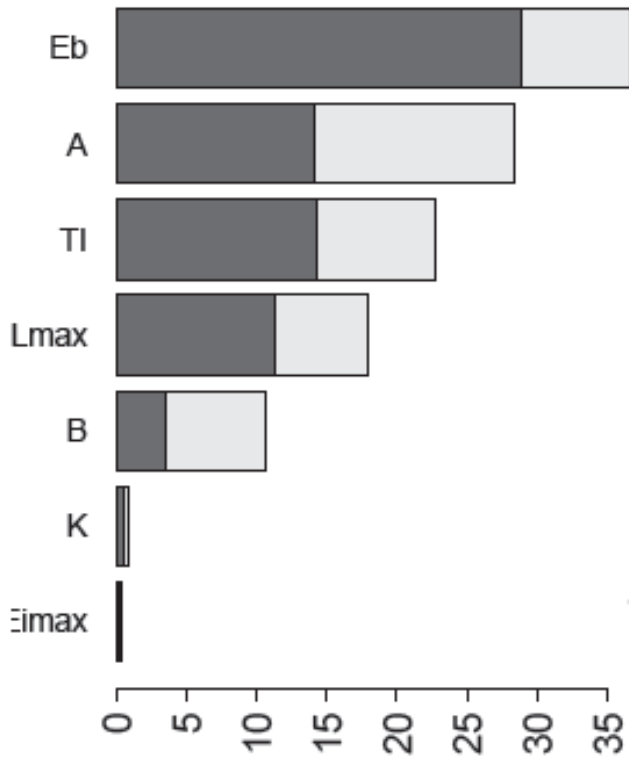


Analyse de sensibilité des modèles complexes & fiabilité des prédictions



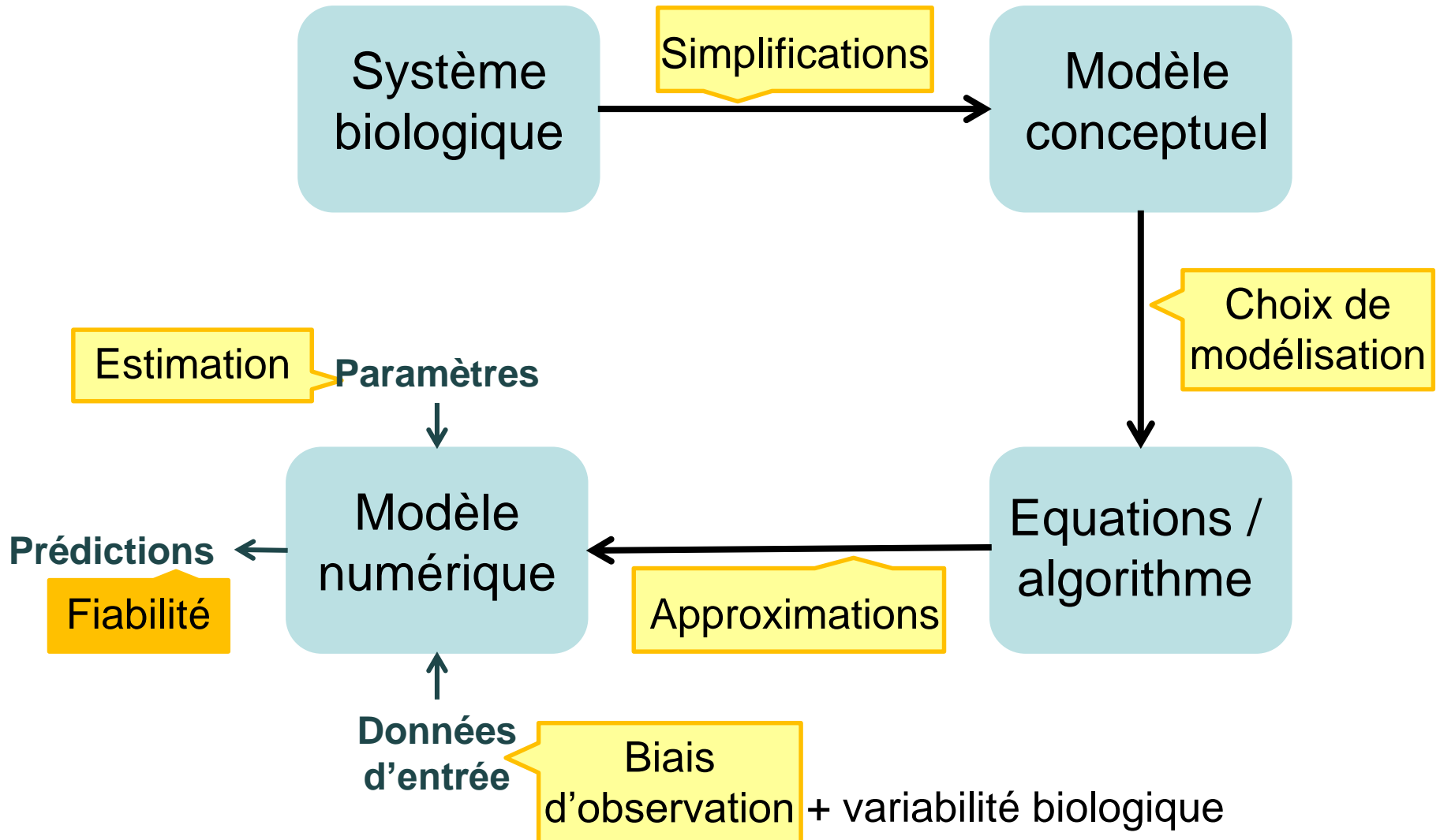
Pauline Ezanno

INRAE, Oniris

UMR1300 BIOEPAR

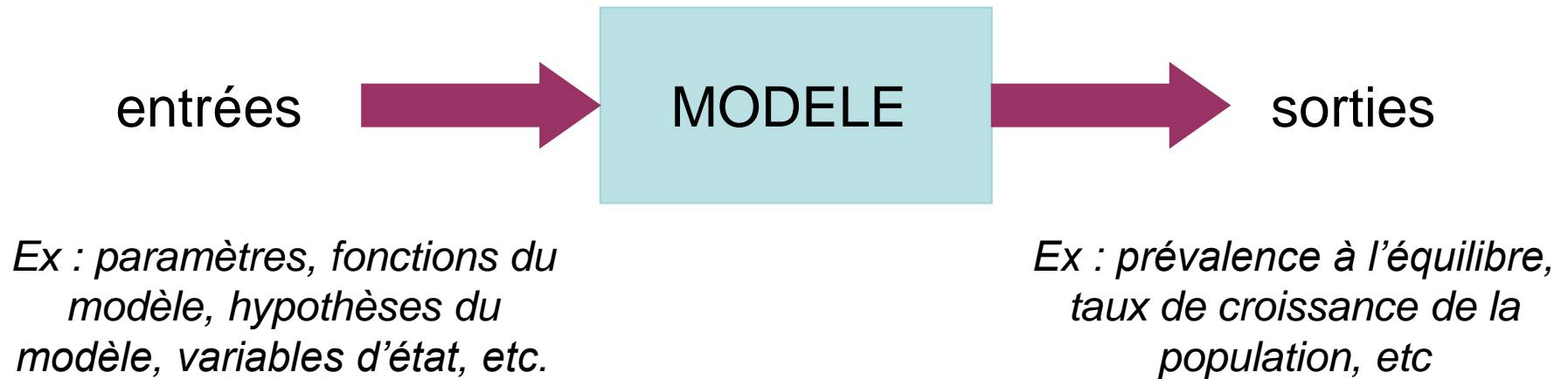
Site de la Chantrerie, Nantes

L'incertitude au cœur des modèles dynamiques



Qu'est-ce que l'analyse de sensibilité ?

Relations entre les informations entrant et celles sortant du modèle



≠ analyse d'incertitude qui quantifie la variabilité des sorties mais ne la relie pas à la variabilité des entrées

Qu'est-ce que l'analyse de sensibilité ?

- **Le modèle produit-il des prédictions pertinentes ?**

Quelle cohérence avec les observations ? avec le comportement attendu du système ?

- **Quels facteurs contribuent le plus à la variabilité des sorties ?**

Quel besoin de nouvelles connaissances ?

Quels potentiels points de contrôle ?

- **Quels facteurs contribuent le moins à la variabilité des sorties ?**

On peut fixer arbitrairement la valeur de ces paramètres dans leur intervalle de variation sans affecter les résultats

➔ Simplification du modèle

- **Quels facteurs interagissent entre eux ?**

Qu'est-ce que l'analyse de sensibilité ?

Réaliser une AS aide le modélisateur à :

- ✓ **Mesurer l'adéquation du modèle aux données**

 - Robustesse des prédictions

 - Calibrer les paramètres

 - Identifier les régions critiques de l'espace de valeur des paramètres

 - ➔ Combinaison de facteurs à haut risque

- ✓ **Etablir les priorités de recherche**

 - Identifier les facteurs très influents ➔ si valeur précise / connue, réduction maximale de la variance de la sortie

- ✓ **Simplifier le modèle**

 - Identifier les facteurs non influents ➔ pour toute valeur de leur domaine, pas d'augmentation de la variance de la sortie

