



# 数学思维与人工智能

## 第六章：不确定性推理方法

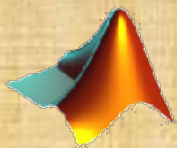
中国矿业大学数学学院

祁永强

15862179376

qiyongqiang3@163.com

MATLAB





## 6.1 不确定性推理中的基本问题



### 1. 不确定性的表示与量度

在专家系统中知识的不确定性一般是由领域专家给出的，通常是一个数值——知识的静态强度

#### (1) 知识不确定性的表示

#### (2) 证据不确定性的表示——证据的动态强度

#### (3) 不确定性的量度

- 用户在求解问题时提供的初始证据。
- 在推理中用前面推出的结论作为当前推理的证据。

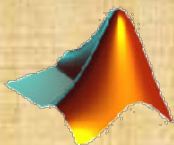
① 能充分表达相应知识及证据不确定性的程度。

② 度量范围的指定便于领域专家及用户对不确定性的估计。

③ 便于对不确定性的传递进行计算，而且对结论算出的不确定性量度不能超出量度规定的范围。

④ 度量的确定应当是直观的，同时应有相应的理论依据。

MATLAB





## 6.1 不确定性推理中的基本问题



### 2. 不确定性匹配算法及阈值的选择

- 不确定性匹配算法：用来计算匹配双方相似程度的算法。
- 阈值：用来指出相似的“限度”。

### 3. 组合证据不确定性的算法：

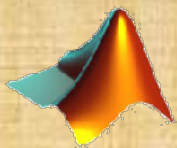
- 最大最小方法、Hamacher方法、概率方法、有界方法、Einstein方法等。

### 4. 不确定性的传递算法

- (1)在每一步推理中，如何把证据及知识的不确定性传递给结论。
- (2)在多步推理中，如何把初始证据的不确定性传递给最终结论。

### 5. 结论不确定性的合成

MATLAB





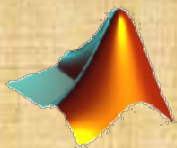


## 6.2 可信度方法



- 1975年肖特里菲(E. H. Shortliffe)等人在确定性理论(theory of confirmation)的基础上, 结合概率论等提出的一种不确定性推理方法。
- 优点: 直观、简单, 且效果好。
- 可信度: 根据经验对一个事物或现象为真的相信程度。
- 可信度带有较大的主观性和经验性, 其准确性难以把握。
- C—F模型: 基于可信度表示的不确定性推理的基本方法。

MATLAB





## 6.2 可信度方法



### 1. 知识不确定性的表示

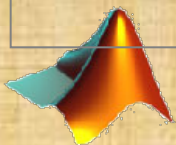
■ 产生式规则表示: IF  $E$  THEN  $H$  ( $CF(H,E)$ )

$CF(H,E)$ : 可信度因子(certainty factor), 反映前提条件与结论的联系强度。

**IF 头痛 AND 流涕 THEN 感冒 (0.7)**

- $CF(H,E)$ 的取值范围:  $[-1,1]$ 。
- 若由于相应证据的出现增加结论  $H$  为真的可信度, 则  $CF(H,E) > 0$ , 证据的出现越是支持  $H$  为真, 就使  $CF(H,E)$  的值越大。
- 反之,  $CF(H,E) < 0$ , 证据的出现越是支持  $H$  为假,  $CF(H,E)$  的值就越小。

■ MATLAB 若证据的出现与否与  $H$  无关, 则  $CF(H,E) = 0$ 。





## 6.2 可信度方法

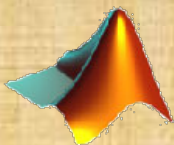


### 2. 证据不确定性的表示

$CF(E)=0.6$ :  $E$ 的可信度为0.6

- 证据 $E$ 的可信度取值范围： $[-1, 1]$ 。
- 对于初始证据，若所有观察 $S$ 能肯定它为真，则  $CF(E)=1$ 。
- 若肯定它为假，则  $CF(E)=-1$ 。
- 若以某种程度为真，则  $0 < CF(E) < 1$ 。
- 若以某种程度为假，则  $-1 < CF(E) < 0$ 。
- 若未获得任何相关的观察，则  $CF(E)=0$ 。

