数学思维与人工智能

第一章：数学思维的重要性

中国矿业大学数学学院

祁永强

15862179376

qiyongqiang3@163.com

MATLAB

数学思维训练：生活常识

1、一只鞋进货价45元, 甩卖30元，顾客来买双鞋给了张100元，王小姐没零钱，于是找邻铺换了100元。事后邻铺发现钱是假的，又赔了邻铺100元。一共亏了多少元?

2、1元钱一瓶汽水，喝完后两个空瓶换一瓶汽水，问：你有2000元钱，最多可以喝到几瓶汽水?

3、一个人花8块钱买了一只鸡，9块钱卖掉了，然后他觉得不划算，花10块钱又买回来了，11块卖给另外一个人。问他赚了多少？

MATLAB

数学思维训练：动态规划

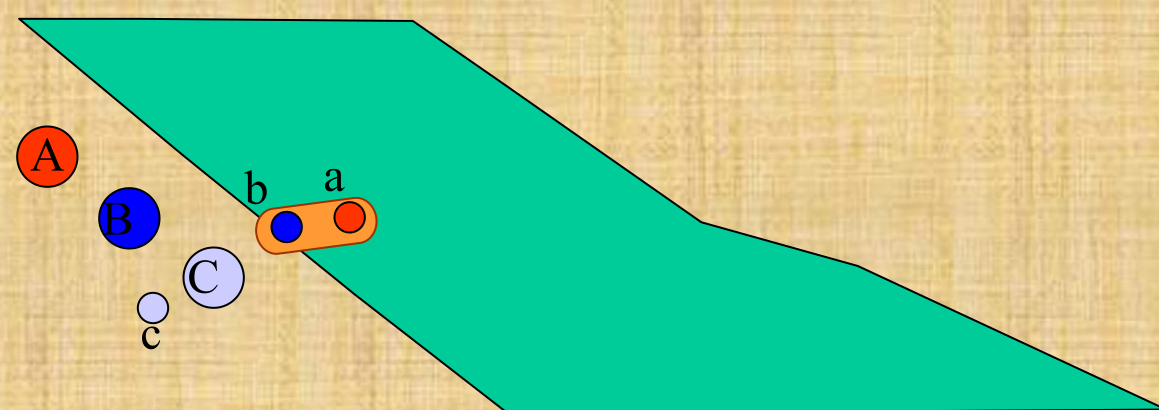
4、猴子过河

有三只母猴各带一只小猴子，准备利用一条小船渡河。设计渡河方案。注意：

（1）每只猴子都会划船，但船上每次只能承载两只猴子（不论大、小猴）；

（2）每只小猴子在接触到其它母猴的时候必须有母亲在场，否则将被伤害。

将三个大猴分别记为A，B，C， 对应的三个小猴子分别记为a，b，c。



MATLAB

数学思维训练：纳什均衡

5、囚徒困惑

有互不熟悉的两人在公共场所斗殴，将接受处罚。若两人均投案，则因在公共场所斗殴各被罚款200元；若两人均不投案，则只能按普通滋事各罚款100元；要是只有一人投案而另一人拒不承认，仍可确定为斗殴，投案者免予处罚，不投案者被认定为是主要肇事方被罚款400元。

乙 \ 甲	不投案	投案
不投案	100＼100	400＼ 0
投案	0 ＼400	200＼200

MATLAB

数学思维训练：纳什均衡

我们站在甲的角度来看问题，他并不知道乙是否会投案。假若乙不投案，甲也不投案将罚款100元，但若甲选择投案就会免予处罚；假若乙已经投案的话，甲不投案将被罚款400元，投案则只罚款200元。

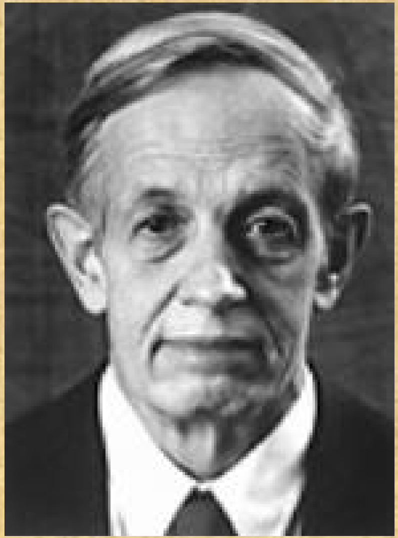
可见，不论乙是否会与警察配合，从甲的实际利益出发，他总会投案的。出于同样的原因，乙也会选择投案。

结果，甲乙二人均被罚款200元，虽然他们都知道还有各罚100元的处罚方案，但那样的结果不太可能出现。

MATLAB

数学思维训练：纳什均衡

即便是重新征求各自的意见，甲和乙都没有改变态度的愿望。这一结果的出现，被称为纳什均衡。



约翰F.Nash(纳什)是著名的美国数学家，1928年生，1950年获普林斯顿大学博士学位．1994年获诺贝尔经济学奖。纳什均衡是他最具代表性的学术成果。

MATLAB

MATLAB

数学思维训练：逆向思维

6、海盗分金

5名海盗抢到了100块金币（完全相同），他们准备采用以下的方法分赃。

抽签为每人确定1、2、3、4、5这五个不同的序号，先由抽到1的人提出自己的分赃方案，如果他的方案被超过一半人赞同，那么就按照他的意见分赃；但是如果他的意见没有得到过半数人赞同的话，他将被扔进大海去喂鲨鱼。

