Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Trigonometría

Módulo 5: Ecuaciones trigonométricas y Funciones trigonométricas inversas

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación que contiene funciones trigonométricas.

La incógnita es un ángulo, que puede considerarse en grados o en radianes.

Resolver una ecuación trigonométrica es determinar sus soluciones.

Como las funciones trigonométricas son periódicas, si una ecuación trigonométrica tienes solución, entonces **tiene infinitas soluciones**.

Se puede hallar todas las soluciones **(Solución General)** de una ecuación trigonométrica o hallar las soluciones en un cierto intervalo, por ejemplo en $[0, 2\pi)$ o en $(-\pi, 3\pi]$, etc.

Ejemplo 1

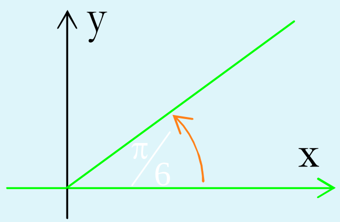
Resolver la ecuación $2\text{sen}x + 1 = 0$ para: $x \in [0, 2\pi]$

Resolución:

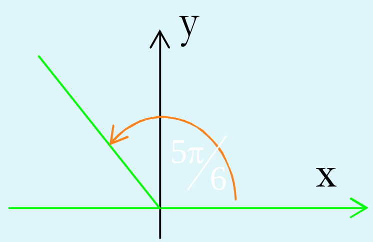
Despejamos $\text{sen}x$ obteniendo: $\text{sen}x = -\frac{1}{2}$

Así el ángulo x debe estar en el 3er o 4º cuadrante.

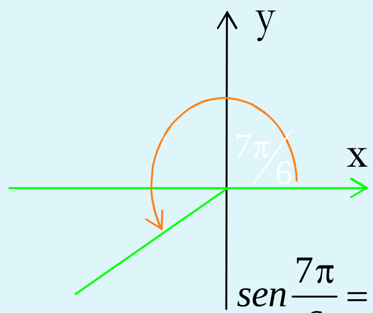
Como $\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, usando el ángulo $\frac{\pi}{6}$ como ángulo de referencia, se forman 4 ángulos, uno en cada cuadrante, cuyo seno vale: $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.



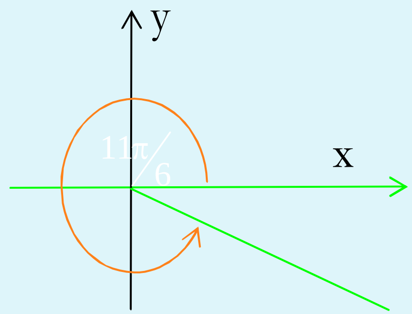
$$sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



$$sen\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



$$sen\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$



$$sen\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

…continuación

Las soluciones son los ángulos que están en el 3er y en el 4º cuadrantes.

$$\pi + \frac{\pi}{6} \text{ y } 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

Así el conjunto solución es:

$$S = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $2\operatorname{sen}x + 1 = 0$ para: $x \in R$

Resolución:

El conjunto solución obtenido en parte (a) da las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Para encontrar todas las soluciones (o sea las soluciones con $x \in \mathbb{R}$, o la solución general de la ecuación), basta que le sumemos $2n\pi$ (con $n \in \mathbb{Z}$) a cada una de las soluciones halladas.

Así el conjunto solución de la ecuación para $x \in \mathbb{R}$ es

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\; x = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi \;\vee\; x = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi,\; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

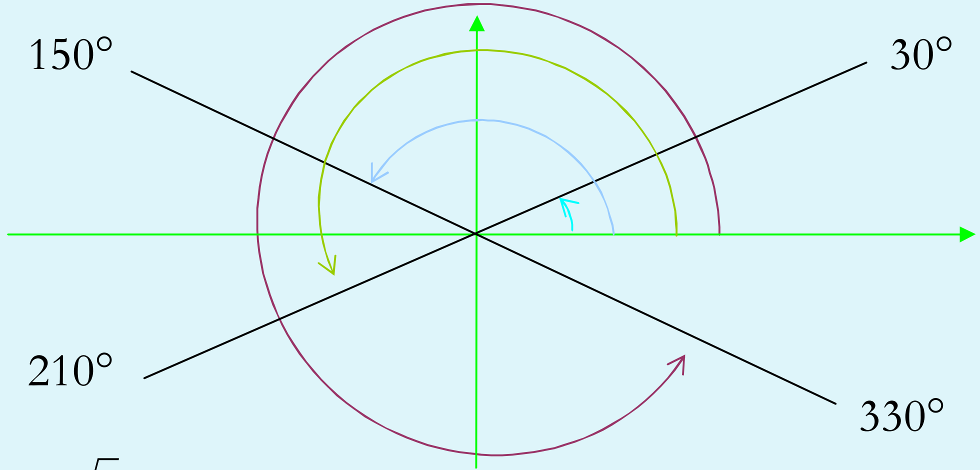
Ejemplo 3

Hallar todos los ángulos x entre 0° y 360° que satisfacen $4\cos^2 x - 3 = 0$

Resolución:

