

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



**ESTUDIO DE LA OSCILACIÓN DE SABORES EN PARTÍCULAS SIN ESPÍN  
CONSIDERANDO PAQUETES DE ONDA GAUSSIANOS**

PROYECTO DE TESIS II

Estudiante:  
César Octavio Lévano Apari

Asesor:  
Prof. Dr. Daniel Eduardo Soto Barrientos

Diciembre 2025



# Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar la oscilación de los estados de sabor utilizando paquetes de onda gaussianos, y mostrar sus diferencias con respecto al método usual basado en funciones de onda planas. El proceso consiste en un estudio paralelo del caso no relativista (ecuación de Schrödinger) y del caso relativista (ecuación de Klein-Gordon), de modo que los resultados del caso relativista se obtengan inspirándose en lo realizado en el caso no relativista, donde no existen problemas asociados a las soluciones de ecuaciones relativistas, como el *zitterbewegung* y las soluciones de energía negativa. Además, mediante una aproximación validada por el trabajo de [1], se desprecian dichos efectos en el paquete de onda gaussiano relativista. Como resultado de este estudio, se obtiene que la localización de una partícula alrededor de un punto no puede omitirse en el estudio de la oscilación de paquetes de onda, incluso si la densidad de probabilidad asociada a la partícula tiende a la de una función de onda plana conforme se propaga. Esto se debe a que, al considerar paquetes de onda gaussianos, aparece un término de amortiguamiento en la probabilidad de transición entre estados de sabor.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sobre la mecánica relativista . . . . .	1
1.2. Sobre los paquetes de onda . . . . .	1
1.3. Sobre la oscilación en la física de partículas . . . . .	2
1.4. Sobre el trabajo . . . . .	4
<b>2. Ecuaciones de movimiento</b>	<b>6</b>
2.1. Ecuación de movimiento en el marco no relativista . . . . .	7
2.1.1. Ecuación de Schrödinger . . . . .	7
2.1.2. Relación de incertidumbre . . . . .	9
2.1.3. Solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre . . . . .	10
2.2. Ecuación de movimiento en el marco relativista . . . . .	11
2.2.1. Ecuación de Klein-Gordon . . . . .	11
2.2.2. Solución de la ecuación de Klein-Gordon . . . . .	13
<b>3. Paquetes de onda</b>	<b>17</b>
3.1. Paquetes de onda en el marco no relativista . . . . .	18
3.1.1. Formación de un paquete de onda gaussiano . . . . .	18
3.1.2. Densidad de probabilidad . . . . .	23
3.2. Paquetes de onda en el marco relativista . . . . .	27
3.2.1. Formación de un paquete de onda gaussiano . . . . .	27
3.2.2. Densidad de probabilidad . . . . .	30
<b>4. Oscilación de estados de sabor</b>	<b>35</b>
4.1. Espacio de estados de sabor . . . . .	36
4.2. Oscilación sabor-masa en el marco no relativista . . . . .	36
4.2.1. Estados de sabor y oscilación de ondas planas . . . . .	36
4.2.2. Estados de sabor y oscilación de ondas gaussianas . . . . .	38
4.3. Oscilación sabor-masa en el marco relativista . . . . .	41
4.3.1. Estados de sabor y oscilación de ondas planas . . . . .	41
4.3.2. Estados de sabor y oscilación de ondas gaussianas . . . . .	43
<b>5. Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>49</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Sobre la mecánica relativista

Desde la propuesta de la relatividad especial en 1905 [2], se modificó la concepción del espacio-tiempo vigente hasta entonces. Además, con la adopción de la mecánica cuántica como teoría para describir el mundo microscópico y dado que la ecuación de Schrödinger no es compatible con los postulados de la relatividad especial, se inició la búsqueda de ecuaciones relativistas. En primer lugar, a partir de las propuestas de Klein [3] y Gordon [4], se obtuvo la ecuación de Klein-Gordon. Sin embargo, al no incluir el espín en su descripción, no era válida para describir el movimiento de los electrones. Posteriormente, Dirac [5] propuso otra ecuación relativista, conocida como la ecuación de Dirac, que incorpora el espín en su descripción, siendo válida, en particular, para partículas con espín  $1/2$ . Más adelante, con el descubrimiento de nuevas partículas elementales, fue necesario encontrar otra ecuación de movimiento que las describiera. Esto llevó a formular la ecuación de Duffin-Kemmer-Petiau, válida para describir la dinámica de mesones con espín 0 y 1 [6] [7] [8] [9] [10]. Esta ecuación generaliza, entre otros, los casos particulares de las ecuaciones de Proca (espín 1) y de Klein-Gordon (espín 0) [11].

### 1.2. Sobre los paquetes de onda

En los comienzos de la mecánica cuántica no relativista, una de las primeras propuestas para estudiar la dinámica de una partícula libre fue la de un paquete de onda gaussiano [12]. Esta solución de la ecuación de Schrödinger permitía establecer una relación con la dinámica semiclásica de una partícula. Esfuerzos posteriores llevaron a encontrar otra solución con características similares [13], con la diferencia de que esta no se dispersa. Debido al éxito del paquete de onda gaussiano en la descripción del estado de una partícula libre, se intentaron incorporar estas ideas en el contexto de las teorías cuánticas relativistas. Sin embargo, Schrödinger [14] encontró que en la propagación de un electrón libre existe un efecto conocido como *zitterbewegung*, que se refiere al movimiento tembloroso de la posición media del electrón. Posteriormente, se halló que este fenómeno se debía a la interferencia entre las componentes de energía positiva y negativa que surgen al propagar un paquete de onda [15]. Este fenómeno no se limita a las soluciones de la ecuación de Dirac, sino que también aparece en las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon [16], y en estas últimas lleva a problemas en la interpretación de las soluciones para el estado de

una partícula. Debido a esto se han propuesto modelos para describir la propagación de un paquete de onda gaussiano en donde los efectos del *zitterbewegung* puedan ser despreciados, usando la ecuación de Klein-Gordon [1], pero también ha habido esfuerzos usando otro formalismo que permita evitar estos problemas directamente [17].

### 1.3. Sobre la oscilación en la física de partículas

En 1927, Ellis y Wooster realizaron un experimento en el que se obtuvo que la energía promedio de los electrones producidos en el decaimiento beta era menor que la energía total liberada, lo que sugería la existencia de una partícula neutra muy pequeña [18]. Esta es la partícula llamada neutrino. Aunque en ese momento aún no se tenía una evidencia experimental directa de su existencia, pues debido a que tiene una sección de choque muy pequeña, se había considerado indetectable durante muchos años [19]. En 1946, Pontecorvo propuso un método de detección de neutrinos basado en la reacción:

$$\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \longrightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-, \quad (1.1)$$

como fue mencionado posteriormente en Cleveland et al. [20], aunque durante esos años no hubo una medición directa de los neutrinos.

En 1947, Rochester y Butler observaron por primera vez trazas en forma de “V” en cámaras de niebla, evidenciando la existencia de una nueva partícula neutra e inestable, a la que llamaron mesón V [21]. Poco después, en 1949, observó el decaimiento:

$$\tau^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-. \quad (1.2)$$

Esta fue llamada el mesón  $\tau$  [22]. Además, se detectó la partícula con decaimiento:

$$\theta^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0, \quad (1.3)$$

llamada mesón  $\theta$ . Estas partículas eran indistinguibles, a menos que se considerará sus modos de decaimiento, pues sus masas y sus tiempos de vida eran idénticos. En 1953, Dalitz obtuvo que si se conservaba la paridad, entonces estas partículas eran diferentes, llevando así al puzzle de  $\tau - \theta$  [23]. Este fue resuelto finalmente en 1956 por Lee y Yang, los cuales propusieron la ruptura de la paridad en la interacción débil [24]. Debido a que  $\tau^+$  y  $\theta^+$  son las mismas partículas, la partícula pasó a ser llamada  $K^+$ .

En 1955, Gell-Mann y Pais analizaron las propiedades del sistema de kaones neutros  $K^0$  y  $\bar{K}^0$ . Basándose en consideraciones de simetría CP, predijeron que los estados físicos que se propagan no son  $K^0$  o  $\bar{K}^0$  individuales, sino dos combinaciones lineales de los estados  $K_1^0$  y  $K_2^0$ , con tiempos de vida distintos. Esta mezcla de estados implica que un kaón neutro producido como  $K^0$  puro evolucionará en el tiempo hacia una superposición de  $K^0$  y  $\bar{K}^0$  [25]. Este es el primer fenómeno de oscilación de partículas libres.

Pontecorvo, inspirado en el trabajo de Gell-Mann y Pais, sugirió la posibilidad de que existan otras partículas neutras que no sean idénticas a sus antipartículas, es decir, que sea posible una transición entre estos estados [26][27]. Estas partículas eran los neutrinos, aunque para ese momento, en el año 1957, se creía que su masa era nula [28], por lo que las transiciones consideradas

eran entre partícula y antipartícula. No fue hasta después del descubrimiento de los neutrinos muónicos [29], por el cual Lederman, Schwartz y Steinberger ganaron el premio Nobel de Física en 1988, que Pontecorvo propuso la posibilidad de una transición entre  $\nu_e$  y  $\nu_\mu$  [30].

Posteriormente, Bahcall y Davis realizaron en 1976 un experimento para estudiar la emisión de neutrinos electrónicos producidos en el Sol, conocido como el experimento Homestake. De las muchas reacciones que ocurren en este, se tomó en cuenta principalmente la reacción

$$p + p \longrightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e, \quad (1.4)$$

la cual es la mayor contribuyente de los neutrinos electrónicos producidos en el Sol, siendo el 99,75 % de todas estas emisiones [31].

Para determinar el flujo de neutrinos electrónicos, Davis propuso usar la reacción propuesta por Pontecorvo. Como resultado de este experimento se encontró una diferencia entre el flujo de neutrinos electrónicos detectado y el valor esperado por el modelo estándar solar. Este problema fue atribuido a la eficiencia del experimento, lo cual llevó a múltiples experimentos para verificarlo, como el experimento Kamiokande [32] y Super-Kamiokande [33], en los cuales los neutrinos electrónicos producidos en el Sol eran detectados mediante la colisión elástica

$$\nu_x + e^- \longrightarrow \nu_x + e^-, \quad (1.5)$$

donde x denota que es válida para todo sabor de neutrino. Sin embargo, se mantuvo este déficit en el flujo de neutrinos solares detectados. Pontecorvo sugirió que este fenómeno era evidencia de la oscilación de neutrinos [34].

Más adelante, en el experimento realizado en el Observatorio de Neutrinos de Sudbury en el año 2003, conocido como el experimento SNO, se tomaron en cuenta tres reacciones [35]:

$$\begin{aligned} \nu_e + d &\longrightarrow p + p + e^-, \\ \nu_x + d &\longrightarrow p + n + \nu_x, \\ \nu_x + e^- &\longrightarrow \nu_x + e^-, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde en la segunda y tercera reacción x denota que es válida para cualquier neutrino. En este experimento se obtuvo como resultado que el flujo de neutrinos electrónicos era menor que el predicho por el modelo estándar solar, tal como se obtuvo en experimentos anteriores. Mas este no fue el único resultado, pues de la segunda y tercera reacción se obtuvieron los flujos de los neutrinos muónicos y tauónicos, con los cuales, y junto al flujo de neutrinos electrónicos, se obtuvo el flujo total de neutrinos, el cual era cercano a lo predicho por el modelo estándar solar. Esto implicó que los neutrinos cambiaban su naturaleza al propagarse, por lo que fue una evidencia de la oscilación de neutrinos sugerida por Pontecorvo, e impulsó el desarrollo del estudio de los neutrinos.

Actualmente se sabe que los neutrinos tienen masa, y que sus estados de sabor son una combinación de estados de masa, siendo posible la transición entre estos mediante la matriz PMNS, nombrada en honor a Pontecorvo, Maki, Nakagawa y Sakata por sus contribuciones al desarrollo de la teoría de oscilación de neutrinos, siendo el aporte de estos últimos realizado en el año 1962 [36]. Dado que la masa de los neutrinos se determina a partir de la oscilación de neutrinos, este tema sigue siendo de interés en la actualidad [37].

## 1.4. Sobre el trabajo

Para tener una mejor descripción de la oscilación de sabores, se considera utilizar paquetes de onda gaussianos. Este enfoque es más realista que el tratamiento estándar con ondas planas, ya que describe partículas localizadas en el espacio. Dado que los kaones y los neutrinos son partículas relativistas, se debe considerar las ecuaciones relativistas correspondientes. Sin embargo, debido a la complejidad del estudio de las soluciones de paquetes de onda gaussianos en el contexto de las soluciones de la ecuación de Dirac, en este trabajo nos limitaremos a trabajar con funciones de onda escalares, es decir, con aquellas que son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. También se analizará el caso del paquete de onda gaussiano en el marco no relativista, para realizar una comparación entre ambos resultados, y como guía para la construcción del caso relativista. Por esto, en el capítulo 2 se realiza un estudio de las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger y Klein-Gordon, y sus densidades de probabilidad asociadas. Además, se lleva a cabo la deducción de la ecuación de Klein-Gordon y se comprueba su invariancia frente a transformaciones de Lorentz. En el capítulo 3 se deriva el paquete de onda gaussiano no relativista y se estudia la propagación de su función de onda y densidad de probabilidad. También se desarrolla el paquete de onda gaussiano en el marco relativista y, usando los resultados de Huang et al. [1], se realiza una aproximación en la que el *zitterbewegung* es despreciable. Luego, habiendo definido el paquete de onda gaussiano en ambos formalismos, en el capítulo 4 se introducen los estados de sabor como una combinación lineal de estados de masa, y se estudia la evolución de una partícula que inicialmente está en un estado de sabor, lo que lleva a la oscilación de estados de sabor. Con esto se pueden ver las diferencias cuando se consideran ondas planas y paquetes de onda gaussianos en el estudio de la oscilación de estados de sabor.



## Capítulo 2

### Ecuaciones de movimiento

Este capítulo establece los fundamentos teóricos para los capítulos posteriores, dividiéndose en dos partes principales: el estudio de la mecánica cuántica no relativista y el de la ecuación de Klein-Gordon.

En la primera parte, se revisan los postulados de la mecánica cuántica, enfatizando la relación de la función de onda con la teoría de probabilidades. Se discute la probabilidad de transición entre estados, destacando el caso de una partícula libre. Asimismo, se obtienen las funciones de onda plana como soluciones de la ecuación de Schrödinger, las cuales por sí mismas no describen un estado físico.

Motivado por el hecho de que, dada una función de onda, para cada observable existe una distribución de probabilidad asociada, se determina la relación entre las incertidumbres de estos observables, derivándose la relación de Heisenberg. Esta provee la relación entre las incertidumbres de los observables posición y momento, lo cual es importante en la búsqueda de una solución de la ecuación de movimiento que exhiba la idea de localidad alrededor de un punto, tema del siguiente capítulo. Posteriormente, para obtener las incertidumbres para soluciones particulares de la ecuación de Schrödinger, se expresan estas en los espacios de posiciones y momentos en términos de ondas planas, para así obtener las densidades de probabilidad asociadas a los operadores posición y momento. Este formalismo permite calcular valores esperados e incertidumbres para los operadores posición y momento de una solución específica, y analizar su evolución temporal.

La segunda parte se dedica a la ecuación de Klein-Gordon. Se deduce a partir de la relación de dispersión relativista y se verifica su covariancia bajo transformaciones de Lorentz. Al igual que en el caso no relativista, las ondas planas son soluciones, pero algunas están asociadas a energías negativas. A partir de estas se construyen las soluciones generales como combinaciones lineales de las funciones de onda. Y para determinar su validez como estados de una partícula, se deriva la ecuación de continuidad, en donde se identifica la densidad de probabilidad. Este análisis revela que las soluciones de energía positiva tienen densidad de probabilidad positiva, mientras que las de energía negativa conducen a una densidad negativa. En consecuencia, se identifican dos subespacios del espacio de soluciones, con métricas distintas, como los aptos para describir el estado de una partícula libre relativista. Por último, se determinan las densidades de probabilidad asociadas a los operadores de posición y momento para los estados con energía positiva.

## 2.1. Ecuación de movimiento en el marco no relativista

### 2.1.1. Ecuación de Schrödinger

En la mecánica cuántica no relativista se considera que el estado de una partícula está determinado por su función de onda  $\psi(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}$  con norma igual a 1, donde  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert. Esta permite determinar los posibles resultados de una medición de un observable  $\hat{A}$ , los cuales son los autovalores del observable que se mide, es decir que en la ecuación de autovalores

$$\hat{A}\psi_a = a\psi_a \quad (2.1)$$

los valores de  $a$  son los posibles resultados de la medición. Además, el estado de la partícula luego de la medición será el autoestado correspondiente al resultado obtenido, es decir  $\psi_a$ . Este fenómeno es conocido como el *colapso de la función de onda*.

Podemos notar que debido a que los autovalores de un operador autoadjunto y diferente de uno proporcional a la identidad tiene diferentes autovalores, al realizar la medición habrán más de un posible resultado. La probabilidad de que la función de onda  $\psi$  “colapse” al autoestado  $\psi_a$  es dada por

$$P_a(\psi) = |\langle \psi_a | \psi \rangle|^2. \quad (2.2)$$

Por el teorema espectral los autoestados  $\psi_a$  forman un base ortonormal para el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .<sup>1</sup> Entonces debido a que  $\psi$  está normalizado, se obtiene que

$$\sum_a P_a(\psi) = 1, \quad (2.3)$$

verificando que  $P_a$  está asociado a la probabilidad de obtener  $a$  como resultado de la medición.

