Lógica

Miguel, Mario, Fernando y David son sospechosos de haber robado una billetera en una reunión a la cual los cuatro habían asistido. Cuando se les interrogó acerca del robo, ellos afirmaron lo siguiente:

Miguel: Yo no fui.

Fernando: Mario fue.

Mario: Fernando miente al decir que fui yo.

David: Yo la robé.

Si se sabe que solo uno robó la billetera y que tres mienten, ¿quién dice la verdad?

Lógica

Estudia la estructura de las aseveraciones con el fin de determinar si éstas son válidas o no.

El enunciado:

Estamos en clases de álgebra → Es una proposición

¡¡Salgamos a carretear!! → No es una proposición

Otros ejemplos:

El águila es un ave

Hoy es Martes

¿Qué día es hoy?

3+1=5

Alfabeto de la lógica proposicional

El lenguaje de la lógica proposicional necesita tres tipos distintos de símbolos:

- CONSTANTES PROPOSICIONALES
- CONECTIVOS LÓGICAS
- SÍMBOLOS AUXILIARES

$$
\begin{aligned}
&\equiv \overline{[(p \wedge r) \Rightarrow q]} \vee [p \Rightarrow (r \Rightarrow q)] \\
&\equiv \overline{\left[\overline{(p \wedge r)} \vee q\right]} \vee [\overline{p} \vee (r \Rightarrow q)] \\
&\equiv \left[\overline{\overline{(p \wedge r)}} \wedge \overline{q}\right] \vee [\overline{p} \vee (\overline{r} \vee q)] \\
&\equiv [p \wedge r \wedge \overline{q}] \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee q] \\
&\equiv \underbrace{\underbrace{[p \wedge r \wedge \overline{q}]}_{s} \vee \underbrace{\overline{[p \wedge r \wedge \overline{q}]}}_{\overline{s}}}_{\text{Verdad}}
\end{aligned}
$$

CONSTANTES PROPOSICIONALES

- Simbolizan oraciones o proposiciones
- Se utilizan las siguientes letras minúsculas:
  p, q, r, s, t, u
- Si necesitamos simbolizar más oraciones (un número infinito de ellas), recurrimos a subíndices numéricos:
  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \ldots$

Representando proposiciones

p: Estamos en clases de álgebra

q: Estudiaremos por la tarde

Se llaman proposiciones simples

Usando conectivos lógicos es posible generar nuevas proposiciones (compuestas).

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Conectivos lógicos

Símbolo	**Operación asociada**
$\sim, \neg, \overline{p}$	Negación (**no**)
$\wedge$	Conjunción (**y**)
$\vee$	Disyunción inclusiva (**o**, **y/o**)
$\Rightarrow$	Implicación (**condicional**)
$\Leftrightarrow$	Doble implicación (**bicondicional**)

SÍMBOLOS AUXILIARES

Son paréntesis y corchetes, que sirven para agrupar los otros símbolos de manera que se puedan evitar ambigüedades:

( )   [ ]

$[\sim p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$

p	q	r	$[(\sim p$	$\wedge$	$(q \vee r)]$	$\leftrightarrow$	$[(p \vee r)$	$\wedge$	$Q]$
V	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F	F	F

La proposición es una CONTINGENCIA

Ejemplos:

Hoy es lunes y mañana es miércoles

p: Hoy es lunes

q: Mañana es miércoles

El conectivo lógico es la conjunción, por lo tanto, la proposición se escribe:

$$p \wedge q$$

Ejercicios

Escribir siguientes proposiciones compuestas usando conectivos lógicos identificando cada una de las proposiciones simples

a) La rosa es una flor si y solo si el cocodrilo es pez
b) Si la ley de gravitación es falsa, entonces Newton se equivocó
c) Si la humedad es alta, lloverá esta tarde o esta noche.
d) Una relación es una relación de equivalencia si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Conectivos y tablas de verdad

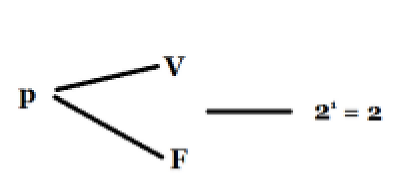
Un arreglo que muestra los posibles valores de verdad de una proposición compuesta a partir de los valores de verdad de las proposiciones simples, se llama ***tabla de verdad***.

