Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Vectores en el Espacio

Vectores en el Espacio

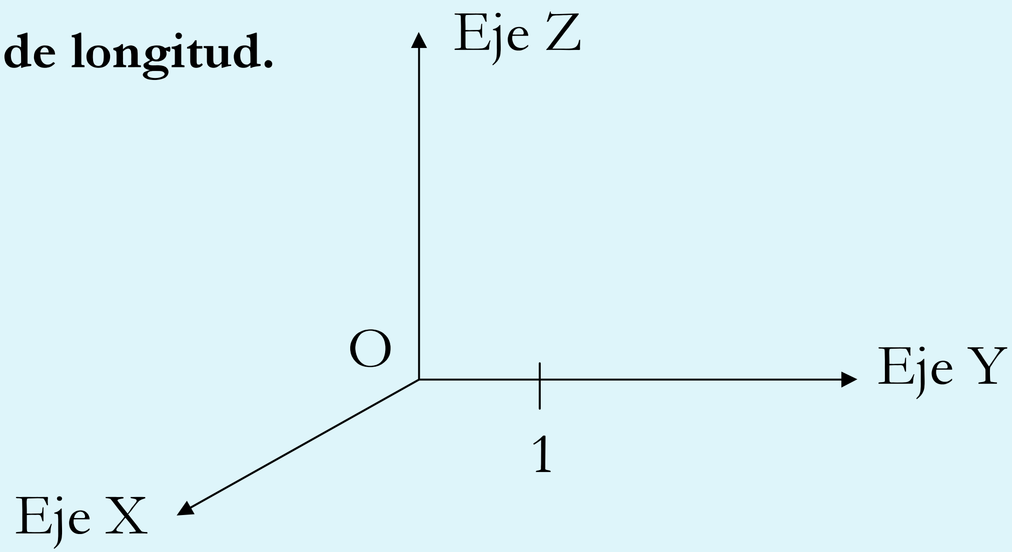
Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Sistema de Coordenadas Tridimensional

Se consideran 3 rectas mutuamente perpendiculares, que se intersectan en un punto (**origen**).

Las rectas se llaman **ejes coordenados**: eje X, eje Y, eje Z.

Se escoge una **unidad de longitud.**



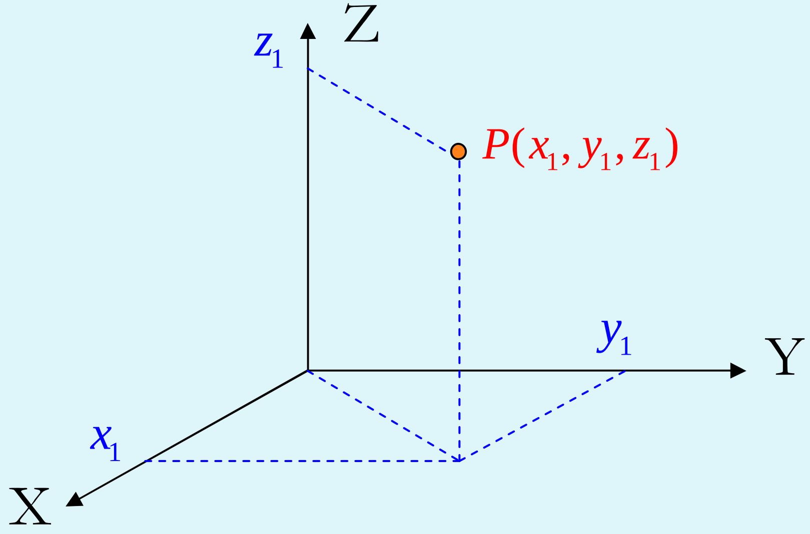
Los tres ejes determinan 3 **planos coordenados: plano XY, plano YZ, plano XZ.**

Los planos dividen al espacio en 8 **octantes.**

Vectores en el Espacio

Lo anterior establece una correspondencia biunívoca entre puntos del espacio y tríos ordenados de números reales:

$$\mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) \ / \ x, y, z \in \mathbb{R} \}$$



Vectores en el Espacio

Vectores

$\vec{v} = (x, y, z)$ vector en $\mathbb{R}^3$, $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ con $\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$

