UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 Álgebra Lineal para Ingeniería
Pauta Prueba Parcial 2
Martes 12 de Noviembre de 2013

---

1. Sean

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad a+b+c+d=0 \right\} \\ W_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad a=d \quad \wedge \quad b=c \right\} \end{aligned}$$

a) Utilizando la definición, demuestre que $W_1 \leq M_2(\mathbb{R})$.

Desarrollo:

i)
- $W_1 \subseteq M_2(\mathbb{R})$ por definición.
- $W_1 \neq \emptyset$ ya que $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ cumple la condicion $1-1-1+1=0$.

ii) Sean $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in W_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
Por demostrar que $\alpha A + B \in W_1$

$$\alpha A + B = \begin{bmatrix} \alpha a_1 + a_2 & \alpha b_1 + b_2 \\ \alpha c_1 + c_2 & \alpha d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha a_1 + a_2 + \alpha b_1 + b_2 + \alpha c_1 + c_2 + \alpha d_1 + d_2 &= \alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1 + \alpha d_1 + a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \\ &= \alpha(a_1+b_1+c_1+d_1) + (a_2+b_2+c_2+d_2) \\ &= \alpha \cdot 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha A + B \in W_1$$

$\therefore$ de i) y ii) tenemos que $W_1 \leq M_2(\mathbb{R})$.

b) Encuentre base y dimensión de W_2.

Desarrollo:

$$\begin{aligned} W_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad a=d \quad \wedge \quad b=c \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad / \quad a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad / \quad a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

El conjunto $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ genera a W_2 y es $l.i.$ ya que ninguno es multiplo del otro.

$$\therefore \qquad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ es base de } W_2.$$

$$\therefore \dim(W_2) = 2$$

c) Caracterice $W_1 \cap W_2$.

Desarrollo:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad / \quad a+b+c+d=0 \quad \wedge \quad a=d \quad \wedge \quad b=c \right\}$$

2. Sea

$$W = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \quad / \quad p(1)=0 \quad \wedge \quad p(0)=0\} \leq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

a) Encuentre un polinomio no nulo que pertenezca a W.

Desarrollo:
Sea $p(x) = x^2 - x$ tenemos

$$p(1) = 1^2 - 1 = 0 \quad \wedge \quad P(0) = 0^2 - 0 = 0$$

$$\therefore p(x) = x^2 - x \in W$$

b) Sabiendo que $B = \{x - x^2\}$ es una base de W, encuentre $W^\perp$.

Desarrollo:

$$\begin{aligned} W^\perp &= \left\{ ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \quad / \langle ax^2+bx+c, -x^2+x\rangle = 0 \right\} \\ &= \left\{ ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \quad / -a+b=0 \right\} \\ &= \left\{ ax^2+ax+c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \quad / a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a(x^2+x)+c(1) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \quad / a, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \langle x^2+x, 1\rangle \end{aligned}$$

c) Verifique que $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = W \oplus W^\perp$.

Desarrollo:
Se debe cumprobar

- $W + W^\perp = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
- $W \cap W^\perp = \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\}$

$$W + W^\perp = \langle x - x^2, x + x^2, 1\rangle$$

El conjunto $B = \{x - x^2, x + x^2, 1\}$ genera a $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y además es $l.i.$, en efecto, sean $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha(x - x^2) + \beta(x + x^2) + \gamma(1) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tiene solucion unica debido a que el $det(A) = 2 \neq 0$

$$\therefore \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\therefore B \text{ es base de } W + W^{\perp} \text{ y } \dim(W + W^{\perp}) = 3$$

Como $W \cap W^{\perp} \leq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y sus dimensiones son iguales tenemos que

$$W + W^{\perp} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

Ahora utilizando el teorema de las dimensiones tenemos

$$\begin{array}{rcl} \dim(W + W^{\perp}) & = & \dim(W) + \dim(W^{\perp}) - \dim(W \cap W^{\perp}) \\ 3 & = & 1 + 2 - \dim(W \cap W^{\perp}) \\ \dim(W \cap W^{\perp}) & = & 0 \end{array}$$

$$\therefore W \cap W^{\perp} = \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\}$$

$$\therefore W \oplus W^{\perp} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

3. Las siguientes proposiciones son **falsas**. Justifique.

   a) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad x + y = 2 - z\right\} \leq \mathbb{R}^3$.

   Desarrollo:
   $W \not\leq \mathbb{R}^3$, $\qquad (0, 0, 0) \in W$ ya que no cumple la condición

   $$\begin{array}{rcl} 0 + 0 & = & 2 - 0 \\ 0 & \neq & 2 \end{array}$$

   b) Usando el producto interno usual de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, el ángulo entre $x^2 - 2x$ y $x - 3$ es $\dfrac{\pi}{2}$.

   Desarrollo:
   El ángulo entre $x^2 - 2x$ y $x - 3$ no es $\dfrac{\pi}{2}$ debido a que

   $$\langle x^2 - 2x, x - 3\rangle = -2 \neq 0$$

   c) Si $W = \langle (1, 2, -5), (2, 1, 3), (-4, 1, -19)\rangle$, entonces la dim($W$)=3.

   Desarrollo:
   Como los vectores que genern a W son $l.d.$ ya que

   $$2 \cdot (1, 2, -5) - 3 \cdot (2, 1, 3) = (-4, 1, -19)$$

   entonces la $\dim(W) < 3$

   d) $\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)\rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$, es un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

   Desarrollo:
   Si consideramos el vector (0,1,0) tenemos

   $$\langle (0, 1, 0), (0, 1, 0)\rangle = -1 < 0$$