UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

Estudio del álgebra del grupo de Poincaré y la definición de Helicidad y quiralidad de una partícula libre

PROYECTO DE TESIS I

Estudiante:
César Octavio Lévano Apari

Asesor:
Prof. Dr. Daniel Eduardo Soto Barrientos

Julio 2025

Resumen

En este trabajo se demostrará que la helicidad es una característica de una partícula, la cual depende del sistema de referencia, a menos que la partícula se mueva a la velocidad de la luz. Asimismo, se mostrará que la quiralidad define un sentido de orientación de una partícula cuando esta no tiene masa, y que en este caso es equivalente a la helicidad.

Con este fin se estudian los generadores del grupo de Lorentz y Poincaré, denotados por $J^{\mu\nu}$ y P^{σ}, siendo J^{jk} los generadores de rotaciones, J^{0k} los de los boosts y P^{σ} de las traslaciones temporales y espaciales, respectivamente. A partir de estos se definen nuevos generadores, J^k, S^k y L^k, los cuales satisfacen el mismo álgebra de las componentes del momentum angular de la mecánica cuántica no relativista, identificando así a los operadores de momento angular orbital, espín y momento angular total, respectivamente. Además, se construyen los operadores P^2 y W^2, los cuales conmutan con todos los generadores mencionados y se relacionan con la masa y el espín de la partícula.

A partir de W^0 se define el operador helicidad, y se calculan sus autovalores en la representación de Dirac. Posteriormente, mediante la aplicación de la transformación de inversión espacial a la ecuación de Dirac, se demuestra que las autofunciones del operador quiralidad γ^5 se intercambian bajo esta transformación. Este resultado permite descomponer cualquier solución de la ecuación de Dirac en dos partes con "orientación" diferente que evolucionan como dos ecuaciones diferenciales acopladas, a menos que se considere una partícula sin masa.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La relatividad especial fue propuesta en 1905 por Einstein [1], esta modificó los conceptos que se tenían de espacio y tiempo, así como las transformaciones entre dos sistemas inerciales. En vista de este problema, se propuso una ecuación relativista, siendo la primera la ecuación Klein-Gordon [2][3], la cual es usada como base para hallar otras ecuaciones relativistas usando el método de Umezawa [4]. En particular, con este método se deduce la ecuación Dirac, la cual fue deducida por Dirac en 1928 y describe la dinámica de partículas con espín 1/2 [5]. Estas ecuaciones relativistas al formar parte al estar restringidas con la condición de mantener su forma en distintos marcos inerciales, están ligadas a las representación del grupo de Poincaré. Por esto, en el estudio de las ecuaciones relativistas surgen problemas que no se consideraban en la mecánica cuántica no relativistas, esto principalmente debido a que el grupo de Lorentz, el cual es un subgrupo del grupo de Poincaré, tiene cuatro componentes conexas [6]. Debido a esto el estudio de la helicidad y la quiralidad es imporante, pues ambas están relacionadas con la transformación de paridad.

La helicidad tiene una de sus aplicaciones en el estudio de la interacción débil. Esto se debe a que la transformación de inversión espacial intercambia el signo del autovalor de la helicidad de una partícula, por lo que puede ser usada para determinar la "orientación" dominante [7]. De este modo se relaciona a la ruptura de paridad, cuya predicción teórica fue hecha por Lee y Yang [8] en 1956 y confirmada experimentalmente por Wu, Ambler, Hayward et al. [9] en 1957. Otras de sus aplicaciones es en el estudio del grafeno, donde los electrones alrededor de la intercepción entre las bandas de valencia y conducción pueden ser descritos por la ecuación de Dirac para una partícula sin masa restringida al plano. En este caso, el Hamiltoniano de Dirac es proporcional a la helicidad, pudiendo ser considerados ambos como equivalentes para la descripción del estado de los electrones [10].

La quiralidad tiene un rol importante en el estudio del grafeno, donde su descripción a partir del modelo "tight-binding" hace que tenga simetría quiral. Similar a lo que ocurre en electrodinámica cuántica, donde la masa rompe la simetría quiral, en el grafeno la interacción coulombiana genera un término de masa efectiva que produce la ruptura de dicha simetría [11].

Este trabajo tiene como objetivos encontrar un conjunto completo de observables compatibles, a partir del cual se pueda caracterizar el estado de una partícula libre. Como consecuencia de este objetivo, es necesario el estudio de la helicidad y sus autovalores, de modo que se pueda expresarse la solución general de la ecuación de Dirac en función de ellos. Otro de los objetivos es encontrar la relación entre la quiralidad y la transformación de inversión espacial, y determinar bajo que condición sus autovalores permiten caracterizar el estado de una partícula. Se espera que este desarrollo sirva como base para el desarrollo de temas más complejos en los cuales la helicidad y quiralidad tienen un rol importante, como los mencionados anteriormente.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 2 se realiza un repaso de los elementos de la mecánica cuántica no relativista con el fin de introducir el concepto del conjunto completo de observables compatibles. Luego se realiza la deducción de la métrica de Minkowski a partir del segundo postulado de la relatividad especial, para así estudiar sus propiedades. De este modo se sigue con la obtención de dos ecuaciones relativistas, siendo estas la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Dirac. En el capítulo 3 se estudiaron los generadores de los grupos de Lorentz y Poincaré, y se obtuvieron el álgebra de sus generadores. A partir estos generadores se obtienen los operadores momento angular, boost y espín. Además se comprueba que los operadores W^2 y P^2 son invariantes relativistas, que son utilizados para definir un conjunto completo de observables compatibles con el fin de caracterizar el estado de una partícula. En el capítulo 4 se introduce el operador helicidad y se calculan las relaciones que siguen los biespinores $u^{(h)}(p)$ y $v^{(h)}(p)$. Además, se define el operador quiralidad y se estudia su relación con la transformación de inversión espacial y la helicidad.

Capítulo 2

Ecuación de onda relativista

En este capítulo se realiza un resumen de los conceptos más importantes de la mecánica cuántica no relativista y la teoría de la relatividad especial, los cuales fueron usados para la deducción de una teoría cuántica relativista. En particular, en el caso de la mecánica cuántica no relativista se discute sobre la interpretación probabilística del módulo al cuadrado de la función de onda, así como la ecuación de Schrödinger determina su evolución. Además, se dedujo la estructura del grupo de Lorentz a partir del principio de relatividad de Einstein y se definieron el momentum y energía de una partícula relativista. Por otro lado, al estudiar algunas propiedades del grupo de Lorentz vemos que este se puede separar en 4 componentes e identificamos a las transformaciones de Lorentz asociadas a la inversión temporal, inversión espacial y la inversión espacio-temporal para un espacio-tiempo 3+1 dimensional.

Luego, para obtener una teoría cuántica se desarrolló un proceso para obtener la ecuación de Klein-Gordon. Finalmente, siguiendo el método de Umezawa [4] se obtiene una ecuación de Dirac y las propiedades de anticonmutación de las matrices γ.

2.1. Elementos de la mecánica cuántica no relativista

2.1.1. Descripción cuántica de un sistema físico

La física está basada en experimentos y el registro de los resultados de estos, de modo que en este sentido podemos afirmar que dos sistema se encuentran en el mismo estado si todos los posibles resultados para ambos son iguales. Así se puede definir matemáticamente el estado de un sistema como una entidad matemática que se relaciona con los posibles resultados. Algo que hay que notar de esta definición es dependiente de los resultados posibles de una medición. Esto motiva la definición de un observable, el cual sería aquel que relaciona al estado del sistema con un conjunto de resultados posibles.

Clásicamente, el estado de un sistema, en el caso más simple, está determinado por el valor del momentum y su posición en un instante dado. Para definir un estado en la mecánica cuántica es necesario determinar las propiedades matemáticas de este. Para esto se propone el siguiente experimento, en el cual se asume que la luz tiene naturaleza corpuscular y ondulatoria, según lo propuesto por Einstein para explicar el efecto fotoeléctrico [12]. Un haz de luz pasa a través del divisor de haz (BS1) y se divide tomando los caminos mostrados en la Figura 2.1. Se observa que el haz que pasa por el camino superior impacta con el espejo M1 para luego pasar por el desfasador (PS) y finalmente interferir en el divisor de haz (BS2) con la otra componente que fue reflejado por el espejo M2. Se considera que las longitudes de los caminos ópticos superior e inferior son los mismas, de modo que solo el desfasador influye en el tipo de interferencia que ocurre en BS2, correspondiendo $\phi = \pi$ a la interferencia destructiva y $\phi = 2\pi$ a la constructiva.

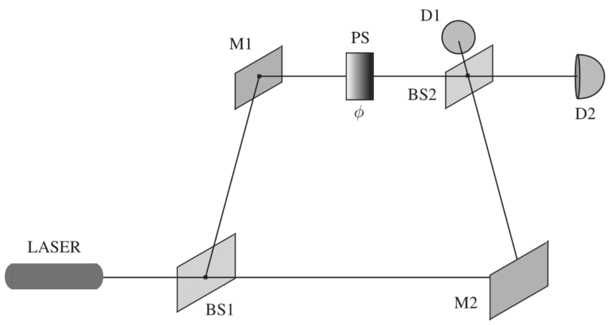

Figura 2.1: Montaje esquemático del interferómetro de Mach-Zender. Fuente: Gennaro Auletta [13]

Si solo un fotón a la vez pasa por BS1, se observa luego de realizar el experimento N veces el detector D1 habrá hecho click $N(1 - \cos\phi)/2$ veces y el detector D2, $N(1 + \cos\phi)/2$. Si se remueve el divisor de haz (BS1), es seguro que el fotón pasará por el camino inferior, este estado del fotón será denotado por $|\psi_l\rangle$. De igual modo si se reemplaza el divisor de haz (BS1) por un espejo el fotón pasaría por el camino superior, denotado por $|\psi_u\rangle$. De modo que el resultado obtenido con el divisor de haz (BS1) indica que el fotón puede estar en un estado superpuesto entre ambos, es decir $c_u |\psi_u\rangle + c_l |\psi_l\rangle$. Este resultado sugiere el *principio de superposición*, el cual implica que la intuición clásica de que una partícula tiene una trayectoria bien determinada no es válida cuando consideramos que tiene también un comportamiento ondulatorio.

Sin embargo, podríamos considerar que la "superposición" de estados puede ser debido a la falta de conocimiento del camino por el que pasó el fotón. Para probar que esta suposición no es válida se usa el hecho de que cuando $\phi = 0$ el detector D1 no hará click, por lo que si se coloca un objeto entre el divisor de haz (BS1) y el espejo (M2) entonces los resultados de los detectores solo corresponderían a que el fotón tomó el camino superior, eliminando así la interferencia y permitiendo que el fotón sea detectado por D1. Entonces si el detector D1 hace click cuando $\phi = 0$ se tiene la certeza de que hay un objeto en el camino inferior. Como la interferencia se debe a la superposición de estados, obtenemos que no podemos interpretar a la superposición como la falta de conocimiento del camino tomado, pues no sería posible obtener información del objeto. Ahora habiendo descartado esa posibilidad, hay que notar también que el colocar un objeto en uno de los caminos modifica el estado del fotón, ya que destruye la superposición. Por lo que afirmamos que la medición modifica el estado del fotón, haciéndolo colapsar a uno de los estados $|\psi_l\rangle$ y $|\psi_u\rangle$. Este fenómeno es el *colapso de la función de onda*, y de este se tiene que del estado obtenido luego de la medición no se puede obtener información del estado inicial de la partícula.

Para seguir obteniendo las propiedades matemáticas de un estado cuántico se propone el siguiente experimento:

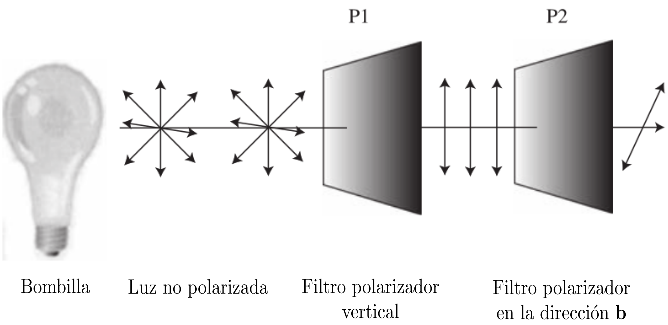

Figura 2.2: La luz emitida por un foco, polarizada por los filtros P1 y P2. Fuente: Gennaro Auletta [13]

El foco mostrado en la Figura 2.2 emite una luz no polarizada, la cual pasa primera por el polarizador vertical P1, de modo que el estado de los fotones que pasan por esta se encuentran en el estado $|\psi_v\rangle$. Luego los fotones luego pasan por el polarizador P2 que polariza la luz en la dirección que forma un ángulo θ con la vertical. Es conocido que la intensidad de la luz polarizada será dada por la ley de Malus

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta \tag{2.1}$$

donde I_1 es la intensidad de la luz que pasa por P1 y I_2 es la intensidad de la luz que pasa por P2. Debido al principio de superposición y que la dirección de la polarización está en un plano, el espacio vectorial al que pertenece el estado del fotón es de dimensión 2. Así el estado del fotón luego de pasar por P1 estará en el estado superpuesto

$$|\psi_v\rangle = \cos\theta\, |\psi_b\rangle + \sin\theta\, |\psi_{b_\perp}\rangle \tag{2.2}$$

donde $|\psi_b\rangle$ es el estado del fotón polarizado en la dirección de la polarización dada por P2 y $|\psi_{b_\perp}\rangle$ el estado polarizado en la dirección perpendicular.

Como la intensidad de la luz que sale de P2 se relaciona con la cantidad de fotones pasan en el estado $|\psi_b\rangle$ notaremos que el cuadrado del coeficiente de $|\psi_b\rangle$ está relacionado a la probabilidad de que el fotón se encuentre en el estado $|\psi_b\rangle$, y en consecuencia el cuadrado del coeficiente del coeficiente de $|\psi_{b_\perp}\rangle$ con la probabilidad de que el fotón esté en ese estado. Hay que notar que los polarizadores fijan la luz en una determinada polarización, por lo que el acto de hacer pasar el haz de luz a través de un polarizador es una medición. De este experimento se nota que la medición está relacionada a un operador proyección que actúa en el espacio vectorial de estados, y que el módulo al cuadrado del estado se relaciona con la probabilidad de el estado se encuentre en uno de los estados $|\psi_b\rangle$ y $|\psi_{b_\perp}\rangle$.

Matemáticamente se obtuvo que $|\langle\psi_b|\psi\rangle|^2$ es la probabilidad de obtener 1 al aplicar el operador $\hat{P} = |\psi_b\rangle\langle\psi_b| - |\psi_{b_\perp}\rangle\langle\psi_{b_\perp}|$ en $|\psi\rangle$, y $|\langle\psi_{b_\perp}|\psi\rangle|^2$ es la probabilidad de obtener de obtener -1 al aplicarlo en $|\psi\rangle$. Así como el resultado ± 1 estado asociado a la polarización en una determinada dirección, se puede decir que $\hat{P}$ es un observable relacionado a la dirección de la polarización. De este modo se obtiene que la estructura matemática del espacio de estados es un espacio de Hilbert [14] y los observables son determinados por operadores formados por la suma de operadores proyección con el factor dado por el posible valor medido $\hat{O} = \sum_i o_i \hat{P}_i$, donde $o_i \in \mathbb{R}$ es uno de los posibles resultados al medir, y es real ya que en un experimento no se puede medir un número complejo. Además el estado luego de la medición es la proyección del estado $|\psi\rangle$ correspondiente al resultado obtenido de la medición, es decir que si se obtuvo o_i entonces el estado luego de la medición es $\hat{P}_i |\psi\rangle$.

Hay que notar que esta deducción es válida para dos posibles resultados, es decir un espacio vectorial de dimensión 2. Sin embargo, pueden haber incluso infinitas posibilidades, siendo este caso conocido como el caso continuo. En este el estado es dado por $\psi(q_1, \ldots, q_N, t)$, donde N representa el número de grados de libertad de la partícula, y es un elemento de un espacio de Hilbert con norma igual a 1. Este norma es obtenida del producto interno

$$(\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\vec{q}, t)^* \phi(\vec{q}, t) \mathrm{d}^N q. \tag{2.3}$$

Esto nos permite decir que el espacio de Hilbert mencionado es el espacio de funciones cuadrado integrables $L^2(\mathbb{R}^N)$.[1]

La definición de observable es dada por un operador autoadjunto que actúa sobre el espacio de Hilbert. Se impone que sea un operador autoadjunto ya que por el teorema espectral sus autovalores serán reales, siendo estos interpretados como los posibles resultados de la medición. Por ejemplo, si se considera el observable $\hat{A}$, para que a sea un posible resultado de la medición debe satisfacer la ecuación de autovalores:

$$\hat{A}\psi_a(\vec{q}, t) = a\psi_a(\vec{q}, t) \tag{2.4}$$

y $\psi_a(\vec{q}, t)$ será el estado luego de la medición si se obtiene a. Además si el estado antes de la medición es dado por $\psi(\vec{q}, t)$, entonces

$$p(a) = |(\psi_a, \psi)|^2 \tag{2.5}$$

es la probabilidad de obtener a al medir el observable $\hat{A}$.

Evidentemente esta definición se obtiene de manera directa de lo propuesto previamente para un espacio de Hilbert finito-dimensional. Sin embargo, esto no es tan sencillo cuando se trata de un espacio de Hilbert de dimensión infinita [2].Debido a la complejidad de este caso, a partir de ahora se asume que los resultados obtenidos para un espacio de Hilbert finito-dimensional son válidos para el caso infinito-dimensional.

Habiendo definido un observable en la mecánica cuántica se vuelve al problema de la determinación del estado de una partícula a partir de los resultados obtenidos al medir un observable. En general, la medición de un solo observable no basta para determinar el estado de una partícula, por esto es necesario encontrar la mayor cantidad de observables que permitan distinguir si dos partículas son las mismas. Para esto notamos que una propiedad de los operadores autoadjuntos es que si dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan entonces existe una base ortonormal formada por sus

[1] La justificación del uso de la notación de Dirac para la mecánica cuántica está dada por el teorema de Riesz y el teorema de Stone - von Neumann, esto siguiendo lo desarrollado en Hall [15].

[2] Uno de los primeros problemas que surgen es la definición de un operador autoadjunto, en especial cuando el operador es no acotado. Esto modifica directamente al teorema espectral y sus consecuencias, como es visto en Hall [15]

autovectores que los diagonaliza. De este modo si los operadores son no degenerados, la base ortonormal de autovectores será dada por $\{\psi_{a,b}(\vec{q},t)\}_{a,b}$, por lo que si luego de la medición del observable $\hat{A}$ se obtuvo como resultado a, el estado inmediatamente después de la medición será $\psi_{a,b}(\vec{q},t)$, garantizando que al medir el observable $\hat{B}$ el resultado obtenido sea b. De este modo si dos observables conmutan es posible hallar parte de la información del estado de la partícula, por esto son llamados *observables compatibles*.

Sin embargo, aunque por el teorema espectral es posible identificar a cada autovector con su autovalor correspondiente, esto no es posible para el caso de un operador degenerado ya que para un autovalor pueden estar asociados uno o más autovectores. Una forma de solucionar este problema es que se considere un conjunto de observables compatibles, de este modo se espera poder distinguir entre dos estados. La existencia de este conjunto se debe a que si no fuera posible encontrar tal conjunto de observables, no se podría distinguir entre dos estados. Este conjunto es llamado *conjunto completo de observables compatibles*.

2.1.2. Ecuación de Schrödinger

Previamente se vio que la función de onda representa el estado de un sistema, esta junto a la base obtenida del teorema espectral determina los posibles resultados que se pueden obtener al medir un observable y sus probabilidades respectivas. Sin embargo, otra cuestión de importancia es determinar la evolución de los resultados obtenidos, ya que cuando se realiza un experimento en un laboratorio este se hace en distintos instantes de tiempo, por lo que los resultados obtenidos dependen de la evolución de los resultados. La evolución de estos resultados está directamente relacionada al observable en cuestión y la función de onda del sistema, en nuestro caso una partícula, por lo que es necesario hallar la ecuación que determina la evolución de la función de onda.

Para esto se usa como punto de partida la hipótesis de Louis de Broglie, en la cual propone que a una partícula de cualquier masa está asociada una función de onda tal que el número de onda se relaciona con el momentum de la partícula por medio de

$$\vec{k} = \vec{p}/\hbar, \tag{2.6}$$

y la relación entre la frecuencia angular y la energía de la partícula está dada por

$$\omega = E/\hbar. \tag{2.7}$$

La importancia de la hipótesis de de Broglie es que propone el comportamiento ondulatorio de las partículas, en contraste con lo considerado previamente, donde se considera el comportamiento corpuscular de la luz. De este modo se tiene la llamada *dualidad onda-partícula*, la cual permite realizar los experimento mostrados previamente para la luz y deducir la estructura matemática del espacio de estados.

Considerando una partícula en un movimiento unidimensional, la relación entre el momentum y la energía está dado por

$$E = \frac{p^2}{2m}, \tag{2.8}$$

de lo que se obtiene al usar (2.6) y (2.7) que

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2. \tag{2.9}$$

Considerando la onda plana

$$\psi(x,t) = Ce^{i(kx-\omega t)} \tag{2.10}$$

se tiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = -k^2\psi(x,t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -i\omega\psi(x,t). \tag{2.11}$$

De modo que al usar la ecuación de dispersión (2.9) se obtiene si

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t). \tag{2.12}$$

A partir de esta ecuación, conocida como la ecuación de Schrödinger para una partícula libre con movimiento unidimensional, se puede derivar la ecuación de dispersión para el caso de una partícula libre.

La generalización para el caso tridimensional se consigue de forma directa, considerando la onda plana

$$\psi(\vec{x},t) = Ci^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \tag{2.13}$$

de la que se obtienen las relaciones:

$$\nabla^2\psi(\vec{x},t) = -\left|\vec{k}\right|^2\psi(\vec{x},t), \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = -i\omega\psi(\vec{x},t). \tag{2.14}$$

Por lo que la ecuación de Schrödinger para una partícula libre es

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x},t). \tag{2.15}$$

En el caso de una partícula en un potencial, la relación entre la energía y el momentum está dada por

$$E = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + V(\vec{x}). \tag{2.16}$$

Por lo que la ecuación de Schrödinger será dada por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x},t) + V(\vec{x})\psi(\vec{x},t). \tag{2.17}$$

De este modo se ha obtenido la ecuación de Schrödinger como una ecuación que permite derivar la relación de dispersión. Además, siendo esta lineal, un estado dado por una combinación lineal de ondas planas también satisfará la ecuación de Schrödinger.

2.2. Transformaciones relativistas

2.2.1. Postulados de la relatividad especial

Antes de estudiar las transformaciones relativistas mostraremos algunos de los postulados y algunas consecuencias de la mecánica de Newton-Galileo. Esta mecánica parte de asumir que el tiempo es absoluto, y es determinada por las leyes de Newton.

