

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

DIPLOMOVÁ PRÁCE
**Semidefinitní programování v kombinatorické
optimalizaci**

Autor: Ondřej Špaček
Vedoucí práce: Doc. Ing. Roman Čada, Ph.D.

Plzeň, 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury uvedené v seznamu, který je uveden na konci této práce.

V Plzni dne

.....

podpis

Poděkování

Především bych chtěl poděkovat svému vedoucímu diplomové práce Doc. Ing. Romanu Čadovi, Ph.D. za spoustu času, který mi věnoval a cenné rady při řešení problémů spojených s vypracováním diplomové práce.

Abstrakt

Klíčová slova

Abstract

Keywords

Obsah

Úvod	2
I Teorie	3
1 Základní geometrické pojmy	4
1.1 Přímký a úsečky	4
1.2 Affiní množiny	4
1.3 Konvexní množiny	5
1.4 Kužely	5
1.5 Nadroviny a poloprostory	6
1.6 Polyedry a polytopy	7
2 Lineární programování	9
2.1 Formulace úlohy	9
2.2 Dualita	10
2.3 Komplementární skluzovost	10
3 Semidefinitní programování	11
4 Kuželové programování	12
II Kombinatorické úlohy	13
5 Shannonova kapacita	14
6 Problém maximálního řezu	15
7 Problém obchodního cestujícího	16

<i>OBSAH</i>	1
III Implementace	17
8 Lovászova theta funkce	18
9 Problém maximálního řezu	19
Závěr	20

Úvod

Část I

Teorie

Kapitola 1

Základní geometrické pojmy

1.1 Přímký a úsečky

Mějme dva body $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $x_1 \neq x_2$ a parametr $\theta \in \mathbb{R}^n$. Potom výraz

$$y = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \quad (1.1)$$

popisuje **přímku** procházející body x_1 a x_2 . Pro $\theta = 0$ dostáváme bod x_2 a pro $\theta = 1$ bod x_1 . Omezíme-li θ na interval $\langle 0, 1 \rangle$, dostaneme **úsečku** s koncovými body x_1 a x_2 . Výraz 1.1 lze přepsat do tvaru

$$y = x_2 + \theta(x_1 - x_2),$$

který můžeme interpretovat jako součet počátečního bodu x_2 a nějakého násobku směrového vektoru $x_1 - x_2$.

1.2 Afinity množiny

Říkáme, že $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je **afinní množina**, jestliže přímka procházející libovolnými dvěma různými body z C leží v C . Tedy C obsahuje lineární kombinace libovolných dvou bodů z C , jestliže součet koeficientů lineární kombinace je roven jedné. To lze zobecnit i pro více než dva body. Lineární kombinace $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$ bodů x_1, \dots, x_k taková, že $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$, se nazývá **afinní kombinace** bodů x_1, \dots, x_k . Indukcí z definice afinní množiny lze snadno ukázat, že pokud C je afinní množina, $x_1, \dots, x_k \in C$ a $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$, potom bod $\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \in C$.

Nechť C je afinní množina a $x_0 \in C$, potom množina

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in C\}$$

je **vektorový prostor**, tj. množina, která je uzavřená na sčítání a násobení skalárem.

Afinní množinu C lze vyjádřit jako

$$C = V + x_0 = \{v + x_0 \mid v \in V\},$$

kde V je vektorový prostor a x_0 je počátek. Poznamenejme, že vektorový prostor V asociovaný s afinní množinou C nezávisí na volbě počátku x_0 .

Dimenze afinní množiny $C = V + x_0$ je definována jako dimenze vektorového prostoru $V = C - x_0$, kde x_0 je libovolný prvek z C . Množina všech afinních kombinací bodů množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **afiní obal** množiny C . Afiní obal množiny C budeme značit

$$\mathbf{aff} C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \dots, x_k \in C, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}.$$

Afiní obal je nejmenší afinní množina, která obsahuje množinu C . Tedy, jestliže S je afinní množina taková, že $C \subseteq S$, potom $\mathbf{aff} C \subseteq S$.

