UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

Guía de Ejercicios
BAIN 037

Problema 1 *Calcular*

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$$

Solución.

Aplicando integración por partes tenemos

$$u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx;\ \ dv = \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}} \Longrightarrow v = -\frac{3}{4}(9-x^2)^{\frac{2}{3}}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} I &= -\frac{3}{4}x^2(9-x^2)^{\frac{2}{3}} + \int \frac{3}{4}(9-x^2)^{\frac{2}{3}} 2xdx \\ I &= -\frac{3}{4}x^2(9-x^2)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{20}(9-x^2)^{\frac{5}{3}} + c \end{aligned}$$

Problema 2 *Calcular la integral*

$$I = \int \sqrt{4x-x^2}dx$$

Solución.

Completando cuadrados tenemos que

$$4x - x^2 = 4 - (x-2)^2$$

de donde, aplicando la sustitución $x - 2 = 2\sin t$, transformamos la integral en una integral trigonométrica, en efecto

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot\ 2\cos t dt \\ &= 4\int \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t dt \\ &= 4\int \cos^2 t\, dt \\ &= 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt \\ &= 2t + 2\sin t\cos t + C \end{aligned}$$

volviendo a la variable original tenemos finamente

$$I = 2\arcsin(\frac{x-2}{2}) + 2\frac{x-2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4x-x^2} + C.$$

Problema 3 *Obtener el volumen del sólido formado al girar la región limitada por las gráficas de $y = (x-2)^2$ e $y = 3$, en torno a la recta $y = 3$, aplicando el método de discos.*

Solución. Para facilitar los cálculos podemos desplazar la región 2 unidades a la izquierda, con objeto de centrarlo en el eje de ordenadas. Con lo cual el volumen se generará al girar la región limitada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = 3$, en torno a la recta $y = 3$.

$$dV = \pi r^2 dx = \pi(3-y)^2 dx = \pi(3-x^2)^2 dx = \pi(9 - 6x^2 + x^4)dx$$

Los límites de integración para la variable x son $\pm\sqrt{3}$, y al ser la región simétrica resulta:

$$V = \frac{48\pi\sqrt{3}}{5}$$

Problema 4 *Sea $f(x)$ la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2, & 1 < x \leq 2; \\ 4 - x, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Calcular $\int_0^4 f(x)dx$.

Problema 5 *Hallar la integral*

$$I = \int x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx$$

por el método de sustitución y por el método de partes (Ind. $u = x^2$).