Negación

p	~p
V	**F**
F	**V**

~p Representa la proposición compuesta no p

Construcción tablas de verdad



p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

p	y	q
V		V
F		F

$\boxed{2^2 = 4}$

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F

$\boxed{2^3 = 8}$

Conjunción ($\wedge$)

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción ($\vee$)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción exclusiva ($\veebar$)

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicación o condicional ($\Rightarrow$)

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Algo más sobre el condicional

hipótesis o antecedente

$$p \Rightarrow q$$

tesis, conclusión ó consecuente

Formas de Lectura: **a) si *p* entonces *q***

b) *p* implica *q*

c) *q* si *p*

d) q solo si p

e) *p* es condición suficiente para *q*

f) *q* es condición necesaria para *p*

Bicondicional ($\Leftrightarrow$)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposiciones lógicamente equivalentes

Dos proposiciones p, q se dirán equivalentes si y solo si sus tablas de verdad son idénticas.

Notación: $p \equiv q$

Ejemplo:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

$$\therefore\ p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Ejemplos

1. $\sim(\sim p) \equiv p$
2. $p \wedge p \equiv p;\ p \vee p \equiv p$
3. $p \wedge t \equiv p;\ p \wedge c \equiv c$
4. $p \vee t \equiv t;\ p \vee c \equiv p$
5. $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
6. $p \Rightarrow q \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ **Contra recíproca**
7. $\sim p \Rightarrow c \equiv p$ **Reducción al absurdo**

Bivalencia	$\neg T \equiv F$ $\neg F \equiv T$
Doble negación (Involución)	$\neg \neg p \equiv p$
Idempotencia	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
Identidad	$p \wedge T \equiv p$ $p \wedge F \equiv F$ $p \vee T \equiv T$ $p \vee F \equiv p$
No Contradicción	$p \wedge \neg p \equiv F$ $\neg (p \wedge \neg p) \equiv T$
Complemento (exclusión media)	$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$ $\neg (p \vee \neg p) \equiv F$
Absorción (contracción)	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
Conmutatividad	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
Leyes de Morgan (dualidad)	$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Asociatividad	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Tautología, contradicción

Una Tautología es una proposición compuesta que es verdadera (*V*) siempre, independiente de los valores de verdad que tengan las proposiciones simples que la forman.

Una Contradicción es una proposición compuesta que es falsa (*F*) siempre, independiente de los valores de verdad que tengan las proposiciones simples que la forman.

Ejercicios:
Construya las tablas de verdad de la siguientes proposiciones. ¿Hay algunas de ellas que sean equivalentes?

a) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

b) $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Leftrightarrow q)$

c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

d) $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \vee r)$

e) $[(p \wedge q) \vee p\ ] \Leftrightarrow p$

f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Ejercicios

1. La fórmula proposicional: es: $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \sim Q)$
   a) Una tautología.
   b) Una contradicción
   c) Una fórmula contingente.
2. La forma proposicional $\sim(p \rightarrow q) \vee p$ es equivalente
   a) $(\sim p \wedge q) \vee p$
   b) p
   c) $\sim p \vee q$
3. Para cada una de las siguientes sentencias comprobar si son tautologías, contradicciones o indeterminaciones:
   a). $\neg(\neg p) \rightarrow p$
   b). $p \rightarrow (p \wedge q)$
   c). $\neg(s \vee q) \vee \neg q$
   d). $(p \vee q) \rightarrow p$
   e). $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
   f). $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
   g). $p \vee (p \rightarrow q)$
   h). $(p \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow p$
   i). $p \vee (q \rightarrow \neg p)$
   j). $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
   k). $\neg p \wedge (\neg(p \rightarrow q))$ l). $p \rightarrow \neg p$m)$\neg p \rightarrow p$

