u_i, v_i jsou extrémní vrcholy P .



(a) Dodecahedron.



(b) Icosahedron.



(c) Octahedron.

Obrázek 1.4: Platónská tělesa.

Kapitola 2

Lineární programování

2.1 Formulace úlohy

Úlohou lineárního programování rozumíme minimalizaci nebo maximalizaci lineární **účelové funkce** vzhledem k lineárním **omezením**, kde tato omezení jsou dána soustavou lineární rovnic a nerovnic. Úlohu lineárního programování lze formulovat v několika ekvivalentních tvarech, které se liší zadáním omezení. Úloha v **kanonickém tvaru** má svá omezení dána soustavou lineárních nerovnic $Ax \leq b$. Tedy:

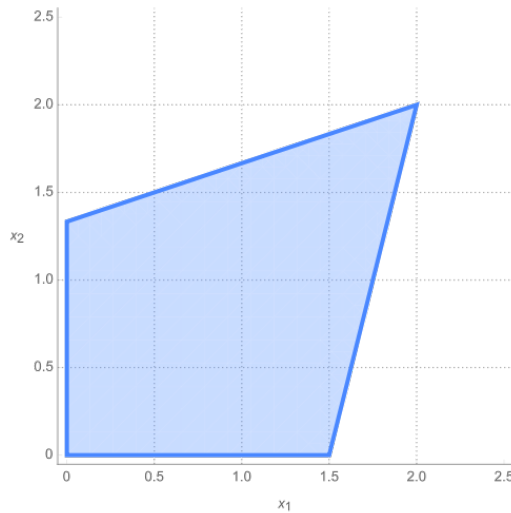
$$\max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}, \quad (\text{LP-P})$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^n$. **Přípustná množina řešení** je průnikem poloprostorů, které jsou definovány soustavou nerovnic $Ax \leq b$ a **nezáporného ortantu**, tj. množiny $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$. Obě tyto množiny jsou konvexní a tedy i jejich průnik je rovněž konvexní množina. Dále, protože přípustnou množinu máme popsanou soustavou konečně mnoha lineárních nerovnic, geometricky se na úlohu LP-P můžeme koukat jako na maximalizaci lineární funkce přes polyedr, který je definován touto soustavou.

Příklad. Mějme následující úlohu:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{P1})$$

Přípustná množina řešení je zobrazena na obrázku 2.1. Řešením úlohy je vektor $x^* = (2, 2)$ s cenou 4. Implementace v softwaru MOSEK: <https://github.com/c0n73x7/D1PL0MK4/blob/master/mosek/ex1.py>.



Obrázek 2.1: Přípustná množina řešení k úloze P1.

2.2 Dualita

Úloha LP-P se nazývá **primární úloha**. Ke každé primární úloze můžeme přiřadit příslušnou **duální úlohu**. Je to opět úloha lineárního programování, která pro případ LP-P je ve tvaru:

$$\min \{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\}. \quad (\text{LP-D})$$

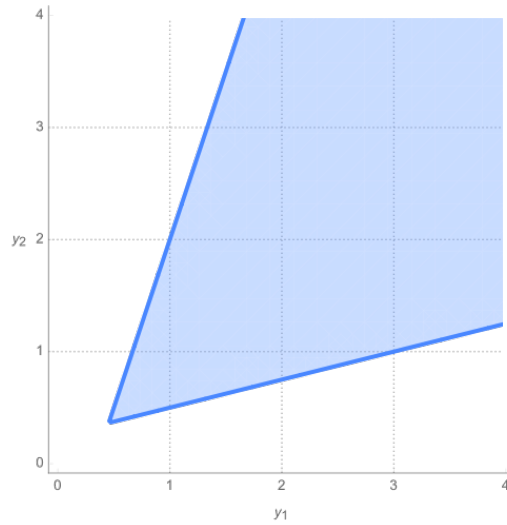
Příklad. Duální úloha k úloze P1 je ve tvaru:

$$\begin{aligned} \min \quad & 4y_1 + 6y_2 \\ & -y_1 + 4y_2 \geq 1 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{P2})$$

Přípustná množina řešení je zobrazena na obrázku 2.2. Řešením úlohy je vektor $y^* \approx (0.4546, 0.3636)$ s cenou 4. Implementace v softwaru MOSEK: <https://github.com/c0n73x7/D1PL0MK4/blob/master/mosek/ex2.py>.

Všimněme si, že v příkladech P1 a P2 mají řešení x^* i y^* stejnou cenu. To není náhoda a tento fakt je obsahem silné věty o dualitě, kterou dokázala skupina kolem Alberta W. Tuckera v roce 1948. Začneme slabou větou o dualitě.

Věta 1 (Slabá o dualitě). *Nechť \tilde{x} je přípustné řešení LP-P a \tilde{y} je přípustné řešení LP-D. Potom $c^T \tilde{x} \leq b^T \tilde{y}$.*



Obrázek 2.2: Přípustná množina řešení k úloze P2.

Tedy každé přípustné řešení \tilde{y} duální úlohy LP-D nám dává horní odhad na maximum účelové funkce primární úlohy LP-P. Graficky můžeme slabou větu o dualitě interpretovat jako na obrázku 2.3. Zatím tedy nevíme, zda vždy existují přípustná (optimální) řešení x^* pro úlohu LP-P a y^* pro úlohu LP-D, pro která platí $c^T x^* = b^T y^*$. Kladnou odpověď dostaneme z již zmíněné silné věty od dualitě.



Obrázek 2.3: Slabá věta o dualitě.

Věta 2 (Silná o dualitě). *Jestliže úlohy LP-P a LP-D mají přípustná řešení. Potom*

$$\max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min \{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\}.$$

Se znalostí silné věty o dualitě můžeme obrázek 2.3 upravit na obrázek 2.4.

2.3 Komplementární skluzovost

Pro odvození tzv. podmínky komplementární skluzovosti nejprve převedeme úlohu LP-P a LP-D do jiných tvarů. V primární úloze povolíme $x \in \mathbb{R}^n$. Tedy



Obrázek 2.4: Ceny přípustných řešení primární a příslušné duální úlohy.

primární úloha je ve tvaru:

$$\max \{c^T x \mid Ax \leq b\}. \quad (\text{LP-P2})$$

A příslušná duální úloha je ve tvaru:

$$\min \{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\}. \quad (\text{LP-D2})$$

Nechť \tilde{x} je přípustné řešení a x^* je optimální řešení úlohy LP-P2, \tilde{y} je přípustné řešení a y^* je optimální řešení úlohy LP-D2. **Dualitní rozdíl** \tilde{x} a \tilde{y} je číslo $b^T \tilde{y} - c^T \tilde{x} \geq 0$. Ze silné věty o dualitě samozřejmě plyne, že pro optimální řešení x^* a y^* je dualitní rozdíl roven 0. Vyjdeme z dualitního rozdílu optimálních řešení:

$$b^T y^* - c^T x^* = y^{*T} b - y^{*T} A x^* = y^{*T} (b - A x^*) = 0.$$

Poslední rovnost přepíšeme maticově:

$$[y_1^*, \dots, y_m^*] \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic $y_i^* (b_i - a_{i-} x^*) = 0$, kde $i = 1, \dots, m$. Tedy buď $y_i^* = 0$ nebo $b_i - a_{i-} x^* = 0$. **Podmínka komplementární skluzovosti** je splněna, jestliže pro přípustná řešení \tilde{x}, \tilde{y} platí buď $\tilde{y}_i = 0$ nebo $b_i - a_{i-} \tilde{x} = 0$, $i = 1, \dots, m$. Pokud nastane $b_i - a_{i-} \tilde{x} = 0$, potom říkáme, že **vazba** $a_{i-} \tilde{x} \leq b_i$ je **aktivní**.