Un concepto usado para estudiar las leyes de la mecánica es el de sistema de referencia. Un sistema de referencia es una asignación coordenadas a un determinado evento, estas dadas por (t, x_1, x_2, x_3). Habiendo definido un sistema de referencia se enuncian las leyes de Newton:

- *Primera ley:* "Un objeto se mueve con una velocidad constante a menos que la fuerza resultante que actúa sobre este sea diferente de cero."
  En general, es complicado determinar todas las fuerzas, con sus magnitudes y direcciones, que actúan sobre un cuerpo. Esta ley permite determinar si hay una fuerza resultante en el cuerpo.

- *Segunda ley:* "La razón de cambio del momento es igual a la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo."
  Un resultado de esta ley es que cualquier sistema de referencia para el cual la aceleración sea la misma estará relacionado a una misma fuerza resultante, es decir que habrá una equivalencia entre estos sistemas de referencia. Por lo que junto a la primera ley se puede identificar una colección de sistemas de referencia para los cuales un cuerpo se mueve a velocidad constante, estos sistemas de referencia son llamados *sistemas de referencia inerciales.*
  Además, de esta se obtiene para una partícula determina que la masa (inercial) es el factor de proporción enter la fuerza resultante y la aceleración. En otras palabras, el valor de la masa determina que tan fácil es poder acelerar un objeto, en el sentido de que para una misma fuerza un objeto con una masa menor se moverá con una aceleración mayor a un objeto con masa mayor.

- *Tercera ley:* "Dados dos cuerpos A y B, si A ejerce una fuerza sobre B entonces B ejerce una fuerza de magnitud igual y dirección opuesta sobre A."
  Esta ley implica que el sistema formado por los cuerpos A y B conservará el momentum cuando A ejerza una fuerza sobre B, y viceversa. Así el comportamiento de las partes de un sistema no afectará al movimiento del sistema al ser considerado como una partícula, es decir el movimiento del sistema es independiente de sus constituyentes.

Al momento de analizar la segunda ley se mencionó una equivalencia entre sistemas de referencia pero no se determinó la forma que deben las transformaciones de coordenadas que definen estos clases de equivalencia. En la mecánica de Newton-Galileo estas transformación de coordenadas son dadas por las transformaciones de Galileo:

$$t' = t, \quad x_1' = x_1 - v_1 t, \quad x_2' = x_2 - v_2 t, \quad x_3' = x_3 - v_3 t \tag{2.18}$$

donde (v_1, v_2, v_3) son las componentes de la velocidad relativa entre estos observadores. Entonces los sistemas de referencia inerciales son aquellos que mediante una transformación de Galileo se relacionan al sistema de referencia donde la partícula donde ninguna fuerza actúa está en reposo.

Además como las transformaciones de Galileo mantienen el tiempo invariante, entonces si dos eventos son simultáneos para un sistema de referencia inercial entonces también lo serán para otro sistema de referencia inercial.

En el apéndice A se obtuvo que la función de onda de una partícula libre en dos sistemas de referencia diferentes está dada por

$$\psi'(\vec{x}\,', t') = e^{\frac{i}{\hbar}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}\,' - \frac{1}{2}m\vec{v}\,^2 t'\right)}\psi(\vec{x}, t). \tag{2.19}$$

Por lo que la densidad de probabilidad no varía. Además, los valores medios del momentum en ambos sistemas de referencia se relacionan de forma similar al caso clásico:

$$\left\langle \hat{\vec{p}} \right\rangle = m\vec{v} + \left\langle \hat{\vec{p}} \right\rangle. \tag{2.20}$$

Un resultado obtenido de la mecánica de Newton-Galileo es que no hay una velocidad absoluta, es decir que siempre será posible mediante una transformación de Galileo convertir la velocidad de un evento en cero. Este resultado resultó ser incompatible con lo obtenido por Michelson y Morley en 1881 [16]. Esto llevó a Einstein en 1905 a enunciar los postulados de la relatividad especial [1]:

- *Primer postulado:* Todas las leyes de la naturaleza son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales. En otras palabras las ecuaciones que describen las leyes de la naturaleza son invariantes con respecto de un cambio de transformaciones de coordenadas entre sistemas de referencia inerciales.
- *Segundo postulado:* La rapidez de la luz en el vacío es el mismo para distintos sistemas de referencia inerciales.

El segundo postulado es modifica la forma en como se definen los sistemas inerciales, pues las transformaciones que definen esta equivalencia ya no pueden las transformaciones de Galileo, las cuales son incompatibles con el segundo postulado. De esto, como se verá en la siguiente subsección, se obtiene que el tiempo ya no es absoluto como se había asumido en la mecánica de Newton-Galileo. De este modo la segunda de ley de Newton deja de ser válida en la mecánica de Einstein-Poincaré, pues depende del tiempo absoluto al determinar la razón de cambio.

2.2.2. Métrica y transformaciones de Lorentz

Antes de determinar la forma de las transformaciones que definen la equivalencia en sistemas de referencia inerciales es necesario ser más preciso con la definición de un evento. Un evento será definido como un porción del espacio-tiempo, pues todo evento ocupa un determinado espacio. Matemáticamente, estos parámetros pueden ser ignorados y se puede tratar a un evento como si fuera un punto del espacio-tiempo, es decir que será caracterizado por las coordenadas (x, y, z, t). De esta definición se sigue que la evolución de un evento en el tiempo, por ejemplo el movimiento de una partícula, formará una línea en el espacio-tiempo llamada *línea de mundo*.

Habiendo definido que es un evento, se determina la relación que deben tener sus coordenadas de modo que se satisfaga el segundo postulado de la relatividad espacial, el cual es el único que determina la relación entre las coordenadas espaciales y temporal de un determinado evento. Si consideramos que respecto del sistema de referencia de un observador O se emite un haz de luz, entonces en un intervalo de tiempo $\triangle t$ la distancia recorrida por un frente de onda del haz debe satisfacer

$$(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2 + (\triangle z)^2 = (c\triangle t)^2. \tag{2.21}$$

De igual forma para un observador O' se debe satisfacer esto. Entonces si definimos la variación de longitud como

$$\triangle s^2 = (c\triangle t)^2 - (\triangle x)^2 - (\triangle y)^2 - (\triangle z)^2, \tag{2.22}$$

la invarianza de la rapidez de la luz es equivalente a decir que de $\triangle s^2 = 0$ se obtiene $\triangle s'^2 = 0$.

Ahora si asumimos que las transformaciones de coordenadas son lineales entonces en coordenadas naturales se tiene que

$$\triangle s'^2 = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} M_{\alpha\beta}(\triangle x^\alpha)(\triangle x^\beta), \tag{2.23}$$

donde $M_{\alpha,\beta} = M_{\beta,\alpha}$. Considerando el caso particular en el que $\triangle s^2 = 0$ se tiene que

$$\triangle s'^2 = M_{00}\sum_{i=1}^{3}(\triangle x^i)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{3} M_{0i}\triangle x^i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}(\triangle x^i)^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\triangle x^i \triangle x^j = 0. \tag{2.24}$$

De esto se obtiene que

$$M_{0i} = 0 \quad \text{y} \quad M_{ij} = -M_{00}\delta_{ij}, \tag{2.25}$$

por lo que para el caso general se tiene

$$\triangle s'^2 = -M_{00}\triangle s^2. \tag{2.26}$$

Nótese que $M_{00} = M_{00}(\vec{v})$, es decir que depende de la velocidad relativa entre los observador a los que corresponden los sistemas de referencia inerciales. Ahora supongamos los sistemas de referencia O, O_1 y O_2 de modo que el observador en O_1 se mueve con una velocidad $\vec{v}_1$ respecto de O y el observador O_2 con velocidad $\vec{v}_2$ respecto de O. Por lo que se tiene que

$$\frac{\triangle s_1^2}{\triangle s^2} = -M_{00}(\vec{v}_1) \quad \text{y} \quad \frac{\triangle s_2^2}{\triangle s^2} = -M_{00}(\vec{v}_2), \tag{2.27}$$

entonces

$$\frac{\triangle s_1^2}{\triangle s_2^2} = \frac{M_{00}(\vec{v}_1)}{M_{00}(\vec{v}_2)}. \tag{2.28}$$

Pero al realizar el cambio de coordenadas entre O_1 y O_2 se tiene que $\triangle s_1^2 = -M_{00}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\triangle s_2^2$, esto implica que

$$\frac{M_{00}(\vec{v}_1)}{M_{00}(\vec{v}_2)} = -M_{00}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2). \tag{2.29}$$

Sin embargo el lado derecho de (2.29) depende del ángulo entre $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y el lado izquierdo no, por lo que el factor M_{00} debe ser una constante. Al reemplazar esto en (2.29) se obtiene que

$$\triangle s^2 = \triangle s'^2 \tag{2.30}$$

para una transformaciones de coordenadas.

Matemáticamente el espacio-tiempo descrito por la mecánica de Einstein-Poincaré es un espacio de Minkowski con la métrica

$$a \cdot b = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3. \tag{2.31}$$

Usando el tensor métrico $g^{\mu\nu}$ que tiene las propiedades

$$g^{\mu\nu} a_\nu = a^\mu, \quad g_{\mu\nu} a^\nu = a_\mu, \tag{2.32}$$

el producto de Minkwoski se puede expresar como

$$a \cdot b = g^{\mu\nu} a^\mu b_\nu. \tag{2.33}$$

Siguiendo esta notación de índices, las transformaciones de coordenadas que definen los sistemas de referencia inerciales serán dadas por

$$x^\mu \to x'^\rho = \Lambda^\rho{}_\mu x^\mu + a^\rho, \tag{2.34}$$

y debido (2.30) se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \triangle x^\mu g_{\mu\nu} \triangle x^\nu &= \triangle x'^\rho g_{\rho\sigma} \triangle x'^\sigma = \Lambda^\rho{}_\mu \triangle x^\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \triangle x^\nu \\ g_{\mu\nu} &= \Lambda^\rho{}_\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \end{aligned} . \tag{2.35}$$

De este modo estas transformaciones cumplen con la relación

$$\Lambda^T g \Lambda = g \tag{2.36}$$

siendo los elementos de matriz dados por $\Lambda^\mu{}_\nu$. El conjunto de las transformaciones de Lorentz es un grupo, llamado *grupo de Lorentz*, ya que por definición estas son invertibles, y para dos de estas Λ, $\bar{\Lambda}$ se cumple que

$$\bar{\Lambda}^T \Lambda^T g \Lambda \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}^T g \bar{\Lambda} = g, \tag{2.37}$$

es decir que $\Lambda\bar{\Lambda}$ es una transformación de Lorentz.

El grupo de Lorentz se puede definir como

$$\mathfrak{L} = O(1,3) = \left\{ \Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g \right\}. \tag{2.38}$$

Podemos notar que debido las propiedades del determinante de una matriz,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \text{y} \qquad \det(A) = \det(A^T), \tag{2.39}$$

cuando $\Lambda \in O(1,3)$ se tiene que

$$\det(\Lambda^T)\det(g)\det(\Lambda) = \det(g) \quad \Longrightarrow \quad \det(\Lambda)^2 = 1 \tag{2.40}$$

Por lo que podemos separar los elementos de $\mathfrak{L}$ en dos conjuntos

$$\mathfrak{L}_+ = SO(1,3) = \left\{ \Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g \wedge \det(\Lambda) = 1 \right\} \tag{2.41}$$

$$\mathfrak{L}_- = \left\{ \Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g \wedge \det(\Lambda) = -1 \right\}. \tag{2.42}$$

Sin embargo, solo el primero puede tener la estructura de un grupo ya que el determinante de la matriz identidad es igual a 1. Este es conocido como el *grupo especial de Lorentz* o *grupo propio de Lorentz*.

Por otro lado, al fijar $\mu = \nu = 0$ en (2.35) se obtiene que

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 = 1 \tag{2.43}$$

Esto implica que $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$, por lo que al igual que para el caso de la determinante se pueden clasificar los elementos de $O(1,3)$ en dos tipos:

$$\mathfrak{L}^\uparrow = O(1,3)^+ = \left\{\Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g \wedge \Lambda^0{}_0 \geq 1\right\} \tag{2.44}$$

$$\mathfrak{L}_\downarrow = \left\{\Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g \wedge \Lambda^0{}_0 \leq -1\right\}. \tag{2.45}$$

Y solo uno de estos puede formar un grupo, pues la identidad satisface $\Lambda^0{}_0 = 1$.

De la intersección de los subgrupos $\mathcal{L}_+$ y $\mathcal{L}^\uparrow$ se puede formar el *grupo de Lorentz ortocrono y propio*, denotado por $\mathfrak{L}^\uparrow_+$ o $SO^+(1,3)$.

$$\mathfrak{L}^\uparrow_+ = SO^+(1,3) = \left\{\Lambda \in O(1,3) \mid \det(\Lambda) = 1 \wedge \Lambda^0{}_0 \geq 1\right\}. \tag{2.46}$$

Una de las razones por la que este grupo es especial es debido a que es una componente conexa de la variedad definida por el grupo de Lorentz y contiene a la identidad, por lo que es posible definir transformaciones infinitesimales[3].

Algunos elementos de $\mathfrak{L}^\uparrow_-$ son:

$$\begin{gathered}
\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{2.47}$$

donde las matrices $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$ corresponden a la inversión de uno de los ejes espaciales, y la matriz $\mathcal{P}_4$ a la inversión de todos los ejes espaciales o la inversión de uno de los ejes con la rotación en π rad respecto del plano formado por los otros ejes. Es decir que esta transformaciones invierten la orientación de las coordenada espaciales. De forma similar la matriz

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.48}$$

[3]La demostración de que el grupo de Lorentz forma una variedad y que el subgrupo $\mathcal{L}^\uparrow_+$ es una componente conexa de esta se encuentra en Cobos Zara [6]

elemento de $\mathfrak{L}_-^\downarrow$, cuyo cuadrado es la identidad, corresponde a la inversión temporal. Por último se eligen los elementos de $\mathfrak{L}_+^\downarrow$ iguales a los productos de $\mathcal{P}_i\mathcal{T}$, los cuales se relacionan con una inversión espacio-temporal.

Así, al usar los resultados obtenidos en el apéndice B, la unión disjunta de los cocojuntos izquierdos del grupo de Lorentz se puede expresar como

$$\mathfrak{L}_+^\uparrow \uplus \mathcal{P}_i\mathfrak{L}_+^\uparrow \uplus \mathcal{T}\mathfrak{L}_+^\uparrow \uplus \mathcal{P}_i\mathcal{T}\mathfrak{L}_+^\uparrow. \tag{2.49}$$

Así las transformaciones de inversión temporal y espacial, conocidas como *transformaciones de Lorentz discretas*, determinan junto a los elementos del grupo de Lorentz ortocrono y propio a todas las transformaciones de Lorentz posibles.

Una consecuencia directa de las transformaciones de Lorentz es que el tiempo no es absoluto, pues a diferencia de la mecánica de Newton-Galileo donde el tiempo es invariante frente a cambios de referencia inerciales, en este caso el tiempo participa en el cambio de coordenada junto a las coordenadas espaciales. Esto también implica que dos eventos son simultáneos para un observador no son necesariamente simultáneos para otro observador inercial. Esta diferencia con la mecánica de Newton-Galileo hace que para medir el tiempo se deba elegir un determinado sistema de referencia. El *tiempo propio* de un objeto móvil es aquel medido en el sistema de referencia para el que el objeto no se mueve. De este obtenemos que si un reloj está presente en dos eventos E_1 y E_2 mide $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, por lo que $(\triangle s)^2 = (c\triangle t)^2$. Entonces, el tiempo medido por este reloj se relaciona con la variación de longitud por $\triangle s = c\triangle\tau$, es decir que el tiempo propio es el mismo para distintos sistemas de referencia y distintos observadores inerciales pueden obtener este a partir de mediciones en sus respectivos sistemas de referencia. Así, el tiempo propio es una buena medición del tiempo.

Supongamos que el objeto se mueve con velocidad constante en el eje x, entonces la distancia recorrida por este en dos puntos en el espacio-tiempo es $\triangle x$ y de esta definimos la cuadrivelocidad como

$$u_x = \frac{\triangle x}{c\triangle\tau} = \frac{\triangle x}{\sqrt{(c\triangle t)^2 - (\triangle x)^2}} = \frac{\triangle x}{c\triangle t\sqrt{1 - \left(\frac{\triangle x}{c\triangle t}\right)^2}} \tag{2.50}$$

$$u_t = \frac{c\triangle t}{c\triangle\tau} = \frac{c\triangle t}{\sqrt{(c\triangle t)^2 - (\triangle x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\triangle x}{c\triangle t}\right)^2}} \tag{2.51}$$

y las componentes del cuadrimomento como

$$p_x = mcu_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x}{c}\right)^2}}, \quad p_t = mcu_t = \frac{mc}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x}{c}\right)^2}}. \tag{2.52}$$

Podemos notar que el límite $v_x \ll c$ el cuadrimomento es igual al momentum mv_x y

$$p_t \approx mc\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{c}\right)^2\right) = mc + \frac{(mv_x)^2}{2mc}, \tag{2.53}$$

es decir que $cp_t - mc^2$ es la energía cinética E. Por lo que

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \frac{mc}{1-\left(\frac{v_x}{c}\right)^2} \quad y \quad p^2 = p_x^2 = \frac{m^2 v_x^2}{1-\left(\frac{v_x}{c}\right)^2} \tag{2.54}$$

entonces

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4. \tag{2.55}$$

De este modo se ha obtenido que la relación entre la energía cinética y el momentum es diferente a lo obtenido de la mecánica de Newton-Galileo. Esta relación será importante al tratar de encontrar una ecuación de onda relativista en la siguiente sección.

2.3. Ecuaciones de onda relativistas

En la sección anterior se vio que la ecuación de Schrödinger no es invariante frente a las transformaciones de Lorentz, por lo que es necesario encontrar una ecuación que sí lo sea. Para esto mediante el uso de los operadores momentum y energía usados en la mecánica cuántica no relativista hallamos la ecuación de Klein-Gordon y estudiamos sus soluciones. Luego, imponiendo que toda ecuación relativista debe ser llevada una expresión similar a la ecuación de Klein-Gordon derivamos la ecuación de Dirac y la relación de anticonmutación de la matrices γ.

2.3.1. Ecuación de Klein-Gordon

Si asignamos al momento lineal y la energía los operadores

$$p_x \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_x \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_x \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.56}$$

podemos notar que de la ecuación que relaciona energía y momentum para una partícula libre clásica

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{2.57}$$

se obtiene la ecuación de Schrödinger para una partícula libre

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi. \tag{2.58}$$

Entonces podemos esperar obtener una ecuación relativista a partir de esta correspondencia de operadores y la ecuación relativista

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4, \tag{2.59}$$

donde m es la masa en reposo de la partícula. La ecuación obtenida es

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi = \left(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4\right)\phi \tag{2.60}$$

y es la conocida *ecuación de Klein-Gordon*. Podemos expresar esta como

$$(\hbar^2 c^2 \Box + m^2 c^4)\phi = 0 \tag{2.61}$$

donde las coordenadas en el espacio de Minkowski son $(ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y $\Box \equiv \partial_0^2 - \nabla^2$.

Para verificar que la ecuación de Klein-Gordon es Lorentz-covariante se introducen dos sistemas coordenados relacionados por

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{2.62}$$

por lo que

$$\partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu. \tag{2.63}$$

Entonces

$$\left(\hbar^2 c^2 \partial^\mu \partial_\mu + m^2 c^4\right)\phi(x) = \left(\hbar^2 c^2 \Lambda^\nu{}_\mu g^{\mu\sigma} \Lambda^\rho{}_\sigma \partial'_\nu \partial'_\rho + m^2 c^4\right)\phi(\Lambda^{-1}x') \tag{2.64}$$

y usando (2.35) se reduce a

$$\begin{aligned}\left(\hbar^2 c^2 \partial^\mu \partial_\mu + m^2 c^4\right)\phi(x) &= \left(\hbar^2 c^2 g^{\nu\rho} \partial'_\nu \partial'_\rho + m^2 c^4\right)\phi(\Lambda^{-1}x') \\ &= \left(\hbar^2 c^2 \partial'_\nu \partial'^\nu + m^2 c^4\right)\phi(\Lambda^{-1}x').\end{aligned} \tag{2.65}$$

De este modo se ha verificado que la ecuación de Klein-Gordon es Lorentz-covariante.

Notamos que la ecuación de Klein-Gordon tiene como soluciones a las ondas planas

$$\phi_p^\pm(\vec{x}, t) = N e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} \mp Et)}, \tag{2.66}$$

donde $E > 0$, por lo que la solución general será dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \left[e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}\tilde{\phi}^+\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) + e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} + Et)}\tilde{\phi}^-\left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right)\right] \mathrm{d}^4 p. \tag{2.67}$$

Esta integral puede ser divida en dos integrales

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left[\int e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}\tilde{\phi}^+\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \mathrm{d}^4 p + \int e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} + Et)}\tilde{\phi}^-\left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \mathrm{d}^4 p\right] \tag{2.68}$$

y haciendo el cambio de variable $\vec{p} \to -\vec{p}$ para la segunda integral se obtiene

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \left[e^{-ip\cdot x/\hbar}\tilde{\phi}^+(p) + e^{ip\cdot x/\hbar}\tilde{\phi}^-(p)\right] \mathrm{d}^4 p \tag{2.69}$$

donde $p\cdot x \equiv p^0 x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$. Reemplazando esta expresión en la ecuación de Klein-Gordon se obtiene

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int (-c^2 p^2 + m^2 c^4) \left[e^{-ip\cdot x/\hbar}\tilde{\phi}^+(p) + e^{ip\cdot x/\hbar}\tilde{\phi}^-(p)\right] \mathrm{d}^4 p = 0. \tag{2.70}$$

Para que la transformación de Fourier sea única se debe cumplir que $(-c^2p^2 + m^2c^4)\tilde{\phi}^\pm(p) = 0$, lo que implica que

$$\tilde{\phi}^\pm(p) = \delta(-c^2p^2 + m^2c^4)\tilde{a}^\pm(p) \tag{2.71}$$

donde $a^\pm(p)$ es una función arbitraria. Ahora expresamos la distribución Delta de Dirac como

$$\delta(-c^2p^2 + m^2c^4) = \delta(\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4 - E^2) \tag{2.72}$$

de la definición de la distribución obtenemos

$$\delta(-c^2p^2+m^2c^4)=\frac{\delta(\sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4}-E)+\delta(\sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4}+E)}{2\sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4}}. \tag{2.73}$$

Reemplazando en (2.69) y (2.71), y definiendo

$$a^{\pm}(p)=\frac{1}{\sqrt{2E}}\tilde{a}^{\pm}(p) \tag{2.74}$$

se obtiene

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}\sqrt{2E}}\int\left[e^{-ip\cdot x/\hbar}a^{+}(p)+e^{ip\cdot x/\hbar}a^{-}(p)\right]\mathrm{d}^3p. \tag{2.75}$$

Para interpretar estas soluciones aplicamos el operador energía a las soluciones de onda plana

$$\hat{E}\phi_p^{\pm}(\vec{x},t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[Ne^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}\mp Et)}\right]=\pm E\phi_p^{\pm}(\vec{x},t) \tag{2.76}$$

y el operador momentum

$$\hat{P}_i\phi_p^{\pm}(\vec{x},t)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}\left[Ne^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}\right]=p_i\phi_p^{\pm}(\vec{x},t). \tag{2.77}$$

De esto obtenemos que para un determinado momentum existen dos posibles valores de energía, una energía positiva y otra negativa. Y se puede notar que al hallar la conjugada de una las soluciones de onda plana se obtiene una solución de onda plana con energía con signo opuesto a la anterior.