数学思维训练：逆向思维

当海盗1被投入大海之后，由序号是2的人重新制定分赃方案。如果海盗2的方案在现有海盗中超过半数同意便执行，否则也将海盗2投大海。依次类推。

假定这五个海盗都是高智商且极其贪财的。试问海盗1会制定出怎样的分赃方案，以使自己免于葬身鱼腹。

要想弄清楚海盗1应该制定怎样的分赃方案，还是从假若只剩下两个人时的情况说起。如果船上只剩下了海盗4和海盗5两个人的话，根据规则4号海盗只能提出0:100 的分赃方案，5号独得全部，就不必反对了。四号才可以活命。

MATLAB

数学思维训练：逆向思维

海盗3 能够预见到自己被投海后将发生的事情，他应该懂得：自己制定的分赃方案只要能给海盗4一块钱，海盗4就会满足的。于是，3号提出的方案一定是99:1:0 。让5号白白去投反对票好了。

海盗2要想避免被扔下海，它必须争取两张赞同票。但是，即便分给海盗3全部100块中的98块金币，贪婪的海盗3也不会赞成，可以争取的两张赞同票只能是海盗4和海盗5了。其实，只要共拿出3块金币分给海盗4和海盗5，就可以用最小的成本获得平安。于是，海盗2的方案就选择了97:0:2:1。

MATLAB

数学思维训练：逆向思维

现在回到问题的开始。

海盗1不能指望任何方案能使海盗2满意，它可以制定出94：0：1：3：2的分赃方案。那样，可获得三张赞成票。

然而，视钱如命的海盗1不会浪费哪怕是一枚金币，他实际拿出来的分赃方案将是

97：0：1：0：2。

海盗2号和海盗4当然会反对了，但是海盗3和海盗5都不反对，因为这已经是他们最好的收益了。

MATLAB

一、数学思维的重要性

- R·培根指出："数学是打开科学大门的钥匙。"
- H·G·格拉斯曼说："数学除了锻炼敏锐的理解力，发现真理外，它还有另一个训练全面考查科学系统的头脑的开发功能。"
- N·A·考特认为："数学是人类智慧王冠上最灿烂的明珠。"
- K·L·米斯拉指出："数学是代表人类抽象思维方面的最高成就和胜利。"

MATLAB

著名数学家J·P塞尔指出：“关于学生，关键是要让他们明白数学是活生生的，而不是僵死的，讲数学的传统方法有个缺陷，即教师从不提及这类问题，这很可惜。”

J·P塞尔

因此我认为：数学教学不但应该传授数学知识，还应该培养学生的数学思维，所以才开了这门课程。

MATLAB

二、几类重要的数学思维

1、归纳思维

2、类比思维

3、发散思维

4、逆（反）向思维

5、（数学）猜想

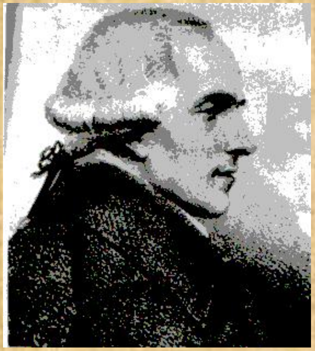
MATLAB

1、归纳思维

归纳是人类赖以发现真理的基本的、重要的思维方法。

著名数学家高斯曾说：“我的许多发现都是靠归纳取得的。”

著名数学家拉普拉斯指出：“分析和自然哲学中许多重大的发现，都归功于归纳方法…牛顿二项式定理和万有引力原理，就是归纳方法的成果”。“在数学里，发现真理的主要工具和手段是归纳和类比。”



MATLAB

1、归纳思维

归纳是在通过多种手段（观察、实验、分析……）对许多个别事物的经验认识的基础上，发现其规律，总结出原理或定理。归纳是从观察到一类事物的部分对象具有某一属性，而归纳出该事物都具有这一属性的推理方法。或者说，归纳思维就是要从众多的事物和现象中找出共性和本质的东西的抽象化思维。

也可以说，归纳是在相似中发现规律，由个别中发现一般。

MATLAB

1、归纳思维

从数学的发展可以看出，许多新的数学概念、定理、法则、……的形式，都经历过积累经验的过程，从大量观察、计算……,然后归纳出其共性和本质的东西，例如：哥德巴赫猜想，费马猜想，素数定理等。

MATLAB

1、归纳思维

①哥德巴赫猜想:

3+7=10， 3+17=20， 13+17=30

3，7，13，17都是奇素数*。

10， 20， 30 都是偶数。

是否两个奇素数之和都是偶数呢?

这是显然的。但是（逆向思维）

任何一个偶数，都能分解为两个奇素数之和吗?

MATLAB

1、归纳思维

6=3+3

8=3+5

10=3+7

12=5+7

14=3+11=7+7

16=3+13=5+11 ……

这样下去总是对的吗?

即任何一个大于4的偶数都是两个奇素数之和?

大于4的偶数=奇素数+奇素数?（哥德巴赫猜想）

MATLAB

1、归纳思维

60=3+57 （57=19×3，不是素数）

60=5+55 （55=11×5，不是素数) ？！

60=7+53（7和53都是素数） …….

