Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Vectores en el Plano

Vectores en el Plano

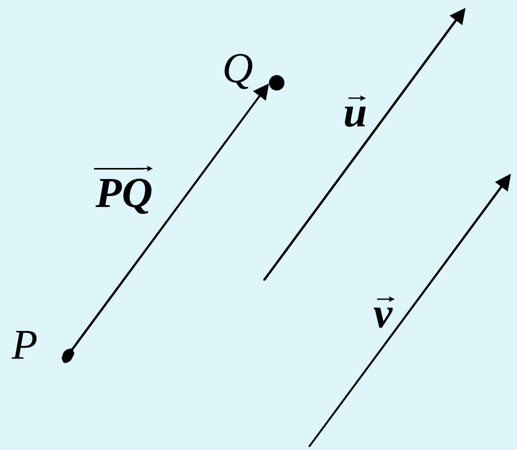
Cantidades Escalares:

- longitud
- área
- volumen
- temperatura

Cantidades Vectoriales:

- aceleración
- velocidad
- fuerza

• Vector = Segmento de recta dirigido (Tiene Punto Inicial y Punto Final)

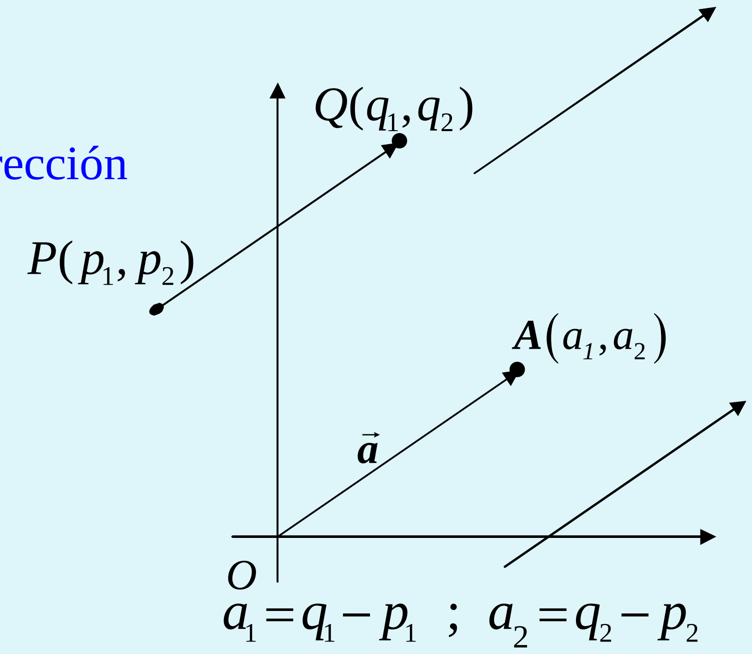


• Un vector queda determinado por su magnitud y dirección

Vectores en el Plano

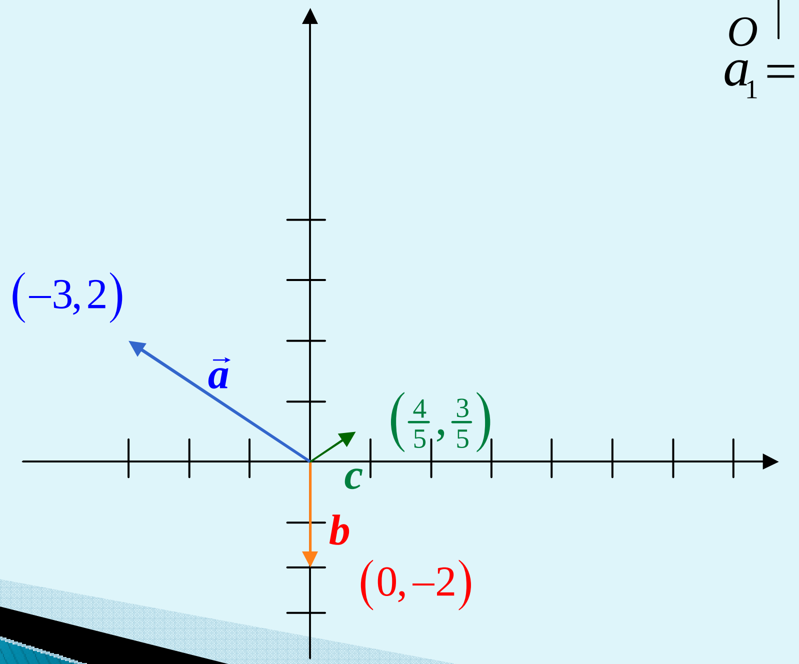
Vectores equivalentes:

