Obsah

Úvod

Část I

Konvexní optimalizace

Kapitola 1

Základní geometrické pojmy

1.1 Přímky a úsečky

Mějme dva body $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $x_1 \neq x_2$ a parametr $\theta \in \mathbb{R}^n$. Potom výraz

$$y = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \tag{1.1}$$

popisuje **přímku** procházející body x_1 a x_2. Pro $\theta = 0$ dostáváme bod x_2 a pro $\theta = 1$ bod x_1. Omezíme-li θ na interval $\langle 0, 1\rangle$, dostaneme **úsečku** s koncovými body x_1 a x_2. Výraz 1.1 lze přepsat do tvaru

$$y = x_2 + \theta(x_1 - x_2),$$

který můžeme interpretovat jako součet počátečního bodu x_2 a nějakého násobku směrového vektoru $x_1 - x_2$.

1.2 Affiní prostory

Říkáme, že $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je **afinní prostor**, jestliže přímka procházející libovolnými dvěma různými body z C leží v C. Tedy C obsahuje lineární kombinace libovolných dvou bodů z C, jestliže součet koeficientů lineární kombinace je roven jedné. To lze zobecnit i pro více než dva body. Lineární kombinace $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$ bodů $x_1, \ldots, x_k$ taková, že $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, se nazývá **afinní kombinace** bodů $x_1, \ldots, x_k$. Indukcí z definice afinního prostoru lze snadno ukázat, že pokud C je afinní množina, $x_1, \ldots, x_k \in C$ a $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, potom bod $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$.

Nechť C je afinní prostor a $x_0 \in C$, potom množina

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 \mid c \in C\}$$

je **vektorový prostor**, tj. množina, která je uzavřená na sčítání a násobení skalárem.
Afinní prostor C lze vyjádřit jako

$$C = V + x_0 = \{v + x_0 \mid v \in V\},$$

kde V je vektorový prostor a x_0 je počátek. Poznamenejme, že vektorový prostor V asociovaný s afinním prostorem C nezávisí na volbě počátku x_0.
Dimenze afinního prostoru $C = V + x_0$ je definována jako dimenze vektorového prostoru $V = C - x_0$, kde x_0 je libovolný prvek z C. Množina všech affiních kombinací bodů množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **affiní obal** množiny C.
Affiní obal množiny C budeme značit

$$\mathbf{aff}\ C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in C, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}.$$

Affiní obal je nejmenší affiní prostor, který obsahuje množinu C. Tedy, jestliže S je affiní prostor takový, že $C \subseteq S$, potom $\mathbf{aff}\ C \subseteq S$.

1.3 Konvexní množiny

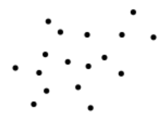
Říkáme, že množina C je **konvexní**, jestliže úsečka mezi libovolnými dvěma body z C leží také v C. Jinak řečeno, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in C$ a libovolné $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ platí, že $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$. Poznamenejme, že každý afinní prostor je zároveň konvexní množinou. Podobně jako affiní kombinaci definujeme **konvexní kombinaci** bodů $x_1, \ldots, x_k$ jako $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0$ pro $i = 1, \ldots, k$. **Konvexní obal** množiny C je množina všech konvexních kombinací bodů z množiny C, značíme

$$\mathbf{conv}\ C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \ldots, k, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}.$$

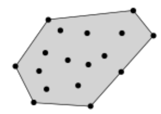
Analogicky, konvexní obal množiny C je nejmenší konvexní množina, která obsahuje množinu C. Pro představu viz obrázek 1.1.

1.4 Kužely

Množina C se nazývá **kužel**, jestliže pro každé $x \in C$ a $\theta \geq 0$ platí, že $\theta x \in C$. Je-li C navíc konvexní, pak se C nazývá **konvexní kužel**. Tedy C je konvexní kužel, jestliže pro libovolné $x_1, x_2 \in C$ a $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ platí, že $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$. Říkáme, že bod ve tvaru $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0$ je **kuželovou kombinací** bodů $x_1, \ldots, x_k$. Dále, pokud x_i leží v konvexním kuželu množiny C, potom libovolná kuželová kombinace bodu x_i leží rovněž



(a) Množina bodů C



(b) **conv** C

Obrázek 1.1: Konvexní obal množiny

v konvexním kuželu množiny C. Platí, že množina C je konvexní kužel právě tehdy, když C obsahuje všechny kuželové kombinace svých bodů. **Kuželový obal** množiny C je množina, která obsahuje všechny kuželové kombinace množiny C, tj.

$$\textbf{cone}\ C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}.$$

Kuželový obal množiny C je zároveň nejmenší konvexní kužel, který obsahuje množinu C. Pro představu viz obrázek 1.2.

1.5 Nadroviny a poloprostory

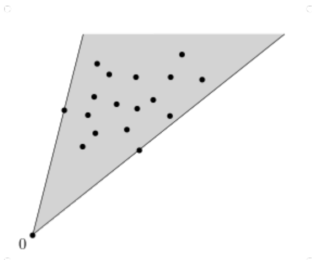
Nadrovina je množina ve tvaru

$$\left\{x \mid a^T x = b\right\},$$

kde $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Analyticky se na nadrovinu koukáme jako na množinu všech řešení netriviální lineární rovnice. Geometricky zase jako na množinu všech bodů takových, že mají konstantní skalární součin s normálovým vektorem a. Konstanta b značí posunutí nadroviny od počátku. Nadrovinu také můžeme vyjádřit jako

$$\left\{x \mid a^T(x - x_0) = 0\right\} = x_0 + \left\{v \mid a^T v = 0\right\},$$

(a) Množina bodů C



(b) **cone** C

Obrázek 1.2: Kuželový obal množiny

kde x_0 je libovolný bod této nadroviny a $\left\{v \mid a^T v = 0\right\}$ je množina všech vektorů, které jsou kolmé k normálovému vektoru a. Nadrovina je tedy množina, která obsahuje bod x_0 a libovolný bod ve tvaru $x_0 + v$, kde v je vektor, který je kolmý k normálovému vektoru a. Pro ilustraci v $\mathbb{R}^2$ viz obrázek 1.3a.

Nadrovina dělí $\mathbb{R}^n$ na dva poloprostory. Množina

$$\left\{x \mid a^T x \leq b\right\}, \text{ resp. } \left\{x \mid a^T x < b\right\},$$

kde $a \neq 0$ se nazývá (uzavřený) **poloprostor**, resp. **otevřený poloprostor**. Je to tedy množina všech řešení netriviální lineární nerovnice. Podobně jako nadrovinu, můžeme poloprostor vyjádřit ve tvaru

$$\left\{x \mid a^T (x - x_0) \leq 0\right\}, \text{ resp. } \left\{x \mid a^T (x - x_0) < 0\right\},$$

kde $a \neq 0$ a x_0 je libovolný bod z nadroviny $\left\{x \mid a^T x = b\right\}$. Poloprostor tedy obsahuje bod x_0 a libovolný bod $x_0 + v$, kde v je vektor, který s vnějším normálovým vektorem svírá tupý nebo pravý úhel. Tato interpretace je v $\mathbb{R}^2$ ilustrována na obrázku 1.3b. Ještě poznamenejme, že poloprostory jsou konvexní množiny, ale samozřejmě nejsou affiní.

(a) Nadrovina

(b) Poloprostor

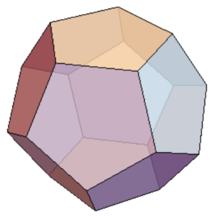
Obrázek 1.3: Nadrovina a poloprostor v $\mathbb{R}^2$.

1.6 Polyedry a polytopy

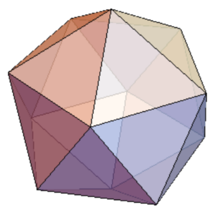
Mějmě konečně mnoho uzavřených poloprostorů v $\mathbb{R}^n$. Množina, která vznikne jejich průnikem se nazývá **polytop**. Je-li navíc polytop omezený, potom ho nazýváme **polyedr**. Polyedr lze také ekvivalentně definovat jako konvexní obal konečně mnoha bodů v $\mathbb{R}^n$. Příkladem polyedrů v $\mathbb{R}^3$ jsou např. platónská tělesa, viz obrázek 1.4. Důležitý fakt říká Minkowského-Weyleova věta: každý polytop P je konečně generovaný a můžeme ho vyjadřit jako

$$P = \mathbf{conv}\ (u_1, \ldots, u_r) + \mathbf{cone}\ (v_1, \ldots, v_s),$$

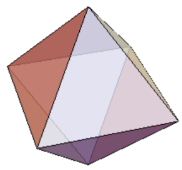
kde u_i, v_i jsou extremální vrcholy P.



(a) Dodecahedron.



(b) Icosahedron.



(c) Octahedron.

Obrázek 1.4: Platónská tělesa.

Kapitola 2

Lineární programování

2.1 Formulace úlohy

Úlohou lineárního programování rozumíme minimalizaci nebo maximalizaci lineární **účelové funkce** vzhledem k lineárním **omezením**, kde tato omezení jsou dána soustavou lineární rovnic a nerovnic. Úlohu lineárního programování lze formulovat v několika ekvivalentních tvarech, které se liší zadáním omezení. Úloha v **kanonickém tvaru** má svá omezení dána soustavou lineárních nerovnic $Ax \leq b$. Tedy:

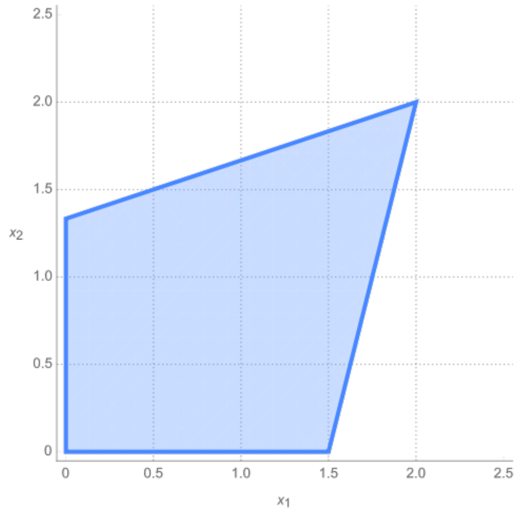
$$\max \left\{ c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0 \right\}, \tag{LP-P}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^n$. **Přípustná množina řešení** je průnikem poloprostorů, které jsou definovány soustavou nerovnic $Ax \leq b$ a **nezáporného ortantu**, tj. množiny $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$. Obě tyto množiny jsou konvexní a tedy i jejich průnik je rovněž konvexní množina. Dále, protože přípustnou množinu máme popsanou soustavou konečně mnoha lineárních nerovnic, geometricky se na úlohu LP-P můžeme koukat jako na maximalizaci lineární funkce přes polyedr, který je definován touto soustavou.

Příklad. Mějme následující úlohu:

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 & \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 4 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{P1}$$

Přípustná množina řešení je zobrazena na obrázku 2.1. Řešením úlohy je vektor $x^* = (2, 2)$ s cenou 4. Implementace v softwaru MOSEK: `https://github.com/c0n73x7/D1PL0MK4/blob/master/mosek/ex1.py`.



Obrázek 2.1: Přípustná množina řešení k úloze P1.

2.2 Dualita

Úloha LP-P se nazývá **primární úloha**. Ke každé primární úloze můžeme přiřadit příslušnou **duální úlohu**. Je to opět úloha lineárního programování, která pro případ LP-P je ve tvaru:

$$\min\left\{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\right\}. \tag{LP-D}$$

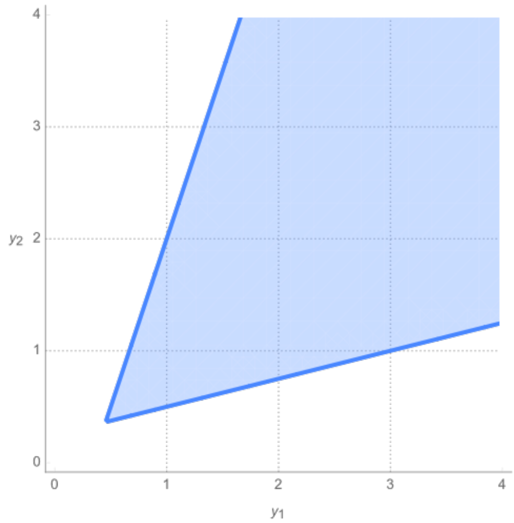
Příklad. Duální úloha k úloze P1 je ve tvaru:

$$\begin{aligned} \min 4y_1 + 6y_2 \\ -y_1 + 4y_2 &\geq 1 \\ 3y_1 - y_2 &\geq 1 \\ y &\geq 0. \end{aligned} \tag{P2}$$

Přípustná množina řešení je zobrazena na obrázku 2.2. Řešením úlohy je vektor $y^* \approx (0.4546, 0.3636)$ s cenou 4. Implementace v softwaru MOSEK: `https://github.com/c0n73x7/D1PL0MK4/blob/master/mosek/ex2.py`.

Všimněme si, že v příkladech P1 a P2 mají řešení x^* i y^* stejnou cenu. To není náhoda a tento fakt je obsahem silné věty o dualitě, kterou dokázala skupina kolem Alberta W. Tuckera v roce 1948. Začneme slabou větou o dualitě.

Věta 1 (Slabá o dualitě)**.** *Nechť $\tilde{x}$ je přípustné řešení LP-P a $\tilde{y}$ je přípustné řešení LP-D. Potom $c^T\tilde{x} \leq b^T\tilde{y}$.*



Obrázek 2.2: Přípustná množina řešení k úloze P2.

Tedy každé přípustné řešení $\tilde{y}$ duální úlohy LP-D nám dává horní odhad na maximum účelové funkce primární úlohy LP-P. Graficky můžeme slabou větu o dualitě interpretovat jako na obrázku 2.3. Zatím tedy nevíme, zda vždy existují přípustná (optimální) řešení x^* pro úlohu LP-P a y^* pro úlohu LP-D, pro která platí $c^T x^* = b^T y^*$. Kladnou odpověď dostaneme z již zmíněné silné věty od dualitě.

Obrázek 2.3: Slabá věta o dualitě.

Věta 2 (Silná o dualitě)**.** *Jestliže úlohy LP-P a LP-D mají přípustná řešení. Potom*

$$\max\left\{c^T x \mid Ax \le b, x \ge 0\right\} = \min\left\{b^T y \mid A^T y \ge c, y \ge 0\right\}.$$

Se znalostí silné věty o dualitě můžeme obrázek 2.3 upravit na obrázek 2.4.

2.3 Komplementární skluzovost

Pro odvození tzv. podmínky komplementární skluzovosti nejprve převedeme úlohy LP-P a LP-D do jiných tvarů. V primární úloze povolíme $x \in \mathbb{R}^n$. Tedy

Obrázek 2.4: Ceny přípustných řešení primární a příslušné duální úlohy.

primární úloha je ve tvaru:

$$\max\left\{c^T x \mid Ax \leq b\right\}. \tag{LP-P2}$$

A příslušná duální úloha je ve tvaru:

$$\min\left\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\right\}. \tag{LP-D2}$$

Nechť $\tilde{x}$ je připustné řešení a x^* je optimální řešení úlohy LP-P2, $\tilde{y}$ je přípustné řešení a y^* je optimální řešení úlohy LP-D2. **Dualitní rozdíl** $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ je číslo $b^T\tilde{y} - c^T\tilde{x} \geq 0$. Ze silné věty o dualitě samozřejmě plyne, že pro optimální řešení x^* a y^* je dualitní rozdíl roven 0. Vyjdeme z dualitního rozdílu optimálních řešení:

$$b^T y^* - c^T x^* = {y^*}^T b - {y^*}^T A x^* = {y^*}^T (b - Ax^*) = 0.$$

Poslední rovnost přepíšeme maticově:

$$[y_1^*, \ldots, y_m^*] \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic $y_i^*(b_i - a_{i\_}x^*) = 0$, kde $i = 1, \ldots, m$. Tedy buď $y_i^* = 0$ nebo $b_i - a_{i\_}x^* = 0$. **Podmínka komplementární skluzovosti** je splněna, jestliže pro přípustná řešení $\tilde{x}, \tilde{y}$ platí buď $\tilde{y}_i = 0$ nebo $b_i - a_{i\_}\tilde{x} = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Pokud nastane $b_i - a_{i\_}\tilde{x} = 0$, potom říkáme, že **vazba** $a_{i\_}\tilde{x} \leq b_i$ **je aktivní**.

Věta 3. *Nechť $\tilde{x}$ je přípustné řešení LP-P2 a $\tilde{y}$ je přípustné řešení LP-D2. Potom $\tilde{x}, \tilde{y}$ jsou optimální právě tehdy, když platí podmínka komplementární skluzovosti.*

Kapitola 3

Semidefinitní programování

Kapitola 4

Kuželové programování

Část II

Kombinatorické úlohy

Kapitola 5

Shannonova kapacita

Představme si zašuměný komunikační kanál, kterým posíláme zprávy, které jsou složeny ze symbolů (písmen) nějaké konečné abecedy. Vlivem šumu mohou být některé symboly špatně interpretovány a naším cílem je vybrat co největší počet slov délky k tak, aby žádná dvě slova nebyla vlivem šumu zaměnitelná.

