UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA

BAIN 036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA
Guía de Ejercicios Nº 2

1.- Pruebe que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones indicadas :

$V_1=\left\{\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} / x_i\in\mathbb{R}\right\}$ con las operaciones : $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}+\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}=\{x_i+y_i\}_{i\in\mathbb{N}}, k\left(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right)=\{kx_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
(Espacio de Sucesiones Reales)

$V_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x-3y+6z=0\right\}$ con operaciones usuales.

$V_3=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} / f(-x)=-f(x)\}$ con operaciones usuales. (Espacio de Funciones Impares)

$V_4=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} / f \text{ es acotada}\}$ con operaciones usuales. (Espacio de Funciones Acotadas)

$V_5=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} / f \text{ es integrable}\}$ con operaciones usuales. (Espacio de Funciones Integrables)

$V_6=\{A\in M_n(\mathbb{R}) / A \text{ es triangular superior}\}$ con operaciones usuales.

2.- a) Considere en $\mathbb{R}^2$ las operaciones : $(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$; $k(x,y)=(kx,0)$
Pruebe que se verifican todas las propiedades de espacio vectorial excepto : $1\cdot u=u,\ \forall u\in\mathbb{R}^2$.
¿Es $\mathbb{R}^2$ con estas operaciones, un espacio vectorial?.

b) Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales sobre un cuerpo K.
Sea $V=V_1 x V_2=\{(x,y) / x\in V_1,\ y\in V_2\}$. Pruebe que V es espacio vectorial sobre K,con las operaciones : $(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$, $k(x,y)=(kx,ky)$
(Observe que se está usando el mismo símbolo para la adición en V, V_1 y V_2, análogo para producto por escalar).

3.- Pruebe que $\mathbb{R}^2$ no es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones siguientes. (Indique claramente cuales de las propidades que definen un espacio vectorial se cumplen y cuales no).

a) $(x,y)+(u,v)=(x+v,y+u)$; $k(x,y)=(kx,ky)$

b) $(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$; $k(x,y)=(x,y)$

c) $(x,y)+(u,v)=(0,0)$; $k(x,y)=(kx,ky)$

d) $(x,y)+(u,v)=(xu,yv)$; $k(x,y)=(kx,ky)$

e) $(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$; $k(x,y)=\left(k^2x,k^2y\right)$

4.- Determine cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios indicados :

$W_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x\le y\le z\right\}$, $\mathbb{R}^3$

$W_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=y=z\right\}$, $\mathbb{R}^3$

$W_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / xy=0\right\}$, $\mathbb{R}^3$

$W_4 = \left\{ \left(A \in M_n(\mathbb{R}^3) / A \text{ es diagonal} \right) \right\}, \ M_n(\mathbb{R})$

$W_5 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \right\}, \ F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$W_6 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \dfrac{f(0)+f(1)}{2} \right\}, \ F(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$W_7 = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 / a_0 \in \mathbb{Z} \right\}, \quad P_3(\mathbb{R})$.

5.- Considere u = (1,-3,2) y v = (2,-1,1) en $\mathbb{R}^3$.

a) Escriba (1,7,-4) como combinación lineal de u y v.

b) Escriba (2,-5,4) como combinación lineal de u y v.

c) ¿Para qué valor de k se tiene que (1, k, 5) es combinación lineal de u y v?.

d) Halle condiciones sobre a,b y c para que (a,b,c) sea combinación lineal de u y v.

6.- Escriba u como combinación lineal de los polinomios (si es posible) $v = 2t^2 + 3t - 4$ y $w = t^2 - 2t - 3$ en cada caso: i) $u = 3t^2 + 8t - 5$ ii) $u = 4t^2 - 6t - 1$

7.- a) Escriba E como combinación lineal de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (si es posible) en cada caso :

i) $E = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ii) $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) ¿Qué condición debe cumplir $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ para que sea combinación lineal de A,B y C ?.

8.- a) Pruebe que el subespacio de $\mathbb{R}^3$: $W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \right\}$ es generado por cada uno de los conjuntos siguientes :{(1,0,0),(1,1,0)} ; {(2,2,0),(4,1,0)} ; (3,2,0),(-3,2,0)}.
Dé otro conjunto de vectores que generan a W.

b) Muestre que : $(4,5) \in < (1,3),(2,2) >; (-1,-2,1) \in < (1,-1,1),(3,0,1) >;$ y $(-1,2,3) \notin < (1,-1,1),(3,0,1) >$.

c) Sean $V' = < v_1, v_2 >$ y $V'' = < v_3, v_4, v_5 >$, subespacios de V.
Pruebe que V' + V'' = $< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 >$.

d) Considere los subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0 \right\}$; $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z \right\}$; $W = \left\{ (0,0,z) / z \in \mathbb{R} \right\}$

Pruebe que :

- U,V,W son subespacios de $\mathbb{R}^3$.
- $\mathbb{R}^3 = U + V$; $\mathbb{R}^3 = U + W$; $\mathbb{R}^3 = V + W$
- ¿En qué caso la suma es directa?

e) Sean $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z \right\}$, $W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \right\}$

Pruebe que : $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$

f) Sea $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \right\}$. Halle W subespacio de $\mathbb{R}^3 / V \oplus W = \mathbb{R}^3$.¿Es único este W?.
Explique.