2.3.2. Ecuación de Dirac

Para hallar la ecuación de Dirac se usará el método propuesto por Umezawa [4]. En este se propone que toda ecuación de onda para funciones de onda ϕ_α está dada por

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)\phi_\beta(x)=0 \tag{2.78}$$

o equivalentemente

$$\Lambda(\partial)\phi(x)=0, \tag{2.79}$$

donde $\phi(x)=(\phi_1,\dots,\phi_n)^T$. Y para que sea invariante frente a transformaciones de Lorentz, debe poder transformarse a una ecuación con una forma similar a la ecuación de Klein-Gordon (2.61), la cual es una ecuación relativista para una partícula libre. Esto implica que debe existir un operador

$$d(\partial)=\alpha+\alpha^{\mu}\partial_\mu+\ldots+\alpha^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l}\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_l}+\ldots \tag{2.80}$$

tal que

$$d(\partial)\Lambda(\partial)\phi(x)=(\hbar^2c^2\Box+m^2c^4)I\phi(x)=0. \tag{2.81}$$

Esto es equivalente a

$$d(\partial)\Lambda(\partial)=(\hbar^2c^2\Box+m^2c^4)I. \tag{2.82}$$

El máximo orden de derivación de $d(\partial)$ es llamado *orden*. Entonces si $d(\partial)$ es de orden b se debe cumplir que

$$\alpha^{\mu_1 \cdots \mu_l} = 0 \tag{2.83}$$

para $l > b$.

Expresando la ecuación de onda relativista como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene

$$(\varrho^\mu \partial_\mu - mc\omega)\phi(x) = 0 \tag{2.84}$$

como este es un caso particular de (2.78) se tiene que

$$(\alpha + \alpha^\mu \partial_\mu + \ldots + \alpha^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_l} \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_l} + \ldots)(\varrho^\mu \partial_\mu - mc\omega) = (\hbar^2 c^2 \Box + m^2 c^4) I \tag{2.85}$$

Entonces $-mc\alpha\omega = m^2 c^4 I$, lo que implica que ω es una matriz invertible. Así es posible expresar (2.84) como

$$(\omega^\mu \partial_\mu - mc)\phi(x) = 0 \tag{2.86}$$

donde $\omega^\mu = \omega^{-1} \varrho^\mu$. Este resultado nos permite asumir siempre que $\Lambda = \omega^\mu \partial_\mu - mc$ cuando expresamos la ecuación de onda relativista como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ahora si $d(\partial)$ es un operador diferencial de primer orden

$$d(\partial) = \alpha + \alpha^\mu \partial_\mu \tag{2.87}$$

para $\Lambda = \beta^\mu \partial_\mu - mc$ se obtiene que

$$\begin{gathered}(\alpha + \alpha^\mu \partial_\mu)(\omega^\nu \partial_\nu - mc) = (\hbar^2 c^2 \Box + m^2 c^4) I \\ \alpha\omega^\nu \partial_\nu - \alpha mc + \alpha^\mu \omega^\nu \partial_\mu \partial_\nu - \alpha^\mu mc \partial_\mu = \hbar^2 c^2 \partial_0^2 - \hbar^2 c^2 \partial_i^2 + m^2 c^4.\end{gathered} \tag{2.88}$$

Así para $\mu \neq \nu$ se tiene

$$\begin{gathered}-\alpha mc = m^2 c^4 I, \quad \alpha\omega^\mu - \alpha^\mu cm = 0, \qquad \alpha^\mu \omega^\nu + \alpha^\nu \omega^\mu = 0, \\ \alpha^0 \omega^0 = \hbar^2 c^2 I, \quad \alpha^i \omega^i = -\hbar^2 c^2 I,\end{gathered} \tag{2.89}$$

entonces

$$\alpha^\mu = -c^2 \omega^\mu, \quad \omega^\mu \omega^\nu + \omega^\nu \omega^\mu = 0, \quad (\omega^0)^2 = -\hbar^2 I, \quad (\omega^i)^2 = \hbar^2 I. \tag{2.90}$$

Si definimos $\gamma^\mu \equiv \frac{-i}{\hbar} \omega^\mu$ se obtiene que la ecuación

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\,\phi(x) = 0 \tag{2.91}$$

satisface la condición de Klein-Gordon si se cumple

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{2.92}$$

A su vez el operador diferencial de (2.87) es

$$d(\partial) = -c^2 (i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu + mcI). \tag{2.93}$$

Ahora identificamos que la ecuación (2.91) es la *ecuación de Dirac* y la ecuación (2.92) expresa las reglas de anticonmutación de las matrices gamma.

Al igual que en el caso de la ecuación de Klein-Gordon podemos expresar la ecuación de Dirac en unidades naturales ($c = \hbar = 1$)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\phi = 0, \tag{2.94}$$

esto se hace ya que esta expresión será usada en los capítulos posteriores.

Capítulo 3

Generadores e invariantes relativistas

En este capítulo se estudian los generadores de los grupos de Lorentz y Poincaré; en particular, se determina el álgebra de los generadores al considerar la representación de una transformación infinitesimal y la propiedades de la representación de un grupo. Además, a partir de estos generadores se construyen nuevos generadores que se identifican con el momento angular de la partícula.

Por otro lado, se definen los operadores P^2 y W^2, y se calculan los conmutadores entre ellos y los generadores del grupo de Poincaré. A partir de estos resultados se deduce que estos operadores son invariantes frente a las transformaciones de Poincaré. Finalmente, al expresarlos en función de los operadores de momento angular se encuentra una interpretación física, y junto con los generadores de las traslaciones y la componente W^0 permiten caracterizar completamente a una partícula.

3.1. Generadores del grupo de Lorentz

3.1.1. Transformaciones de Lorentz infinitesimales

En el capítulo anterior se obtuvo que las transformaciones de Lorentz ortocronas y propias son definidas como los elementos del grupo

$$\mathfrak{L}_+^\uparrow = SO^+(1,n) = \left\{\Lambda \in O(1,n) \mid \det(\Lambda) = 1 \wedge \Lambda^0{}_0 \geq 1\right\}. \tag{3.1}$$

Además junto a las transformaciones discretas generan el grupo de Lorentz.

Una propiedad de los elementos del grupo $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ es que al incluir a la identidad se pueden definir transformaciones infinitesimales dadas por

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon w^\mu{}_\nu \tag{3.2}$$

donde ε es un infinitesimal.

Reemplazando en (2.35) se obtiene

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\rho + \varepsilon w^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\rho + \varepsilon w^\nu{}_\sigma) &= g_{\rho\sigma} \\
g_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\rho \delta^\nu{}_\sigma + \varepsilon g_{\mu\nu}\delta^\mu{}_\rho w^\nu{}_\sigma + \varepsilon g_{\mu\nu} w^\mu{}_\rho \delta^\nu{}_\sigma + \varepsilon^2 g_{\mu\nu} w^\mu{}_\rho w^\nu{}_\sigma &= g_{\rho\sigma} \\
g_{\rho\sigma} + \varepsilon g_{\rho\nu} w^\nu{}_\sigma + \varepsilon^2 g_{\mu\nu} w^\mu{}_\rho w^\nu{}_\sigma &= g_{\rho\sigma}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

De modo que al definir

$$w_{\sigma\rho} \equiv g_{\mu\sigma} w^\mu{}_\rho \tag{3.4}$$

se obtiene que

$$w_{\rho\sigma} = -w_{\sigma\rho}. \tag{3.5}$$

Entonces la matriz $w = (w_{\sigma\rho})$ es antisimétrica.

La igualdad (2.35) genera un sistema de 16 ecuaciones entre los elementos de $\mathcal{L}$. Sin embargo, debido a que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, para $\mu, \nu \neq 0$ se tiene que las ecuaciones

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \quad \text{y} \quad g_{\nu\mu} = \Lambda^\rho{}_\nu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\mu \tag{3.6}$$

son iguales, es decir que solo hay 10 ecuaciones independientes. Como las transformaciones Λ son matrices 4×4 tienen 16 parámetros pero por la restricción mencionada se obtiene que tiene dimensión 6.

3.1.2. Generadores del grupo de Lorentz

Podemos definir una representación del grupo de Lorentz ortocrono y propio como $\mathcal{D}\colon \mathfrak{L}_+^\uparrow \to \mathrm{Aut}(V)$, donde V es un espacio vectorial y Aut(V) denota al conjunto de los automorfimos de V.

Por la definición de una representación de un grupo se cumple que para dos elementos Λ_1, Λ_2 del grupo de Lorentz se tiene que

$$\mathcal{D}(\Lambda_1)\mathcal{D}(\Lambda_2) = \mathcal{D}(\Lambda_2\Lambda_1). \tag{3.7}$$

Una consecuencia directa de esto es

$$\mathcal{D}(I) = \mathbb{1}, \tag{3.8}$$

donde $\mathbb{1}$ es el operador identidad y

$$\mathcal{D}(\Lambda^{-1})\mathcal{D}(\Lambda) = \mathcal{D}(I) = \mathbb{1} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}(\Lambda)^{-1} = \mathcal{D}(\Lambda^{-1}). \tag{3.9}$$

Para una transformación de Lorentz infinitesimal (3.2) este resultado implica que

$$\mathcal{D}^{-1}(I + \varepsilon\omega) = \mathcal{D}(I - \varepsilon\omega). \tag{3.10}$$

Podemos asumir que la aplicación de $\mathcal{D}$ es la transformación infinitesimal es

$$\mathcal{D}(I + \varepsilon\omega) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}, \tag{3.11}$$

donde $J^{\mu\nu}$ es un operador. Debido a que ω es antisimétrico por (3.5) tenemos que

$$\frac{i}{2}\varepsilon J^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\varepsilon J^{\nu\mu}\omega_{\nu\mu} = \frac{i}{2}\varepsilon(J^{\mu\nu} - J^{\nu\mu})\omega_{\mu\nu}. \tag{3.12}$$

Esto nos permite afirmar siempre que $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$, ya que de lo contrario podemos definir los operadores $\bar{J}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(J^{\mu\nu} - J^{\nu\mu})$, para los cuales sí se cumple esta condición.

Además si consideramos que los operadores $J^{\mu\nu}$ son hermíticos obtenemos de

$$\mathcal{D}(I+\varepsilon\omega)^{\dagger} = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} = \mathcal{D}(I-\varepsilon\omega) = \mathcal{D}^{-1}(I+\varepsilon\omega), \tag{3.13}$$

es decir que la representación $\mathcal{D}$ es unitaria.

Sean las transformaciones de Lorentz Λ y $I+\varepsilon\omega'$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Lambda)^{-1}\mathcal{D}(I+\varepsilon\omega')\mathcal{D}(\Lambda) &= \mathcal{D}(\Lambda^{-1}(I+\varepsilon\omega')\Lambda) \\ \mathcal{D}^{-1}(\Lambda)\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega'_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)\mathcal{D}(\Lambda) &= \mathcal{D}(I+\varepsilon\Lambda^{-1}\omega'\Lambda) \\ \mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\mathcal{D}^{-1}(\Lambda)\omega'_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\mathcal{D}(\Lambda) &= \mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\left[\Lambda^{-1}\omega'\Lambda\right]_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Para reducir esta expresión es necesario expresar Λ^{-1} en función de Λ. Esto se puede obtener a partir de la definición de los elementos del grupo de Lorentz

$$g^{\alpha\rho}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g^{\alpha\rho}g_{\rho\sigma} = \delta^{\alpha}_{\sigma}, \tag{3.15}$$

la cual implica que

$$(\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\nu} = g^{\alpha\rho}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}g_{\mu\nu}. \tag{3.16}$$

De este modo se obtiene que

$$\begin{aligned} \left[\Lambda^{-1}\omega\Lambda\right]_{\rho\sigma} &= g_{\rho\gamma}\left[\Lambda^{-1}\omega\Lambda\right]^{\gamma}{}_{\sigma} = g_{\rho\gamma}(\Lambda^{-1})^{\gamma}{}_{\beta}\omega^{\beta}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} \\ &= g_{\rho\gamma}g^{\gamma\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}g_{\mu\beta}\omega^{\beta}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} \\ &= \delta^{\alpha}_{\rho}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\omega_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\omega_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por lo que al reemplazar esta expresión en (3.14) se obtiene

$$\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\mathcal{D}(\Lambda)^{-1}\omega'_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\mathcal{D}(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\omega'_{\mu\nu}J^{\rho\sigma}. \tag{3.18}$$

Luego,

$$\mathcal{D}(\Lambda)^{-1}\omega'_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\mathcal{D}(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\omega'_{\mu\nu}J^{\rho\sigma}, \tag{3.19}$$

es decir,

$$\mathcal{D}(\Lambda)^{-1}J^{\mu\nu}\mathcal{D}(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma}. \tag{3.20}$$

Considerando que Λ es una transformación de Lorentz infinitesimal dada por $I+\varepsilon\omega$:

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\alpha\gamma}J^{\alpha\gamma}\right)J^{\mu\nu}\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}\right) &= (\delta^{\mu}{}_{\rho} + \varepsilon\omega^{\mu}{}_{\rho})(\delta^{\nu}{}_{\sigma} + \varepsilon\omega^{\nu}{}_{\sigma})J^{\rho\sigma} \\ J^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\alpha\gamma}J^{\alpha\gamma}J^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\rho\sigma}J^{\mu\nu}J^{\rho\sigma} &= \delta^{\mu}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma} + \varepsilon\delta^{\nu}{}_{\sigma}\omega^{\mu}{}_{\rho}J^{\rho\sigma} + \varepsilon\delta^{\mu}{}_{\rho}\omega^{\nu}{}_{\sigma}J^{\rho\sigma} \\ J^{\mu\nu} - \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\alpha\gamma}J^{\alpha\gamma}J^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\rho\sigma}J^{\mu\nu}J^{\rho\sigma} &= J^{\mu\nu} + \varepsilon\omega^{\mu}{}_{\rho}J^{\rho\nu} + \varepsilon\omega^{\nu}{}_{\sigma}J^{\mu\sigma}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Usando $\omega^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\nu}$ y simplificando la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
\left[J^{\mu\nu}, J^{\alpha\gamma}\right]\omega_{\alpha\gamma} &= -2i\omega^{\mu}{}_{\rho}J^{\rho\nu} - 2i\omega^{\nu}{}_{\sigma}J^{\mu\sigma} \\
&= 2ig^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}J^{\nu\rho} - 2ig^{\nu\rho}\omega_{\rho\sigma}J^{\mu\sigma} \\
&= ig^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\gamma}J^{\nu\gamma} + ig^{\mu\gamma}\omega_{\gamma\alpha}J^{\nu\alpha} - ig^{\nu\alpha}\omega_{\alpha\gamma}J^{\mu\gamma} - ig^{\nu\gamma}\omega_{\gamma\alpha}J^{\mu\alpha} \\
&= i\left(g^{\mu\alpha}J^{\nu\gamma} - g^{\mu\gamma}J^{\nu\alpha} - g^{\nu\alpha}J^{\mu\gamma} + g^{\nu\gamma}J^{\mu\alpha}\right)\omega_{\alpha\gamma} \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

entonces

$$\left[J^{\mu\nu}, J^{\alpha\gamma}\right] = i\left(g^{\mu\alpha}J^{\nu\gamma} - g^{\mu\gamma}J^{\nu\alpha} - g^{\nu\alpha}J^{\mu\gamma} + g^{\nu\gamma}J^{\mu\alpha}\right). \qquad (3.23)$$

Así se ha obtenido el álgebra de los generadores del grupo de Lorentz.

3.1.3. Momento angular

Debido a la antisimetría en los índices de los generadores $J^{\mu\nu}$, solo hay seis generadores para la representación $\mathcal{D}$ del grupo de Lorentz:

$$(J^{\mu\nu}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & J^{01} & J^{02} & J^{03} \\ -J^{01} & 0 & J^{12} & J^{13} \\ -J^{02} & -J^{12} & 0 & J^{23} \\ -J^{03} & -J^{13} & -J^{23} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.24)$$

A partir de estos se pueden definir los operadores:

$$J^k \equiv -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}J^{jl} \qquad (3.25)$$

y

$$K^k \equiv J^{0k}, \qquad (3.26)$$

donde $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. Debido a que los operadores K^k relacionan la coordenada temporal con una espacial, estos son llamados operadores *boost*.

Para hallar el álgebra de este nuevo conjunto de operadores del grupo de Lorentz se usa el álgebra de los antiguos operadores (3.23). Para este fin es de utilidad expresar los antiguos generadores en función de los nuevos. La relación entre K^k y los antiguos operadores está dada explícitamente en su definición, pero este no es caso para J^k. Por esto se realiza el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
J^{kj} &= \frac{i}{2}(J^{kj} - J^{jk}) = \frac{i}{2}\sum_{mn}\left(\delta^{km}\delta^{jn} - \delta^{kn}\delta^{jm}\right)J^{mn} \\
&= \frac{i}{2}\sum_{mnl}\epsilon^{kjl}\epsilon^{mnl}J^{mn} = -i\sum_{l}\epsilon^{kjl}\left(-\frac{1}{2}\sum_{mn}\epsilon^{lmn}J^{mn}\right) \\
&= -i\sum_{l}\epsilon^{kjl}J^{l}. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Entonces se procede a hallar el álgebra entre los generadores J^k:

$$\begin{aligned}\left[J^k, J^j\right] &= \left[\frac{-1}{2}\sum_{mn}\epsilon^{kmn}J^{mn}, \frac{-1}{2}\sum_{pq}\epsilon^{jpq}J^{pq}\right] = \frac{1}{4}\sum_{mnpq}\epsilon^{kmn}\epsilon^{jpq}\left[J^{mn}, J^{pq}\right]\\ &= \frac{i}{4}\sum_{mnpq}\epsilon^{kmn}\epsilon^{jpq}(J^{mp}g^{nq} - J^{np}g^{mq} - J^{mq}g^{np} + J^{nq}g^{mp})\end{aligned} \tag{3.28}$$

como se evaluan solo los valores espaciales, $g^{mn} = -\delta^{mn}$:

$$\begin{aligned}\left[J^k, J^j\right] &= \frac{-i}{4}\sum_{mnpq}\epsilon^{kmn}\epsilon^{jpq}(J^{mp}\delta^{nq} - J^{np}\delta^{mq} - J^{mq}\delta^{np} + J^{nq}\delta^{mp})\\ &= -\frac{i}{4}\left(\sum_{mnp}\epsilon^{kmn}\epsilon^{jpn}J^{mp} - \sum_{mnp}\epsilon^{kmn}\epsilon^{jmp}J^{np} - \sum_{mnq}\epsilon^{kmn}\epsilon^{jnq}J^{mq} + \sum_{mnq}\epsilon^{kmn}\epsilon^{jmq}J^{nq}\right).\end{aligned} \tag{3.29}$$

Reasignando índices y usando la antisimetría de $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ y $J^{\rho\sigma}$ se reduce a

$$\left[J^k, J^j\right] = -i\sum_{mnp}\epsilon^{knm}\epsilon^{jpm}J^{np} = -i\sum_{np}(\delta^{kj}\delta^{np} - \delta^{kp}\delta^{nj})J^{np} = iJ^{jk}. \tag{3.30}$$

Finalmente, por la ecuación (3.27) se obtiene que

$$\left[J^k, J^j\right] = i\sum_{l}\epsilon^{kjl}J^l. \tag{3.31}$$

De este resultado se obtiene que los generadores J^k tienen el misma álgebra que el momento angular definido en mecánica cuántica no relativista. Sin embargo, esta relación no es suficiente para dar un interpretación a estos generadores, pues en la mecánica cuántica no relativista son conocidos tres operadores que satisfacen está álgebra, siendo estos el momento angular orbital, el momento angular intrínseco o espín, y el momento angular total.

Siguiendo con la búsqueda del álgebra de los generadores $\left\{J^k, K^j\right\}_{j,k}$, ahora se calcula el conmutador entre K^k y K^j:

$$\left[K^k, K^j\right] = [J^{0k}, J^{0j}] = iJ^{kj} \overset{(3.27)}{=} -i\sum_{l}\epsilon^{kjl}J^l \tag{3.32}$$

Y el conmutador entre J^k y K^j:

$$\begin{aligned}\left[J^k, K^j\right] &= -\frac{1}{2}\sum_{mn}\epsilon^{kmn}\left[J^{mn}, J^{0j}\right]\\ &= \frac{-i}{2}\sum_{mn}\epsilon^{kmn}\left(J^{m0}g^{nj} - J^{n0}g^{mj} - J^{mj}g^{n0} + J^{nj}g^{m0}\right)\\ &= \frac{i}{2}\sum_{mn}\epsilon^{kmn}\left(K^m g^{nj} - K^n g^{mj}\right).\end{aligned} \tag{3.33}$$

Intercambiando índices se obtiene

$$\begin{aligned}\left[J^k, K^j\right] &= \frac{i}{2}\left[\sum_{mn}\epsilon^{kmn}K^m g^{nj} - \sum_{nm}\epsilon^{knm}K^m g^{nj}\right] \\ &= i\sum_{m}\epsilon^{kjm}K^m. \end{aligned} \tag{3.34}$$

De este modo se han obtenido las álgebras de los nuevos generadores del grupo de Lorentz. Además se ha hecho evidente que los operadores J^k forman un álgebra cerrada pero los operadores *boost* no.

Continuando con la discusión de la interpretación de los generadores J^k, supongamos que $\psi(x)$ es una solución de (2.78), es decir que es un campo de n componentes. Una transformación de Lorentz Λ actúa sobre esta como

$$\psi(x) \longmapsto \psi'(x') = \mathcal{S}(\Lambda)\psi(x), \tag{3.35}$$

donde $\mathcal{S}(\Lambda) \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$.

Si la transformación de Lorentz es infinitesimal obtenemos

$$\mathcal{S}(I + \varepsilon\omega) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \tag{3.36}$$

Podemos relacionar este operador con la representación del grupo de Lorentz $\mathcal{D}$ mediante sus aplicaciones en el campo $\psi(x)$, esto es

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \mathcal{S}(\Lambda)\psi(x) \\ \mathcal{D}(\Lambda)\psi(x') &= \mathcal{S}(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \end{aligned} \tag{3.37}$$

Para una transformación infinitesimal

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)\psi(x') &= \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\psi(x' - \varepsilon\omega x') \\ &= \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\left(\mathbb{1} + \frac{1}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\right)\psi(x) \\ &= \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}\left[-i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + S^{\mu\nu}\right]\right)\psi(x) \end{aligned} \tag{3.38}$$

entonces

$$J^{\mu\nu} = -i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + S^{\mu\nu}. \tag{3.39}$$

Así, al definir

$$L^{\mu\nu} \equiv -i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) \tag{3.40}$$

podemos expresar los generadores de la representación $\mathcal{D}$ como

$$J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}. \tag{3.41}$$

Evidentemente $L^{\mu\nu}$ es antisimétrico en sus índices, por lo que definimos

$$L^k \equiv -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}L^{jl}. \tag{3.42}$$

En consecuencia, S^k también es antisimétrico en sus índices, así se define de manera análoga a

$$S^k \equiv -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}S^{jl}. \tag{3.43}$$

De estas definiciones se obtiene que

$$L^1 = -L^{23} = i(x^2\partial^3 - x^3\partial^2), \tag{3.44}$$
$$L^2 = -L^{31} = i(x^3\partial^1 - x^1\partial^3), \tag{3.45}$$
$$L^3 = -L^{12} = i(x^1\partial^2 - x^2\partial^1). \tag{3.46}$$

Evidentemente estos generadores son las componentes del operador momento angular orbital usado en la mecánica cuántica no relativista. Por consiguiente, satisfacen el álgebra

$$\left[L^k, L^j\right] = i\sum_{l}\epsilon^{kjl}L^l. \tag{3.47}$$

Luego, de la relación (3.41) se obtiene que

$$\begin{aligned} S^k &= -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}\left(J^{jl} - L^{jl}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}J^{jl} + \frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}L^{jl}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

por lo que los generadores S^k se relacionan con J^k y P^k por

$$J^k = L^k + S^k, \tag{3.49}$$

y como L^k y S^j conmutan para cualquier $j, k \in \{1,2,3\}$, esto debido a que S^k no depende de las coordenadas espacio-temporales, se obtiene de las álgebras de J^k y L^k que

$$\begin{aligned} \left[J^k, J^j\right] &= \left[L^k, L^j\right] + \left[S^k, S^j\right] \\ i\sum_{l}\epsilon^{kjl}J^l &= i\sum_{l}\epsilon^{kjl}L^l + \left[S^k, S^j\right], \end{aligned} \tag{3.50}$$

entonces

$$\left[S^k, S^j\right] = i\sum_{l}\epsilon^{kjl}S^l. \tag{3.51}$$

De este modo se ha encontrado que los generadores S^k satisfacen el mismo álgebra que las componentes del operador momento angular. Por esto y la ecuación (3.49) se espera que S^k sea una de las componentes del operador espín, y por ende J^k sería una de las componentes del momento angular total.

3.2. Generadores del grupo de Poincaré

3.2.1. Transformación de Poincaré

Hasta ahora se habían considerado transformaciones de Lorentz sin traslaciones, las transformaciones de coordenadas formadas por una transformación de Lorentz con una traslación espacio-tiempo

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{3.52}$$

son conocidas como las transformaciones de Poincaré. La importancia de las transformaciones de Poincaré es debido a que estas representan el cambio de referencia más general que sigue los postulados de la relatividad, por ende los fenómenos físicos deben ser invariantes frente a estas transformaciones.

Al ser el producto semidirecto del grupo de Lorentz $\mathfrak{L}$ y del grupo de traslaciones $\mathfrak{T}$, el conjunto de las transformaciones de Poincaré tiene la estructura de un grupo, el llamado *grupo de Poincaré*. Y sus elementos serán denotados por (Λ, a), de modo que la operación de composición en esta notación es

$$(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a'). \tag{3.53}$$

Ahora podemos hallar la inversa de (Λ, a) en esta notación donde el elemento neutro sería denotado por $(I, 0)$:

$$(\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + a') = (I, 0). \tag{3.54}$$

Entonces $(\Lambda, a)^{-1}$ es representado por $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$. En particular, para una transformación infinitesimal $(I + \varepsilon\omega, \varepsilon b)$, cuyas componentes son

$$(\delta^\mu{}_\nu + \varepsilon\omega^\mu{}_\nu, \varepsilon b^\mu) \tag{3.55}$$

donde ε es un infinitesimal, su inversa es denotada por $(I - \varepsilon\omega, -\varepsilon b)$.

3.2.2. Generadores del grupo de Poincaré

Si $\mathcal{D}(\Lambda, a)$ denota la aplicación de una representación $\mathcal{D}$ del grupo de Poincaré sobre la transformación (Λ, a), tenemos similar al caso de la representación del grupo de Lorentz que

$$\psi' = \mathcal{D}(\Lambda, a)\psi \tag{3.56}$$

y

$$\mathcal{D}(\Lambda, a)^{-1} = \mathcal{D}(\Lambda^{-1}, -a). \tag{3.57}$$

Entonces la aplicación de la representación $\mathcal{D}$ sobre esta transformación es

$$\mathcal{D}(I + \varepsilon\omega, \varepsilon b) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - i\varepsilon b_\mu P^\mu \tag{3.58}$$

y sobre su inversa es

$$\mathcal{D}^{-1}(I + \varepsilon\omega, \varepsilon b) = \mathcal{D}(I - \varepsilon\omega, -\varepsilon b) = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\varepsilon b_\mu P^\mu. \tag{3.59}$$

Siguiendo un procedimiento similar al caso de las transformaciones de Lorentz se obtiene el álgebra de los operadores del grupo de Poincaré. Para esto se desarrolla:

$$\begin{aligned}
\left[\Lambda^{-1}(\omega a+b)\right]_\alpha &= g_{\alpha\beta}\left[\Lambda^{-1}(\omega a+b)\right]^\beta \\
&= g_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})^\beta{}_\mu \omega^\mu{}_\nu a^\nu + g_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1})^\beta{}_\gamma b^\gamma \\
&= g_{\alpha\beta} g^{\beta\rho}\Lambda^\sigma{}_\rho g_{\sigma\mu}\omega^\mu{}_\nu a^\nu + g_{\alpha\beta}g^{\beta\sigma}\Lambda^\rho{}_\sigma g_{\rho\gamma} b^\gamma \\
&= \delta^\rho_\alpha \Lambda^\sigma{}_\rho \omega_{\sigma\nu} a^\nu + \delta^\sigma_\alpha \Lambda^\rho{}_\sigma g_{\rho\gamma} b^\gamma \\
&= \Lambda^\sigma{}_\alpha \omega_{\sigma\nu} a^\nu + \Lambda^\rho{}_\alpha b_\rho
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Entonces al usar la propiedad de composición de las representaciones del grupo de Poincaré se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)\mathcal{D}(I+\varepsilon\omega',\varepsilon b')\mathcal{D}(\Lambda,a) &= \mathcal{D}((\Lambda,a)^{-1}(I+\varepsilon\omega',\varepsilon b')(\Lambda,a)) \\
&= \mathcal{D}((\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a)(I+\varepsilon\omega',\varepsilon b')(\Lambda,a)) \\
&= \mathcal{D}(I+\varepsilon\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\varepsilon\Lambda^{-1}(\omega a+b)) \\
&= \mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\left[\Lambda^{-1}\omega\Lambda\right]_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i\varepsilon\left[\Lambda^{-1}(\omega a+b)\right]_\alpha P^\alpha \\
&= \mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\omega_{\mu\nu}J^{\rho\sigma} - i\varepsilon(\Lambda^\mu{}_\alpha\omega_{\mu\nu}a^\nu + \Lambda^\mu{}_\alpha b_\mu)P^\alpha \\
&= \mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}(\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} - 2\Lambda^\mu{}_\alpha a^\nu P^\alpha) - i\varepsilon b_\mu\Lambda^\mu{}_\alpha P^\alpha,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

y de la expansión de una transformación infinitesimal del grupo de Poincaré que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)\mathcal{D}(I+\varepsilon\omega',\varepsilon b')\mathcal{D}(\Lambda,a) &= \mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)\left(\mathbb{1}+\frac{i}{2}\varepsilon\omega'_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\varepsilon b'_\mu P^\mu\right)\mathcal{D}(\Lambda,a) \\
&= \mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\mathcal{D}(\Lambda,a) \\
&\quad - i\varepsilon\mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)b_\mu P^\mu\mathcal{D}(\Lambda,a)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Al comparar estas dos expresiones se obtienen las ecuaciones

$$\mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}\mathcal{D}(\Lambda,a) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma} - 2\Lambda^\mu{}_\alpha a^\nu P^\alpha \tag{3.63}$$

y

$$\mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)P^\mu\mathcal{D}(\Lambda,a) = \Lambda^\mu{}_\alpha P^\alpha. \tag{3.64}$$

En analogía con las transformaciones de Lorentz se considera que (Λ,a) es una transformación infinitesimal, es decir que esta formada por la composición de una transformación de Lorentz infinitesimal $I+\varepsilon\omega$ y una traslación infinitesimal εb. De este modo se obtiene para el lado izquierdo de (3.63) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}\mathcal{D}(\Lambda,a) &= \left(\mathbb{1}-\frac{i\varepsilon}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}+i\varepsilon b_\sigma P^\sigma\right)J^{\mu\nu}\left(\mathbb{1}+\frac{i\varepsilon}{2}\omega_{\gamma\rho}J^{\gamma\rho}-i\varepsilon b_\rho P^\rho\right) \\
&= J^{\mu\nu} - \frac{i\varepsilon}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}J^{\mu\nu} + i\varepsilon b_\sigma P^\sigma J^{\mu\nu} + \frac{i\varepsilon}{2}\omega_{\gamma\rho}J^{\mu\nu}J^{\gamma\rho} - i\varepsilon b_\rho J^{\mu\nu}P^\rho \\
&= J^{\mu\nu} + \frac{i\varepsilon}{2}\omega_{\alpha\beta}\left[J^{\mu\nu},J^{\alpha\beta}\right] + i\varepsilon b_\sigma\left[P^\sigma,J^{\mu\nu}\right]
\end{aligned} \tag{3.65}$$

y para el lado derecho

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)J^{\mu\nu}\mathcal{D}(\Lambda,a) &= (\delta^\mu_\rho+\varepsilon\omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu_\sigma+\varepsilon\omega^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma})-2(\delta^\mu_\alpha+\varepsilon\omega^\mu{}_\alpha)\varepsilon b^\nu P^\alpha\\ &= J^{\mu\nu}+\varepsilon\omega^\mu{}_\rho J^{\rho\nu}+\varepsilon\omega^\nu{}_\sigma J^{\mu\sigma}-2\varepsilon b^\nu P^\mu\\ &= J^{\mu\nu}+\varepsilon g^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\rho}J^{\rho\nu}+\varepsilon g^{\nu\beta}\omega_{\beta\sigma}J^{\mu\sigma}-2\varepsilon g^{\nu\sigma}b_\sigma P^\mu\\ &= J^{\mu\nu}+\varepsilon\omega_{\alpha\beta}(g^{\mu\alpha}J^{\beta\nu}+g^{\nu\alpha}J^{\mu\beta})-2\varepsilon g^{\nu\sigma}b_\sigma P^\mu. \end{aligned} \tag{3.66}$$

De los que se obtienen las relaciones:

$$[P^\sigma, J^{\mu\nu}] = 2ig^{\nu\sigma}P^\mu. \tag{3.67}$$

y

$$\left[J^{\mu\nu}, J^{\alpha\beta}\right]\omega_{\alpha\beta} = -2i(g^{\mu\alpha}J^{\beta\nu}+g^{\nu\alpha}J^{\mu\beta})\omega_{\alpha\beta}, \tag{3.68}$$

usando la antisimetría en los índices de $J^{\mu\nu}$ se obtiene

$$\left[J^{\mu\nu}, J^{\alpha\beta}\right]\omega_{\alpha\beta} = i(g^{\mu\alpha}J^{\nu\beta}\omega_{\alpha\beta}-g^{\mu\alpha}J^{\beta\nu}\omega_{\alpha\beta}-g^{\nu\alpha}J^{\mu\beta}\omega_{\alpha\beta}+g^{\nu\alpha}J^{\beta\mu}\omega_{\alpha\beta}), \tag{3.69}$$

entonces al intercambiar los índices α y β, y de la antisimetría de $\omega_{\mu\nu}$ se obtiene que

$$\left[J^{\mu\nu}, J^{\alpha\beta}\right] = i(g^{\mu\alpha}J^{\nu\beta}-g^{\mu\beta}J^{\nu\alpha}-g^{\nu\alpha}J^{\mu\beta}+g^{\nu\alpha}J^{\mu\alpha}). \tag{3.70}$$

Además, del lado izquierdo de la ecuación (3.64) se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)P^\mu\mathcal{D}(\Lambda,a) &= \left(\mathbb{1}-\frac{i\varepsilon}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}+i\varepsilon b_\sigma P^\sigma\right)P^\mu\left(\mathbb{1}+\frac{i\varepsilon}{2}\omega_{\gamma\beta}J^{\gamma\beta}-i\varepsilon b_\nu P^\nu\right)\\ &= P^\mu-\frac{i\varepsilon}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma}P^\mu+i\varepsilon b_\sigma P^\sigma P^\mu+\frac{i\varepsilon}{2}\omega_{\gamma\beta}P^\mu J^{\gamma\beta}-i\varepsilon b_\nu P^\mu P^\nu\\ &= P^\mu+\frac{i\varepsilon}{2}\omega_{\rho\sigma}\left[P^\mu, J^{\rho\sigma}\right]+i\varepsilon b_\nu\left[P^\nu, P^\mu\right] \end{aligned} \tag{3.71}$$

y del lado derecho

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{-1}(\Lambda,a)P^\mu\mathcal{D}(\Lambda,a) &= (\delta^\mu_\alpha+\varepsilon\omega^\mu{}_\alpha)P^\alpha\\ &= P^\mu+\varepsilon g^{\mu\beta}\omega_{\beta\alpha}P^\alpha. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Entonces

$$[P^\nu, P^\mu] = 0 \tag{3.73}$$

y

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = -2ig^{\mu\rho}P^\sigma. \tag{3.74}$$

De estos resultados se nota que se obtuvieron dos resultados distintos (3.67) y (3.74) para el conmutador de los generadores P^σ y $J^{\mu\nu}$. Para demostrar que ambas representaciones son iguales, se usa el hecho de que $J^{\mu\nu}$ es antisimétrico en sus índices, por lo que partiendo de (3.67) se obtiene

$$\begin{aligned}[P^\sigma, J^{\mu\nu}] &= \frac{1}{2}\left([P^\sigma, J^{\mu\nu}]-[P^\sigma, J^{\nu\mu}]\right)\\ &= ig^{\nu\sigma}P^\mu-ig^{\mu\sigma}P^\nu. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Si el punto de partida fuera (3.74) se obtiene

$$\begin{aligned}[P^\sigma, J^{\mu\nu}] &= \frac{1}{2}\left([P^\sigma, J^{\mu\nu}] - [P^\sigma, J^{\nu\mu}]\right) \\ &= -ig^{\mu\sigma}P^\nu + ig^{\nu\sigma}P^\mu. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Así se ha demostrado la equivalencia entre estas expresiones. De este modo se han hallado las álgebras del grupo de Poincaré

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(J^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - J^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - J^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + J^{\nu\sigma}g^{\mu\rho}), \tag{3.77}$$

$$[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = i(P^\rho g^{\mu\sigma} - P^\sigma g^{\mu\rho}), \tag{3.78}$$

$$[P^\mu, P^\rho] = 0. \tag{3.79}$$

Se puede notar que el álgebra de los operadores $J^{\mu\nu}$ es cerrada, al igual que el álgebra de los generadores P^μ, pero no se puede separar el grupo de Poincaré en los grupos formados por ambos generadores independientemente, pues estos no conmutan.

De forma análoga a como se hizo para los generadores del grupo de Lorentz se definen J^k y K^k, es decir que estos están dados por

$$J^k \equiv -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}J^{jl} \quad \text{y} \quad K^k \equiv J^{0k}. \tag{3.80}$$

Estos generadores siguen el mismo álgebra hallada en la sección anterior, pues son los generadores del grupo de Lorentz. Para hallar el álgebra de los nuevos generadores del grupo de Poincaré se necesitan hallar los conmutadores entre los operadores momento angular y boost, y los generadores del grupo de traslaciones. Así los conmutadores entre J^k y P^μ son:

$$\begin{aligned}\left[J^k, P^j\right] &= -\frac{1}{2}\sum_{m,n}\epsilon^{kmn}\left[J^{mn}, P^j\right] = -\frac{1}{2}\sum_{m,n} i\epsilon^{kmn}(P^n g^{jm} - P^m g^{jn}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sum_{n,m} i\epsilon^{knm}P^m g^{jn} + \sum_{m,n} i\epsilon^{kmn}P^m g^{jn}\right) = -\sum_{m,n} i\epsilon^{kmn}P^m\delta^{jn} \\ &= i\sum_m \epsilon^{kjm}P^m, \end{aligned} \tag{3.81}$$

y

$$\left[J^k, P^0\right] = -\frac{1}{2}\sum_{m,n}\epsilon^{kmn}\left[J^{mn}, P^0\right] = -\frac{1}{2}\sum_{m,n} i\epsilon^{kmn}(P^n g^{0m} - P^m g^{0n}) = 0. \tag{3.82}$$

Los conmutadores entre K^k y P^j son:

$$\left[K^k, P^j\right] = \left[J^{0k}, P^j\right] = i(P^k g^{j0} - P^0 g^{jk}) = iP^0\delta^{jk}, \tag{3.83}$$

y entre K^k y P^0:

$$\left[K^k, P^0\right] = \left[J^{0k}, P^0\right] = i(P^k g^{00} - P^0 g^{0k}) = iP^k. \tag{3.84}$$

Ahora de forma análoga al caso del grupo de Lorentz, se define $\mathcal{S}(\Lambda)$ como

$$\psi'(x') \equiv \mathcal{S}(\Lambda)\psi(x). \tag{3.85}$$

De esta definición se obtiene

$$\mathcal{D}(\Lambda, a)\psi(x') = \mathcal{S}(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}(x' - a)), \tag{3.86}$$

y evaluando para una transformación infinitesimal $(I + \varepsilon\omega, \varepsilon b)$ tenemos

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)\psi(x') &= \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\psi((I - \varepsilon\omega)(x' - \varepsilon b)) \\ &= \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\psi(x' - \varepsilon(\omega x' + b)),\end{aligned} \tag{3.87}$$

de modo que al usar la expansión de Taylor se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)\psi(x') &= \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\left(\mathbb{1} + \frac{\varepsilon}{2}\omega_{\mu\nu}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + \varepsilon b_\mu\partial^\mu\right)\psi(x') \\ &= \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\mu\nu}\left[-i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + S^{\mu\nu}\right] + \varepsilon b_\mu\partial^\mu\right)\psi(x').\end{aligned} \tag{3.88}$$

De esta relación se observa que los generadores $J^{\mu\nu}$ y $S^{\mu\nu}$ se relacionan de la misma forma que para el grupo de Lorentz, es decir:

$$J^{\mu\nu} = -i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + S^{\mu\nu}. \tag{3.89}$$

Además los generadores de las traslaciones son representados por

$$P^\mu = i\partial^\mu, \tag{3.90}$$

lo cual concuerda con la definición de los operadores momentum y energía.

3.2.3. Invariantes relativistas

De los generadores de las traslaciones se define el operador

$$P^2 \equiv P_\mu P^\mu, \tag{3.91}$$

el cual recordando que la ecuación relativista se representa por una ecuación similar a la ecuación de Klein-Gordon (2.61), tiene como autovalor al cuadrado de la masa de una partícula m. Además, ya que no existen partículas con masa negativa podemos asociar al operador P^2 con la masa de una partícula.

Evidentemente el operador P^2 conmuta con los generadores P^μ, pero esto no es tan sencillo al evaluar la conmutación con los generadores $J^{\mu\nu}$. Para hallar esta relación usamos la propiedad

$$[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B \tag{3.92}$$

y el álgebra de los generadores (3.78). Así

$$\begin{aligned}\left[P^2, J^{\mu\nu}\right] &= P_\sigma\left[P^\sigma, J^{\mu\nu}\right] + \left[P^\sigma, J^{\mu\nu}\right]P_\sigma \\ &= iP_\sigma(P^\mu g^{\sigma\nu} - P^\nu g^{\sigma\mu}) + i(P^\mu g^{\sigma\nu} - P^\nu g^{\sigma\mu})P_\sigma,\end{aligned} \tag{3.93}$$

y al usar la relación de conmutación de los generadores P^{μ}, por ende de P_{μ}, se reduce a

$$\begin{aligned} \left[P^2, J^{\mu\nu}\right] &= 2iP_{\sigma}P^{\mu}g^{\sigma\nu} - 2iP_{\sigma}P^{\nu}g^{\sigma\mu} \\ &= 2i\left[P^{\nu}, P^{\mu}\right] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Con esto se ha comprobado que el operador de masa P^2 conmuta con todos los generadores del grupo de Poincaré, por lo que es un operador de Casimir.

