Primer examen parcial

Problema 1.

Obtener la transformada Z inversa de la siguiente función:

$$G(z) = \frac{2z + 2}{(z + 0.6)^2 (z - 1)}$$

Utilizando el método de la integral de inversión

Polos simples:

$$k = \lim_{z \to z_i} \left[(z - z_i) X(z) z^{k-1} \right]$$

Polos múltiples:

$$k = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \to z_j} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left[(z - z_j)^q x(z) z^{k-1} \right]$$

$$x(kT) = k_1 + k_2 + \ldots$$

__Solución__

Para el polo múltiple:

$$k_1 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to -0.6} \frac{d}{dz} \left[(z + 0.6)^2 \frac{(2z + 2)}{(z + 0.6)^2 (z - 1)} z^{k-1} \right]$$

$$k_1 = \lim_{z \to -0.6} \frac{d}{dz} \left[\frac{(2z + 2)}{(z - 1)} z^{k-1} \right]$$

$$k_1 = \lim_{z \to -0.6} \left[\frac{2z^k + 2z^{k-1} - \{(z-1)[(2z+2)(k-1)z^{k-2} - 2z^{k-1}]\}}{(z-1)^2} \right]$$

$$k_1 = \lim_{z \to -0.6} \left[\frac{2z^k + 2z^{k-1} - (z-1)(2z+2)(k-1)z^{k-2} + 2z^{k-1}(z-1)}{(z-1)^2} \right]$$

Simplificando y evaluando el límite

$$k_1 = \frac{-2.4(-0.6)^{k-1} + 1.28(k-1)(-0.6)^{k-2}}{2.56}$$

Para el polo simple:

$$k_2 = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{(2z+2)z^{k-1}}{(z+0.6)(z-1)}\right]$$

$$k_2 = \lim_{z\to 1}\left[\frac{(2z+2)z^{k-1}}{(z+0.6)}\right]$$

$$k_2 = 1.56^{k-1}$$

Entonces la antitransformada z de G(z) será:

$$x(kT) = k_1 + k_2 = \frac{-2.4(-0.6)^{k-1} + 1.28(k-1)(-0.6)^{k-2}}{2.56} + 1.56^{k-1}$$

Para $k = 0, 1, 2, \ldots$