De este modo, se tiene que la función de onda no define que resultado se obtendrá al medir un observable  $\hat{A}$ , sino que solo determinará las probabilidades de este. Además, debido a que toda función de onda se puede expresar como una combinación lineal de los autovalores  $\psi_a$ , para dos funciones de onda distintas

$$\psi = \sum_a b_a \psi_a \quad \text{y} \quad \phi = \sum_a c_a \psi_a, \quad (2.4)$$

si luego de medir el observable  $A$  en ambas se obtiene como resultado  $a$ , no es posible distinguirlas entre sí. Esto sugiere que el principio de superposición impide que sea posible determinar el estado de la partícula antes de la medición, incluso si se puede expresar el estado antes de la medición en función de los autoestados del observable que fue medido.

Por otro lado, la medición del observable para un estado de la partícula se puede realizar en distintos instantes de tiempo, por lo que la evolución de la función de onda en un sistema cerrado es importante al momento de tener una descripción del sistema. Es conocido que la evolución de la función de onda de una partícula no relativista es determinada por la ecuación de Schrödinger:

$$\hat{H}\psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Esto es válido para un espacio de Hilbert finito dimensional, ya que para uno de dimensión infinita los autoestados no son elementos del espacio de Hilbert [38].

Dado que los autovalores del Hamiltoniano:

$$\hat{H}\psi_E(\mathbf{x}, t) = E(t)\psi_E(\mathbf{x}, t), \quad (2.6)$$

determinan los valores de energía posibles de la partícula, y forman una base ortonormal en el espacio de estados, cualquier solución de la ecuación de Schrödinger se puede en función de los autoestados de energía  $\psi_E$ :

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_E c_E(t)\psi_E(\mathbf{x}, t). \quad (2.7)$$

Al reemplazar esta expansión de  $\psi$  en la ecuación de Schrödinger, y usando la ortogonalidad de los autoestados de energía, se obtiene que las probabilidades  $|c_E(t)|^2$  cambian cuando el Hamiltoniano es dependiente del tiempo. Es decir que si un estado inicialmente está en el estado  $\psi_E$ , luego de un intervalo de tiempo, será una combinación lineal de todos los autoestados de energía. Esto hace posible la transición espontánea de un autoestado de energía a otro.

Si considera el caso de una partícula en un potencial independiente del tiempo, el Hamiltoniano correspondiente será:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

En este caso, al resolver la ecuación de Schrödinger se obtendrá que:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_E c_E(0)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi_E(\mathbf{x}, 0). \quad (2.9)$$

Por lo que la probabilidad de que la partícula tenga una energía  $E$  es constante:

$$P_E(t) = \left| c_E(0)e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \right|^2 = P_E(0), \quad (2.10)$$

En particular, si se considera que  $V(\mathbf{x}) = 0$ , se obtiene el caso de una partícula libre. Además, como el operador momentum es dado por:

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad (2.11)$$

los autoestados de energía serán dados por:

$$\psi_E(\mathbf{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \quad (2.12)$$

y se cumple la relación de dispersión

$$E = \mathbf{p}^2/2m. \quad (2.13)$$

Esto quiere decir que para una partícula libre, los autoestados de energía son los mismos que los autoestados de momentum. Y por ende, la única forma de que una partícula sea descrita por la función de onda (2.12) en un instante dado, es que haya estado desde  $t = 0$  en este estado, o que se haya realizado una medición en la que se haya obtenido como resultado  $E$  o  $\mathbf{p}$ .

### 2.1.2. Relación de incertidumbre

En la ecuación (2.2) se mostró que un observable  $\hat{A}$  define una densidad de probabilidad asociada a los resultados posibles de su medición. En este sentido, el valor medio asociado a la distribución de probabilidad

$$\langle \hat{A} \rangle = a |\langle \psi_a | \psi \rangle|^2 \quad (2.14)$$

o expresado de forma equivalente como:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (2.15)$$

Siguiendo la teoría de probabilidades, se define la desviación estándar como

$$\Delta \hat{A} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}, \quad (2.16)$$

la cual al estar relacionada con la dispersión de los posibles resultados de la medición del observable  $\hat{A}$ , puede ser interpretada como la incertidumbre estos.

Dado que distintos observables definen distribuciones de probabilidad distintas, a menos que estos observables conmuten entre sí, es de interés determinar la relación que tendrán las incertidumbres correspondientes a estos observables. Para este fin, se definen los observables  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ , que son operadores autoadjuntos que actúan sobre el mismo espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . A partir de ellos se definen los operadores

$$\hat{M} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{I} \quad \text{y} \quad \hat{N} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \hat{I}, \quad (2.17)$$

que serán también operadores autoadjuntos, puesto que los valores medios de los observables son números reales. Esta característica de los operadores  $\hat{M}$  y  $\hat{N}$  nos permite obtener

$$\langle \psi | \hat{M} \hat{N} | \psi \rangle = m + in, \quad \langle \psi | \hat{N} \hat{M} | \psi \rangle = m - in \quad (2.18)$$

donde  $m, n \in \mathbb{R}$ . Así el valor medio del conmutador y el anticonmutador de  $\hat{M}$  y  $\hat{N}$  será

$$\langle \psi | [\hat{M}, \hat{N}] | \psi \rangle = 2in \quad \text{y} \quad \langle \psi | \{\hat{M}, \hat{N}\} | \psi \rangle = 2m, \quad (2.19)$$

entonces

$$\left| \langle \psi | [\hat{M}, \hat{N}] | \psi \rangle \right|^2 + \left| \langle \psi | \{\hat{M}, \hat{N}\} | \psi \rangle \right|^2 = 4 \left| \langle \psi | \hat{M} \hat{N} | \psi \rangle \right|^2. \quad (2.20)$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\left| \langle \psi | \hat{M} \hat{N} | \psi \rangle \right|^2 \leq \langle \psi | \hat{M}^2 | \psi \rangle \langle \psi | \hat{N}^2 | \psi \rangle, \quad (2.21)$$

lo cual implica junto a (2.20) que

$$\left| \langle \psi | [\hat{M}, \hat{N}] | \psi \rangle \right|^2 \leq 4 \langle \psi | \hat{M}^2 | \psi \rangle \langle \psi | \hat{N}^2 | \psi \rangle. \quad (2.22)$$

Por definición de  $\hat{M}$  y  $\hat{N}$  se cumple que

$$\Delta \hat{A} = \sqrt{\langle \hat{M}^2 \rangle}, \quad \Delta \hat{B} = \sqrt{\langle \hat{N}^2 \rangle} \quad (2.23)$$

y

$$\langle \psi | [\hat{M}, \hat{N}] | \psi \rangle = \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle, \quad (2.24)$$

entonces la desigualdad (2.22) se puede expresar como

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{|\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|}{2}. \quad (2.25)$$

En particular, para  $\hat{A} = \hat{X}$  y  $\hat{B} = \hat{P}_x$ . Al expresar en forma integral al valor medio de su conmutador:

$$\langle \psi | [\hat{X}, \hat{P}_x] | \psi \rangle = \int \psi^*(\mathbf{x}) x \left( \frac{\hbar}{i} \partial_x \right) \psi(\mathbf{x}) d^3x - \int \psi^*(\mathbf{x}) \left( \frac{\hbar}{i} \partial_x \right) (x \psi(\mathbf{x})) d^3x, \quad (2.26)$$

y tras expandir el segundo término, y usar la condición de normalización de  $\psi$ , se obtiene:

$$\langle \psi | [\hat{X}, \hat{P}_x] | \psi \rangle = i\hbar. \quad (2.27)$$

Por lo tanto, la relación entre las incertidumbres de los observables  $\hat{X}$  y  $\hat{P}_x$  es:

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P}_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.28)$$

Esta es la relación de incertidumbre de Heisenberg, que establece una cota inferior para el producto de las incertidumbres de dos observables. Para el caso de los observables de posición y momento, implica que a mayor precisión en el valor de la posición, habrá una menor precisión en el valor del momento. Este resultado contrasta con lo predicho por la teoría clásica, donde la certeza con la que se conoce un observable es independiente de cualquier otro.

Además, debe notarse que la relación (2.28) no determina la evolución temporal de las incertidumbres, sino que solo establece una relación entre ellas para un instante dado. Para estudiar cómo evolucionan, es necesario calcular sus valores explícitamente para un estado cuántico específico y evolucionarlo.

### 2.1.3. Solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre

Para estudiar la dinámica de las relaciones de incertidumbre de los operadores de posición y momentum, se procede a determinar las densidades de probabilidades asociadas a estas mismas. La ecuación (2.7) se puede expresar de forma equivalente, y considerando el caso de una partícula libre como:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum c_E e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}. \quad (2.29)$$

Esta expresión es válida para el caso de un espectro discreto del operador momentum. Para el caso continuo, cualquier solución de la ecuación de Schrödinger se expresa como la transformada de Fourier de  $c(\mathbf{p})$ :

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int c(\mathbf{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} d^3p. \quad (2.30)$$

Así, la densidad de probabilidad asociada al operador posición

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \psi^*(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.31)$$

se expresará como:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left( \int c(\mathbf{p})^* e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} d^3p \right) \left( \int c(\mathbf{p}') e^{-\frac{i}{\hbar}(E't - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})} d^3p' \right). \quad (2.32)$$

Luego, usando la condición de normalización de  $\psi(z, t)$  se obtiene:

$$\int \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \left( \int c(p') \left( \int c(p)^* e^{\frac{i}{\hbar}(E-E')t} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} d^3p \right) d^3p' \right) d^3x, \quad (2.33)$$

y como

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} d^3x = (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p}) \quad (2.34)$$

se reduce a:

$$\int \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = \int |c(\mathbf{p})|^2 d^3p. \quad (2.35)$$

Esto nos asociar  $|c(\mathbf{p})|^2$  a la densidad de probabilidad asociada al operador momentum.

Esta relación se hace más evidente mediante el cálculo explícito del valor medio del operador momentum. Para esto se expresa el operador momentum en el espacio de posiciones:

$$\hat{\mathbf{P}}\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{i} \nabla \psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.36)$$

De modo que, al considerar la expansión de  $\psi(\mathbf{x}, t)$  dada en (2.30) se obtiene:

$$\hat{\mathbf{P}}\psi(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{p} c(\mathbf{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} d^3p. \quad (2.37)$$

Con esto se obtiene que el valor medio del operador momentum usando la relación (2.34):

$$\langle \psi | \hat{\mathbf{P}} | \psi \rangle = \int \mathbf{p} |c(\mathbf{p})|^2 d^3p. \quad (2.38)$$

Este resultado verifica la afirmación anterior, es decir que  $|c(\mathbf{p})|^2$  es la densidad de probabilidad asociada al operador momentum. Con esto se han obtenido las densidades de probabilidad asociadas a ambos operadores y lo que queda es estudiar soluciones específicas de la ecuación de Schrödinger, lo cual se realiza en el siguiente capítulo.

## 2.2. Ecuación de movimiento en el marco relativista

### 2.2.1. Ecuación de Klein-Gordon

Cuando se considera la teoría de la relatividad especial, la ecuación de Schrödinger para una partícula libre:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.39)$$

no es una ecuación válida para describir la dinámica de una partícula, pues al tener derivada parcial de primer orden con respecto del tiempo, y derivada de segundo orden con respecto de las coordenadas espaciales, no es invariante frente a transformaciones de Lorentz.

Para obtener una ecuación invariante frente a las transformaciones de Lorentz se usa el hecho de que (2.39) se puede mediante la regla de correspondencia:

$$p_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{y} \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.40)$$

y la ecuación de dispersión no relativista:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (2.41)$$

De este modo, si la ecuación de dispersión que se usa es la ecuación de dispersión relativista:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.42)$$

se obtiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\hbar^2 c^2 \square + m^2 c^4) \phi = 0, \quad (2.43)$$

donde  $\square$  es el d'Alembertiano con coordenadas  $(ct, x, y, z)$ . Esta ecuación se puede expresar en forma covariante como:

$$\left[ \partial^\mu \partial_\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0. \quad (2.44)$$

Para verificar que la ecuación de Klein-Gordon es Lorentz-covariante que la transformación de coordenadas

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (2.45)$$

es una transformación de Lorentz si y solo si se cumple que

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho_\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu, \quad (2.46)$$

por lo que las derivadas parciales en ambos sistemas coordenados se relacionan por

$$\partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu. \quad (2.47)$$

Entonces

$$\left[ \partial^\mu \partial_\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi(x) = \left[ \Lambda^\nu_\mu g^{\mu\sigma} \Lambda^\rho_\sigma \partial'_\nu \partial'_\rho + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi(\Lambda^{-1} x') \quad (2.48)$$

y usando (2.46) se reduce a

$$\begin{aligned} \left[ \partial^\mu \partial_\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi(x) &= \left[ g^{\nu\rho} \partial'_\nu \partial'_\rho + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi(\Lambda^{-1} x') \\ &= \left[ \partial'^\nu \partial'_\nu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi(\Lambda^{-1} x'). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Esto implica que la ecuación de Klein-Gordon es Lorentz-covariante, pues mantiene su forma en distintos sistemas coordenados relacionados por medio de una transformación de Lorentz.

Al igual que para la ecuación de Schrödinger se encuentra que las funciones de onda plana

$$\phi^\pm(\mathbf{x}, t) = N e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mp Et)}, \quad (2.50)$$

donde  $E > 0$ , son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. Además, estas soluciones son autoestados del operador energía

$$\hat{E}\phi^\pm(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ N e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mp Et)} \right] = \pm E \phi^\pm(\mathbf{x}, t) \quad (2.51)$$

y el operador momentum

$$\hat{P}_i \phi^\pm(\mathbf{x}, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ N e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mp Et)} \right] = p_i \phi^\pm(\mathbf{x}, t). \quad (2.52)$$

Aquí notamos que las soluciones  $\phi^\pm(\mathbf{x}, t)$  tienen el mismo momentum pero tienen valor de energía con signo opuesto. Por esto  $\psi^+(\mathbf{x}, t)$  será llamado estado de energía positiva, y  $\phi^-(\mathbf{x}, t)$  de energía negativa.

### 2.2.2. Solución de la ecuación de Klein-Gordon

A partir de las funciones de onda plana se pueden formar otras soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, esto es

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \left[ e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \tilde{\phi}^+ \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) + e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + Et)} \tilde{\phi}^- \left( \frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right) \right] d^4p. \quad (2.53)$$

donde  $\tilde{\phi}^\pm \left( \frac{E}{c}, \pm \mathbf{p} \right) \in \mathbb{C}$ . Haciendo el cambio de variable  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  para la segunda integral se obtiene

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \left[ e^{-ip \cdot x / \hbar} \tilde{\phi}^+(p) + e^{ip \cdot x / \hbar} \tilde{\phi}^-(p) \right] d^4p \quad (2.54)$$

donde  $p \cdot x \equiv Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ . Reemplazando esta expresión en la ecuación de Klein-Gordon se obtiene

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int (-c^2 p^2 + m^2 c^4) \left[ e^{-ip \cdot x / \hbar} \tilde{\phi}^+(p) + e^{ip \cdot x / \hbar} \tilde{\phi}^-(p) \right] d^4p = 0. \quad (2.55)$$

Para que la transformación de Fourier sea única se debe cumplir que  $(-c^2 p^2 + m^2 c^4) \tilde{\phi}^\pm(p) = 0$ , lo que implica que

$$\tilde{\phi}^\pm(p) = \delta(-c^2 p^2 + m^2 c^4) \tilde{a}^\pm(p) \quad (2.56)$$

donde  $a^\pm(p)$  es una función arbitraria. Ahora expresamos la distribución Delta de Dirac como

$$\delta(-c^2 p^2 + m^2 c^4) = \delta(\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 - E^2) \quad (2.57)$$

de la definición de la distribución obtenemos

$$\delta(-c^2 p^2 + m^2 c^4) = \frac{\delta(\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - E) + \delta(\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} + E)}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}}. \quad (2.58)$$

Reemplazando en (2.54) y (2.56), y definiendo

$$a^\pm(p) = \frac{1}{\sqrt{2E}} \tilde{a}^\pm(p) \quad (2.59)$$

se obtiene que la solución general de la ecuación de Klein-Gordon será dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2E}} [e^{-ip \cdot x/\hbar} a^+(p) + e^{ip \cdot x/\hbar} a^-(p)] d^3p. \quad (2.60)$$

Para determinar que soluciones son aceptables como estados de una partícula hay que recordar que la función de onda por sí misma no tiene una interpretación física, sino las densidades de probabilidad obtenidas a partir de esta. Para encontrar la densidad de probabilidad en el caso de la ecuación de Klein-Gordon, hallaremos la ecuación de continuidad para así poder identificar uno de los términos de esta con la densidad de probabilidad de la posición de la partícula.