MATLAB







## 6.2 可信度方法



### 2. 证据不确定性的表示

- **静态强度**  $CF(H, E)$ : 知识的强度, 即当  $E$  所对应的证据为真时对  $H$  的影响程度。
- **动态强度**  $CF(E)$ : 证据  $E$  当前的不确定性程度。

### 3. 组合证据不确定性的算法

- 组合证据: 多个单一证据的合取

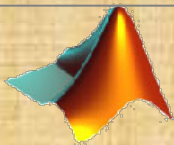
$$E = E_1 \text{ AND } E_2 \text{ AND } \dots \text{ AND } E_n$$

则  $CF(E) = \min\{CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)\}$

- 组合证据: 多个单一证据的析取

$$E = E_1 \text{ OR } E_2 \text{ OR } \dots \text{ OR } E_n$$

MATLAB 则  $CF(E) = \max\{CF(E_1), CF(E_2), \dots, CF(E_n)\}$





## 6.2 可信度方法



### 4. 不确定性的传递算法

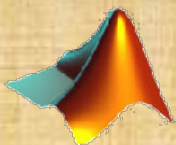
- C—F模型中的不确定性推理：从不确定的初始证据出发，通过运用相关的不确定性知识，最终得出结论并求出结论的可信度值。结论  $H$  的可信度由下式计算：

$$CF(H) = CF(H, E) \times \max\{0, CF(E)\}$$

当  $CF(E) < 0$  时，则  $CF(H) = 0$

当  $CF(E) = 1$  时，则  $CF(H) = CF(H, E)$

MATLAB







## 6.2 可信度方法



### 5. 结论不确定性的合成算法

■ 设知识：

**IF**  $E_1$  **THEN**  $H$   $(CF(H, E_1))$

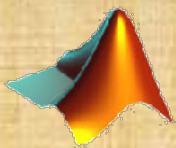
**IF**  $E_2$  **THEN**  $H$   $(CF(H, E_2))$

(1) 分别对每一条知识求出  $CF(H)$ :

$$CF_1(H) = CF(H, E_1) \times \max\{0, CF(E_1)\}$$

$$CF_2(H) = CF(H, E_2) \times \max\{0, CF(E_2)\}$$

MATLAB





## 6.2 可信度方法

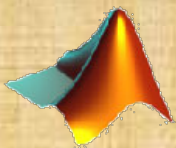


### 5. 结论不确定性的合成算法

(2) 求出 $E_1$ 与 $E_2$ 对 $H$ 的综合影响所形成的可信度  $CF_{1,2}(H)$  :

$$CF_{1,2}(H) = \begin{cases} CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H)CF_2(H) & \text{若 } CF_1(H) \geq 0, \quad CF_2(H) \geq 0 \\ CF_1(H) + CF_2(H) + CF_1(H)CF_2(H) & \text{若 } CF_1(H) < 0, \quad CF_2(H) < 0 \\ \frac{CF_1(H) + CF_2(H)}{1 - \min\{|CF_1(H)|, |CF_2(H)|\}} & \text{若 } CF_1(H) \text{ 与 } CF_2(H) \text{ 异号} \end{cases}$$

MATLAB





## 6.2 可信度方法



- 例1、设有如下一组知识：

$$r_1: \quad IF \quad E_1 \quad THEN \quad H \quad (0.8)$$

$$r_2: \quad IF \quad E_2 \quad THEN \quad H \quad (0.6)$$

$$r_3: \quad IF \quad E_3 \quad THEN \quad H \quad (-0.5)$$

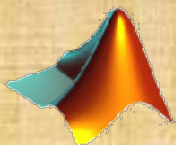
$$r_4: \quad IF \quad E_4 \quad AND \quad (E_5 \quad OR \quad E_6) \quad THEN \quad E_1 \quad (0.7)$$

$$r_5: \quad IF \quad E_7 \quad AND \quad E_8 \quad THEN \quad E_3 \quad (0.9)$$

已知：  $CF(E_2) = 0.8$ ,  $CF(E_4) = 0.5$ ,  $CF(E_5) = 0.6$ ,  $CF(E_6) = 0.7$ ,  
 $CF(E_7) = 0.6$ ,  $CF(E_8) = 0.9$ .

