Universidad Austral de Chile
Facultad de Ciencias de la Ingeniería
Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería

PAUTA CONTROL I – BAIN037 – Cálculo I para Ingeniería

02 – 09 – 2010

Pregunta 1(1.5 ptos)

Sea $f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$, $x\in\mathbb{R}$.Donde $[\bullet]:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ es la función parte entera definida por:

$$[x]=máx\left(n\in\mathbb{Z}\,\middle|\,n\leq x\right)$$

Muestre que f no es diferenciable en 1.

Solución

Para que f no sea diferenciable 1 basta con mostrar que las derivadas laterales si existen no son iguales, es decir

$$f_-^{'}(1)\neq f_+^{'}(1)$$

Luego se tiene que la derivada lateral izquierda es

$$f_-^{'}(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{[1+h]+\sqrt{(1+h)-[1+h]}-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{0+\sqrt{1+h-0}-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

$$f_-^{'}(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h}{h\cdot\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{2}$$

Por otro lado la derivada lateral derecha corresponde a

$$f_+^{'}(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[1+h]+\sqrt{(1+h)-[1+h]}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+\sqrt{1+h-1}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}$$

$$f_+^{'}(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\cdot\sqrt{h}}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}\to No\,existe$$

$$\therefore f\;\;no\;\;diferenciable\;\;en\;\;1$$

Pregunta 2 (2.0 ptos)

En la relación $arctan\left(\frac{x}{y}\right)=\pi-ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, se define implícitamente y como función de x. Mostrar que

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

Solución

$arctan\left(\frac{x}{y}\right)=\pi-ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ Derivando implícitamente se tiene:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{y-xy'}{y^2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\left(2x+2yy'\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{y^2}}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{y-xy'}{\cancel{y^2}}\right) = -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\cancel{2}\left(x+yy'\right) \quad \textit{simplificando}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\left(y-xy'\right) = -\cancel{\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\left(x+yy'\right) \quad \textit{cancelando ya que } \frac{1}{x^2+y^2}\neq 0$$

$$\Leftrightarrow y-xy' = -x-yy'$$

$$\Leftrightarrow x+y = xy'-yy'$$

$$\Leftrightarrow y'(x-y) = x+y$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{x+y}{x-y} \quad \textit{siempre que } \; x\neq y$$

Pregunta 3 (2.5 ptos)

Sea C la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cdot cos^3(\theta) \\ y = a\cdot sen^3(\theta) \end{array}\right\} con\ \theta\in\left[0,\pi\right[,\ a\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Determine la ecuación de la recta tangente a C que es paralela a la recta de ecuación $x+y=1$.

Solución

La derivada de la curva C está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \cancel{\frac{\cancel{3a}\cdot sen^2(\theta)\cdot cos(\theta)}{-\cancel{3a}\cdot cos^2(\theta)\cdot sen(\theta)}} = -\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} = -tan(\theta)$$

Además la pendiente de la recta tangente C debe ser paralela a la recta de ecuación $x+y=1$ entonces se tiene que $m=-1$ es decir $\frac{dy}{dx}=-1$, luego

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$-tan(\theta) = -1$$

$$tan(\theta) = 1 \quad \textit{para algún } \theta\in\left[0,\pi\right[$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

Finalmente para encontrar la ecuación de la recta tangente a C en $\theta=\frac{\pi}{4}$, se tiene que el punto correspondiente es $\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3, a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right)$

$$\therefore\ y-a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = -1\cdot\left(x-a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) \quad \textit{es la ecuación de la recta tangente } C \textit{ paralela a la recta } x+y=1$$