Ahora se define el cuadrivector de Pauli-Lubanski [1]

$$W_{\mu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^{\sigma}, \tag{3.95}$$

y al aplicar $g^{\alpha\mu}$ se obtiene

$$W^{\alpha} = g^{\alpha\mu}W_{\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^{\sigma}. \tag{3.96}$$

Habiendo hecho esto, se define el operador W^2 como

$$W^2 \equiv W_{\mu}W^{\mu} \tag{3.97}$$

De igual forma que para el operador P^2 se busca determinar que este commuta con los generadores del grupo de Poincaré para determinar si es un operador de Casimir. Para esto se calcula primero el conmutador entre W^{α} y los generadores P^{β} y $J^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \left[W^{\alpha}, P^{\beta}\right] &= \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left[J^{\nu\rho}P^{\sigma}, P^{\beta}\right] \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(J^{\nu\rho}\left[P^{\sigma}, P^{\beta}\right] - \left[P^{\beta}, J^{\nu\rho}\right]P^{\sigma}\right) \\ &= -\frac{i}{2}g^{\alpha\mu}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(P^{\nu}g^{\beta\rho} - P^{\rho}g^{\beta\nu}\right)P^{\sigma} \end{aligned} \tag{3.98}$$

Haciendo un cambio de los índices $\rho \to \nu$ y $\nu \to \rho$ para el segundo término del lado derecho se obtiene

$$\begin{aligned} \left[W^{\alpha}, P^{\beta}\right] &= -\frac{i}{2}g^{\alpha\mu}(\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^{\nu}g^{\beta\rho}P^{\sigma} - \epsilon_{\mu\rho\nu\sigma}P^{\nu}g^{\beta\rho}P^{\sigma}) \\ &= -\frac{i}{2}g^{\alpha\mu}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}g^{\beta\rho}\left[P^{\nu}, P^{\sigma}\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Con este resultado se puede hallar que

$$\begin{aligned} \left[W^2, P^{\beta}\right] &= \left[W_{\mu}W^{\mu}, P^{\beta}\right] = W_{\mu}\left[W^{\mu}, P^{\beta}\right] + \left[W_{\mu}, P^{\beta}\right]W^{\mu} \\ &= W_{\mu}\left[W^{\mu}, P^{\beta}\right] + g_{\mu\alpha}\left[W^{\alpha}, P^{\beta}\right]W^{\mu} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.100}$$

[1] Asumiremos que el símbolo de Levi-Civita para 4 índices es tal que $\epsilon^{0123} = 1$, por ende $\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123}$.

y

$$\begin{aligned}
\left[W^2, P^2\right] &= \left[W_\mu W^\mu, P_\nu P^\nu\right] \\
&= W_\mu \left[W^\mu, P_\nu\right] P^\nu + \left[W_\mu, P_\nu\right] W^\mu P^\nu + P_\nu W_\mu \left[W^\mu, P^\nu\right] + P_\nu \left[W_\mu, P^\nu\right] W^\mu \\
&= g_{\nu\rho} W_\mu \left[W^\mu, P^\rho\right] P^\nu + g_{\mu\sigma} g_{\nu\gamma} \left[W^\sigma, P^\gamma\right] W^\mu P^\nu + P_\nu W_\mu \left[W^\mu, P^\nu\right] \\
&\quad + g_{\mu\varrho} P_\nu \left[W^\varrho, P^\nu\right] W^\mu \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Luego de haber hallado que W^2 conmuta con los generadores de las traslaciones, queda verificar si este conmuta con los generadores $J^{\mu\nu}$. Para esto se sigue el procedimiento dado en Rischke [17]. En este se define el operador antisimétrico

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\rho\sigma}. \tag{3.102}$$

Este nuevo operador permite expresar el operador de Pauli-Lubanski como

$$\begin{aligned}
P^\nu \tilde{J}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu J^{\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Big(J^{\rho\sigma} P^\nu + \left[P^\nu, J^{\rho\sigma}\right] \Big) \\
&= W_\mu + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (g^{\nu\rho} P^\sigma - g^{\nu\sigma} P^\rho) = W_\mu.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Además, usando la identidad [2]

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 2(g^\alpha_\sigma g^\beta_\rho - g^\alpha_\rho g^\beta_\sigma) \tag{3.106}$$

se puede expresar el operador $J^{\mu\nu}$ en función de $\tilde{J}^{\mu\nu}$:

$$-\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{J}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (g^\alpha_\rho g^\beta_\sigma - g^\alpha_\sigma g^\beta_\rho) J^{\rho\sigma} = J^{\alpha\beta}. \tag{3.107}$$

Luego calculamos el conmutador:

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{J}^{\rho\sigma}, J^{\mu\nu}\right] &= \frac{1}{2} \epsilon^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \left[J^{\alpha\beta}, J^{\mu\nu}\right] \\
&= \frac{i}{2} \epsilon^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} \left(g^{\beta\mu} J^{\alpha\nu} - g^{\alpha\mu} J^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} J^{\mu\beta} + g^{\beta\nu} J^{\mu\alpha} \right) \\
&= \frac{i}{2} \left(\epsilon^{\rho\sigma\alpha\mu} J_\alpha{}^\nu - \epsilon^{\rho\sigma\mu\beta} J_\beta{}^\nu - \epsilon^{\rho\sigma\nu\beta} J^\mu{}_\beta + \epsilon^{\rho\sigma\alpha\nu} J^\mu{}_\alpha \right) \\
&= -i \left(\epsilon^{\rho\sigma\mu\alpha} J_\alpha{}^\nu - \epsilon^{\rho\sigma\nu\alpha} J_\alpha{}^\mu \right).
\end{aligned} \tag{3.108}$$

[2]Debido a la antisimetría de $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ se tiene que sigue la regla de contracción

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\tau\rho\sigma} = g^\nu{}_\tau (g^\alpha{}_\sigma g^\beta{}_\rho - g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\sigma) + g^\nu{}_\rho (g^\alpha{}_\tau g^\beta{}_\sigma - g^\alpha{}_\sigma g^\beta{}_\tau) + g^\nu{}_\sigma (g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\tau - g^\alpha{}_\tau g^\beta{}_\rho). \tag{3.104}$$

Contrayendo el segundo índice:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4(g^\alpha{}_\sigma g^\beta{}_\rho - g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\sigma) + g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\sigma - g^\alpha{}_\sigma g^\beta{}_\rho + g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\sigma - g^\alpha{}_\sigma g^\beta{}_\rho \\
&= 2(g^\alpha{}_\sigma g^\beta{}_\rho - g^\alpha{}_\rho g^\beta{}_\sigma).
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Reemplazando (3.107) en esta igualdad se obtiene

$$\begin{aligned}\left[\tilde{J}^{\rho\sigma}, J^{\mu\nu}\right] &= \frac{i}{2}\left(\epsilon^{\rho\sigma\mu\alpha}\epsilon_{\alpha}{}^{\nu\beta\gamma} - \epsilon^{\rho\sigma\nu\alpha}\epsilon_{\alpha}{}^{\mu\beta\gamma}\right)\tilde{J}_{\beta\gamma}\\ &= -\frac{i}{2}\Bigg(g^{\mu\nu}(g^{\rho\gamma}g^{\sigma\beta} - g^{\rho\beta}g^{\sigma\gamma}) + g^{\mu\beta}(g^{\rho\nu}g^{\sigma\gamma} - g^{\rho\gamma}g^{\sigma\nu}) + g^{\mu\gamma}(g^{\rho\beta}g^{\rho\nu} - g^{\rho\nu}g^{\sigma\beta})\\ &\quad - g^{\nu\mu}(g^{\rho\gamma}g^{\sigma\beta} - g^{\rho\beta}g^{\sigma\gamma}) - g^{\nu\beta}(g^{\rho\mu}g^{\sigma\gamma} - g^{\rho\gamma}g^{\sigma\mu}) + g^{\nu\gamma}(g^{\rho\beta}g^{\sigma\mu} - g^{\rho\mu}g^{\sigma\beta})\Bigg)\tilde{J}_{\beta\gamma},\end{aligned} \tag{3.109}$$

y usando la antisimetría de $\tilde{J}^{\mu\nu}$ se reduce a

$$\begin{aligned}\left[\tilde{J}^{\rho\sigma}, J^{\mu\nu}\right] &= -i\Big(g^{\rho\nu}\tilde{J}^{\mu\sigma} - g^{\rho\mu}\tilde{J}^{\nu\sigma} - g^{\sigma\nu}\tilde{J}^{\mu\rho} + g^{\sigma\mu}\tilde{J}^{\nu\rho}\Big)\\ &= i(g^{\sigma\mu}\tilde{J}^{\rho\nu} - g^{\rho\mu}\tilde{J}^{\sigma\nu} - g^{\rho\nu}\tilde{J}^{\mu\sigma} + g^{\sigma\nu}\tilde{J}^{\mu\rho}),\end{aligned} \tag{3.110}$$

es decir que el operador $\tilde{J}^{\mu\nu}$ tiene la misma regla de conmutación que $J^{\mu\nu}$.

De este modo, usando (3.103) se calcula el conmutador:

$$[W^{\alpha}, J^{\mu\nu}] = \left[P_{\beta}\tilde{J}^{\alpha\beta}, J^{\mu\nu}\right] = P_{\beta}\left[\tilde{J}^{\alpha\beta}, J^{\mu\nu}\right] + g_{\beta\rho}\left[P^{\rho}, J^{\mu\nu}\right]\tilde{J}^{\alpha\beta}. \tag{3.111}$$

Esta igualdad se expande usando (3.110)

$$\begin{aligned}[W^{\alpha}, J^{\mu\nu}] &= iP_{\beta}(g^{\beta\mu}\tilde{J}^{\alpha\nu} - g^{\alpha\mu}\tilde{J}^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}\tilde{J}^{\mu\beta} + g^{\beta\nu}\tilde{J}^{\mu\alpha}) + ig_{\beta\rho}(g^{\rho\mu}P^{\nu} - g^{\rho\nu}P^{\mu})\tilde{J}^{\alpha\beta}\\ &= i(P^{\mu}\tilde{J}^{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}W^{\nu} - g^{\alpha\nu}W^{\mu} + P^{\nu}\tilde{J}^{\mu\alpha} - P^{\mu}\tilde{J}^{\alpha\nu})\\ &= i(g^{\alpha\mu}W^{\nu} - g^{\alpha\nu}W^{\mu}).\end{aligned} \tag{3.112}$$

De este resultado se puede hallar el commutador entre W^2 y $J^{\rho\sigma}$:

$$\begin{aligned}\left[W^2, J^{\rho\sigma}\right] &= W_{\mu}\left[W^{\mu}, J^{\rho\sigma}\right] + \left[W_{\mu}, J^{\rho\sigma}\right]W^{\mu}\\ &= W^{\mu}g_{\mu\alpha}\left[W^{\alpha}, J^{\rho\sigma}\right] + g_{\mu\beta}\left[W^{\beta}, J^{\rho\sigma}\right]W^{\mu}\\ &= iW^{\mu}g_{\mu\alpha}(g^{\alpha\rho}W^{\sigma} - g^{\alpha\sigma}W^{\rho}) + ig_{\mu\beta}(g^{\beta\rho}W^{\sigma} - g^{\beta\sigma}W^{\rho})W^{\mu}\end{aligned} \tag{3.113}$$

Usando la identidad

$$g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}, \tag{3.114}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\left[W^2, J^{\rho\sigma}\right] &= iW^{\mu}W^{\sigma}\delta^{\rho}_{\mu} - iW^{\mu}W^{\rho}\delta^{\sigma}_{\mu} + iW^{\sigma}W^{\mu}\delta^{\rho}_{\mu} - iW^{\rho}W^{\mu}\delta^{\sigma}_{\mu}\\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.115}$$

Con esto se ha demostrado que W^2 es un operador de Casimir, y que además conmuta con el operador P^2.

Resulta útil expresar W^2 en función de los generadores J^k. Primero calculamos la componente W^0:

$$\begin{aligned}W^0 &= \frac{1}{2}\epsilon_{0\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^{\sigma} = \frac{-1}{2}\sum_{\nu\rho\sigma}\epsilon^{0\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^{\sigma}\\ &= \frac{-1}{2}\sum_{mnl}\epsilon^{mnl}J^{mn}P^{l} = \vec{J}\cdot\vec{P}.\end{aligned} \tag{3.116}$$

Igualmente, la componente W^i será

$$\begin{aligned} W^i &= -\frac{1}{2}\epsilon_{i\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma \\ &= -\frac{1}{2}\left(\epsilon_{i0\rho\sigma}J^{0\rho}P^\sigma + \epsilon_{i\nu0\sigma}J^{\nu0}P^\sigma + \epsilon_{i\nu\rho0}J^{\nu\rho}P^0\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\rho\sigma}\epsilon^{i0\rho\sigma}J^{0\rho}P^\sigma + \sum_{\nu\sigma}\epsilon^{i\nu0\sigma}J^{\nu0}P^\sigma + \sum_{\nu\rho}\epsilon^{i\nu\rho0}J^{\nu\rho}P^0\right). \end{aligned} \tag{3.117}$$

Reordenando los índices se puede reducir al símbolo de Levi-Civita con tres índices:

$$\begin{aligned} W^i &= \frac{1}{2}\left(-\sum_{jk}\epsilon^{ijk}K^jP^k - \sum_{jk}\epsilon^{ijk}K^jP^k - \sum_{jk}\epsilon^{ijk}J^{jk}P^0\right) \\ &= -\sum_{jk}\epsilon^{ijk}K^jP^k + J^iP^0. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Así se obtiene al usar

$$\begin{aligned} \vec{L}.\vec{P} &= i(x^2\partial^3 - x^3\partial^2)i\partial^1 + i(x^3\partial^1 - x^1\partial^3)i\partial^2 + i(x^1\partial^2 - x^2\partial^1)i\partial^3 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.119}$$

que

$$W^0 = \vec{S}\cdot\vec{P} \quad y \quad \vec{W} = \vec{J}P^0 - \vec{K}\times\vec{P}. \tag{3.120}$$

Al considerar el sistema de referencia de la partícula, el operador momentum se anula, por lo que las componentes W^i se expresar como

$$W^0 = 0 \quad y \quad \vec{W} = m\vec{S}. \tag{3.121}$$

De este modo el operador W^2 será dado por

$$W^2 = (W^0)^2 - (\vec{W})^2 = -m^2\vec{S}^2. \tag{3.122}$$

Además como es un operador de Casimir, por ende un invariante relativista, entonces (3.122) es válida para cualquier sistema de referencia.

Recordemos que las componentes de $\vec{S}$ siguen el mismo álgebra que el operador momento angular en la mecánica cuántica no relativista, por lo que el operador $\vec{S}^{\,2}$ tiene como autovalores $s(s+1)$ [18]. Así los autovalores de W^2 son $-m^2s(s+1)$. Como m^2 es un invariante relativista, podemos asociar el valor espín de la partícula con el operador de Casimir W^2.

De los resultados obtenidos en esta sección, es evidente que P^2 se relaciona a la masa de la partícula, P^i a su momentum, P^0 a su energía, W^2 al espín y W^0 a la proyección del espín en el operador momentum. Para formar un conjunto completo de observables compatibles es necesario verificar que todos estos operadores conmutan entre sí. Se obtuvo previamente que los dos operadores de Casimir W^2 y P^2 conmutan, y junto a las relaciones de conmutación al ser W^2 y P^2 operadores de Casimir, lo único que queda por verificar es que W^0 conmuta con W^0 y P^2. Para ello se expresa W^0 como

$$W^0 = W_0 = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J^{ij}P^k, \tag{3.123}$$

para luego hallar

$$\left[W^2, W^0\right] = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left[J^{ij}P^k, W^2\right] = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\bigg(J^{ij}\left[P^k, W^2\right] + \left[J^{ij}, W^2\right]P^k\bigg) = 0 \tag{3.124}$$

y

$$\left[P^2, W^0\right] = \left[P_\mu P^\mu, W^0\right] = P_\mu\left[P^\mu, W^0\right] + \left[P_\mu, W^0\right]P_\mu = 0. \tag{3.125}$$

De este modo los operadores P^2, W^2, P^μ y W^0 permiten caracterizar el estado de una partícula.

Capítulo 4

Helicidad y quiralidad

En este capítulo se define el operador helicidad, y a partir de la covarianza de la ecuación de Dirac se halla la representación del operador espín. De este resultado, se expresa el operador helicidad en función de las matrices gamma, y se demuestra que el espín de las partículas descritas por la ecuación de Dirac es 1/2. Luego se define un nuevo conjunto completo de observables compatibles, de cuyos elementos se determinan sus autofunciones y las relaciones entre estas para hallar la solución general de la ecuación de Dirac. Usando la representación de Dirac se obtiene la representación de estas autofunciones y se evalúan en el límite no relativista para hallar su relación con los resultados de la mecánica cuántica no relativista.

Además, se determina la relación entre el operador quiralidad y la transformación de paridad, así como su aplicación en las soluciones de la ecuación de Dirac. Finalmente se evalúa la ecuación de Dirac en el caso no masivo, obteniéndose que la helicidad y la quiralidad son equivalentes en este caso.

4.1. Helicidad

4.1.1. Conjunto completo de observables compatibles

En el capítulo anterior se obtuvo que los operadores P^2, W^2, P^μ, W^0 permiten caracterizar el estado de una partícula. Sin embargo, se tiene que [1]

$$W^2 = -m^2\vec{S}^{\,2}, \tag{4.1}$$

y

$$P^2 = -\Box = m^2, \tag{4.2}$$

pues toda solución de la ecuación de Dirac satisface la ecuación $\Box + m^2 = 0$ debido al método de Umezawa, por el cual se obtuvo la ecuación de Dirac en la subsección 2.3.2. Por lo que estos operadores son proporcionales a la identidad, así no pudiendo ser observables, sino restricciones de la partícula. De este modo, solo los operadores P^μ y W^0 forman un conjunto completo de observables compatibles.

[1]En este capítulo se volverán a usar las unidades naturales: $c = \hbar = 1$.

Evidentemente los operadores $P^k = -i\partial_k$ son los operadores momentum, pero esto no es así para operador P^0. Para tener encontrar a que se relaciona este operador aplicamos el operador γ^0 a la ecuación de Dirac

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \\ &= (i\gamma^0\gamma^k\partial_k + i\partial_0 - m\gamma^0)\psi(x), \end{aligned} \tag{4.3}$$

obteniéndose de este modo que

$$H_D\psi(x) = i\partial_0\psi(x) \tag{4.4}$$

donde

$$H_D \equiv (-i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m\gamma^0). \tag{4.5}$$

es el Hamiltoniano de Dirac. Por lo que el operador P^0 permite calcular la energía de la partícula, ya que es equivalente al Hamiltoniano de Dirac.

Para hallar los autovalores del Hamiltoniano de Dirac notamos que

$$P^i f(p)e^{\pm ip\cdot x} = -if(p)\partial_i e^{\pm ip\cdot x} = \mp p_i f(p)e^{\pm ip\cdot x} \tag{4.6}$$

y

$$P^0 f(p)e^{\pm ip\cdot x} = if(p)\partial_0 e^{\pm ip\cdot x} = \mp E f(p)e^{\pm ip\cdot x}, \tag{4.7}$$

donde $f(p)$ depende solo del momentum. Aquí se obtiene que los autovalores con frecuencia negativa tiene una energía positiva y los autovalores con frecuencia positiva tienen energía negativa. Para hacer énfasis en la diferencia entre estos autovalores, denotamos estos como

$$u(p)e^{-ip\cdot x} \quad \text{y} \quad v(p)e^{ip\cdot x}. \tag{4.8}$$

Al aplicar el Hamiltoniano de Dirac en ellos se obtiene

$$\begin{aligned} H_D\left(u(p)e^{-ip\cdot x}\right) &= (\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{P} + m\gamma^0)u(p)e^{-ip\cdot x} \\ &= \gamma^0(\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m)u(p)e^{-ip\cdot x} \end{aligned} \tag{4.9}$$

y

$$\begin{aligned} H_D\left(v(p)e^{ip\cdot x}\right) &= (\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{P} + m\gamma^0)v(p)e^{ip\cdot x} \\ &= \gamma^0(-\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m)v(p)e^{ip\cdot x} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Al reemplazar en (4.4) y aplicar γ^0 se obtienen:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \tag{4.11}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0. \tag{4.12}$$

Así se han obtenidos las ecuaciones que deben satisfacer los autovalores del Hamiltoniano de Dirac.

Con respecto al operador W^0, este al depender del espín

$$W^0 = \vec{S}\cdot\vec{P}, \tag{4.13}$$

es necesario hallar la representación del espín para hallar sus autovalores. Para esto usamos la covariancia de la ecuación de Dirac y

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu\partial'_\nu. \tag{4.14}$$

Entonces expresando la ecuación de Dirac en otro sistema de referencia inercial se obtiene:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = (i\gamma^\mu\Lambda^\nu{}_\mu\partial'_\nu - m)\mathcal{S}^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0. \tag{4.15}$$

Aplicando $\mathcal{S}(\Lambda)$ por el lado izquierdo

$$\begin{aligned} 0 &= (i\mathcal{S}(\Lambda)\gamma^\mu\Lambda^\nu{}_\mu\partial'_\nu\mathcal{S}^{-1}(\Lambda) - m)\psi'(x') \\ &= (i\mathcal{S}(\Lambda)\gamma^\mu\Lambda^\nu{}_\mu\mathcal{S}^{-1}(\Lambda)\partial'_\nu - m)\psi'(x'). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Como la ecuación de Dirac debe tener la misma forma en ambos sistemas de referencia, al comparar con la ecuación de Dirac en las coordenadas x'_ν

$$(i\gamma^\nu\partial'_\nu - m)\psi'(x') = 0 \tag{4.17}$$

se obtiene que $\mathcal{S}$ debe satisfacer la relación

$$\gamma^\nu = \mathcal{S}(\Lambda)\gamma^\mu\Lambda^\nu{}_\mu\mathcal{S}^{-1}(\Lambda), \tag{4.18}$$

o equivalentemente

$$\mathcal{S}(\Lambda)^{-1}\gamma^\nu\mathcal{S}(\Lambda) = \gamma^\mu\Lambda^\nu{}_\mu. \tag{4.19}$$

Recordando que las componentes de $\vec{S}$ se construyen a partir de los generadores de $\mathcal{S}(\Lambda)$, evaluamos esta condición para una transformación infinitesimal $\Lambda = 1 + \varepsilon\omega$:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu(\delta^\nu{}_\mu + \varepsilon\omega^\nu{}_\mu) &= \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\right)\gamma^\nu\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right) \\ \gamma^\mu + \varepsilon\omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu &= \gamma^\mu - \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}\gamma^\nu + \frac{i}{2}\varepsilon\omega_{\alpha\beta}\gamma^\nu S^{\alpha\beta} \\ \omega^\nu{}_\mu\gamma^\mu &= \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\left[\gamma^\nu, S^{\rho\sigma}\right]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Realizando el cambio $\omega^\nu{}_\mu = g^{\nu\alpha}\omega_{\alpha\mu}$

$$\begin{aligned} i\omega_{\rho\sigma}\left[\gamma^\nu, S^{\rho\sigma}\right] &= 2g^{\nu\alpha}\omega_{\alpha\mu}\gamma^\mu \\ &= g^{\nu\rho}\omega_{\rho\sigma}\gamma^\sigma + g^{\nu\sigma}\omega_{\sigma\rho}\gamma^\rho \\ &= g^{\nu\rho}\omega_{\rho\sigma}\gamma^\sigma - g^{\nu\sigma}\omega_{\rho\sigma}\gamma^\rho. \end{aligned} \tag{4.21}$$

De este modo los generadores $S^{\rho\sigma}$ siguen la relación

$$i\left[\gamma^\nu, S^{\rho\sigma}\right] = g^{\nu\rho}\gamma^\sigma - g^{\nu\sigma}\gamma^\rho. \tag{4.22}$$

Con el fin de hallar $S^{\rho\sigma}$ evaluamos conmutador:

$$\begin{aligned} i\left[\gamma^\nu, \frac{-i}{4}\left[\gamma^\rho, \gamma^\mu\right]\right] &= \frac{1}{4}\gamma^\nu\left[\gamma^\rho, \gamma^\mu\right] - \frac{1}{4}\left[\gamma^\rho, \gamma^\mu\right]\gamma^\nu \\ &= \frac{1}{4}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu - \frac{1}{4}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho - \frac{1}{4}\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu + \frac{1}{4}\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu \\ &= \frac{1}{4}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \frac{1}{4}\gamma^\rho(\gamma^\nu\gamma^\mu - 2g^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho + \frac{1}{4}\gamma^\mu(2g^{\rho\nu} - \gamma^\nu\gamma^\rho) \\ &= \frac{1}{4}\left\{\gamma^\nu, \gamma^\rho\right\}\gamma^\mu - \frac{1}{4}\left\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\right\}\gamma^\rho - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\gamma^\rho + \frac{1}{2}g^{\rho\nu}\gamma^\mu \\ &= g^{\nu\rho}\gamma^\mu - g^{\nu\mu}\gamma^\rho. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Como satisface la relación dada, podemos afirmar que

$$S^{\rho\mu} = -\frac{i}{4}\left[\gamma^{\rho}, \gamma^{\mu}\right]. \tag{4.24}$$

y

$$\mathcal{S}(I + \varepsilon\omega) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\varepsilon\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \tag{4.25}$$

Al reemplazar (4.24) en

$$S^{k} = -\frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}S^{jl}, \tag{4.26}$$

se obtiene que las componentes de espín están dadas por

$$S^{k} = \frac{i}{8}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}\left[\gamma^{j}, \gamma^{l}\right]. \tag{4.27}$$

Estas componentes se pueden expresar en función de Σ, cuya definición y propiedades se encuentran en el apéndice C.1, como

$$S^{k} = \frac{1}{2}\Sigma^{k}. \tag{4.28}$$

Usando

$$(\Sigma^{k})^{2} = I, \tag{4.29}$$

se obtiene que

$$\vec{S}^{2} = \frac{3}{4}I = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)I. \tag{4.30}$$

Y como esta representación del espín se había obtenido de la covariancia de la ecuación de Dirac, esta restringida a esta, es decir que la ecuación de Dirac describe a partículas con espín $1/2$.

