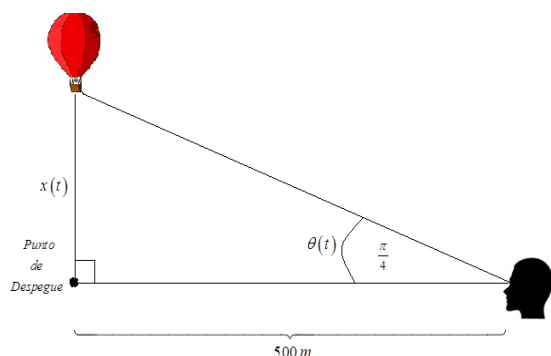


## PROBLEMA 1

Un globo de aire caliente que se eleva verticalmente desde el suelo es rastreado por un observador situado a 500 metros del punto de despegue. En el instante en que el ángulo de elevación del observador al globo  $\frac{\pi}{4}$ , este ángulo crece a razón de 0,14 radianes por minuto. ¿Con qué velocidad se está elevando el globo en ese instante?.

**Solución:**



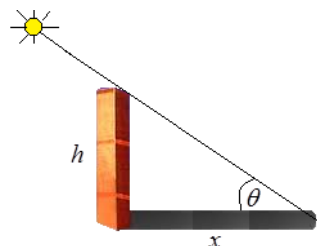
Si llamamos  $x$  a la altura del globo y  $\theta$  al ángulo de elevación del observador, se puede apreciar que estos varían o son funciones del tiempo. Además se sabe que  $\frac{d\theta}{dt} = 0,14 \text{ rad/min}$ , y se quiere saber a cuanto equivale  $\frac{dx}{dt}$  cuando  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , haciendo uso de las razones trigonométricas se tiene que  $\frac{x}{500} = \tan(\theta)$  derivando implícitamente con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{dx}{dt} = 500 \sec^2(\theta) \frac{d\theta}{dt} \text{ Finalmente reemplazando se tiene que } \frac{dx}{dt} = 500 \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 0,14 = 500(\sqrt{2})^2 \cdot 0,14 = 140$$

∴ la velocidad con la cual se está elevando el globo es de  $140 \text{ m/min}$ .

## PROBLEMA 2

El ángulo de elevación del sol disminuye a una velocidad de 0,25 radianes por hora. ¿Qué tan rápido aumenta la sombra de un edificio de 400 pies de alto en el momento en que el sol tiene un ángulo de elevación de  $\frac{\pi}{6}$  radianes?



**Solución:**

Colocándole nombre a la variables se tiene que

$h$ : Altura del edificio

$x$ : Largo de la sombra

$\theta$ : Ángulo de elevación del sol

Identificando que cambia con el tiempo y que permanece constante se tiene lo siguiente:

$h$ : Permanece constante

$x$ : Cambia con el tiempo ( $x(t)$ )

$\theta$ : Cambia con el tiempo ( $x(\theta)$ )

Datos conocidos del problema  $\frac{d\theta}{dt} = -0,25 \text{ rad/hr}$ ,  $h = 400 \text{ pies}$  y  $\theta = \frac{\pi}{6} \text{ radianes}$

Ecuación que relaciona las variables  $\tan(\theta) = \frac{h}{x}$ , derivando implícitamente con respecto al tiempo y despejando la razón de cambio solicitada se tiene que:

$$\tan(\theta) = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{h}{x} \right) = \frac{d}{dt} \tan(\theta) \Rightarrow \frac{h}{x^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \sec^2(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{x^2 \cdot \sec^2(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt}}{h}$$

De donde se observa que no conocemos el valor de  $x$ , sin embargo es calculable fácilmente, ya que ,

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{400}{x} \Rightarrow x = \frac{400}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 400\sqrt{3} \text{ pies, finalmente calculamos la razón de cambio solicitada}$$

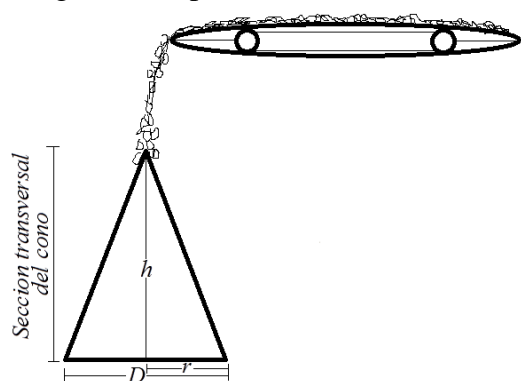
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{(400\sqrt{3})^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot (-0,25)}{400} = \frac{400^2 \cdot 2^2 \cdot 0,25}{400} = 400 \text{ pies / hora.}$$