tienen la misma magnitud y la misma dirección



- Dado un vector hay infinitos vectores equivalentes a él.
- Pero sólo uno tiene punto inicial en el origen.

Ejemplo:



Vectores en el Plano

- Así: cada vector determina un único par ordenado de números reales y queda identificado por un punto del plano.

- Se tiene la correspondencia:

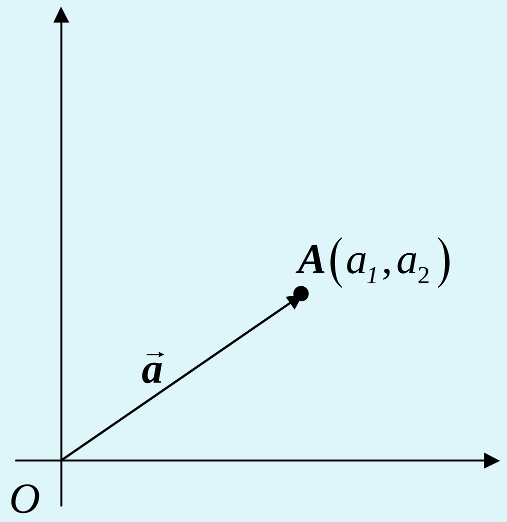
$$\{\text{ Puntos del plano }\} \leftrightarrow \{\text{ Vectores en el plano }\} \leftrightarrow R^2$$

Vectores en el Plano

Vector de Posición del punto $A(a_1,a_2)$

es $\vec{a}=(a_1,a_2)$

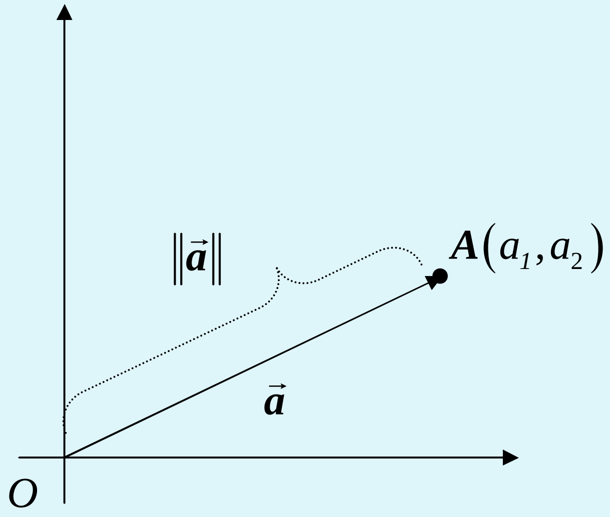
a_1 , a_2 son las **componentes** del vector $\vec{a}$



Vectores en el Plano

Módulo de un vector

$$\| \vec{a} \| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$$



Propiedades del Módulo

$$\| \vec{a} \| \geq 0$$

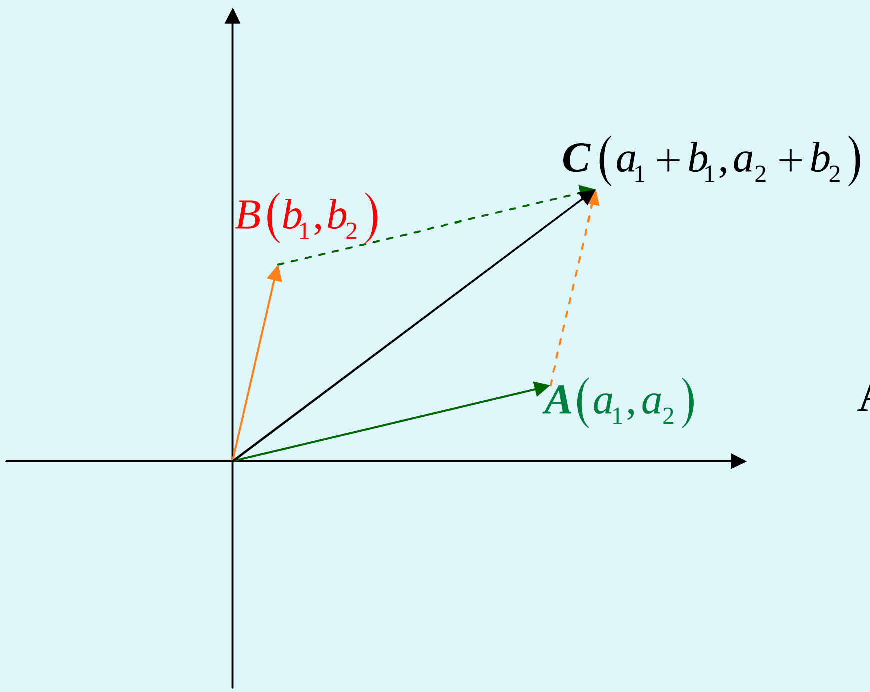
$$\| \vec{a} \| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

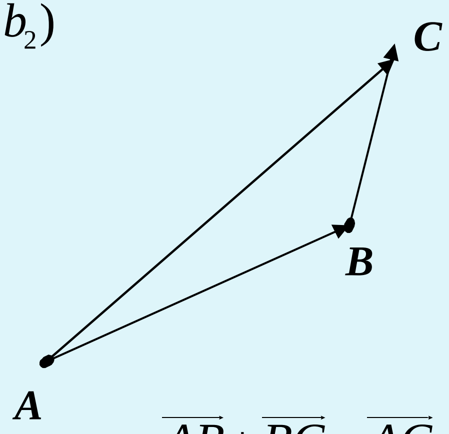
Vectores en el Plano

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Operaciones con vectores:

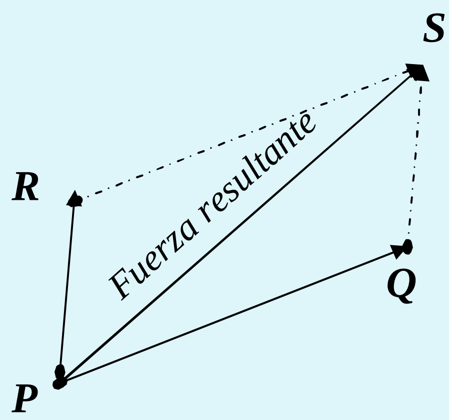
Adición: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$





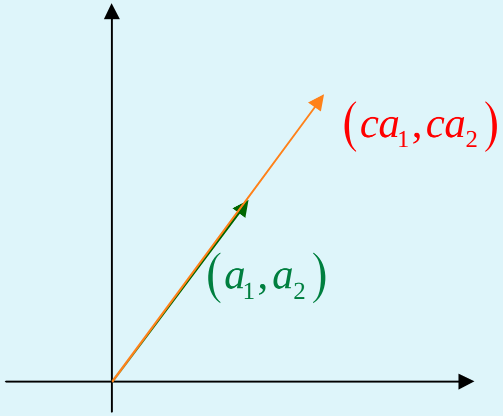
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

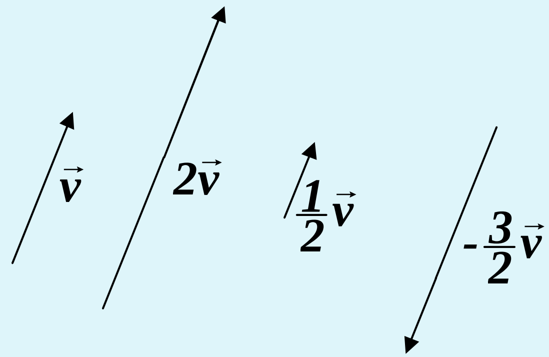
Aplicación a Suma de Fuerzas



Vectores en el Plano

Multiplicación por escalar: $c\vec{a} = c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$





Propiedades de las operaciones:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

$\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$

$\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$

$c(\vec{a}+\vec{b}) = c\vec{a}+c\vec{b}$

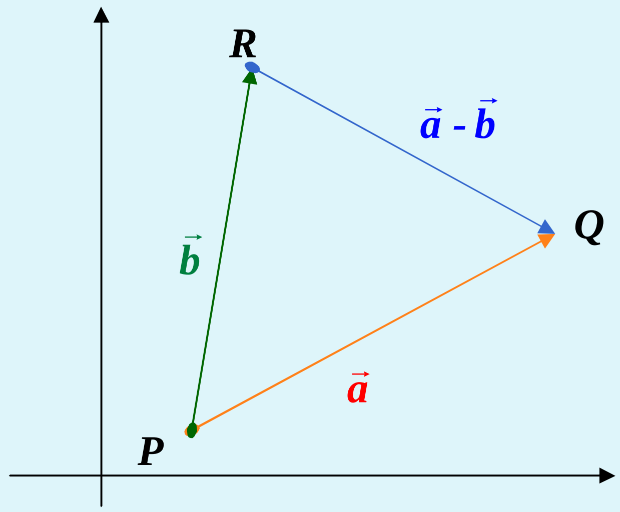
$(c+d)\vec{a} = c\vec{a}+d\vec{a}$

$c(d\vec{a}) = (cd)\vec{a}$

$1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

$\| c\,\vec{a} \| = |c| \|\vec{a}\|$

$\| \vec{a}+\vec{b} \| \leq \| \vec{a} \| + \| \vec{b} \|$



Sustracción de Vectores

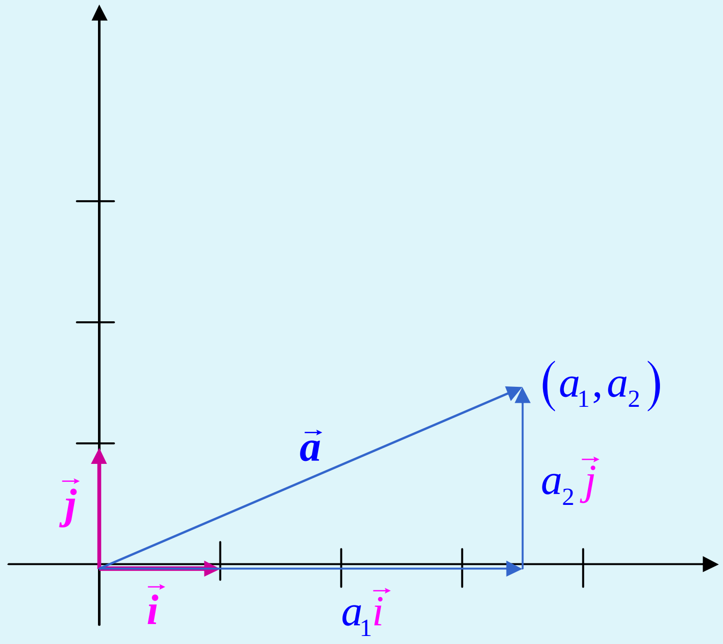
$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b}) = (a_1-b_1, a_2-b_2)$$

Vectores Unitarios Básicos

$$\vec{i} = (1,0) \quad ; \quad \vec{j} = (0,1)$$

Así los vectores en el plano se pueden expresar de dos formas:

$$\vec{a} = (a_1,a_2) = a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}$$



