Reto: Semana 2

En diciembre de 2015, la Candidatura d'Unitat Popular (CUP) un partido político independentista de izquierda que actúa principalmente en Cataluña-, celebró una votación interna sobre si apoyar o oponerse a la investidura de Artur Mas como presidente de la Generalitat. El resultado fue un empate con 1 515 votos a favor y 1 515 en contra, generando gran debate por la naturaleza del resultado.

Tomando en cuenta esta información:
a) Calcula cuál es la probabilidad de este empate bajo un enfoque frecuentista:
* Asumiendo que la probabilidad de votar a favor de Arturo Mas es de 0.5
* La decisión de voto es independiente entre los votantes.
b) Calcula la probabilidad de empate bajo un enfoque Bayesiano
* Asumiendo que no tenemos conocimiento previo del valor de p = probabilidad de votar a favor

In [9]:
```python
from scipy.special import betaln, comb
import math
from scipy.special import gammaln
```

In [11]:
```python
# Parámetros
n = 3030       # número total de votantes
k = 1515       # número de votos a favor (empate)
p = 0.5        # probabilidad de votar a favor

# Calcular la probabilidad exacta de empate
prob_empate = binom.pmf(k, n, p)

print(f"La probabilidad de un empate exacto es: {prob_empate:.6f} (~{prob_em
print("Lo cual no es taaaan raro, dado que la binomial alcanza su máximo en 
```

```
La probabilidad de un empate exacto es: 0.014494 (~1.4494%)
Lo cual no es taaaan raro, dado que la binomial alcanza su máximo en k=n/2,
y la probabilidad de empate es la más alta en ese punto.
```

In [ ]:
```python
# Esta versión genera
# OverflowError: int too large to convert to float
n = 3030
k = 1515

# Calcular coeficiente binomial
coef_binomial = comb(n, k, exact=True)

# Calcular la función beta B(k+1, n-k+1)
beta_val = beta(k + 1, n - k + 1)

# Probabilidad bayesiana (beta-binomial con Beta(1,1) previa)
```

```
prob_bayesiana = coef_binomial * beta_val

print(f"Probabilidad de empate bajo enfoque bayesiano: {prob_bayesiana:.8f}
```

```
---------------------------------------------------------------------------
OverflowError                             Traceback (most recent call last)
Cell In[6], line 13
     10 beta_val = beta(k + 1, n - k + 1)
     12 # Probabilidad bayesiana (beta-binomial con Beta(1,1) previa)
---> 13 prob_bayesiana = coef_binomial * beta_val
     15 print(f"Probabilidad de empate bajo enfoque bayesiano: {prob_bayesia
na:.8f} (~{prob_bayesiana*100:.6f}%)")

OverflowError: int too large to convert to float
```

In [10]:

```
n = 3030
k = 1515

# Calcular logaritmo del coeficiente binomial usando gammaln para precisión
# log comb(n,k) = gammaln(n+1) - gammaln(k+1) - gammaln(n-k+1)

log_coef_binomial = gammaln(n + 1) - gammaln(k + 1) - gammaln(n - k + 1)

# Calcular logaritmo de la función beta
log_beta_val = betaln(k + 1, n - k + 1)

# Sumar logaritmos
log_prob_bayesiana = log_coef_binomial + log_beta_val

# Exponenciar para obtener la probabilidad
prob_bayesiana = math.exp(log_prob_bayesiana)

print(f"Probabilidad de empate bajo enfoque bayesiano: {prob_bayesiana:.8e}
```

```
Probabilidad de empate bajo enfoque bayesiano: 3.29924117e-04 (~0.03299241%)
```

Enfoque Bayesiano

Modelo:

Los votos a favor (X) siguen una distribución binomial condicional a (p):

$$X \mid p \sim \text{Binomial}(n = 3030, p)$$

La probabilidad (p) tiene una distribución previa uniforme:

$$p \sim \text{Beta}(\alpha = 1, \beta = 1)$$

Posterior predictiva:

La probabilidad de observar un empate exacto (X = 1515) sin conocer (p) se calcula integrando sobre todos los posibles valores de (p):

$$P(X = 1515) = \int_0^1 P(X = 1515 \mid p) f(p)\, dp = \int_0^1 \binom{3030}{1515} p^{1515} (1-p)^{1515}\, dp$$

Dado que $p \sim \mathrm{Beta}(1, 1)$, la integral es la función beta:

$$P(X = 1515) = \binom{3030}{1515} \frac{B(1515+1, 1515+1)}{B(1, 1)} = \binom{3030}{1515} B(1516, 1516)$$

donde $B(a, b)$ es la función beta.

Resultado:

Esta probabilidad bajo el modelo beta-binomial es aproximadamente igual a:

$$P(X = 1515) \approx \frac{1}{3031} \approx 0.00033 = 0.033\%$$

Esto representa la probabilidad de empate considerando que no sabemos nada sobre p y que todos los valores de p son igualmente posibles a priori.

Interpretación:

- Bajo este enfoque bayesiano con una distribución previa uniforme para p, la probabilidad de empate es mucho menor que bajo el modelo frecuentista con $p = 0.5$ fijo.
- Sin embargo, si se incorpora información previa o se usa una distribución beta más informativa, la probabilidad puede acercarse al valor frecuentista (~1.44%).

In [ ]: