Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

La Hipérbola

La Hipérbola

Hipérbola como L.G.

Una *hipérbola* es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos es una constante (positiva).

Elementos de la Hipérbola:

Focos: los puntos fijos.

Centro: punto medio del segmento de extremos los focos.

Eje focal: recta que pasa por los focos.

Eje normal: recta perpendicular al eje focal y que pasa por el centro.

Vértices: puntos en que la hipérbola intersecta al eje focal.

Eje transverso: segmento de extremos los vértices.

Lado recto: segmentos de extremos puntos de la hipérbola, perpendiculares al eje focal y que pasan por los focos.

Gráficamente se tiene:

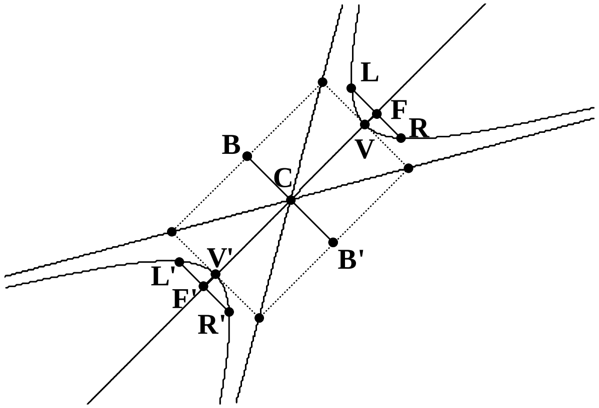
Centro: C

Focos: $F,\ F'$

Vértices: $V,\ V'$

Eje transverso: $\overline{VV'}$

Lados rectos:

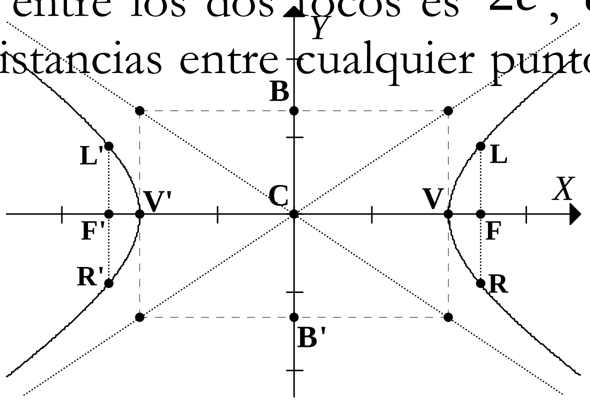


La Hipérbola

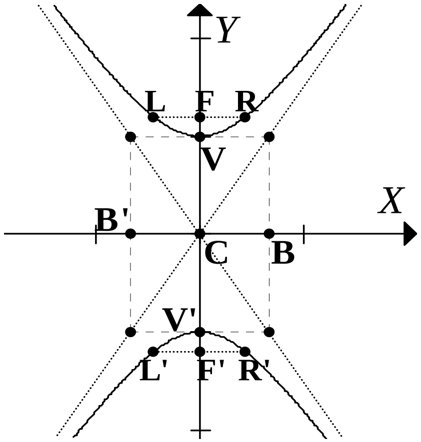
Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Ecuaciones de la Hipérbola

Hipérbola de centro el origen, distancia entre los dos focos es $2c$, $c > 0$, valor absoluto de las diferencias de las distancias entre cualquier punto de la hipérbola y los dos focos es $2a$, $a > 0$:



1) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, si el eje focal es el eje



2) $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, si el eje focal es el eje

donde $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$.

La Hipérbola

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Asíntotas de la Hipérbola:

Despejando y en ecuación 1)

Se muestra que las rectas de ecuaciones $y = \frac{b}{a}x,\ y = -\frac{b}{a}x$ son asíntotas oblicuas de la hipérbola.

(Las ecuaciones de estas asíntotas se pueden obtener al considerar $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$).

Excentricidad de la Hipérbola:

La *excentricidad* de la hipérbola es $e = \frac{c}{a}$.

Como $0 < a < \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 0 < a < c$, entonces $e > 1$.

La Hipérbola

Eje conjugado de la Hipérbola:

Eje conjugado de una hipérbola es un segmento perpendicular en su punto medio al eje de la hipérbola, y cuya semilongitud es b.

