UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

Guía 1 de Cálculo I: Derivadas

BAIN 037

Ejercicio 1 *Encuentre la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

b) $f(x) = (x^2-1) \cdot \sqrt{x+2}$

c) $f(x) = (x^3+x^2+x+5)^5$

d) $f(x) = \frac{(2x+3)^3}{(3x^2-2x+6)^2}$

e) $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{\sqrt[3]{3x^2-2x+5}}$

f) $f(x) = \operatorname{sen}^3\ x^3$

g) $f(x) = \operatorname{sen}(3x^2-x)$

h) $f(x) = (3x^4+x+2)sen(x^2+4x-1)$

i) $f(x) = x \cdot e^{2x+1}$

j) $f(x) = e^{(2x^4-4x^2+7x+4)^5}$

k) $y(x) = \sec(\ln(x^2+x)+\cos x)$

l) $u(x) = e^{\sqrt{x}+\ln x}$

m) $t(x) = \sqrt[6]{x^3\cos x + x^5 + 8}$

Ejercicio 2 *La Ley de Enfriamiento de Newton establece que "La temperatura de un cuerpo cambia a una velocidad que es proporcional a la diferencia de las temperaturas entre el medio externo y el cuerpo". Esto da paso a la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

donde T es la temperatura del cuerpo, T_m es la temperatura del medio externo, t es el tiempo y k es la constante de proporcionalidad.
Verifique que $T = T_m + ce^{-kt}$ es solución de la ecuación diferencial, donde c es una constante.

Ejercicio 3 *En la relación* $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \pi - \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ *se define implícitamente y como función de x. Muestre que*

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Ejercicio 4 *En cada caso, determine y', donde y está definida implícitamete como función de x:*

a) $x^2 - 2xy = 5$

b) $e^y = x + y$

c) $y + \cos(x-y) = \tan xy$

d) $x^2 + \ln(x^2+y^2) = 2x+1$.

e) $x \operatorname{sen} y + x^3 = \arctan y$

f) $3^{\operatorname{sen} xy} = \ln(\operatorname{sen} xy)$

Ejercicio 5 *En cada caso determinar una ecuación para la recta tangente y una ecuación para la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto P.*

a) $x^2+y^2-4x+6y-24=0,\ P(1,3)$.

b) $y^2 = 4ax,\ P(a,2a)$ *con* $a > 0$.

c) $(xy^2+9)^2 = (y+2)^{4/3},\ P(0,25)$.

d) $x - y = \sqrt{x+y},\ P(3,1)$.

e) $\sqrt{5-y} + xy^2 = 6,\ P(4,1)$.

f) $\dfrac{4y^2-3x^2y}{3-4x^2} = -1,\ P(-1,1)$.

Ejercicio 6 *Utilice derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:*

a) $y = \dfrac{x^2(3-x)^{1/3}}{(1-x)(3+x)^{2/3}}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+3x}}{(x^2+1)(x^3-3x)\sqrt{x-2}}$

c) $f(t) = (\ln t)^{\ln t}$

d) $y = \dfrac{(x^4-5x^3+2x)\sqrt[3]{x^2-1}}{(\sqrt[7]{3x^3+2x-3})^5}$

e) $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$

f) $f(x) = \arctan^x x$

g) $p(x) = (2x + \ln x)^x$

h) $q(x) = (3x+2)^{\ln x}$

i) $r(x) = 2^{x^2+\cos x}$

Ejercicio 7 *Calcule, si existen:*

a) $(f^{-1})'(4)$ *si* $f(x) = x^5 + x^2 + 2$.

b) f^{-1} *y* $(f^{-1})'(3)$ *si* $f(x) = 3\ln(1+x)$ *para* $x > -1$.

c) $(f^{-1})'(3)$ *si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y se sabe que* $f(1) = 3$ *y* $f'(x) = e^{x(1+\cos^2 \pi x)}$.

Ejercicio 8 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f'(x) = e^x(1+\cos^2 \pi x)$ *y* $f(1) = 3$. *Muestre que*

$$\frac{2a(f^{-1})'(3) + f^{-1}(3)}{2a^2(f^{-1})'(3) - \dfrac{1}{2(f^{-1})'(3)}} = \frac{1}{a-e}.$$

Ejercicio 9 *Sea* f *una función derivable cuya inversa es* g, *definida en* $\mathbb{R}$. *Determine* $h'(2)$ *si* $h(x) = g(g(x^3))$, $f(2) = 8$, $f(5) = 2$, $f'(2) = 4$ *y* $f'(5) = -1$.

Ejercicio 10 *Sea* f *una función derivable en* $\mathbb{R}$ *tal que* $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{3}$. *Determine la ecuación de la recta tangente a* $y = f(x)$ *en el punto* $(1, 2)$.

Ejercicio 11 *Sea* f *una función derivable tal que* $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *La ecuación de la recta tangente a* $y = f(x)$ *en el punto* $(2, 3)$ *es* $y = 4x - 5$. *Determine la ecuación de la recta tangente a* $y = f^{-1}(x)$ *en el punto de abcisa 3.*

Ejercicio 12 *Consider las curvas definidas paramétricamente y determine* $\dfrac{dy}{dx}$

a) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = \dfrac{2u}{1+u^2} \end{cases}, \quad u \in [-1, 1].$

c) $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^3 - 1 \end{cases}, \quad t \in [-2, 2].$

d) $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t^2 - 2t + 1} \end{cases}, \quad t \in [0, 4].$

Ejercicio 13 *Encuentre la ecuación de las recta tangente horizontal de la curva definida por*

$$\begin{cases} x = 4t^2 - 4t \\ y = 1 - 4t^2 \end{cases}$$

indicado los puntos de tangencia.

Ejercicio 14 *Considere la curva definida por*

$$\begin{cases} x = 2\operatorname{sen} t \\ y = 5\cos t \end{cases} ; t \in [0, 2\pi].$$

Determine:

a) *La recta tangente a esta curva en el punto donde* $t = \dfrac{\pi}{3}$.

b) El(los) puntos(s) donde la recta tangente sea horizontal.

Ejercicio 15 *Considere la lemniscata definida por*

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \operatorname{sen}(2t) \end{cases} ; t \in [0, \pi].$$

Determine:

a) El(los) puntos(s) donde la recta tangente es paralela al eje X.

b) El(los) valor(es) del parámetro t para que la la recta tangente sea vertical.

Ejercicio 16 *En cada caso determine* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

b) $y = x^x$

c) $\begin{cases} x &= 2t^3 + \operatorname{sen} t \\ y &= t^2 - \cos t \end{cases}$

d) $y = f(x)$ *está definida implícitamente por la ecuación* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 17 *Deduzca una fórmula general para* $\dfrac{d^n f}{dx^x}$ *para las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \ln x$

c) $f(x) = x \cos x$

d) $f(x) = e^{-x}(2x - x^2)$