求：  $CF(H)$

MATLAB







## 6.2 可信度方法

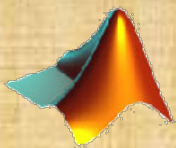


解：第一步：对每一条规则求出 $CF(H)$ 。

$r_4$ ：

$$\begin{aligned} CF(E_1) &= 0.7 \times \max\{0, CF[E_4 \text{ AND } (E_5 \text{ OR } E_6)]\} \\ &= 0.7 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), CF(E_5 \text{ OR } E_6)\}\} \\ &= 0.7 \times \max\{0, \min\{CF(E_4), \max\{CF(E_5), CF(E_6)\}\}\} \\ &= 0.7 \times \max\{0, \min\{0.5, \max\{0.6, 0.7\}\}\} \\ &= 0.7 \times \max\{0, 0.5\} \\ &= 0.35 \end{aligned}$$

MATLAB





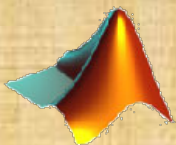
## 6.2 可信度方法



$$\begin{aligned}r_5 : \quad CF(E_3) &= 0.9 \times \max\{0, CF(E_7 \text{ AND } E_8)\} \\&= 0.9 \times \max\{0, \min\{CF(E_7), CF(E_8)\}\} \\&= 0.9 \times \max\{0, \min\{0.6, 0.9\}\} \\&= 0.9 \times \max\{0, 0.6\} \\&= 0.54\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_1 : \quad CF_1(H) &= 0.8 \times \max\{0, CF(E_1)\} \\&= 0.8 \times \max\{0, 0.35\} \\&= 0.28\end{aligned}$$

MATLAB





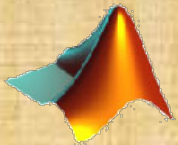
## 6.2 可信度方法



$$\begin{aligned}r_2 : \quad CF_2(H) &= 0.6 \times \max\{0, CF(E_2)\} \\ &= 0.6 \times \max\{0, 0.8\} \\ &= 0.48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_3 : \quad CF_3(H) &= -0.5 \times \max\{0, CF(E_3)\} \\ &= -0.5 \times \max\{0, 0.54\} \\ &= -0.27\end{aligned}$$

MATLAB







## 6.2 可信度方法



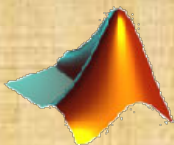
第二步：根据结论不确定性的合成算法得到：

$$\begin{aligned} CF_{1,2}(H) &= CF_1(H) + CF_2(H) - CF_1(H) \times CF_2(H) \\ &= 0.28 + 0.48 - 0.28 \times 0.48 = 0.63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CF_{1,2,3}(H) &= \frac{CF_{1,2}(H) + CF_3(H)}{1 - \min\{|CF_{1,2}(H)|, |CF_3(H)|\}} \\ &= \frac{0.63 - 0.27}{1 - \min\{0.63, 0.27\}} = \frac{0.36}{0.73} = 0.49 \end{aligned}$$

综合可信度： $CF(H) = 0.49$

MATLAB



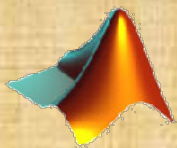


## 6.3 证据理论



- 证据理论(theory of evidence): 又称D—S理论, 是德普斯特(A. P. Dempster)首先提出, 沙佛(G. Shafer)进一步发展起来的一种处理不确定性的理论。
- 1981年巴纳特(J. A. Barnett)把该理论引入专家系统中, 同年卡威(J. Garvey)等人用它实现了不确定性推理。
- 目前, 在证据理论的基础上已经发展了多种不确定性推理模型。