Al aplicar  $\phi^*$  por el lado izquierdo de la ecuación de la ecuación de Klein-Gordon (2.44) se obtiene

$$\phi^* \left[ \partial_\mu \partial^\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0, \quad (2.61)$$

y al aplicar  $\psi$  por el lado izquierdo de su conjugada compleja:

$$\phi \left[ \partial_\mu \partial^\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi^* = 0. \quad (2.62)$$

Al restar estas ecuaciones obtenemos

$$\phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi - \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* = \partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi) - \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi^*) = 0, \quad (2.63)$$

entonces al definir

$$j^\mu \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (2.64)$$

se obtiene la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.65)$$

Así, la densidad de probabilidad será

$$\rho \equiv \frac{1}{c} j^0 = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right). \quad (2.66)$$

Notamos que la operador densidad depende de la derivada parcial respecto del tiempo de la función de onda, lo cual sugiere la existencia de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon con probabilidad negativa, lo cual claramente es una inconsistencia. Esto se hace evidente al hallar la densidad de probabilidad (2.66) para las funciones de onda plana:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( N e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mp Et)} \partial_t \left( N^* e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mp Et)} \right) - N e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mp Et)} \partial_t \left( N^* e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mp Et)} \right) \right) \quad (2.67)$$

entonces

$$\rho = \pm \frac{|N|^2}{2mc^2} E. \quad (2.68)$$

Una posible solución para esta inconsistencia es definir densidades de probabilidad distintas para las soluciones con energía positiva negativa, pero esto implicaría que nos se pueden tratar estas soluciones como elementos de un espacio con un producto interno definido. Por ello una solución de la ecuación de Klein-Gordon es una función de onda cuando está formado como una

combinación lineal de los estados de energía positiva o negativa, pero no una combinación de estos.

Esto significa que las únicas soluciones que se pueden interpretar como una función de onda son aquellas que se pueden expresar como

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2E}} a^+(p) e^{-ip \cdot x/\hbar} d^3p \quad (2.69)$$

o

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{1}{\sqrt{2E}} a^-(p) e^{ip \cdot x/\hbar} d^3p. \quad (2.70)$$

Ahora vamos a encontrar la densidad de probabilidad asociada al operador momentum. Para ello vamos a considerar las soluciones de la forma (2.69), cuya derivada parcial respecto del tiempo es dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x) = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{E}{2}} a^+(p) e^{-ip \cdot x/\hbar} d^3p. \quad (2.71)$$

Al expresar la densidad de probabilidad (2.66) de la forma:

$$\rho(x) = \frac{\hbar}{mc^2} \text{Im} \left\{ \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right\} \quad (2.72)$$

se obtiene:

$$\int \rho(x) d^3x = \frac{\hbar}{mc^2} \text{Im} \left\{ \int \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} d^3x \right\}. \quad (2.73)$$

Al usar la igualdad (2.34) se reduce a:

$$\int \rho(x) d^3x = \frac{\hbar}{mc^2} \text{Im} \left\{ i \frac{1}{2\hbar} \int |a^+(p)|^2 d^3p \right\} = \frac{1}{2mc^2} \int |a^+(p)|^2 d^3p. \quad (2.74)$$

Esto se puede expresar de forma equivalente como:

$$\int \rho(x) d^3x = \int \gamma(p) \left| \frac{1}{\sqrt{2E}} a^+(p) \right|^2 d^3p \quad (2.75)$$

donde  $\gamma(p)$  es el factor de Lorentz para una partícula clásica de masa  $m$  que se mueve con un momentum  $\mathbf{p}$ . En el límite no relativista,  $\gamma(p)$  tiende a 1, así la densidad de probabilidad concuerda con lo obtenido en el caso no relativista.



## Capítulo 3

### Paquetes de onda

En el capítulo anterior se obtuvo, en el caso no relativista, que cualquier solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre puede expresarse como una combinación lineal de auto-estados de energía-momento, también conocidos como funciones de onda plana. Estas soluciones no son cuadrado integrables al considerar que la partícula se puede propagar libremente en todo el espacio-tiempo. Esto tiene una consecuencia importante, y es que la densidad de probabilidad asociada al operador posición no está bien definida, pues tiene el mismo valor en cada punto del espacio coordinado. Además, para relacionar la función de onda de una partícula libre con el hecho de que una partícula clásica tiene una posición definida, es necesario encontrar una función de onda que nos dé la idea de localidad alrededor de un punto, el cual sería asignado a la posición de la partícula clásica. Esto nos lleva a la definición de un paquete de onda gaussiano, el cual es derivado en este capítulo de dos formas distintas en el marco no relativista. Y se calculan las densidades de probabilidad de un paquete de onda gaussiano asociadas a los operadores de posición y momentum, y se estudia su evolución.

Posteriormente, se plantea la formulación de un paquete de onda gaussiano en el marco relativista, en específico, para la ecuación de Klein-Gordon. Sin embargo, a diferencia del caso no relativista, no toda solución de la ecuación de Klein-Gordon puede ser interpretada como una función de onda. Para definir una función de onda de una partícula libre, se debe considerar que el estado de la partícula es descrito por una combinación lineal de funciones de onda plana con energía positiva o negativa, pero no ambas a la vez. Por consistencia con el caso no relativista, se asume que la solución buscada solo es combinación de las funciones de onda plana con energía positiva. Luego, se estudia la evolución de una función de onda que inicialmente tiene la forma de la función de onda encontrada en el caso no relativista. Para esto se calcula la transformada de Fourier de la gaussiana y se reemplaza el resultado obtenido en la expansión de la solución general. Esto nos lleva a una integral, la cual, según Huang et al. [1], produce una densidad de probabilidad que tiene valores negativos en algunos puntos cuando la función de onda está muy localizada. Por esto se realiza una aproximación en la que la densidad de probabilidad es positiva en todos los puntos. Habiendo calculado la función de onda, se determina la densidad de probabilidad asociada al operador posición y se estudia su propagación, observándose que mantiene la forma de una distribución en todo instante. Finalmente, se analiza la densidad de probabilidad en el espacio de momentos.

## 3.1. Paquetes de onda en el marco no relativista

### 3.1.1. Formación de un paquete de onda gaussiano

Consideremos una partícula libre unidimensional que se propaga a lo largo del eje  $z$ . La ecuación de Schrödinger correspondiente es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} \psi(z, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(z, t), \quad (3.1)$$

cuyas soluciones son las funciones de onda plana unidimensionales:

$$\psi_p(z, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(pz - Et)\right\} \quad (3.2)$$

donde  $E$  y  $p$  son la energía y el momentum, respectivamente, y satisfacen la ecuación de dispersión:

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.3)$$

Estas soluciones no pertenecen al espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ , puesto que la integral  $\int \psi^* \psi dz$  diverge, por lo que no representan el estado de una partícula.

Para construir una solución de la ecuación de Schrödinger que sí sea de cuadrado integrable, se propone una función de la forma:

$$\psi(z, t) = f(z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}. \quad (3.4)$$

Con el fin de reproducir el comportamiento de una onda plana, se impone la igualdad:

$$\omega_0 = \frac{\hbar}{2m} k_0^2, \quad (3.5)$$

la cual se obtiene al identificar a  $p = \hbar k_0$  y  $E = \hbar \omega_0$  en la relación de dispersión (3.3).

Para sustituir  $\psi(z, t)$  en la ecuación de Schrödinger (3.1), se calculan las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = \left[ \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} - i\omega_0 f(z, t) \right] e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = \left[ \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} - k_0^2 f(z, t) \right] e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}. \quad (3.7)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.1) y simplificando el factor exponencial común, se obtiene:

$$i\hbar \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} + \hbar \omega_0 f(z, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} - k_0^2 f(z, t) \right], \quad (3.8)$$

que se reduce usando la relación (3.5), y dividiendo todos los términos entre  $i\hbar$ :

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = i \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\hbar k_0}{m} \frac{\partial f(z, t)}{\partial z}. \quad (3.9)$$

En esta última ecuación observamos que el primer término del lado derecho es proporcional a  $\frac{\hbar}{2m}$  y a la segunda derivada de  $f(z, t)$  respecto de  $z$ , mientras que el segundo término es proporcional a  $\frac{\hbar}{m}$  y a la primera derivada de  $f(z, t)$  respecto de  $z$ . Esta estructura sugiere que una posible solución podría contener un término dependiente de  $z^2$ , aunque también incorporar términos dependientes de  $t$ . Por ello, se propone la siguiente solución:

$$f(z, t) = e^{A(t) - B(t)\left(z - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}, \quad (3.10)$$

cuyas derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[ A'(t) - B'(t) \left( z - \frac{\hbar k_0}{m}t \right)^2 + \frac{2\hbar k_0}{m} B(t) \left( z - \frac{\hbar k_0}{m}t \right) \right] f(z, t) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2B(t) \left( z - \frac{\hbar k_0}{m}t \right) f(z, t) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left[ -2B(t) + 4B(t)^2 \left( z - \frac{\hbar k_0}{m}t \right)^2 \right] f(z, t). \quad (3.13)$$

Al sustituir estas igualdades en la ecuación (3.9), se obtiene

$$A'(t) - B'(t) \left( z - \frac{\hbar k_0}{m}t \right)^2 = \frac{i\hbar}{2m} \left[ -2B(t) + 4B(t)^2 \left( z - \frac{\hbar k_0}{m}t \right)^2 \right], \quad (3.14)$$

Dado que, en general,  $z - \hbar k_0 t/m$  no es igual a cero, para satisfacer la igualdad se deben cumplir las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$A'(t) + \frac{i\hbar}{m}B(t) = 0, \quad B'(t) + \frac{2i\hbar}{m}B(t)^2 = 0. \quad (3.15)$$

La segunda ecuación es una ecuación diferencial de primer orden cuya solución es de la forma:

$$B(t) = \frac{1}{C + \frac{2i\hbar t}{m}}, \quad (3.16)$$

donde  $C \in \mathbb{C}$  es la constante de integración, y depende de las condiciones iniciales. Con esta solución, podemos ahora determinar  $A(t)$  resolviendo la ecuación diferencial de primer orden:

$$A'(t) = \frac{-i\hbar}{mC + 2i\hbar t}, \quad (3.17)$$

en donde, integrando, se obtiene:

$$A(t) = D - \frac{1}{2} \ln(2i\hbar t + mC). \quad (3.18)$$

siendo  $D$  otra constante de integración.

Finalmente, al sustituir las expresiones para  $B(t)$  y  $A(t)$  en (3.10), y luego en (3.4), se obtiene la solución buscada:

$$\psi(z, t) = e^{i(k_0 - \omega_0 t)} \frac{e^D}{\sqrt{mC + 2i\hbar t}} \exp \left\{ -\frac{1}{C + \frac{2i\hbar t}{m}} \left( z - \frac{\hbar k_0}{m}t \right)^2 \right\}. \quad (3.19)$$

Para comprobar que  $\psi(z, t)$  es un elemento de  $L^2(\mathbb{R})$ , debe verificarse que la integral

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(z, t) \psi(z, t) dz, \quad (3.20)$$

sea convergente e igual a 1. Dada la complejidad de (3.19), es conveniente evaluar primero  $I(0)$  para reducir el número de constantes, y luego verificar que  $I(t) = 1$  para todo  $t$ .

Asumiendo que  $C$  es un número real y positivo, la integral en  $t = 0$  se calcula como:

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2D}}{mC} \exp\left\{-\frac{2}{C}z^2\right\} dz = \frac{e^{2D}}{mC} \sqrt{\frac{\pi C}{2}} \quad (3.21)$$

y de la condición de normalización  $I(0) = 1$  se obtiene:

$$e^{2D} = m \sqrt{\frac{2C}{\pi}} \quad (3.22)$$

Con este resultado, la integral en un instante arbitrario  $t$  resulta:

$$\begin{aligned} I(t) &= m \sqrt{\frac{2C}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m^2 C^2 + 4\hbar^2 t^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2C}{C^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}} \left(z - \frac{\hbar k_0 t}{m}\right)^2\right\} dz \\ &= m \sqrt{\frac{2C}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{m^2 C^2 + 4\hbar^2 t^2}} \sqrt{\frac{(C^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}) \pi}{2C}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por lo tanto, la solución (3.19) es cuadrado integrable. Tras aplicar la condición de normalización  $I(t) = 1$ , se expresa como:

$$\psi(z, t) = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \frac{\left(\frac{2C}{\pi}\right)^{1/4}}{\sqrt{C + i\frac{2\hbar t}{m}}} \exp\left\{-\frac{1}{C + i\frac{2\hbar t}{m}} \left(z - \frac{\hbar k_0 t}{m}\right)^2\right\}. \quad (3.24)$$

La constante  $C$  en la solución obtenida carece aún de una interpretación física directa. Para encontrar su significado, se aborda el problema inicial desde otra perspectiva. En esta se considera una densidad de probabilidad asociada al operador momentum igual a una distribución gaussiana centrada en  $p_0$  con desviación estándar  $\sigma_p$ . De este modo, la función de onda en el espacio de soluciones será la transformada de Fourier de:

$$f(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_p}} \exp\left\{-\frac{(p - p_0)^2}{4\sigma_p^2}\right\}. \quad (3.25)$$

Esto se expresa de forma explícita como:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - pz)} dp. \quad (3.26)$$

Para evaluar la integral (3.26), se define

$$A = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_p} (2\pi\hbar)^{1/2}}, \quad (3.27)$$

con lo cual  $\psi(z, t)$  se expresará como:

$$\begin{aligned}\psi(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\sigma_p^2}} e^{\frac{i}{\hbar} \left[ pz - \frac{p^2 t}{2m} \right]} dp \\ &= A e^{-\frac{p_0^2}{4\sigma_p^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2 \left[ \frac{1}{4\sigma_p^2} + i \frac{t}{2\hbar m} \right]} e^{ip \left[ -i \frac{p_0}{2\sigma_p^2} + \frac{z}{\hbar} \right]} dp.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Así, la integral a calcular es de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{i\beta x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left(x - \frac{i\beta}{2\alpha}\right)^2} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} dx = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx. \quad (3.29)$$

cuya solución es dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{i\beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \quad (3.30)$$

Por lo que la solución (3.28) es:

$$\psi(z, t) = A e^{-\frac{p_0^2}{4\sigma_p^2}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4\sigma_p^2} + i \frac{t}{2\hbar m}}} \exp \left\{ -\frac{1}{\left( \frac{1}{\sigma_p^2} + i \frac{2t}{\hbar m} \right)} \left[ -i \frac{p_0}{2\sigma_p^2} + \frac{z}{\hbar} \right]^2 \right\}. \quad (3.31)$$

Esta solución es idéntica a la obtenida anteriormente en (3.24) mediante la identificación  $C = \frac{\hbar^2}{\sigma_p^2}$ . Esto proporciona la interpretación física buscada para  $C$ .

Para obtener la densidad de probabilidad asociada a esta función de onda, es conveniente expresar la función de onda en forma polar, separando la amplitud real del factor de fase. Para esto, se expande el exponente:

$$\begin{aligned}\frac{\left[ -\frac{ip_0}{2\sigma_p^2} + \frac{z}{\hbar} \right]^2}{\left( \frac{1}{\sigma_p^2} + \frac{2it}{\hbar m} \right)} &= \frac{\left( \frac{1}{\sigma_p^2} - \frac{2it}{\hbar m} \right)}{\left( \frac{1}{\sigma_p^4} + \frac{4t^2}{m^2 \hbar^2} \right)} \left[ -\frac{p_0^2}{4\sigma_p^4} + \frac{z^2}{\hbar^2} - i \frac{p_0 z}{\hbar \sigma_p^2} \right] \\ &= \frac{1}{\left( \frac{1}{\sigma_p^4} + \frac{4t^2}{m^2 \hbar^2} \right)} \left[ -\frac{p_0^2}{4\sigma_p^6} + \frac{z^2}{\hbar^2 \sigma_p^2} - \frac{ip_0 z}{\hbar \sigma_p^4} + \frac{ip_0^2 t}{2m \hbar \sigma_p^4} - \frac{2it z^2}{m \hbar^3} - \frac{2tp_0 z}{\hbar^2 \sigma_p^2 m} \right].\end{aligned}\quad (3.32)$$

Sustituyendo en la expresión de  $\psi(z, t)$  y reagrupando términos:

$$\begin{aligned}\psi(z, t) &= A \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4\sigma_p^2} + \frac{it}{2\hbar m}}} \exp \left\{ -\frac{1}{\left( \frac{1}{\sigma_p^4} + \frac{4t^2}{m^2 \hbar^2} \right)} \left[ \left( \frac{z}{\hbar \sigma_p} - \frac{p_0 t}{\sigma_p m \hbar} \right)^2 - \frac{ip_0 z}{\hbar \sigma_p^4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{ip_0^2 t}{2m \hbar \sigma_p^4} - \frac{2it z^2}{m \hbar^3} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Luego, se expresa en forma polar el coeficiente del paquete de onda como:

$$\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4\sigma_p^2} + \frac{it}{2\hbar m}}} = \sqrt{\frac{4\pi \left( \frac{1}{\sigma_p^2} - \frac{2it}{\hbar m} \right)}{\frac{1}{\sigma_p^4} + \frac{4t^2}{m^2 \hbar^2}}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_p^4} + \frac{4t^2}{m^2 \hbar^2}}}} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \arctan \left( \frac{2\sigma_p^2 t}{m \hbar} \right) \right\}. \quad (3.34)$$

De este modo, al definir las cantidades:

$$\sigma_z \equiv \frac{\hbar}{2\sigma_p} \sqrt{1 + \frac{4\sigma_p^4}{\hbar^2} \frac{t^2}{m^2}} \quad \text{y} \quad v_0 \equiv \frac{p_0}{m}, \quad (3.35)$$

se obtiene finalmente la función de onda en la forma compacta:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_z}} \exp\left\{-\frac{(z - v_0 t)^2}{4\sigma_z^2}\right\} e^{i\phi(z, t)} \quad (3.36)$$

con la fase  $\phi(z, t)$  dada por:

$$\phi(z, t) = \frac{1}{\hbar} \left[ p_0 + \frac{\sigma_p^2 v_0 t}{2\sigma_z^2 p_0} \right] (z - v_0 t) + \frac{p_0}{2\hbar} v_0 t - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\sigma_p^2 t}{m\hbar}\right). \quad (3.37)$$

Como la función de onda obtenida tiene una componente real y otra imaginaria, para observar su evolución, se necesitan graficar ambas componentes. Esto se muestra en la Figura 3.1, y se observa que la función de onda se dispersa, lo cual se relaciona al hecho de que es una combinación de distintos paquetes de onda con momentum fijo, por lo que los valores de momentum mayores harán que la función se disperse.

