Instituto de Matemática

Universidad Austral de Chile

Gráfica de Ecuaciones

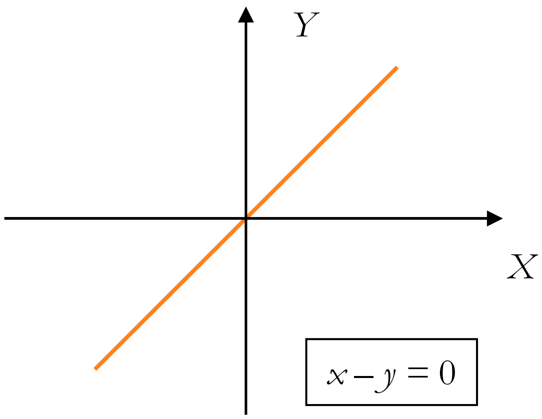
Lugares Geométricos

Dos problemas:

1. Dada una ecuación $F(x, y) = 0$, graficarla

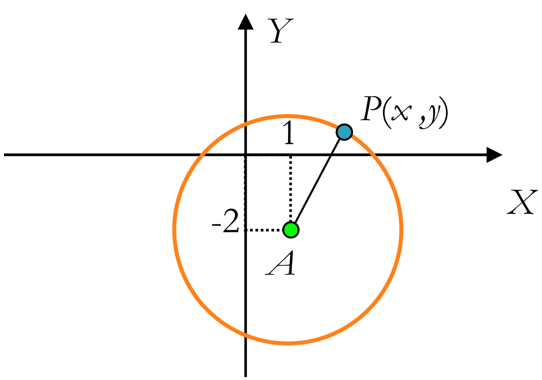
   Ejemplo: graficar la ecuación $x - y = 0$

   Esto es: encontrar todos puntos $P(x, y)$ cuyas coordenadas son soluciones de la ecuación $x - y = 0$.



2. Dado un conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano, definido por una condición, encontrar una ecuación entre sus coordenadas x, y (Lugar geométrico).

   Ejemplo: Determinar la ecuación del L.G. de todos los puntos del plano que están a distancia 3 del punto $A(1,-2)$.



$$d(A,P) = 3$$

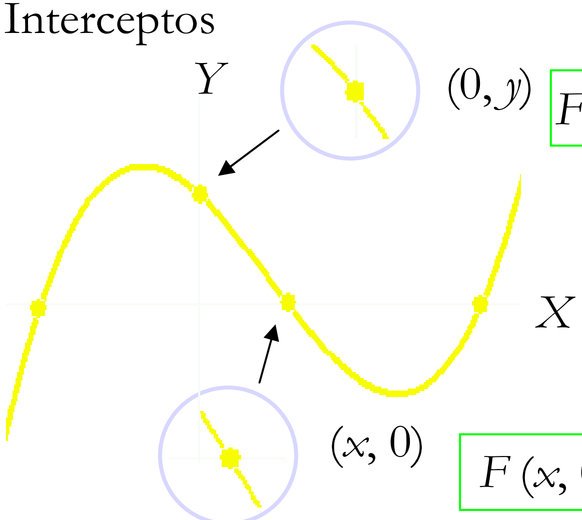
$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9}$$