MATLAB



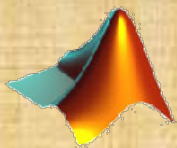


## 6.3.1 概率分配函数



- 设  $D$  是变量  $x$  所有可能取值的集合，且  $D$  中的元素是**互斥的**，在任一时刻  $x$  都取且只能取  $D$  中的某一个元素为值，则称  $D$  为  $x$  的**样本空间**。
- 在证据理论中， $D$  的任何一个子集  $A$  都对应于一个关于  $x$  的命题，称该命题为“ $x$  的值是在  $A$  中”。
- 设  $x$ ：所看到的颜色， $D=\{\text{红}, \text{黄}, \text{蓝}\}$ ，  
则  $A=\{\text{红}\}$ ：“ $x$  是红色”；  
 $A=\{\text{红}, \text{蓝}\}$ ：“ $x$  或者是红色，或者是蓝色”。

MATLAB







## 6.3.1 概率分配函数



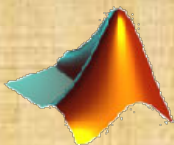
■ 设 $D$ 为样本空间，领域内的命题都用 $D$ 的子集表示，则**概率分配函数**(basic probability assignment function)定义如下：

**定义1：** 设函数  $M: 2^D \rightarrow [0,1]$ , (对任何一个属于 $D$ 的子集 $A$ ，命它对应一个数 $M \in [0, 1]$ ) 且满足

$$M(\Phi) = 0 \quad \sum_{A \subseteq D} M(A) = 1$$

则  $M: 2^D$  上的基本概率分配函数， $M(A)$ :  $A$  的基本概率数。

MATLAB





## 6.3.1 概率分配函数



几点说明:

(1) 设样本空间 $D$ 中有 $n$ 个元素, 则 $D$ 中子集的个数为  $2^n$  个。

$2^D$ :  $D$ 的所有子集。

(2) **概率分配函数**: 把 $D$ 的任意一个子集 $A$ 都映射为 $[0, 1]$ 上的一个数 $M(A)$ 。

$A \subseteq D$ ,  $A \neq D$  时,  $M(A)$ : 对相应命题 $A$ 的精确信任度。

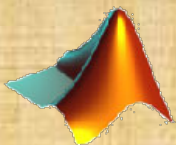
■ 设  $D = \{\text{红}, \text{黄}, \text{蓝}\}$

则其子集个数  $2^3 = 8$ , 具体为:

$A = \{\text{红}\}$ ,  $A = \{\text{黄}\}$ ,  $A = \{\text{蓝}\}$ ,  $A = \{\text{红}, \text{黄}\}$ ,

$A = \{\text{红}, \text{蓝}\}$ ,  $A = \{\text{黄}, \text{蓝}\}$ ,  $A = \{\text{红}, \text{黄}, \text{蓝}\}$ ,  $A = \{\Phi\}$

MATLAB





## 6.3.1 概率分配函数



### (3) 概率分配函数与概率不同。

■ 例如，设  $A=\{\text{红}\}$ ,

$M(A)=0.3$ : 命题“ $x$ 是红色”的信任度是0.3。

■ 设  $D=\{\text{红}, \text{黄}, \text{蓝}\}$

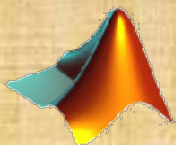
$M(\{\text{红}\})=0.3$ ,  $M(\{\text{黄}\})=0$ ,  $M(\{\text{蓝}\})=0.1$ ,

$M(\{\text{红}, \text{黄}\})=0.2$ ,  $M(\{\text{红}, \text{蓝}\})=0.2$ ,

$M(\{\text{黄}, \text{蓝}\})=0.1$ ,  $M(\{\text{红}, \text{黄}, \text{蓝}\})=0.1$ ,  $M(\Phi)=0$

但:  $M(\{\text{红}\}) + M(\{\text{黄}\}) + M(\{\text{蓝}\}) = 0.4$

MATLAB







## 6.3.2 信任函数



**定义2:** 命题的信任函数(belief function)  $Bel: 2^D \rightarrow [0,1]$

$$\text{且 } Bel(A) = \sum_{B \sqsubseteq A} M(B)$$

$Bel(A)$ : 对命题A为真的总的信任程度。

■ 设  $D = \{\text{红}, \text{黄}, \text{蓝}\}$

$$M(\{\text{红}\}) = 0.3, \quad M(\{\text{黄}\}) = 0, \quad M(\{\text{红}, \text{黄}\}) = 0.2,$$

