UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

Guía de Cálculo I: La Integral Definida

BAIN 037

1. Determine cuál(es) de las siguientes funciones es(son) integrables en $[0,2]$. Justifique.

   a) $f(y) = y^2 \operatorname{sen} y$

   b) $f(\theta) = \sec\theta$

   c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^{-2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

   e) $g(x) = \tan x$

   f) $h(t) = t^2 - 2t + 1$

2. Calcule cada una de las siguientes integrales utilizando propiedades e interpretación geométrica.

   a) $\int_{-1}^{1} (s^2 - s - 1)ds$

   b) $\int_{0}^{2} f(x)dx$, donde
   $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

   c) $\int_{0}^{1} f(x)dx$, donde
   $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le c \\ c\dfrac{1-x}{1-c} & \text{si} \quad c \le x \le 1 \end{cases}$;
   $c \in]0,1[$ es una constante.

   d) $\int_{0}^{5} (x - [x])\, dx$

3. Muestre, utilizando áreas, que
$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

4. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

   Utilice este hecho para mostrar que

   a) $\int_{a}^{b} x dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.

   b) $\int_{a}^{b} x^2 dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3}$.

5. Aplicando las propiedades de la integral definida, evalúe cada una de las siguientes integrales:

   a) $\int_{-4}^{-1} \sqrt{3}\, dx$

   b) $\int_{3}^{6} (4 - 7t)dt$

   c) $\int_{0}^{2} (x-1)(3x-1)dx$

   d) $\int_{0}^{2} |(x-1)(3x-1)|dx$

   e) $\int_{1}^{4} (2y^2 - 3y + 1)dy$

   f) $\int_{3}^{4} g(x)dx + \int_{1}^{3} g(x)dx + \int_{4}^{1} g(x)dx$

   g) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, donde x es una función par.

   h) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, donde x es una función impar.

   i) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, donde
   $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ 3x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$

   Nota: Puede utilizar además los resultados del ejercicio anterior.

6. Escriba cada una de las siguientes integrales como una integral de la forma $\int\limits_a^b f(x)dx$.

   a) $\int\limits_1^3 f(x)dx + \int\limits_3^6 f(x)dx + \int\limits_6^{12} f(x)dx$

   b) $\int\limits_5^8 f(x)dx + \int\limits_0^5 f(x)dx$

   c) $\int\limits_2^{10} f(x)dx - \int\limits_2^7 f(x)dx$

   d) $\int\limits_{-3}^5 f(x)dx - \int\limits_{-3}^0 f(x)dx + \int\limits_5^6 f(x)dx$

7. Hallar un polinomio cuadrático P para el cual $P(0) = P(1) = 0$ y $\int\limits_0^1 P(x)dx = 1$.

8. Hallar un polinomio cúbico P tal que $P(0) = P(-2) = 0$; $P(1) = 15$ y $3\int\limits_{-2}^0 P(x)dx = 4$.

9. Use ideas geométricas para establecer que

$$\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{3}{4}$$

10. Usando propiedades de la integral definida, pruebe que

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + cosx}\ dx < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

11. Use las propiedades de la integral definida para acotar las siguientes integrales

   a) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x}\ dx$

   b) $\int\limits_0^1 \sqrt{4 + x^2}\ dx$