PAUTA PRUEBA PARCIAL 2

BAIN037 Cálculo I para Ingeniería

---

1. Considere la función

$$f(x) = 1 - x + e^{1/x},$$

definida $\forall x \neq 0$ cuyas derivadas son:

$$\frac{df}{dx} = \frac{-e^{1/x}}{x^2} - 1 \quad \text{y} \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}.$$

a) Estudie los límites de la función cuando $x \to -\infty$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$ y $x \to +\infty$.
Desarrollo:

- $\lim_{x\to-\infty} 1 - x + e^{1/x} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^-} 1 - x + e^{1/x} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} 1 - x + e^{1/x} = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} 1 - x + e^{1/x} = -\infty$

b) Determine si la gráfica de la función posee asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx.$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x + e^{1/x}}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1 + \frac{e^{1/x}}{x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to+\infty} 1 - x + e^{1/x} + x \\ &= \lim_{x\to+\infty} 1 + e^{1/x} \\ &= 2 \end{aligned}$$

De donde, la asíntota oblicua es $y = -x + 2$.

c) Analice la monotonía de la función y determine, si existen, los valores extremos.
Desarrollo: Observamos que

$$\frac{df}{dx} = \frac{-e^{1/x}}{x^2} - 1 < 0, \quad \forall x \in dom\ f,$$

de donde se desprende que la función es decreciente en $]-\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$.

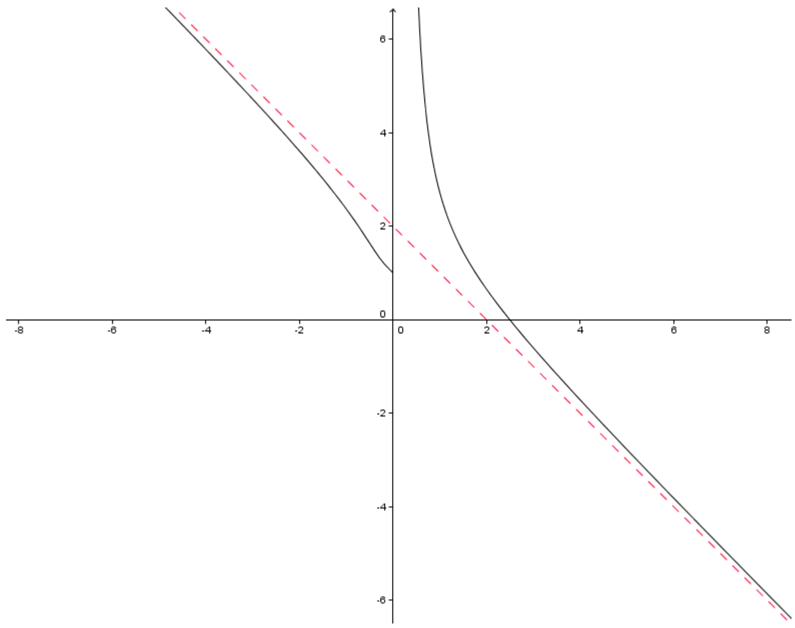
d) Estudie la concavidad y la existencia de puntos de inflexión.
Desarrollo: Estudiemos el signo de la segunda derivada de la función:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$$

		$-\frac{1}{2}$		0	
$\frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$	-	0	+	$\nexists$	+

De aquí deducimos que la función es cóncava hacia abajo en $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ y cóncava hacia arriba en $]-\frac{1}{2}, 0[$ y $]0, +\infty[$. En $x = -\frac{1}{2}$ hay un punto de inflexión.

e) Use los resultados anteriores para bosquejar la gráfica de la función.



2. En una empresa que fabrica alternadores de automóviles la producción está parcialmente automatizada mediante el uso de robots. Los costos diarios de operación ascienden a U\$100 por trabajador y U\$16 por robot. Con el fin de cumplir con los plazos de producción, la empresa necesita que el número de trabajadores y de robots, cumplan con la condición $x \cdot y = 10000$, donde x es el número de trabajadores e y, el número de robots. Suponiendo que la empresa desea cumplir con los plazos de producción, ¿Cuántos trabajadores y cuántos robots se necesitan para lograr un costo mínimo? Para responder este problema, siga los siguientes pasos:

   a) Formule la función de costo diario.
   Desarrollo:
   $$C(x, y) = 100x + 16y.$$
   De $x \cdot y = 10000$ se tiene que $y = \dfrac{10000}{x}$ y reemplazando obtenemos
   $$C(x) = 100x + \frac{160000}{x}.$$

   b) Determine la cantidad de trabajadores y robots que minimizan el costo diario.
   Desarrollo:
   $$C'(x) = 100 - \frac{160000}{x^2}.$$
   $$C'(x) = 0 \iff x = \pm 40$$
   y como x representa el número de trabajadores, descartamos $x = -40$.
   Para determinar si en $x = 40$ hay un mínimo, utilizamos el criterio de la segunda derivada:
   $$C''(x) = \frac{320000}{x^3},$$
   Como $C''(40) = \dfrac{320000}{64000} = 5 > 0$, entonces en $x = 40$ hay un mínimo local.Además, si $x = 40$ entonces $y = \dfrac{10000}{40} = 250$.
   Finalmente, concluimos que el número de trabajadores y robots que minimizan el costo diario son 40 y 250 respectivamente.

3. Determine el valor de las siguientes integrales:

a) $\int\limits_{-2}^{2}(1-|x|)dx$

Desarrollo:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-2}^{2}(1-|x|)dx &= \int\limits_{-2}^{0}(1-|x|)dx+\int\limits_{0}^{2}(1-|x|)dx \\
&= \int\limits_{-2}^{0}(1+x)dx+\int\limits_{0}^{2}(1-x)dx \\
&= \int\limits_{-2}^{0}dx+\int\limits_{-2}^{0}xdx+\int\limits_{0}^{2}dx-\int\limits_{0}^{2}xdx \\
&= (0-(-2))+\frac{0^2-(-2)^2}{2}+(2-0)-\frac{2^2-0^2}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) $\int\limits_{0}^{1}f(x)dx$, donde $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad 0\le x\le c \\ c\dfrac{1-x}{1-c} & \text{si} \quad c\le x\le 1 \end{cases}$; $c\in]0,1[$ es una constante.

Desarrollo:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^c f(x)dx+\int_c^1 f(x)dx \\
&= \int_0^c xdx+\int_c^1 c\frac{1-x}{1-c}dx \\
&= \int_0^c xdx+\frac{c}{1-c}\int_c^1(1-x)dx \\
&= \int_0^c xdx+\frac{c}{1-c}\left[\int_c^1 dx-\int_c^1 xdx\right] \\
&= \frac{c^2-0^2}{2}+\frac{c}{1-c}\left[(1-c)-\frac{1^2-c^2}{2}\right] \\
&= \frac{c}{2}.
\end{aligned}$$