Obsah

Úvod

Část I

Optimalizace

Kapitola 1

Základní geometrické pojmy

1.1 Přímky a úsečky

Mějme dva body $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $x_1 \neq x_2$ a parametr $\theta \in \mathbb{R}^n$. Potom výraz

$$y = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \tag{1.1}$$

popisuje **přímku** procházející body x_1 a x_2. Pro $\theta = 0$ dostáváme bod x_2 a pro $\theta = 1$ bod x_1. Omezíme-li θ na interval $\langle 0, 1\rangle$, dostaneme **úsečku** s koncovými body x_1 a x_2. Výraz 1.1 lze přepsat do tvaru

$$y = x_2 + \theta(x_1 - x_2),$$

který můžeme interpretovat jako součet počátečního bodu x_2 a nějakého násobku směrového vektoru $x_1 - x_2$.

1.2 Afinní prostory

Říkáme, že $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je **afinní prostor**, jestliže přímka procházející libovolnými dvěma různými body z C leží v C. Tedy C obsahuje lineární kombinace libovolných dvou bodů z C, jestliže součet koeficientů lineární kombinace je roven jedné. To lze zobecnit i pro více než dva body. Lineární kombinace $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$ bodů $x_1, \ldots, x_k$ taková, že $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, se nazývá **afinní kombinace** bodů $x_1, \ldots, x_k$. Indukcí z definice afinního prostoru lze snadno ukázat, že pokud C je afinní množina, $x_1, \ldots, x_k \in C$ a $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, potom bod $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$.

Nechť C je afinní prostor a $x_0 \in C$, potom množina

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 \mid c \in C\}$$

je **vektorový prostor**, tj. množina, která je uzavřená na sčítání a násobení skalárem.
Afinní prostor C lze vyjádřit jako

$$C = V + x_0 = \{v + x_0 \mid v \in V\} ,$$

kde V je vektorový prostor a x_0 je počátek. Poznamenejme, že vektorový prostor V asociovaný s afinním prostorem C nezávisí na volbě počátku x_0.
Dimenze afinního prostoru $C = V + x_0$ je definována jako dimenze vektorového prostoru $V = C - x_0$, kde x_0 je libovolný prvek z C. Množina všech afinních kombinací bodů množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **afinní obal** množiny C. Afinní obal množiny C budeme značit

$$\textbf{aff } C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in C, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\} .$$

Afinní obal je nejmenší afinní prostor, který obsahuje množinu C. Tedy, jestliže S je afinní prostor takový, že $C \subseteq S$, potom **aff** $C \subseteq S$.

1.3 Konvexní množiny

Říkáme, že množina C je **konvexní**, jestliže úsečka mezi libovolnými dvěma body z C leží také v C. Jinak řečeno, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in C$ a libovolné $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ platí, že $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$. Poznamenejme, že každý afinní prostor je zároveň konvexní množinou. Podobně jako afinní kombinaci definujeme **konvexní kombinaci** bodů $x_1, \ldots, x_k$ jako $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0$ pro $i = 1, \ldots, k$. **Konvexní obal** množiny C je množina všech konvexních kombinací bodů z množiny C, značíme

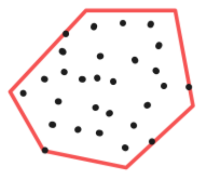
$$\textbf{conv } C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \ldots, k, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\} .$$

Analogicky, konvexní obal množiny C je nejmenší konvexní množina, která obsahuje množinu C. Pro představu viz obrázek 1.1.

1.4 Kužely

Množina C se nazývá **kužel**, jestliže pro každé $x \in C$ a $\theta \geq 0$ platí, že $\theta x \in C$. Je-li C navíc konvexní, pak se C nazývá **konvexní kužel**. Tedy C je konvexní kužel, jestliže pro libovolné $x_1, x_2 \in C$ a $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ platí, že $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$. Říkáme, že bod ve tvaru $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0$ je **kuželovou kombinací** bodů $x_1, \ldots, x_k$. Dále, pokud x_i leží v konvexním kuželu množiny C, potom libovolná kuželová kombinace bodu x_i leží rovněž

(a) Množina bodů C



(b) **conv** C

Obrázek 1.1: Konvexní obal množiny

v konvexním kuželu množiny C. Platí, že množina C je konvexní kužel právě tehdy, když C obsahuje všechny kuželové kombinace svých bodů. **Kuželový obal** množiny C je množina, která obsahuje všechny kuželové kombinace množiny C, tj.

$$\textbf{cone}\ C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}\,.$$

Kuželový obal množiny C je zároveň nejmenší konvexní kužel, který obsahuje množinu C. Pro představu viz obrázek 1.2.

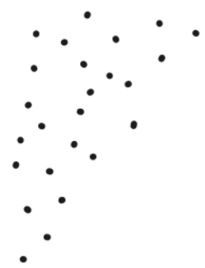
1.5 Nadroviny a poloprostory

Nadrovina je množina ve tvaru

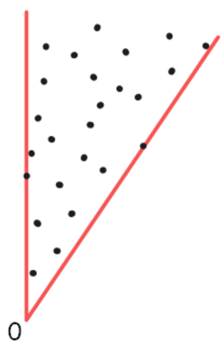
$$\left\{x \mid a^T x = b\right\},$$

kde $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Analyticky se na nadrovinu koukáme jako na množinu všech řešení netriviální lineární rovnice. Geometricky zase jako na množinu všech bodů takových, že mají konstantní skalární součin s normálovým vektorem a. Konstanta b značí posunutí nadroviny od počátku. Nadrovinu také můžeme vyjádřit jako

$$\left\{x \mid a^T(x - x_0) = 0\right\} = x_0 + \left\{v \mid a^T v = 0\right\},$$



(a) Množina bodů C



(b) **cone** C

Obrázek 1.2: Kuželový obal množiny

kde x_0 je libovolný bod této nadroviny a $\{v \mid a^T v = 0\}$ je množina všech vektorů, které jsou kolmé k normálovému vektoru a. Nadrovina je tedy množina, která obsahuje bod x_0 a libovolný bod ve tvaru $x_0 + v$, kde v je vektor, který je kolmý k normálovému vektoru a. Pro ilustraci v $\mathbb{R}^2$ viz obrázek 1.3a.

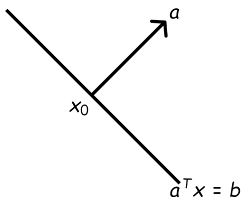
Nadrovina dělí $\mathbb{R}^n$ na dva poloprostory. Množina

$$\{x \mid a^T x \leq b\}, \text{ resp. } \{x \mid a^T x < b\},$$

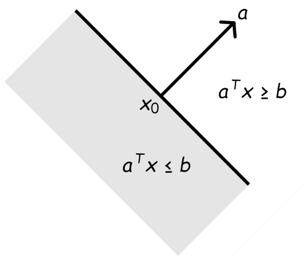
kde $a \neq 0$ se nazývá (uzavřený) **poloprostor**, resp. **otevřený poloprostor**. Je to tedy množina všech řešení netriviální lineární nerovnice. Podobně jako nadrovinu, můžeme poloprostor vyjádřit ve tvaru

$$\left\{x \mid a^T(x - x_0) \le 0\right\}, \text{ resp. } \left\{x \mid a^T(x - x_0) < 0\right\},$$

kde $a \neq 0$ a x_0 je libovolný bod z nadroviny $\left\{x \mid a^T x = b\right\}$. Poloprostor tedy obsahuje bod x_0 a libovolný bod $x_0 + v$, kde v je vektor, který s vnějším normálovým vektorem svírá tupý nebo pravý úhel. Tato interpretace je v $\mathbb{R}^2$ ilustrována na obrázku 1.3b. Ještě poznamenejme, že poloprostory jsou konvexní množiny, ale samozřejmě nejsou afinní.



(a) Nadrovina



(b) Poloprostor

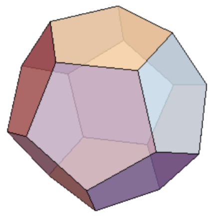
Obrázek 1.3: Nadrovina a poloprostor v $\mathbb{R}^2$.

1.6 Polyedry a polytopy

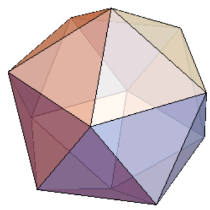
Mějmě konečně mnoho uzavřených poloprostorů v $\mathbb{R}^n$. Množina, která vznikne jejich průnikem se nazývá **polytop**. Je-li navíc polytop omezený, potom ho nazýváme **polyedr**. Polyedr lze také ekvivalentně definovat jako konvexní obal konečně mnoha bodů v $\mathbb{R}^n$. Příkladem polyedrů v $\mathbb{R}^3$ jsou např. platónská tělesa, viz obrázek 1.4. Důležitý fakt říká Minkowského-Weyleova věta: každý polytop P je konečně generovaný a můžeme ho vyjadřit jako

$$P = \mathbf{conv}\ (u_1, \ldots, u_r) + \mathbf{cone}\ (v_1, \ldots, v_s),$$

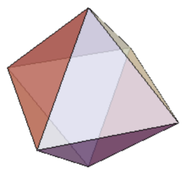
kde u_i, v_i jsou extremální vrcholy P.



(a) Dodecahedron.



(b) Icosahedron.



(c) Octahedron.

Obrázek 1.4: Platónská tělesa.

Kapitola 2

Konvexní optimalizace

2.1 Obecná podmíněná úloha

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ &h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{2.1}$$

Hledáme $x \in \mathbb{R}^n$, které minimalizuje $f(x)$, vzhledem k omezením $g_i(x)$ a $h_i(x)$. Proměnné x říkáme **optimalizační proměnná**, funkci $f(x)$ říkáme **cenová** nebo **účelová funkce**. Výrazy $g_i(x) \leq 0$ jsou **omezení typu nerovnosti** a $h_i(x) = 0$ jsou **omezení typu rovnosti**. Pokud $m = p = 0$ problém 2.1 je **neomezený**, jinak je **omezený**.