Coordenadas Rectangulares

Análisis de curvas

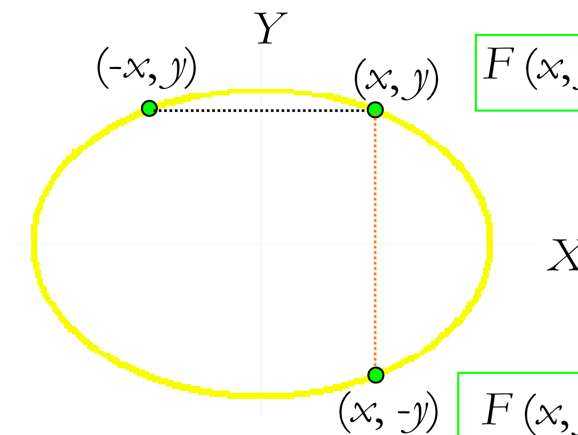
1. Interceptos



$F(0, y) = 0$

$F(x, 0) = 0$

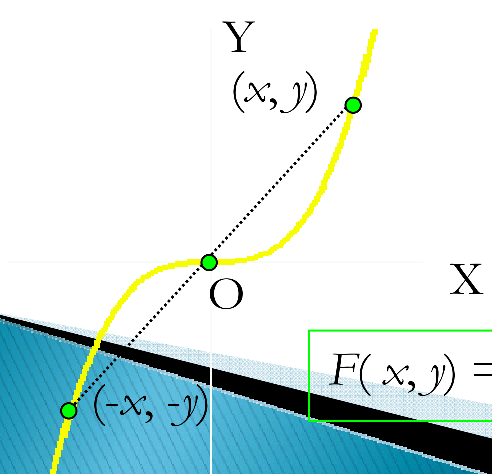
2. Simetría respecto a los ejes



$F(x, y) = F(-x, y)$

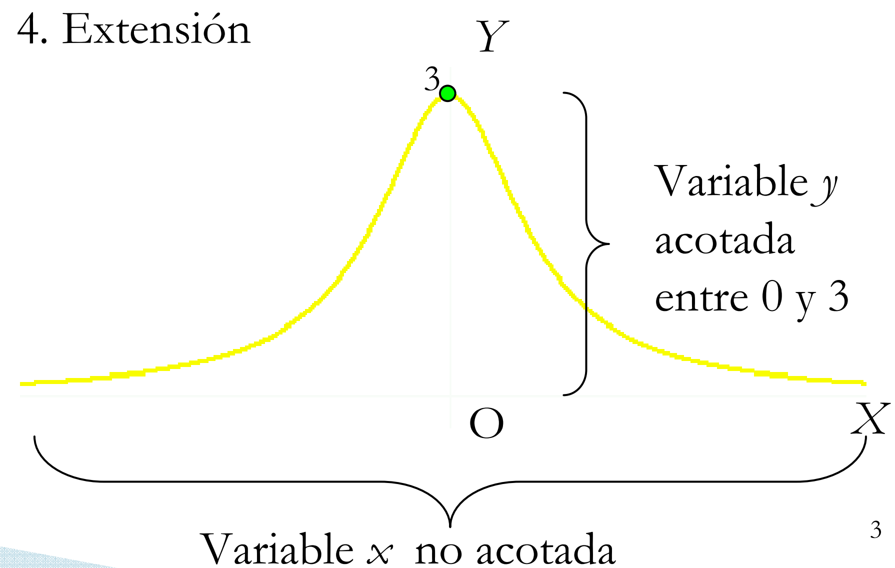
$F(x, y) = F(x, -y)$

3. Simetría respecto al origen



$F(x, y) = F(-x, -y)$

4. Extensión



1. Graficar una ecuación

Ejemplo 1.

Analizar y graficar la curva de ecuación $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Resolución:

Aquí $F(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 36$

a) Interceptos

Con eje X: $y = 0$

$$9x^2 - 36 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 2$$

$A(-2, 0)$, $B(2,0)$ son los puntos

Con eje Y: $x = 0$

$$4y^2 - 36 = 0 \;\Rightarrow\; y = \pm 3$$

Hay dos puntos: $C(0,-3)$, $D(0,3)$

b) Simetrías

Con eje X: $F(x, y) = F(x,- y)$

$$9x^2 + 4(-y)^2 - 36$$
$$= 9x^2 + 4y^2 - 36$$

Hay simetría con eje X

Con eje Y: $F(x, y) = F(-x, y)$

$$9(-x)^2 + 4y^2 - 36$$
$$= 9x^2 + 4y^2 - 36$$

Hay simetría con eje Y

- Con O : $F(x, y) = F(-x, -y)$

$$9(-x)^2 + 4(-y)^2 - 36$$

$$= 9x^2 + 4y^2 - 36$$

También lo es respecto a O

c) Extensión

Para x : $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{36 - 9x^2}$

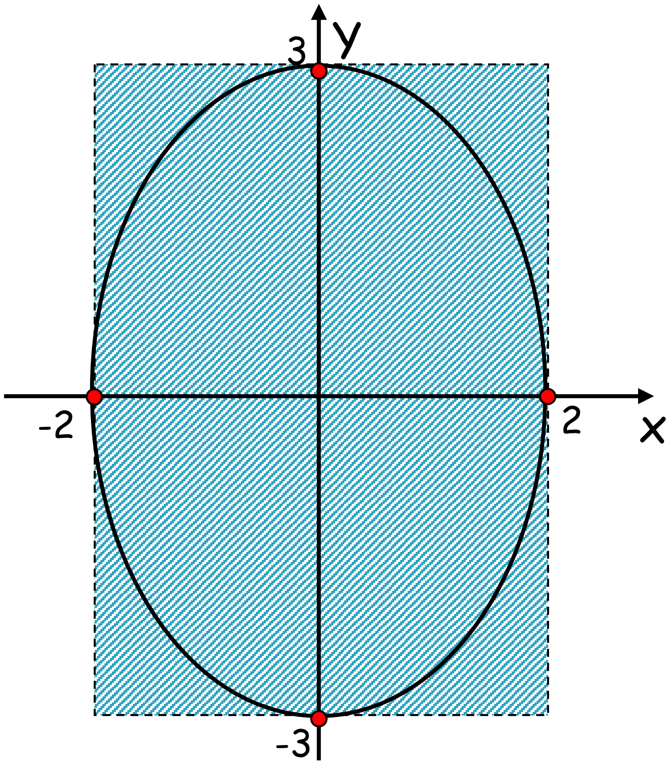
$$36 - 9x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Para y : $x = \pm \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4y^2}$

$$36 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow -3 \leq y \leq 3$$

Gráfica de la curva de ecuación

9x2 + 4y2 - 36 = 0



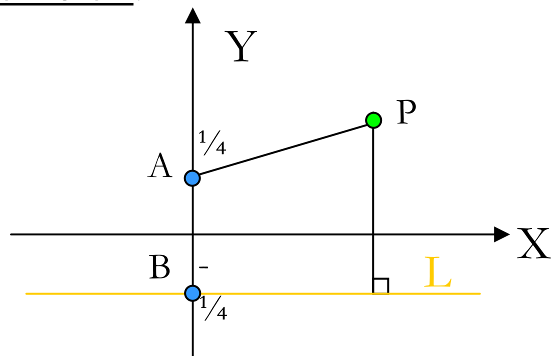
2. Lugares Geométricos

Ejemplo 2.

Obtenga la ecuación del L. G. de todos los puntos del plano que están a igual distancia del punto A (0, ¼) y de la paralela L al eje *X* por el punto B (0,- ¼). Analícela y grafíquela.

Resolución:

A)



Sea P(x,y) un punto del L.G. (notar que no puede estar bajo eje X)

Condición para P: d(A,P) = d(P,L)

$$\sqrt{x^2+\left(y-\tfrac{1}{4}\right)^2} = y+\tfrac{1}{4}$$

$$\boxed{\therefore\ y = x^2}$$

Esta es una ecuación del L. G.

B) Analizamos la gráfica respectiva

a) Interceptos

Con los ejes coordenados:

$$y=0 \iff x=0$$

Sólo intercepta en O(0,0)

a) Simetrías

Aquí $F(x, y) = y - x^2$

Coordenadas Rectangulares

- Con eje *X*: *F*(x, y) = *F*(x,- y)

$$-y - x^2 \neq y - x^2$$

No hay simetría con eje X

- Con eje *Y*: *F*(x, y) = *F*(-x, y)

$$y - (-x)^2 = y - x^2$$

El L. G. es simétrico c/r eje Y

- Con O : *F*(x, y) = *F*(-x,- y)

$$-y - (-x)^2 \neq y - x^2$$

No hay simetría con O

c) Extensión

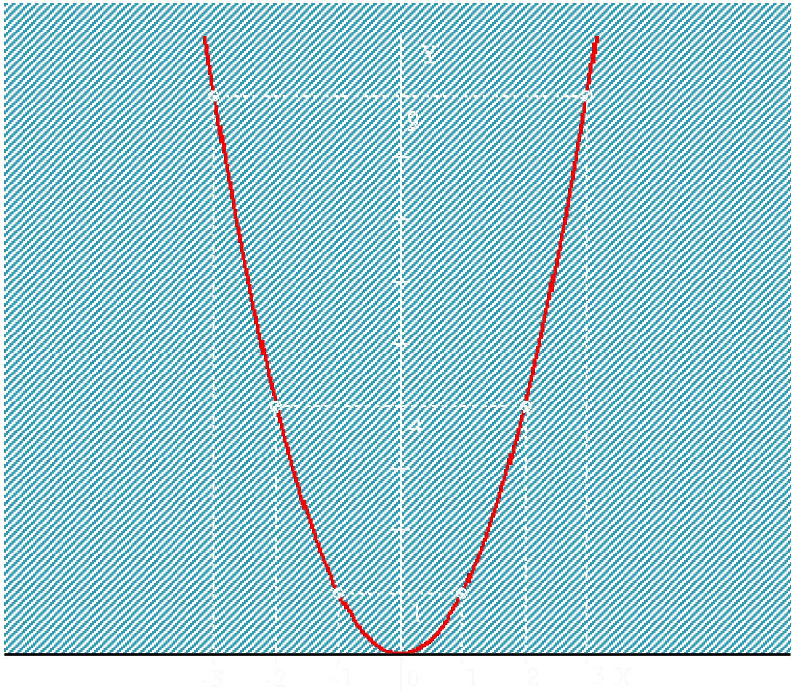
Para x : $y = x^2$

Está definida para todo $x \in \mathbb{R}$

Para y : $x = \pm\sqrt{y}$

Definida sólo para $y \geq 0$

La gráfica ha sido trazada antes



La curva es una parábola