Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Semidefinitní programování v kombinatorické optimalizaci

Autor: Ondřej Špaček
Vedoucí práce: Doc. Ing. Roman Čada, Ph.D.

Plzeň, 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury uvedené v seznamu, který je uveden na konci této práce.

V Plzni dne ....
podpis

Poděkování

Především bych chtěl poděkovat svému vedoucímu diplomové práce Doc. Ing. Romanu Čadovi, Ph.D. za spoustu času, který mi věnoval a cenné rady při řešení problémů spojených s vypracováním diplomové práce.

Abstrakt

Klíčová slova

Abstract

Keywords

Obsah

Úvod

Část I

Teorie

Kapitola 1

Základní geometrické pojmy

1.1 Přímky a úsečky

Mějme dva body $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $x_1 \neq x_2$ a parametr $\theta \in \mathbb{R}^n$. Potom výraz

$$y = \theta x_1 + (1 - \theta) x_2 \tag{1.1}$$

popisuje **přímku** procházející body x_1 a x_2. Pro $\theta = 0$ dostáváme bod x_2 a pro $\theta = 1$ bod x_1. Omezíme-li θ na interval $\langle 0, 1 \rangle$, dostaneme **úsečku** s koncovými body x_1 a x_2. Výraz 1.1 lze přepsat do tvaru

$$y = x_2 + \theta(x_1 - x_2),$$

který můžeme interpretovat jako součet počátečního bodu x_2 a nějakého násobku směrového vektoru $x_1 - x_2$.

1.2 Affiní prostory

Říkáme, že $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je **afinní prostor**, jestliže přímka procházející libovolnými dvěma různými body z C leží v C. Tedy C obsahuje lineární kombinace libovolných dvou bodů z C, jestliže součet koeficientů lineární kombinace je roven jedné. To lze zobecnit i pro více než dva body. Lineární kombinace $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$ bodů $x_1, \ldots, x_k$ taková, že $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, se nazývá **afinní kombinace** bodů $x_1, \ldots, x_k$. Indukcí z definice afinního prostoru lze snadno ukázat, že pokud C je afinní množina, $x_1, \ldots, x_k \in C$ a $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, potom bod $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$.
Nechť C je afinní prostor a $x_0 \in C$, potom množina

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 \mid c \in C\}$$

je **vektorový prostor**, tj. množina, která je uzavřená na sčítání a násobení skalárem.
Afinní prostor C lze vyjádřit jako

$$C = V + x_0 = \{v + x_0 \mid v \in V\},$$

kde V je vektorový prostor a x_0 je počátek. Poznamenejme, že vektorový prostor V asociovaný s afinním prostorem C nezávisí na volbě počátku x_0.
Dimenze afinního prostoru $C = V + x_0$ je definována jako dimenze vektorového prostoru $V = C - x_0$, kde x_0 je libovolný prvek z C. Množina všech affiních kombinací bodů množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **affiní obal** množiny C. Affiní obal množiny C budeme značit

$$\textbf{aff}\ C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in C, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}.$$

Affiní obal je nejmenší affiní prostor, který obsahuje množinu C. Tedy, jestliže S je affiní prostor takový, že $C \subseteq S$, potom $\textbf{aff}\ C \subseteq S$.

1.3 Konvexní množiny

Říkáme, že množina C je **konvexní**, jestliže úsečka mezi libovolnými dvěma body z C leží také v C. Jinak řečeno, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in C$ a libovolné $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ platí, že $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$. Poznamenejme, že každý afinní prostor je zároveň konvexní množinou. Podobně jako affiní kombinaci definujeme **konvexní kombinaci** bodů $x_1, \ldots, x_k$ jako $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0$ pro $i = 1, \ldots, k$. **Konvexní obal** množiny C je množina všech konvexních kombinací bodů z množiny C, značíme

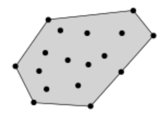
$$\textbf{conv}\ C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \ldots, k, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}.$$

Analogicky, konvexní obal množiny C je nejmenší konvexní množina, která obsahuje množinu C. Pro představu viz obrázek 1.1.

1.4 Kužely

Množina C se nazývá **kužel**, jestliže pro každé $x \in C$ a $\theta \geq 0$ platí, že $\theta x \in C$. Je-li C navíc konvexní, pak se C nazývá **konvexní kužel**. Tedy C je konvexní kužel, jestliže pro libovolné $x_1, x_2 \in C$ a $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ platí, že $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$. Říkáme, že bod ve tvaru $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0$ je **kuželovou kombinací** bodů $x_1, \ldots, x_k$. Dále, pokud x_i leží v konvexním kuželu množiny C, potom libovolná kuželová kombinace bodu x_i leží rovněž

(a) Množina bodů C



(b) **conv** C

Obrázek 1.1: Konvexní obal množiny

v konvexním kuželu množiny C. Platí, že množina C je konvexní kužel právě tehdy, když C obsahuje všechny kuželové kombinace svých bodů. **Kuželový obal** množiny C je množina, která obsahuje všechny kuželové kombinace množiny C, tj.

$$\{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}.$$

Kuželový obal množiny C je zároveň nejmenší konvexní kužel, který obsahuje množinu C. Pro představu viz obrázek 1.2.

1.5 Nadroviny a poloprostory

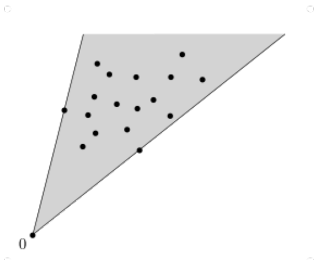
Nadrovina je množina ve tvaru

$$\left\{x \mid a^T x = b\right\},$$

kde $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Analyticky se na nadrovinu koukáme jako na množinu všech řešení netriviální lineární rovnice. Geometricky zase jako na množinu všech bodů takových, že mají konstantní skalární součin s normálovým vektorem a. Konstanta b značí posunutí nadroviny od počátku. Nadrovinu také můžeme vyjádřit jako

$$\left\{x \mid a^T(x - x_0) = 0\right\} = x_0 + \left\{v \mid a^T v = 0\right\},$$

(a) Množina bodů C



(b) **conv** C

Obrázek 1.2: Kuželový obal množiny

kde x_0 je libovolný bod této nadroviny a $\left\{v \mid a^T v = 0\right\}$ je množina všech vektorů, které jsou kolmé k normálovému vektoru a. Nadrovina je tedy množina, která obsahuje bod x_0 a libovolný bod ve tvaru $x_0 + v$, kde v je vektor, který je kolmý k normálovému vektoru a. Pro ilustraci v $\mathbb{R}^2$ viz obrázek 1.3a.

Nadrovina dělí $\mathbb{R}^n$ na dva poloprostory. Množina

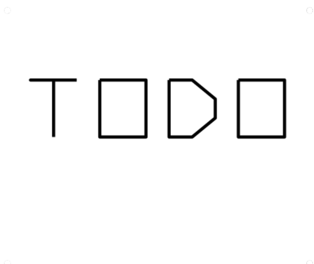
$$\left\{x \mid a^T x \leq b\right\}, \text{ resp. } \left\{x \mid a^T x < b\right\},$$

kde $a \neq 0$ se nazývá (uzavřený) **poloprostor**, resp. **otevřený poloprostor**. Je to tedy množina všech řešení netriviální lineární nerovnice. Podobně jako nadrovinu, můžeme poloprostor vyjádřit ve tvaru

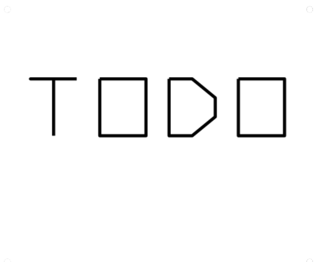
$$\left\{x \mid a^T (x - x_0) \leq 0\right\}, \text{ resp. } \left\{x \mid a^T (x - x_0) < 0\right\},$$

kde $a \neq 0$ a x_0 je libovolný bod z nadroviny $\left\{x \mid a^T x = b\right\}$. Poloprostor tedy obsahuje bod x_0 a libovolný bod $x_0 + v$, kde v je vektor, který s vnějším normálovým vektorem svírá tupý nebo pravý úhel. Tato interpretace je v $\mathbb{R}^2$ ilustrována na obrázku 1.3b. Ještě poznamenejme, že poloprostory jsou konvexní množiny, ale samozřejmě nejsou affiní.

1.6 Polyedry a polytopy



(a) Nadrovina



(b) Poloprostor

Obrázek 1.3: Nadrovina a poloprostor v $\mathbb{R}^2$.

Kapitola 2

Lineární programování

2.1 Formulace úlohy

Úlohou lineárního programování rozumíme minimalizaci nebo maximalizaci lineární **účelové funkce** vzhledem k lineárním **omezením**, kde tato omezení jsou dána soustavou lineární rovnic a nerovnic. Úlohu lineárního programování lze formulovat v několika ekvivalentních tvarech, které se liší zadáním omezení. Úloha v **kanonickém tvaru** má svá omezení dána soustavou lineárních nerovnic $Ax \leq b$. Tedy:

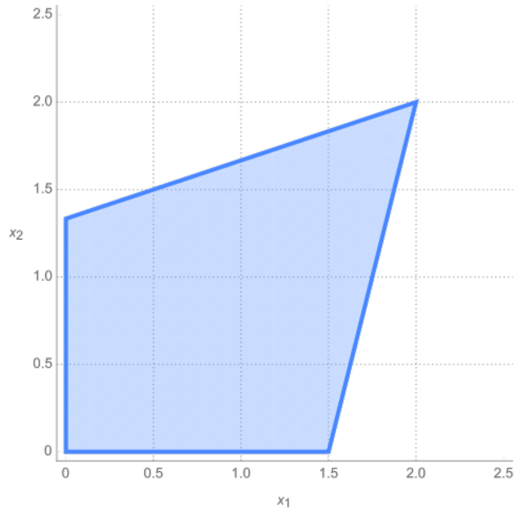
$$\max \left\{ c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0 \right\}, \tag{LP-P}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^n$. **Přípustná množina řešení** je průnikem poloprostorů, které jsou definovány soustavou nerovnic $Ax \leq b$ a **nezáporného ortantu**, tj. množiny $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$. Obě tyto množiny jsou konvexní a tedy i jejich průnik je rovněž konvexní množina. Dále, protože přípustnou množinu máme popsanou soustavou konečně mnoha lineárních nerovnic, geometricky se na úlohu LP-P můžeme koukat jako na maximalizaci lineární funkce přes polyedr, který je definován touto soustavou.

Příklad. Mějme následující úlohu:

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 & \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 4 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{P1}$$

Přípustná množina řešení je zobrazena na obrázku 2.1. Řešením úlohy je vektor $x^* = (2, 2)$ s cenou 4. Implementace v softwaru MOSEK: `https://github.com/c0n73x7/D1PL0MK4/blob/master/mosek/ex1.py`.



Obrázek 2.1: Přípustná množina řešení k úloze P1.

2.2 Dualita

Úloha LP-P se nazývá **primární úloha**. Ke každé primární úloze můžeme přiřadit příslušnou **duální úlohu**. Je to opět úloha lineárního programování, která pro případ LP-P je ve tvaru:

$$\min \left\{ b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0 \right\}. \tag{LP-D}$$

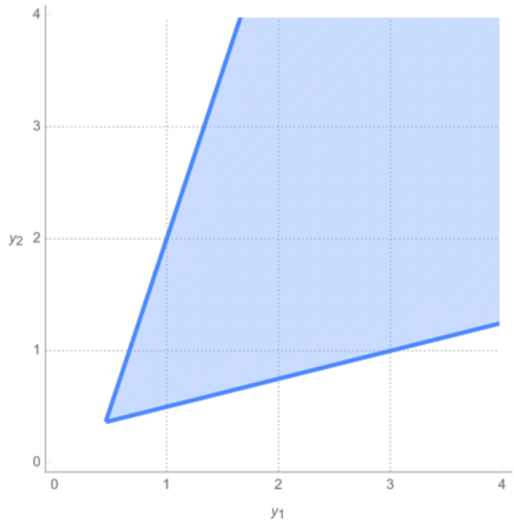
Příklad. Duální úloha k úloze P1 je ve tvaru:

$$\begin{aligned} \min 4y_1 + 6y_2 & \\ -y_1 + 4y_2 &\geq 1 \\ 3y_1 - y_2 &\geq 1 \\ y &\geq 0. \end{aligned} \tag{P2}$$

Přípustná množina řešení je zobrazena na obrázku 2.2. Řešením úlohy je vektor $y^* \approx (0.4546, 0.3636)$ s cenou 4. Implementace v softwaru MOSEK: `https://github.com/c0n73x7/D1PL0MK4/blob/master/mosek/ex2.py`.