Problém si formalizujeme v řeči teorie grafů. Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$, kde množina vrcholů představuje symboly z konečné abecedy a dva vrcholy x, y jsou spojeny hranou, pokud vrchol x může být vlivem šumu zaměněn za y.

Maximální počet nezaměnitelných zpráv délky 1 je roven $\alpha(G)$, kde $\alpha(G)$ značí velikost největší nezávislé množiny v grafu G. Pro popis delších zpráv definujeme **silný součin** $G \cdot H$ grafů G a H následovně:

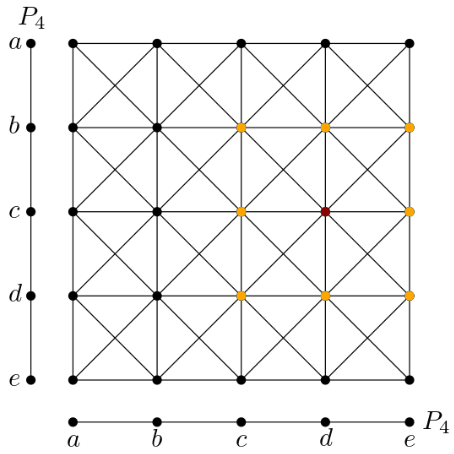
$$V(G \cdot H) = V(G) \times V(H),$$

$$\begin{aligned} E(G \cdot H) = & \{(i,u)(j,v) \mid ij \in E(G) \wedge uv \in E(H)\} \cup \\ & \{(i,u)(j,v) \mid ij \in E(G) \wedge u = v\} \cup \\ & \{(i,u)(j,v) \mid i = j \wedge uv \in E(H)\} . \end{aligned}$$

Příklad. Pro graf $P_4 = a - b - c - d - e$ je silný součin $P_4 \cdot P_4$ zobrazen na obrázku 5.1. Z obrázku je hezky vidět, že např. zpráva *cd* (na obrázku červeně) může být zaměněna s *bc*, *bd*, *be*, *cc*, *ce*, *dc*, *dd* a *de* (na obrázku oranžově). Podobně pro další zprávy.

Pro jednoduchost budeme silný součin k kopií grafu G značit G^k. Tedy $\alpha(G^k)$ je maximální počet nezaměnitelných zpráv délky k. **Shannonova kapacita** grafu G je definována jako

$$\Theta(G) = \sup \left\{ \alpha(G^k)^{1/k} \mid k = 1, 2, \dots \right\} .$$



Obrázek 5.1: $P_4 \cdot P_4$

Neví se, zda pro libovolný graf G existuje vůbec nějaký algoritmus, kterým bychom určili hodnotu $\Theta(G)$. Přesto je alespoň něco známo. Pro perfektní grafy Claude E. Shannon ukázal, že $\Theta(G) = \alpha(G)$. To také znamená, že pro perfektní grafy lze $\Theta(G)$ určit v polynomiálním čase. Dalším kdo se problémem zabýval byl László Lovász, který velmi hezkým způsobem ukázal, že kružnice délky 5 má kapacitu $\sqrt{5}$. Na Lovászův postup se dále podíváme, protože vede k obecnému hornímu odhadu na $\Theta(G)$.

5.1 $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$

Tenzorový součin vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ je

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = (u_1v_1, \ldots, u_1v_m, u_2v_1, \ldots, u_nv_m) .$$

Užitečné bude následující pozorování, které dává do souvisloti skalární a tenzorový součin.

Pozorování. *Nechť* $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ *jsou vektory délky* n *a* $\mathbf{y}, \mathbf{v}$ *jsou vektory délky* m. *Potom platí*

$$(x \circ y)^T (u \circ v) = \left(x^T u\right) \left(y^T v\right) . \tag{5.1}$$

Důkaz. Levá strana:

$$(x_1y_1, x_1y_2, \ldots, x_1y_m, \ldots, x_ny_m)^T (u_1v_1, u_1v_2, \ldots, u_1v_m, \ldots, u_nv_m) =$$
$$x_1y_1u_1v_1 + x_1y_2u_1v_2 + \cdots + x_1y_mu_1v_m + \cdots + x_my_mu_nv_m$$

Pravá strana:

$$(x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) \cdot (y_1v_1 + \cdots + y_nv_m) =$$
$$x_1y_1u_1v_1 + x_1y_2u_1v_2 + \cdots + x_1y_mu_1v_m + \cdots + x_my_mu_nv_m$$

□

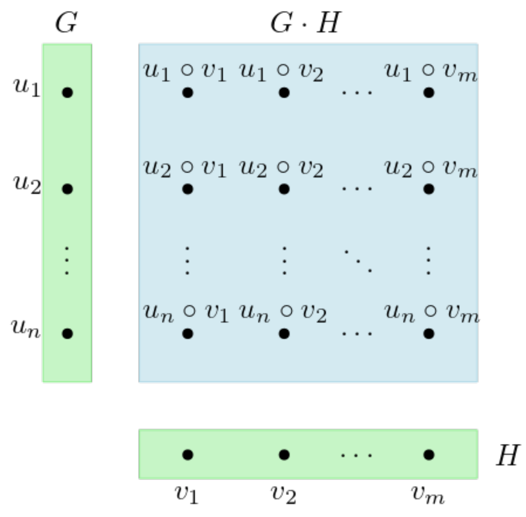
Mějme graf $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \ldots, n\}$. Systém $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jednotkových vektorů v Euklidovském prostoru takový, že

$$\forall ij \notin E \implies \mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$$

nazýváme **ortonormální reprezentace** grafu G. Poznamenejme, že každý graf má nějakou ortonormální reprezentaci, např. $1 \mapsto \mathbf{e}_1, \ldots, n \mapsto \mathbf{e}_n$.

Lemma 1. *Nechť $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální reprezentace grafu G a $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$ je ortonormální reprezentace grafu H. Potom $\mathbf{u}_i \circ \mathbf{v}_j$ je ortonormální reprezentace grafu $G \cdot H$.*

Důkaz. Použijeme vztah 5.1. $(u_i \circ v_j)^T (u_k \circ v_l) = \left(u_i^T u_k\right) \left(v_j^T v_l\right) = 0 \iff ik \notin E(G) \vee jl \notin E(H)$. □



Obrázek 5.2: Ortornomální reprezentace $G \cdot H$.

Hodnotu ortonormální reprezentace $(u_+, \ldots, u_n)$ definujeme jako:

$$\min_c \max_{i=1,\ldots,n} \frac{1}{\left(c^T u_i\right)^2}.$$

Vektoru c, pro který nastává minimum říkáme **„rukojeť"** (anglicky handle) dané ortonormální reprezentace.

Dále definujeme funkci $\vartheta(G)$ jako minimální hodnotu přes všechny ortonormální reprezentace grafu G. Ortonormální reprezentaci, pro kterou nastává minumum nazýváme **optimální**.

Funkci $\vartheta(G)$ se říká **Lovászova theta funkce** a ona je právě již zmíněným horním odhadem na $\Theta(G)$. Podívejme se na některé její vlastnosti.

Lemma 2. $\vartheta(G \cdot H) \leq \vartheta(G)\vartheta(H)$

Důkaz. Nechť $(u_1, \ldots, u_n)$ je optimální ortonormální reprezentace grafu G s „rukojetí" c a $(v_1, \ldots, v_m)$ je optimální ortonormální reprezentace grafu H s „rukojetí" d. Pak $c \circ d$ je jednotkový vektor a platí:

$$\vartheta(G \cdot H) \leq \max_{i,j} \frac{1}{\Big((c \circ d)^T (u_i \circ v_j)\Big)^2} = \max_i \frac{1}{(c^T u_i)^2} \cdot \max_j \frac{1}{(d^T v_j)^2} = \vartheta(G)\vartheta(H).$$

$\square$

Lemma 3. $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$

Důkaz. TODO (máš to někde na papíře) $\square$

Lemma 4. $\Theta(G) \leq \vartheta(G)$

Důkaz. TODO (máš to někde na papíře) $\square$

Věta 4. $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$

Důkaz. TODO (obě nerovnosti, obrázek, spherical cosine theorem) $\square$

5.2 Další vlastnosti $\vartheta(G)$

vztah k barvení ($\overline{G}$), ...

5.3 Semidefinitní program pro $\vartheta(G)$

formulace semidefinitních programů (jsou dva ekvivalentní – to asi nenaimplementuješ, je to docela pekelný, nic nespočítáš), subgradientní aproximační metoda (zkusit naimplementovat???)

Kapitola 6

Problém maximálníhu řezu

formulace úlohy, approximační algoritmy, porovnání semidefinitních programů..

Závěr