Capítulo 1: Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Introducción

PROBLEMA 1 (Fabricación de un Producto)

- La Compañía Platex fabrica tazas y platos de cerámica. Por cada taza o plato un obrero utiliza una cantidad fija de material que introduce en una máquina moldeadora de la cual sale la pieza seca y barnizada.

- En promedio un obrero necesita 3 minutos para realizar su parte de proceso con las tazas y 2 minutos con los platos.

- El material de una taza cuesta \$ 250 y el material de un plato cuesta \$ 200.

¿Cuántas piezas de cada tipo puede hacer un obrero con una jornada de trabajo de 8 horas, si se gastan exactamente \$ 43.000 en materiales?

Introducción

SOLUCIÓN:

Sean ***x* e *y*** respectivamente el número de tazas y platos de cerámica fabricados por un obrero en una jornada de trabajo de 8 horas con $ 43.000 de materiales.

Entonces, como un obrero necesita 3 minutos para elaborar una taza y 2 minutos para un plato, se ha de verificar

$$3\cdot x+2\cdot y= \text{ minutos de una jornada de trabajo}$$
$$= 8\cdot 60 = 480$$

Además, dado que los materiales de cada taza y plato cuestan, respectivamente, $ 250 y $ 200. También se debe cumplir:

Introducción

$$250\cdot x+200\cdot y= \text{ costo de materiales en una jornada de trabajo}$$
$$= 43.000$$

Por tanto, la solución de este problema se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales :

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y &= 480 \\ 250x+200y &= 43.000 \end{aligned}\right\} \quad \text{ó} \quad \left.\begin{aligned} 3x+2y &= 480 \\ 5x+4y &= 860 \end{aligned}\right\}$$

Que puede expresarse, usando matrices, en la forma:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 \\ 860 \end{bmatrix}$$

Introducción

PROBLEMA 2 (Aleaciones)

Se tienen tres lingotes de 100 gramos cuya composición es la siguiente:

	Composición		
Lingotes	**Oro**	**Plata**	**Cobre**
1	20	30	50
2	30	40	30
3	40	50	10

¿Qué peso habrá de tomarse de cada uno de los tres lingotes para formar uno nuevo que contenga 12 gramos de oro, 57 gramos de plata y 51 gramos de cobre?

Introducción

SOLUCIÓN:

Los gramos x, y, z de cada lingote que se necesitan para elaborar la mezcla requerida deben satisfacer las condiciones:

$$\begin{pmatrix}\text{gramos de oro}\\ \text{en 1 gramo}\\ \text{del lingote 1}\end{pmatrix}\cdot x + \begin{pmatrix}\text{gramos de oro}\\ \text{en 1 gramo}\\ \text{del lingote 2}\end{pmatrix}\cdot y + \begin{pmatrix}\text{gramos de oro}\\ \text{en 1 gramo}\\ \text{del lingote 3}\end{pmatrix}\cdot z = 12$$

$$\begin{pmatrix}\text{gramos de plata}\\ \text{en 1 gramo}\\ \text{del lingote 1}\end{pmatrix}\cdot x + \begin{pmatrix}\text{gramos de plata}\\ \text{en 1 gramo}\\ \text{del lingote 2}\end{pmatrix}\cdot y + \begin{pmatrix}\text{gramos de plata}\\ \text{en 1 gramo}\\ \text{del lingote 3}\end{pmatrix}\cdot z = 57$$

$$\begin{pmatrix}\text{gramos de cobre}\\ \text{en 1 gramo}\\ \text{del lingote 1}\end{pmatrix}\cdot x + \begin{pmatrix}\text{gramos de cobre}\\ \text{en 1 gramo}\\ \text{del lingote 2}\end{pmatrix}\cdot y + \begin{pmatrix}\text{gramos de cobre}\\ \text{en 1 gramo}\\ \text{del lingote 3}\end{pmatrix}\cdot z = 51$$

Introducción

por lo que, de acuerdo con la tabla que se indica en el enunciado, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} 20/100\cdot x+30/100\cdot y+40/100\cdot z &= 12\\ 30/100\cdot x+40/100\cdot y+50/100\cdot z &= 57\\ 50/100\cdot x+30/100\cdot y+10/100\cdot z &= 51\end{aligned}\right\}$$

que simplificando resulta:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+4z &= 120\\ 3x+4y+5z &= 570\\ 5x+3y+\ \ z &= 510\end{aligned}\right\}$$

Expresando matricialmente, este sistema queda:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 120\\ 570\\ 510\end{bmatrix}$$

Introducción

PROBLEMA 3 (Criptografía)

Un proceso para "encriptar" un mensaje secreto es usar una cierta matriz cuadrada A de orden $n\ x\ n$ cuyos elementos son enteros y los elementos de su inversa también son enteros.