Věta 3. *Nechť \tilde{x} je přípustné řešení LP-P2 a \tilde{y} je přípustné řešení LP-D2. Potom \tilde{x}, \tilde{y} jsou optimální právě tehdy, když platí podmínka komplementární skluzovosti.*

Kapitola 3

Semidefinitní programování

Kapitola 4

Kuželové programování

Část II

Kombinatorické úlohy

Kapitola 5

Shannonova kapacita

Představme si zašuměný komunikační kanál, kterým posíláme zprávy, které jsou složeny ze symbolů (písmen) nějaké konečné abecedy. Vlivem šumu mohou být některé symboly špatně interpretovány a naším cílem je vybrat co největší počet slov délky k tak, aby žádná dvě slova nebyla vlivem šumu zaměnitelná.

Problém si formalizujeme v řeči teorie grafů. Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$, kde množina vrcholů představuje symboly z konečné abecedy a dva vrcholy x, y jsou spojeny hranou, pokud vrchol x může být vlivem šumu zaměněn za y .

Maximální počet nezaměnitelných zpráv délky 1 je roven $\alpha(G)$, kde $\alpha(G)$ značí velikost největší nezávislé množiny v grafu G . Pro popis delších zpráv definujeme **silný součin** $G \cdot H$ grafů G a H následovně:

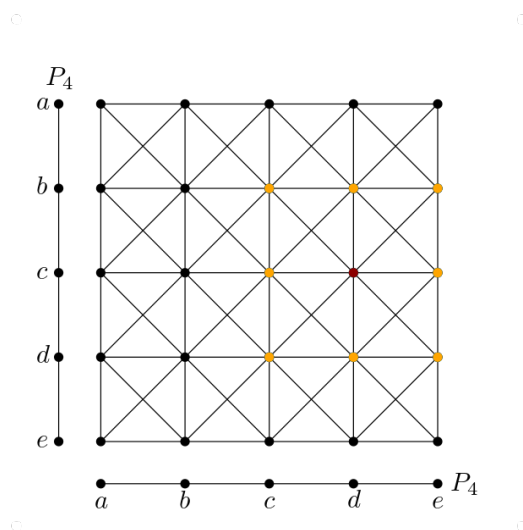
$$V(G \cdot H) = V(G) \times V(H),$$

$$\begin{aligned} E(G \cdot H) = & \{(i, u)(j, v) \mid ij \in E(G) \wedge uv \in E(H)\} \cup \\ & \{(i, u)(j, v) \mid ij \in E(G) \wedge u = v\} \cup \\ & \{(i, u)(j, v) \mid i = j \wedge uv \in E(H)\}. \end{aligned}$$

Příklad. Pro graf $P_4 = a - b - c - d - e$ je silný součin $P_4 \cdot P_4$ zobrazen na obrázku 5.1. Z obrázku je hezky vidět, že např. zpráva cd (na obrázku červeně) může být zaměněna s bc , bd , be , cc , ce , dc , dd a de (na obrázku oranžově). Podobně pro další zprávy.

Pro jednoduchost budeme silný součin k kopií grafu G značit G^k . Tedy $\alpha(G^k)$ je maximální počet nezaměnitelných zpráv délky k . **Shannonova kapacita** grafu G je číslo

$$\Theta(G) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha(G^k)^{1/k}.$$

Obrázek 5.1: $P_4 \cdot P_4$

Neví se, zda pro libovolný graf G existuje vůbec nějaký algoritmus, kterým bychom určili hodnotu $\Theta(G)$. Přesto je alespoň něco známo. Pro perfektní grafy Claude E. Shannon ukázal, že $\Theta(G) = \alpha(G)$. To také znamená, že pro perfektní grafy lze $\Theta(G)$ určit v polynomiálním čase. Dalším kdo se problémem zabýval byl László Lovász, který velmi hezkým způsobem ukázal, že kružnice délky 5 má kapacitu $\sqrt{5}$. Na Lovászův postup se dále podíváme, protože vede k obecnému hornímu odhadu na $\Theta(G)$.

5.1 $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$

Tenzorový součin vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ je

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = (u_1 v_1, \dots, u_1 v_m, u_2 v_1, \dots, u_n v_m).$$

Užitečné bude následující pozorování, které dává do souvislosti skalární a tenzorový součin.

Pozorování. *Nechť \mathbf{x}, \mathbf{u} jsou vektory délky n a \mathbf{y}, \mathbf{v} jsou vektory délky m . Potom platí*

$$(\mathbf{x} \circ \mathbf{y})^T (\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) = (\mathbf{x}^T \mathbf{u}) (\mathbf{y}^T \mathbf{v}). \quad (5.1)$$

Důkaz. Levá strana:

$$\begin{aligned} & (x_1 y_1, x_1 y_2, \dots, x_1 y_m, \dots, x_n y_m)^T (u_1 v_1, u_1 v_2, \dots, u_1 v_m, \dots, u_n v_m) = \\ & x_1 y_1 u_1 v_1 + x_1 y_2 u_1 v_2 + \dots + x_1 y_m u_1 v_m + \dots + x_n y_m u_n v_m \end{aligned}$$

Pravá strana:

$$(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n) \cdot (y_1 v_1 + \cdots + y_m v_m) = \\ x_1 y_1 u_1 v_1 + x_1 y_2 u_1 v_2 + \cdots + x_1 y_m u_1 v_m + \cdots + x_m y_m u_n v_m$$

□

Mějme graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \dots, n\}$. Systém $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jednotkových vektorů v Euklidovském prostoru takový, že

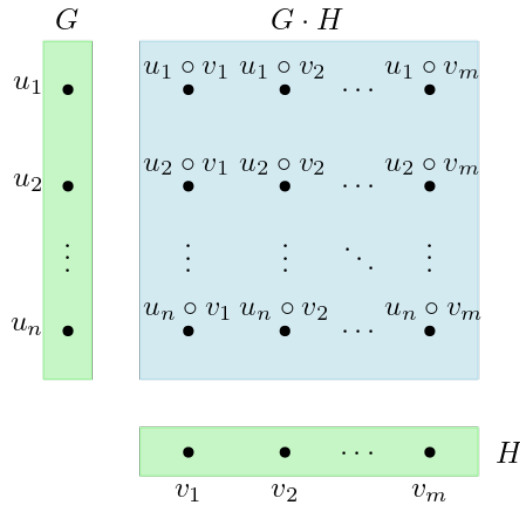
$$\forall i, j \notin E \implies \mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$$

nazýváme **ortonormální reprezentace** grafu G . Poznamenejme, že každý graf má nějakou ortonormální reprezentaci, např. $1 \mapsto \mathbf{e}_1, \dots, n \mapsto \mathbf{e}_n$.

Lemma 1. *Nechť $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální reprezentace grafu G a $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ je ortonormální reprezentace grafu H . Potom $\mathbf{u}_i \circ \mathbf{v}_j$ je ortonormální reprezentace grafu $G \cdot H$.*

Důkaz. TODO – easy..

□



Obrázek 5.2: Ortonormální reprezentace $G \cdot H$.

Hodnotu ortonormální reprezentace (u_1, \dots, u_n) definujeme jako:

$$\min_c \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{(c^T u_i)^2}.$$

Vektoru c , pro který nastává minimum říkáme **handle** dané ortonormální reprezentace.

Dále definujeme funkci $\vartheta(G)$ jako minimální hodnotu přes všechny ortonormální reprezentace grafu G . Ortonormální reprezentaci, pro kterou nastává minimum nazýváme **optimální**.

Funkci $\vartheta(G)$ se říká **Lovászova theta funkce** a ona je právě již zmíněným horním odhadem na $\Theta(G)$. Podívejme se na některé její vlastnosti.

Lemma 2. $\vartheta(G \cdot H) \leq \vartheta(G)\vartheta(H)$

Důkaz. TODO – easy..

□

Lemma 3. $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$

Důkaz. TODO – easy..

□

Lemma 4. $\Theta(G) \leq \vartheta(G)$

Důkaz. TODO – easy..

□

Věta 4. $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$

Důkaz.

□

Kapitola 6

Problém maximálního řezu

Kapitola 7

Problém obchodního cestujícího

Část III

Experimenty

Kapitola 8

Lovászova theta funkce

Kapitola 9

Problém maximálního řezu

Závěr