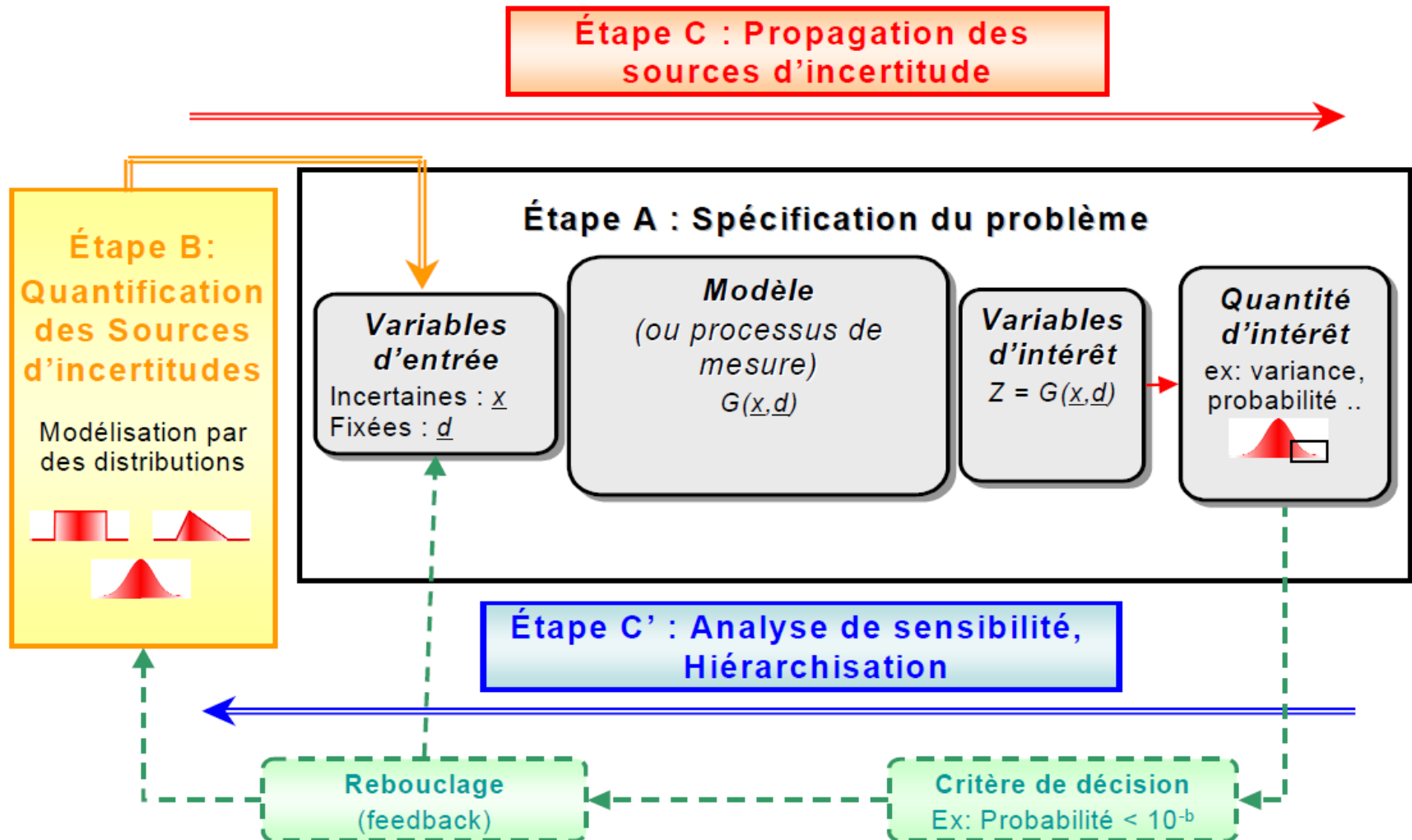
- ✓ **Détecter les interactions entre les facteurs**

Qu'est-ce que l'analyse de sensibilité ?

Une méthode d'AS doit être :

- ✓ **Sensible** à la gamme de variation et à la forme de la distribution de probabilité des facteurs d'entrée
- ✓ Réalisable **simultanément** sur tous les facteurs incertains
- ✓ **Indépendante du modèle** (modèle = boîte noire)

Démarche générale



Démarche générale

1. **Choisir** les facteurs d'entrée et les sorties à considérer
2. Définir la **gamme de variation** des facteurs d'entrée
3. Définir le **plan d'expérience** ou d'échantillonnage
 - Échantillonnage dans l'espace des valeurs possibles
 - Valeurs discrètes → plans factoriels complets/fractionnaires
 - Distribution de probabilités → aléatoire, Hypercubes Latins...
4. **Simuler**
5. Analyser et **interpréter** les résultats
 - Calculer les indices de sensibilité
 - Hierarchiser les facteurs influents

Différentes méthodes possibles (pour points 3 et 5)

Approches de screening (= criblage)

Les facteurs varient un par un (OAT = « one-at-a-time »)

→ comment les variations des (multiples) entrées se répercutent-elles sur la sortie ?

Très couramment utilisé **MAIS** :

→ Problème si non linéarité

→ Problème si interactions entre facteurs d'entrée

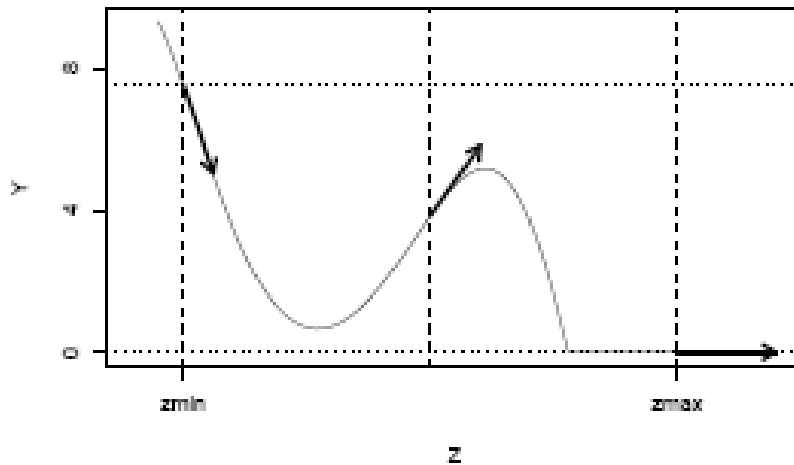
→ permet de « dégrossir » l'AS ; objectif qualitatif

