UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

PAUTA PRUEBA PARCIAL I

BAIN037 Cálculo I para Ingeniería
02 de diciembre de 2011

1. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{3ax(3x+2)} & x < 0 \\ b+1 & x = 0 \\ 8\operatorname{sen} x + c & x > 0 \end{cases}$$

Encuentre $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Desarrollo.

Para que la función sea continua en 0, debe cumplirse que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Calculando los límites laterales tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^-} e^{3ax(3x-2)} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} (8\operatorname{sen} x + c) \\ &= 8\sin 0 + c \\ &= c \end{aligned}$$

de donde, al igualar los limites laterales, se tiene que

$$c = 1.$$

Por otro lado tenemos que $f(0) = b + 1$, de donde

$$b + 1 = 1 \Longrightarrow b = 0.$$

Luego, con $a \in \mathbb{R}, b = 0, c = 1$ se tiene que f, es continua en $x = 0$.

Para $x < 0$, la función es continua, pues es la compuesta de la función exponencial con una cuadrática. Anolagamente si $x > 0$, f es continua por ser la compuesta de funciones continuas.

2. Considere las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \cot t \\ y = 2\operatorname{sen} t \cos t \end{cases}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.

   a) Determine los puntos donde la recta tangente es paralela al eje X.

   b) ¿En qué puntos de la curva $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ es cero?

Desarrollo.

a) Buscamos aquellos puntos en que la pendiente de la recta tangente, es decir, la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ es cero:

$$\frac{dy}{dt} = 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\csc^2 t$$

de aquí

$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{(1 - 2\operatorname{sen}^2 t)}{(-\csc^2 t)}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Longleftrightarrow 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 0$$

$$\therefore \operatorname{sen} t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow t = \pm\frac{\pi}{4}$$

Los puntos son $(1,1), (-1,-1)$.

b)

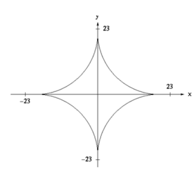
$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx} &= \frac{\frac{d}{dt}(2(-\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen}^4 t))}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 t}} \\ &= 2(-2\operatorname{sen} t\cos t + 8\operatorname{sen}^3 t\cos t)(-\operatorname{sen}^2 t) \\ &= -4\operatorname{sen}^3 t\cos t(1 - 4\operatorname{sen}^2 t) \end{aligned}$$

luego tenemos que

$$\frac{d^2y}{dx} = 0 \Longleftrightarrow \cos t = 0 \vee \operatorname{sen} t = \pm\frac{1}{2}$$

de donde $t = \pm\frac{\pi}{6}$, pues $\cos t \neq 0, \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.

3. Buscar el(los) punto(s) (x,y) en el gráfico de $x^{2/3} + y^{2/3} = 8$



donde las rectas normales a la gráfica en (x,y) tienen pendiente 1.

Desarrollo.

Derivando de manera implícita tenemos:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

así, tenemos que $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, luego $\frac{dy(x_0,y_0)}{dx} = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}$, asi

$$m_N = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 \Longrightarrow x_0^{\frac{1}{3}} = y_0^{\frac{1}{3}}$$

reemplazando en la ecuación original tenemos que $x_0 = \pm 8$, asi los puntos son $(8,8), (-8,-8)$.

4. Sea $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, la función que se conoce como el Seno Hiperbólico de x y se denota por senh (x). Encuentre

$$\left(f^{-1}\right)'(0).$$

Desarrollo.

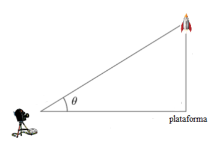
En este caso tenemos

$$f^{'}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

además $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$, luego para determinar $f^{-1}(0)$, debemos resolver $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Longrightarrow x = 0$,así $f^{-1}(0) = 0$

$$\therefore \left(f^{-1}\right)'(0) = 1$$

5. Una cámara de televisión está a 4000 pies de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar a razón correcta para mantener el cohete en la mira. Supongamos que el cohete se eleva verticalmente y que su velocidad es de 600 pies por segundo cuando se ha elevado 3000 pies.



   a) ¿Con qué rapidez cambia la distancia de la cámara de televisión al cohete en ese momento?

   b) Si la cámara se mantiene apuntando al cohete, ¿con qué rapidez cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento?

Desarrollo.

a) $x^2 + 4000^2 = y^2 \Longrightarrow x \cdot x^{'} = y \cdot y^{'} \Longrightarrow x^{'} = \frac{3000 \cdot 600}{5 \cdot 1000} = 360(pies/seg)$

b) $\tan\alpha = \frac{y}{4000} \Longrightarrow \sec^2\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{4000}\frac{dy}{dt}$
de donde se tiene que $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{12}{125}(rad/seg)$.