De este modo, el operador W^{0} está dado por

$$W^{0} = \vec{\Sigma}\cdot\vec{P}. \tag{4.31}$$

Sin embargo, este al representar en el espacio de momentos la proyección del momentum en la dirección del espín, dependerá de la magnitud del espín. Para tener un operador independiente de esta se define el operador helicidad como

$$\hat{h} \equiv \frac{W^{0}}{s\left|\vec{P}\right|} = \frac{\vec{S}\cdot\vec{P}}{s\left|\vec{P}\right|}, \tag{4.32}$$

donde s es el espín de la partícula y el denominador $\left|\vec{P}\right|$ representa que en el espacio de momentos estará normalizado. Con este operador se puede definir un nuevo conjunto completo de observables compatibles, dado por los operadores P^{μ} y $\hat{h}$. En este contexto, la helicidad representa la orientación del espín en la dirección de la partícula.

Además, al reeemplazar (4.28) en (4.32) se obtiene

$$\hat{h} = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}}{\left|\vec{P}\right|}. \tag{4.33}$$

4.1.2. Autofunciones de la helicidad

Para obtener las autofunciones de la helicidad, usamos la propiedad de anticonmutación de Σ^k dada en (C.15):

$$\hat{h}^2 = \sum_{k,j=1}^{3} \frac{\Sigma^k \Sigma^j P^k P^j}{\left|\vec{P}\right|^2} = \frac{(P^1)^2 + (P^2)^2}{\left|\vec{P}\right|^2} = I, \tag{4.34}$$

lo que implica que el operador helicidad tiene autovalores ± 1. De este modo junto al Hamiltoniano de Dirac tendremos que

$$u^{(h)}(p)e^{-ip\cdot x} \quad \text{y} \quad v^{(h)}(p)e^{ip\cdot x} \tag{4.35}$$

son las autofunciones de estos, donde h denota el autovalor de la helicidad al que corresponden. Estas satisfacen

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u^{(h)}(p) = 0, \tag{4.36}$$
$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v^{(h)}(p) = 0. \tag{4.37}$$

Reemplazando estos biespinores en la ecuación de autovalores de la helicidad:

$$\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}}{\left|\vec{P}\right|}\left(u^{(h)}(p)e^{-ip\cdot x}\right) = \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}u^{(h)}(p)e^{ip\cdot x} = hu^{(h)}(p)e^{-ip\cdot x} \tag{4.38}$$

y

$$\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{P}}{\left|\vec{P}\right|}\left(v^{(h)}(p)e^{-ip\cdot x}\right) = -\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}v^{(h)}(p)e^{ip\cdot x} = hv^{(h)}(p)e^{ip\cdot x}. \tag{4.39}$$

Entonces se cumple que

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}u^{(h)}(p) = hu^{(h)}(p), \tag{4.40}$$
$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}v^{(h)}(p) = -hv^{(h)}(p). \tag{4.41}$$

Como toda solución puede expresarse como una combinación de lineal de estos biespinores, tendremos que la solución general de la ecuación de Dirac tiene la forma

$$\psi(x,t) = \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}} \sum_{h=\pm 1}\left[a^{(h)}(p)u^{(h)}(p)e^{-ip\cdot x} + b^{(h)^*}(p)v^{(h)}(p)e^{ip\cdot x}\right]\mathrm{d}^3p \tag{4.42}$$

donde $a^{(h)}(p)$ y $b^{(h)}(p)$ son números complejos.

A partir de las ecuaciones (4.36) - (4.37) y las ecuaciones (4.40) - (4.41) se obtuvieron (ver Apéndice D):

$$\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^\mu u^{(h')}(p) = \overline{v^{(h)}}(p)\gamma^\mu v^{(h')}(p) = 2p^\mu \delta_{h,h'}, \tag{4.43}$$
$$u^{(h)^\dagger}(p)v^{(h')}(p_P) = v^{(h)^\dagger}(p)u^{(h')}(p_P) = 0, \tag{4.44}$$

donde

$$\overline{u^{(h)}}(p) = u^{(h)\dagger}(p)\gamma^0, \quad \overline{v^{(h)}}(p) = v^{(h)\dagger}(p)\gamma^0 \tag{4.45}$$

y $p_P = (p^0, -\vec{p})$.

Usando estas relaciones se pueden calcular los coeficientes $a^{(h)}(p)$, $b^{(h)}(p)$:

$$a^{(h)}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \int u^{(h)\dagger}(p)\psi(x)e^{ip\cdot x}\mathrm{d}^3x \tag{4.46}$$

$$b^{(h)}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \int \psi^{\dagger}(x)v^{(h)}(p)e^{ip\cdot x}\mathrm{d}^3x. \tag{4.47}$$

De este modo podemos expresar toda solución de la ecuación de Dirac en función de los biespinores $u^{(h)}(p)$ y $v^{(h)}(p)$, y obtener sus coeficientes a partir de las relaciones entre estos.

4.1.3. Representación de Dirac de la helicidad

La helicidad en la representación de Dirac está dada por

$$\hat{h} = \frac{1}{\left|\vec{P}\right|} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{P} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{P} \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

y el Hamiltoniano de Dirac (4.5) por

$$\begin{aligned} H_D &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{P} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma}\cdot\vec{P} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{P} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{P} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Evidentemente estos conmutan, tal y como se esperaba debido a que son observables compatibles.

Luego, expresamos las ecuaciones (4.40) (4.41) en la representación de Dirac:

$$\begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} u^{(h)}(p) = hu^{(h)}(p), \qquad \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} v^{(h)}(p) = -hv^{(h)}(p). \tag{4.50}$$

Así podemos expresar $u^{(h)}(p)$ y $v^{(h)}(p)$ como

$$u^{(h)}(p) = \begin{pmatrix} A\chi^{(h)}(\vec{p}) \\ B\chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v^{(h)}(p) = \begin{pmatrix} C\chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ D\chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \tag{4.51}$$

donde $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ y $\chi^{(h)}(\vec{p})$ satisface

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\chi^{(h)}(\vec{p}) = h\chi^{(h)}(\vec{p}). \tag{4.52}$$

De esta ecuación de autovalores se obtiene

$$\left(\chi^{(h)}(\vec{p})\right)^{\dagger} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} = h\left(\chi^{(h)}(\vec{p})\right)^{\dagger}, \tag{4.53}$$

el cual junto a la expresión anterior nos permite obtener

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\chi^{(-h)}(\vec{p})\right)^\dagger \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\chi^{(h)}(\vec{p}) - \left(\chi^{(-h)}(\vec{p})\right)^\dagger \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\chi^{(h)}(\vec{p}) \\
&= h\left(\chi^{(-h)}(\vec{p})\right)^\dagger \chi^{(h)}(\vec{p}) - (-h)\left(\chi^{(-h)}(\vec{p})\right)^\dagger \chi^{(h)}(\vec{p}) \\
&= 2h\left(\chi^{(-h)}(\vec{p})\right)^\dagger \chi^{(h)}(\vec{p}).
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Esto implica que $\chi^{(h)}(\vec{p})$ y $\chi^{(-h)}(\vec{p})$ son ortogonales, es decir

$$\left(\chi^{(-h)}(\vec{p})\right)^\dagger \chi^{(h)}(\vec{p}) = 0. \tag{4.55}$$

Ahora asumiremos que los autoestados $\chi^{(h)}(\vec{p})$ son ortonormales, por lo que

$$\left(\chi^{(h')}(\vec{p})\right)^\dagger \chi^{(h)}(\vec{p}) = \delta_{h,h'}. \tag{4.56}$$

Luego notamos que como $\chi^{(-h)}(-\vec{p})$ es un autovalor de $\vec{p}\cdot\vec{\sigma}/|\vec{p}\,|$, por lo que debe ser proporcional a $\chi^{(h)}(\vec{p})$:

$$\chi^{(-h)}(-\vec{p}) = \eta(\vec{p},h)\chi^{(h)}(\vec{p}). \tag{4.57}$$

Si cambiamos el signo de $\vec{p}$ y h de la última ecuación, obtendremos

$$\chi^{(h)}(\vec{p}) = \eta(-\vec{p},-h)\chi^{(-h)}(-\vec{p}). \tag{4.58}$$

Por lo que

$$\eta(-\vec{p},-h) = \eta^*(\vec{p},h). \tag{4.59}$$

Así al resolver (4.52) para $\vec{p} \neq -|\vec{p}|\hat{e}_3$ obtendremos que

$$\chi^{(+)}(\vec{p}\,) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix}\hat{p}_3+1\\ \hat{p}_1+i\hat{p}_2\end{pmatrix}, \quad \chi^{(-)}(\vec{p}\,) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix}-\hat{p}_1+i\hat{p}_2\\ \hat{p}_3+1\end{pmatrix}. \tag{4.60}$$

Para $\vec{p} = -|\vec{p}|\hat{e}_3$, la ecuación (4.52) es dada por

$$\sigma_3\chi^{(h)}(\vec{p}) = -h\chi^{(h)}(\vec{p}), \tag{4.61}$$

por lo que sus autovalores son

$$\chi^{(+)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \chi^{(-)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{4.62}$$

Para hallar los factores A, B, C, D dados en (4.51) tenemos que usar las ecuaciones (4.36) y (4.37). Usando el hecho de que

$$p_0 = E \quad \text{y} \quad p_i = -p^i, \tag{4.63}$$

para $i = 1,2,3$, estas ecuaciones se pueden expresar en la representación de Dirac como

$$\begin{pmatrix}E-m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -(E+m)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\chi^{(h)}(\vec{p})\\ B\chi^{(h)}(\vec{p})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{4.64}$$

y

$$\begin{pmatrix} E+m & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -(E-m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ D\chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.65}$$

Usando (4.52) y la relación $E^2 = p^2 + m^2$ obtenemos

$$\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi^{(h)}(\vec{p}) = h\sqrt{E^2 - m^2}\chi^{(h)}(\vec{p}). \tag{4.66}$$

De este modo de las ecuaciones (4.64) y (4.65) se obtiene los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} A(E-m) - hB\sqrt{E^2-m^2} &= 0 \\ hA\sqrt{E^2-m^2} - B(E+m) &= 0 \end{aligned} \tag{4.67}$$

y

$$\begin{aligned} C(E+m) + hD\sqrt{E^2-m^2} &= 0 \\ -hC\sqrt{E^2-m^2} - D(E-m) &= 0. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Al resolver estos se obtienen

$$A = \sqrt{E+m}, \quad B = h\sqrt{E-m}, \quad C = -\sqrt{E-m}, \quad D = h\sqrt{E+m}. \tag{4.69}$$

Entonces

$$u^{(h)}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\chi^{(h)}(\vec{p}) \\ h\sqrt{E-m}\chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad v^{(h)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E-m}\chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ h\sqrt{E+m}\chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \tag{4.70}$$

o de forma explícita para $\vec{p} \neq -|\vec{p}|\hat{e}_3$

$$u^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix} \\ \sqrt{\frac{E-m}{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad u^{(-)}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} \\ -\sqrt{\frac{E-m}{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{4.71}$$

$$v^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{E-m}{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{\frac{E+m}{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v^{(-)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{E-m}{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix} \\ -\sqrt{\frac{E+m}{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{4.72}$$

Y para $\vec{p} = -|\vec{p}|\hat{e}_3$:

$$u^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E-m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad u^{(-)}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\sqrt{E-m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{4.73}$$

$$v^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E-m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v^{(-)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E-m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -\sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{4.74}$$

4.1.4. Límite no relativista

En límite no relativista $|\vec{p}| \ll m$ se tiene que

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} = m^2 \left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right)^{1/2} \approx m + \frac{p^2}{2m}, \tag{4.75}$$

entonces

$$E + m \approx 2m, \quad E - m \approx \frac{p^2}{2m}. \tag{4.76}$$

Por lo que los espinores $u^{(h)}(p)$ expresados en la representación de Dirac en el límite relativista se expresan como

$$u^{(h)}(p) \approx \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi^{(h)}(\vec{p}) \\ h\dfrac{|\vec{p}|}{2m}\chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad v^{(h)}(p) \approx \sqrt{2m} \begin{pmatrix} -\dfrac{|\vec{p}|}{2m}\chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ h\chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}. \tag{4.77}$$

De estas observamos que las dos componentes superiores de $u_D^{(h)}(p)$ son mucho mayores que las dos componentes inferiores, por esto son llamadas *componentes grandes* y *componentes pequeñas*, respectivamente. De forma similar pero al revés se tienen componentes grandes y pequeñas para $v_D^{(h)}(p)$. Debido a estas propiedades es conveniente usar la representación de Dirac cuando se evalua un problema en el límite no relativista.

4.2. Quiralidad

4.2.1. Transformación de paridad

Una transformación de paridad es aquella que invierte la orientación de la parte espacial, así para un espacio-tiempo 3+1 dimensional se identifican dos transformaciones de paridad:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{P}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.78}$$

Estas cuatro transformaciones se relacionan por medio de una rotación de π en uno de los planos formados por los ejes espaciales. Además, por lo visto previamente en el capítulo 2, estas son elementos de $\mathfrak{L}_-^\uparrow$, es decir, son transformaciones ortócronas e impropias (ver apéndice B).

4.2.2. Quiralidad para el campo de Dirac libre

Al aplicar la transformación $\mathcal{P}_4$ en la ecuación de Dirac se obtiene que:

$$i(\gamma^0\partial_0 - \gamma^i\partial_i)\psi(t, -\vec{x}) = 0. \tag{4.79}$$

Usando las relaciones de anticonmutación de las matrices γ:

$$\begin{aligned}0 &= \gamma^0 i(\gamma^0\partial_0 - \gamma^i\partial_i)\psi(t,-\vec{x}) \\ &= i(\gamma^0\partial_0 + \gamma^i\partial_i)\gamma^0\psi(t,-\vec{x}).\end{aligned} \tag{4.80}$$

Por lo que la solución $\psi(t,-\vec{x})$ corresponde a una solución de la ecuación de Dirac, es decir

$$\tilde{\psi}(t,\vec{x}) = e^{i\eta}\gamma^0\psi(t,-\vec{x}) \tag{4.81}$$

donde $\eta \in \mathbb{C}$.

Se define el operador quiralidad

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{4.82}$$

el cual satisface las propiedades:

$$\{\gamma^5,\gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = I, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5. \tag{4.83}$$

A partir de la segunda de estas propiedades obtenemos que los autovalores de γ^5 son $+1$ y -1. Si todos los autovalores de γ^5 fueran iguales a ± 1 entonces $\pm I$, entonces por la propiedad de anticonmutación con las matrices γ^μ se obtendría que estas últimas son iguales a cero. Evidentemente si $\gamma^\mu = 0$ la ecuación de Dirac sería trivial, para tener una ecuación no trivial la matriz γ^5 debe tener autovalores $+1$ y -1, y no solo uno de estos. Entonces existen las autofunciones ψ_R y ψ_L, las cuales corresponden a los autovalores $+1$ y -1, respectivamente, es decir

$$\gamma^5\psi_R = +\psi_R, \tag{4.84}$$

$$\gamma^5\psi_L = -\psi_L. \tag{4.85}$$

Estos campos son llamados *right-handed* y *left-handed*, respectivamente.

La importancia del operador quiralidad es que al anticonmutar con γ^0, una transformación de paridad mapea a un campo *right-handed* a uno *left-handed*, y viceversa.

$$\begin{aligned}\gamma^5(\gamma^0\psi_R) &= -\gamma^0\gamma^5\psi_R = -(\gamma^0\psi_R), \\ \gamma^5(\gamma^0\psi_L) &= -\gamma^0\gamma^5\psi_L = +(\gamma^0\psi_L).\end{aligned} \tag{4.86}$$

Así se concluye que el operador quiralidad permite diferenciar la orientación de los campos.

Toda solución de la ecuación de Dirac ψ puede ser expresada en función de ψ_R y ψ_L si estas están dadas por

$$\psi_R = \frac{I+\gamma^5}{2}\psi, \tag{4.87}$$

$$\psi_L = \frac{I-\gamma^5}{2}\psi. \tag{4.88}$$

Esto es

$$\psi = \psi_R + \psi_L. \tag{4.89}$$

Así para hallar estas componentes de la solución ψ es conveniente los operadores proyección

$$P_R \equiv \frac{I+\gamma^5}{2}, \quad P_L \equiv \frac{I-\gamma^5}{2}, \tag{4.90}$$

los cuales cumplen las propiedades:

$$P_R + P_L = I, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0, \tag{4.91}$$

$$(P_R)^2 = P_R, \quad (P_L)^2 = P_L. \tag{4.92}$$

Habiendo definido estos operadores ahora a partir de la ecuación hallaremos una ecuación que relacione ψ_R y ψ_L:

$$\begin{aligned} \gamma^5(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0 \\ -(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\gamma^5\psi &= 0. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Entonces al sumar o restar esta expresión de la ecuación de Dirac se obtienen:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu)P_R\psi - mP_L\psi = 0, \tag{4.94}$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu)P_L\psi - mP_R\psi = 0, \tag{4.95}$$

o equivalentemente

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R = m\psi_L \tag{4.96}$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L = m\psi_R. \tag{4.97}$$

Las ecuaciones acopladas obtenidas muestran que las evoluciones espacio-tiempo de las componentes ψ_R y ψ_L se relacionan por la masa m de la partícula.

Usando la representación quiral (ver subsección C.2.2) tenemos que

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{4.98}$$

entonces

$$P_R = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{4.99}$$

Y si definimos

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix} \tag{4.100}$$

tendremos de las ecuaciones de evolución (4.96) y (4.97)

$$i\left[-\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\partial_0 + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}\partial_k\right]\begin{pmatrix} \chi_R \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 \\ \chi_L \end{pmatrix} \tag{4.101}$$

$$i\left[-\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\partial_0 + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}\partial_k\right]\begin{pmatrix} 0 \\ \chi_L \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \chi_R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.102}$$

que

$$i(\partial_0 + \vec{\sigma}\cdot\mathbf{\nabla})\chi_R = -m\chi_L, \tag{4.103}$$

$$i(\partial_0 - \vec{\sigma}\cdot\mathbf{\nabla})\chi_L = -m\chi_R. \tag{4.104}$$

4.2.3. Representación quiral de la helicidad

En la representación quiral se tiene que

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{4.105}$$

por lo que las ecuaciones (4.40) (4.41) están dadas por

$$\begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} u^{(h)}(p) = hu^{(h)}(p), \qquad \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} v^{(h)}(p) = -hv^{(h)}(p). \tag{4.106}$$

Así podemos expresar $u^{(h)}(p)$ y $v^{(h)}(p)$ como

$$u^{(h)}(p) = \begin{pmatrix} A'\chi^{(h)}(\vec{p}) \\ B'\chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v^{(h)}(p) = \begin{pmatrix} C'\chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ D'\chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \tag{4.107}$$

donde $A', B', C', D' \in \mathbb{C}$ y $\chi^{(h)}(\vec{p})$ satisface

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\chi^{(h)}(\vec{p}) = h\chi^{(h)}(\vec{p}). \tag{4.108}$$

Notamos que esta ecuación de autovalores es la misma que se obtuvo para la representación de Dirac (4.52), entonces para $\vec{p} \neq -|\vec{p}|\hat{e}_3$ se tiene que

$$\chi^{(+)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(-)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix}, \tag{4.109}$$

y para $\vec{p} = -|\vec{p}|\hat{e}_3$ que

$$\chi^{(+)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \chi^{(-)}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.110}$$

Luego, como en la representación quiral se tienen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.111}$$

al usar

$$p_0 = E \quad \text{y} \quad p_i = -p^i, \tag{4.112}$$

la ecuación (4.36) se expresa como

$$\begin{pmatrix} -m & -(E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}) \\ -(E - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'\chi^{(h)}(\vec{p}) \\ B'\chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.113}$$

De igual forma la relación (4.37) se expresa en la representación quiral como

$$\begin{pmatrix} m & -E - \vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ -E + \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'\chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ D'\chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.114}$$

Usando (4.108) y la relación $E^2 = p^2 + m^2$ obtenemos

$$\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi^{(h)}(\vec{p}) = h\sqrt{E^2 - m^2}\chi^{(h)}(\vec{p}), \tag{4.115}$$

la cual permite obtener los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} -mA' - (E + h|\vec{p}|)B' &= 0 \\ -(E - h|\vec{p}|)A' - mB' &= 0 \end{aligned} \tag{4.116}$$

y

$$\begin{aligned} mC' - (E - h|\vec{p}|)D' &= 0 \\ -(E + h|\vec{p}|)C' + mD' &= 0 \end{aligned} \tag{4.117}$$

Al resolverlos se obtienen:

$$A' = -\sqrt{E + h|\vec{p}|}, \quad B' = \sqrt{E - h|\vec{p}|}, \quad C' = -h\sqrt{E - h|\vec{p}|}, \quad D' = -h\sqrt{E + h|\vec{p}|}. \tag{4.118}$$

Entonces

$$u^{(h)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E + h|\vec{p}|}\chi^{(h)}(\vec{p}) \\ \sqrt{E - h|\vec{p}|}\chi^{(h)}(\vec{p}) \end{pmatrix} \tag{4.119}$$

y

$$v^{(h)}(p) = -h\begin{pmatrix} \sqrt{E - h|\vec{p}|}\chi^{(-h)}(\vec{p}) \\ \sqrt{E + h|\vec{p}|}\chi^{(-h)}(\vec{p}) \end{pmatrix}, \tag{4.120}$$

o de forma explícita para $\vec{p} = -|\vec{p}|\hat{e}_3$:

$$u^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{E+|\vec{p}|}{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix} \\ \sqrt{\frac{E-|\vec{p}|}{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad u^{(-)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{E-|\vec{p}|}{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{\frac{E+|\vec{p}|}{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{4.121}$$

$$v^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{E-|\vec{p}|}{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} \\ -\sqrt{\frac{E+|\vec{p}|}{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v^{(-)}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+|\vec{p}|}{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix} \\ \sqrt{\frac{E-|\vec{p}|}{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{4.122}$$

Y para $\vec{p} = -|\vec{p}|\hat{e}_3$

$$u^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E + |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E - |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad u^{(-)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E - |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E + |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{4.123}$$

$$v^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} -\sqrt{E - |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\sqrt{E + |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v^{(-)}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E + |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E - |\vec{p}|}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{4.124}$$

4.2.4. Campo de Dirac no masivo

Si consideramos partículas sin masa tenemos que

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_R = 0 \quad \text{y} \quad i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_L = 0, \tag{4.125}$$

es decir, los campos ψ_R y ψ_L están desacoplados. Eso permite que la dinámica de una partícula pueda ser determinada por solo una de las componentes.