Všimněme si, že v příkladech P1 a P2 mají řešení x^* i y^* stejnou cenu. To není náhoda a tento fakt je obsahem silné věty o dualitě, kterou dokázala skupina kolem Alberta W. Tuckera v roce 1948. Začneme slabou větou o dualitě.

Věta 1 (Slabá o dualitě)**.** *Nechť $\tilde{x}$ je přípustné řešení LP-P a $\tilde{y}$ je přípustné řešení LP-D. Potom $c^T \tilde{x} \leq b^T \tilde{y}$.*



Obrázek 2.2: Přípustná množina řešení k úloze P2.

Tedy každé přípustné řešení $\tilde{y}$ duální úlohy LP-D nám dává horní odhad na maximum účelové funkce primární úlohy LP-P. Graficky můžeme slabou větu o dualitě interpretovat jako na obrázku 2.3. Zatím tedy nevíme, zda vždy existují přípustná (optimální) řešení x^* pro úlohu LP-P a y^* pro úlohu LP-D, pro která platí $c^T x^* = b^T y^*$. Kladnou odpověď dostaneme z již zmíněné silné věty od dualitě.

Obrázek 2.3: Slabá věta o dualitě.

Věta 2 (Silná o dualitě)**.** *Jestliže úlohy LP-P a LP-D mají přípustná řešení. Potom*

$$\max\left\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\right\} = \min\left\{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\right\}.$$

Se znalostí silné věty o dualitě můžeme obrázek 2.3 upravit na obrázek 2.4.

Obrázek 2.4: Ceny přípustných řešení primární a příslušné duální úlohy.

2.3 Komplementární skluzovost

Pro odvození tzv. podmínky komplementární skluzovosti nejprve převedeme úlohy LP-P a LP-D do jiných tvarů. V primární úloze povolíme $x \in \mathbb{R}^n$. Tedy primární úloha je ve tvaru:

$$\max \left\{ c^T x \mid Ax \leq b \right\}. \tag{LP-P2}$$

A příslušná duální úloha je ve tvaru:

$$\min \left\{ b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0 \right\}. \tag{LP-D2}$$

Nechť $\tilde{x}$ je připustné řešení a x^* je optimální řešení úlohy LP-P2, $\tilde{y}$ je přípustné řešení a y^* je optimální řešení úlohy LP-D2. **Dualitní rozdíl** $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ je číslo $b^T\tilde{y} - c^T\tilde{x} \geq 0$. Ze silné věty o dualitě samozřejmě plyne, že pro optimální řešení x^* a y^* je dualitní rozdíl roven 0. Vyjdeme z dualitního rozdílu optimálních řešení:

$$b^T y^* - c^T x^* = {y^*}^T b - {y^*}^T A x^* = {y^*}^T (b - Ax^*) = 0.$$

Poslední rovnost přepíšeme maticově:

$$[y_1^*, \ldots, y_m^*] \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic $y_i^* (b_i - a_{i\_} x^*) = 0$, kde $i = 1, \ldots, m$. Tedy buď $y_i^* = 0$ nebo $b_i - a_{i\_} x^* = 0$. **Podmínka komplementární skluzovosti** je splněna, jestliže pro přípustná řešení $\tilde{x}, \tilde{y}$ platí buď $\tilde{y}_i = 0$ nebo $b_i - a_{i\_}\tilde{x} = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Pokud nastane $b_i - a_{i\_}\tilde{x} = 0$, potom říkáme, že **vazba** $a_{i\_}\tilde{x} \leq b_i$ **je aktivní**.

Věta 3. *Nechť $\tilde{x}$ je přípustné řešení LP-P2 a $\tilde{y}$ je přípustné řešení LP-D2. Potom $\tilde{x}, \tilde{y}$ jsou optimální právě tehdy, když platí podmínka komplementární skluzovosti.*

Kapitola 3

Semidefinitní programování

Kapitola 4

Kuželové programování

Část II

Kombinatorické úlohy

Kapitola 5

Shannonova kapacita

Kapitola 6

Problém maximálníhu řezu

Kapitola 7

Problém obchodního cestujícího

Část III

Implementace

Kapitola 8

Lovászova theta funkce

Kapitola 9

Problém maximálníhu řezu

Závěr