一直到现在还没有一个人推翻它，但也还没有一个人证明它。

MATLAB

1、归纳思维

哥德巴赫提出这个问题时，欧拉在1742年6月30日的回信中说：**他相信这个猜想，但他不能证明。**于是引起了很多人研究它，但在120年间，一直没有多大进展。

直到20世纪20年代，才开始有了眉目，挪威数学家**布朗**（V.Brun）用“筛法”证明了：任何一个大于4的偶数：

$$A=[a_1\times a_2\times\ldots\times a_9]+[b_1\times b_2\times\ldots\times b_9],\ (9+9)$$

其中$a_i,b_i(i=1,2,3\ldots9)$都是素数，才为这个猜想的证明开辟了道路。

MATLAB

1、归纳思维

1924年　拉德马哈尔　证明了（7+7）；

1932年　爱斯尔曼　证明了（6+6）；

1938年　布赫斯塔勃　证明了（5+5），

1940年又证明了（4+4）；

1956年　维诺格拉多夫 证明了（3+3）；

1956年　王元 证明了（3+4）；

1957年　王元 证明了（2+3）；

1962年　潘承洞证明了（1+5）；

同年　王、潘又证明了（1+4）；

MATLAB

1、归纳思维

1965年 布赫斯塔勃、维诺格拉多夫、庞比利证明（1+3）；

1966年 陈景润证明（1+2）；《中国科学》(1973.P.111-128)

1. 吴文俊说：哥德巴赫猜想是一场攻坚战和接力赛。

2. 解放后，华罗庚、闵嗣鹤在这一研究上奠定了基础。

3. 王元1956年证得：大偶数=3+4；

   1957年又得出：大偶数=2+3。

4. 潘承洞1962年证得：大偶数=1+4。

5. 陈景润1966年证得：大偶数=1+2；

1972年潘、王、丁夏畦简化了陈的证明。

MATLAB

1、归纳思维

苏步青说：要想取得1+1就得把世界上八十多种方法融会贯通，博取众长。

1998年利用超级计算机，验证这个猜想对于每一个小于4×10^{14}的偶数都是正确的。但没有一项计算技术可以对直至无穷的每一个偶数确认这个猜想成立。关键是要找出一个抽象严格的证明。

这是数学向人类智慧的挑战！

MATLAB

1、归纳思维

二项式系数

$(u+v)^1=u+v$

$(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$

$(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$

$(u+v)^4=u^4+4u^3v+6u^2v^2+4uv^3+v^4$

$(u+v)^5=$

…….

$(u+v)^n=?$

MATLAB

1、归纳思维

帕斯卡三角形

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	1	1	1	1	1	1	1		
3	1	2	3	4	5	6			
4	1	3	6	10	15				
5	1	4	10	20					
6	1	5	15						
7	1	6							
8	1								
9									

MATLAB

1、归纳思维

帕斯卡三角形

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	1	1	1	1	1	1	1		
3	1	2	3	4	5	6			
4	1	3	6	10	15				
5	1	4	10	20					
6	1	5	15						
7	1	6							
8	1								
9									

MATLAB

1、归纳思维

杨辉三角形

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

宋朝数学家杨辉1261年写的《详解九章算法》*就解释了上述系数三角形的构造法，并说贯宪用此术。

MATLAB

1.每个数等于它上方两数之和。

2.每行数字左右对称，由1开始逐渐变大。

3.第n行的数字有n项。

4.前n行共[(1+n)n]/2 个数。

5.第n行的m个数可表示为 *C(n-1，m-1)*，即为从n-1个不同元素中取m-1个元素的组合数。

6.第n行的第m个数和第n-m+1个数相等 ，为组合数性质之一。

7.每个数字等于上一行的左右两个数字之和。可用此性质写出杨辉三角。即第n+1行的第i个数等于第n行的第i-1个数和第i个数之和，这也是组合数的性质之一。即 $C(n+1,i)=C(n,i)+C(n,i-1)$。

8.$(a+b)^n$的展开式中的各项系数依次对应杨辉三角的第(n+1)行中的每一项。

MATLAB

1、归纳思维

科尔莫哥洛夫在《我是如何成为数学家》中说：我在6、7岁时我已经感受到数学归纳发现的乐趣，例如，我注意到下边的等式：

$$1=1^2,\quad 1+3=2^2,\quad 1+3+5=3^2,$$

$$1+3+5+7=4^2,$$

$$1+3+5+7+9=?$$

$$1+3+5+7+9+11=?\quad \ldots\ldots$$

前 n 个奇数的和等于 n^2 .

MATLAB

1、归纳思维

在高等数学中，许多重要结果的得出，都用到归纳思维。例如：求某一函数的 n 阶导数，通常的方法是求出其一阶、二阶（有时还要求出其三阶、四阶）导数，再归纳出 n 阶导数的表达式。

例1: $f(x)=\ln(1+x)$, $f^{(n)}(x)$.

解

$$f'(x)=\frac{1}{1+x} \qquad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x)=(-1)^2\frac{2!}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x)=(-1)^3\frac{3!}{(1+x)^4}, \quad \ldots\ldots$$

从而归纳出 $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

MATLAB

1、归纳思维

例2：设函数 $f(x)$ 有任意阶的导数，并且 $f'(x)=[f(x)]^2$

求 $f^{(n)}(x)$.

解 因为 $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f(x)[f(x)]^2=2[f(x)]^3$

$$f'''(x)=2\times 3[f(x)^2 f'(x)]=3![f(x)]^4,$$

因而归纳得到 $f^{(n)}(x)=n!\left[f(x)\right]^{n+1}$.