Approches globales

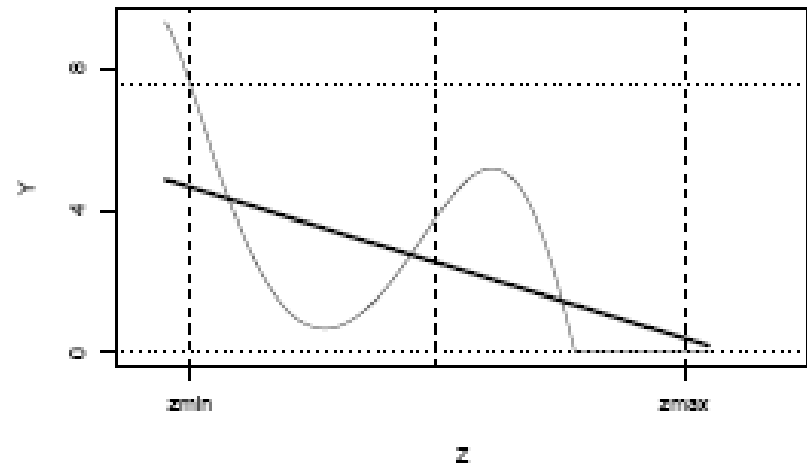
Les facteurs varient simultanément → comment les variations des entrées se répercutent-elles sur la sortie ? Les entrées interagissent-elles ?

Différentes évaluations possibles de la variation des sorties avec un facteur d'entrée

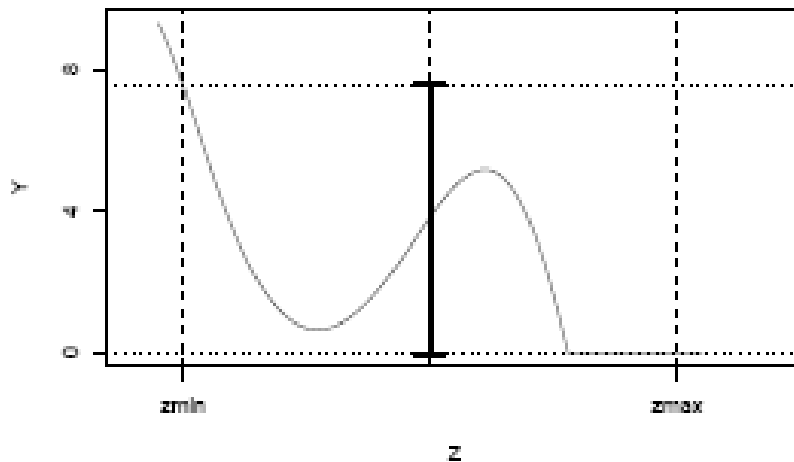
(a) Derivatives



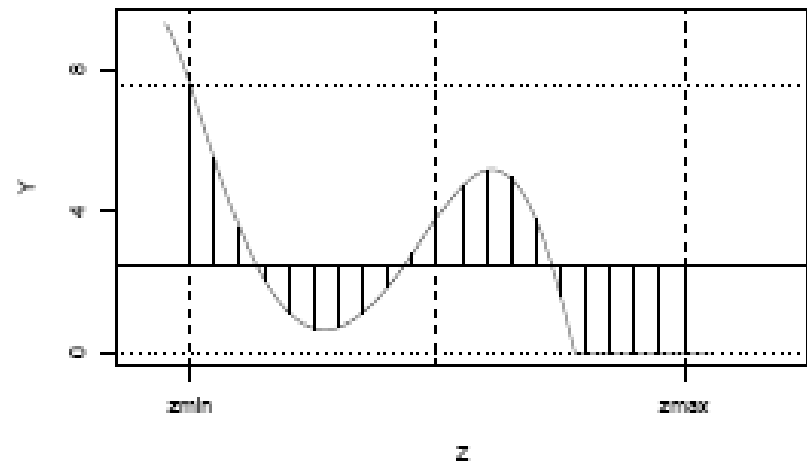
(c) Average slope



(b) Range



(d) Varlance



Approches de screening

Sensibilité & élasticité locales = cas particulier d'OAT

➔ **Calcul de dérivées partielles**

Sensibilité :

$$S_x = \frac{\delta y}{\delta x} \Big|_{x^*}$$

➔ Variation absolue

Elasticité (sensibilité relative) :

$$E_x = \frac{x}{y} \frac{\delta y}{\delta x} \Big|_{x^*}$$

➔ Variation relative

Approches de screening

OAT standard

- ➔ Chaque entrée du modèle varie sur toute sa gamme de valeurs possibles
- ➔ Evaluation de l'effet sur les sorties du modèle