### PROBLEMA 3

En una planta de arena y grava, la arena cae de una cinta transportadora creando un montículo de forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montículo es de aproximadamente tres veces la altura. ¿A qué ritmo cambia la altura del montón cuando ésta es de 15 pies.

**Solución:**

Diagrama del problema



Se sabe que el Volumen ( $V$ ), el diámetro ( $D$ ) y por ende el radio ( $r$ ) varían con el tiempo, es decir son funciones de tiempo, además conocemos que  $D=2r$  y por datos del problema  $D=3h$ , por lo tanto  $r=\frac{3}{2}h$  del mismo modo se sabe que  $\frac{dV}{dt}=10 \frac{\text{pies}^3}{\text{min}}$  y se nos pide calcular  $\frac{dh}{dt}$  en el instante en que la altura mide 15 pies. Luego debemos encontrar una ecuación que relacione las variables, en este caso corresponde al volumen del cono  $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$  pero

reemplazando se obtiene que  $V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}h\right)^2 h \Rightarrow V=\frac{3}{4}\pi h^3$ , derivando esta última expresión con respecto al tiempo y despejando la razón de cambio solicitada se tiene:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{3}{4}\pi \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{4 \cdot \frac{dV}{dt}}{9\pi h^2}$$

Finalmente evaluando se tiene:

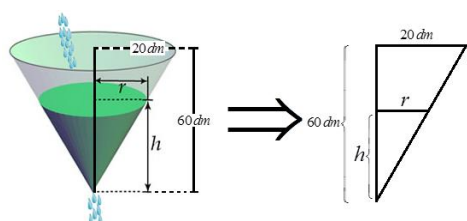
$$\frac{dh}{dt}=\frac{40}{9\pi \cdot 225} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{40}{2225\pi}=\frac{8}{405} \text{ pies}/\text{min}$$

Es decir la altura está aumentando a razón de  $\frac{8}{405\pi} \text{ pies}/\text{min}$ .

### PROBLEMA 4

De un estanque cónico invertido escapa agua a razón de  $1 \text{ dm}^3$  por minuto y al mismo tiempo entra agua al estanque a una razón constante  $K$ . El estanque tiene 60 dm de altura y 40 dm de diámetro en la parte superior. Si el nivel del agua se eleva a una velocidad de 2 dm por minuto. Calcule la velocidad ( $K$ ) con la que entra el agua al estanque en el instante en que el nivel de agua es de 2 dm.

**Solución:**



El volumen de aguas en el cono está dado por  $V=\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ , se sabe que el radio, la altura y el volumen (nivel de agua) son funciones del tiempo ya que el nivel de agua está aumentado ( $\frac{dh}{dt}>0$ ), sin embargo no conocemos la variación del radio con respecto al tiempo por lo cual conviene dejar expresado el

volumen en función del radio (o determinar la razón de cambio del radio), luego  $\frac{r}{h}=\frac{20}{60} \Leftrightarrow r=\frac{1}{3}h$ .

Por lo tanto el volumen en función de  $h$  está dado por  $V=\frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{3}h\right)^2 \cdot h=\frac{1}{27}\pi h^3$ . Por otro lado la razón de cambio del volumen corresponde a la diferencia entre el volumen que entra " $K$ " y el volumen que sale  $1 \text{ dm}^3$  por minuto, es decir,  $\frac{dV}{dt}=(K-1)\frac{\text{dm}^3}{\text{min}}$ . Así derivando con respecto al tiempo obtenemos:

$$V=\frac{1}{27}\pi h^3 \left/ \frac{d}{dt} \right. \Leftrightarrow \frac{dV}{dt}=\frac{1}{27}\pi \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dV}{dt}=\frac{1}{9}\pi \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