Teoría de Conjuntos

Conjuntos

Conceptos primitivos:
- Conjunto
- Elemento
- Pertenencia

Notación: A, B, … para conjuntos

a,b,c, … para elementos

$$b \in A$$

$$\sim (b \in A) \equiv b \notin A$$

Un conjunto se puede definir por:
- Extensión: Listamos todos sus elementos o algunos, mostrando una ley de formación.
- Comprensión: Especificando una propiedad

Conjunto vacío: $\phi = \{ \ \}$

$|A| =$ Número de elementos del conjunto

Cardinalidad de A

Conjuntos

Relaciones entre conjuntos

$$A \subseteq B$$

$$A = B$$

$$A \subseteq B \; ssi \;\; \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$\sim (A \subseteq B) \equiv A \not\subseteq B \qquad \therefore A \not\subseteq B \equiv \exists x / x \in A \wedge x \notin B$$

$$A = B \; ssi \; A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\therefore A \neq B \equiv A \not\subseteq B \;\vee\; B \not\subseteq A$$

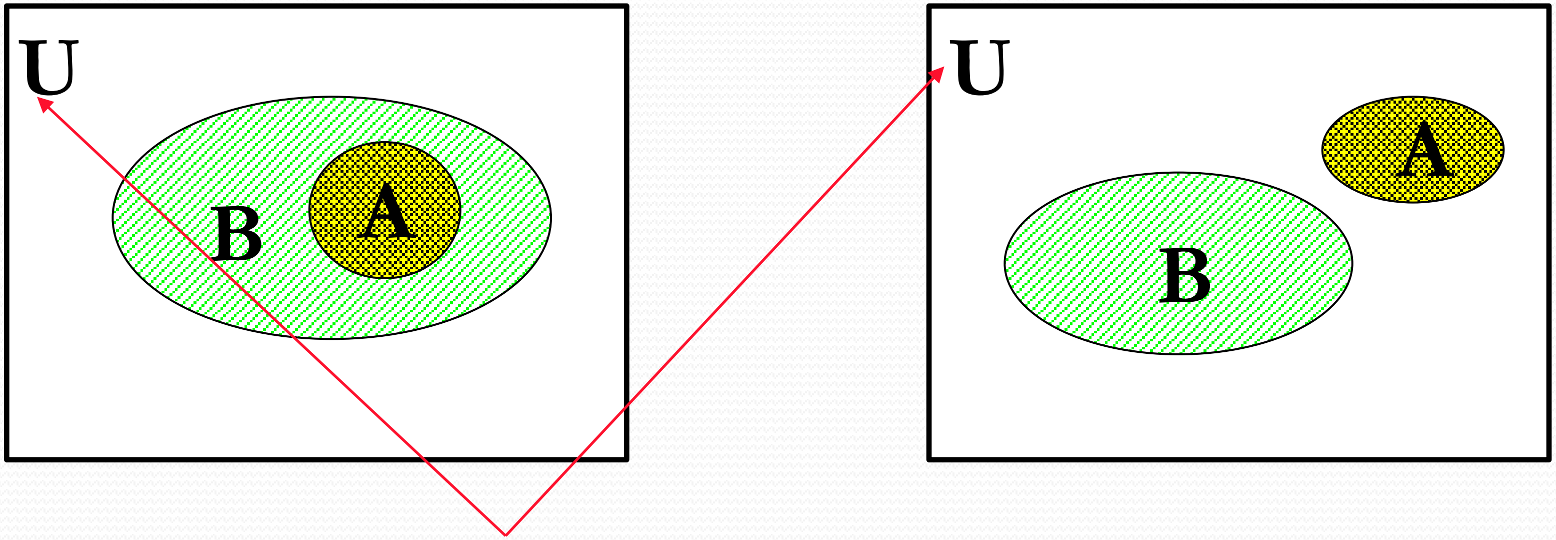
Propiedades: Sean A y B conjuntos

1. $\phi \subseteq A \subseteq U$
2. $A \subseteq A$
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Observaciones:

Dos conjuntos que no poseen elementos en común se dicen disjuntos.
Es decir: $A \; y \; B \; son \; disjuntos \; ssi \; \forall x \in U, \sim(x \in A \wedge x \in B)$