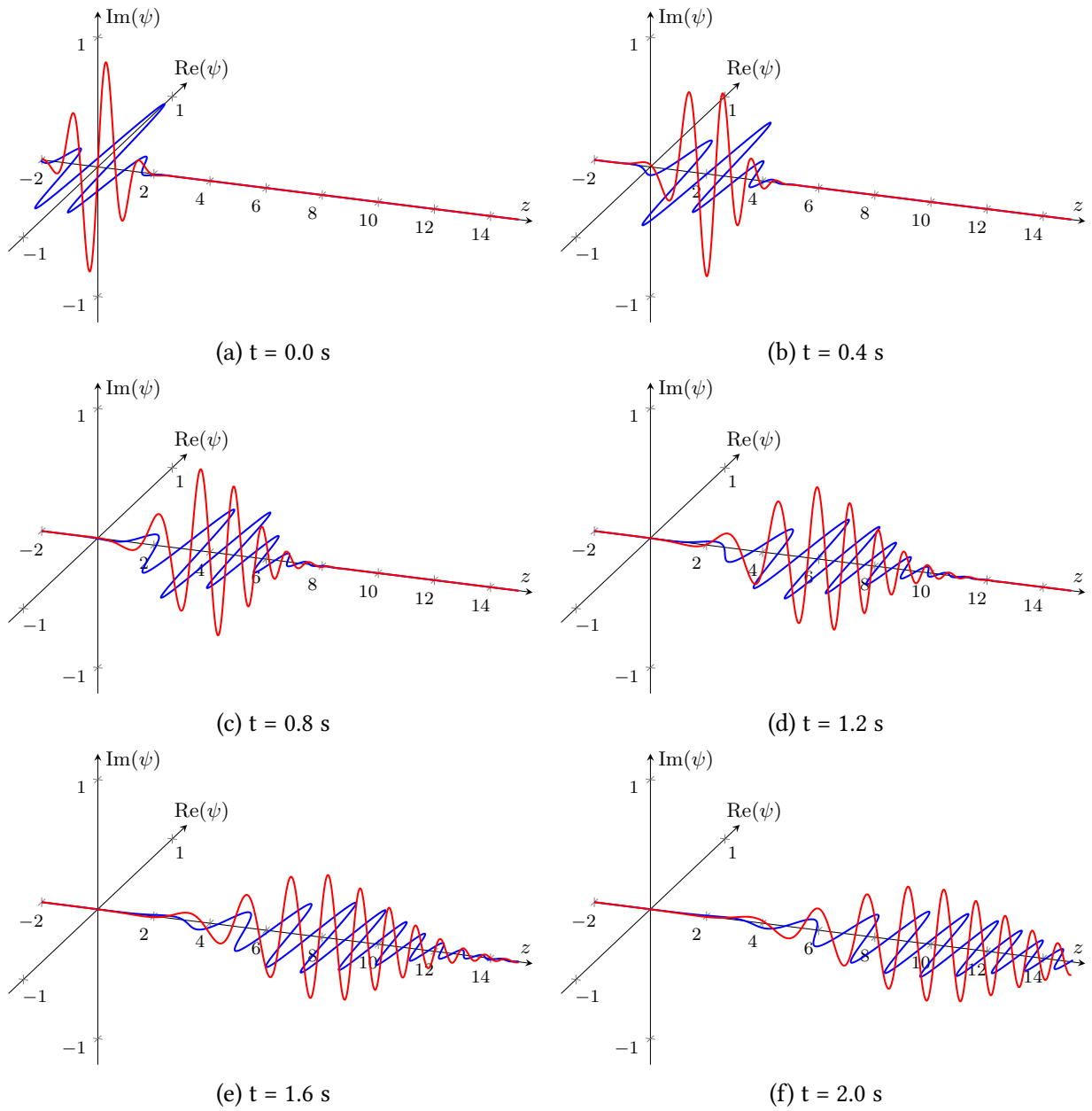


Figura 3.1: Evolución de un paquete de onda gaussiano para una rapidez media no nula.

### 3.1.2. Densidad de probabilidad

Aunque la evolución de la función de onda es importante para determinar los posibles valores de una medición, el objeto de interés físico directo es la densidad de probabilidad asociada a los observables que se desean medir. Para el caso del observable posición, representado por el operador  $\hat{Z}$  que actúa como:

$$\hat{Z}\psi(z, t) = z\psi(z, t), \quad (3.38)$$

la densidad de probabilidad en el instante  $t$  es  $|\psi(z, t)|^2$ . En el caso del paquete de onda gaussiano, esta toma la forma explícita:

$$|\psi(z, t)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_z} \exp\left\{-\frac{(z - v_0 t)^2}{2\sigma_z^2}\right\}. \quad (3.39)$$

La evolución temporal de esta densidad de probabilidad se ilustra en la Figura 3.2. En ella se observa claramente que el paquete se desplaza con velocidad constante  $v_0$  y, simultáneamente, se dispersa debido a la dependencia temporal de  $\sigma_z$  en (3.35).

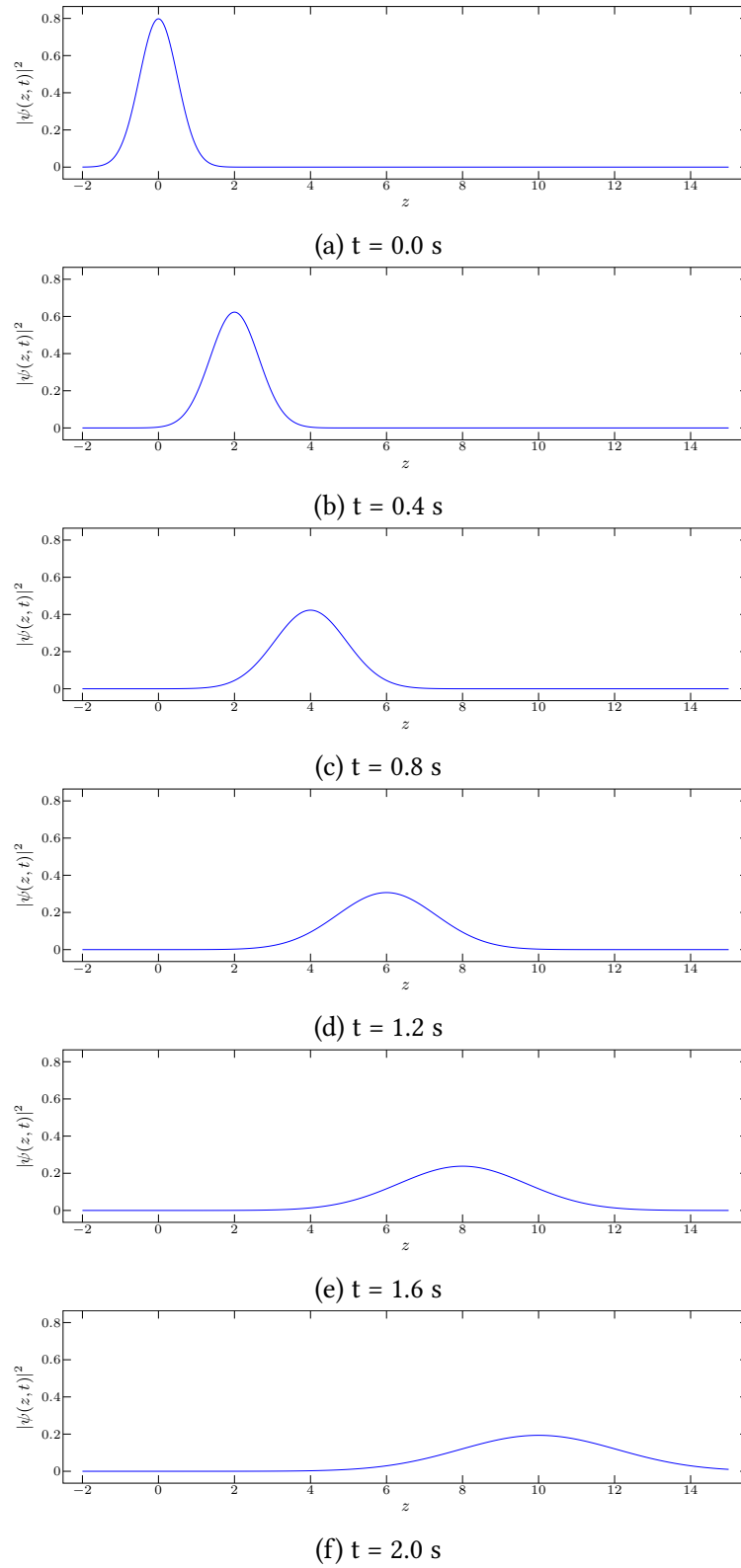


Figura 3.2: Evolución de la densidad de probabilidad de un paquete de onda gaussiano para una rapidez no nula.

Una vez obtenida la densidad de probabilidad para la posición, se calcula su valor esperado e

incertidumbre correspondiente. Se tiene:

$$\langle z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{-\infty}^{\infty} z \exp\left\{-\frac{(z - v_0 t)^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz \quad (3.40)$$

$$\langle z^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp\left\{-\frac{(z - v_0 t)^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz. \quad (3.41)$$

Estas integrales se resuelven mediante las identidades gaussianas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}, \quad (3.42)$$

obteniéndose:

$$\langle z \rangle = v_0 t, \quad \langle z^2 \rangle = \sigma_z^2 + (v_0 t)^2. \quad (3.43)$$

El valor esperado de la posición indica que el centro del paquete se mueve con velocidad constante  $v_0$ , siguiendo la trayectoria clásica de una partícula libre con la misma velocidad. Por ello, interpretaremos  $v_0$  como la velocidad media de la partícula.

A partir de (3.43), la incertidumbre de la posición resulta:

$$\Delta z = \sigma_z. \quad (3.44)$$

Recordando que  $\sigma_z$  fue definida en (3.35)

$$\sigma_z(t) = \frac{\hbar}{2\sigma_p} \sqrt{1 + \frac{4\sigma_p^4 t^2}{\hbar^2 m^2}}, \quad (3.45)$$

la incertidumbre  $\Delta z$  aumenta. Esto se puede entender como una consecuencia de que el paquete de onda gaussiano es una superposición de funciones de onda plana con diferentes momentos, tal que la diferencia entre los valores de momentum genera el aumento de la incertidumbre de la posición.

Al considerar el operador momentum en el espacio de posiciones:

$$\hat{P}\psi(z) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dz} \psi(z). \quad (3.46)$$

la densidad de probabilidad asociada a este será dada por:

$$|f(p)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left\{-\frac{(p - p_0)^2}{2\sigma_p^2}\right\}. \quad (3.47)$$

Nótese que esta distribución de probabilidad no depende del tiempo, es decir que para un paquete de onda gaussiano, la densidad de probabilidad asociada al observable momentum permanece invariante durante la evolución. Esto contrasta con el comportamiento de la densidad de probabilidad asociada al operador posición, donde el paquete se desplaza y dispersa.

A partir de esta densidad, los valores esperados del momento se calculan como:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \int_{-\infty}^{\infty} p \exp\left\{-\frac{(p - p_0)^2}{2\sigma_p^2}\right\} dp \quad (3.48)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \exp\left\{-\frac{(p - p_0)^2}{2\sigma_p^2}\right\} dp. \quad (3.49)$$

Usando las mismas identidades usadas para la posición, dadas en (3.42) se obtiene:

$$\langle p \rangle = p_0, \quad \langle p^2 \rangle = \sigma_p^2 + p_0^2. \quad (3.50)$$

El valor esperado del momentum coincide con el momentum clásico de una partícula libre con masa  $m$  y velocidad  $v_0$ . La incertidumbre correspondiente es:

$$\Delta p = \sigma_p, \quad (3.51)$$

la cual es constante para un paquete de onda gaussiano.

Finalmente, el producto de las incertidumbres resulta:

$$\Delta z \Delta p = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{4\sigma_p^4}{\hbar^2} \frac{t^2}{m^2}}. \quad (3.52)$$

Esta expresión satisface la relación de Heisenberg (2.28) en todo instante. El producto de incertidumbres alcanza su valor mínimo posible  $\hbar/2$  en  $t = 0$ , y posteriormente aumenta únicamente debido al crecimiento de la incertidumbre de la posición, ya que  $\Delta p$  permanece constante.

Si asociamos a  $t = 0$  con el instante posterior a una medición que prepara el estado como un paquete de onda gaussiano, la igualdad (3.52) evaluada en ese momento establece dos límites: uno en el que la partícula está bien localizada en el espacio de posiciones y otro en el que está bien localizada en el espacio de momentos.

Conforme evoluciona el sistema, el incremento de la  $\Delta z$  refleja la pérdida progresiva en la precisión del conocimiento de la posición de la partícula. Esta pérdida solo puede revertirse mediante una nueva medición, proceso que rompe la condición de evolución libre de interacciones considerada hasta ahora.

Así, para una partícula libre, después de un intervalo de tiempo suficientemente largo desde su preparación, el paquete de onda se habrá dispersado tanto que tenderá al límite de una partícula completamente deslocalizada en el espacio de posiciones. En esta situación, la descripción mediante una función de onda plana es una aproximación válida, aunque tal función no es una función de onda válida.

## 3.2. Paquetes de onda en el marco relativista

### 3.2.1. Formación de un paquete de onda gaussiano

Si una partícula se propaga en la dirección del eje  $z$ , las componentes del momentum en las otras direcciones deben anularse. Esto significa que una partícula relativista descrita por la ecuación de Klein-Gordon que se mueve en la dirección del eje  $z$  será dada por

$$\phi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2E}} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - pz)} a^+(p) dp. \quad (3.53)$$

donde  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ . Como  $a^+(p)$  depende del momentum y la masa de la partícula es una constante, podemos definir la función

$$\tilde{\phi}(p) \equiv \frac{a^+(p)}{\sqrt{2E}}, \quad (3.54)$$

lo que significa que la expresión anterior será ahora

$$\phi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(p) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} t - pz)\right\} dp. \quad (3.55)$$

Para hallar la evolución de un paquete de onda gaussiano como el obtenido en (3.36) para  $z_0 = 0$  y  $t = 0$ ,

$$\phi(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_z} \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{4\sigma_z^2} + \frac{i}{\hbar} p_0 z\right\}, \quad (3.56)$$

usamos la transformada inversa de Fourier para  $t = 0$ , es decir

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} p z} dz, \quad (3.57)$$

para luego reemplazar el valor obtenido de  $\tilde{\phi}(p)$  en la ecuación (3.55).

Al reemplazar (3.56) en la integral (3.57) se obtiene

$$\tilde{\phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}\sigma_z\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4\sigma_z^2}} e^{\frac{i}{\hbar}(p_0-p)z} dz, \quad (3.58)$$

la cual se puede resolver al usar (3.30):

$$\tilde{\phi}(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\sigma_z}{\hbar\sqrt{\pi}}} \exp\left\{-\frac{\sigma_z^2}{\hbar^2}(p - p_0)^2\right\}. \quad (3.59)$$

Antes de hallar  $\phi(z, t)$  hay que notar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}^*(p) \tilde{\phi}(p) dp = 1 \quad (3.60)$$

y que la desviación estándar  $\sigma_p$  es

$$\sigma_p \equiv \frac{\hbar}{2\sigma_z}. \quad (3.61)$$

Entonces, el paquete de onda gaussiano en cualquier instante de tiempo será:

$$\phi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_p 2\pi\hbar}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(p - p_0)^2}{4\sigma_p^2} + \frac{i}{\hbar} p z - \frac{i}{\hbar} t \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}\right\} dp. \quad (3.62)$$

Esta integral no se puede resolver de forma tan sencilla como se hizo para el caso no relativista, debido a que la energía no es un polinomio de grado menor o igual a dos para poder usar las integrales obtenidas de la función gaussiana. En el artículo publicado por Huang et al. [1] se obtuvo que para valores  $\sigma_z$  mayores a la longitud de onda reducida de Compton ( $\lambda_C$ ), la densidad de probabilidad evoluciona de forma similar a una función gaussiana. En contraste, para  $\sigma_z$  menor que  $\lambda_C$  esta no evoluciona como una función gaussiana. Además, para el caso de  $\sigma_z < \lambda_C$ , hay zonas con densidad de probabilidad negativa, lo cual corresponde a la contribución de estados de energía negativa. Pero no está bien definido para las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon para una partícula libre.