Definiční obor $\mathcal{D}$ úlohy 2.1 je

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{dom}\ g_i \cap \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{dom}\ h_i.$$

Říkáme, že bod $x \in \mathcal{D}$ je **přípustný**, jestliže splňuje všechna omezení $g_i(x) \leq 0$ a $h_i(x) = 0$. Úloha 2.1 je **přípustná**, jestliže existuje alespoň jeden bod $x \in \mathcal{D}$, který je přípustný. Množina všech přípustných bodů $x \in \mathcal{D}$ se nazývá **přípustná množina**.

Optimální hodnota x^* úlohy 2.1 je definována jako

$$x^* = \{f(x) \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p\}.$$

2.2 Konvexní podmíněná úloha

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m \\ &a_i^T x = b_i, i = 1, \ldots, p \end{aligned} \tag{2.2}$$

Oproti obecné úloze 2.1 jsou funkce $f(x), g_i(x)$ konvexní a funkce $h_i(x) = a_i^T x - b_i$ jsou afinní. Přípustná množina takové úlohy je konvexní množinou.

2.3 Lagrangeova dualita

Mějme úlohu 2.1 s $\mathcal{D} \neq 0$. Zobrazení $L:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ takové, že

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i h_i(x) \tag{2.3}$$

se nazývá **Lagrangeova funkce**. Definiční obor **dom** $L = \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Vektory λ a μ nazýváme **duální proměnné** a prvkům těchto vektorů říkáme **Lagrangeovy multiplikátory**. Dále definujeme **duální funkci** $d:\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ jako infimum Lagrangeovy funkce L přes všechna $x \in \mathcal{D}$. Tedy

$$d(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left(f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i h_i(x) \right). \tag{2.4}$$

Poznamenejme, že duální funkce je konkávní bez ohledu na to, zda je úloha konvexní a je-li L zdola neomezená v proměnné x, potom duální funkce nabývá hodnoty $-\infty$.

2.3.1 Dolní odhad na x^*

Nechť $\tilde{x}$ je přípustný bod. Pro $\lambda \geq 0$ je

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i h_i(\tilde{x}) \leq 0.$$

Potom pro Lagrangeovu funkci můžeme psát

$$L(\tilde{x}, \lambda, \mu) = f(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{p} h_i(\tilde{x}) \leq f(\tilde{x}).$$

A tedy pro duální funkci platí

$$d(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \mu) \leq L(\tilde{x}, \lambda, \mu) \leq f(\tilde{x}).$$

2.3.2 Duální úloha

V části 2.3.1 jsme si ukázali, že duální funkce dává dolní odhad na optimální hodnotu x^* úlohy 2.1. Stále jsme si ale neřekli, jaký je nejlepší dolní odhad, který pomocí duální funkce jsme schopni dostat. To nás dostává k následující optimalizační úloze.

$$\begin{aligned} &\max d(\lambda, \mu) \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Úloze 2.5 se říká **Lagrangeova duální úloha** příslušná k úloze 2.1, kterou nazýváme **primární úlohou**.

2.3.3 Slabá dualita

2.3.4 Silná dualita a Slaterova podmínka

Kapitola 3

Lineární programování

3.1 Primární úloha

Úlohou lineárního programování rozumíme minimalizaci nebo maximalizaci lineární **účelové funkce** vzhledem k lineárním **omezením**, kde tato omezení jsou dána soustavou lineární rovnic a nerovnic. Úlohu lineárního programování lze formulovat v několika ekvivalentních tvarech, které se liší zadáním omezení. Úloha v **kanonickém tvaru** má svá omezení dána soustavou lineárních nerovnic $Ax \leq b$. Tedy:

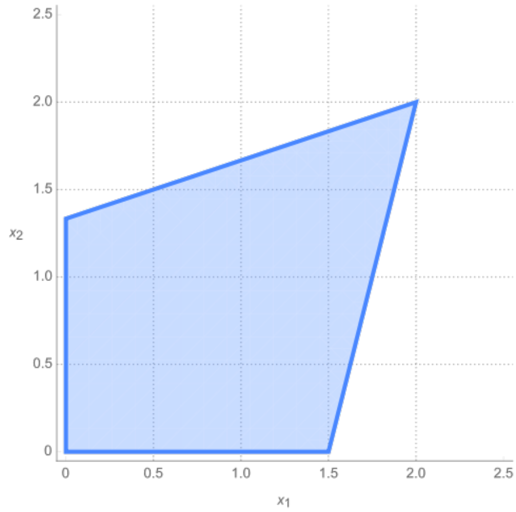
$$\max\left\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\right\}, \tag{LP-P}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^n$. **Přípustná množina řešení** je průnikem poloprostorů, které jsou definovány soustavou nerovnic $Ax \leq b$ a **nezáporného ortantu**, tj. množiny $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$. Obě tyto množiny jsou konvexní a tedy i jejich průnik je rovněž konvexní množina. Dále, protože přípustnou množinu máme popsanou soustavou konečně mnoha lineárních nerovnic, geometricky se na úlohu LP-P můžeme koukat jako na maximalizaci lineární funkce přes polyedr, který je definován touto soustavou.

Příklad. Mějme následující úlohu:

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 & \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 4 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{P1}$$

Přípustná množina řešení je zobrazena na obrázku 3.1. Řešením úlohy je vektor $x^* = (2, 2)$ s cenou 4. Implementace v softwaru MOSEK: `https://github.com/c0n73x7/D1PL0MK4/blob/master/mosek/ex1.py`.



Obrázek 3.1: Přípustná množina řešení k úloze P1.

3.2 Dualita

Úloha LP-P se nazývá **primární úloha**. Ke každé primární úloze můžeme přiřadit příslušnou **duální úlohu**. Je to opět úloha lineárního programování, která pro případ LP-P je ve tvaru:

$$\min \left\{ b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0 \right\}. \tag{LP-D}$$

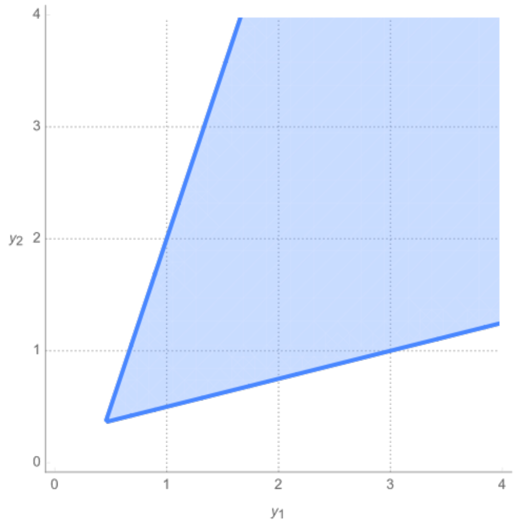
Příklad. Duální úloha k úloze P1 je ve tvaru:

$$\begin{aligned} \min 4y_1 + 6y_2 & \\ -y_1 + 4y_2 &\geq 1 \\ 3y_1 - y_2 &\geq 1 \\ y &\geq 0. \end{aligned} \tag{P2}$$

Přípustná množina řešení je zobrazena na obrázku 3.2. Řešením úlohy je vektor $y^* \approx (0.4546, 0.3636)$ s cenou 4. Implementace v softwaru MOSEK: `https://github.com/c0n73x7/D1PL0MK4/blob/master/mosek/ex2.py`.

Všimněme si, že v příkladech P1 a P2 mají řešení x^* i y^* stejnou cenu. To není náhoda a tento fakt je obsahem silné věty o dualitě, kterou dokázala skupina kolem Alberta W. Tuckera v roce 1948. Začneme slabou větou o dualitě.

Věta 1 (Slabá o dualitě)**.** *Nechť $\tilde{x}$ je přípustné řešení LP-P a $\tilde{y}$ je přípustné řešení LP-D. Potom $c^T \tilde{x} \leq b^T \tilde{y}$.*



Obrázek 3.2: Přípustná množina řešení k úloze P2.

Tedy každé přípustné řešení $\tilde{y}$ duální úlohy LP-D nám dává horní odhad na maximum účelové funkce primární úlohy LP-P. Graficky můžeme slabou větu o dualitě interpretovat jako na obrázku 3.3. Zatím tedy nevíme, zda vždy existují přípustná (optimální) řešení x^* pro úlohu LP-P a y^* pro úlohu LP-D, pro která platí $c^T x^* = b^T y^*$. Kladnou odpověď dostaneme z již zmíněné silné věty od dualitě.

Obrázek 3.3: Slabá věta o dualitě.

Věta 2 (Silná o dualitě)**.** *Jestliže úlohy LP-P a LP-D mají přípustná řešení. Potom*

$$\max\left\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\right\} = \min\left\{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\right\}.$$

Se znalostí silné věty o dualitě můžeme obrázek 3.3 upravit na obrázek 3.4.

3.3 Komplementární skluzovost

Pro odvození tzv. podmínky komplementární skluzovosti nejprve převedeme úlohy LP-P a LP-D do jiných tvarů. V primární úloze povolíme $x \in \mathbb{R}^n$. Tedy

Obrázek 3.4: Ceny přípustných řešení primární a příslušné duální úlohy.

primární úloha je ve tvaru:

$$\max\left\{c^T x \mid Ax \leq b\right\}. \tag{LP-P2}$$

A příslušná duální úloha je ve tvaru:

$$\min\left\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\right\}. \tag{LP-D2}$$

Nechť $\tilde{x}$ je připustné řešení a x^* je optimální řešení úlohy LP-P2, $\tilde{y}$ je přípustné řešení a y^* je optimální řešení úlohy LP-D2. **Dualitní rozdíl** $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ je číslo $b^T\tilde{y} - c^T\tilde{x} \geq 0$. Ze silné věty o dualitě samozřejmě plyne, že pro optimální řešení x^* a y^* je dualitní rozdíl roven 0. Vyjdeme z dualitního rozdílu optimálních řešení:

$$b^T y^* - c^T x^* = {y^*}^T b - {y^*}^T A x^* = {y^*}^T (b - Ax^*) = 0.$$

Poslední rovnost přepíšeme maticově:

$$[y_1^*, \ldots, y_m^*]\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic $y_i^*(b_i - a_{i\_}x^*) = 0$, kde $i = 1, \ldots, m$. Tedy buď $y_i^* = 0$ nebo $b_i - a_{i\_}x^* = 0$. **Podmínka komplementární skluzovosti** je splněna, jestliže pro přípustná řešení $\tilde{x}, \tilde{y}$ platí buď $\tilde{y}_i = 0$ nebo $b_i - a_{i\_}\tilde{x} = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Pokud nastane $b_i - a_{i\_}\tilde{x} = 0$, potom říkáme, že **vazba** $a_{i\_}\tilde{x} \leq b_i$ **je aktivní**.

