CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

BAIN 036 ALGEBRA LINEAL

MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

Sean $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ y $B'=\{v_1',v_2',...,v_n'\}$ dos bases de un espacio vectorial V.
Expresemos los elementos de la base B como combinación lineal de los elementos de la base B':

$$\left.\begin{array}{lcl} v_1 & = & a_{11}v_1'+a_{21}v_2' \quad +...+ \quad a_{n1}v_n' \\ v_2 & = & a_{12}v_1'+a_{22}v_2' \quad +...+ \quad a_{n2}v_n' \\ & \vdots & \\ v_n & = & a_{1n}v_1'+a_{2n}v_2' \quad +...+ \quad a_{nn}v_n' \end{array}\right\}$$

Los coeficientes obtenidos para $v_1,v_2,...,v_n$ son las columnas de una matriz A, llamada **Matriz de Cambio de Base de *B* a *B'*.**

O sea:
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Esta matriz permite hallar las coordenadas de un vector $v\in V$ en la base B', si se conocen las coordenadas de v en la base B.
Se cumple que: $\boxed{A\cdot[v]_B=[v]_{B'}}$
(donde $[v]_B$ es el vector de coordenadas de v en la base B y $[v]_{B'}$ es el vector de coordenadas de v en la base B').

Además se cumple que: A es no singular y A^{-1} es la matriz de cambio de base de B' a B.
O sea : $\boxed{A^{-1}\cdot[v]_{B'}=[v]_B}$

Ejemplo:
Consideremos las bases $B=\{(1,2,3),(1,-1,0),(1,3,5)\}$ y
$B'=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
Hallar la matriz A de cambio de base de B a B'.

Solución:

$$(1,2,3)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,0) \qquad (1,-1,0)=\alpha'(1,1,1)+\beta'(1,1,0)+\gamma'(1,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}\alpha+\beta+\gamma=1\\ \alpha+\beta=2\\ \alpha=3\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}\alpha'+\beta'+\gamma'=1\\ \alpha'+\beta'=-1\\ \alpha'=0\end{array}\right\}$$

$$\alpha=3,\ \ \beta=-1,\ \ \gamma=-1 \qquad \alpha'=0,\ \ \beta'=-1,\ \ \gamma'=2$$

$$(1,3,5)=\alpha''(1,1,1)+\beta''(1,1,0)+\gamma''(1,0,0) \qquad \left.\begin{array}{r}\alpha''+\beta''+\gamma''=1\\ \alpha''+\beta''=3\\ \alpha''=5\end{array}\right\} \ \alpha''=5,\ \ \beta''=-2,\ \ \gamma''=-2$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l}(1,2,3)=3(1,1,1)+(-1)(1,1,0)+(-1)(1,0,0)\\ (1,-1,0)=0(1,1,1)+(-1)(1,1,0)\ +\ 2(1,0,0)\\ (1,3,5)=5(1,1,1)+(-2)(1,1,0)+(-2)(1,0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}3&0&5\\-1&-1&-2\\-1&2&-2\end{bmatrix}$$

es la Matriz de Cambio de Base de B a B'.

Si consideramos $v=(-4,6,1)\in\mathbb{R}^3$

Se tiene que el vector de coordenadas de v en base B es: $[v]_B=(2,-5,-1)$ y en la base B' es $[v]_{B'}=(1,5,-10)$ y se comprueba que se cumple:

$$A\cdot[v]_B=[v]_{B'} \quad \text{ya que :} \quad \begin{bmatrix}3&0&5\\-1&-1&-2\\-1&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\\-10\end{bmatrix}$$

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACION LINEAL

Sea $T:U\to V$ transformación lineal.

$B_U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ base U, $B_V=\{v_1,v_2,...,v_m\}$ base de V.

Se expresan las imágenes de la base B_U como combinación de los elementos de la base B_U

$$\left.\begin{array}{l}T(u_1)=a_{11}v_1+a_{21}v_2+...+a_{m1}v_m\\ T(u_2)=a_{12}v_1+a_{22}v_2+...+a_{m2}v_m\\ \quad\vdots\\ T(u_n)=a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+...+a_{mn}v_m\end{array}\right\}$$

La matriz $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{mxn}(\mathbb{R})$ se denomina **Matriz asociada a T respecto de las bases B_U y B_V** y se anota: $[T]_{B_U}^{B_V}$

Esta matriz cumple : $\boxed{[T]_{B_U}^{B_V}[u]_{B_U}=\left[T(u)\right]_{B_V},\forall u\in U}$

Si $U=V$, o sea $T:U\to U$ y $B,\ B'$ son dos bases de U, entonces: $[T]_B^{B'}$ es la matriz asociada a T en las bases B y B'.

Pero, puede considerarse la misma base B, tanto en dominio como codominio, quedando: $[T]_B^B$, que se anota: $[T]_B$.

Ejemplos:

1.- Sea $T: P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $\quad T(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} 3a-5b & b+c \\ a-c & a+b+c \end{bmatrix}$

Hallar $[T]_{B_1}^{B_2}$, para $B_1 = \{x^2+x, x+1, x^2+1\}$ base de $P_2(\mathbb{R})$ y

$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ base de $M_2(\mathbb{R})$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} T(x^2+x) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T(x+1) = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = (-5)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (-5)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T(x^2+1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + (-5)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + (-5)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \therefore [T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 5 & 12 & -5 \\ 6 & 11 & -5 \\ -4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

2.- Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que su matriz en las bases $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y $B' = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es

$[T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Calcular $T(3,4,5)$

Solución:

Se cumple que $[T]_B^{B'} \cdot [(3,4,5)]_B = [T(3,4,5)]_{B'}$. Hallemos $[(3,4,5)]_B$

$$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = (3,4,5) \Rightarrow \alpha = -1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 5 \quad \therefore \quad [(3,4,5)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 14 \\ 19 \end{bmatrix} = [T(3,4,5)]_{B'} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow T(3,4,5) = (-7)(0,0,1) + 14(0,1,1) + 19(1,1,1) \\ \Rightarrow T(3,4,5) = (19,33,26) \end{array}$$

Propiedades:

1) $\left(\begin{array}{l} F: U \to V, G: V \to W \text{ transformaciones lineales} \\ B_U, B_V, B_W \text{ bases de } U, V \text{ y } W \text{ respectivamente} \end{array} \right) \Rightarrow \left([G \circ F]_{B_U}^{B_W} = [G]_{B_V}^{B_W} \cdot [F]_{B_U}^{B_V} \right)$

2) $(T: U \to V \text{ isomorfismo}) \Rightarrow \left(\left[T^{-1}\right]_{B_V}^{B_U} = \left([T]_{B_U}^{B_V}\right)^{-1} \right)$