Simple à mettre en œuvre

Peu coûteuse en simulations

Marche bien pour modèles linéaires

Connaître les gammes de valeurs plausibles de chaque paramètre

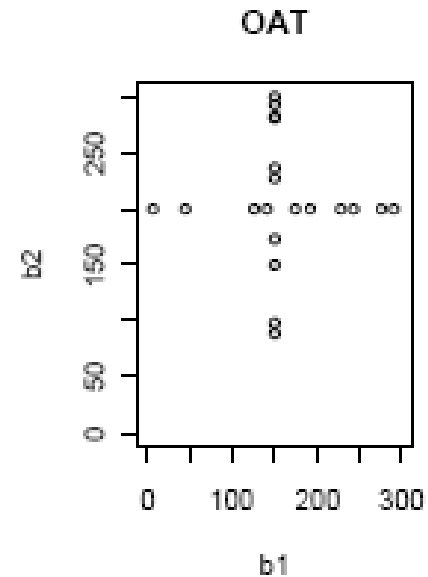
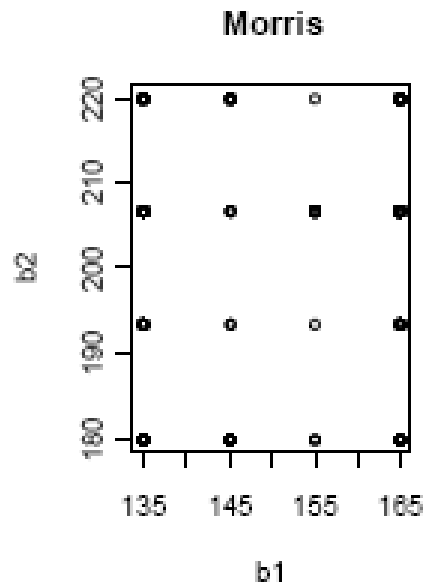
Pas de prise en compte des interactions

Approches de screening

Morris (1991)

OAT mais exploration différente de l'espace des paramètres

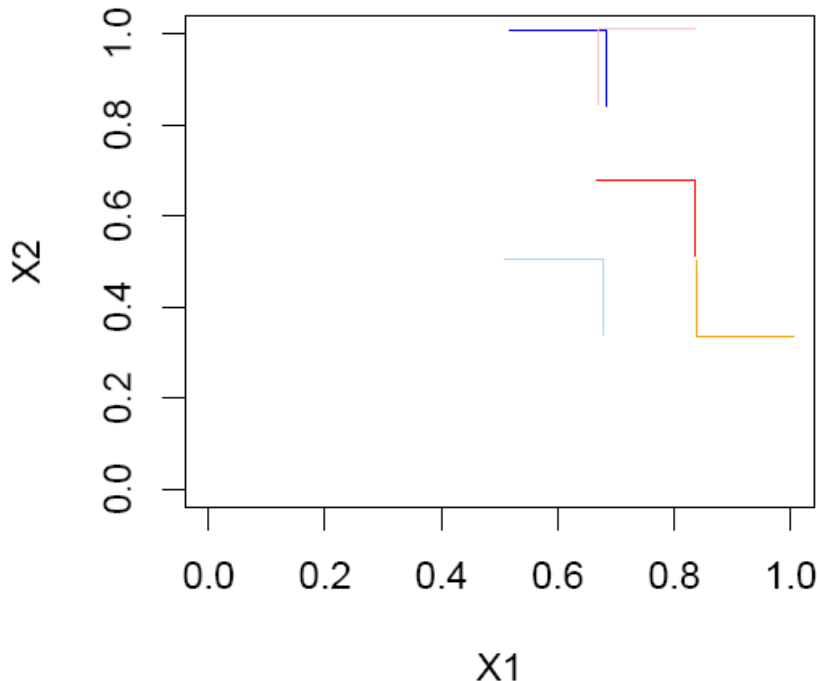
Echantillonnage en grille pour Morris, en croix pour l'OAT standard



Approches de screening

Morris

- ➔ Choix aléatoire de R trajectoires
- ➔ 1 trajectoire = Départ d'un point choisi aléatoirement ; pour chaque point suivant, modification d'une seule coordonnée ; nécessite $(nb_{\text{paramètres}} + 1)$ points



Exemple :

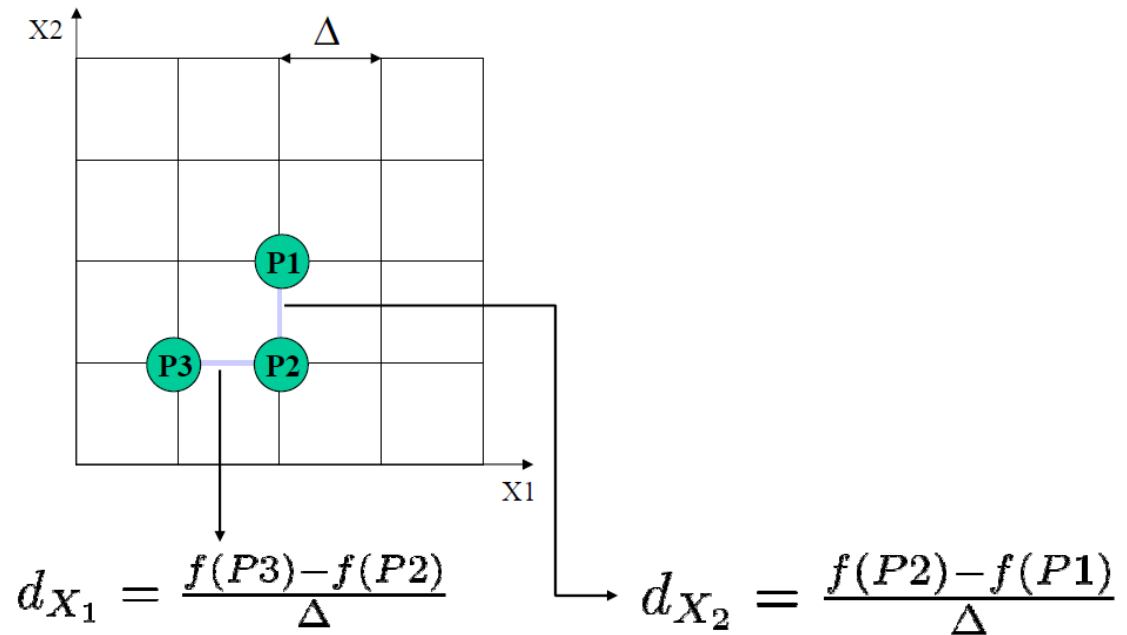
2 paramètres X1 et X2
7 niveaux par paramètre
5 trajectoires de 3 points

➔ **Coût + élevé en simulations**

Approches de screening

Morris

Effet élémentaire
pour chaque facteur



Effet moyen du facteur j

$\mu_j^* = E(|dx_j|) \rightarrow \mu_j^*$ mesure la **sensibilité**

Ecart-type de l'effet du facteur j

$\sigma_j = \sigma(dx_j) \rightarrow \sigma_j$ mesure **interactions et relations non linéaires**

Approches de screening

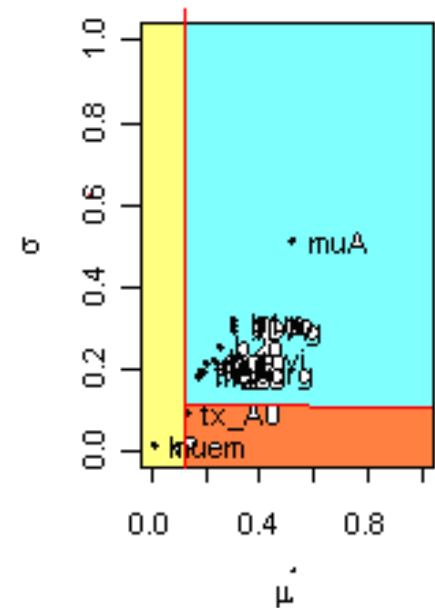
Morris

Pas d'hypothèse sur le modèle ... mais régularité préférable

Classe les entrées en 3 groupes

- ➔ Effet négligeable (en jaune)
- ➔ Effet linéaire et sans interaction (en orange)
- ➔ Effet non linéaire et/ou avec interaction (en bleu)

Mais les bornes ne sont souvent pas fournies dans les packages !!



Approches globales

Décomposer la variance de la sortie pour déterminer la contribution respective de chaque facteur d'entrée

Différentes techniques :

- plan factoriel
- décomposition de Sobol
- Fourier Amplitude Sensitivity Test (FAST)

=> calcul d'indices de sensibilité

Approches globales

FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test)

Méthode basée sur la décomposition de la variance

Hypothèses minimales sur la forme du modèle

Prise en compte de la nature continue des facteurs d'entrée

Prise en compte des interactions

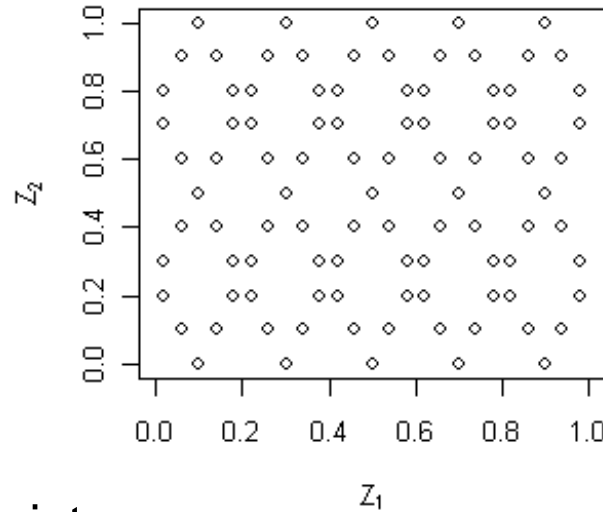
Méthode assez coûteuse en nombre de simulations

Critère d'importance = contribution à la variabilité de la sortie

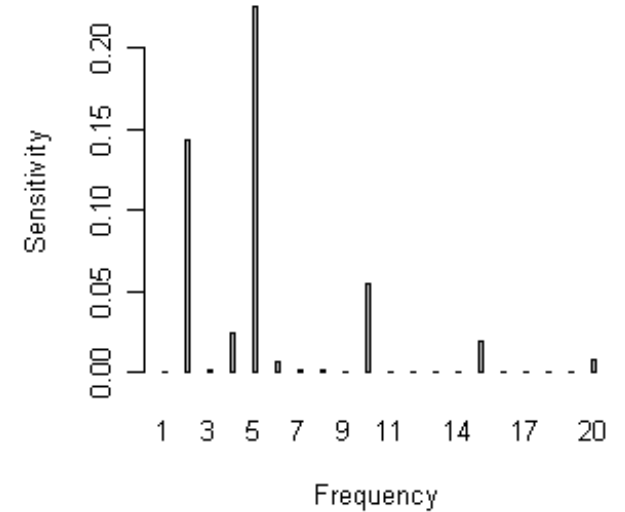
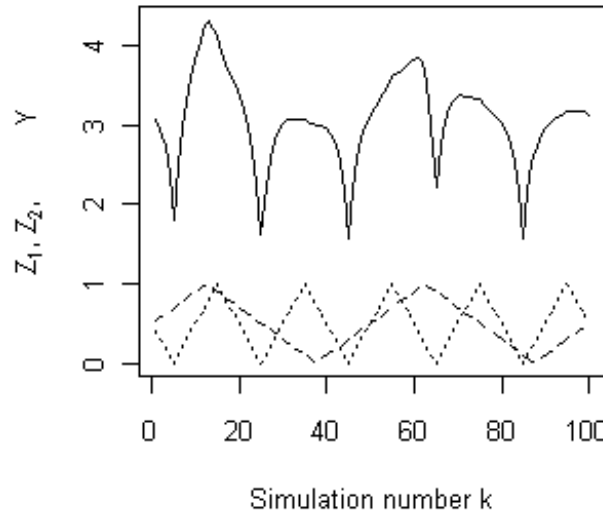
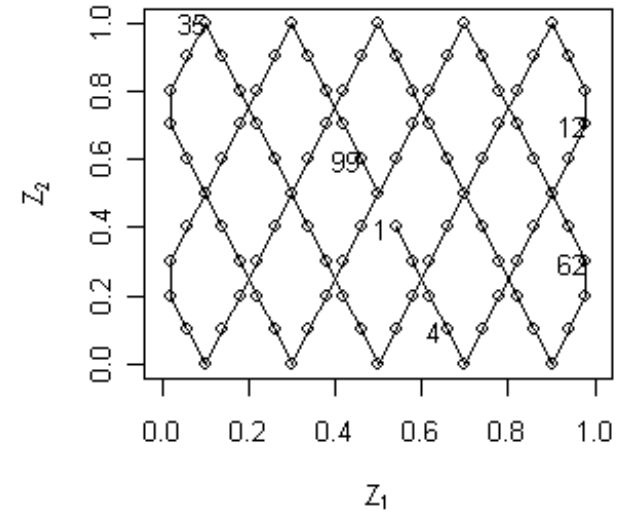
FAST

Echantillonnage =
trajectoire +/- déterministe
remplissant l'espace

A FAST sample



The FAST sampling path



Approches globales

FAST

Indices de sensibilité (SI) : des estimations +/- précises

Pour toute fonction $Y = \zeta(x^{(1)}, x^{(2)})$, il existe une décomposition unique

$$Y = f_0 + f_1(x^{(1)}) + f_2(x^{(2)}) + f_{1,2}(x^{(1)}, x^{(2)})$$

avec orthogonalité entre les composantes

qui permet de décomposer la variance et de définir les SI_i

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(f_1) + \text{Var}(f_2) + \text{Var}(f_{1,2})$$

$$1 = \frac{\text{Var}(f_1)}{\text{Var}(Y)} + \frac{\text{Var}(f_2)}{\text{Var}(Y)} + \frac{\text{Var}(f_{1,2})}{\text{Var}(Y)}$$

$$1 = SI_1 + SI_2 + SI_{12}$$

eff. princ. $x^{(1)}$

eff. princ. $x^{(2)}$

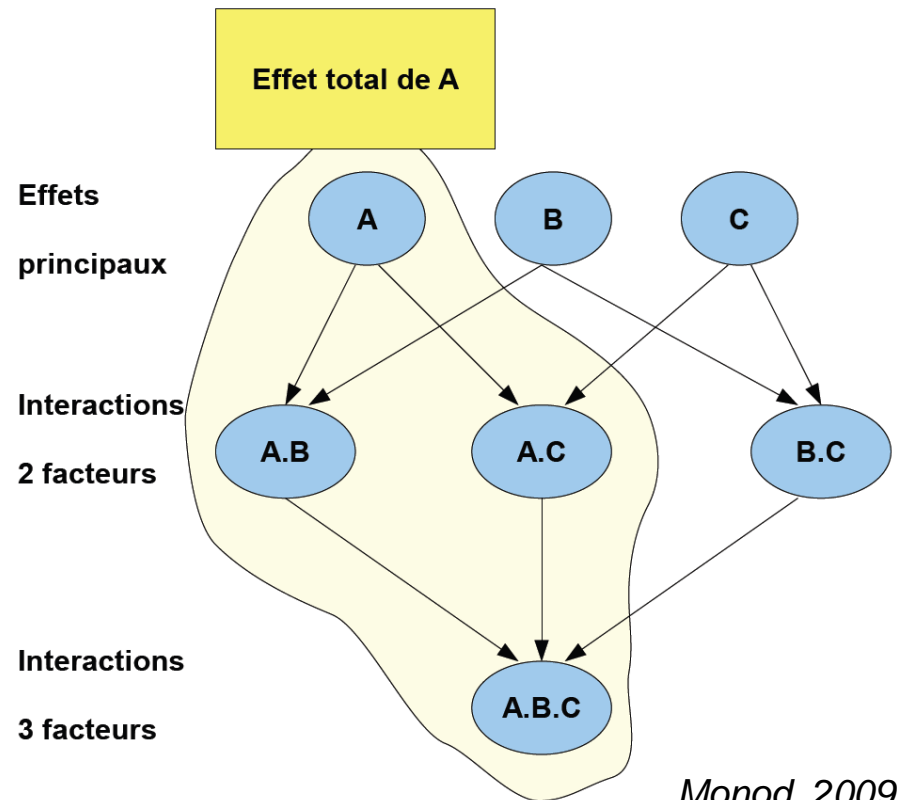
interaction

Approches globales

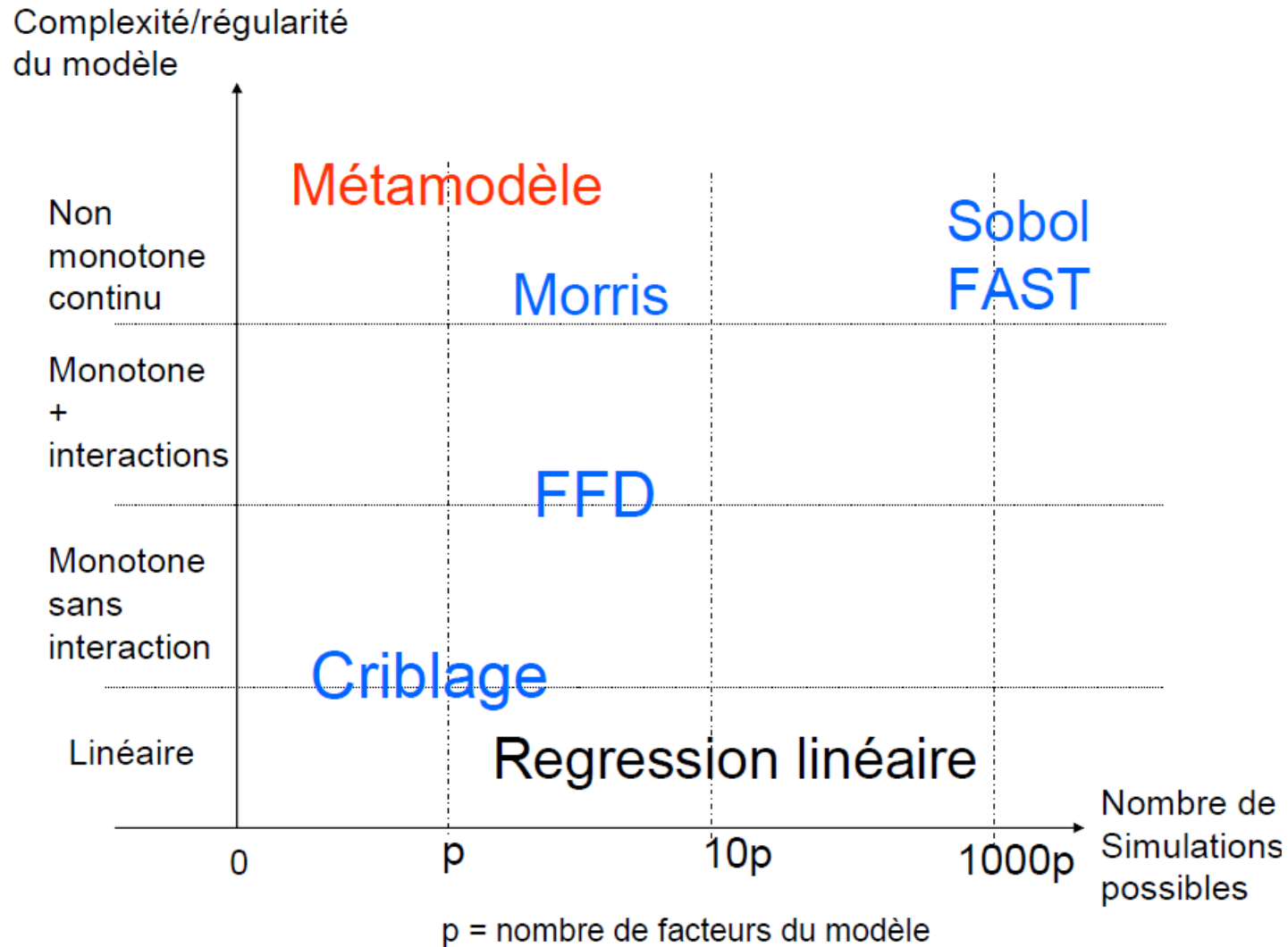
FAST

Indices de sensibilité principaux et totaux

$$SI_i = \frac{\text{Var } E(Y|x^{(i)})}{\text{Var}(Y)}$$



Synthèse



Quelques références

- Iooss B., Lemaître P. 2015. A review on global sensitivity analysis methods. In: Uncertainty management in Simulation-Optimization of Complex Systems: Algorithms and Applications, (Eds) C. Meloni and G. Dellino. Springer. hhal-00975701
- Pujol G., Iooss B. 2008. The sensitivity package, v1.4-0. Documentation d'un package R accessible sur le Web.
- Saltelli et al. 2008. Global sensitivity analysis. The primer. Wiley.
- Saltelli et al. 2019. Why so many published sensitivity analyses are false: A systematic review of sensitivity analysis practices. Environmental Modelling & Software 114:29-39.
<https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2019.01.012>