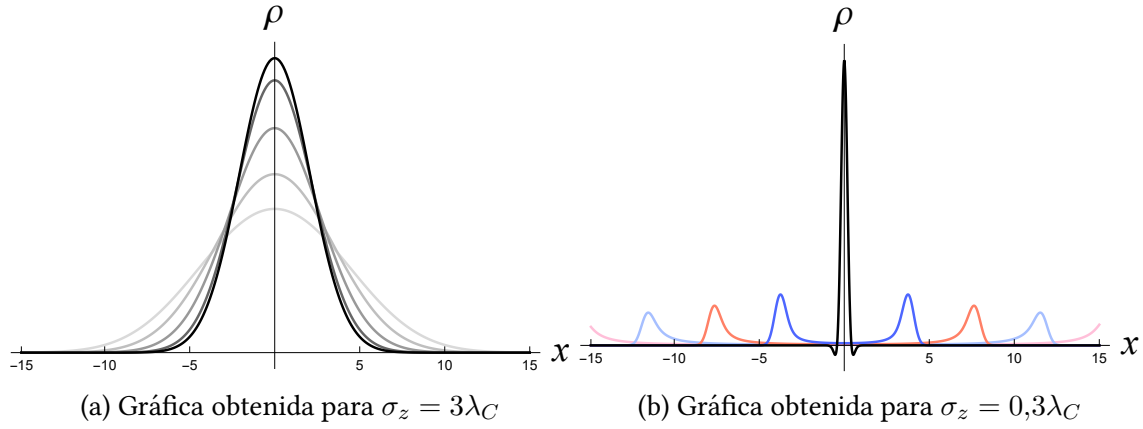


Figura 3.3: Evolución de paquete de onda gaussiano para la ecuación de Klein-Gordon para  $p_0 = 0$  para diferentes valores de  $\sigma_z$ , donde las curvas de colores oscuros a claro se relacionan con el aumento del tiempo. Extraído de Huang et al. [1].

Esto sugiere que para tener un paquete de onda gaussiano bien definido para la ecuación de Klein-Gordon se debe considerar que la distribución gaussiana de los momentos  $\tilde{\phi}(p)$  debe estar fuertemente localizada al alrededor de un punto, el cual denotaremos por  $p_0$ . Por esto expresamos la energía de la partícula de masa  $m$  en función de  $p_0$ :

$$E = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} = \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} \left[ 1 + \frac{p^2 - p_0^2}{p_0^2 + m c^2} \right]^{1/2} \quad (3.63)$$

Y al definir

$$E_0 \equiv (p_0 c^2 + m c^4)^{1/2} \quad (3.64)$$

se puede expresar como

$$E = E_0 \left[ 1 + \frac{(p^2 - p_0^2) c^2}{E_0^2} \right]^{1/2}. \quad (3.65)$$

Luego, la condición para que la distribución de momentos esté fuertemente localizada será  $(p - p_0)c/E_0 \ll 1$ . De esta, se puede realizar una expansión de Taylor con términos con factor  $(p - p_0)^n$  y despreciar los términos de menor contribución. Para hacer esto definimos la función  $g(p)$  como

$$g(p) = \left[ 1 + \frac{(p^2 - p_0^2) c^2}{E_0^2} \right]^{1/2}, \quad (3.66)$$

cuyas derivadas son

$$\frac{dg(p)}{dp} = \frac{p c^2}{E_0^2 g(p)}, \quad \frac{d^2 g(p)}{dp^2} = \frac{m^2 c^6}{E_0^4 [g(p)]^3}. \quad (3.67)$$

Así, al realizar la expansión de Taylor hasta el segundo término de de (3.65), se obtiene

$$E = E_0 \left[ 1 + \frac{p_0 c^2}{E_0^2} (p - p_0) + \frac{m^2 c^6}{2 E_0^4} (p - p_0)^2 \right]. \quad (3.68)$$

Al reemplazar (3.68) en (3.62) se obtiene:

$$\phi(z, t) = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}}{\sqrt{\sigma_p 2\pi \hbar \sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar}tE_0 \left[ \frac{p_0 c^2}{E_0^2} (p - p_0) + \frac{m^2 c^6}{2E_0^4} (p - p_0)^2 \right] - \frac{(p - p_0)^2}{4\sigma_p^2} + \frac{i}{\hbar}pz \right\} dp. \quad (3.69)$$

Y tras realizar el cambio de variable  $\kappa = p - p_0$ , la integral se expresa como

$$\phi(z, t) = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0t - p_0z)}}{\sqrt{\sigma_p 2\pi \hbar \sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( z - \frac{p_0 c^2 t}{E_0} \right) \kappa - \left( i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2} \right) \kappa^2 \right\} d\kappa. \quad (3.70)$$

De modo que, luego de usar (3.30), se obtiene:

$$\phi(z, t) = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0t - p_0z)}}{\sqrt{\sigma_p 2\pi \hbar \sqrt{2\pi}}} \sqrt{\frac{\pi}{i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2}}} \exp \left\{ -\frac{\frac{1}{\hbar^2} \left( z - \frac{p_0 c^2 t}{E_0} \right)^2}{4 \left( i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2} \right)} \right\}. \quad (3.71)$$

### 3.2.2. Densidad de probabilidad

Sin embargo, para la ecuación de Klein-Gordon el valor de  $\phi(z, t)$  no es suficiente para determinar la densidad de probabilidad de la posición, sino que también se debe tomar en cuenta su derivada respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar} E_0 \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0t - p_0z)}}{\sqrt{\sigma_p 2\pi \hbar \sqrt{2\pi}}} \sqrt{\frac{\pi}{i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2}}} \exp \left\{ -\frac{\frac{1}{\hbar^2} \left( z - \frac{p_0 c^2 t}{E_0} \right)^2}{4 \left( i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2} \right)} \right\} \\ & + i \frac{m^2 c^6}{4\hbar E_0^3} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0t - p_0z)}}{\sqrt{\sigma_p 2\pi \hbar \sqrt{2\pi}}} \sqrt{\frac{\pi}{\left( i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2} \right)^3}} \exp \left\{ -\frac{\frac{1}{\hbar^2} \left( z - \frac{p_0 c^2 t}{E_0} \right)^2}{4 \left( i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2} \right)} \right\} \\ & - \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0t - p_0z)}}{\sqrt{\sigma_p 2\pi \hbar \sqrt{2\pi}}} \sqrt{\frac{\pi}{i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2}}} \exp \left\{ -\frac{\frac{1}{\hbar^2} \left( z - \frac{p_0 c^2 t}{E_0} \right)^2}{4 \left( i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2} \right)} \right\} \\ & \times \frac{-\frac{8}{\hbar^2} \left( z - \frac{p_0 c^2 t}{E_0} \right) \frac{p_0 c^2}{E_0} \left( i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2} \right) - i \frac{2m^2 c^6}{\hbar^3 E_0^3} \left( z - \frac{p_0 c^2 t}{E_0} \right)^2}{16 \left( i \frac{m^2 c^6 t}{\hbar 2 E_0^3} + \frac{1}{4\sigma_p^2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Con esto se puede hallar la dependencia de la densidad de probabilidad del tiempo y la posición usando (2.72):

$$\rho(x) = \frac{\hbar}{mc^2} \text{Im} \left\{ \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right\}$$

es decir:

$$\rho(z, t) = \frac{1}{2mc^2\pi\sigma_p\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{\frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4}} \exp \left\{ -\frac{\frac{1}{2\hbar^2\sigma_p^2} \left( z - \frac{p_0c^2}{E_0}t \right)^2}{4 \left( \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4} \right)} \right\} \times$$

$$\left[ \frac{E_0}{\hbar} - \frac{\frac{m^2c^6}{4\hbar^2E_0^3} \frac{1}{4\sigma_p}}{\frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4}} + \frac{\frac{1}{\hbar^2} \left( z - \frac{p_0c^2}{E_0}t \right) \frac{p_0c^2}{E_0} \frac{m^2c^6t}{2\hbar E_0^3}}{2 \left( \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4} \right)} \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{2m^2c^6}{\hbar^3E_0^3} \left( z - \frac{p_0c^2}{E_0}t \right)^2 \left( \frac{1}{16\sigma_p^4} - \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} \right)}{16 \left( \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4} \right)^2} \right]. \quad (3.73)$$

Sin embargo, este resultado no está normalizado. Esto se debe a que  $|\tilde{\phi}(p)|^2$  no es la densidad de probabilidad en el espacio de momentos, sino  $\gamma(p)|\tilde{\phi}(p)|^2$ , según lo obtenido en (2.75). Al normalizarla, se obtiene:

$$\rho(z, t) = \frac{1}{\left( \frac{E_0}{\hbar} - \frac{\frac{m^2c^6}{4\hbar^2E_0^3} \frac{1}{4\sigma_p}}{\frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4}} - \frac{\frac{m^2c^6}{\hbar E_0^3} \sigma_p^2 \left( \frac{1}{16\sigma_p^4} - \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} \right)}{2 \left( \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4} \right)} \right) \sqrt{\pi 8\hbar^2\sigma_p^2 \left( \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4} \right)}}$$

$$\exp \left\{ -\frac{\frac{1}{2\hbar^2\sigma_p^2} \left( z - \frac{p_0c^2}{E_0}t \right)^2}{4 \left( \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4} \right)} \right\} \times \left[ \frac{E_0}{\hbar} - \frac{\frac{m^2c^6}{4\hbar^2E_0^3} \frac{1}{4\sigma_p}}{\frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4}} + \frac{\frac{1}{\hbar^2} \left( z - \frac{p_0c^2}{E_0}t \right) \frac{p_0c^2}{E_0} \frac{m^2c^6t}{2\hbar E_0^3}}{2 \left( \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4} \right)} \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{2m^2c^6}{\hbar^3E_0^3} \left( z - \frac{p_0c^2}{E_0}t \right)^2 \left( \frac{1}{16\sigma_p^4} - \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} \right)}{16 \left( \frac{m^4c^{12}t^2}{4\hbar^2E_0^6} + \frac{1}{16\sigma_p^4} \right)^2} \right] \quad (3.74)$$

Su evolución es mostrada en la figura 3.4. En esta se nota que la densidad de probabilidad evoluciona como un paquete de onda gaussiano, por lo que la aproximación usada es válida, y será usada más adelante para hallar la oscilación de sabor de paquetes de onda gaussianos de la ecuación de Klein-Gordon.

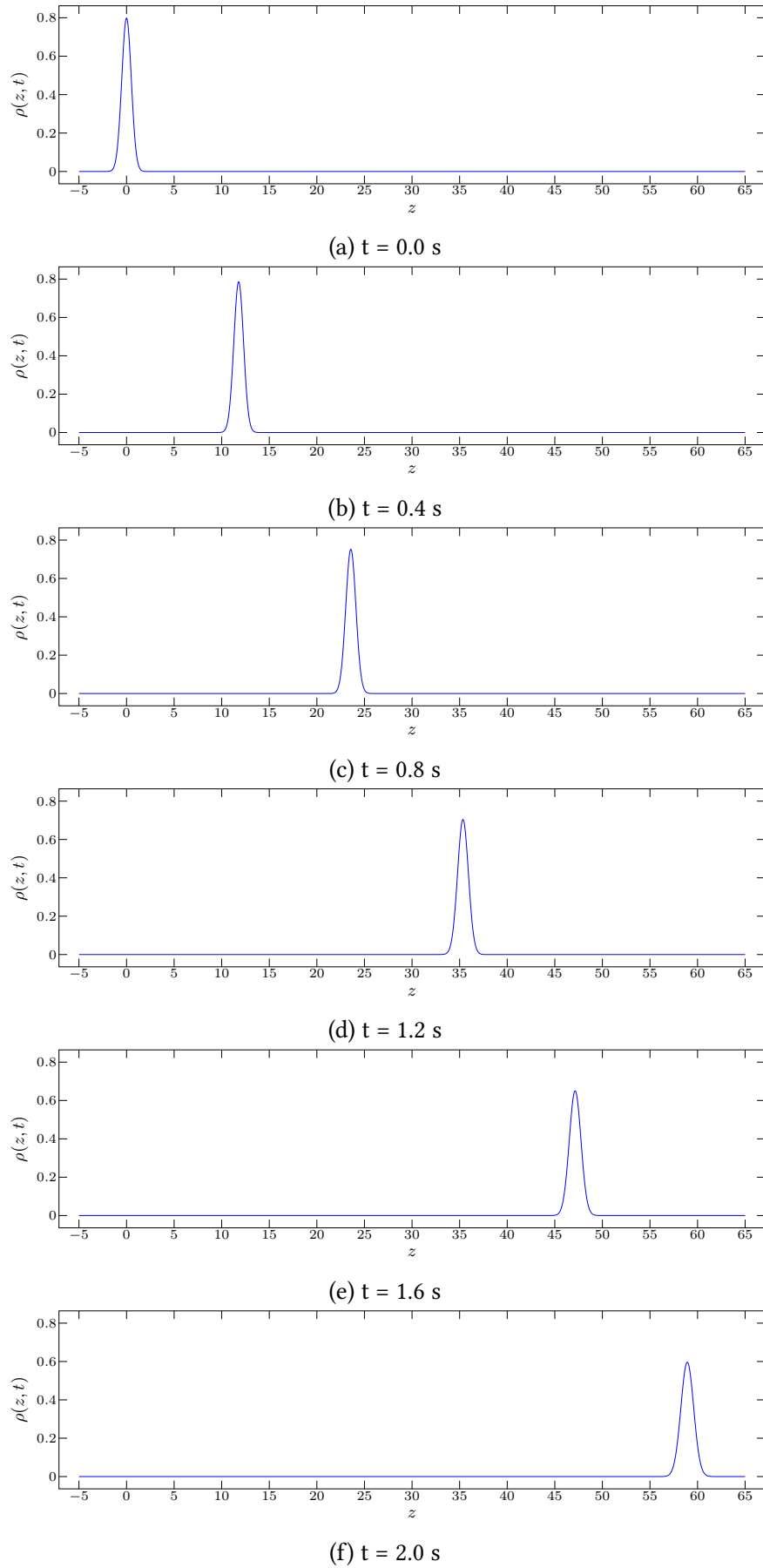


Figura 3.4: Evolución de la densidad de probabilidad de un paquete de onda gaussiano para la ecuación de Klein-Gordon.

La densidad de probabilidad asociada al operador momentum se obtiene de (3.59) y (2.75):

$$\rho_p = \gamma(p) \frac{1}{\sqrt{\sigma_p} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(p - p_0)^2}{4\sigma_p^2} \right\} \quad (3.75)$$

Como:

$$\gamma(p) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2 c^2}{E^2}}} = \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{mc^2}, \quad (3.76)$$

se obtiene:

$$\rho_p = \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{mc^2 \sqrt{\sigma_p} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(p - p_0)^2}{4\sigma_p^2} \right\}. \quad (3.77)$$

Y su gráfica está dada en:

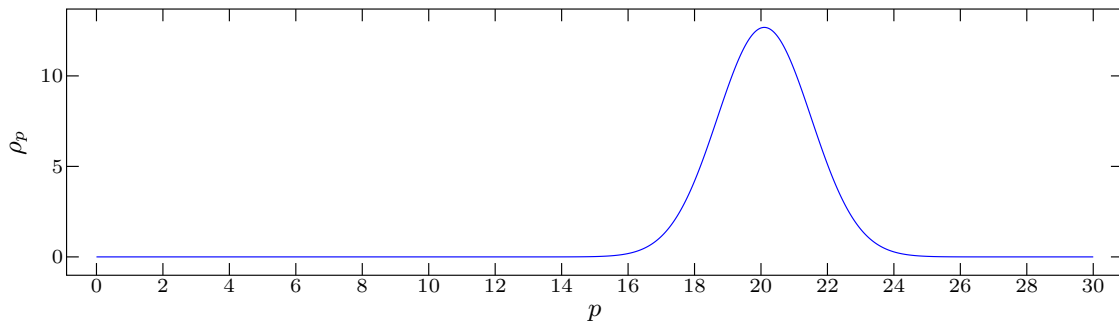


Figura 3.5: Densidad de probabilidad de una paquete de onda gaussiano en el espacio de momentos para la ecuación de Klein-Gordon



## Capítulo 4

# Oscilación de estados de sabor

En este capítulo se propone una estructura matemática que permite describir el fenómeno de la oscilación de sabor, pero para el contexto de los estados descritos por la teoría cuántica no relativista y la de Klein-Gordon. Luego, se estudia la oscilación de estados de sabor en ambos casos.

Se obtiene que los estados de sabor se forman como una combinación lineal de estados de masa correspondientes, de modo que la diferencia en las masas genera el fenómeno de la oscilación de estados de sabor.

En el caso de la teoría cuántica no relativista, se considera inicialmente una función de onda plana como aquella que define los estados de masa, y se obtiene que la probabilidad de transición tiene forma sinusoidal con un periodo que depende de la diferencia de los inversos de las masas. Luego, se consideran paquetes de onda gaussianos en lugar de funciones de onda planas, obteniéndose que la probabilidad de transición tiene un término de amortiguamiento, el cual hace que, para un intervalo de tiempo suficientemente largo, la probabilidad de transición entre estados de sabor tienda a un valor fijo. Además, el periodo de la probabilidad de transición cambia, adquiriendo una forma más compleja.

En el caso relativista, al considerar funciones de onda plana, se obtiene nuevamente que la probabilidad de transición tiene forma sinusoidal, con la diferencia de que el periodo depende de la diferencia de los cuadrados de las masas. Para considerar paquetes de onda gaussianos, se propone que el estado inicial de la partícula está dado por una combinación lineal de los estados de masa dados por funciones de onda plana. Luego, para resolver la integral que expresa la probabilidad de transición, se considera la aproximación realizada en el capítulo anterior, de modo que se puedan ignorar los términos de densidad negativa y que la integral tome la forma de una suma de integrales de funciones gaussianas. Con esto se obtiene la probabilidad de transición entre estados de sabor considerando paquetes de onda gaussianos, la cual también tiene un término de amortiguamiento.

## 4.1. Espacio de estados de sabor

Además de la masa, en la física de partículas existe otra propiedad intrínseca asociada a los neutrinos, esta es el sabor. En este sentido, al tratar dos propiedades intrínsecas de una partícula se debe tener una estructura matemática que las comprenda.

Una forma en la que se puede incorporar una nueva propiedad intrínseca externa a la teoría, agregando un grado de libertad, tal como y se hace al incorporar el espín en la mecánica cuántica no relativista. Para el caso de los espacios de estados en el caso de las soluciones de la ecuación de Schrödinger y de Klein-Gordon, denotado por  $E_m$ , esto es expresado como:

$$E_m \otimes (U_\alpha \oplus U_\beta) \quad (4.1)$$

donde  $U_\alpha$  y  $U_\beta$  denotan los espacios de sabor  $\alpha$  y  $\beta$ . Sin embargo, como se está considerando una partícula libre, esta formulación impide la transición de un estado de sabor a otro, haciendo que el sabor no cambie. Esto haría que la teoría no permite explicar el fenómeno de la oscilación de sabores.

Sin embargo, como se vio en el capítulo 2, no es posible una transición de un estado a otro sin la interacción con un objeto externo. Por lo que para que haya una transición de una propiedad intrínseca es necesario que este cambio esté relacionado con otra propiedad intrínseca. En este caso, se considera la masa. De este, al denotar los espacios de estados para masas  $m_1$  y  $m_2$  como  $E_{m_1}$  y  $E_{m_2}$ , respectivamente. El nuevo espacio de estados será dado por:

$$E_{m_1} \otimes E_{m_2}. \quad (4.2)$$

Y los estados de sabor definirán dos subespacios de este que sean diferentes de  $E_{m_1}$  y  $E_{m_2}$ . Esto garantiza la oscilación entre estados de sabor sin interacción con un campo externo.

## 4.2. Oscilación sabor-masa en el marco no relativista

### 4.2.1. Estados de sabor y oscilación de ondas planas

Usualmente la masa al ser una propiedad intrínseca de una partícula no tiene asociada un observable, sin embargo si se considera que hay otra propiedad intrínseca que no es simultánea con esta, es necesario definir estados de masa. Esto ocurre cuando se considera estados de sabor, el cual en el caso más simple hay dos posibles estados de sabor que serían una superposición de dos estados de masa para garantizar que el espacio tenga dimensión. Si se consideran las funciones de onda plana con un momento  $p$ , los estados de sabor serán dados por

$$|\nu_\alpha, p\rangle = \cos \theta |m_1, p\rangle + \sin \theta |m_2, p\rangle, \quad (4.3)$$

y

$$|\nu_\beta, p\rangle = -\sin \theta |m_1, p\rangle + \cos \theta |m_2, p\rangle, \quad (4.4)$$

donde  $|m_1, p\rangle$  y  $|m_2, p\rangle$  representan los estados de masa junto a las funciones de onda plana.

Si inicialmente el estado de la partícula es  $|\nu_\alpha, p\rangle$ , entonces en un instante  $t$  el estado de la partícula será

$$|\nu(t)\rangle = \cos \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} |m_1, p\rangle + \sin \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} |m_2, p\rangle. \quad (4.5)$$

Como los estados de masa se pueden expresar en función de los estados de sabor

$$\begin{aligned} |m_1, p\rangle &= \cos \theta |\nu_\alpha, p\rangle - \sin \theta |\nu_\beta, p\rangle, \\ |m_2, p\rangle &= \sin \theta |\nu_\alpha, p\rangle + \cos \theta |\nu_\beta, p\rangle, \end{aligned} \quad (4.6)$$

entonces el estado de la partícula en  $t$  se puede expresar como

$$|\nu(t)\rangle = (\cos^2 \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \sin^2 \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t}) |\nu_1, p\rangle + \sin \theta \cos \theta (e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} - e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t}) |\nu_2, p\rangle. \quad (4.7)$$

Se puede notar que como se había mencionado, si el estado es una combinación lineal de los estados de masa es posible que hayan transiciones a otros estados sin la necesidad de realizar una medición. Las probabilidades de que la partícula sea encontrada en el estado de sabor  $|\nu_\beta, p\rangle$  es

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = |\langle \nu_\beta, p | \nu(t) \rangle|^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \theta (2 - 2 \cos(E_1 - E_2) \frac{t}{\hbar}) \quad (4.8)$$

y la probabilidad de que esté en el estado  $|\nu_\alpha, p\rangle$  es

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha} = |\langle \nu_\alpha, p | \nu(t) \rangle|^2 = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos(E_1 - E_2) \frac{t}{\hbar} \quad (4.9)$$

Pero como para una función de onda plana se cumple que  $E = p^2/2m$  y  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  entonces

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[ \frac{p^2 t}{4\hbar} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \right], \quad (4.10)$$

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left[ \frac{p^2 t}{4\hbar} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \right]. \quad (4.11)$$

Aquí notamos que la probabilidad de transición al depender de un función seno, permitirá una oscilación entre dos distintos estados de sabor. Además, se nota que no dependen de la posición de la partícula, esto se debe a que las funciones de onda plana están dispersadas de forma uniforme en todo el espacio de posiciones. Aunque hay que recordar que esta no es una solución de la ecuación de Schrödinger sino que es una aproximación del estado de la partícula con un momentum con incertidumbre muy pequeña.

A continuación se muestra las gráficas de las probabilidades obtenidas

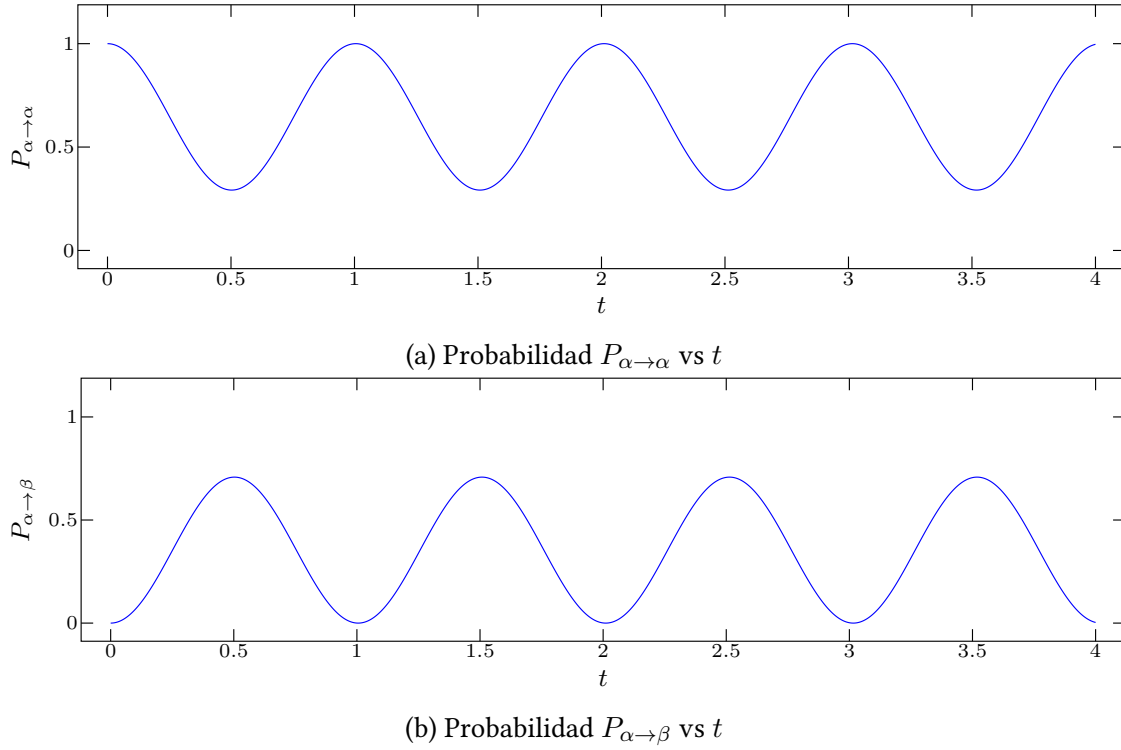


Figura 4.1: Probabilidad de encontrar a una partícula en los estados de sabor  $\alpha$  y  $\beta$ , para valores de masa  $m_1 = 1,0$  y  $m_2 = 2,0$ , desviación estándar de la distribución de momentos  $\sigma_p = 0,25$ , y ángulo de mixtura  $\theta = 0,5$  rad, en unidades naturales.

#### 4.2.2. Estados de sabor y oscilación de ondas gaussianas

Ahora vamos a considerar un paquete de onda gaussiana, para esto es necesario hallar como se representará el estado de una partícula con dos posibles estados de sabor. Recordemos que en las ecuaciones (4.3) y (4.4) se muestran los estados de sabor correspondientes a las funciones de onda plana, pero un paquete de onda gaussiano se puede representar como una combinación lineal de estas, por lo que una partícula en el estado de sabor  $\alpha$  será dada por

$$|\nu_\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) |\nu_\alpha, p\rangle dp \quad (4.12)$$

y una en el estado de sabor  $\beta$  será

$$|\nu_\beta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) |\nu_\beta, p\rangle dp, \quad (4.13)$$

donde la funciones  $f(p)$  es la función gaussiana en el espacio de momentos, es decir

$$f(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_p}} \exp\left\{-\frac{(p - p_0)^2}{4\sigma_p^2}\right\}. \quad (4.14)$$

Si asumimos que la partícula en el instante  $t = 0$  se encuentra en el estado de sabor  $\alpha$  y es descrita por una función gaussiana, es decir:

$$|\nu(0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) |\nu_\alpha, p\rangle dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) [\cos \theta |m_1, p\rangle + \sin \theta |m_2, p\rangle] dp \quad (4.15)$$

donde  $f(p)$  es el mismo que en (3.25), luego de un intervalo de tiempo  $t$ , su estado será:

$$|\nu(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \left[ \cos \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} |m_1, p\rangle + \sin \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} |m_2, p\rangle \right] dp. \quad (4.16)$$

Y usando (4.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} |\nu(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \left[ \cos^2 \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \sin^2 \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} \right] |\nu_\alpha, p\rangle \cdot dp \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \cos \theta \sin \theta \left[ -e^{\frac{i}{\hbar} E_1 t} + e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} \right] |\nu_\beta, p\rangle dp. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Entonces la probabilidad de la partícula se encuentre en el estado de sabor  $\alpha$  en el instante  $t$  será:

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \alpha}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(p)|^2 \left[ \cos^2 \theta e^{\frac{i}{\hbar} \frac{k^2}{2m_1} t} + \sin^2 \theta e^{\frac{i}{\hbar} \frac{k^2}{2m_2} t} \right] \\ &\times \left[ \cos^2 \theta e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m_1} t} + \sin^2 \theta e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m_2} t} \right] \langle \nu_\alpha, k | \nu_\alpha, p \rangle dk dp. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para resolver esta integral usamos (4.3), (4.4) y la propiedad  $\langle m_i, k | m_j, p \rangle = \delta_{ij} \delta(k - p)$ , de modo que:

$$|\langle \nu_\alpha, k | \nu_\alpha, p \rangle|^2 = \cos^2 \theta \delta(k - p) + \sin^2 \theta \delta(k - p) = \delta(k - p), \quad (4.19)$$

por lo que la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \alpha}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(p)|^2 \left\{ \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{p^2}{2m_1} - \frac{p^2}{2m_2} \right) t} \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta \cos^2 \theta e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{p^2}{2m_2} - \frac{p^2}{2m_1} \right) t} \right\} dp \\ &= 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left[ 2 - 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |f(p)|^2 e^{\frac{it}{\hbar} \left( \frac{1}{2m_1} - \frac{1}{2m_2} \right) p^2} dp \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

De forma similar se procede para hallar la probabilidad de que la partícula esté en el estado de sabor  $\beta$  en el instante  $t$ :

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left[ 2 - 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |f(p)|^2 e^{\frac{it}{\hbar} \left( \frac{1}{2m_1} - \frac{1}{2m_2} \right) p^2} dp \right]. \quad (4.21)$$

Notamos que para hallar ambas probabilidades es necesario resolver la misma integral:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma_p^2}} e^{\frac{it}{2\hbar} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) p^2} dp \\ &= \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -p^2 \left[ \frac{1}{2\sigma_p^2} - \frac{it}{2\hbar} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \right] + \frac{pp_0}{\sigma_p^2} - \frac{p_0^2}{2\sigma_p^2} \right\} dp, \end{aligned} \quad (4.22)$$

para la cual se usará la relación (3.30)

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma_p^2} - \frac{it}{2\hbar} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)}} \exp \left\{ \frac{p_0^2}{4\sigma_p^4} \frac{1}{\frac{1}{2\sigma_p^2} - \frac{it}{2\hbar} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)} - \frac{p_0^2}{2\sigma_p^2} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\sqrt{\frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{4\hbar^2} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2}}} \exp \left\{ \frac{i}{2} \arctan \left[ \frac{t\sigma_p^2}{\hbar} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \right] \right\} \\
 &\quad \times \exp \left\{ \frac{p_0^2}{4\sigma_p^4} \frac{1}{\frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{4\hbar^2} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2} \left( \frac{1}{2\sigma_p^2} + \frac{it}{2\hbar} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \right) - \frac{p_0^2}{2\sigma_p^2} \right\} \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha \rightarrow \beta} &= 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left[ 1 - \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\sqrt{\frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{4\hbar^2} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2}}} \exp \left\{ -\frac{\frac{p_0^2 t^2}{8\hbar^2 \sigma_p^2} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2}{\frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{4\hbar^2} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \times \cos \left( \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{t\sigma_p^2}{\hbar} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \right] + \frac{p_0^2 t}{8\hbar \sigma_p^4} \frac{1}{\frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{4\hbar^2} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2} \left( \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \right) \right] \right] \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

Al graficar las probabilidades obtenidas se observa que a medida que el valor de  $\sigma_p$  disminuye, los gráficos se asemejan más a los obtenidos para una onda plana, y cuando aumenta la probabilidad tiende a una asíntota horizontal, cuyo valor depende el ángulo  $\theta$ . Esto se debe a que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (4.25)$$

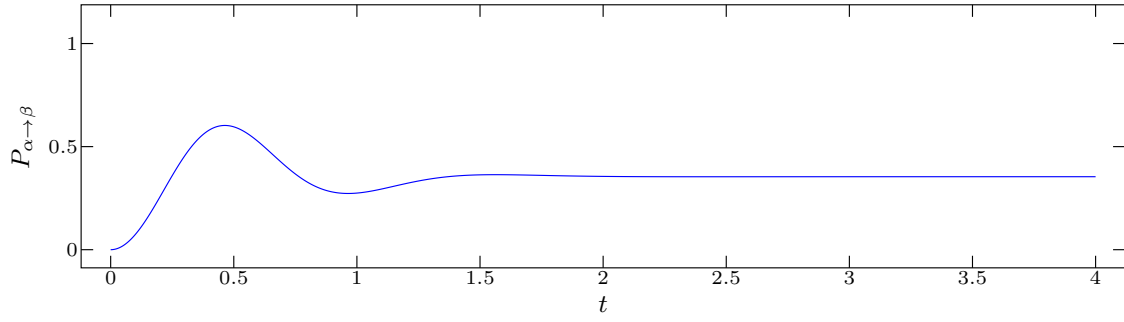
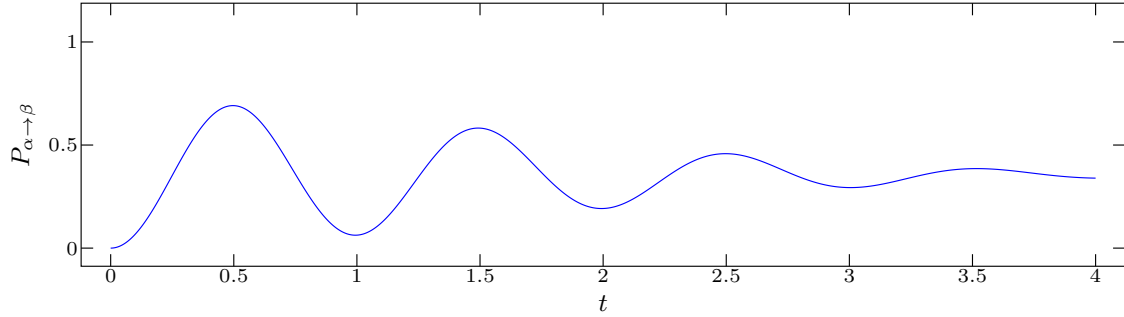
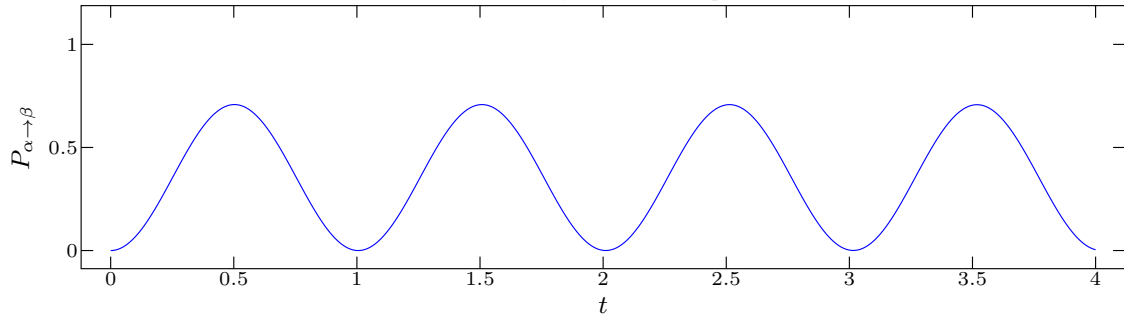
(a) Probabilidad  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  vs  $t$  para  $\sigma_p = 0,7$ (b) Probabilidad  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  vs  $t$  para  $\sigma_p = 0,25$ (c) Probabilidad  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  vs  $t$  para  $\sigma_p = 0,007$ 

Figura 4.2: Probabilidad de encontrar a una partícula descrita por una paquete de onda gaussiano en los estados de sabor  $\alpha$  y  $\beta$ , para valores de masa  $m_1 = 1,0$  y  $m_2 = 2,0$ , y ángulo de mixtura  $\theta = 0,5$  rad, en unidades naturales

## 4.3. Oscilación sabor-masa en el marco relativista

### 4.3.1. Estados de sabor y oscilación de ondas planas

Para hallar la oscilación de estados de sabor de una partícula relativista, consideramos solo las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon con energía positiva. Así, si se tiene que la partícula se encuentra inicialmente en un estado de sabor  $\alpha$ , formado por una combinación lineal de estados de masa correspondientes a las funciones de onda plana, se tendrá que este será dado por

$$|\nu_\alpha, p\rangle = \cos \theta |m_1, p\rangle + \sin \theta |m_2, p\rangle \quad (4.26)$$

donde  $|m_i, p\rangle$  denota a la onda plana  $e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-pz)}$  correspondiente a la masa  $m_i$ .

