Задание 1

Пусть полное множество $U = \{1;2;3;4;5\}$ и множество $M = \{1;4\}, N = \{2;5\}$, тогда $N \cup \overline{M}$ равен

A. $\{2;3;5\}$

B. $\{1;3;4\}$

C. $\{1;2;4;5\}$

D. $\{2;3;4;5\}$

Задание 2

$\dfrac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)}$ равно

A. -1

B. 1

C. $1-i$

D. $1+i$

Задание 3

Известно, что векторы $\vec{a} = (3;1), \vec{b} = (2;2)$ и тогда косинус угла между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ равен

A. $\dfrac{1}{17}$

B. $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Задание 4

На факультете искусств одной школы учатся 4 человека, по 2 в каждом из двух классов. Вероятность того, что 2 из этих 4 учеников будут случайным образом выбраны из разных классов для организации школьной художественной выставки, равна

A. $\dfrac{1}{6}$

B. $\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{1}{2}$

D. $\dfrac{2}{3}$

Задание 5

Обозначим за S_n сумму первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_2 + a_6 = 10$ и $a_4 a_8 = 45$, то S_5 равно

A. 25

B. 22

C. 20

D. 15

Задание 6

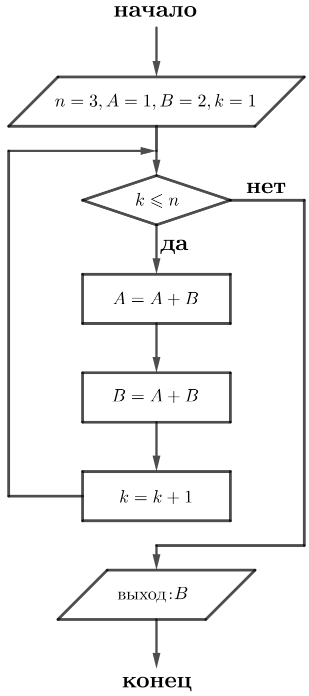
При выполнении блок-схемы, указанной справа, значение $B=$ на выходе равно:

A. 21

B. 34

C. 55

D. 89



Задание 7

Пусть F_1, F_2 – два фокуса эллипса $C: \dfrac{x^2}{5}+y^2=1$, а точка P лежит на C. Если $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$, то $|PF_1|\cdot|PF_2|=$

A. 1

B. 2

C. 4

D. 5

Задание 8

Уравнение касательной к кривой $y=\dfrac{e^x}{x+1}$ в точке $\left(1;\dfrac{e}{2}\right)$ имеет вид

A. $y=\dfrac{e}{4}x$

B. $y=\dfrac{e}{2}x$

C. $y=\dfrac{e}{4}x+\dfrac{e}{4}$

D. $y=\dfrac{e}{2}x+\dfrac{3e}{4}$

Задание 9

Известно, что гипербола $C: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0, b>0)$ имеет эксцентриситет $\sqrt{5}$, а асимптота C пересекает окружность $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ в точках A, B. Тогда $|AB|=$

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

D. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

Задание 10

В треугольной пирамиде $PABC$, $\triangle ABC$ – равносторонний треугольник со сторонами по 2, $PA = PB = 2$, $PC = \sqrt{6}$, объем пирамиды равен

A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 3

Задание 11

Известна функция $f(x) = e^{-(x-1)^2}$. При $a = f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $b = f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $c = f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$, тогда

A. $b > c > a$

B. $b > a > c$

C. $c > b > a$

D. $c > a > b$

Задание 12

График функции $y = f(x)$ получен из графика $y = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ смещением на $\dfrac{\pi}{6}$ влево, тогда количество точек пересечения графика $y = f(x)$ с прямой $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$ равно

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Задание 13

Пусть S – сумма первых n членов геометрической прогрессии b_n. Пусть $8S_6 = 7S_3$. Найдите знаменатель прогрессии b_n __________

Задание 14

Если $f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ – чётная функция, то $a =$ __________.

Задание 15

Если x, y удовлетворяют ограничениям

$$\begin{cases} 3x - 2y \leqslant 3, \\ -2x + 3y \leqslant 3, \\ x + y \geqslant 1, \end{cases}$$

Тогда максимальное значение $z = 3x + 2y$ равно __________.

Задание 16

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB = 4$, O – середина AC_1. Дан шар с центром в точке O. Найдите в каком диапазоне находится радиус шара, если поверхность сферы и ребра куба имеют хотя бы одну общую точку. __________.