Considerando la ecuación de Dirac para una partícula sin masa

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x,p) = 0, \tag{4.126}$$

y una solución $\psi(x,p)$ que es un autovalor del operador cuadrimomento

$$P^{\mu}\psi(x,p) = i\partial^{\mu}\psi(x,p) = p^{\mu}\psi(x,p) \tag{4.127}$$

con energía

$$p^0 = E = |\vec{p}|. \tag{4.128}$$

Entonces podemos expresar la ecuación de Dirac como

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma^{\mu}P_{\mu}\psi(x,p) \\ &= (\gamma^0 P^0 - \sum_k \gamma^k P^k)\psi(x,p) \\ &= (\gamma^0|\vec{p}| - \vec{\gamma}\cdot\vec{p})\psi(x,p), \end{aligned} \tag{4.129}$$

y al aplicar $\gamma^5\gamma^0$ por la izquierda obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma^5\psi(x,p) &= \gamma^5\gamma^0\frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi(x,p) \\ &= (\gamma^0\vec{\gamma}\gamma^5)\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi(x,p) \\ &= \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi(x,p). \end{aligned} \tag{4.130}$$

Así obtenemos que el operador helicidad es igual al operador quiralidad para el caso de partículas sin masa, de modo que se cumple

$$\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_R(x,p) = \psi_R(x,p), \tag{4.131}$$

$$\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_L(p,r) = -\psi_L(x,p). \tag{4.132}$$

Entonces el campo quiral $\psi_R(x,p)$ tiene helicidad positiva y el campo quiral $\psi_L(p,q)$ tiene helicidad negativa.

Reemplazando en (4.119) y (4.120) se obtienen

$$\begin{aligned} u^{(+)}(p) &= -\sqrt{2E}\begin{pmatrix}\chi^{(+)}(\vec{p})\\ 0\end{pmatrix}, \quad u^{(-)}(p) = \sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\ \chi^{(-)}(\vec{p})\end{pmatrix} \\ v^{(+)}(p) &= -\sqrt{2E}\begin{pmatrix}0\\ \chi^{(-)}(\vec{p})\end{pmatrix}, \quad v^{(-)}(p) = \sqrt{2E}\begin{pmatrix}\chi^{(+)}(\vec{p})\\ 0\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.133}$$

Como la expansión de Fourier de ψ_R y ψ_L está dada por

$$\psi_{R,L}(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)}(p) u^{(h)}_{R,L}(p) e^{-p\cdot x} + b^{(h)^*}(p) v^{(h)}_{R,L}(p) e^{ip\cdot x} \right] \mathrm{d}^3 p \tag{4.134}$$

tendremos que

$$\psi_R(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}} \left[a^{(+)}(p) u^{(+)}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{-^*}(p) v^{(-)}(p) e^{ip\cdot x} \right] \mathrm{d}^3 p, \tag{4.135}$$

$$\psi_L(x) = \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}} \left[a^{(-)}(p) u^{(-)}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{+^*}(p) v^{(+)}(p) e^{ip\cdot x} \right] \mathrm{d}^3 p. \tag{4.136}$$

Esto comprueba que las soluciones ψ_R y ψ_L son independientes para el caso no masivo. Además notamos que solo las dos componentes superiores de $\psi_R(x)$ son diferentes de cero y solo las componentes inferiores de $\psi_R(x)$ son diferentes de cero.

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas

Se obtuvo que los operadores W^2, P^2, P^μ y $\hat{h}$ permiten caracterizar a una partícula libre. Además, como W^2 y P^2 son proporcionales a la identidad no son observables válidos pero son propiedades intrínsecas de la partícula. De esto se sigue que los operadores P^μ y $\hat{h}$ forma un conjunto completo de observables compatibles, a partir de cuyas autofunciones y relaciones de ortogonalidad se puede determinar cualquier solución de la ecuación de Dirac. Además, la helicidad al depender explícitamente de $\vec{P}$,

$$\hat{h}\psi(x) = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{\left|\vec{P}\right|}\psi(x), \tag{5.1}$$

un cambio de referencia adecuado puede invertir el signo de la helicidad por lo que no es invariante frente a las transformaciones de Lorentz, así como lo son los invariantes relativistas W^2 y P^2.

La quiralidad al estar relacionada con la transformación de paridad, permite definir una idea de "orientación" en las soluciones de la ecuación de Dirac, la cual no está bien definida, pues sus estas componentes evolucionan por medio de dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas. Esto implica que, en general, la quiralidad no es una propiedad de las partículas libres.

Sin embargo, en el caso de una partícula sin masa, las componentes evolucionan independientemente, de modo pudiendo relacionar a la quiralidad con una propiedad de la partícula. Esto se verifica al obtener que en este caso la helicidad y la quiralidad son iguales. Además, al considerarse partículas no masivas, no existe un boost que permita invertir el signo de la helicidad, siendo así la helicidad válidad para cualquier sistema de referencia.

Una continuación de este trabajo es usar el método de Umezawa [4] para obtener otras ecuaciones relativistas, como la ecuación de Duffin-Kemmer-Petiau, y determinar mediante la covariancia de estas ecuaciones la representación del espín y la helicidad. Otro posible desarrollo es estudiar la helicidad y la quiralidad en presencia de interacciones con un campo [19].

Por último, otro tema de interés es evaluar el caso de la ecuación de Dirac en un espacio-tiempo 2+1 dimensional, la cual surge al describir la dinámica alrededor de los conos de Dirac en el grafeno Castro Neto, Guinea, Peres et al. [20]. En esta caso, es de interés estudiar la quiralidad y la helicidad, y su relación, así como se hizo en un espacio-tiempo 2+1 dimensional.

Apéndice A

Transformaciones de Galileo sobre la ecuación de Schrödinger

Un requisito de las leyes físicas es que si cambiamos el punto de vista con el que se observan los fenómenos físicos, las leyes de la naturaleza no deben cambiar. Como las leyes de la naturaleza están dadas por ecuaciones, en el caso de la mecánica cuántica no relativista es la ecuación de Schrödinger, el principio de simetría requiere que esta sean invariante para puntos de vista diferentes.

El análisis de las simetrías de la ecuación de Schrödinger se realiza para el caso de la partícula libre, es decir que en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ la función de onda de la partícula $\psi(\vec{x}, t)$ satisface

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{x}, t). \tag{A.1}$$

Si se realiza el cambio de referencia a el sistema de referencia $\mathcal{R}'$ por medio de la transformación

$$x'^i = \sum_{k=1}^{3} R^{ij}x^j + v^i t + a^i, \quad t' = t + b, \tag{A.2}$$

donde R^{ij} es un elemento de la matriz de rotación, el estado de la partícula será descrito por $\psi'(\vec{x}\,', t')$.

Debido a que dos funciones de onda son equivalentes bajo un factor e^{if}, donde $f \in \mathbb{R}$, se tiene que este término multiplicativo no afecta a la descripción del estado. A partir esto asumiremos que la nueva función de onda está relacionada con la anterior mediante

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{if(\vec{x}\,', t')}\psi'(\vec{x}\,', t'). \tag{A.3}$$

Para determinar si existe una función real $f(\vec{x}\,', t')$, de modo que $\psi'(\vec{x}\,', t')$ satisfaga la ecuación de Schrödinger, es decir que sea valida la relación (A.3), se nota que:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x'^j} + \frac{\partial t'}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial t'} = \sum_{j=1}^{3} R^{ji}\frac{\partial}{\partial x'^j}, \tag{A.4}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} R^{ji}\frac{\partial}{\partial x'^j}\right)\left(\sum_{k=1}^{3} R^{ki}\frac{\partial}{\partial x'^k}\right) = \sum_{i,j,k=1}^{3} R^{ji}(R^{-1})^{ik}\frac{\partial}{\partial x'^j}\frac{\partial}{\partial x'^k} \tag{A.5}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{3} \delta_{j,k}\frac{\partial}{\partial x'^j}\frac{\partial}{\partial x'^k} = \Delta' \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'^i} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \sum_{i=1}^{3} v^i\frac{\partial}{\partial x'^i} + \frac{\partial}{\partial t'} = \vec{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}' + \frac{\partial}{\partial t'}. \tag{A.7}$$

Por lo que al reemplazar en (A.1) se obtiene que

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} + i\hbar\vec{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}' + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta'\right)\left(e^{if(\vec{x}\,',t')}\psi'(\vec{x}\,',t')\right) = 0. \tag{A.8}$$

Expandiendo esta expresión:

$$\begin{aligned} 0 = &-\hbar\frac{\partial f(\vec{x}\,',t')}{\partial t'}e^{if(\vec{x}\,',t')}\psi'(\vec{x}\,',t') + i\hbar e^{if(\vec{x}\,',t')}\frac{\partial}{\partial t'}\psi'(\vec{x}\,',t') - \hbar\vec{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t'))e^{if(\vec{x}\,',t')} \\ &+ \hbar i e^{if(\vec{x}\,',t')}(\vec{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}')(\psi'(\vec{x}\,',t')) + \frac{\hbar^2\Delta' e^{if(\vec{x}\,',t')}}{2m}\psi'(\vec{x}\,',t') + \frac{\hbar^2 e^{if(\vec{x}\,',t')}}{2m}(\Delta'\psi'(\vec{x}\,',t')) \\ &+ \frac{i\hbar^2 e^{if(\vec{x}\,',t')}}{m}(\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t'))\cdot(\boldsymbol{\nabla}'\psi'(\vec{x}\,',t')). \end{aligned} \tag{A.9}$$

Además se desarrolla

$$\begin{aligned} \Delta' e^{if(\vec{x}\,',t')} &= \boldsymbol{\nabla}'\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}' e^{if(\vec{x}\,',t')}\right) = \boldsymbol{\nabla}'\cdot\left(e^{if(\vec{x}\,',t')}(i\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t'))\right) \\ &= e^{if(\vec{x}\,',t')}\boldsymbol{\nabla}'\cdot(i\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t')) - e^{if(\vec{x}\,',t')}(\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t'))\cdot(\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t')). \end{aligned} \tag{A.10}$$

Por lo que la expresión se reduce a

$$\begin{aligned} 0 = &\left(-\hbar\frac{\partial f(\vec{x}\,',t')}{\partial t'} + \frac{i\hbar^2}{2m}\Delta' f(\vec{x}\,',t') - \frac{\hbar^2}{2m}(\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t'))^2 - \hbar\vec{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t')\right)\psi'(\vec{x}\,',t') \\ &+ \left(i\hbar\vec{v} + \frac{i\hbar^2}{m}\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t')\right)\cdot(\boldsymbol{\nabla}'\psi'(\vec{x}\,',t')) + \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta'\right)\psi'(\vec{x}\,',t'). \end{aligned} \tag{A.11}$$

De esta ecuación se nota que el tercer término corresponde a la ecuación de Schrödinger en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$. Así, para que la ecuación se satisfaga en el ambos sistemas de referencia se debe cumplir que

$$-\hbar\frac{\partial f(\vec{x}\,',t')}{\partial t'} + \frac{i\hbar^2}{2m}\Delta' f(\vec{x}\,',t') - \frac{\hbar^2}{2m}(\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t'))^2 - \hbar\vec{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t') = 0, \tag{A.12}$$

$$\hbar\vec{v} + \frac{\hbar^2}{m}\boldsymbol{\nabla}' f(\vec{x}\,',t') = 0. \tag{A.13}$$

Integrando (A.13) se obtiene

$$f(\vec{x}\,', t') = -\frac{m}{\hbar}\vec{v} \cdot \vec{x}\,' + C(t'). \tag{A.14}$$

Reemplazando esta expresión en (A.12) se obtiene

$$-\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} C(t') + \frac{m}{2}\vec{v}\,^2 = 0. \tag{A.15}$$

Por lo que

$$f(\vec{x}\,', t') = \frac{1}{\hbar}\left(-m\vec{v} \cdot \vec{x}\,' + \frac{1}{2} m\vec{v}\,^2 t' + C\right), \tag{A.16}$$

y en consecuencia

$$\psi'(\vec{x}\,', t') = e^{\frac{i}{\hbar}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}\,' - \frac{1}{2}m\vec{v}\,^2 t' + C\right)}\psi(\vec{x}, t). \tag{A.17}$$

Este resultado determina que la transformación produce un factor de fase entre ambas funciones de onda, pero esto no es suficiente para garantizar que hay una simetría bajo esa transformación. Para esto es necesario que los resultados obtenidos al medir un observable sea el mismo para ambas funciones de onda.

El término C es aquel que contiene las constantes relacionadas con las traslaciones espaciales y temporales, así como con las rotaciones. Al no depender de $\vec{x}\,'$, no afecta los resultados de la medición de cualquier observable, lo cual permite afirmar que el sistema de la partícula libre tiene simetría de rotación y traslaciones espaciales y temporales. Los otros términos de la exponencial, al depender de la posición, no permiten afirmar directamente que existe una simetría. Para analizar estos términos, y en vista de las simetrías encontradas, nos restringimos a la transformación

$$x'^i = x^i + v^i t, \quad t' = t. \tag{A.18}$$

Es evidente que $\boldsymbol{\nabla}' = \boldsymbol{\nabla}$ por lo que al aplicar el operador momento a $\psi'(\vec{x}\,', t')$ se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\vec{p}}\,'\psi'(\vec{x}\,', t') &= e^{\frac{i}{\hbar}\left(m\vec{v}\cdot\vec{x}\,' - \frac{1}{2}m\vec{v}\,^2 t'\right)}\psi(\vec{x}, t) \\ &= m\vec{v}\psi(\vec{x}, t) + \hat{\vec{p}}\psi(\vec{x}, t). \end{aligned} \tag{A.19}$$

Entonces el valor medio del momentum está dado por

$$\left\langle \hat{\vec{p}} \right\rangle = m\vec{v} + \left\langle \hat{\vec{p}} \right\rangle, \tag{A.20}$$

por lo que no hay una simetría para esta transformación, pues el valor medio del momentum depende del sistema de referencia. Nótese que esta relación concuerda con el resultado clásico de una transformación de Galileo.

Apéndice B

Clasificación del grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz puede ser divido en dos componentes

$$\mathfrak{L}_+ = SO(1,3) = \left\{\Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g \wedge \det(\Lambda) = 1\right\} \tag{B.1}$$
$$\mathfrak{L}_- = \left\{\Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g \wedge \det(\Lambda) = -1\right\}. \tag{B.2}$$

Evidentemente $\mathfrak{L}_-$ no es grupo, pues no contiene a la identidad. Para demostrar que $\mathfrak{L}_+$ es un grupo se eligen dos elementos de este dados por Λ y $\bar{\Lambda}$. De estos se obtiene que

$$\det(\Lambda\bar{\Lambda}) = \det(\Lambda)\det(\bar{\Lambda}) = 1, \tag{B.3}$$

es decir $\Lambda\bar{\Lambda} \in \mathfrak{L}_+$. Además, de la definición del grupo $\mathfrak{L}$ se tiene que para todo $\Lambda \in \mathfrak{L}_+$ existe $\tilde{\Lambda}$ tal que $\Lambda\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}\Lambda = I$. De la propiedad de la determinante de un producto se obtiene que $\det(\tilde{\Lambda}) = 1$, por ende $\tilde{\Lambda} \in \mathfrak{L}_+$, es decir que todo elemento $\mathfrak{L}_+$ tiene una inversa. Todo esto prueba que $\mathfrak{L}_+$ es un subgrupo de $\mathfrak{L}$.

Otra posible separación del grupo de Lorentz está dada por las componentes

$$\mathfrak{L}^\uparrow = \left\{\Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g \wedge {\Lambda^0}_0 \geq 1\right\} \tag{B.4}$$
$$\mathfrak{L}_\downarrow = \left\{\Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g \wedge {\Lambda^0}_0 \leq -1\right\}. \tag{B.5}$$

Para demostrar que los elementos de $O(1,3)$ con ${\Lambda^0}_0 \geq 1$ forman un grupo se definen $\Lambda, \bar{\Lambda} \in O(1,3)$ los cuales satisfacen ${\Lambda^0}_0, {\bar{\Lambda}^0}_0 \geq 1$. Entonces el elemento $\tilde{\Lambda} = \Lambda\bar{\Lambda}$ satisface

$${\tilde{\Lambda}^0}_0 = {\Lambda^0}_0{\bar{\Lambda}^0}_0 + \sum_i {\Lambda^0}_i{\bar{\Lambda}^i}_0 \tag{B.6}$$

De (2.35) se obtiene que

$$g^{\mu\nu} = {\Lambda^\mu}_\rho g^{\rho\sigma}{\Lambda^\nu}_\sigma \tag{B.7}$$

donde $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Por lo que al fijar $\mu = \nu = 0$ se obtiene

$$({\Lambda^0}_0)^2 - \sum_i ({\Lambda^0}_i)^2 = 1 \tag{B.8}$$

Si se definen los vectores $\vec{x} = \Lambda^0{}_i \hat{e}_i$ y $\vec{y} = \bar{\Lambda}^i{}_0 \hat{e}_i$, al usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para un espacio vectorial euclideano

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})| \leq |\vec{x}||\vec{y}| \tag{B.9}$$

se obtiene

$$\left| \sum_i \Lambda^0{}_i \bar{\Lambda}^i{}_0 \right| \leq \sqrt{\sum_i \left(\Lambda^0{}_i\right)^2} \sqrt{\sum_i \left(\bar{\Lambda}^i{}_0\right)^2}. \tag{B.10}$$

Al reemplazar (2.43), (B.6) y (B.8) en esta desigualdad se obtienen

$$\tilde{\Lambda}^0{}_0 \geq \Lambda^0{}_0 \bar{\Lambda}^0{}_0 - \sqrt{\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - 1} \sqrt{\left(\bar{\Lambda}^0{}_0\right)^2 - 1} \tag{B.11}$$

y

$$\tilde{\Lambda}^0{}_0 \leq \Lambda^0{}_0 \bar{\Lambda}^0{}_0 + \sqrt{\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - 1} \sqrt{\left(\bar{\Lambda}^0{}_0\right)^2 - 1} \tag{B.12}$$

Ya que $\Lambda^0{}_0, \bar{\Lambda}^0{}_0 \geq 1$ se obtiene que $\tilde{\Lambda}^0{}_0 \geq 0$, pero todos los elementos de $O(1,3)$ cumplen que $\left|\tilde{\Lambda}^0{}_0\right| \geq 1$, entonces $\tilde{\Lambda}^0{}_0 \geq 1$.

Sea Λ sea un elemento de $O(1,3)$ tal que $\Lambda^0{}_0 \geq 1$. Entonces existe $\bar{\Lambda} \in O(1,3)$ tal que $\Lambda\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}\Lambda = I$, es decir $\bar{\Lambda}$ es el elemento inverso de Λ en el grupo $O(1,n)$. Si $\bar{\Lambda}^0{}_0 \leq -1$, entonces a partir de (B.12) para $\tilde{\Lambda} = I$ se obtiene que

$$1 \leq \Lambda^0{}_0 \bar{\Lambda}^0{}_0 + \sqrt{\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - 1} \sqrt{\left(\bar{\Lambda}^0{}_0\right)^2 - 1} \leq 0. \tag{B.13}$$

Esto es una contradicción, por lo que $\bar{\Lambda}^0{}_0 \geq 1$. Entonces los elementos de $O(1,3)$ con $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ forman un grupo, el cual será denotado por $O(1,3)^+$ o $\mathfrak{L}^\uparrow$.

De este modo se puede separar el grupo de Lorentz en cuatro componentes

$$\mathfrak{L}_+^\uparrow = SO^+(1,3) = \left\{\Lambda \in O(1,3) \mid \det(\Lambda) = 1 \wedge \Lambda^0{}_0 \geq 1\right\} \tag{B.14}$$

$$\mathfrak{L}_+^\downarrow = SO^-(1,3) = \left\{\Lambda \in O(1,3) \mid \det(\Lambda) = 1 \wedge \Lambda^0{}_0 \leq -1\right\} \tag{B.15}$$

$$\mathfrak{L}_-^\uparrow = \left\{\Lambda \in O(1,3) \mid \det(\Lambda) = -1 \wedge \Lambda^0{}_0 \geq 1\right\} \tag{B.16}$$

$$\mathfrak{L}_-^\downarrow = \left\{\Lambda \in O(1,3) \mid \det(\Lambda) = -1 \wedge \Lambda^0{}_0 \leq -1\right\} \tag{B.17}$$

Estos conjuntos están relacionados entre sí, en particular al grupo $SO^+(1,3)$, ya que son coconjuntos izquierdos de este. Para probar esto definimos las matrices $M \in \mathfrak{L}_+^\downarrow, N \in \mathfrak{L}_-^\uparrow, L \in \mathfrak{L}_-^\downarrow$. Usando la propiedad del determinante de un producto de matrices y las desigualdades (B.11), (B.12) se obtiene que para $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ se cumple $M\Lambda \in \mathfrak{L}_+^\downarrow$, $N\Lambda \in \mathfrak{L}_-^\uparrow$ y $L\Lambda \in \mathfrak{L}_-^\downarrow$. Esto solo demuestra que para la matriz M que $M\mathfrak{L}_+^\uparrow \in \mathfrak{L}_+^\downarrow$. Para demostrar la igualdad nos limitamos al caso $M^2 = I$, para el cual se tiene que si $\Lambda' \in \mathfrak{L}_+^\downarrow$ entonces $M\Lambda' \in \mathfrak{L}_+^\uparrow$, es decir que existe $\bar{\Lambda} \in \mathfrak{L}_+^\uparrow$ tal que $M\Lambda' = \bar{\Lambda}$. Ya que $M^2 = I$ se obtiene $\Lambda' = \bar{M}\Lambda$, es decir todo elemento de $\mathfrak{L}_+^\downarrow$ se puede expresar como un producto con M. De igual forma se puede demostrar esto para N y L, imponiendo que su cuadrado sea la identidad.

Esto demuestra que los otros elementos del grupo de Lorentz son coconjuntos izquierdos, es decir

$$\mathfrak{L}_+^\uparrow \uplus M\mathfrak{L}_+^\uparrow \uplus N\mathfrak{L}_+^\uparrow \uplus L\mathfrak{L}_+^\uparrow. \tag{B.18}$$

donde M, N, L son definidas como en la demostración.

Apéndice C

Propiedades de las matrices gamma

Las matrices gamma aparecen en la ecuación de Dirac y siguen el álgebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}. \tag{C.1}$$

Además la adjunta de estas satisface la relación

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \tag{C.2}$$

de la que se obtienen

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k. \tag{C.3}$$

En este capítulo se desarrollarán algunas de sus propiedades en los espacio-tiempo 3+1 y 2+1 dimensional con el fin de hallar sus posibles representaciones matriciales.

C.1. Álgebra de las matrices gamma

A partir del álgebra de las matrices gamma se puede generar el grupo

$$\begin{aligned} G_{3+1} =&\{\pm I, \pm\gamma^0, \pm\gamma^1, \pm\gamma^2, \pm\gamma^3, \pm\gamma^0\gamma^1, \pm\gamma^0\gamma^2, \pm\gamma^0\gamma^3, \pm\gamma^1\gamma^2, \pm\gamma^1\gamma^3, \\ &\pm\gamma^2\gamma^3, \pm\gamma^0\gamma^1\gamma^2, \pm\gamma^0\gamma^1\gamma^3, \pm\gamma^0\gamma^2\gamma^3, \pm\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \pm\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Se pueden definir otros operadores los cuales serán miembros de este grupo:

- Definimos γ^5 como

  $$\gamma^5 \equiv \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{C.5}$$

  De las propiedades de anticommutación hallamos

  $$\begin{aligned} \left\{\gamma^5, \gamma^0\right\} &= i\left\{\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\right\} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 + i\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = 0 \\ \left\{\gamma^5, \gamma^1\right\} &= i\left\{\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \gamma^1\right\} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1 + i\gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = 0 \\ \left\{\gamma^5, \gamma^2\right\} &= i\left\{\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \gamma^2\right\} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2 + i\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = 0 \\ \left\{\gamma^5, \gamma^3\right\} &= i\left\{\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\right\} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3 + i\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = 0 \end{aligned} \tag{C.6}$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma^5)^2 &= -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= -(-1)^4(-1)^2(-1)(\gamma^0)^2(\gamma^1)(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 \\
&= I
\end{aligned} \tag{C.7}
$$

$$
\begin{aligned}
(\gamma^5)^\dagger &= -i\gamma^{3^\dagger}\gamma^{2^\dagger}\gamma^{1^\dagger}\gamma^{0^\dagger} \\
&= -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 \\
&= i(-1)^3(-1)^2(-1)\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= \gamma^5
\end{aligned} \tag{C.8}
$$

- Definiendo $\sigma^{\mu\nu}$ como

$$
\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \tag{C.9}
$$

obtenemos las relaciones

$$
\begin{aligned}
\left[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\right] &= \frac{i}{2}\left[\gamma^5, \gamma^\mu\gamma^\nu\right] - \frac{i}{2}\left[\gamma^5, \gamma^\nu\gamma^\mu\right] \\
&= \frac{i}{2}\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 - \gamma^5\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^5\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(-\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^5\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^5\gamma^\mu\right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{C.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma^0(\sigma^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 &= \gamma^0\left(\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu - \frac{i}{2}\gamma^\nu\gamma^\mu\right)^\dagger\gamma^0 \\
&= \gamma^0\left(-\frac{i}{2}\gamma^{\nu^\dagger}\gamma^{\mu^\dagger} + \frac{i}{2}\gamma^{\mu^\dagger}\gamma^{\nu^\dagger}\right)\gamma^0 \\
&= \frac{i}{2}\gamma^0\Big(-(\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0)(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0) + (\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0)(\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0)\Big)\gamma^0 \\
&= \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\
&= \sigma^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{C.11}
$$

- Definiendo Σ^k como

$$
\Sigma^k \equiv \frac{1}{2}\sum_{j,l}\epsilon^{kjl}\sigma^{jl} = \gamma^0\gamma^k\gamma^5 \tag{C.12}
$$

obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_l \epsilon^{jkl}\Sigma^l &= \frac{1}{2}\sum_{l,m,n}\epsilon^{jkl}\epsilon^{lmn}\sigma^{mn} \\
&= \frac{1}{2}\left(\epsilon^{pjk}\epsilon^{pjk}\sigma^{jk} + \epsilon^{pjk}\epsilon^{pkj}\sigma^{kj}\right) \quad \text{donde } p \neq j, k \\
&= \sigma^{jk},
\end{aligned} \tag{C.13}
$$

$$\begin{aligned}\left[\Sigma^k, \Sigma^j\right] &= \left[\gamma^0\gamma^k\gamma^5, \gamma^0\gamma^j\gamma^5\right] \\ &= \gamma^0\gamma^k\gamma^5\gamma^0\gamma^j\gamma^5 - \gamma^0\gamma^j\gamma^5\gamma^0\gamma^k\gamma^5 \\ &= -(\gamma^0)^2\gamma^k\gamma^j(\gamma^5)^2 + (\gamma^0)^2\gamma^j\gamma^k(\gamma^5)^2 \\ &= 2i\sigma^{kj} \\ &= 2i\sum_l \epsilon^{kjl}\Sigma^l, \end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}\left\{\Sigma^k, \Sigma^j\right\} &= \left\{\gamma^0\gamma^k\gamma^5, \gamma^0\gamma^j\gamma^5\right\} \\ &= \gamma^0\gamma^k\gamma^5\gamma^0\gamma^j\gamma^5 + \gamma^0\gamma^j\gamma^5\gamma^0\gamma^k\gamma^5 \\ &= -(\gamma^0)^2\gamma^k\gamma^j(\gamma^5)^2 - (\gamma^0)^2\gamma^j\gamma^k(\gamma^5)^2 \\ &= 2\delta_{kj}, \end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}(\Sigma^k)^\dagger &= (\gamma^5)^\dagger(\gamma^k)^\dagger(\gamma^0)^\dagger \\ &= -\gamma^5\gamma^k\gamma^0 \\ &= \gamma^0\gamma^k\gamma^5 \\ &= \Sigma^k. \end{aligned} \tag{C.16}$$

C.2. Representaciones de las matrices gamma

Se sabe que para un grupo finito no abeliano G se cumple que

$$|G| = \sum_{\lambda=1}^{N}(n_\lambda)^2 \tag{C.17}$$

donde $|G|$ es el número de elementos de G, N es el número de representaciones irreducibles inequivalentes de G y n_λ es la dimensión de la representación.

Además el número de representaciones irreducibles inequivalentes es el mismo que el número de clases conjugadas. Por ello hallamos las clases conjugadas del grupo G_{3+1}:

$$\begin{aligned}&\{I\}, \{-I\}, \left\{\gamma^0, -\gamma^0\right\}, \left\{\gamma^1, -\gamma^1\right\}, \left\{\gamma^2, -\gamma^2\right\}, \left\{\gamma^3, -\gamma^3\right\}, \left\{\gamma^0\gamma^1, -\gamma^0\gamma^1\right\}, \\ &\left\{\gamma^0\gamma^2, -\gamma^0\gamma^2\right\}, \left\{\gamma^1\gamma^2, -\gamma^1\gamma^2\right\}, \left\{\gamma^1\gamma^3, -\gamma^1\gamma^3\right\}, \left\{\gamma^2\gamma^3, -\gamma^2\gamma^3\right\}, \\ &\left\{\gamma^0\gamma^1\gamma^2, -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\right\}, \left\{\gamma^0\gamma^1\gamma^3, -\gamma^0\gamma^1\gamma^3\right\}, \left\{\gamma^0\gamma^2\gamma^3, -\gamma^0\gamma^2\gamma^3\right\}, \left\{\gamma^1\gamma^2\gamma^3, -\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right\}, \\ &\left\{\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right\}, \end{aligned} \tag{C.18}$$

entonces

$$32 = \sum_{\lambda=1}^{17}(n_\lambda)^2 = 4^2 + \underbrace{1 + 1 \cdots + 1}_{\text{16 veces}}. \tag{C.19}$$

Esto quiere decir que existe solo una representación irreducibles que no es trivial, la cual tiene dimensión 4.

Tomando esto en cuenta ahora se muestran algunas de las representaciones, las cuales son equivalentes, de las matrices gamma.

C.2.1. Representación de Dirac

La representación de las matrices γ es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.20}$$

Entonces el operador γ^5 es representado como

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{C.21}$$

el operador $\sigma^{\mu\nu}$ como

$$\sigma^{0k} = i \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}, \quad \sigma^{kj} = \sum_l \epsilon^{kjl} \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix} \tag{C.22}$$

y el operador $\vec{\Sigma}$ como

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{C.23}$$

C.2.2. Representación quiral

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.24}$$

Entonces el operador γ^5 es representado como

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{C.25}$$

el operador $\sigma^{\mu\nu}$ como

$$\sigma^{0k} = i \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad \sigma^{kj} = \sum_l \epsilon^{kjl} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix} \tag{C.26}$$

y el operador $\vec{\Sigma}$ como

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{C.27}$$

Apéndice D

Relación de ortogonalidad de los biespinores $u^{(h)}(p)$ y $v^{(h)}(p)$

Sabemos que al aplicar la ecuación de Dirac en los biespinores $u^{(h)}(p)$ y $v^{(h)}(p)$ se obtiene que estos satisfacen las ecuaciones (4.36) y (4.37), es decir

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u^{(h)}(p) = 0, \tag{D.1}$$
$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v^{(h)}(p) = 0. \tag{D.2}$$

Al definir la adjunta de $u^{(h)}(p)$ como

$$\overline{u^{(h)}}(p) \equiv u^{(h)^\dagger}(p)\gamma^0 \tag{D.3}$$

obtendremos de (4.36) que

$$\begin{aligned} 0 &= u^{(h)^\dagger}(p)(\gamma^{\mu^\dagger} p_\mu - m)\gamma^0 = u^{(h)^\dagger}(p)\gamma^0\gamma^0(\gamma^{\mu^\dagger} p_\mu - m)\gamma^0 \\ &= \overline{u^{(h)}}(p)(\gamma^\mu p_\mu - m). \end{aligned} \tag{D.4}$$

De igual forma para

$$\overline{v^{(h)}}(p) \equiv v^{(h)^\dagger}(p)\gamma^0 \tag{D.5}$$

se obtiene de (4.37) que

$$\begin{aligned} 0 &= v^{(h)^\dagger}(p)(\gamma^{\mu^\dagger} p_\mu + m)\gamma^0 = v^{(h)^\dagger}(p)\gamma^0\gamma^0(\gamma^{\mu^\dagger} p_\mu + m)\gamma^0 \\ &= \overline{v^{(h)}}(p)(\gamma^\mu p_\mu + m). \end{aligned} \tag{D.6}$$

Si realizamos el cambio $(p^0, \vec{p}) \to (p^0, -\vec{p})$ en las ecuaciones (4.36), (4.37), y denotamos $p_P \equiv (p^0, -\vec{p})$, obtendremos al aplicar γ^0 por la izquierda que

$$0 = \gamma^0(\gamma^0 p_0 - \gamma^k p_k - m)u^{(h)}(p_P) = (\gamma^\mu p_\mu - m)\gamma^0 u^{(h)}(p_P) \tag{D.7}$$

y

$$0 = (\gamma^0 p_0 - \gamma^k p_k + m)v^{(h)}(p_P) = (\gamma^\mu p_\mu + m)\gamma^0 v^{(h)}(p_P) \tag{D.8}$$

Considerando la ecuación de autovalores de la helicidad dadas por (4.40) y (4.41), es decir

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}u^{(h)}(p) = hu^{(h)}(p), \tag{D.9}$$

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}v^{(h)}(p) = -hv^{(h)}(p), \tag{D.10}$$

obtendremos que

$$h\overline{u^{(h)}}(p) = u^{(h)\dagger}(p)\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}^{\dagger}}{|\vec{p}|}\gamma^0 = u^{(h)\dagger}(p)\gamma^0\frac{\vec{p}\cdot(\gamma^0\vec{\Sigma}^{\dagger}\gamma^0)}{|\vec{p}|} = \overline{u^{(h)}}(p)\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|} \tag{D.11}$$

y

$$-h\overline{v^{(h)}}(p) = v^{(h)\dagger}(p)\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}^{\dagger}}{|\vec{p}|}\gamma^0 = v^{(h)\dagger}(p)\gamma^0\frac{\vec{p}\cdot(\gamma^0\vec{\Sigma}^{\dagger}\gamma^0)}{|\vec{p}|} = \overline{v^{(h)}}(p)\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}. \tag{D.12}$$

Así como para la ecuación obtenida de la ecuación de Dirac, al aplicar la transformación $(p^0,\vec{p}) \to (p^0,-\vec{p})$ sobre la ecuación de autovalores del operador helicidad obtendremos:

$$\begin{aligned}
-\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}u^{(-h)}(p_P) &= -hu^{(-h)}(p_P)\\
-\gamma^0\frac{\vec{p}\cdot(\gamma^0\vec{\gamma}\gamma^5)}{|\vec{p}|}u^{(-h)}(p_P) &= -h\gamma^0u^{(-h)}(p_P)\\
\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}\gamma^0u^{(-h)}(p_P) &= h\gamma^0u^{(-h)}(p_P)
\end{aligned} \tag{D.13}$$

y

$$\begin{aligned}
-\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}v^{(-h)}(p_P) &= -hv^{(-h)}(p_P)\\
-\gamma^0\frac{\vec{p}\cdot(\gamma^0\vec{\gamma}\gamma^5)}{|\vec{p}|}v^{(-h)}(p_P) &= -h\gamma^0v^{(-h)}(p_P)\\
\frac{\vec{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\vec{p}|}\gamma^0v^{(-h)}(p_P) &= h\gamma^0v^{(-h)}(p_P).
\end{aligned} \tag{D.14}$$

Notamos que

$$\begin{aligned}
\overline{u^{(h)}}(p)\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{S}}{|\vec{p}|}u^{(h')}(p)\right) - \left(\overline{u^{(h)}}(p)\frac{\vec{p}\cdot\vec{S}}{|\vec{p}|}\right)u^{(h')}(p) &= 0\\
(h'-h)\overline{u^{(h)}}(p)u^{(h')}(p) &= 0
\end{aligned} \tag{D.15}$$

implica que $\overline{u^{(h)}}(p)u^{(h')}(p) \propto \delta_{h,h'}$. De igual forma obtenemos que $\overline{v^{(h)}}(p)u^{(h')}(p) \propto \delta_{h,h'}$. Ahora proponemos que

$$\overline{u^{(h)}}(p)u^{(h')}(p) = 2m\delta_{h,h'}, \tag{D.16}$$

$$\overline{v^{(h)}}(p)u^{(h')}(p) = -2m\delta_{h,h'}. \tag{D.17}$$

A partir de estas relaciones hallamos

$$\begin{aligned}
\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^\mu u^{(h')}(p) &= \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^\mu m u^{(h')}(p) + \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p) m\gamma^\mu u^{(h')}(p) \\
&= \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^\mu\gamma^\nu p_\nu u^{(h')}(p) + \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^\nu p_\nu\gamma^\mu u^{(h')}(p) \\
&= \frac{1}{m} g^{\mu\nu} p_\nu \overline{u^{(h)}}(p) u^{(h')}(p) \\
&= \frac{p^\mu}{m}\overline{u^{(h)}}(p) u^{(h')}(p) \\
&= 2p^\mu \delta_{h,h'} \qquad \text{(D.18)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^\mu v^{(h')}(p) &= \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^\mu m v^{(h')}(p) + \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p) m\gamma^\mu v^{(h')}(p) \\
&= \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^\mu\gamma^\nu p_\nu u^{(h')}(p) + \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^\nu p_\nu\gamma^\mu u^{(h')}(p) \\
&= \frac{1}{m} g^{\mu\nu} p_\nu \overline{v^{(h)}}(p) v^{(h')}(p) \\
&= \frac{p^\mu}{m}\overline{v^{(h)}}(p) v^{(h')}(p) \\
&= 2p^\mu \delta_{h,h'} \qquad \text{(D.19)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^5 u^{(h')}(p) &= \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^5 m u^{(h')}(p) + \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^5 m u^{(h')}(p) \\
&= \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^5 m u^{(h')}(p) + \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^5\gamma^\mu p_\mu u^{(h')}(p) \\
&= \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^5 m u^{(h')}(p) - \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^\mu\gamma^5 p_\mu u^{(h')}(p) \\
&= \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^5 m u^{(h')}(p) - \frac{1}{2m}\overline{u^{(h)}}(p)\gamma^5 m u^{(h')}(p) \\
&= 0 \qquad \text{(D.20)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^5 v^{(h')}(p) &= \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^5 m v^{(h')}(p) + \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^5 m u^{(h')}(p) \\
&= \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^5 m v^{(h')}(p) + \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^5\gamma^\mu p_\mu v^{(h')}(p) \\
&= \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^5 m v^{(h')}(p) - \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^\mu\gamma^5 p_\mu v^{(h')}(p) \\
&= \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^5 m v^{(h')}(p) - \frac{1}{2m}\overline{v^{(h)}}(p)\gamma^5 m v^{(h')}(p) \\
&= 0 \qquad \text{(D.21)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(h)\dagger}(p) v^{(h')}(p_P) &= \overline{u^{(h)}}(p)\gamma^0 v^{(h')}(p_P) \\
&= \overline{u^{(h)}}(p)\left(\frac{\gamma^\mu p_\mu}{m}\right)\gamma^0 v^{(h')}(p_P) + \overline{u^{(h)}}(p)\left(\frac{-\gamma^\mu p_\mu}{m}\right)\gamma^0 v^{(h')}(p_P) \\
&= 0 \qquad \text{(D.22)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v^{(h)\dagger}(p)u^{(h')}(p_P) &= \overline{v^{(h)}}(p)\gamma^0 u^{(h')}(p_P) \\
&= \overline{v^{(h)}}(p)\left(\frac{\gamma^\mu p_\mu}{m}\right)\gamma^0 u^{(h')}(p_P) + \overline{v^{(h)}}(p)\left(\frac{-\gamma^\mu p_\mu}{m}\right)\gamma^0 u^{(h')}(p_P) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{D.23}
$$

Bibliografía

[1] A. Einstein, «On the Electrodynamics of Moving Bodies,» *Annalen der Physik*, vol. 17, págs. 891-921, 1905, English translation of "Zur Elektrodynamik bewegter Körper".
[2] O. Klein, «Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie,» *Zeitschrift für Physik*, vol. 37, págs. 895-906, 1926.
[3] W. Gordon, «Zur Quantentheorie nichtrelativistischer Teilchen,» *Zeitschrift für Physik*, vol. 40, págs. 117-133, 1926.
[4] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*. North-Holland Publishing Company, 1956.
[5] P. A. M. Dirac, «The Quantum Theory of the Electron,» *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 117, n.º 778, págs. 610-624, 1928.
[6] G. Cobos Zara, «The Lorentz Group,» eng, *Treballs Finals de Grau (TFG) - Matemàtiques*, jun. de 2015.
[7] S. A. Gärtner, *Neutrino Helicity Measurement*, Course notes for PHYS 851 – Introductory Nuclear Physics, Instructor: Chary Rangacharyulu, 2015.
[8] T. D. Lee y C. N. Yang, «Question of Parity Conservation in Weak Interactions,» *Physical Review*, vol. 104, n.º 1, págs. 254-258, oct. de 1956.
[9] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes y R. P. Hudson, «Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay,» *Physical Review*, vol. 105, n.º 4, págs. 1413-1415, feb. de 1957.
[10] C. G. Böhmer y L. Corpe, «Helicity—from Clifford to graphene,» *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 45, n.º 20, pág. 205 206, mayo de 2012, ISSN: 1751-8121.
[11] G. W. Semenoff, «Chiral symmetry breaking in graphene,» *Physica Scripta*, vol. T146, pág. 014 016, ene. de 2012, ISSN: 1402-4896.
[12] A. Einstein, «Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt,» *Annalen der Physik*, vol. 17, n.º 6, págs. 132-148, 1905.
[13] G. P. Gennaro Auletta Mauro Fortunato, *Quantum Mechanics*, 1.ª ed. Cambridge University Press, 2009, pág. 15.
[14] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, New. Princeton University Press, 2018.
[15] B. Hall, *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer, 2013.
[16] A. A. Michelson, «The Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether,» *American Journal of Science*, vol. 22, n.º 3rd series, págs. 120-129, 1881, Reprinted in AIP History Collection.
[17] E. Rischke, «Symmetries in Quantum Mechanics and Particle Physics,» Frankfurt Digital Summer School 2021, 2021.

[18] G. Kurt e Y. Tung-Mow, *Quantum Mechanics: Fundamentals*, Second. Springer, 2003, págs. 116, 117.

[19] D. Singh, N. Mobed y G. Papini, «Helicity precession of spin-1/2 particles in weak inertial and gravitational fields,» *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 37, n.º 34, págs. 8329-8347, ago. de 2004, ISSN: 1361-6447.

[20] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov y A. K. Geim, «The electronic properties of graphene,» *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, n.º 1, págs. 109-162, ene. de 2009, ISSN: 1539-0756.

[21] S. Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics*, Second. Cambridge University Press, 2015.

[22] R. Tumulka, *Foundations of Quantum Mechanics*. Springer, 2022.

[23] S. Weinberg, *Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1995.

[24] L. F. Cohen-Tannoudji C. Diu B., *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*, Second. Wiley-VCH, 2020.

[25] M. Hamermesh, *Group Theory and Its Applications to Physical Problems*. Dover Publications, 1989.

[26] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Second. Cambridge University Press, 2009.

[27] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, English, Fourth. Butterworth-Heinemann, 1980.

[28] W. Tung, *Group Theory in Physics*. World Scientific, 1985.

[29] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2007.

[30] A. Rebenko, *Theory of Interacting Quantum Fields*. De Gruyter, 2012.

[31] T. Ohlsson, *Relativistic Quantum Physics: From Advanced Quantum Mechanics to Introductory Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2011.

[32] C. Giunti y C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, 2007.

[33] F. Mandl y G. Shaw, *Quantum Field Theory*. Wiley, 2010.

[34] M. Artin, *Algebra*. Pearson Education, 2011.

[35] J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge University Press, 1998, vol. 2.