UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

Guía 1 de Cálculo I: Derivadas

BAIN 037

Ejercicio 1 *Hallar la derivada de la función* $f(x) = 3x^2 - 4$ *de dos maneras: usando álgebra de derivadas y aplicando la definición de derivada.*

Ejercicio 2 *¿Qué valores han de tomar a y b para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \leq 2 \\ ax^2 + b, & x > 2. \end{cases}$$

sea derivable en x=2?

Ejercicio 3 *Hallar los valores de a y b para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 2acosx & si \quad 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & si \quad x \geq \pi \end{cases}$$

a) Sea continua para todo valor de x.

b) Estudia la derivabilidad para los anteriores valores de a y b.

Ejercicio 4 *Encuentre la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

b) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot \sqrt{x+2}$

c) $f(x) = (ax^2 + b)^4 \cdot (mx^3 - px)^5$

d) $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 5)^5$

e) $f(x) = \left(8x^3 + \frac{2}{9}x^{-1} + 7x^{-2} + 4\right)^8$

f) $g(x) = \frac{3}{(x-5)^2}$

g) $f(x) = \frac{2x-5x^2+x^3}{(2x-8)(3x-4)}$

h) $f(x) = \frac{(2x+3)^3}{(3x^2-2x+6)^2}$

i) $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{\sqrt[3]{3x^2-2x+5}}$

Ejercicio 5 *Derive las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sin x \cos 3x$

b) $f(x) = sen\, x^3$

c) $f(x) = sen^3\, x$

d) $f(x) = sen^3\, x^3$

e) $f(x) = sen\, (3x^2 - x)$

f) $f(x) = \frac{sen\, x}{cos^3\, x}$

g) $f(x) = (3x^4 + x + 2)sen(x^2 + 4x - 1)$

h) $f(x) = x \cdot e^{2x+1}$

i) $f(x) = e^{(2x^4-4x^2+7x+4)^5}$

j) $f(x) = \arcsin(x^2 + 2)$

k) $f(x) = \arccos(3x^2 - 4x + 1)$

l) $f(x) = \arctan(x^3 + 5)$

m) $q(x) = \sqrt{x}\dfrac{2x}{\tan x}$

n) $t(x) = \sqrt[6]{x^3 \cos x + x^5 + 8}$

ñ) $y(x) = \sec(\ln(x^2 + x) + \cos x)$

o) $u(x) = e^{\sqrt{x}+\ln x}$

p) $f(x) = (2x + \ln x)^x$

q) $p(x) = (3x + 2)^{\ln x}$

r) $a(x) = 2^{x^2+\cos x}$

Ejercicio 6 *Determine, si existe, la ecuación de la recta tangente a las curvas dadas en los puntos indicados:*

a) $f(x) = 2x\cos(x)$*; en los puntos* $(0,0)$*,* $(1,2)$ *y* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$*.*

b) $h(x) = \cos(x)\,\mathrm{sen}(a)$ *con* $a \in \mathbb{R}$*; en el punto* $(0, \mathrm{sen}\, a)$*.*

c) $w(x) = |x-3| + 2$*; en el punto* $(3,2)$*.*

d) $j(x) := \begin{cases} (x+2)^2 & x > 2 \\ x^2 - 4x + 4 & -1 < x \leq 2 \\ 9 & x = -1 \\ sin(x+1) & x < -1 \end{cases}$ *; en el punto* $(3, j(3))$*.*

e) $d(x) := \begin{cases} x^3 + 3 & x < 0 \\ cos(x) + 2 & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ x^2 - 2 & x > \pi/2\ . \end{cases}$ *; en el punto* $(0, d(0))$*.*

Ejercicio 7 *Calcule, si existen:*

a) $(f^{-1})'(1)$ *si* $f(x) = \mathrm{sen}\, x - x\cos x$*.*

b) $(f^{-1})'(4)$ *si* $f(x) = x^5 + x^2 + 2$*.*

c) f^{-1} *y* $(f^{-1})'(3)$ *si* $f(x) = 3\ln(1+x)$ *para* $x > -1$*.*

d) $(f^{-1})'(3)$ *si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y se sabe que* $f(1) = 3$ *y* $f'(x) = e^{x(1+\cos^2 \pi x)}$*.*

Ejercicio 8 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f'(x) = e^x(1 + \cos^2 \pi x)$ *y* $f(1) = 3$*. Muestre que*

$$\frac{2a(f^{-1})'(3) + f^{-1}(3)}{2a^2(f^{-1})'(3) - \dfrac{1}{2(f^{-1})'(3)}} = \frac{1}{a-e}.$$

Ejercicio 9 *Sea* f *una función derivable cuya inversa es* g*, definida en* $\mathbb{R}$*. Determine* $h'(2)$ *si* $h(x) = g(g(x^3))$*,* $f(2) = 8$*,* $f(5) = 2$*,* $f'(2) = 4$ *y* $f'(5) = -1$*.*

Ejercicio 10 *Sea* f *una función derivable en* $\mathbb{R}$ *tal que* $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{3}$*. Determine la ecuación de la recta tangente a* $y = f(x)$ *en el punto* $(1,2)$*.*

Ejercicio 11 *Sea* f *una función derivable tal que* $f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$*. La ecuación de la recta tangente a* $y = f(x)$ *en el punto* $(2,3)$ *es* $y = 4x - 5$*. Determine la ecuación de la recta tangente a* $y = f^{-1}(x)$ *en el punto de abcisa 3.*

Ejercicio 12 *Sea* f *una función derivable e invertible, definida en* $\mathbb{R}$*. Si* $f(2) = 1$ *y* $\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{3}$*, calcule* $h'(1)$ *donde* $h(x) = f(x \cdot f^{-1}(x))$*.*

Ejercicio 13 *Considere las curvas definidas paramétricamente y determine* $\dfrac{dy}{dx}$

a) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \mathrm{sen}\, t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = \dfrac{2u}{1+u^2} \end{cases}, \quad u \in [-1, 1].$

c) $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^3 - 1 \end{cases}, \quad t \in [-2, 2].$

d) $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t^2 - 2t + 1} \end{cases}, \quad t \in [0, 4].$

Ejercicio 14 *Encuentre la ecuación de las recta tangente horizontal de la curva definida por*

$$\begin{cases} x &= 4t^2 - 4t \\ y &= 1 - 4t^2 \end{cases}$$

indicado los puntos de tangencia.

Ejercicio 15 *Considere la curva definida por*

$$\begin{cases} x &= 2\operatorname{sen} t \\ y &= 5\cos t \end{cases} ; t \in [0, 2\pi].$$

y determine la recta tangente a esta curva en el punto donde $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Ejercicio 16 *En la relación* $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \pi - \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ *se define implícitamente* y *como función de* x. *Muestre que*

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Ejercicio 17 *La ecuación* $f(x) = y + f^{-1}(y)$ *define implícitamente a* y *como función derivable de* x *tal que cuando* $x = 1$ *se tiene que* $y = -1$. *Si* f *es una función derivable e invertible en* $\mathbb{R}$ *tal que* $f(1) = 4$, $f(5) = -1$, $f'(5) = \frac{1}{6}$ *y* $f'(1) = 2$. *Calcule* $\dfrac{dy}{dx}$ *cuando* $x = 1$.

Ejercicio 18 *En cada caso, determine* y', *donde* y *está definida implícitamete como función de* x:

a) $x^2 - 2xy = 5$

b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a \in \mathbb{R}$.

c) $2x^2 - 3xy - 4y^2 = 5$

Ejercicio 19 *En cada caso determinar una ecuación para la recta tangente y una ecuación para la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto* P.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$, $P(1, 3)$.

b) $y^2 = 4ax$, $P(a, 2a)$ *con* $a > 0$.

c) $x - y = \sqrt{x+y}$, $P(3, 1)$.

Ejercicio 20 *En cada caso determine* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

b) $y = x^x$

c) $\begin{cases} x &= 2t^3 + \operatorname{sen} t \\ y &= t^2 - \cos t \end{cases}$

d) $y = f(x)$ *está definida implícitamente por la ecuación* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 21 *Deduzca una fórmula general para* $\dfrac{d^n f}{dx^x}$ *para las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \ln x$

c) $f(x) = x\cos x$

d) $f(x) = e^{-x}(2x - x^2)$