UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL
Control N°3 + Pauta

2° Semestre de 2013

Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y \\ x+y & y-z \end{pmatrix}$.

1) Encuentre una base para $Im(T)$

Solución

Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$, luego:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ T(0,1,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ T(0,0,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$Im(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probemos ahora que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ es L.I.

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha+\beta & \beta-\gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es inmediato que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, por lo tanto el conjunto es L.I.

Finalmente una base de $Im(T)$ es

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ya que genera a $Im(T)$ y es L.I.

2) Calcule $n(T)$

Solución

De la parte 1) se tiene que $dim(Im(T)) = 3$, o sea $r(T) = 3$. Además $n(T) + r(T) = dim(\mathbb{R}^3)$, reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned} n(T) + 3 &= 3 \\ n(T) &= 0 \end{aligned}$$

3) ¿T es un isomorfimo? Justifique su respuesta.

Solución

Como $r(T) = 3$ y $dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$ se tiene que $Im(T) \neq M_2(\mathbb{R})$,es decir, la transformación no es sobreyectiva.

T no es un isomorfismo.

4) Sean $B = \{(1,0,1),(2,1,-1),(1,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y C base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

Determine $[T]_B^C$.

Solución

Aplicando la transformación a los vectores de la base B y escribiendo estas imágenes en combinación lineal de la bas C, tenemos

$$T(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(2,1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finamente La matriz asociada a la transformación lial es:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$