9.- Determine cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son L.I. y cuales son L.D.

a) $\{(1,2,3,4),(4,3,2,1)\}$, b) $\{(-1,6,-12),(\frac{1}{2},-3,6)\}$,

c) $\left\{\begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right\}$, d) $\left\{\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 4 & 5 & -2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & -8 & 7\\ 2 & 10 & -1\end{bmatrix}\right\}$,

e) $\left\{\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}\right\}$, f) $\left\{-t^3+\frac{1}{2}t^2-16,\ \frac{1}{2}t^3-\frac{1}{4}t^2+8\right\}$

g) $\left\{t^3-4t^2+2t+3,\ t^3+2t^2+4t-1,\ 2t^3-3t+5\right\}$

10.- a) Sea $V=F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pruebe que $\{f,g,h\}$ es L.I. para cada caso :

- $f(x)=e^x,\ g(x)=\operatorname{sen}x,\ h(x)=x^2$
- $f(x)=e^x,\ g(x)=e^{2x},\ h(x)=x$
- $f(x)=e^x, g(x)=\operatorname{sen}x,\ h(x)=\cos x$

b) Pruebe que $\{(1-i,i),(2,-1+i)\}$ es L.D. en $C^2(\mathbb{C})$, pero es L.I. en $C^2(\mathbb{R})$.

c) Pruebe que $\left\{\left(3+\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right),\left(7,1+2\sqrt{2}\right)\right\}$ es L.D. en $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, pero es L.I. en $\mathbb{R}^2(\mathbb{Q})$.

11.- a) Suponga que $\{u,v,w\}$ es L.I. Pruebe que :

$\{u+v-2w,\ u-v-w,\ u+w\}$ es L.I. y $\{u+v-3w,\ u+3v-w,\ v+w\}$ es L.D.

b) Sea $\{u,v,w\}$ L.D. ¿Es verdad que w debe ser combinación lineal de u y v?

c) Sea $\{v_1,\dots,v_n\}$ L.I. Pruebe que :

$\{a_1v_1,\dots,a_nv_n\}$ es L.I. donde $a_i\neq 0,\ \forall i=1,\dots,n$

¿ Es $\{v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3,\dots,v_1+v_2+\dots+v_n\}$ L.I ?.

12.- Halle una base y la dimensión de los siguientes subespacios :

$W_1=<(1,4,-1,3),(2,1,-3,-1),(0,2,1,-5)>$

$W_2=<(1,-4,-2,1),(1,-3,-1,2),(3,-8,-2,7)>$

$W_3=<\begin{bmatrix}1 & -5\\ -4 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & -4\\ -5 & 7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -7\\ -5 & 1\end{bmatrix}>$

$W_4=<t^3+2t^2-2t+1,\ t^3+3t^2-t+4,\ 2t^3+t^2-7t-7>$

$W_5=N(A)$, donde $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 5 & 8\end{bmatrix}$ $W_6=F(A')$, $W_7=C(A')$, donde $A'=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 3 & 4 & -3\end{bmatrix}$

$W_8=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \,/\, y-2z+w=0\}$ $W_9=\{A\in M_{3x3}(\mathbb{R}) \,/\, A \text{ es antisimétrica}\}$

13.- a) Sea $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$

i. ¿Es $\{(1,-1,0,0),(1,1,-2,0),(1,0,-1,9)\}$ base de V?.

ii. ¿Es $\{(1,0,0,-1),(1,0,-1,0),(4,-1,-2,-1)\}$ base de V?

b) Hallar dos bases de $\mathbb{R}^4$ que no tengan ningún elemento en común.

c) Hallar dos bases de $\mathbb{R}^4$ que tengan solamente en común los vectores : (0,0,1,0) y (0,0,0,1).

d) ¿Para qué valores de *k*, $\{(k,1-k,k),(2k,2k-1,k+2),(-2k,k,-k)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$?.

e) Hallar una base de $<(1,-1,2,3),(1,0,1,0),(3,-2,5,7)>$, que contenga al vector: $(1,1,0,-1)$.

f) Extienda el conjunto $\{(1,1,-1,1),(1,0,1,1),(1,2,1,1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

g) Sean $U=<(1,-2,4,0),(-1,1,0,1)>$ y $W=<(1,0,-1,2)>$. Halle una base de $U+W$.

h) Sean U y W subespacios 2-dimensionales de $\mathbb{R}^3$. pruebe que $U\bigcap W\neq\{0\}$.

i) Sea V un espacio vectorial de dimensión 7. Sean U y W subespacios tales que $\dim U = 4$, $\dim W = 5$. Halle posibles dimensiones de $U\bigcap W$.

14.- a) Considere la base $\{(2,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Halle los vectores de coordenadas de $v \in \mathbb{R}^2$ relativos a esta base para :

- $v = (2,3)$
- $v = (4,-1)$
- $v = (x,y)$,

b) Pruebe que $\left\{\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\right\}$

es base del subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas.

Halle vectores de coordenadas de las matrices $A=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -5 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

c) Halle un sistema homogeneo cuyo conjunto solución es el subespacio generado por : $\{(1,-2,0,3,-1),(2,-3,2,5,-3),(1,-2,1,2,-2)\}$

15.- Sean $U=<t^3+4t^2-t+3\ ,\ t^3+5t^2+5\ ,\ 3t^3+10t^2-5t+5>$

$W=<t^3+4t^2+6\ ,\ t^3+2t^2-t+5\ ,\ 2t^3+2t^2-3t+9>$

Halle : dim(U+W) y $\dim\left(U\bigcap W\right)$

16.- a) Sea V subespacio de $\mathbb{R}^2$. ¿Cuáles son las posibles dimensiones de V?.

b) Pruebe que si $V\neq\mathbb{R}^2$, entonces : $V=\{(0,0)\}$, o V es una linea recta que pasa por el origen.

c) Sea V subespacio de $\mathbb{R}^3$. ¿Cuáles son las posibles dimensiones de V?.

Pruebe que si $V\neq\mathbb{R}^3$, entonces : $V=\{(0,0,0)\}$, o V es una línea recta que pasa por el origen, o V es un plano que pasa por el origen.