Como se están considerando solo soluciones con energía positiva, luego de un intervalo de tiempo  $t$ , el estado de la partícula será

$$|\nu(t)\rangle = \cos \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} |m_1, p\rangle + \sin \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} |m_2, p\rangle, \quad (4.27)$$

donde

$$E_k^2 = p^2 c^2 + m_k^2 c^4 \quad (4.28)$$

para  $k = 1, 2$ . Notamos que este estado tiene una forma similar al obtenido para el caso de la ecuación de Schrödinger (4.5), con la diferencia de la relación entre  $E_k$ ,  $m$  y  $p$ . Por esto la probabilidad de que la partícula sea encontrada en un instante  $t$  en el estado de sabor  $\beta$ , obtenida de (4.8) es

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left[ \frac{t}{2\hbar} (E_1 - E_2) \right], \quad (4.29)$$

y de que esté en el estado de sabor  $\alpha$ , obtenida de (4.9), es

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left[ \frac{t}{2\hbar} (E_1 - E_2) \right]. \quad (4.30)$$

Debido a que el factor que depende de la diferencia de energías está elevado al cuadrado, estas soluciones son válidas también para las funciones de onda plana de energía negativa. Además, este resultado también es válido para las funciones de onda plana como soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, pues en estas no se tiene un factor espinorial sino un escalar, haciendo así válida la representación usada en (4.26) para las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon.

Antes de reemplazar (4.28) en estas relaciones, se considerarán partículas ultrarelativistas, es decir  $m \ll |\mathbf{p}|$ , por lo que la siguiente aproximación es válida:

$$E_k = pc \left( 1 + \frac{m_k^2 c^4}{p^2 c^2} \right)^{1/2} = pc + \frac{m_k^2 c^3}{2p} \quad (4.31)$$

Entonces las probabilidades obtenidas previamente serán expresadas como

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{m_1^2 - m_2^2}{4p\hbar} c^3 t \right), \quad (4.32)$$

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{m_1^2 - m_2^2}{4p\hbar} c^3 t \right). \quad (4.33)$$

Notamos en las figuras 4.3a y 4.3b que el patrón de oscilación es similar al obtenido para el caso de la ecuación de Schrödinger, con la diferencia del periodo de oscilación. Esto se debe a que a diferencia de lo obtenido para la ecuación de Schrödinger, las masas aparecen como una diferencia de cuadrados en lugar de una diferencia de sus inversas.

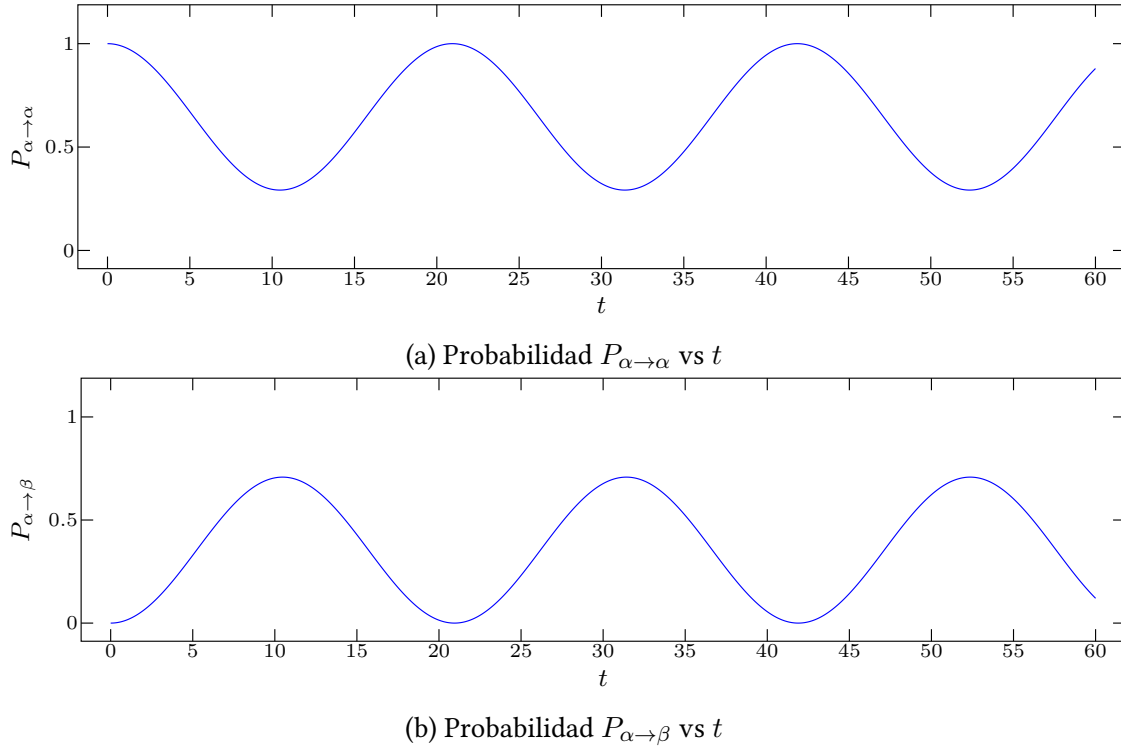


Figura 4.3: Probabilidad de encontrar a una partícula en los estados de sabor  $\alpha$  y  $\beta$  para estados de masa proporcionales a las funciones de onda plana para la ecuación de Klein-Gordon, y valores de masa  $m_1 = 1,0$  y  $m_2 = 2,0$ , y ángulo de mixtura  $\theta = 0,5$  rad, en unidades naturales.

### 4.3.2. Estados de sabor y oscilación de ondas gaussianas

Si consideramos paquetes de onda gaussianos, para el caso de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon se sigue un procedimiento similar al usado para el caso de las soluciones de la ecuación de Schrödinger, es decir que si en  $t = 0$  el estado inicial es

$$|\nu(0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) [\cos \theta |m_1, p\rangle + \sin \theta |m_2, p\rangle] dp. \quad (4.34)$$

Entonces, en el instante  $t$ , el estado de la partícula será

$$\begin{aligned} |\nu(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \left[ \cos^2 \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \sin^2 \theta e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} \right] |\nu_\alpha, p\rangle dp \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \cos \theta \sin \theta \left[ -e^{\frac{i}{\hbar} E_1 t} + e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} \right] |\nu_\beta, p\rangle dp, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde  $E_i = \sqrt{p^2 c^2 + m_i^2 c^4}$ . De esta forma, y siguiendo el mismo procedimiento usado para la ecuación de Schrödinger, se obtiene que

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha}(t) = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left[ 2 - 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |f(p)|^2 e^{\frac{it}{\hbar} (E_1 - E_2)} dp \right]. \quad (4.36)$$

De forma similar se procede para hallar la probabilidad de que la partícula esté en el estado de sabor  $\beta$  en el instante  $t$ :

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left[ 2 - 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |f(p)|^2 e^{\frac{it}{\hbar}(E_1 - E_2)} dp \right]. \quad (4.37)$$

Para resolver (4.36) y (4.37), es necesario resolver una integral que al igual que para cuando hallamos el paquete de onda gaussiano para la ecuación de Klein-Gordon tendremos que usar la aproximación (3.68). De este modo

$$E_i = E_{0,i} \left[ 1 + \frac{p_0 c^2}{E_{0,i}^2} (p - p_0) + \frac{m_i^2 c^6}{2 E_{0,i}^4} (p - p_0)^2 \right], \quad (4.38)$$

donde

$$E_{0,i} = \sqrt{p_0^2 c^2 + m_i^2 c^4}. \quad (4.39)$$

De este modo, tenemos que resolver la integral

$$\begin{aligned} \frac{e^{\frac{it}{\hbar}(E_{0,1} - E_{0,2})}}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(p - p_0)^2}{2\sigma_p^2} + \frac{it}{\hbar} \left[ \frac{p_0 c^2}{E_{0,1}} (p - p_0) + \frac{m_1^2 c^6}{2 E_{0,1}^3} (p - p_0)^2 \right] \right. \\ \left. - \frac{it}{\hbar} \left[ \frac{p_0 c^2}{E_{0,2}} (p - p_0) + \frac{m_2^2 c^6}{2 E_{0,2}^3} (p - p_0)^2 \right] \right\} dp. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Y al realizar el cambio de variable  $\kappa = p - p_0$  se expresa como:

$$\frac{e^{\frac{it}{\hbar}(E_{0,1} - E_{0,2})}}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\left[ \frac{1}{2\sigma_p^2} - \frac{it}{\hbar} \frac{m_1^2 c^6}{2 E_{0,1}^3} + \frac{it}{\hbar} \frac{m_2^2 c^6}{2 E_{0,2}^3} \right] \kappa^2 + \frac{it}{\hbar} \left[ \frac{p_0 c^2}{E_{0,1}} - \frac{p_0 c^2}{E_{0,2}} \right] \kappa \right\} d\kappa. \quad (4.41)$$

Entonces al usar (3.30) se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(p)|^2 e^{\frac{it}{\hbar}(E_1 - E_2)} dp = \frac{e^{\frac{it}{\hbar}(E_{0,1} - E_{0,2})}}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma_p^2} - \frac{it}{\hbar} \frac{m_1^2 c^6}{2 E_{0,1}^3} + \frac{it}{\hbar} \frac{m_2^2 c^6}{2 E_{0,2}^3}}} \\ \times \exp \left\{ -\frac{\frac{t^2 p_0^2 c^4}{\hbar^2} \left( \frac{1}{E_{0,1}} - \frac{1}{E_{0,2}} \right)^2}{4 \left( \frac{1}{2\sigma_p^2} - \frac{it}{\hbar} \frac{m_1^2 c^6}{2 E_{0,1}^3} + \frac{it}{\hbar} \frac{m_2^2 c^6}{2 E_{0,2}^3} \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Su parte real es

$$\begin{aligned}
 \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} |f(p)|^2 e^{\frac{it}{\hbar}(E_1 - E_2)} dp = & \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{\hbar^2} \left( \frac{m_1^2 c^6}{2E_{0,1}^3} - \frac{m_2^2 c^6}{2E_{0,2}^3} \right)^2} \sigma_p}} \\
 & \times \exp \left\{ -\frac{\frac{t^2 p_0^2 c^4}{\hbar^2} \left( \frac{1}{E_{0,1}} - \frac{1}{E_{0,2}} \right)^2}{8\sigma_p^2 \left( \frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{\hbar^2} \left( \frac{m_1^2 c^6}{2E_{0,1}^3} - \frac{m_2^2 c^6}{2E_{0,2}^3} \right)^2 \right)} \right\} \\
 & \times \cos \left\{ \frac{t}{\hbar} \left( E_{0,1} - E_{0,2} - \frac{\frac{t^2 p_0^2 c^4}{\hbar^2} \left( \frac{1}{E_{0,1}} - \frac{1}{E_{0,2}} \right)^2 \left( \frac{m_1^2 c^6}{2E_{0,1}^3} - \frac{m_2^2 c^6}{2E_{0,2}^3} \right)}{4 \left( \frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{\hbar^2} \left( \frac{m_1^2 c^6}{2E_{0,1}^3} - \frac{m_2^2 c^6}{2E_{0,2}^3} \right)^2 \right)} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{2t\sigma_p^2}{\hbar} \left( \frac{m_1^2 c^6}{2E_{0,1}^3} - \frac{m_2^2 c^6}{2E_{0,2}^3} \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Al reemplazar este resultado en (4.37) se obtiene la probabilidad de transición:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = & 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{\hbar^2} \left( \frac{m_1^2 c^6}{2E_{0,1}^3} - \frac{m_2^2 c^6}{2E_{0,2}^3} \right)^2} \sigma_p}} \right. \\
 & \times \exp \left\{ -\frac{\frac{t^2 p_0^2 c^4}{\hbar^2} \left( \frac{1}{E_{0,1}} - \frac{1}{E_{0,2}} \right)^2}{8\sigma_p^2 \left( \frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{\hbar^2} \left( \frac{m_1^2 c^6}{2E_{0,1}^3} - \frac{m_2^2 c^6}{2E_{0,2}^3} \right)^2 \right)} \right\} \\
 & \times \cos \left\{ \frac{t}{\hbar} \left( E_{0,1} - E_{0,2} - \frac{\frac{t^2 p_0^2 c^4}{\hbar^2} \left( \frac{1}{E_{0,1}} - \frac{1}{E_{0,2}} \right)^2 \left( \frac{m_1^2 c^6}{2E_{0,1}^3} - \frac{m_2^2 c^6}{2E_{0,2}^3} \right)}{4 \left( \frac{1}{4\sigma_p^4} + \frac{t^2}{\hbar^2} \left( \frac{m_1^2 c^6}{2E_{0,1}^3} - \frac{m_2^2 c^6}{2E_{0,2}^3} \right)^2 \right)} \right) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{2t\sigma_p^2}{\hbar} \left( \frac{m_1^2 c^6}{2E_{0,1}^3} - \frac{m_2^2 c^6}{2E_{0,2}^3} \right) \right] \right\} \right].
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

En las figuras 4.4 y 4.5 se muestran la evolución de la probabilidad de transición del sabor  $\alpha$  al sabor  $\beta$ , para dos proporciones distintas entre las masas de los estados de masa. En estas se observa que la  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  disminuye, esto debido exponencial en (4.44), y tiende a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \tag{4.45}$$

Esto significa que un intervalo de tiempo suficientemente largo se pueden ignorar los efectos al considerar un paquete de onda relativista, pero lo que no se puede despreciar es el efecto de considerar el paquete de onda gaussiano.