1.3 Konvexní množiny

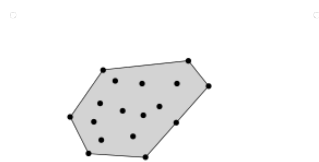
Říkáme, že množina C je **konvexní**, jestliže úsečka mezi libovolnými dvěma body z C leží také v C . Jinak řečeno, jestliže pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in C$ a libovolné $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ platí, že $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C$. Poznamenejme, že každá afinní množina je zároveň konvexní množinou. Podobně jako afinní kombinaci definujeme **konvexní kombinaci** bodů x_1, \dots, x_k jako $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0$ pro $i = 1, \dots, k$. **Konvexní obal** množiny C je množina všech konvexních kombinací bodů z množiny C , značíme

$$\mathbf{conv} C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}.$$

Analogicky, konvexní obal množiny C je nejmenší konvexní množina, která obsahuje množinu C . Pro představu viz obrázek 1.1.

1.4 Kužely

Množina C se nazývá **kužel**, jestliže pro každé $x \in C$ a $\theta \geq 0$ platí, že $\theta x \in C$. Je-li C navíc konvexní, pak se C nazývá **konvexní kužel**. Tedy C je konvexní kužel, jestliže pro libovolné $x_1, x_2 \in C$ a $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ platí, že $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$. Říkáme, že bod ve tvaru $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$, kde $\theta_1, \dots, \theta_k \geq 0$ je **kuželovou kombinací** bodů x_1, \dots, x_k . Dále, pokud x_i leží v konvexním kuželu množiny C , potom libovolná kuželová kombinace bodu x_i leží rovněž

(a) Množina bodů C (b) $\text{conv } C$

Obrázek 1.1: Konvexní obal množiny

v konvexním kuželu množiny C . Platí, že množina C je konvexní kužel právě tehdy, když C obsahuje všechny kuželové kombinace svých bodů. **Kuželový obal** množiny C je množina, která obsahuje všechny kuželové kombinace množiny C , tj.

$$\{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \dots, k\}.$$

Kuželový obal množiny C je zároveň nejmenší konvexní kužel, který obsahuje množinu C . Pro představu viz obrázek 1.2.

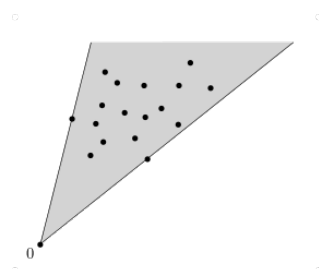
1.5 Nadroviny a poloprostory

Nadrovina je množina ve tvaru

$$\{x \mid a^T x = b\},$$

kde $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Analyticky se na nadrovinu koukáme jako na množinu všech řešení netriviální lineární rovnice. Geometricky zase jako na množinu všech bodů takových, že mají konstantní skalární součin s normálovým vektorem a . Konstanta b značí posunutí nadroviny od počátku. Nadrovinu také můžeme vyjádřit jako

$$\{x \mid a^T(x - x_0) = 0\} = x_0 + \{v \mid a^T v = 0\},$$

(a) Množina bodů C (b) $\text{conv } C$

Obrázek 1.2: Kuželový obal množiny

kde x_0 je libovolný bod této nadroviny a $\{v \mid a^T v = 0\}$ je množina všech vektorů, které jsou kolmé k normálovému vektoru a . Nadrovina je tedy množina, která obsahuje bod x_0 a libovolný bod ve tvaru $x_0 + v$, kde v je vektor, který je kolmý k normálovému vektoru a . Pro ilustraci v \mathbb{R}^2 viz obrázek 1.3a.

Nadrovina dělí \mathbb{R}^n na dva poloprostory. Množina

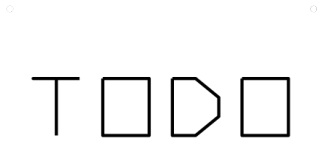
$$\{x \mid a^T x \leq b\}, \text{ resp. } \{x \mid a^T x < b\},$$

kde $a \neq 0$ se nazývá (uzavřený) **poloprostor**, resp. **otevřený poloprostor**. Je to tedy množina všech řešení netriviální lineární nerovnice. Podobně jako nadrovinu, můžeme poloprostor vyjádřit ve tvaru

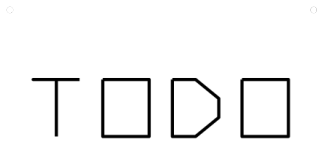
$$\{x \mid a^T(x - x_0) \leq 0\}, \text{ resp. } \{x \mid a^T(x - x_0) < 0\},$$

kde $a \neq 0$ a x_0 je libovolný bod z nadroviny $\{x \mid a^T x = b\}$. Poloprostor tedy obsahuje bod x_0 a libovolný bod $x_0 + v$, kde v je vektor, který s vnějším normálovým vektorem svírá tupý nebo pravý úhel. Tato interpretace je v \mathbb{R}^2 ilustrována na obrázku 1.3b. Ještě poznamenejme, že poloprostory jsou konvexní množiny, ale samozřejmě nejsou affíní.