$\vec{v} = (x, y, z)$ es el vector de posición del punto $P(x, y, z)$

Se establecen las correspondencias:

$$\{ \text{ Puntos del Espacio } \} \leftrightarrow \{ \text{ Vectores (de posicion) en el Espacio } \} \leftrightarrow \mathbb{R}^3$$

Módulo

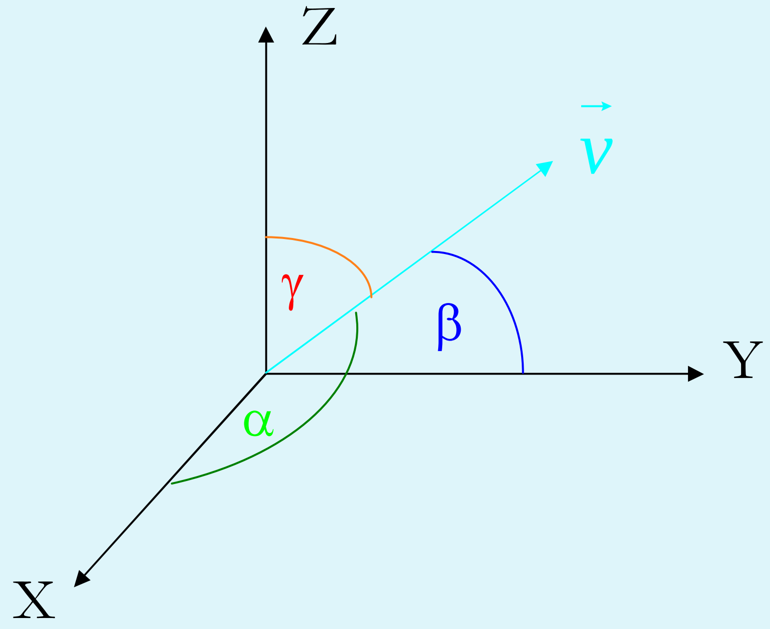
- El **módulo** del vector $\vec{v}$ es $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Se cumple: $\|\vec{v}\| \geq 0; \quad \|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Vectores en el Espacio

Cosenos directores

Cosenos directores de $\vec{v} = (x, y, z)$: $\cos\alpha = \dfrac{x_1}{\|\vec{v}\|}, \ \cos\beta = \dfrac{x_2}{\|\vec{v}\|}, \ \cos\gamma = \dfrac{x_3}{\|\vec{v}\|}$

donde α, β, γ ángulos que forma $\vec{v}$ con los ejes positivos X, Y, Z respectivamente

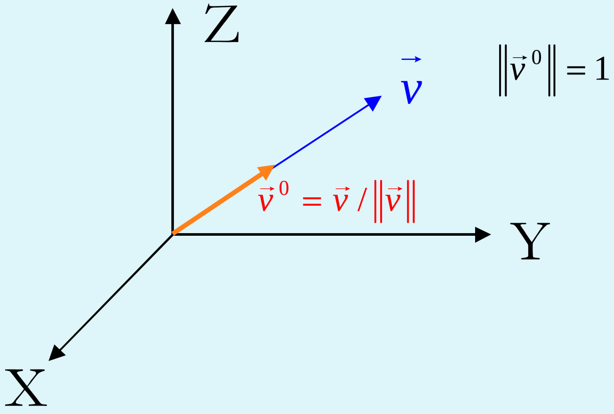


Se cumple $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Vectores en el Espacio

Vector unitario

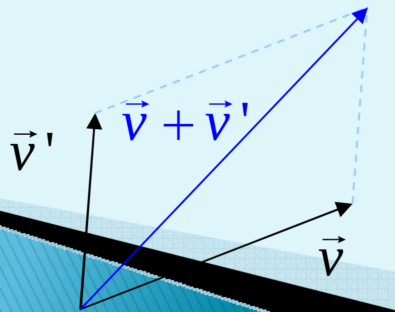
Vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ es $\vec{v}^{\,0} = \vec{v} / \|\vec{v}\|$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$