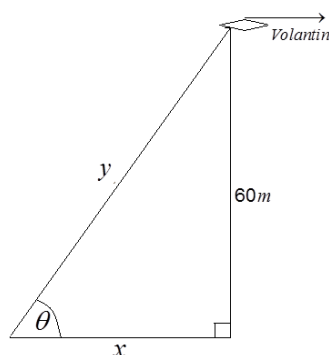
y evaluando nos queda  $K - 1 = \frac{1}{9} \pi \cdot 2^2 \cdot 2 \Leftrightarrow K = \frac{8}{9} \pi + 1 \Leftrightarrow K = \frac{8\pi + 9}{9} \frac{dm^3}{min}$ . Luego la velocidad ( $K$ ) con la que entra el agua al estanque es de  $\frac{8\pi + 9}{9} \frac{dm^3}{min}$ .

### PROBLEMA 5

Un volantín se mantiene a una altura de 60 metros y se mueve horizontalmente a razón de 6 metros por segundo. En el instante en que se han soltado 120 mts de cuerda. Determine

a) La velocidad a la que se está soltando la cuerda.

**Solución:**



Se sabe que la distancia ( $y$ ) y la longitud ( $x$ ) varían con el tiempo mientras que la altura a la que vuela el volantín permanece constante 60 m, además conocemos como varía la longitud  $x$  ya que  $\frac{dx}{dt} = 6 \frac{m}{s}$  y se nos pide calcular la velocidad con la que se está soltando cuerda, es decir  $\frac{dy}{dt}$ . Para ello utilizaremos el Teorema de Pitágoras sobre la relación  $x^2 + 60^2 = y^2$ ,

derivando con respecto al tiempo obtenemos  $2x \cdot \frac{dx}{dt} = 2y \cdot \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{x \cdot \frac{dx}{dt}}{y}$ , sin

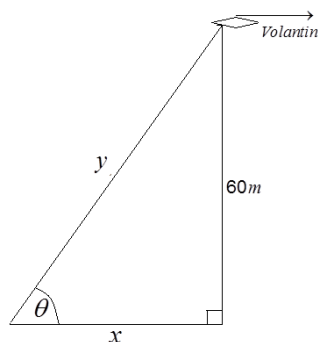
embargo no conocemos el valor de  $x$  por lo cual debemos calcularlo:

$$x^2 + 60^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + 3600 = 14400 \Rightarrow x^2 = 10800 \Rightarrow |x| = \sqrt{3600 \cdot 3} \Rightarrow x = 60\sqrt{3} \text{ (ya que } x \text{ es longitud)}$$

Finalmente evaluando obtenemos que  $\frac{dy}{dt} = \frac{60\sqrt{3} \cdot 6}{120} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3\sqrt{3} \frac{m}{s}$ . Por lo tanto la velocidad a la cual se está soltando cuerda es de  $3\sqrt{3}$  metros por segundo.

b) La razón con que cambia el ángulo entre el cordel y el suelo.

**Solución:**



Se sabe que la distancia ( $y$ ), la longitud ( $x$ ) y el ángulo ( $\theta$ ) varían con el tiempo mientras que la altura a la que vuela el volantín permanece constante 60 m, además conocemos como varía la longitud  $x$  ya que  $\frac{dx}{dt} = 6 \frac{m}{s}$  y del apartado anterior también sabemos como varía la longitud de la cuerda  $\frac{dy}{dt} = 3\sqrt{3} \frac{m}{s}$ . Luego debemos encontrar una fórmula que relacione las variables en este caso haremos uso de una razón trigonométrica  $\cos(\theta) = \frac{x}{y}$  si

derivamos implícitamente con respecto al tiempo y despejamos la razón de cambio pedida se tiene:

$$-\sin(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot y - x \cdot \frac{dy}{dt}}{y^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt}}{y^2 \cdot \sin(\theta)}$$

Como se aprecia se necesitamos el valor del ángulo  $\theta$  en ese instante, luego:

$$\sin(\theta) = \frac{60}{120} \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Finalmente reemplazando se tiene que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt}}{y^2 \cdot \sin(\theta)} = \frac{60\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} - 120 \cdot 6}{120^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{540 - 720}{7200} = \frac{-180}{7200} = -\frac{1}{40} \frac{rad}{s}$$

Por lo tanto el ángulo  $\theta$  decrece a razón de  $\frac{1}{40}$  radianes por segundo.