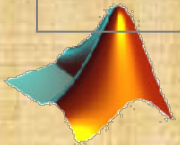
$$Bel(\{\text{红}, \text{黄}\}) = M(\{\text{红}\}) + M(\{\text{黄}\}) + M(\{\text{红}, \text{黄}\})$$

$$= 0.3 + 0.2 = 0.5$$

■ 由信任函数及概率分配函数的定义推出:

$$Bel(\Phi) = M(\Phi) = 0 \quad Bel(D) = \sum_{B \subseteq D} M(B) = 1$$

MATLAB





### 6.3.3 似然函数



**似然函数(plausibility function):** 不可驳斥函数或上限函数。

**定义3:** 似然函数  $Pl: 2^D \rightarrow [0,1]$  且  $Pl(A) = 1 - Bel(\neg A)$

对所有的  $A \subseteq D$

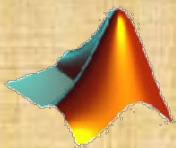
■ 设  $D = \{\text{红}, \text{黄}, \text{蓝}\}$

$M(\{\text{红}\}) = 0.3$ ,  $M(\{\text{黄}\}) = 0$ ,  $M(\{\text{红}, \text{黄}\}) = 0.2$ ,

$$\begin{aligned} Bel(\{\text{红}, \text{黄}\}) &= M(\{\text{红}\}) + M(\{\text{黄}\}) + M(\{\text{红}, \text{黄}\}) \\ &= 0.3 + 0.2 = 0.5 \end{aligned}$$

$$Pl(\{\text{蓝}\}) = 1 - Bel(\neg\{\text{蓝}\}) = 1 - Bel(\{\text{红}, \text{黄}\}) = 1 - 0.5 = 0.5$$

MATLAB





## 6.3.4 概率分配函数的正交和



**定义4:** 设  $M_1$  和  $M_2$  是两个概率分配函数；则其正交和：

$$M = M_1 \square M_2 \quad M(\Phi) = 0$$

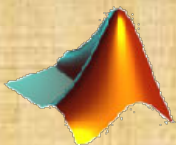
其中：
$$M(A) = K^{-1} \sum_{x|y=A} M_1(x)M_2(y)$$

$$K = 1 - \sum_{x|y=\Phi} M_1(x)M_2(y) = \sum_{x|y \neq \Phi} M_1(x)M_2(y)$$

如果  $K \neq 0$ ，则正交和  $M$  也是一个概率分配函数；

如果  $K = 0$ ，则不存在正交和  $M$ ，即没有可能存在概率函数，称  $M_1$  与  $M_2$  矛盾。

MATLAB







## 6.3.4 概率分配函数的正交和



- 例2、设  $D=\{\text{黑}, \text{白}\}$ ，且设

$$M_1(\{\text{黑}\}, \{\text{白}\}, \{\text{黑}, \text{白}\}, \Phi) = (0.3, 0.5, 0.2, 0)$$

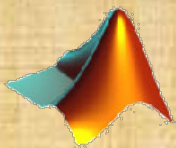
$$M_2(\{\text{黑}\}, \{\text{白}\}, \{\text{黑}, \text{白}\}, \Phi) = (0.6, 0.3, 0.1, 0)$$

则：

$$\begin{aligned} K &= 1 - \sum_{x|y=\Phi} M_1(x)M_2(y) \\ &= 1 - [M_1(\{\text{黑}\})M_2(\{\text{白}\}) + M_1(\{\text{白}\})M_2(\{\text{黑}\})] \\ &= 1 - [0.3 \times 0.3 + 0.5 \times 0.6] = 0.61 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\{\text{黑}\}) &= K^{-1} \sum_{x|y=\{\text{黑}\}} M_1(x)M_2(y) \\ &= \frac{1}{0.61} [M_1(\{\text{黑}\})M_2(\{\text{黑}\}) + M_1(\{\text{黑}\})M_2(\{\text{黑}, \text{白}\}) + \\ &\quad M_1(\{\text{黑}, \text{白}\})M_2(\{\text{黑}\})] \\ &= \frac{1}{0.61} [0.3 \times 0.6 + 0.3 \times 0.1 + 0.2 \times 0.6] = 0.54 \end{aligned}$$

MATLAB





## 6.3.4 概率分配函数的正交和



• 同理可得:  $M(\{\text{白}\}) = 0.43$      $M(\{\text{黑}, \text{白}\}) = 0.03$

• 组合后得到的概率分配函数:

$$M(\{\text{黑}\}, \{\text{白}\}, \{\text{黑}, \text{白}\}, \Phi) = (0.54, 0.43, 0.03, 0)$$

□ 基于证据理论的不确定性推理的步骤:

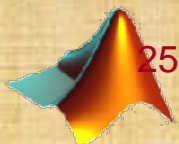
(1) 建立问题的样本空间D。

(2) 由经验给出, 或者由随机性规则和事实的信度度量算基本概率分配函数。

(3) 计算所关心的子集的信任函数值、似然函数值。

(4) 由信任函数值、似然函数值得出结论。

MATLAB





## 6.3.5 基于证据理论的不确定性推理



例3、 设有规则：

(1)如果 流鼻涕 则 感冒但非过敏性鼻炎(0.9)

或 过敏性鼻炎但非感冒(0.1)。

(2)如果 眼发炎 则 感冒但非过敏性鼻炎(0.8)

或 过敏性鼻炎但非感冒(0.05)。

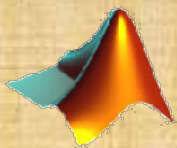
有事实：

(1)小王流鼻涕(0.9)。

(2)小王发眼炎(0.4)。

问：小王患的什么病？

MATLAB







## 6.3.5 基于证据理论的不确定性推理



取样本空间： $D = \{h_1, h_2, h_3\}$

$h_1$ 表示“感冒但非过敏性鼻炎”，

$h_2$ 表示“过敏性鼻炎但非感冒”，

$h_3$ 表示“同时得了两种病”。

取下面的基本概率分配函数：

$$M_1(\{h_1\}) = 0.9 \times 0.9 = 0.81$$

$$M_1(\{h_2\}) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$$

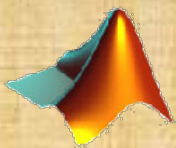
$$M_1(\{h_1, h_2, h_3\}) = 1 - M_1(\{h_1\}) - M_1(\{h_2\}) = 1 - 0.81 - 0.09 = 0.1$$

$$M_2(\{h_1\}) = 0.4 \times 0.8 = 0.32$$

$$M_2(\{h_2\}) = 0.4 \times 0.05 = 0.02$$

$$M_2(\{h_1, h_2, h_3\}) = 1 - M_2(\{h_1\}) - M_2(\{h_2\}) = 1 - 0.32 - 0.02 = 0.66$$

MATLAB





## 6.3.5 基于证据理论的不确定性推理



将两个概率分配函数组合：

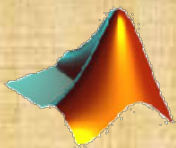
$$\begin{aligned} K &= 1 / \{1 - [M_1(\{h_1\})M_2(\{h_2\}) + M_1(\{h_2\})M_2(\{h_1\})]\} \\ &= 1 / \{1 - [0.81 \times 0.02 + 0.09 \times 0.32]\} \\ &= 1 / \{1 - 0.045\} = 1 / 0.955 = 1.05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\{h_1\}) &= K[M_1(\{h_1\})M_2(\{h_1\}) + M_1(\{h_1\})M_2(\{h_1, h_2, h_3\}) \\ &\quad + M_1(\{h_1, h_2, h_3\})M_2(\{h_1\})] = 1.05 \times 0.8258 = 0.87 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\{h_2\}) &= K[M_1(\{h_2\})M_2(\{h_2\}) + M_1(\{h_2\})M_2(\{h_1, h_2, h_3\}) \\ &\quad + M_1(\{h_1, h_2, h_3\})M_2(\{h_2\})] = 1.05 \times 0.0632 = 0.066 \end{aligned}$$

$$M(\{h_1, h_2, h_3\}) = 1 - M(\{h_1\}) - M(\{h_2\}) = 1 - 0.87 - 0.066 = 0.064$$

MATLAB





## 6.3.5 基于证据理论的不确定性推理



信任函数:

$$Bel(\{h_1\}) = M(\{h_1\}) = 0.87 \quad Bel(\{h_2\}) = M(\{h_2\}) = 0.066$$

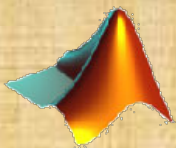
似然函数:

$$\begin{aligned} Pl(\{h_1\}) &= 1 - Bel(\neg\{h_1\}) = 1 - Bel(\{h_2, h_3\}) \\ &= 1 - [M(\{h_2\}) + M(\{h_3\})] = 1 - [0.066 + 0] = 0.934 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pl(\{h_2\}) &= 1 - Bel(\neg\{h_2\}) = 1 - Bel(\{h_1, h_3\}) \\ &= 1 - [M(\{h_1\}) + M(\{h_3\})] = 1 - [0.87 + 0] = 0.13 \end{aligned}$$

结论: 小王可能是感冒了。

MATLAB







## 6.4 模糊推理



### 1. 模糊知识表示

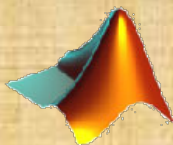
- 人类思维判断的基本形式：

如果 (条件)  $\rightarrow$  则 (结论)

- 例如：如果 压力较高且温度在慢慢上升则阀门略开

■ **模糊规则**：从条件论域到结论论域的模糊关系矩阵  $R$ 。  
通过条件模糊向量与模糊关系  $R$  的合成进行模糊推理，得到结论的模糊向量，然后采用“清晰化”方法将模糊结论转换为精确量。

MATLAB





## 6.4 模糊推理



### 2. 对 IF $A$ THEN $B$ 类型的模糊规则的推理

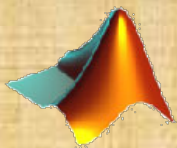
- 若已知输入为  $A$ ，则输出为  $B$ ；若现在已知输入为  $A'$ ，则输出  $B'$  用合成规则求取  $B' = A' \circ R$

其中模糊关系  $R$ :  $\mu_R(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

- 控制规则库的  $N$  条规则有  $N$  个模糊关系:  $R_1, R_2, \dots, R_n$   
对于整个系统的全部控制规则所对应的模糊关系  $R$ :

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n = \bigcup_{i=1}^n R_i$$

MATLAB





## 6.4 模糊推理



### 2. 对 IF $A$ THEN $B$ 类型的模糊规则的推理

- 例4、已知输入的模糊集合 $A$ 和输出的模糊集合 $B$ :

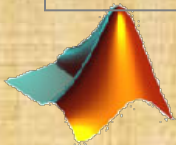
$$A = 1.0 / a_1 + 0.8 / a_2 + 0.5 / a_3 + 0.2 / a_4 + 0.0 / a_5$$

$$B = 0.7 / b_1 + 1.0 / b_2 + 0.6 / b_3 + 0.0 / b_4$$

- 前面已经求得模糊关系为:

$$R = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

MATLAB







## 6.4 模糊推理



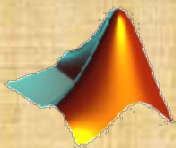
### 2. 对 IF $A$ THEN $B$ 类型的模糊规则的推理

■ 当输入:  $A' = 0.4 / a_1 + 0.7 / a_2 + 1.0 / a_3 + 0.6 / a_4 + 0.0 / a_5$

$$B' = A' \circ R = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.7 \\ 1.0 \\ 0.6 \\ 0.0 \end{bmatrix}^T \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 1.0 & 0.6 & 0.0 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} = (0.7, 0.7, 0.6, 0.0)$$