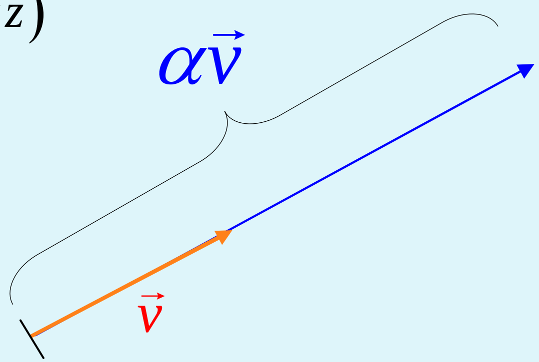


Operaciones con vectores

$\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{v}\,' = (x', y', z')$, $a \in \mathrm{R}$

- **Adición:** $\vec{v} + \vec{v}\,' = (x + x', y + y', z + z')$
- **Multiplicación por escalar:** $\alpha\vec{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$





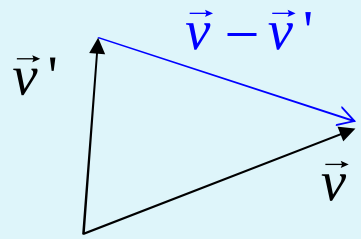
Vectores en el Espacio

- **Propiedades:**

$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$$
$$\vec{v}+\vec{v}\,'=\vec{v}\,'+\vec{v}$$
$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$$
$$\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$$
$$a(b\vec{v})=(ab)\vec{v}=b(a\vec{v})$$
$$(a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}$$
$$a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$$
$$\|a\vec{v}\|=|a|\,\|\vec{v}\|$$
$$\|\vec{v}\pm\vec{v}\,'\|\leq\|\vec{v}\|+\|\vec{v}\,'\|$$

- **Sustracción:**

$$\vec{v}-\vec{v}\,'=\vec{v}+(-\vec{v}\,')=(x-x',y-y',z-z')$$



Vectores equivalentes:

Un vector desde el punto $P(p_1, p_2, p_3)$ al punto $Q(q_1, q_2, q_3)$ se anota $\overrightarrow{PQ}$.

Todo vector con el mismo módulo que $\overrightarrow{PQ}$ y la misma dirección, se dice que es equivalente con $\overrightarrow{PQ}$.

Entre todos los vectores equivalentes con $\overrightarrow{PQ}$ hay uno que tiene punto inicial el origen, su punto final es $(q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

Producto punto:

- **Definición:** $\vec{v} \cdot \vec{v}\,' = xx' + yy' + zz'$
- **Propiedades:**
$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$$
$$\vec{v} \cdot \vec{v}\,' = \vec{v}\,' \cdot \vec{v}$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$|\vec{v} \cdot \vec{v}\,'| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{v}\,'\|$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$$, donde θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Vectores en el Espacio

continuación……Producto punto:

- **Ángulo entre vectores :**

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) \qquad 0^{o} \le \theta \le 180^{o}$$

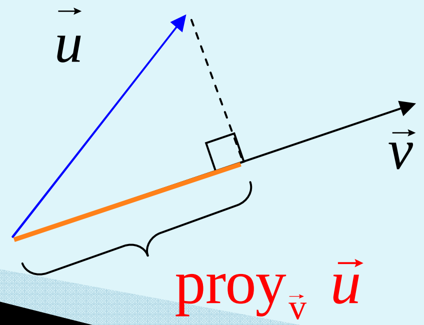
- **Perpendicularidad :**

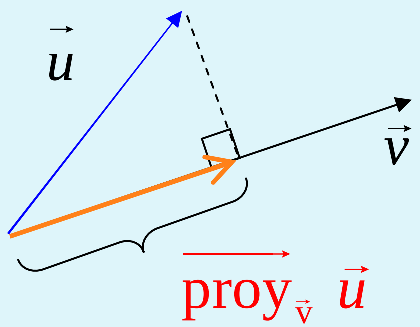
$$\vec{v} \perp \vec{v}\,' \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{v}\,' = 0$$

- **Proyecciones** :

Proyección escalar de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$: $u_{\vec{v}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ $\quad(\mathrm{proy}_{\vec{v}}\ \vec{u})$

Proyección vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$: $\vec{u}_{\vec{v}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}^{0}\ \vec{v}^{0}$ $\quad(\overrightarrow{\mathrm{proy}_{\vec{v}}}\ \vec{u})$