El ángulo de referencia es 30°, que permite formar 4 ángulos:

$$30^{\circ},\ 180^{\circ} - 30^{\circ} = 150^{\circ},\ 180^{\circ} + 30^{\circ} = 210^{\circ}, 360^{\circ} - 30^{\circ} = 330^{\circ}$$



Para $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se obtiene: $x = 30^{\circ}$. $x = 330^{\circ}$

Para $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ se obtiene: $x = 150^{\circ}$, $x = 210^{\circ}$

Así el conjunto solución es $S = \{30^{\circ}, 150^{\circ}, 210^{\circ}, 330^{\circ}\}$

Ejemplo 4

Hallar la solución general de la ecuación $\sec^2 x - \tan x = 1$

Resolución:

Usando una identidad fundamental se obtiene: $1 + \tan^2 x - \tan x = 1$

Que es equivalente a $\tan x \cdot (\tan x - 1) = 0$

De donde $\tan x = 0 \vee \tan x = 1$

Como tangente es periódica pero de período π, basta hallar la única solución en el intervalo $[0, \pi)$ y luego sumar $n\pi$.

Para $\tan x = 0$: $x = 0$ es la única solución en $[0, \pi)$

Para $\tan x = 1$: $x = \dfrac{\pi}{4}$ es la única solución en $[0, \pi)$.

Luego la solución general es: $x = n\pi \quad , x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación $\tan^2 \frac{x}{2} + 8\cos x = 7$

Resolución:

$$\tan^2 \frac{x}{2} + 8\cos x = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + 8\cos x = 7$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos x + 8\cos x + 8\cos^2 x = 7 + 7\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi, \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$$

(Observar que las soluciones son las mismas del ejemplo 2, pero ahora en radianes, antes estaban en grados).

Ejemplo 6

Resolver la ecuación trigonométrica $2\cos 4x + 3 = 4\cos 2x$

Resolución:

Usando fórmulas para ángulo doble se obtiene: $2(2\cos^2 2x - 1) + 3 = 4\cos 2x$

Que es equivalente a: $(2\cos 2x - 1)^2 = 0$.

Así $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

De donde $2x = 60^{\circ} + 360^{\circ} n \ \vee \ 2x = 300^{\circ} + 360 n$, $n \in \mathbb{Z}$

La solución general de la ecuación (en grados) es:

$$x = 30^{\circ} + 180^{\circ} n \ \vee \ x = 150^{\circ} + 180^{\circ} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Función Inversa del Seno:

- Si la función seno se restringe del modo siguiente, resulta biyectiva y por tanto posee inversa:

$$\text{sen}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow[-1,1]$$

- La función inversa es sen^{-1} (**seno a la -1**) o arcsen (**arco seno**)

$$\text{sen}^{-1}:[-1,1]\longrightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$x\longrightarrow y=\text{sen}^{-1}x$$

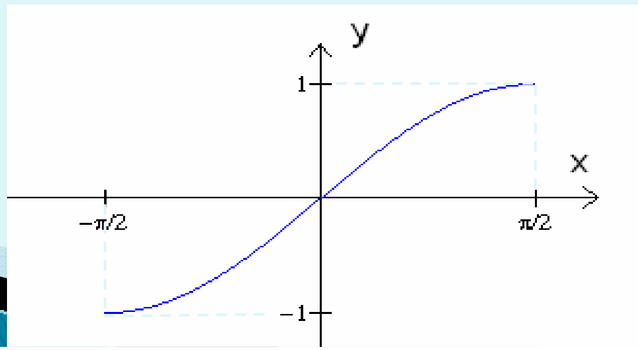
- Se cumple:

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1}x)=x,\quad \forall x\in[-1,1]$$

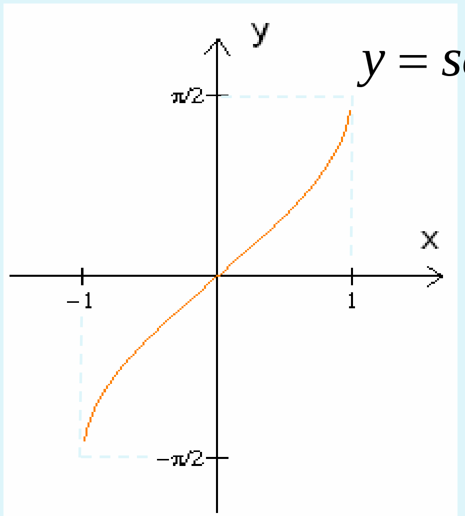
$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}y)=y,\quad \forall y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

- Gráficos:

$y = senx$



$y = sen^{-1}x$



Función Inversa del Coseno:

- Si la función coseno se restringe del modo siguiente, resulta biyectiva y por tanto posee inversa:

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

- La función inversa es $\cos^{-1}$ (**coseno a la -1**) o arccos (**arco coseno**)

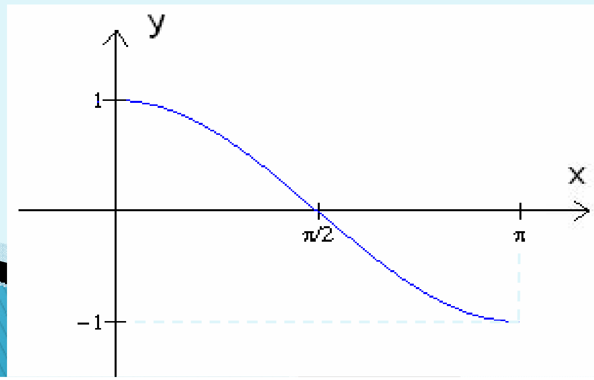
$$\cos^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$
$$x \longrightarrow y = \cos^{-1} x$$

- Se cumple:

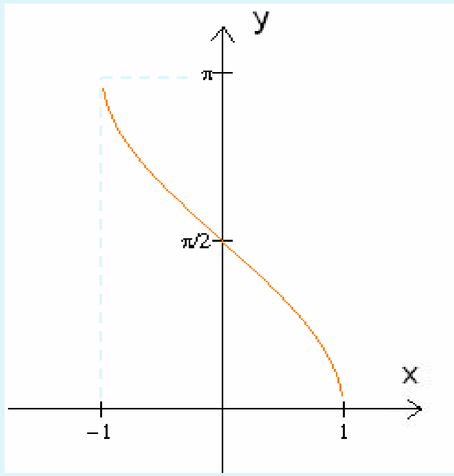
$$\cos(\cos^{-1} x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\cos^{-1}(\cos y) = y, \quad \forall y \in [0, \pi]$$

- Gráficos:

$y = \cos x$



$y = \cos^{-1} x$



Función Inversa de la Tangente:

- Si la función tangente se restringe del modo siguiente, resulta biyectiva y por tanto posee inversa:

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

- La función inversa es $\tan^{-1}$ (**tangente a la -1**) o arctan (**arco tangente**)

$$\tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

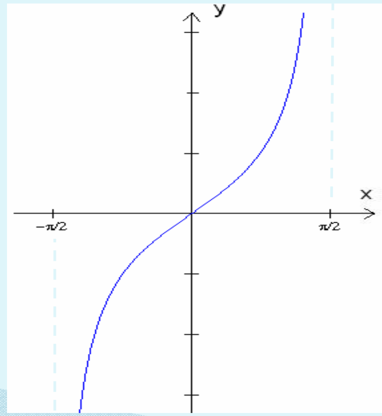
$$x \to y = \tan^{-1} x$$

- Se cumple:

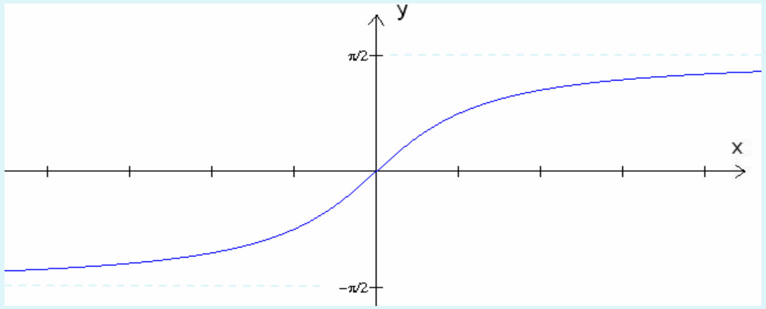
$$\tan^{-1}(\tan y) = y, \quad \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(\tan^{-1} x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Gráficos:



$y = \tan x$



$y = \tan^{-1} x$

Ejemplo 1

Calcular el valor exacto de:

a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

c) $\tan\left(2\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

Ejemplo 2

Demostrar la identidad siguiente: $\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación: $\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen}(1-x) = \arccos x$