A cada letra de la A a la Z se le asigna un número del 1 al 27 y se le asigna el número 28 al espacio entre palabras.

Para enviar un mensaje cada letra y los espacios entre palabras se reemplazan por el número que le corresponde, con estos números como elementos se forma una matriz M de orden $m\ x\ n$ (el número de columnas debe coincidir con el orden de la matriz A). Esta matriz M es la matriz que contiene el "mensaje en código". Se efectúa el producto $M\cdot A$, obteniéndose otra matriz M^*, que es la que

Introducción

contiene el "mensaje encriptado", y los elementos de esta matriz se envían.

La persona que lo recibe, como conoce la matriz A, efectúa el producto:

$$M^* \cdot A^{-1} = (M \cdot A) \cdot A^{-1} = M$$

Obteniendo el mensaje en código. Como además conoce la clave puede decodificarlo.

Ejemplo:

Se recibe el mensaje siguiente:

268, 71, 412, 110, 63, 16, 71, 18, 67, 17

¿Cuál es el contenido de este mensaje, sabiendo que la matriz de código es $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$?

Introducción

SOLUCIÓN:

$$M = M^* \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 268 & 71 \\ 412 & 110 \\ 63 & 16 \\ 71 & 18 \\ 67 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 16 \\ 26 & 28 \\ 13 & 1 \\ 15 & 1 \\ 14 & 1 \end{bmatrix}$$

Así el mensaje codificado es: 23, 16, 26, 28, 13, 1, 15, 1, 14, 1

El código está dado por:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

T	U	V	W	X	Y	Z	Espacio
21	22	23	24	25	26	27	28

Como el mensaje codificado era: 23, 16, 26, 28, 13, 1, 15, 1, 14, 1

el contenido del mensaje es: VOY MAÑANA

Matrices

MATRICES:

$$A=\left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{Fila 1}\\ \leftarrow \text{Fila 2}\\ \vdots\\ \leftarrow \text{Fila } i\\ \\ \leftarrow \text{Fila } m \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna } j & \text{Columna } n \end{array}$$

a_{ij} = elemento de la *fila i* y *columna j.*

A es una matriz de orden $m\times n$

$A=(a_{ij})$

Matrices

IGUALDAD DE MATRICES:

$$A=(a_{ij}) \quad , \quad B=(b_{ij})$$

$$A=B \iff \begin{cases} \bullet\ A \text{ y } B \text{ son del mismo orden}\\ \bullet\ a_{ij}=b_{ij}\ ,\ \forall i,\ \forall j \end{cases}$$

CONJUNTO DE MATRICES:

$$M_{m\times n}(\mathbb{R})=\{A/\ A \text{ es matriz de orden } m\times n,\ \text{con elementos reales.}\}$$

$$M_{n}(\mathbb{R})=\{A/\ A \text{ es matriz cuadrada de orden } n,\ \text{con elementos reales}\}$$

Matrices

TIPOS DE MATRICES

Matriz Cuadrada

Matriz Fila

Matriz Columna

Matriz Diagonal

Matriz Triangular Superior

Matriz Triangular Inferior

Matriz Nula

Matriz Identidad

Matriz Traspuesta

Matriz Simétrica

Matrices

OPERACIONES CON MATRICES:

Adición:

$A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(b_{ij}\right)$ matrices de orden de orden $m\times n$

$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$, suma de A y B $\quad$ $A+B$ es matriz de orden $m\times n$

Multiplicación por Escalar:

$A=\left(a_{ij}\right)$ matriz de orden $m\times n$

$k\in\mathbb{R}$

$k\,A=\left(k\,a_{ij}\right)$, producto del escalar k por la matriz A.

$k\,A$ es matriz de orden $m\times n$

Matrices

Propiedades (de la Adición y Multiplicación por Escalar):

$\forall\ A, B, C \ \in\ M_{m\times n}(\mathbb{R})$

1) $(A+B)+C = A+(B+C).$	Asociatividad.
2) $A+B = B+A.$	Conmutatividad.
3) $A+0 = 0+A = A.$	Neutro Aditivo.
4) $A+(-A) = (-A)+A = 0$	Inverso Aditivo.
5) $k(l\cdot A) = (k\cdot l)\cdot A$	Asociatividad.
6) $k(A+B) = k\cdot A + k\cdot B$	Distributividad.
7) $(k+l)\cdot A = k\cdot A + l\cdot A.$	Distributividad.
8) $1\cdot A = A$	Neutro de la multiplicación por escalar.

Matrices

Multiplicación de Matrices:

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$$

$A\cdot B$, producto de A y B.

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{-1} \\ 2 & \boxed{5} \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ \boxed{-2} & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \\ -6 & 17 & -5 & 26 \\ -14 & 9 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

3×2 $\qquad$ 2×4 $\qquad$ 3×4

Matrices

Propiedades (de la Multiplicación de Matrices):

1) $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ B \in M_{n\times p}(\mathbb{R}),\ C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$

$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ Asociatividad.

2) $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$\exists I_m \in M_m(\mathbb{R}) /\ I_m \cdot A = A$

$\exists I_n \in M_n(\mathbb{R}) /\ A\cdot I_n = A$ Identidad.

3) $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R});\ B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

$\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ Distributividad.

$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

Nota: La <u>conmutatividad</u> del producto de matrices en general <u>no se cumple.</u>

Matrices

Matriz Inversa:

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$

Si existe $B \in M_n(\mathbb{R}) /\ A\cdot B = B\cdot A = I_n$

Se dice que A es invertible o no singular y

B se llama la matriz inversa de A y se anota A^{-1}

Nota: No todas las matrices tienen inversa

Propiedades de la Inversa:

1.- Si A es invertible, entonces su inversa es única.

2.- Si A es invertible, entonces A^{-1} es invertible y

$(A^{-1})^{-1} = A$

3.- Si A y B son invertibles entonces: $A\cdot B$

es invertible y : $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

Matrices

Operaciones Elementales.
Introducción:

Ec.1 Ec.2 Ec.3	$\begin{array}{rcl|} 5y+10z & = & 25 \\ 2x+6y+4z & = & 0 \\ 3y+4z & = & 0 \end{array}$	$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 10 & 25 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right]$
Intercambiando Ec.1 con Ec.2	$\begin{array}{rcl|} 2x+6y+4z & = & 0 \\ 5y+10z & = & 25 \\ 3y+4z & = & 0 \end{array}$	$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right]$
Multiplicando Ec.1 por ½ y Ec.2 por 1/5	$\begin{array}{rcl|} x+3y+2z & = & 0 \\ 1y+2z & = & 5 \\ 3y+4z & = & 0 \end{array}$	$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right]$
Ec.3 se cambia por Ec.3+-3Ec.2	$\begin{array}{rcl|} x+3y+2z & = & 0 \\ 1y+2z & = & 5 \\ 0y+-2z & = & -15 \end{array}$	$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -15 \end{array}\right]$
Ec.3 se multiplica por -1/2	$\begin{array}{rcl|} x+3y+2z & = & 0 \\ y+2z & = & 5 \\ z & = & \frac{15}{2} \end{array}$	$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{2} \end{array}\right]$

Matrices

Operaciones Elementales

$$A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$$

- **Operaciones Elementales fila:**

1) Intercambiar dos filas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2) Multiplicar una fila por un número real no cero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{(2)3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 1 & 2\cdot -3 \end{bmatrix}$$

3) Reemplazar una fila por la suma de ella y un múltiplo de otra.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{2+(2)3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2+2\cdot 3 & 4+2\cdot 1 & 5+2\cdot -3 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Matrices

- Las Operaciones Elementales Fila, se anotarán como:

f_{rs} : intercambiar las filas r y s

$f_{(k)r}$: multiplicar por k, $k \neq 0$, la fila r.

$f_{r+(k)s}$: reemplazar la fila r por la suma de esta fila y k veces la fila s.

- Si f es una operación elemental fila, al aplicar a una matriz A, se obtiene otra matriz A' que es del mismo orden que A, y se anota del siguiente modo:

$$f(A) = A'$$

$$A \xrightarrow{f} A'$$

Matrices

- Si se efectúan r operaciones elementales fila : $f_1, f_2, \dots f_r$

sucesívamente a partir de una matriz A se anotará:

$$A \xrightarrow[f_1]{} A' \xrightarrow[f_2]{} A'' \longrightarrow \dots \xrightarrow[f_r]{} B$$

y en tal caso se dice que: A es **equivalente por filas** con B

y se anota: $A \underset{f}{\sim} B$

- Toda operación elemental fila tiene una **recíproca.**

Para f_{rs}, la recíproca es f_{rs}

Para $f_{(k)r}$, la recíproca es $f_{\left(\frac{1}{k}\right)r}$

Para $f_{r+(k)s}$, la recíproca es $f_{r+(-k)s}$

Matrices

- Se cumple que, $\forall A, B, C \in M_{mxn}(\mathbb{R})$

1) $A \underset{f}{\sim} A$

2) $A \underset{f}{\sim} B \Leftrightarrow B \underset{f}{\sim} A$

3) $A \underset{f}{\sim} B \wedge B \underset{f}{\sim} C \Rightarrow A \underset{f}{\sim} C$

Matrices Elementales Fila:

- Una **matriz elemental fila** de orden n, es una matriz que que se obtiene al efectuar *una operación elemental fila* a la matriz identidad I_n.

Se anota:

$$F_{rs} = f_{rs}(I_n)$$

$$F_{(k)\,r} = f_{(k)\,r}(I_n)$$

$$F_{r+(k)\,s} = f_{r+(k)\,s}(I_n)$$

Matrices

- Se cumple que:

$$f_{r\,s}(A) = F_{r\,s} \cdot A$$

$$f_{(k)\,r}(A) = F_{(k)\,r} \cdot A$$

$$f_{r+(k)\,s}(A) = F_{r+(k)\,s} \cdot A$$

<u>Nota</u>:
Es decir, al aplicar una operación elemental fila a una matriz *A*, da el mismo resultado que multiplicar la matriz *A* por la correspondiente matriz elemental fila, por la izquierda .

Las matrices elementales fila son no singulares, y sus inversas son también matrices elementales del mismo tipo.

Se tiene:

$$(F_{r\,s})^{-1} = F_{r\,s} \qquad \left(F_{(k)\,r}\right)^{-1} = F_{\left(\frac{1}{k}\right)\,r} \qquad \left(F_{r+(k)\,s}\right)^{-1} = F_{r+(-k)\,s}$$

Matrices

Cálculo de la Inversa usando Operación Elemental Fila

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$A \underset{f}{\sim} I_n \Rightarrow A$$ es no singular.

- **Demostración:**

$$A \underset{f}{\sim} I_n \Rightarrow \exists \; f_1, f_2, \ldots, f_r$$ operaciones elementales fila /

$$f_r\left(\ldots f_2\left(f_1(A)\right)\right) = I_n$$

$$\Rightarrow \; \exists \quad F_1, F_2, \ldots, F_r$$ matrices elementales fila /

$$\underbrace{F_r \cdot \ldots \cdot F_2 \cdot F_1}_{B} \cdot A = I_n$$

$$\Rightarrow \exists B \,/\; B \cdot A = I_n$$

Matrices

Además:

$$A \cdot B = \left(B^{-1} \cdot B\right) A \cdot B = B^{-1}\left(BA\right) \cdot B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = I_n$$

$$\therefore \; \exists \; B \;/\; A \cdot B = I_n \quad \wedge \; B \cdot A = I_n$$

$\therefore \; A$ es no singular y B es su inversa.

- Si $A \underset{f}{\sim} I_n$ entonces:

$$\boldsymbol{B \cdot A = I_n} \qquad\qquad B \cdot I_n = A^{-1}$$

$$F_r \cdot \ldots F_2 \cdot F_1 \cdot A = I_n \qquad\qquad F_r \cdot \ldots F_2 \cdot F_1 \cdot I_n = A^{-1}$$

$$f_r\left(\ldots f_2\left(f_1(A)\right)\right) = I_n \qquad\qquad f_r\left(\ldots f_2\left(f_1(I_n)\right)\right) = A^{-1}$$

Nota:
Si al aplicar un número finito de operaciones elementales fila, a partir de A se obtiene I_n , entonces A es no singular y aplicando esas mismas operaciones elementales fila a partir de I_n se obtiene A^{-1} .

Es decir : $$\left[A / I_n\right] \underset{f}{\sim} \left[I_n / A^{-1}\right]$$

Matrices

Matriz Escalón Reducida por Filas- Matriz Escalonada por Filas.

- Sea $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$

A se llama ***matriz escalón reducida por filas (MERF)*** si:

1.- El primer elemento no cero en cada fila no nula es 1

2.- Cada columna que tiene no nulo el primer elemento de alguna fila, tiene todos sus otros elementos cero.

3.- El primer elemento no nulo de cada fila está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior.

4.- Las filas nulas, si las hay, van al final.

- Si A cumple sólo las condiciones 3 y 4 se dice que es ***Matriz Escalonada por Filas (MEF).***

Matrices

<u>**Nota:**</u> Toda matriz $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$

es equivalente por filas a una única matriz escalón reducida por filas.

<u>**Rango de una Matriz.**</u>

$A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$

Se llama **rango** de A al número de filas no nulas de la matriz escalón reducida por filas, equivalente por filas con A, se denota: $r(A)$

- **Propiedades del Rango.**

1.- Si $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ se tiene que: $0 \le r(A) \le m$ y $0 \le r(A) \le n$

2.- $A \underset{f}{\sim} B \Rightarrow r(A) = r(B)$

3.- $r(I_n) = n$ (I_n es la única matriz escalón reducida por filas de orden n, con rango n).

<u>**Nota:**</u> Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ entonces:

A es no singular $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$ $\Leftrightarrow A \underset{f}{\sim} I_n$

Matrices

Operaciones Elementales Columna.

De manera análoga a como se definieron conceptos relativos a las filas de una matriz, se definen conceptos relativos a sus columnas. Así tenemos:

1.- Las **operaciones elementales columnas** se denotarán por:

$$c_{r\,s},\, c_{(k)\,r},\, c_{r+(k)\,s}$$

2.- Si A y B son **equivalentes por columnas** se anotará:

$$A \underset{c}{\sim} B$$

3.- Las **matrices elementales columna** se denotarán por:

$$C_{r\,s}, C_{(k)\,r}, C_{r+(k)\,s}$$

29

Matrices

4.- Por cada matriz elemental columna C, hay asociada una operación elemental columna c, y se tiene que:

$$\text{Si } A \in M_{mxn}(\mathbb{R}), \text{ entonces } c(A) = A \cdot C, \text{ donde } C \in M_n(\mathbb{R}),\ C = c(I_n)$$

5.- Si $A, B \in M_{mxn}(\mathbb{R})$, entonces: $A \underset{c}{\sim} B \Leftrightarrow B = A \cdot P$

donde $P \in M_n$ es producto de matrices elementales columna.

6.- Si $\left[\frac{A}{B}\right]$ denota la matriz formada por las filas A, seguidas de las filas B, se tiene:

$$\left[\frac{A}{I_n}\right] \underset{c}{\sim} \left[\frac{I_n}{A^{-1}}\right], \quad \text{para } A \in M_n \text{ invertible.}$$

Es nos da otra forma de hallar la inversa de una matriz (si existe).

7.- También puede definirse **matriz escalón reducida por columnas (MERC)** y **matriz escalonada por columnas (MEC)** y puede demostrarse que el **rango por columnas** (número de columnas no cero) coincide con el ya definido anteriormente.

30

Determinantes

Definición de Determinante:

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Para $n = 1$</u> $\quad A = [a_{11}], \qquad \det A = a_{11}$

<u>Para $n = 2$</u> $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

<u>Para $n = 3$</u> $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

Determinantes

Para $n > 1$: $\qquad A = (a_{ij})$

$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det M_{ij}$ $\qquad$ Desarrollo de Laplace por fila *i*.

$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det M_{ij}$ $\qquad$ Desarrollo de Laplace por columna *j*.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

M_{ij} es la matriz que se obtiene eliminando fila *i* y columna *j* de la matriz *A*.

M_{ij} es de orden $(n-1) \times (n-1)$

Signos: $\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$

Determinantes

Por ejemplo para n = 3, desarrollando por 1ª fila

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det M_{1j}$$

$$= (-1)^2 \cdot a_{11} \cdot \det M_{11} + (-1)^3 \cdot a_{12} \cdot \det M_{12} + (-1)^4 \cdot a_{13} \cdot \det M_{13}$$

$j = 1$ $\quad j = 2 \quad$ $j = 3$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Determinantes

Propiedades:

1) $\det 0 = 0, \quad 0$ Matriz Nula.

2) $\det I_n = 1$

3) $\det A^T = \det A$

4) Si A tiene una fila o columna de ceros, entonces $\det A = 0$

5) Relación de Determinantes con Operaciones Elementales.

$\det(f_{rs}(A)) = -\det A \qquad \det(c_{rs}(A)) = -\det A$

$\det(f_{(k)r}(A)) = k \det A \qquad \det(c_{(k)r}(A)) = k \det A$

$\det(f_{r+(k)s}(A)) = \det A \qquad \det(c_{r+(k)s}(A)) = \det A$

Determinantes

6) Si cada elemento de una fila (o columna) de A se puede escribir como la suma de dos términos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes de las matrices que contienen cada uno de los términos de la fila (o columna) correspondiente, pero en cualquier otro lugar son iguales a la matriz original.

Por ejemplo, para orden 4, si esto ocurre en la 2ª fila, resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Determinantes

7) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

8) A es no singular $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Además: $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$

Matriz Adjunta:

$A \in M_n(\mathbb{R}) \qquad A = (a_{ij})$

$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij} \longrightarrow$ Cofactor del elemento a_{ij}

$C = (c_{ij}) \longrightarrow$ Matriz de Cofactores.

$Adj(A) = C^T \longrightarrow$ Matriz Adjunta de A.

Se cumple que:

1) $A \cdot (adj\ A) = (adj\ A) \cdot A = (\det A) \cdot I_n$

2) Si A es no singular, entonces: $A^{-1} = \left(\dfrac{1}{\det A}\right) \cdot adjA$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

1.-

Incógnitas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Coeficientes

Ecuación Lineal

Término Constate

$(k_1, k_2, \dots, k_n)$ es una <u>solución</u> de la ecuación lineal si:

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n = b$$

2.- Un sistema de m ecuaciones lineales son con n incógnitas:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ es de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Notas:

$(k_1, k_2, \dots, k_n)$ es una <u>solución particular</u> del sistema si es solución de cada una de las *m* ecuaciones lineales.

<u>Solución General</u>, es el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones lineales.

Ese conjunto puede ser:
- <u>Vacío</u>.
- <u>Tener un elemento</u>.
- <u>Tener infinitos elementos</u>.

<u>Sistema Consistente</u>: tiene alguna solución.

<u>Sistema Inconsistente</u>: no tiene solución.

El sistema puede expresarse matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1} = \underbrace{B}_{m \times 1}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

$A =$ Matriz de coeficientes del sistema.

$X =$ Matriz de incógnitas.

$B =$ Matriz de constantes.

$\left[A \mid B\right] =$ Matriz aumentada es matriz de orden *mx*(*n+1*).

Notas: Dos sistemas de *m* ecuaciones, se dicen **<u>equivalentes</u>** , si tienen la misma solución general.

<u>Sistema Homogéneo</u> $B = 0$, o sea: $AX = 0$

Este tipo de sistema tiene una solución particular formada por ceros (0,0,…,0); llamada <u>Solución Trivial</u>.

Cualquier otra solución si existe, se dice <u>No Trivial.</u>

Sistemas de Ecuaciones Lineales

<u>Resolución Sistemas no Homogéneos</u>

$AX = B$

- Se transforma $\left[A \middle| B\right]$ usando operaciones elementales fila en: $\left[A' \middle| B'\right]$ Matriz MERF ó MEF.

- Lo anterior permite hallar $r(A)$ y $r\left(\left[A \middle| B\right]\right)$

Se tiene lo siguiente:

$r\left(\left[A \mid B\right]\right) = r(A)$

- $r(A) = N^o\ Incog.$ — Hay solución única.
- $r(A) < N^o\ Incog.$ — Hay infinitas soluciones.

$r\left(\left[A \middle| B\right]\right) > r(A)$ — No hay solución.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Como $\left[A \mid B\right] \underset{f}{\sim} \left[A' \mid B'\right]$

Entonces $A'X = B'$ es equivalente al sistema original $AX = B$

Pero si $\left[A' \mid B'\right]$ es MERF, la(s) solución(es), si existe(n), se obtienen directamente.

Si $\left[A' \mid B'\right]$ es MEF, haciendo pequeños cálculos se obtiene(n) las solución(es) si existe(n).

Resolución Sistemas Homogéneos

$AX = 0$

Se calcula $r(A)$

Se dan dos posibilidades

$r(A) <$ N° incógnitas → Infinitas Soluciones

$r(A) =$ N° incógnitas → Una Solución (Trivial)

$A \sim_f A' \Rightarrow AX = 0$ y $A'X = 0$ son equivalentes.

(A' matriz MERF o MEF)

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Regla de Cramer

Sea $A \subset M_n(\mathbb{R})$, no singular.

El sistema $AX = B$ tiene única solución dado por: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$

Donde: $\Delta = \det A$

$\Delta_i =$ determinante de matriz obtenida de A reemplazando la columna *i* por B.

Para $n = 3$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\}, \ A = \left(a_{ij}\right) \quad \text{no singular.}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{22} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$