UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

Pauta tutoria 13

1. *a)*

$$det(B - xI_3) = det\begin{pmatrix} 4-x & 6 & 0 \\ -3 & -5-x & 0 \\ -3 & -6 & -5-x \end{pmatrix} = (-5-x)(x-1)(x+2)$$

luego el polinomio característico es $p(x) = (-5-x)(x-1)(x+2)$.

b) Los valores propios son -5 , -2 y 1.

$$V_{-5} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (B+5I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $V_{-5} = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3\} = \langle (0,0,1) \rangle$.

$$V_{-2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (B+2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $V_{-2} = \{(z,-z,z) \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1,-1,1) \rangle$.

$$V_{1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (B-I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $V_1 = \{(-2y,y,0) \in \mathbb{R}^3\} = \langle (-2,1,0) \rangle$

c) Es diagonalizable ya que todas las raices del polinomio característico son simples (multiplicidad 1).

2. Basta ver que pasa con el valor propio 1.

$$V_1 = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \ / \ ([T]_{\mathcal{C}} - I_4)[A]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A = y\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo que $V_1 = \langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ y se tiene que es diagonalizable.

3. *a)* asi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto $Ker(T) = \{(0,0,0)\}$ y $Nul(T) = 0$

   b)

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= 1(1,1,2) + 2(2,1,1) + 1(1,2,1) = (6,5,5) \\ T(1,-1,1) &= 1(1,1,2) - 1(2,1,1) + 3(1,2,1) = (2,6,4) \\ T(1,1,-1) &= -1(1,1,2) + 1(2,1,1) + 2(1,2,1) = (3,4,1) \end{aligned}$$

   Por lo tanto $Im(T) = \langle (6,5,5), (2,6,4), (3,4,1) \rangle$ y $Rg(T) = 3$.

   c) Si es isomorfismo ya que es inyectiva y epiyectiva por lo hecho en (a) y (b).

   d)

$$[T^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/5 & -1/5 & 1/5 \\ -7/15 & 2/15 & 1/5 \end{pmatrix}$$