MATLAB

二、类比思维

著名日本物理学家、诺贝尔奖获得者汤川秀澍指出：“类比是一种创造性思维的形式。”

著名哲学家康德指出：“每当理智缺乏可靠论证的思路时，类比这个方法往往能指引我们前进。”

类比是根据两个（或多个）对象内部属性、关系的某些方面相似，而推出它们在其它方面也可能相似的推理。

简单地说，类比就是由此去发现彼（或由彼去发现此）。

MATLAB

二、类比思维

类比为人们思维过程提供了更广阔的“自由创造”的天地，使它成为科学研究中非常有创造性的思维形式，从而受到了很多著名科学家的重视与青睐。例如：

著名天文学、数学家开普勒说：“我珍视类比胜于任何别的东西，它是我最可信赖的老师它能揭示自然的奥秘……。”

著名数学家、教育学家波利亚说：“类比是一个伟大的引路人，求解立体几何问题往往有赖于平面几何中的类比问题。”

MATLAB

二、类比思维

在平面解析几何中,两点的距离是:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

在空间解析几何中,两点的距离是:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

在平面解析几何中圆的方程: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

在空间解析几何中球面的方程: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

MATLAB

二、类比思维

牛顿二项式展开公式

$$(u+v)^1 = u+v$$

$$(u+v)^2 = u^2+2uv+v^2$$

$$(u+v)^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$$

……

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{n-k} v^k$$

莱布尼茨公式

因为 $(\mathrm{u\,v})' = \mathrm{u}'\,\mathrm{v} + \mathrm{u}\,\mathrm{v}'$,

$(\mathrm{u\,v})'' = \mathrm{u}''\,\mathrm{v} + 2\mathrm{u}'\,\mathrm{v}' + \mathrm{u}\,\mathrm{v}''$,

$(\mathrm{u\,v})''' = \mathrm{u}'''\,\mathrm{v} + 3\mathrm{u}''\,\mathrm{v}' + 3\mathrm{u}'\,\mathrm{v}'' + \mathrm{u}\,\mathrm{v}'''$,

从而 可以归纳出

$$(\mathrm{u\,v})^{(\mathrm{n})} = \mathrm{u}^{(\mathrm{n})}\mathrm{v} + n\mathrm{u}^{(\mathrm{n-1})}\,\mathrm{v}' + \frac{n(n-1)}{2!}\mathrm{u}^{(\mathrm{n-2})}\,\mathrm{v}'' + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

MATLAB

二、类比思维

将牛顿——莱布尼茨公式、格林公式、高斯公式、斯托克斯公式进行类比。若将牛顿——莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

视为建立了一元函数**$f(x)$**在一个区间的定积分与其原函数**$F(x)$**在区间边界的值之间的联系；

MATLAB

二、类比思维

通过类比，就可将格林公式 $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$

视为建立了二元函数在一个平面区域D上的二重积分与其“原函数”在区域边界L的曲线积分之间的联系。

通过类比，就可将高斯公式

$$\iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oiint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

视为建立了三元函数在一个空间区域Ω上的三重积分与其“原函数”在区域边界曲面S上的曲面积分之间的联系；

MATLAB

二、类比思维

通过类比，就可将**斯托克斯**公式

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

视为建立了三元函数在一个空间曲面S上的曲面积分与其“**原函数**”在区域边界曲线L上的曲线积分之间的联系。

MATLAB

二、类比思维

若引入“外微分运算”，就可将格林公式、高斯公式和斯托克斯公式都看作牛顿-莱布尼茨公式的高维推广. 并都可以用一个简单的形式统一表示为

$$\int_D \mathrm{d}w = \int_{\partial D} w$$

此公式深刻地表明：高一次的“微分形式”在区域 D 上的积分等于低一次的“微分形式”在区域的低一维空间的边界 ∂D 上的积分.

在学习过程中，将新内容与自己已经熟悉的知识。进行类比，不但易于接受、理解、掌握新知识，更重要的是：培养、锻炼了自己的类比思维，有利于开发自己的创造力。

三、发散思维

所谓具有发散特性的思维是指信息处理的途径灵活多变，求结果的丰富多样。它是一种开放性的立体思维，即围绕某一问题，沿着不同方向去思考探索，重组眼前的信息和记忆中的信息，产生新的信息并获得解决问题的多种方案。因此，也把发散思维称为求异思维。它是一种重要的创造性思维。

用“一题多解”，“一题多变”等方式，发散式地思考问题。

MATLAB

三、发散思维

数学中“一题多解”最著名的例子,是几何学中关于“勾股定理”的证法。

勾股定理(被誉为“千古第一定理”):

一个直角三角形的斜边c的平方等于另外两边(a,b)的平方和。即

$$a^2 + b^2 = c^2$$

这个定理人们用不同的方法,给出了370多个证明。

MATLAB

三、发散思维

这个定理的重要性在于：

1. 它是联系“数”与“形”的第一个重要定理；
2. 它导致了不可公约量的发现（第一次数学危机）；
3. 它开始把数学由计算与测量的技术扩大到证明与推理科学；
4. 它是最早得出完整解的不定方程，并引导到各式各样的不定方程，包括费马大定理。

MATLAB

三、发散思维

1.在欧几里得的<几何原本>中,给出了一种欧几里得的证明:

$\Delta ABD \cong \Delta FBC$

因此同理

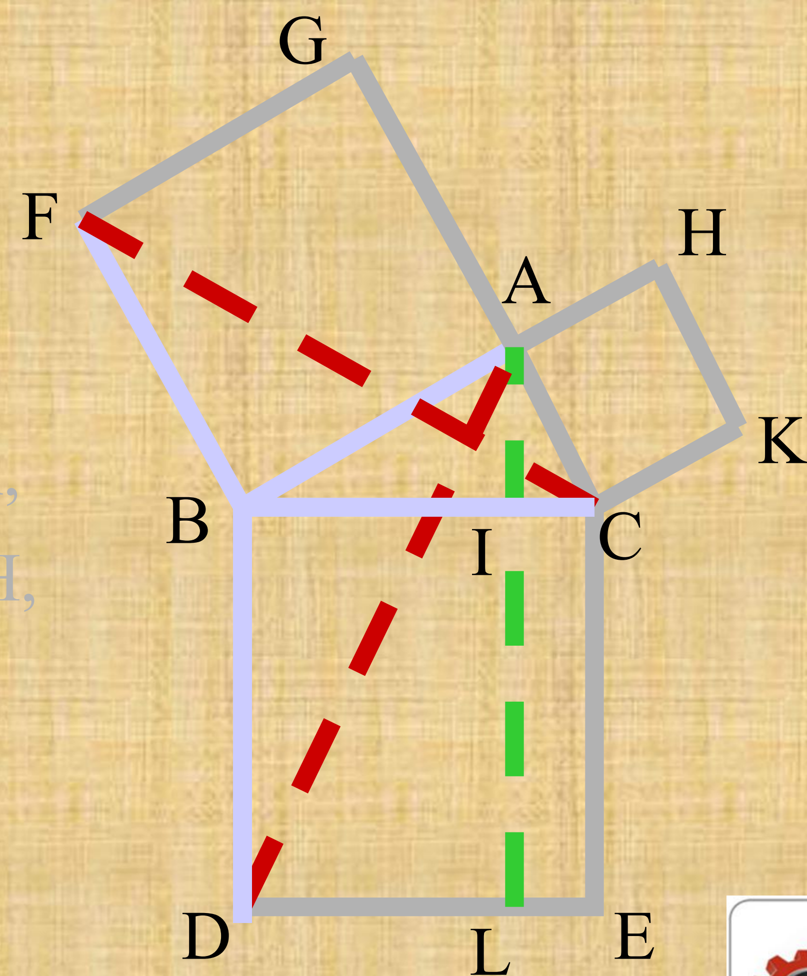
矩形$BDLI = 2\Delta ABD$,

正方形GFBA＝2ΔFBC,

矩形BDLI＝正方形GFBA,

矩形CILE ＝ 正方形ACKH,

两式相加即得定理。



MATLAB

三、发散思维

2.我国赵爽(约222年)在<周髀算经>的注释中给出的证明:

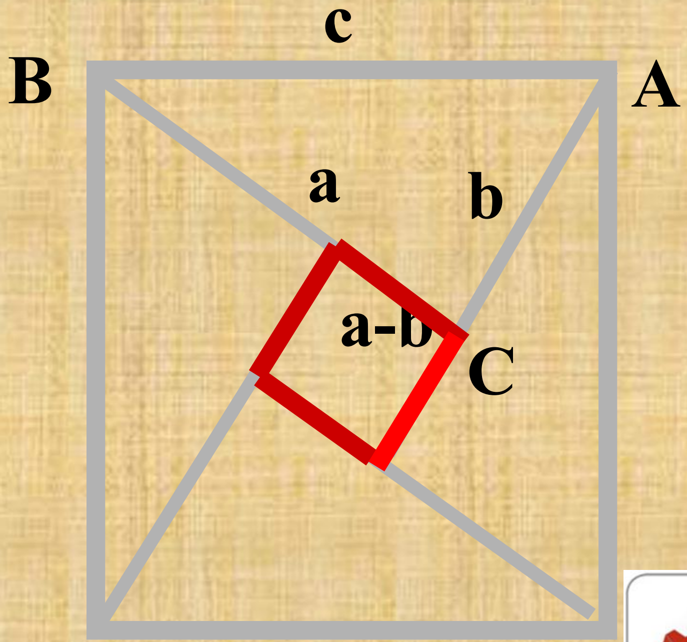
ab等于两直角三角形的面积

$(b-a)^2$为中心正方形的面积,

显然，有

$$2ab+(b-a)^2=c^2,$$

化简，即可得证。



弦图

MATLAB

三、发散思维

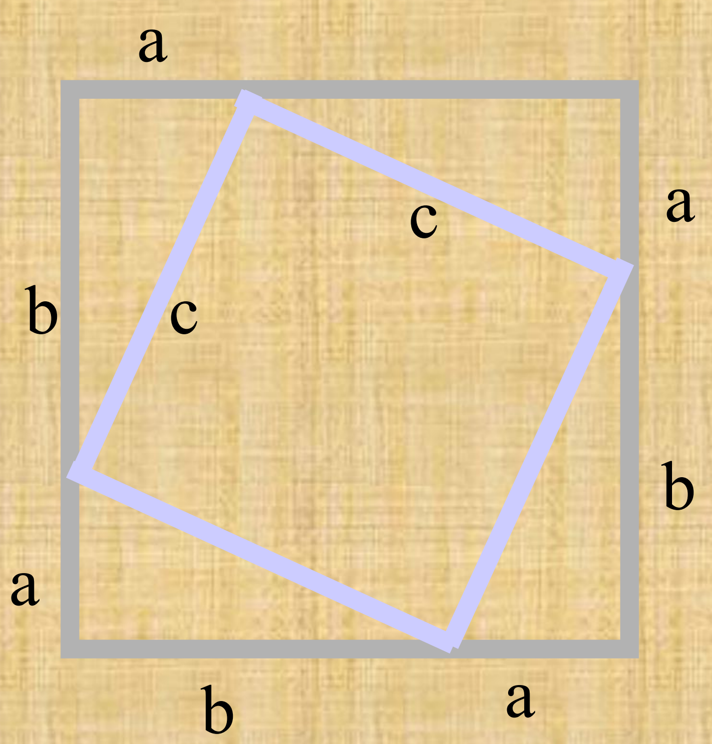
大正方形的面积:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

又等于:

$4ab/2+c^2=2ab+c^2$

从而 得证.



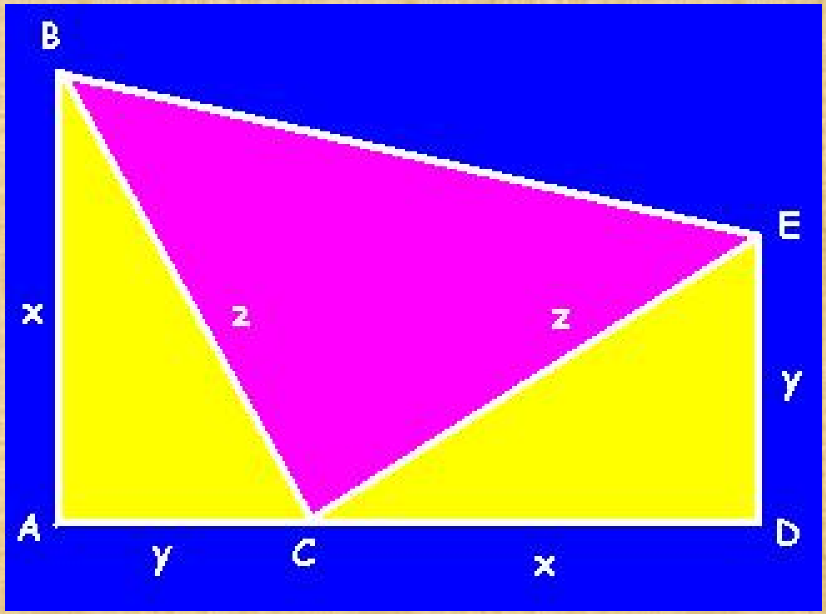
MATLAB

4.最令人感兴趣的证法之一

美国A.菲尔德总统：

$S_{BCE}+S_{ABC}+S_{DCE}$

$$=\frac{1}{2}z^2+2\cdot\frac{xy}{2}$$



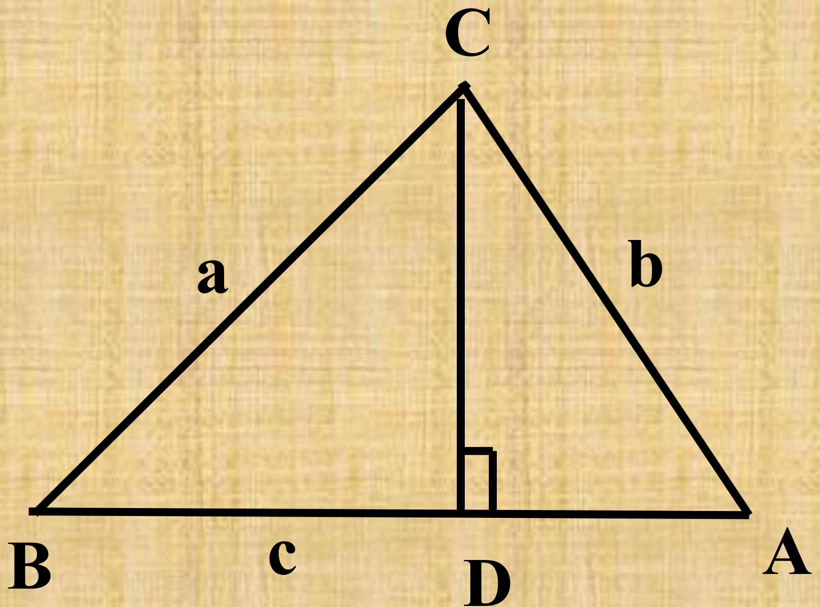
$$S_{ABED}=\frac{1}{2}AD(AB+DE)=\frac{1}{2}(x+y)^2$$

他证明时,只是一位议员,是他和其他议员讨论数学问题时想出来的,发表在《新英格兰教育杂志》上。

MATLAB

三、发散思维

5. 2000年12月1日山东青岛市即墨一中高二六班李亮同学的证明:



$$BD=\frac{BC^2}{AB}=\frac{a^2}{c}$$

$$AD=\frac{AC^2}{AB}=\frac{b^2}{c}$$

$$BD+AD=AB=c$$

思考:

他的证明对否？好不好？

MATLAB

三、发散思维

因此，我们在高等数学教学中，应利用一题多解、一题多变来培养训练发散思维，下边我们举几个例子：

一题多解：求微分方程 $x^2dx = y^2dx + 2xydy$ 通解

变形为：$(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$

由于：$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y$

它是全微分方程，从而用全微分方程的解法求出其通解；

MATLAB

三、发散思维

求微分方程 $x^2dx = y^2dx + 2xydy$ 通解

变形为： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})}$

得知它是齐次微分方程，从而用齐次微分方程的解法求出其通解；

或变形为：$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{x}{2}\dfrac{1}{y}$

发现它是伯努利方程，从而令$z = y^2$，化为线性微分方程，然后用线性微分方程的解法求出其通解。

MATLAB

三、发散思维

案例1：如何将$\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$分解为两个有理分式之和？

解： $$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

$$\frac{1}{x-2}=A+\frac{B(x-1)}{x-2}$$

MATLAB

三、发散思维

案例2：$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

解：$$\frac{1}{(x-2)(x-3)}=A+\frac{B(x-1)}{x-2}+\frac{C(x-1)}{x-3}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A(x-2)}{x-1}+B+\frac{C(x-2)}{x-3}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-3)}{x-1}+\frac{B(x-3)}{x-2}+C$$

MATLAB

三、发散思维

案例3： $$\frac{3}{(2x-1)(1-x)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{1-x}$$

解： $$\frac{3}{1-x}=A+\frac{B(2x-1)}{1-x}$$

$$\frac{3}{2x-1}=\frac{A(1-x)}{2x-1}+B$$

案例4： $$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

解： $$\frac{1}{(x-2)^2}=A+\frac{B(x-1)}{x-2}+\frac{C(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)}=\frac{A(x-2)^2}{x-1}+B(x-2)+C$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{1}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$$

MATLAB

三、发散思维

案例5：$$\frac{1}{(x-1)(x^2+2x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$$

解：$$\frac{1}{x^2+2x+3}=A+\frac{(Bx+C)(x-1)}{x^2+2x+3}$$

令 $x=0$ 就可以简便地求出 $C=-\frac{1}{2}$

再令 $x=-1$ 就可以简便地求出 $B=-\frac{1}{6}$

MATLAB

四、逆向思维

逆向思维（又称反向思维）是相对于习惯性思维的另一种思维形式。它的基本特点是从已有的思路的反方向去思考问题。它对解放思想、开阔思路、解决某些难题、开创新的方向，往往能起到积极的作用。

（1）如果遇到某些问题顺推不行，可以考虑逆推。

（2）如果遇到某些问题直接解决困难，想法间接解决。

（3）正命题研究过后，研究逆命题。

（4）探讨可能性发生困难时，转而探讨不可能性。

下面举几个高等数学中的例子：

MATLAB

四、逆向思维

求解微分方程：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y(2x+y^2)}$

若将 x 视为自变量，y 视为未知函数，解此方程就比较困难。因为它既不是可分离变量方程，也不是齐次方程，也不是全微分方程，也不是线性方程和伯努里方程。

但是，如果利用逆向思维，即反过来将 x 视为未知函数，y 视为自变量，将方程变为

$$\frac{dx}{dy}=y(2x+y^2)$$

它就是未知函数x 的线性微分方程。很容易求出其通解。

MATLAB

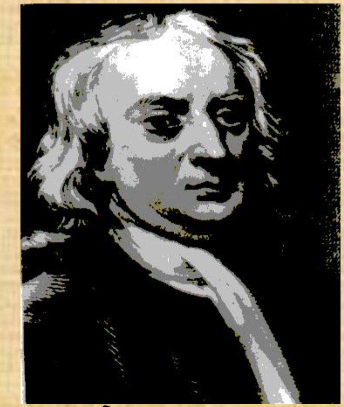
五、数学与猜想

牛顿：

没有大胆的猜想，就做不出伟大的发现。

G.波利亚:

要想成为一个好的数学家，……你必须是一个好的猜想家。



牛顿

波利亚

MATLAB

五、数学与猜想

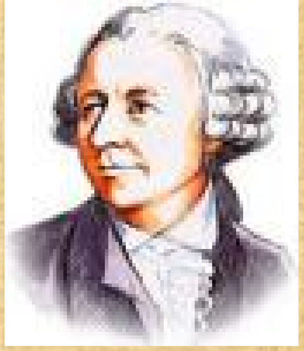
数学猜想是指依据某些已知事实和数学知识对未知量及关系所作出的一种似真的推断，它是数学研究的一种常用的科学方法，又是数学发展的一种重要思维形式，它是科学假说在数学中的具体表现。

数学猜想作为一种数学潜形态,它常常是数学理论（定理）的萌芽和胚胎，它往往是数学发展到积累了大量资料，需要进行理论整理，探索其理论内部的矛盾规律这一阶段上产生出来的，数学的创造过程与其它知识的创造过程一样。你先得把观察到结果加以归纳、类比，通过猜想……。

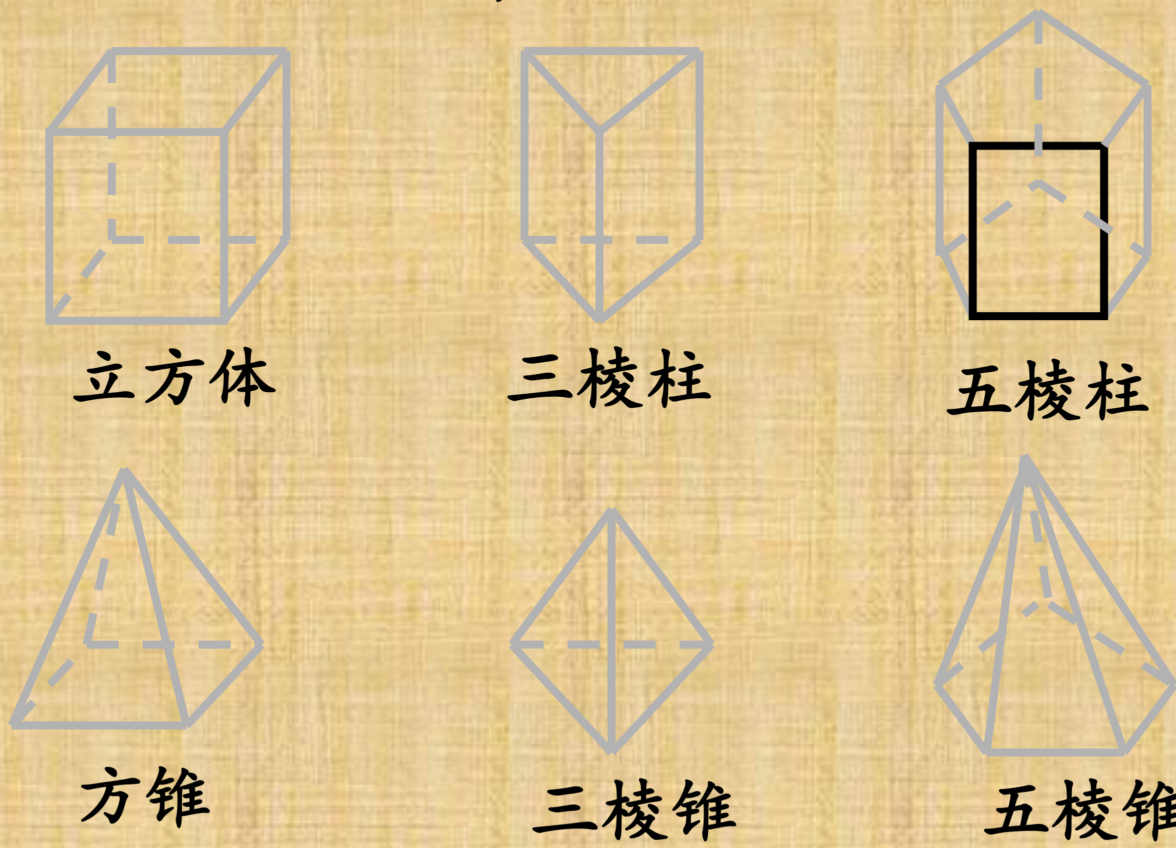
MATLAB

五、数学与猜想

著名数学教育家波利亚（Polya）说：“在前辈数学家中，……欧拉对我的影响最大.主要原因在于，欧拉做了一些跟他才能相当的伟大数学家从没做过的事，即他解释了他是如何发现他的结果的.对此，我是如获至宝.”

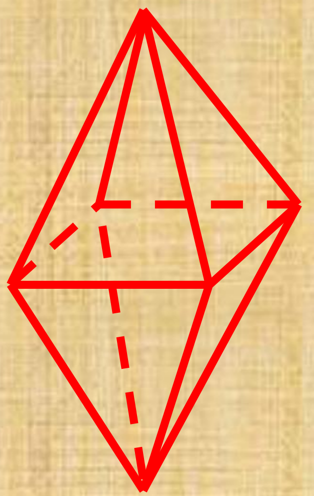


欧拉关于多面体的猜想

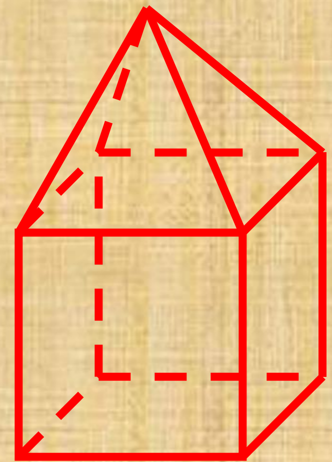


MATLAB

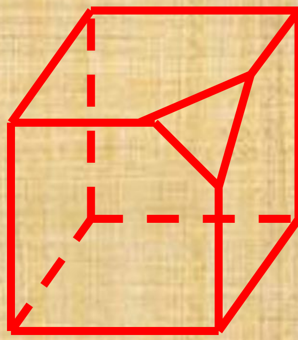
五、数学与猜想



八面体



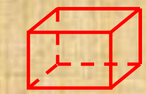
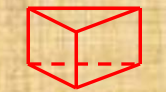
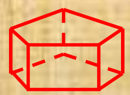
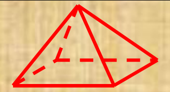
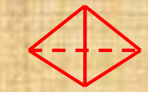
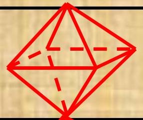
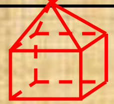
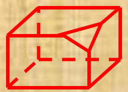
“塔顶”体



截角立方体

MATLAB

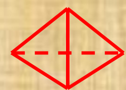
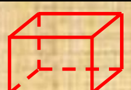
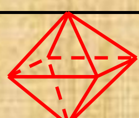
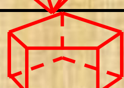
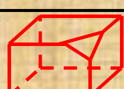
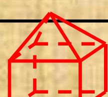
五、数学与猜想

多面体		面(F)	顶点(V)	棱(E)
	立方体	6	8	12
	三棱柱	5	6	9
	五棱柱	7	10	15
	方锥	5	5	8
	三棱锥	4	4	6
	五棱锥	6	6	10
	八面体	8	6	12
	"塔顶"体	9	9	16
	截角立方体	7	10	15

MATLAB

猜想:是否面(F)的数目越多,顶点的数(V)越多?

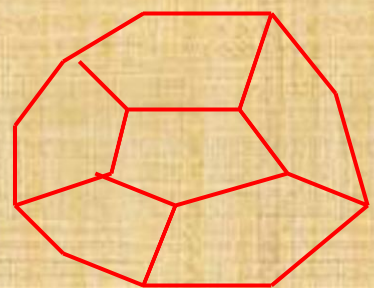
五、数学与猜想

多面体		面(F)	顶点(V)	棱(E)
	三棱锥	4	4	6
	方锥	5	5	8
	三棱柱	5	6	9
	五棱锥	6	6	10
	立方体	6	8	12
	八面体	8	6	12
	五棱柱	7	10	15
	截角立方体	7	10	15
	“塔顶” 体	9	9	16

猜想:是否边(E)越多,面数(F)越多?顶点(V)越多呢?

五、数学与猜想

由归纳得出：　$F + V = E + 2$

多面体	面(F)	顶点(V)	棱(E)
 正12面体	12	20	30
正20面体	20	12	30

多面体	面(F)	顶点(V)	棱(E)
n个侧面的棱柱	n+2	2n	3n
n个侧面的棱锥	n+1	n+1	2n

MATLAB