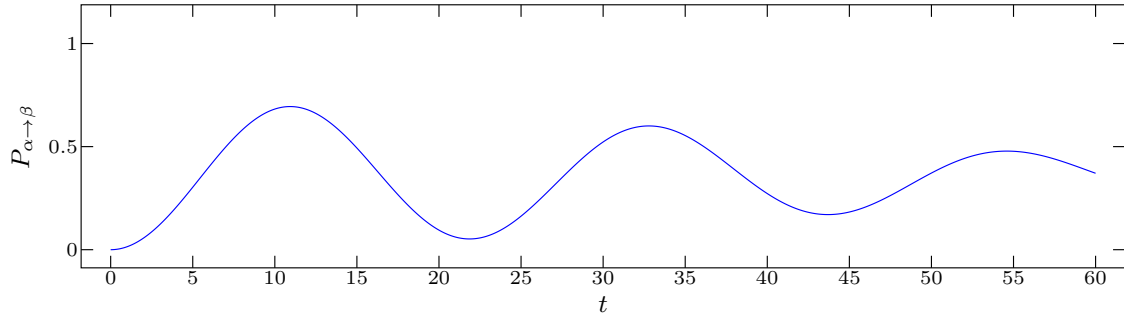
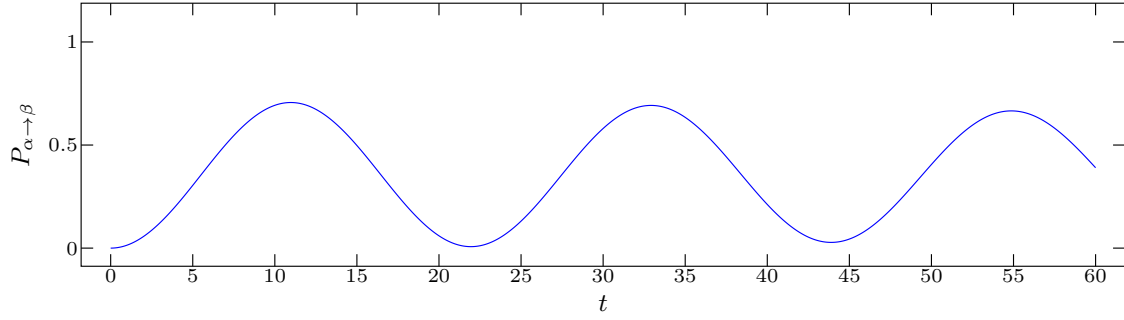
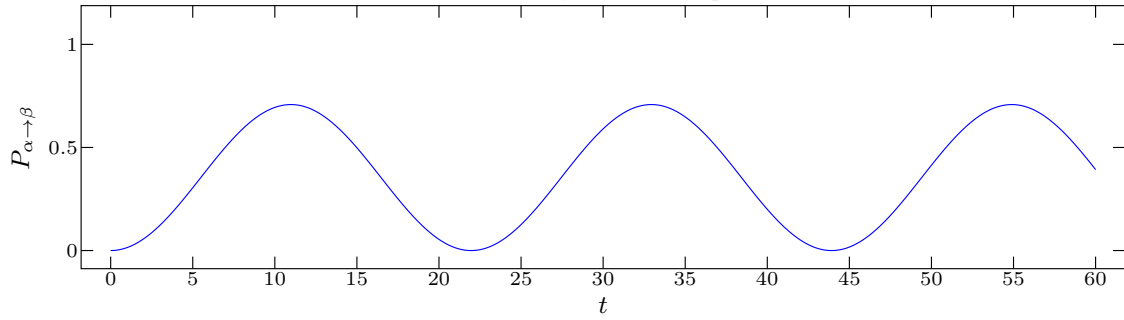
(a) Probabilidad  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  vs  $t$  para  $\sigma_p = 0,7$ (b) Probabilidad  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  vs  $t$  para  $\sigma_p = 0,25$ (c) Probabilidad  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  vs  $t$  para  $\sigma_p = 0,25$ 

Figura 4.4: Probabilidad de encontrar a una partícula descrita por una paquete de onda gaussiano relativista escalar en los estados de sabor  $\alpha$  y  $\beta$  para masas  $m_1 = 1,0$  y  $m_2 = 2,0$ , y ángulo de mixtura  $\theta = 0,5$  rad, en unidades naturales

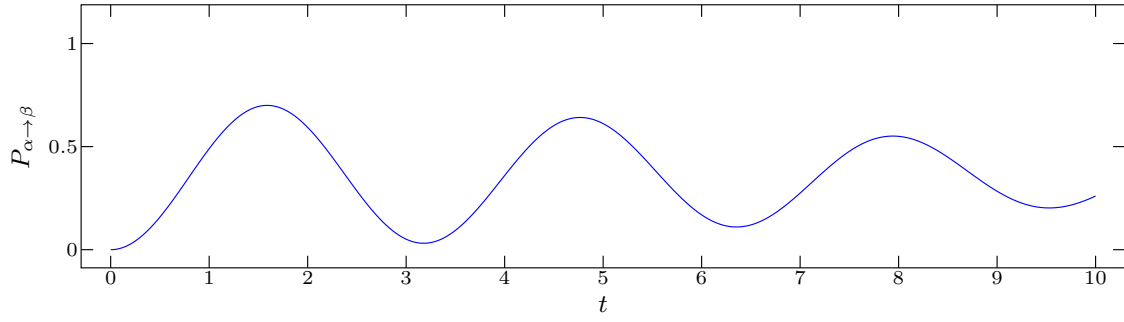
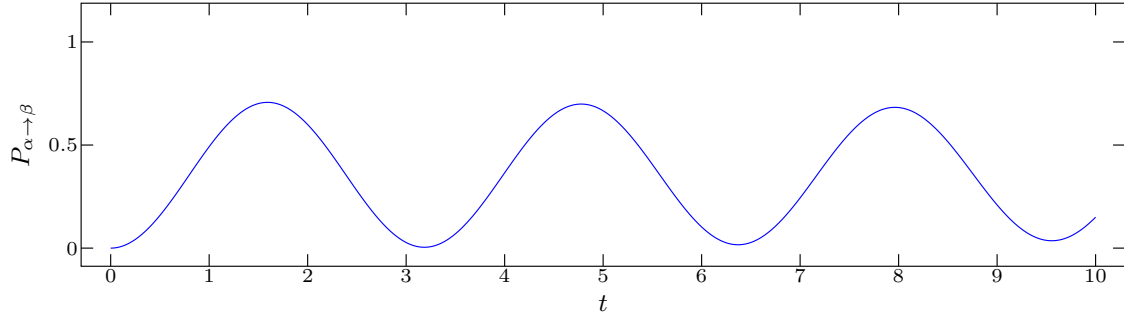
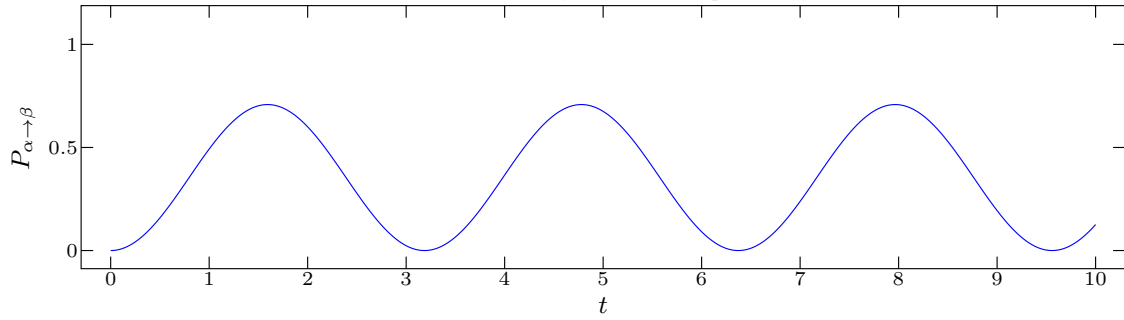
(a) Probabilidad  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  vs  $t$  para  $\sigma_p = 0,7$ (b) Probabilidad  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  vs  $t$  para  $\sigma_p = 0,25$ (c) Probabilidad  $P_{\alpha \rightarrow \beta}$  vs  $t$  para  $\sigma_p = 0,007$ 

Figura 4.5: Probabilidad de encontrar a una partícula descrita por una paquete de onda gaussiano relativista escalar en los estados de sabor  $\alpha$  y  $\beta$  para masas  $m_1 = 1,0$  y  $m_2 = 5,0$ , y ángulo de mixtura  $\theta = 0,5$  rad, en unidades naturales



## Capítulo 5

### Conclusiones y Perspectivas

Como se ha podido apreciar, el uso de paquetes de onda gaussianos para describir estados de sabor introduce diferencias significativas respecto al tratamiento tradicional con funciones de onda planas, tanto en el marco no relativista como en el relativista.

Una de estas diferencias fundamentales es el comportamiento amortiguado de la probabilidad de transición. En ambos marcos, caso no relativista y relativista, al emplear paquetes gaussianos, esta probabilidad tiende a un valor fijo,  $2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$ , para intervalos de tiempo grandes. El intervalo de tiempo necesario para que se llegue de manera aproximada a este valor fijo depende en gran medida de que tan localizada esté la partícula en el espacio de momentos, correspondiendo a una dispersión mayor un menor tiempo de decaimiento. Dado que partículas como los neutrinos y kaones se producen en procesos de colisión, se espera que sus paquetes de onda tengan valores de  $\sigma_p$  muy pequeños. Esto implica que, para distancias de propagación suficientemente cortas, la aproximación de onda plana puede seguir siendo una descripción adecuada. Sin embargo, si se desea alcanzar una mayor precisión en la determinación de las masas  $m_1$  y  $m_2$ , las desviaciones introducidas por la naturaleza localizada del estado deben ser consideradas.

Una ventaja conceptual del formalismo de paquetes de onda es que permite un modelado más realista del proceso de detección. Determinar experimentalmente que una partícula creada con sabor  $\alpha$  ha oscilado a un sabor  $\beta$  implica necesariamente una interacción localizada en una región finita del espacio. En este sentido, no se mide directamente el estado de sabor en un instante, sino que se provoca el colapso de la función de onda a un estado de sabor  $\beta$  localizado en la región del detector. Los resultados presentados en este trabajo describen la evolución libre de los estados de sabor, que a diferencia del espín, no interactúan con un campo externo como el campo magnético para su medición. En el caso no relativista, esto puede ser logrado sin problemas, ya que la métrica del espacio de Hilbert de la ecuación de Schrödinger es compatible con la inducida en el subespacio de estados de sabor. En cambio, en el tratamiento relativista basado en la ecuación de Klein-Gordon, esto no es posible pues la densidad de probabilidad no está dada por el módulo al cuadrado de la función de onda. Una solución posible es considerar otra ecuación de movimiento relativista en la que el producto interno sea consistente con el impuesto a los estados de sabor, o la adopción de formulaciones alternativas, como la propuesta por Tsai y Poirier [17], en la que se evitan problemas relacionados con las soluciones con energías negativas.

Otra limitación del procedimiento seguido para definir el paquete de onda gaussiano relativista

es que se asume como condición inicial la misma función de onda utilizada en el marco no relativista. Esto se debe a que no es válido asumir que la densidad de probabilidad será una distribución gaussiana debido a que la densidad de probabilidad depende también de la primera derivada temporal. Si bien la densidad de probabilidad resultante conserva la noción de localidad alrededor de un punto, no es una distribución gaussiana. Una alternativa viable sería construir el estado inicial imponiendo directamente una distribución gaussiana en el espacio de momentos. Sin embargo, debido a la relación de dispersión relativista (2.75), el paquete de onda obtenido en el espacio de posiciones diferiría del presentado en este trabajo, ya que la transformada de Fourier incorporaría de manera no trivial el factor  $\gamma(p)$ .

En resumen, este trabajo ha logrado mostrar las diferencias que introduce el tratamiento con paquetes de onda gaussianos en la oscilación de estados de sabor. Asimismo, se hicieron evidentes las dificultades en la definición de un paquete de onda gaussiano, como la aparición del zitterbewegung y la complicada integral que determina el paquete de onda en el espacio de posiciones, las cuales son resueltas mediante una aproximación.

La perspectiva de trabajo más inmediata que se desprende de este estudio es la extensión del formalismo a la ecuación de Dirac para describir la oscilación de neutrinos, dado que estos son fermiones de espín 1/2. Esta extensión permite evadir el problema de la densidad de probabilidad negativa que surge de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, pero no evita el zitterbewegung. Por lo que la definición de un paquete de onda gaussiano en este formalismo también tiene dificultades.



## Bibliografía

- [1] Y.-C. Huang, F.-M. He y S.-Y. Lin, «Quantum mechanical Gaussian wavepackets of single relativistic particles», *Chinese Journal of Physics* **87**, 486-495 (2024) (véanse páginas III, 2, 4, 17, 28-29).
- [2] A. Einstein, «On the Electrodynamics of Moving Bodies», *Annalen der Physik* **17**, English translation of "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", 891-921 (1905) (véase página 1).
- [3] O. Klein, «Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie», *Zeitschrift für Physik* **37**, 895-906 (1926) (véase página 1).
- [4] W. Gordon, «Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie», *Zeitschrift für Physik* **40**, 117-133 (1926) (véase página 1).
- [5] P. A. M. Dirac, «The Quantum Theory of the Electron», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **117**, 610-624 (1928) (véase página 1).
- [6] G. Petiau, «Contribution à l'étude des équations d'ondes corpusculaires», *Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences, Mémoires, Collection in-8°* **16**, Ph.D. Thesis, University of Paris, 1 (1936) (véase página 1).
- [7] R. J. Duffin, «On the Characteristic Matrices of Covariant Systems», *Physical Review* **54**, 1114 (1938) (véase página 1).
- [8] N. Kemmer, «The Particle Aspect of Meson Theory», *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* **173**, 91-116 (1939) (véase página 1).
- [9] N. Kemmer, «The Algebra of Meson Matrices», *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **39**, 189-196 (1943) (véase página 1).
- [10] M. Taketani y S. Sakata, «On the Wave Equation of Meson», *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan* **22**, Reprinted in *Supplement of Progress of Theoretical Physics*, vol. 22, pp. 84-97 (1955), 757-770 (1940) (véase página 1).
- [11] I. V. Kanatchikov, «On the Duffin-Kemmer-Petiau formulation of the covariant Hamiltonian dynamics in field theory», *Reports on Mathematical Physics* **46**, 107-112 (2000) (véase página 1).
- [12] C. G. Darwin, «Free motion in the wave mechanics», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **117**, 258-293 (1927) (véase página 1).
- [13] M. V. Berry y N. L. Balazs, «Nonspreading wave packets», *American Journal of Physics* **47**, 264-267 (1979) (véase página 1).
- [14] E. Schrödinger, «On Force-Free Motion in Relativistic Quantum Mechanics», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse* **24**, Translated by D. H. Delphenich from the original German: Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik, 418-428 (1930) (véase página 1).

- [15] B. Thaller, *Advanced Visual Quantum Mechanics*, 1.<sup>a</sup> edición (Springer, New York, NY, 2005) (véase página 1).
- [16] M. G. Fuda y E. Furlani, «Zitterbewegung and the Klein paradox for spin-zero particles», *American Journal of Physics* **50**, 545-549 (1982) (véase página 1).
- [17] H.-M. Tsai y B. Poirier, «Exploring the propagation of relativistic quantum wavepackets in the trajectory-based formulation», *Journal of Physics: Conference Series* **701**, 012013 (2016) (véanse páginas 2, 49).
- [18] C. D. Ellis y W. A. Wooster, «The Average Energy of Disintegration of Radium E», *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* **117**, 109-123 (1927) (véase página 2).
- [19] S. Bilenky, *Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos*, 2.<sup>a</sup> edición, volumen 947, *Lecture Notes in Physics* (Springer International Publishing, 2018) (véase página 2).
- [20] B. T. Cleveland et al., «Measurement of the Solar Electron Neutrino Flux with the Homestake Chlorine Detector», *The Astrophysical Journal* 1998-mar 20 vol. 496 iss. 1 **496**, 10 . 1086/305343 (1998) (véase página 2).
- [21] G. D. Rochester y C. C. Butler, «Evidence for the existence of new unstable elementary particles», *Nature* **160**, 855-857 (1947) (véase página 2).
- [22] R. Brown et al., «Observations with electron-sensitive plates exposed to cosmic radiation», *Nature* **163**, 82-87 (1949) (véase página 2).
- [23] I. J. Aitchison et al., «The scientific publications of Richard Henry Dalitz, FRS (1925–2006)», *Nuclear Physics A* **771**, 8-25 (2006) (véase página 2).
- [24] T. D. Lee y C. N. Yang, «Question of Parity Conservation in Weak Interactions», *Physical Review* **104**, 254-258 (1956) (véase página 2).
- [25] M. Gell-Mann y A. Pais, «Behavior of Neutral Particles under Charge Conjugation», *Physical Review (Series I)* 1955-mar 01 vol. 97 iss. 5 **97**, 10 . 1103/physrev . 97 . 1387 (1955) (véase página 2).
- [26] B. Pontecorvo, «Inverse beta-processes and non-conservation of lepton charge», (1957) (véase página 2).
- [27] B. Pontecorvo, «Mesonium and Antimesonium», *Sov. Phys. JETP* **6**, 429-431 (1958) (véase página 2).
- [28] A. Salam, «On parity conservation and neutrino mass», *Il Nuovo Cimento Series 10* 1957-jan vol. 5 iss. 1 **5**, 10 . 1007/bf02812841 (1957) (véase página 2).
- [29] G. Danby et al., «Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos», *Physical Review Letters* 1962-jul 01 vol. 9 iss. 1 **9**, 10 . 1103/physrevlett . 9 . 36 (1962) (véase página 3).
- [30] B. Pontecorvo, «Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge», *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53**, 1717-1725 (1967) (véase página 3).
- [31] J. N. Bahcall y R. Davis, «Solar Neutrinos: A Scientific Puzzle», *Science* 1976-jan 23 vol. 191 iss. 4224 **191**, 10 . 1126/science . 191 . 4224 . 264 (1976) (véase página 3).
- [32] Y. Fukuda et al., «Solar Neutrino Data Covering Solar Cycle 22», *Physical Review Letters* 1996-aug 26 vol. 77 iss. 9 **77**, 10 . 1103/PhysRevLett . 77 . 1683 (1996) (véase página 3).
- [33] J. Hosaka et al., «Solar neutrino measurements in Super-Kamiokande-I», *Physical Review D* 2006-jun 01 vol. 73 iss. 11 **73**, 10 . 1103/physrevd . 73 . 112001 (2006) (véase página 3).

- [34] S. M. Bilenky y B. Pontecorvo, *Comments on Nuclear and Particle Physics* **7**, 149 (1977) (véase página 3).
- [35] B. Aharmim et al. (SNO Collaboration), «Determination of the  $\nu_e$  and total  $^8\text{B}$  solar neutrino fluxes using the Sudbury Neutrino Observatory Phase I data set», *Phys. Rev. C* **75**, 045502 (2007) (véase página 3).
- [36] Z. Maki, M. Nakagawa y S. Sakata, «Remarks on the Unified Model of Elementary Particles», *Progress of Theoretical Physics* 1962-nov vol. 28 iss. 5 **28**, 10 . 1143 / p t p . 28 . 870 (1962) (véase página 3).
- [37] M. Ghosh, *Present status and future prospects of neutrino oscillation experiments*, 2023 (véase página 3).
- [38] B. Hall, *Quantum Theory for Mathematicians* (Springer, 2013) (véase página 7).
- [39] S. Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics*, Second (Cambridge University Press, 2015).
- [40] N. Qin y B.-Q. Ma, *Wave Packet Approach to Neutrino Oscillations with Matter Effects*, 2012.