UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA
Prueba Parcial III+PAUTA

Martes 25 de Junio de 2013

1. Sean $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ espacio de las matrices simétricas de orden 2 y $F : S \to P_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal definida por:

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = (a - b + 2c)x^2 + (-2a + 3b - c)x + (3a - 3b + 7c)$$

Determine:

a) Kernel y Nulidad de F.

Desarrollo:

$Ker(F) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a - b + 2c = 0 \wedge -2a + 3b - c = 0 \wedge 3a - 3b + 7c = 0 \right\}$

Escalonando la matriz asociada al sistema:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{3+1(-3)}]{f_{2+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R(A) = 3 =$ N° de incógnitas

$\therefore$ El sistema tiene solución trivial.

$$\therefore Ker(F) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, Nul(F) = 0$$

b) Imagen y Rango de F.

Desarrollo:

Sea $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ una base de S.

$$\begin{aligned} Im(F) &= \left\langle F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right), F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right\rangle \\ &= \langle x^2 - 2x + 3, -x^2 + 3x - 3, 2x^2 - x + 7 \rangle \end{aligned}$$

Así $B = \{x^2 - 2x + 3, -x^2 + 3x - 3, 2x^2 - x + 7\}$ genera a $Im(F)$, se debe ver si es L.i.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{3+1(-3)}]{f_{2+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R(A) = 3 \therefore B$ es L.i.

B es una base de $Im(F)$ y $R(F) = 3$

Como $Im(F) \leq P_2(\mathbb{R})$ y $dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, entonces $Im(F) = P_2(\mathbb{R})$.

c) ¿Es F un isomorfismo? Si lo es, halle F^{-1}

Desarrollo:
F es un Isomorfismo pues:

- F es inyectiva, ya que $Ker(F) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
- F es sobreyectiva, ya que $Im(F) = P_2(\mathbb{R})$.

Ahora buscaremos F^{-1}. Sean $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), ux^2 + vx + w \in P_2(\mathbb{R})$, tales que:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) &= ux^2 + vx + w \\ (a - b + 2c)x^2 + (-2a + 3b - c)x + (3a - 3b + 7c) &= ux^2 + vx + w \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} a - b + 2c &=& u \\ -2a + 3b - c &=& v \\ 3a - 3b + 7c &=& w \end{array} \right| \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & u \\ -2 & 3 & -1 & v \\ 3 & -3 & 7 & w \end{array} \right] \xrightarrow[f_{3+1(-3)}]{f_{2+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & u \\ 0 & 1 & 3 & 2u + v \\ 0 & 0 & 1 & -3u + w \end{array} \right] \xrightarrow[f_{1+3(-2)}]{f_{2+3(-3)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7u - 2w \\ 0 & 1 & 0 & 11u + v - 3w \\ 0 & 0 & 1 & -3u + w \end{array} \right] \xrightarrow{f_{1+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18u + v - 5w \\ 0 & 1 & 0 & 11u + v - 3w \\ 0 & 0 & 1 & -3u + w \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 18u + v - 5w \\ b = 11u + v - 3w \\ c = -3u + w \end{array} \right|$$

$$\therefore F^{-1} : P_2(\mathbb{R}) \to S$$

$$F^{-1}(ux^2 + vx + w) = \begin{bmatrix} 18u + v - 5w & 11u + v - 3w \\ 11u + v - 3w & -3u + w \end{bmatrix}$$

2. *a*) Si $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal, tal que:

$$G(1,1) = (-3,4), \quad G(0,2) = (1,-1)$$

Explicite $G(x,y)$.

Desarrollo:

Sean $(x,y) \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que:

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,2) \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha & = & x \\ \alpha + 2\beta & = & y \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha & = & x \\ \beta & = & \dfrac{y-x}{2} \end{array}\right|$$

Así:

$$\begin{aligned} (x,y) &= x(1,1) + \left(\frac{y-x}{2}\right)(0,2) \quad /G \quad (\text{ es T.L.}) \\ G(x,y) &= xG(1,1) + \left(\frac{y-x}{2}\right)G(0,2) \\ &= x(-3,4) + \left(\frac{y-x}{2}\right)(1,-1) \\ &= (-3x,4x) + \left(\frac{y-x}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-7x+y}{2}, \frac{9x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore G(x,y) = \left(\frac{-7x+y}{2}, \frac{9x-y}{2}\right)$$

b) Sea $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $[H]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, donde

$B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1,2),(1,1,1),(1,0,1)\}$, son bases de $\mathbb{R}^3$. Hallar $H(1,2,3)$.

Desarrollo:

Utilizaremos el teorema $[H]_{B_1}^{B_2}[(1,2,3)]_{B_1} = [H(1,2,3)]_{B_2}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix} = [H(1,2,3)]_{B_2}$$

Luego $H(1,2,3) = 0(1,1,2) + 9(1,1,1) + 14(1,0,1) = (23,9,23)$

$$\therefore H(1,2,3) = (23,9,23)$$

3. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (x-y, -x+2y-z, -y+z) \end{array}$$

Determine:

a) Valores propios de T.

Desarrollo:

Sea $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ una base de R^3. Buscamos la matriz asociada a T en la base B.

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$p_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-1]-(-1)[-(1-\lambda)] = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda(1-\lambda)(\lambda-3) & = & 0 \\ \lambda = 0 \vee & \lambda = 1 \vee & \lambda = 3 \end{array}$$

Los valores propios de T son $0, 1$ y 3.

b) Espacios propios de T asociados a cada valor propio y sus dimensiones.

Desarrollo:

Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ un vector propio de T.

Espacio propio asociado a $\lambda = 0$.

$$\begin{aligned} W_0 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\} \\ &= \{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,1,1) \rangle \end{aligned}$$

$C_1 = \{(1,1,1)\}$ es L.i, ya que contiene un vector, distinto del nulo. C_1 es una base de W_0
$\therefore dim(W_0) = 1$

Espacio propio asociado a $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z \wedge y = 0\} \\ &= \{(-z,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1,0,1) \rangle \end{aligned}$$

$C_2 = \{(-1,0,1)\}$ es L.i, ya que contiene un vector, distinto del nulo. C_2 es una base de W_1
$\therefore dim(W_1) = 1$

Espacio propio asociado a $\lambda = 3$

$$\begin{aligned} W_3 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \wedge y = -2z\} \\ &= \{(z,-2z,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,-2,1) \rangle \end{aligned}$$

$C_3 = \{(1,-2,1)\}$ es L.i, ya que contiene un vector, distinto del nulo. C_3 es una base de W_3
$\therefore dim(W_3) = 1$