则:  $B' = 0.7 / b_1 + 0.7 / b_2 + 0.6 / b_3 + 0.0 / b_4$

MATLAB





## 6.6 模糊决策



- “模糊决策” (“模糊判决”、“解模糊”或“清晰化”)：  
由模糊推理得到的结论或者操作是一个模糊向量，转化为确定值的过程。

### 1. 最大隶属度法

- 例5、得到模糊向量：

$$U' = 0.1/2 + 0.4/3 + 0.7/4 + 1.0/5 + 0.7/6 + 0.3/7$$

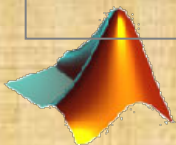
取结论：  $U=5$ 。

- 例6、得到模糊向量：

$$U' = 0.5/-3 + 0.5/-2 + 0.5/-1 + 0.0/0 + 0.0/1 + 0.0/2 + 0.0/3$$

取结论：  $U = \frac{-3-2-1}{3} = -2$

MATLAB





## 6.6 模糊决策



### 2. 加权平均判决法

$$U = \frac{\sum_{i=1}^n \mu(u_i) u_i}{\sum_{i=1}^n \mu(u_i)}$$

例7、  $U' = 0.1/2 + 0.6/3 + 0.5/4 + 0.4/5 + 0.2/6$

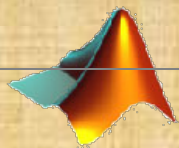
则  $U' = \frac{0.1 \times 2 + 0.6 \times 3 + 0.5 \times 4 + 0.4 \times 5 + 0.2 \times 6}{0.1 + 0.6 + 0.5 + 0.4 + 0.2} = 4$

### 3. 中位数法

■ 例8、  $U' = 0.1/-4 + 0.5/-3 + 0.1/-2 + 0.0/-1 + 0.1/0 + 0.2/1 + 0.4/2$   
 $+ 0.5/3 + 0.1/4$

$u^* = u_6$  时,  $\sum_{u_1}^{u_6} \mu(u_i) = \sum_{u_7}^{u_9} \mu(u_i) = 1$

MATLAB 所以中位数  $u^* = u_6$ , 则  $U = 1$







## 6.7 模糊推理的应用



例9、 设有模糊控制规则：

“如果温度低，则将风门开大”。设温度和风门开度的论域为{1, 2, 3, 4, 5}。

“温度低”和“风门大”的模糊量：

$$\text{“温度低”} = 1/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.0/4 + 0/5$$

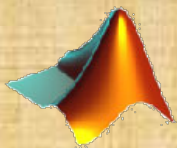
$$\text{“风门大”} = 0/1 + 0.0/2 + 0.3/3 + 0.6/4 + 1/5$$

已知事实“温度较低”，可以表示为

$$\text{“温度较低”} = 0.8/1 + 1/2 + 0.6/3 + 0.3/4 + 0/5$$

试用模糊推理确定风门开度。

MATLAB





### 3. 中位数法

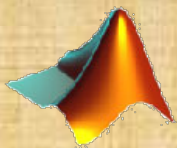
■ 例如

$$U' = 0.1/-4 + 0.5/-3 + 0.3/-2 + 0.1/-1 + 0.1/0 + 0.4/1 + 0.5/2 + 0.1/3 + 0.2/4$$

用线性插值处理，即  $\Delta u = 1.2 / (1.1 + 1.2) = 0.522$

所以  $u^* = u_5 + \Delta u = 0.522$

MATLAB





## 6.7 模糊推理的应用

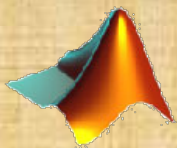


解：(1)确定模糊关系  $R$

$$R = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \circ [0.0 \quad 0.0 \quad 0.3 \quad 0.6 \quad 1.0]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

MATLAB







## 6.7 模糊推理的应用



### (2) 模糊推理

$$B' = A' \circ R = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.0 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.0 \end{bmatrix}^T \circ \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$
$$=(0.0, 0.0, 0.3, 0.6, 0.8)$$

### (3) 模糊决策

用最大隶属度法进行决策得风门开度为5。用加权平均判决法和中位数法进行决策得风门开度为4。

MATLAB