1.6 Polyedry a polytopy



(a) Nadrovina



(b) Poloprostor

Obrázek 1.3: Nadrovina a poloprostor v \mathbb{R}^2 .

Kapitola 2

Lineární programování

2.1 Formulace úlohy

Úlohou lineárního programování rozumíme minimalizaci nebo maximalizaci lineární **účelové funkce** vzhledem k lineárním **omezením**, kde tato omezení jsou dána soustavou lineární rovnic a nerovnic. Úlohu lineárního programování lze formulovat v několika tvarech ekvivalentních, které se liší zadáním omezení. Úloha ve **standardním tvaru** má svá omezení dána soustavou lineárních rovnic $Ax = b$. Tedy:

$$\max \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}, \quad (\text{LP-P})$$

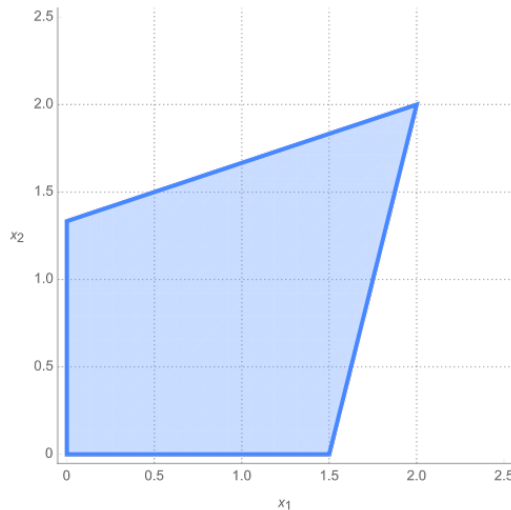
kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^n$. **Přípustná množina řešení** je průnikem affinního prostoru, který je definován soustavou rovnic $Ax = b$ a **nezáporného ortantu**, tj. množiny $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$. Obě tyto množiny jsou konvexní a tedy i jejich průnik je rovněž konvexní množina. Dále, protože přípustnou množinu máme popsanou soustavou konečně mnoha lineárních rovnic a nerovnic, geometricky se na úlohu LP-P můžeme koukat jako na maximalizaci lineární funkce přes polyedr, který je definován touto soustavou.

Příklad. Mějme následující úlohu:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s. omezení} \quad & -x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ & 4x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{P1})$$

Projekce přípustné množiny řešení do roviny (x_1, x_2) je zobrazena na obrázku 2.1. Řešením úlohy je vektor $x^* = (2, 2, 0, 0)$ s cenou 4. Implemen-

tace v softwaru MOSEK: <https://github.com/c0n73x7/D1PL0MK4/blob/master/mosek/ex1.py>.



Obrázek 2.1: Přípustná množina řešení k úloze P1.

2.2 Dualita

Úloha LP-P se nazývá **primární úloha**. Ke každé primární úloze můžeme přiřadit příslušnou **duální úlohu**. Je to opět úloha lineárního programování, která pro případ LP-P je ve tvaru:

$$\min \{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\}. \quad (\text{LP-D})$$

Příklad. Duální úloha k úloze P1 je ve tvaru:

$$\begin{aligned} \min & 4y_1 + 6y_2 \\ & -y_1 + 4y_2 \geq 1 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{P2})$$

2.3 Komplementární skluzovost

Kapitola 3

Semidefinitní programování

Kapitola 4

Kuželové programování

Část II

Kombinatorické úlohy

Kapitola 5

Shannonova kapacita

Kapitola 6

Problém maximálního řezu

Kapitola 7

Problém obchodního cestujícího

Část III

Implementace

Kapitola 8

Lovászova theta funkce

Kapitola 9

Problém maximálního řezu

Závěr