Задание 17

В $\triangle ABC$ стороны a, b и c лежат напротив углов A, B и C соответственно. Известно, что $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$.

а) Найдите bc.

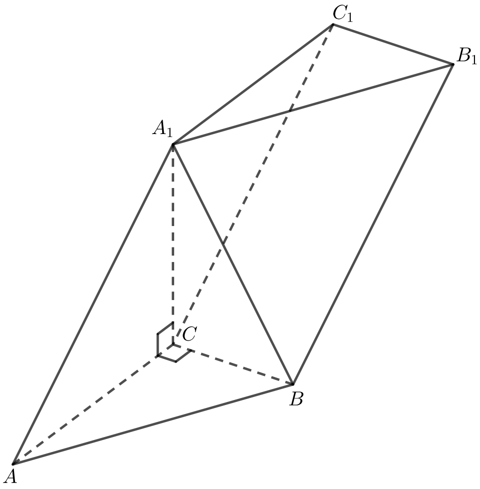
б) Дополнительно известно, что $\dfrac{a\cos B - b\cos A}{a\cos B + b\cos A} - \dfrac{b}{c} = 1$. Найдите площадь $\triangle ABC$.

Задание 18

Отрезок соединяющий вершины A_1 и C треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, A_1C перпендикулярен плоскости ABC. Основанием призмы является $\triangle ABC$ с прямым углом C.

а) Докажите, что плоскость ACC_1A_1 перпендикулярна плоскости BB_1C_1C.

б) Пусть $AB = A_1B$ и $AA_1 = 2$. Найдите высоту четырёхугольной пирамиды $A_1BB_1C_1C$.



Задание 19

Был проведен эксперимент по изучению воздействия озона со следующим протоколом: отобрали 40 мышей, 20 из которых были случайным образом распределены в тестовую группу и 20 – в контрольную. Мышей в тестовой группе содержали в сильно озонированной среде, а мышей в контрольной группе – в нормальной среде, и через некоторое время подсчитали увеличение массы тела каждой мыши в граммах. Результаты были следующими.

Прирост веса мышей контрольной группы в порядке убывания составил

15.2	18.8	20.2	21.3	22.5	23.2	25.8	26.5	27.5	30.1
32.6	34.3	34.8	35.6	35.6	35.8	36.2	37.3	40.5	43.2

Прирост веса мышей в тестовой группе, в порядке убывания, был следующим

7.8	9.2	11.4	12.4	13.2	15.5	16.5	18.0	18.8	19.2
19.8	20.2	21.6	22.8	23.6	23.9	25.1	28.2	32.3	36.5

а) Рассчитайте среднее арифметическое значение для тестовой группы.

б)

1. Найдите медиану m увеличения массы тела 40 мышей, а затем подсчитайте количество данных меньше m и не меньше m в двух выборках соответственно, чтобы заполнить таблицу, как показано ниже

	$< m$	$\geqslant m$
контрольная группа		
тестовая группа		

2. На основании списка, приведенного в пункте 1, можно ли с уверенностью в 95% сделать вывод о том, что существует разница в приросте массы тела между мышами, находящимися в среде с высокой концентрацией озона и в нормальной среде?
Приложение:

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geqslant k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

Задание 20

Дана функция

$$f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^2 x},\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

а) Пусть $a = 1$, докажите, что функция $f(x)$ монотонна;

б) При каких значениях параметра a неравенство $f(x) + \sin x < 0$ выполнено при всех $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Задание 21

Прямая $x - 2y + 1 = 0$ и парабола $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ пересекаются в двух точках A и B, причем $|AB| = 4\sqrt{15}$.

а) Найдите p.

б) Пусть F – фокус параболы , M и N – две точки на параболе, такие что $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0$. Найдите минимальное значение площади $\triangle MFN$.

Задание 22

Прямая $l : \begin{cases} x = 2 + t\cos\alpha, \\ y = 1 + t\sin\alpha. \end{cases}$ пересекает положительную полуось x и положительную полуось y в точках A и B, соответственно. Так же известно, что $|PA| \cdot |PB| = 4$, где $P(2{,}1)$.

а) Найдите α.

б) Как будет выглядеть уравнение прямой l в полярной системе координат, центр которой находится в точке $(0; 0)$ и полярная ось совпадает с положительным направлением оси x?

Задание 23

Пусть $a > 0$ и функция $f(x) = 2|x - a| - a$.

а) Найдите множество решений неравенства $f(x) < x$.

б) Найдите a, если область, ограниченная кривой $y = f(x)$ и осью x, имеет площадь 2.