Vectores en el Espacio

Producto cruz:

- **Definición** : $\vec{v}\times\vec{v}'=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}=(yz'-y'z, x'z-xz', xy'-x'y)$

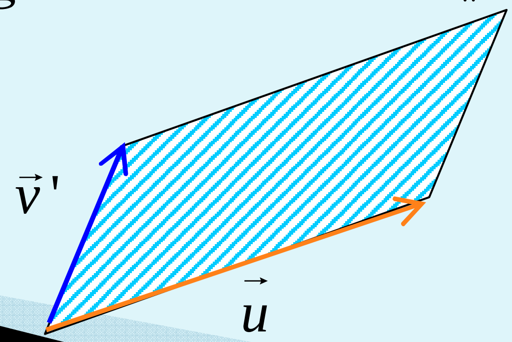
- **Propiedades :**

$$\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$$
$$\vec{u}\times\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$$
$$\vec{u}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)=\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{0}$$
$$\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|sen\theta$$

- **Paralelismo (Colinealidad):** $\vec{v}\parallel\vec{v}'\Leftrightarrow\vec{v}\times\vec{v}'=\vec{0}$

  (también se tiene: $\vec{v}\parallel\vec{v}'\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}/\vec{v}'=k\vec{v}$)

- **Área de un paralelogramo** de lados : $\left\|\vec{u}\right\|,\left\|\vec{v}\right\|$ $\quad A=\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$

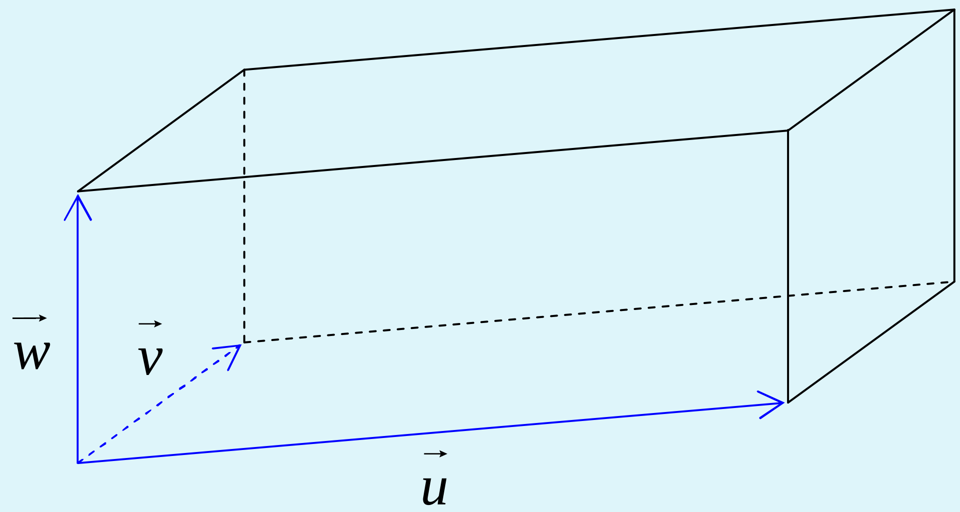


Vectores en el Espacio

Triple producto escalar :

$$[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}] = \vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{w}$$

Volúmen paralelepípedo de aristas $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|, \|\vec{w}\|$ $V: = \left|[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]\right|$



Coplanaridad : $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanares si $[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}] = 0$

Productos vectoriales :

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\times\vec{w}=\left(\vec{w}\cdot\vec{u}\right)\vec{v}-\left(\vec{w}\cdot\vec{v}\right)\vec{u}$$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\cdot\vec{u}=\left(\vec{w}\times\vec{u}\right)\cdot\vec{v}$$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{w}\times\vec{x}\right)=\left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)\left(\vec{v}\cdot\vec{x}\right)-\left(\vec{u}\cdot\vec{x}\right)\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)$$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\times\left(\vec{w}\times\vec{x}\right)=\left[\vec{u}\vec{v}\vec{x}\right]\vec{w}-\left[\vec{u}\vec{v}\vec{w}\right]\vec{x}\ =\left[\vec{u}\vec{w}\vec{x}\right]\vec{v}-\left[\vec{v}\vec{w}\vec{x}\right]\vec{u}$$