Věta 3. *Nechť $\tilde{x}$ je přípustné řešení LP-P2 a $\tilde{y}$ je přípustné řešení LP-D2. Potom $\tilde{x}, \tilde{y}$ jsou optimální právě tehdy, když platí podmínka komplementární skluzovosti.*

Kapitola 4

Semidefinitní programování

Na semidefinitní programování se můžeme koukat jako na zobecnění lineárního programování, kde proměnné jsou symetrické matice. Jedná se tedy o optimalizaci lineární funkce vzhledem k tzv. lineárním maticovým nerovnostem.

4.1 Vsuvka z lineární algebry

Pozitivně definitní matice

Pracujeme s reálnými symetrickými maticemi $S = S^T$. Ty mají všechna vlastní čísla reálná a některé z nich mají zajímavou vlastnost, že všechna jejich vlastní čísla jsou kladná. Takovým maticím říkáme, že jsou pozitivně definitní. Alternativní definicí je, že matice S je pozitivně definitní, jestliže $x^T S x > 0$ pro všechny nenulové vektory x.

Příklad.

$$x^T S x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 9x_2^2$$

Je pro všechny x nenulové $x^T S x > 0$? Ano, protože můžeme výraz přepsat na součet čtverců:

$$x^T S x = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 9x_2^2 = 2(x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2.$$

TODO: obrázek kyblíčku

Ukážeme si několik kritérií, jak otestovat pozitivní definitnost dané matice.

Věta 4. *$S = S^T$ je pozitivně definitní, jestliže lze napsat jako $S = A^T A$ pro nějakou matici A, která má lineárně nezávislé sloupečky.*

Důkaz.

$$x^T S x = x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0 \tag{4.1}$$

$\|Ax\|^2 > 0$, jestliže sloupečky matice A jsou lineárně nezávislé □

Příklad.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = AA^T$$

A má lineárně závislé sloupečky, tj. S není pozitivně definitní

Dalším testem je tzv. Sylvesterovo kritérium.

Věta 5. $S = S^T$ *je pozitivně definitní, jestliže všechny hlavní minory* S *jsou kladné.*

Příklad.

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, D_1 = 3, D_2 = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = 2$$

hlavní minory $D_1, D_2 > 0$; matice S je pozitivně definitní

A poslední, které si uvedeme souvisí s Gaussovou eliminací.

Věta 6. $S = S^T$ *je pozitivně definitní, jestliže jsou všechny pivoty při Gaussově eliminaci kladné.*

Příklad.

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, p_1 = 3, p_2 = \frac{2}{3}$$

pivoty $p_1, p_2 > 0$; matice S je pozitivně definitní

Pozitivně semidefinitní matice

Pro pozitivní semidefinitnost modifikujeme předcházejí definice a tvrzení pro pozitivně definitní matice následovně:

1. $S = S^T$ je pozitivně semidefinitní, jestliže všechna její čísla jsou nezáporná.
2. $S = S^T$ je pozitivně semidefinitní, jestliže $x^T S x \geq 0$ pro všechny nenulové vektory x.
3. $S = S^T$ je pozitivně semidefinitní, jestliže lze napsat jako $S = A^T A$ pro nějakou matici A.
4. $S = S^T$ je pozitivně semidefinitní, jestliže všechny hlavní minory S jsou nezáporné.
5. $S = S^T$ je pozitivně semidefinitní, jestliže jsou všechny pivoty při eliminaci nezáporné.

Pozitivně semidefinitní kužel

Množinu všech symetrických matic značíme S^n, množinu všech pozitivně semidefinitních matic značíme S^n_+ a množinu všech pozitivně definitních matic značíme S^n_{++}.

Věta 7. *Množina S^n_+ tvoří konvexní kužel.*

Důkaz. $\Theta_1, \Theta_2 \geq 0,\ A, B \in S^n_+$

$$x^T\left(\Theta_1 A + \Theta_2 B\right)x = x^T \Theta_1 A x + x^T \Theta_2 B x \geq 0.$$

□

Množině S^n_+ se říká pozitivně semidefinitní kužel.
??chci ukázat i uzavřenost a další vlastnosti, jak se česky řekne proper cone??

Spektraedry

Definujeme tzv. Löwnerovo částečné uspořádání

$$A \succeq B \iff A - B \in S^n_+.$$

Definice 1. Lineární maticová nerovnost (LMI) je ve tvaru

$$A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \succeq 0,$$

kde $A_i \in S^n$.

Definice 2. Říkáme, že $S \subset \mathbb{R}^n$ je spektraedr, jestliže lze napsat ve tvaru

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i x_i \succeq 0 \right\}$$

pro nějaké symetrické matice $A_0, \ldots, A_m \in S^n$.

Spektraedr je tedy množina, která je definována konečným počtem LMI. Můžeme si všimnout analogie s definicí polyedru, který je přípustnou množinu pro lineární program. Podobně spektraedr je přípustnou množinou pro semidefinitní program.

Geometricky je spektraedr definován jako průnik pozitivně semidefinitního kuželu S^n_+ a afinního podprostoru $\mathbf{span}\,\{A_1, \ldots, A_m\}$ posunutého do A_0.

Spektraedry jsou uzavřené množiny, neboť LMI je ekvivalentní nekonečně mnoha skalárních nerovností ve tvaru $v^T(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i x_i)v \geq 0$, jednu pro každou hodnotu $v \in \mathbb{R}^n$.

Vždy můžeme několik LMI „scucnout" do jedné. Stačí zvolit matice A_i blokově diagonální. Odtud snadno vídíme, že polyedr je speciálním případem spektraedru. Polyedr bude mít všechny matice A_i diagonální.

Příklad.

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid A(x,y) = \begin{bmatrix} x+1 & 0 & y \\ 0 & 2 & -x-1 \\ y & -x-1 & 2 \end{bmatrix} \succeq 0 \right\}$$

4.2 Primární úloha

Semidefinitní program je lineární optimalizační problém přes spektraedr. Primární úlohu ve standardním tvaru můžeme napsat jako:

$$\min \left\{ \langle C, X \rangle \mid \langle A_i, X \rangle = b_i, i = 1, \dots, m; X \succeq 0 \right\}, \tag{SDP-P}$$

kde $C, A_i \in S^n$, $\langle X, Y \rangle = \mathbf{Tr}(X^T Y) = \sum_{ij} X_{ij} Y_{ij}$ a $X \in S^n$ je proměnná, nad kterou provádíme minimalizaci.

Příklad.

$$\min \left\{ \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \right\rangle \middle| \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \right\rangle = 1, \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \succeq 0 \right\}$$

Po úpravě:

$$\min \left\{ 2x_{11} + 2x_{12} \middle| x_{11} + x_{22} = 1, \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \succeq 0 \right\}.$$

Jak vypadá přípustná množina? Použijeme Sylvesterovo kritérium, tj.

$$x_{11} \geq 0, x_{11}x_{22} - x_{12}^2 \geq 0.$$

Z LMI vyjádříme x_{22}, tj.

$$x_{22} = 1 - x_{11}$$

Dosadíme do přechozího a dostaneme

$$x_{11} \geq 0, x_{11}(1 - x_{11}) - x_{12}^2 \geq 0$$

Po úpravě

$$x_{11} \geq 0, \left(x_{11} - \frac{1}{2}\right)^2 + x_{12}^2 \leq \frac{1}{4}$$

Vidíme tedy, že přípustná množina (zobrazena na obrázku TODO) je kruh s poloměrem $\frac{1}{2}$ a se středem v bodě $(x_{11}, x_{12}) = (\frac{1}{2}, 0)$. Řešením úlohy je matice

$$X^* \approx \begin{bmatrix} 0.1464 & -0.3536 \\ -0.3536 & 0.8536 \end{bmatrix}$$

s cenou ≈ -0.4142. Implementace v softwaru MOSEK: `https://github.com/c0n73x7/D1PL0MK4/blob/master/mosek/ex3.py`.
TODO: obrázek přípustné množiny s optimálním řešením z mosek implementace

4.3 Dualita

$$\max \left\{ b^T y \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} A_i y_i \preceq C \right\},$$

kde $b = (b_1, \ldots, b_m)$ a $y = (y_1, \ldots, y_m)$ jsou duální proměnné.

Vztah mezi primární a duální úlohou je podobně jako u lineárního programování v tom, že řešení jedné úlohy lze použít jako odhad na úlohu druhou. Nechť X je libovolné přípustné řešení primární úlohy a y je libovolné přípustné řešení duální úlohy. Potom

$$\langle C, X \rangle - b^T y = \langle C, X \rangle - \sum_{i=1}^{m} y_i \langle A_i, X \rangle = \left\langle C - \sum_{i=1}^{m} A_i y_i, X \right\rangle \geq 0$$

WIP

Odvození duální úlohy

Lagrangeovo funkce

$$L(X, \lambda, Z) = \langle C, X \rangle - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\langle A_i, X \rangle - b_i \right) - \langle Z, X \rangle$$

primární úloha odpovídá

$$\min_{X \in S^n} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m, Z \succeq 0} L(X, \lambda, Z)$$

z Lagrangeovy duality

$$g(\lambda, Z) = \inf_{X \in S^n} L(X, \lambda, Z) = \begin{cases} \lambda^T b & \dots\ C - \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i - Z = 0, \\ -\infty & \dots\ \text{jinak.} \end{cases}$$

eliminujeme Z

$$\sup \left\{ b^T \lambda \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} A_i \lambda_i \preceq C \right\}$$

Stopa matice $A \in R^{n \times n}$ je $\mathbf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$.

Věta 8. *S, T jsou pozitivně definitní $\implies$ $S + T$ je pozitivně definitní*

Důkaz. $x^T(S+T)x = x^T Sx + x^T Tx > 0$ □

Úlohy s racionálními daty nemusí mít racionální optimální řešení.
Lagrangovo funkce a dualita konvexního programování (příloha?);
z toho dualitu semidefinitního programování;
rozdíl oproti lineárnímu programování;
příklad

Relaxace

vektorové programování

Kapitola 5

Kombinatorická optimalizace

5.1 Celočíselné lineární programování

složitost úlohy, relaxace, výčet algoritmů, aproximace, ...

5.2 Celočíselné semidefinitní programování

složitost úlohy, relaxace, výčet algoritmů, aproximace, ...

Část II

Kombinatorické úlohy

Kapitola 6

Shannonova kapacita

Představme si zašuměný komunikační kanál, kterým posíláme zprávy, které jsou složeny ze symbolů (písmen) nějaké konečné abecedy. Vlivem šumu mohou být některé symboly špatně interpretovány a naším cílem je vybrat co největší počet slov délky k tak, aby žádná dvě slova nebyla vlivem šumu zaměnitelná.

Problém si formalizujeme v řeči teorie grafů. Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$, kde množina vrcholů představuje symboly z konečné abecedy a dva vrcholy x, y jsou spojeny hranou, pokud vrchol x může být vlivem šumu zaměněn za y.

Maximální počet nezaměnitelných zpráv délky 1 je roven $\alpha(G)$, kde $\alpha(G)$ značí velikost největší nezávislé množiny v grafu G. Pro popis delších zpráv definujeme **silný součin** $G \cdot H$ grafů G a H následovně:

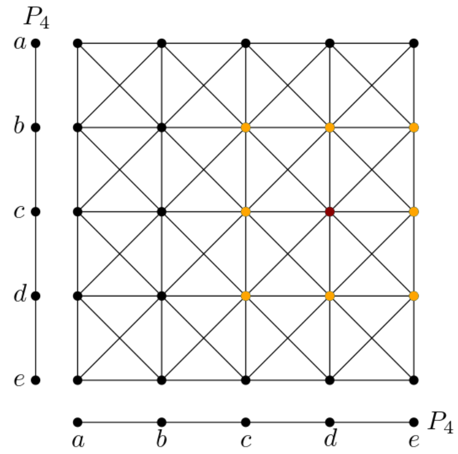
$$V(G \cdot H) = V(G) \times V(H),$$

$$\begin{aligned} E(G \cdot H) = &\left\{(i,u)(j,v) \mid ij \in E(G) \wedge uv \in E(H)\right\} \cup \\ &\left\{(i,u)(j,v) \mid ij \in E(G) \wedge u = v\right\} \cup \\ &\left\{(i,u)(j,v) \mid i = j \wedge uv \in E(H)\right\}. \end{aligned}$$

Příklad. Pro graf $P_4 = a - b - c - d - e$ je silný součin $P_4 \cdot P_4$ zobrazen na obrázku 6.1. Z obrázku je hezky vidět, že např. zpráva *cd* (na obrázku červeně) může být zaměněna s *bc*, *bd*, *be*, *cc*, *ce*, *dc*, *dd* a *de* (na obrázku oranžově). Podobně pro další zprávy.

Pro jednoduchost budeme silný součin k kopií grafu G značit G^k. Tedy $\alpha(G^k)$ je maximální počet nezaměnitelných zpráv délky k. **Shannonova kapacita** grafu G je definována jako

$$\Theta(G) = \sup\left\{\alpha(G^k)^{1/k} \mid k = 1, 2, \dots\right\}.$$



Obrázek 6.1: $P_4 \cdot P_4$

Neví se, zda pro libovolný graf G existuje vůbec nějaký algoritmus, kterým bychom určili hodnotu $\Theta(G)$. Přesto je alespoň něco známo. Pro perfektní grafy Claude E. Shannon ukázal, že $\Theta(G) = \alpha(G)$. To také znamená, že pro perfektní grafy lze $\Theta(G)$ určit v polynomiálním čase. Dalším kdo se problémem zabýval byl László Lovász, který velmi hezkým způsobem ukázal, že kružnice délky 5 má kapacitu $\sqrt{5}$. Na Lovászův postup se dále podíváme, protože vede k obecnému hornímu odhadu na $\Theta(G)$.

6.1 $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$

Tenzorový součin vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ je

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = (u_1v_1, \ldots, u_1v_m, u_2v_1, \ldots, u_nv_m)\,.$$

Užitečné bude následující pozorování, které dává do souvisloti skalární a tenzorový součin.