Los diagramas de Venn son una buena herramienta para representar relaciones entre conjuntos



U : conjunto que contiene todos los elementos que nos interesan

Conjunto Potencia

$$P(A)=\{X : X\subseteq A\}$$

$|P(A)|=2^n$ donde n representa la cardinalidad de A

Operaciones con conjuntos

$$1)\ A\cap B=\{x\in U :\ \ x\in A\wedge x\in B\}$$

$$2)\ A\cup B=\{x\in U :\ \ x\in A\vee x\in B\}$$

$$3)\ A-B=\{x\in U :\ \ x\in A\wedge x\notin B\}$$

$$4)\ A'=\overline{A}=A^C=\{x\in U :\ \ x\notin A\}$$

Propiedades:

$1)\ A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A; \quad A \cup B = B$

$2)\ A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

$3)\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$4)\ A \cup \phi = A, \ \ A \cap \phi = \phi, \ \ A \cup U = U, \ \ A \cap U = A$

$5)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$6)\ A \cap \overline{A} = \phi, \ \ A \cup \overline{A} = U, \ \ \overline{U} = \phi, \ \ \overline{\phi} = U, \ \ \overline{\overline{A}} = A$

$7)\ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

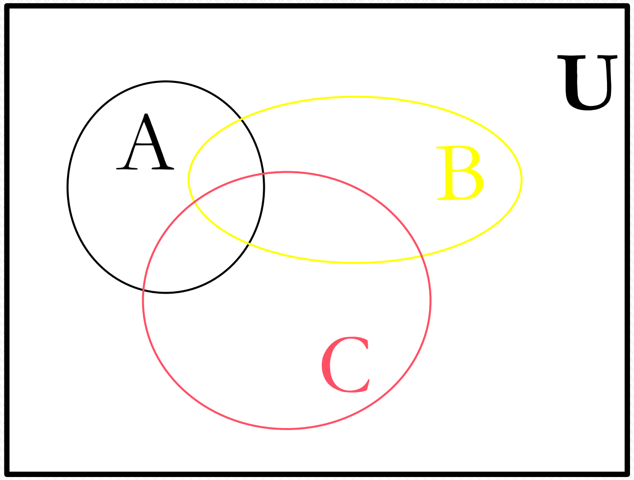
Teoría de Conjuntos

Conjunto y técnicas de conteo

1. $A\cap B=\phi \Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|$

2. $A\cap B\neq \phi \Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

3. $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$



Número de elementos que sólo están en A

$|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$

Número de elementos que están en A y en B pero no en C

$|A\cap B|-|A\cap B\cap C|$

Problema

En una encuesta realizada a 250 personas sobre el gusto por las actividades de teatro, danza y poesía; se encontró que 125 gustan del teatro, 180 de la danza, 65 de la poesía, 100 del teatro y la danza, 25 del teatro y la poesía, 40 de la danza y poesía y 20 tenían las tres preferencias. Determine el número de personas que:

a. Les gusta al menos una de estas actividades.
b. No poseen gusto por estas actividades.
b. Sólo les gusta una de estas actividades.

Solución:

$$U=\{x/x \text{ persona encuestada}\}$$

$$T=\{x\in U/x \text{ gusta del teatro}\}$$

$$D=\{x\in U/x \text{ gusta de la danza}\}$$

$$P=\{x\in U/x \text{ gusta de la poesía}\}$$

$$|T|=125, |D|=180, |P|=65$$

$$|T\cap D|=100, |T\cap P|=25, |D\cap P|=40$$

$$|T\cap D\cap P|=20$$

$|T| = 125, |D| = 180, |P| = 65$

$|T \cap D| = 100, |T \cap P| = 25, |D \cap P| = 40$

$|T \cap D \cap P| = 20$

$|T \cup D \cup P|$ Representa el número de encuestados que al menos gusta de alguna de estas actividades

Luego: $|T \cup D \cup P| = 125 + 180 + 65 - 100 - 25 - 40 + 20$

$|T \cup D \cup P| = 225$

Representando la situación: