Facultad de Ciencias de la Ingeniería

**PRUEBA RECUPERATIVA – BAIN037 – Cálculo I para Ingeniería**

**12 – 03 – 2012**

**Nombre: ______________________________________ Grupo: _________**

**Carrera: _____________________________________**

Problema 1: __________
Problema 2: __________
Problema 3: __________

## PROBLEMA 1 (2.0 ptos)

Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ con $x\in\Re$ y $f'(x)=\dfrac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)}^2}$ y $f''(x)=\dfrac{-8}{9\sqrt[3]{x^4(2-x)^5}}$ .

a) Determine la existencia de puntos críticos y analice la monotonía de $f$.

b) Determine la existencia de valores extremos.

c) Determine la concavidad de $f$ y la existencia de puntos de inflexión.

d) Analice la existencia de asíntotas de $f$.

e) Grafique la función.

## PROBLEMA 2 (2.0 ptos)

Dada la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$, considere la región $R=\{(x,y)/\,x\geq 0\wedge 0\leq y\leq f(x)\}$

a) Determinar si es posible calcular el área de la región $R$, de ser así obtenerla.

b) Calcular de ser posible el volumen del sólido generado al hacer girar la región $R$ en torno al eje $X$ .

c) Calcular de ser posible el volumen del sólido generado al hacer girar la región $R$ en torno al eje $Y$ .

## PROBLEMA 3 (2.0 ptos)

Construir la serie de Maclaurin de la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ .

**PAUTA PRUEBA RECUPERATIVA – BAIN037 – Cálculo I para Ingeniería**
**12 – 03 – 2012**

## PROBLEMA 1 (2.0 ptos)

Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ con $x\in\Re$ y $f'(x)=\dfrac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)}^2}$ y $f''(x)=\dfrac{-8}{9\sqrt[3]{x^4(2-x)^5}}$.

a) Determine la existencia de puntos críticos y analice la monotonía de $f$.

***Solución:***

Se debe recordar que los puntos críticos son aquellos $x\in Domf$ en los cuales la derivada se anula o no existe, este caso el dominio de la función es todo $\Re$ por tratarse de una raíz cúbica, además se sabe que:

$f'(x)=\dfrac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)}^2}$ de donde se obtiene que los puntos críticos (candidatos a máximos y mínimos) corresponden a $x=0, x=\dfrac{4}{3}$ y $x=2$ ,procedemos a realizar nuestra tabla de variación para determinar la monotonía de la función cabe señalar que el signo de $f'$ no depende del factor $(2-x)^2$.Solo depende del signo de $x$ y de $(4-3x)$.

| | $-\infty$ … 0 | 0 … $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ … 2 | 2 … $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| Factores / Valor de Prueba | $x=-1$ | $x=1$ | $x=3/2$ | $x=3$ |
| $x$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(4-3x)$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| *signo f'* | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| *Monotonia* | ↘ | ↗ | ↘ | ↘ |

Por lo tanto la monotonía de la función queda establecida de la siguiente forma:

_ $f$ es decreciente en $(-\infty,0);\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$

_ $f$ es creciente en $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$

b) Determine la existencia de valores extremos.

***Solución:***

Si aplicamos el criterio de la primera derivada a haciendo uso de la tabla de variación del apartado anterior se tiene que:

_ $f$ alcanza un mínimo relativo en $x=0$ el cual corresponde a $f(0)=0$

_ $f$ alcanza un máximo relativo en $x=\dfrac{4}{3}$ el cual corresponde a $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}$

c) Determine la concavidad de $f$ y la existencia de puntos de inflexión.

***Solución:***

Para determinar los posibles puntos de inflexión analizamos la expresión entregada para la segunda derivada $f''(x)=\dfrac{-8}{9\sqrt[3]{x^4(2-x)^5}}$ de donde se obtiene que los posibles candidatos a puntos de inflexión se encuentran en $x=0$ y en $x=2$, para determinar si realmente corresponden a puntos de inflexión analizaremos la tabla de variación, cabe observar que el signo de la segunda derivada solo depende del factor $-(2-x)$

| Factores / Valor de Prueba | $-\infty$ … 0: $x=-1$ | 0 … 2: $x=1$ | 2 … $+\infty$: $x=3$ |
|---|---|---|---|
| $-(2-x)$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| *signo* $f''$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| *Concavidad* | $\cap$ | $\cap$ | $\cup$ |

Por lo tanto el único punto de inflexión de la función corresponde a $(2,0)$, luego:

_ $f$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty,2)$

_ $f$ es cóncava hacia arriba en $(2,+\infty)$

d) Analice la existencia de asíntotas de $f$.

***Solución:***

***Asíntotas Verticales***

_ $f$ no posee asíntotas verticales ya que su dominio corresponde a todo $\Re$

***Asíntotas Oblicuas***

Primero determinaremos la pendiente

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}=-1$$

Ahora el coeficiente de posición

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1\right)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{2a}{x}-1}+1}{\frac{1}{x}}\right)\Big\}\, Aplicando\, LH$$

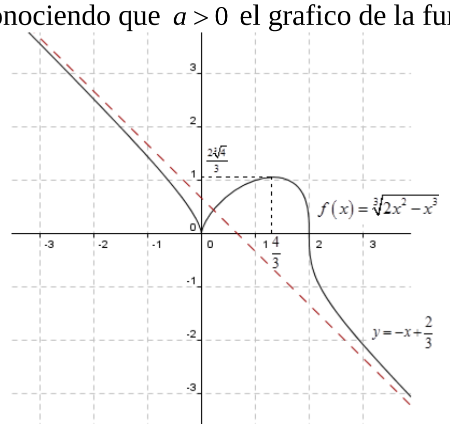
$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}}\cdot-\cancel{\dfrac{1}{x^2}}}{-\cancel{\dfrac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}}=\frac{2}{3}$$

Por lo tanto $f$ posee una asíntota oblicua izquierda y derecha que corresponde a $y=-x+\frac{2}{3}$

e) Grafique la función.

***Solución:***

Considerando el análisis anterior y conociendo que $a>0$ el grafico de la función es de la siguiente forma



**PROBLEMA 2 (2.0 ptos)**

Dada la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$, considere la región $R=\{(x,y)/x\geq 0\wedge 0\leq y\leq f(x)\}$

a) Determinar si es posible calcular el área de la región $R$, de ser así obtenerla.

***Solución:***

$$A=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx\ \ ,Calculando\ \ la\ \ primitiva\ I=\int\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx, Sea\ \sqrt{x}=\tan(\theta)\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sec^2(\theta)d\theta\Rightarrow$$

$$dx=2\tan(\theta)\sec^2(\theta)d\theta, luego\ \ I=\int\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=2\int\frac{\tan^2(\theta)\sec^2(\theta)d\theta}{\sec^4(\theta)}=2\int\frac{\tan^2(\theta)}{\sec^2(\theta)}d\theta=2\int sen^2(\theta)d\theta$$

$$I=\int(1-\cos(2\theta))d\theta=\theta-\frac{sen(2\theta)}{2}+C=\arctan(\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{x+1}+C, luego\ \ A=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\arctan(\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{x+1}\Big[_0^b\right)$$

$$A=\lim_{b\to+\infty}\left(\arctan(\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)=\frac{\pi}{2}\left[u^2\right]$$

b) Calcular de ser posible el volumen del sólido generado al hacer girar la región $R$ en torno al eje $X$.

***Solución:***

$$V_x=\pi\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\right)^2dx=\pi\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x}{(1+x)^4}dx\ \ ,Calculando\ \ la\ \ primitiva\ I=\int\frac{x}{(1+x)^4}dx, Sea\ u=1+x\Rightarrow x=u-1\wedge du=dx$$

$$I=\int\frac{x}{(1+x)^4}dx=\int\frac{(u-1)}{u^4}du=\int u^{-3}du-\int u^{-4}du=-\frac{1}{2u^2}+\frac{1}{3u^3}+C=\frac{1}{3(1+x)^3}-\frac{1}{2(1+x)^2}+C, luego$$

$$V_x=\pi\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x}{(1+x)^4}dx=\pi\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3(1+x)^3}-\frac{1}{2(1+x)^2}\Big[_0^b\right)=\pi\lim_{b\to+\infty}\left(\cancel{\frac{1}{3(1+b)^3}}^{0}-\cancel{\frac{1}{2(1+b)^2}}^{0}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$V_x=\frac{\pi}{6}\left[u^3\right]$$

c) Calcular de ser posible el volumen del sólido generado al hacer girar la región $R$ en torno al eje $Y$.

***Solución:***

$$V_y=2\pi\int_0^{+\infty}x\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=2\pi\lim_{b\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx, calculando\ la\ \ primitiva\ \ I=\int\frac{x\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx, sea\ \sqrt{x}=\tan(\theta)\Rightarrow x=\tan^2(\theta)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sec^2(\theta)d\theta\Rightarrow dx=2\tan(\theta)\sec^2(\theta)d\theta, luego\ I=\int\frac{x\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=2\int\frac{\tan^4(\theta)\sec^2(\theta)}{\sec^4(\theta)}d\theta=2\int\frac{\tan^4(\theta)}{\sec^2(\theta)}d\theta$$

$$I=2\int\frac{\left(\sec^2(\theta)-1\right)^2}{\sec^2(\theta)}d\theta=2\int\sec^2(\theta)d\theta-4\int d\theta+2\int\cos^2(\theta)d\theta=2\tan(\theta)-4\theta+\int(1+\cos(2\theta))d\theta+C$$

$$I=2\tan(\theta)-4\theta+\theta+2+C=2\sqrt{x}-3\arctan(\sqrt{x})+\frac{\sqrt{x}}{(1+x)}+C, luego\ V_y=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{x}-3\arctan(\sqrt{x})+\frac{\sqrt{x}}{(1+x)}\Big[_0^b\right)$$

$$V_y=\lim_{b\to+\infty}\left(\cancel{2\sqrt{b}}^{+\infty}\ -3\cancel{\arctan(\sqrt{b})}^{-\frac{3\pi}{2}}+\cancel{\frac{\sqrt{b}}{(1+b)}}^{0}\right)La\ \ integral\ \ diverge$$

**PROBLEMA 3 (2.0 ptos)**

Construir la serie de Maclaurin de la función $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x}$.

***Solución:***

$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^{n}$, *Luego debemos encontra la* $n-$*esima derivada de* $f$ *evaluada en* $0$.

$f^{(0)}=\left(1+x\right)^{-1}$; $f^{(1)}=-1\left(1+x\right)^{-2}$; $f^{(2)}=2\left(1+x\right)^{-3}$; $f^{(3)}=-6\left(1+x\right)^{-4}$ ..... $f^{(n)}=\left(-1\right)^{n}n!(1+x)^{-(n+1)}$

*luego*

$f^{(n)}\left(0\right)=\left(-1\right)^{n}n!(1+x)^{-(n+1)}=\left(-1\right)^{n}n!\left(1+0\right)^{-(n+1)}=\left(-1\right)^{n}n!$. *Por lo tanto la serie de Maclaurin pedida es*:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}\cancel{n!}}{\cancel{n!}}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{n}$$