Vectores en el Plano

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Componentes de un vector

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \qquad a_1 = \|\vec{a}\| \cos\theta\,; \quad a_2 = \|\vec{a}\| \operatorname{sen}\theta$$

Producto Punto (o Producto Escalar)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$$

Se lee: "*a* punto *b*"

Propiedades del Producto Punto

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha\, (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

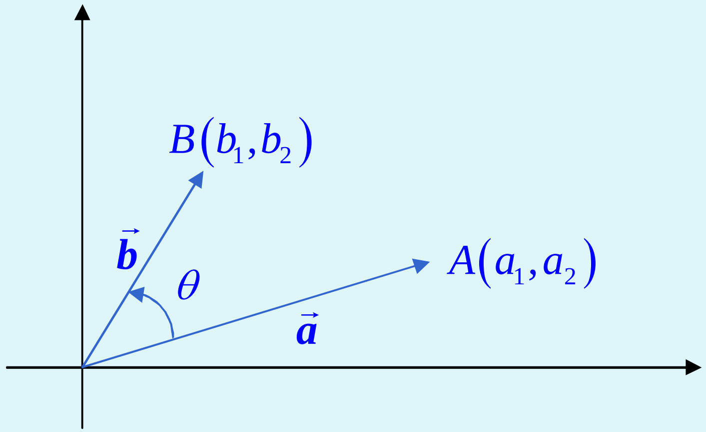
$$\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$$

Vectores en el Plano

Ángulo entre Vectores

El ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

es el ángulo $\theta = \measuredangle AOB \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$



Vectores Paralelos. Vectores Ortogonales

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si $\theta = 0 \vee \theta = \pi$

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si $\theta = \frac{\pi}{2}$

Teorema sobre Producto Escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cdot \cos\theta$$

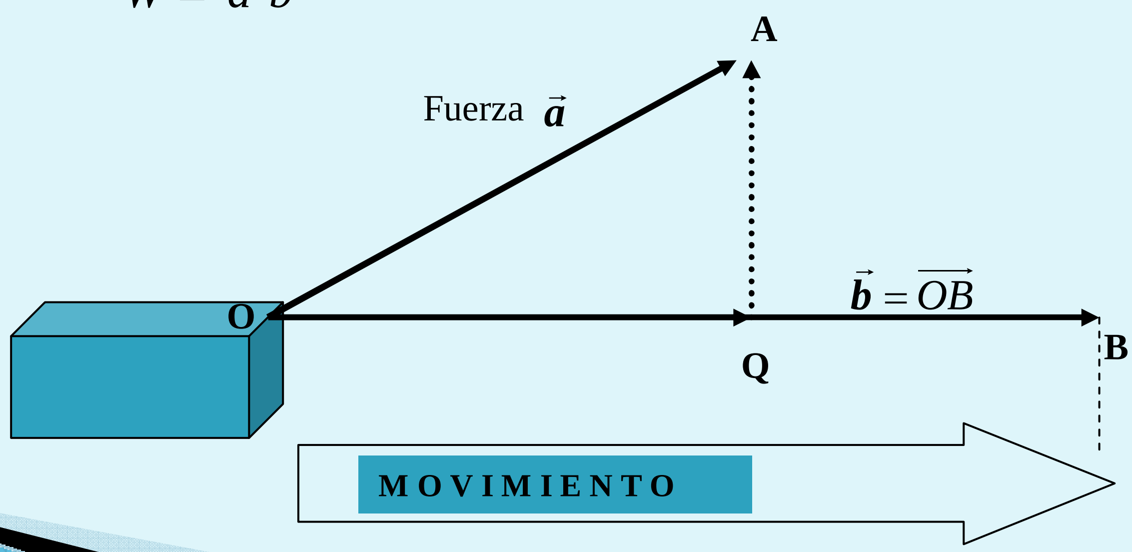
Vectores en el Plano

Aplicación del producto Punto: TRABAJO

El Trabajo W efectuado por una fuerza constante $\vec{a}$

a medida que su punto de aplicación se mueve a lo largo de un vector $\vec{b}$

es $W = \vec{a}\cdot\vec{b}$



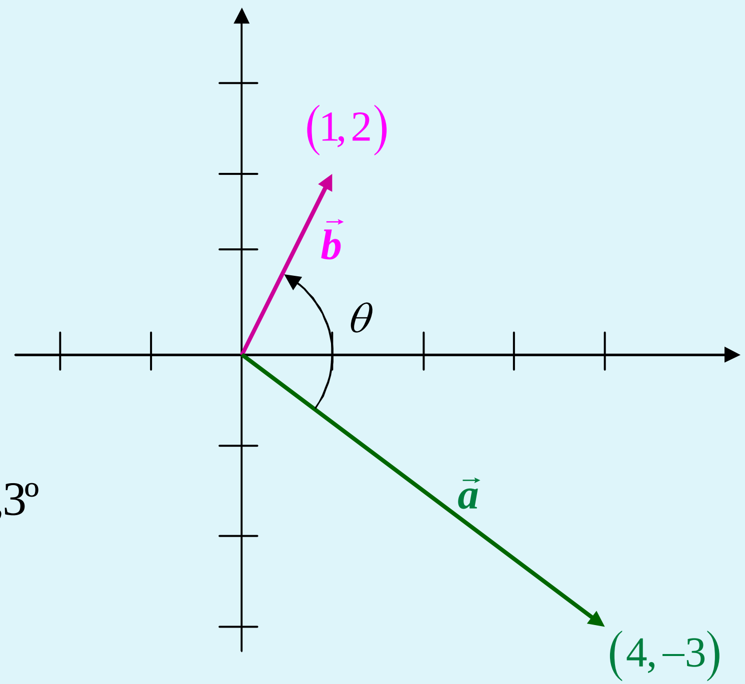
Vectores en el Plano

Cálculo del Ángulo entre Vectores

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}\right)$$

Ejemplo:

Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{a}=(4,-3)$ y $\vec{b}=(1,2)$



Resolución:

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{(4,-3)\cdot(1,2)}{\|(4,3)\|\|(1,2)\|}\right)=\frac{-2\sqrt{5}}{25}\approx 100{,}3^{o}$$

Vectores en el Plano

Ortogonalidad de Vectores

$\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si y sólo si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Proyección de un vector sobre otro

La proyección escalar del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$

(o la componente del vector $\vec{a}$ según el vector $\vec{b}$) es

$$\text{proy}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

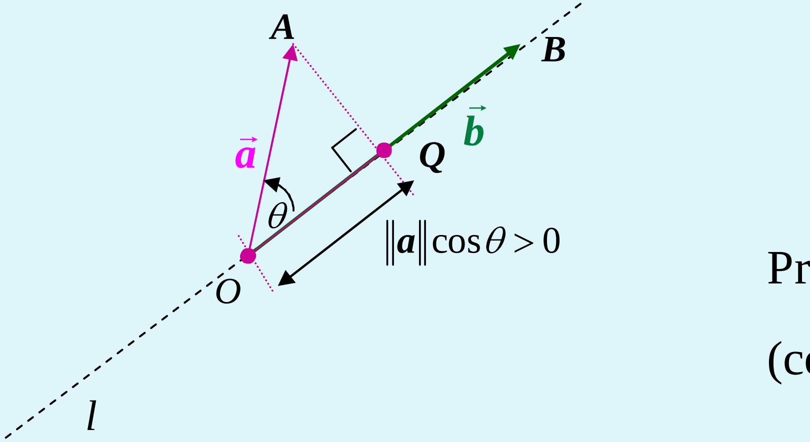
La proyección vectorial del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$ es

$$\overrightarrow{\text{proy}}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} \right) \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Vectores en el Plano

Proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

(con ángulo agudo)



Proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

(con ángulo obtuso)