Pozorování. *Nechť* $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ *jsou vektory délky* n *a* $\mathbf{y}, \mathbf{v}$ *jsou vektory délky* m. *Potom platí*

$$(x \circ y)^T (u \circ v) = \left(x^T u\right) \left(y^T v\right). \tag{6.1}$$

Důkaz. Levá strana:

$$(x_1y_1, x_1y_2, \ldots, x_1y_m, \ldots, x_ny_m)^T (u_1v_1, u_1v_2, \ldots, u_1v_m, \ldots, u_nv_m) =$$
$$x_1y_1u_1v_1 + x_1y_2u_1v_2 + \cdots + x_1y_mu_1v_m + \cdots + x_my_mu_nv_m$$

Pravá strana:

$$(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) \cdot (y_1v_1 + \cdots + y_nv_m) =$$
$$x_1y_1u_1v_1 + x_1y_2u_1v_2 + \cdots + x_1y_mu_1v_m + \cdots + x_my_mu_nv_m$$

$\square$

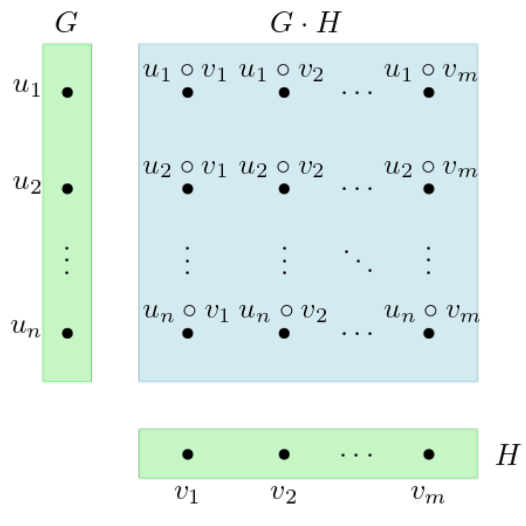
Mějme graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \dots, n\}$. Systém $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jednotkových vektorů v Euklidovském prostoru takový, že

$$\forall ij \notin E \implies \mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$$

nazýváme **ortonormální reprezentace** grafu G. Poznamenejme, že každý graf má nějakou ortonormální reprezentaci, např. $1 \mapsto \mathbf{e}_1, \dots, n \mapsto \mathbf{e}_n$.

Lemma 1. *Nechť* $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ *je ortonormální reprezentace grafu* G *a* $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ *je ortonormální reprezentace grafu* H*. Potom* $\mathbf{u}_i \circ \mathbf{v}_j$ *je ortonormální reprezentace grafu* $G \cdot H$*.*

Důkaz. Použijeme vztah 6.1. $(u_i \circ v_j)^T (u_k \circ v_l) = \left(u_i^T u_k\right)\left(v_j^T v_l\right) = 0 \iff ik \notin E(G) \vee jl \notin E(H)$. $\square$



Obrázek 6.2: Ortornomální reprezentace $G \cdot H$.

Hodnotu ortonormální reprezentace $(u_+, \dots, u_n)$ definujeme jako:

$$\min_c \max_{i=1,\dots,n} \frac{1}{\left(c^T u_i\right)^2}.$$

Vektoru c, pro který nastává minimum říkáme **handle** dané ortonormální reprezentace.

Dále definujeme funkci $\vartheta(G)$ jako minimální hodnotu přes všechny ortonormální reprezentace grafu G. Ortonormální reprezentaci, pro kterou nastává minumum nazýváme **optimální**.

Funkci $\vartheta(G)$ se říká **Lovászova theta funkce** a ona je právě již zmíněným horním odhadem na $\Theta(G)$. Podívejme se na některé její vlastnosti.

Lemma 2. $\vartheta(G \cdot H) \leq \vartheta(G)\vartheta(H)$

Důkaz. Nechť $(u_1, \dots, u_n)$ je optimální ortonormální reprezentace grafu G s „rukojetí" c a $(v_1, \dots, v_m)$ je optimální ortonormální reprezentace grafu H s „rukojetí" d. Pak $c \circ d$ je jednotkový vektor a platí:

$$\vartheta(G \cdot H) \leq \max_{i,j} \frac{1}{\left((c \circ d)^T (u_i \circ v_j)\right)^2} = \max_i \frac{1}{(c^T u_i)^2} \cdot \max_j \frac{1}{(d^T v_j)^2} = \vartheta(G)\vartheta(H).$$

□

Lemma 3. $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$

Důkaz. TODO (máš to někde na papíře) □

Lemma 4. $\Theta(G) \leq \vartheta(G)$

Důkaz. TODO (máš to někde na papíře) □

Věta 9. $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$

Důkaz. TODO (obě nerovnosti, obrázek, spherical cosine theorem) □

6.2 Další vlastnosti $\vartheta(G)$

vztah k barvení ($\overline{G}$), ...

6.3 Semidefinitní program pro $\vartheta(G)$

formulace semidefinitních programů (jsou dva ekvivalentní – to asi nenaimplementuješ, je to docela pekelný, nic nespočítáš), subgradientní aproximační metoda (zkusit naimplementovat???)

Kapitola 7

Problém maximálníhu řezu

7.1 Kvadratické programování

kvadratický program, striktní kvadratický program

7.2 Relaxace a vektorové programování

ekvivalence se semidefinitním programováním

TODO

formulace úlohy, approximační algoritmy, porovnání semidefinitních programů, ... komplexní semidefinitní programování, ...

Kapitola 8

Problém obchodního cestujícího

Závěr