Gráfico de una Hipérbola:

Una forma simple de graficar las asíntotas es ubicar los extremos del eje transverso, vértices $V(a,0), V'(-a,0)$, los extremos del eje conjugado $B(0,b), B'(0,-b)$. Las diagonales del rectángulo que se obtiene trazando rectas paralelas a los ejes coordenados por estos cuatro puntos tienen pendientes $\pm b/a$, y las asíntotas de ecuaciones $y = \pm(b/a)x$ las contienen.

Esto es, se construye un rectángulo de vértices (a,b), $(a,-b)$, $(-a,b)$, $(-a,-b)$ y las asíntotas pasan por el centro y por vértices opuestos del rectángulo.

Análogamente, si los vértices son $(0,\pm a)$ y los extremos del eje conjugado son $(\pm b,0)$, las asíntotas tienen ecuaciones .

La Hipérbola

Ejemplo 1:

Grafique la curva de ecuación $25x^2 - 144y^2 + 3600 = 0$.

Resolución

La ecuación se puede escribir $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{144} = 1$ y es de la forma $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ con $a^2 = 25,\ b^2 = 144$.

Como $a = 5,\ b = 12$ entonces $c = \sqrt{25+144} = 13$.

Los focos son $F(0,13),\ F'(0,-13)$.

Los vértices son $V(0,5),\ V'(0,-5)$.

Los puntos extremos del eje conjugado son $B(12,0),\ B'(-12,0)$.

La longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{288}{5}$.

Los extremos de los lados rectos son $L(-\frac{144}{5},13),\ R(\frac{144}{5},13),\ L'(-\frac{144}{5},-13),\ R'(\frac{144}{5},-13)$.

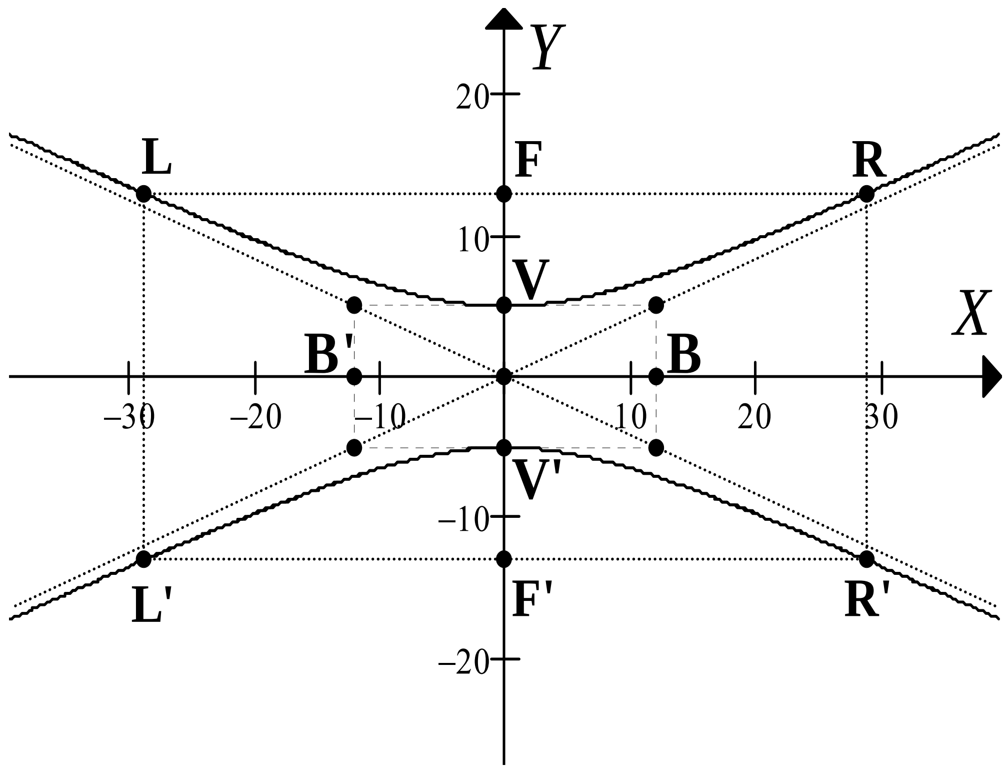
Las asíntotas tienen ecuaciones: $\dfrac{y}{5} + \dfrac{x}{12} = 0,\ \dfrac{y}{5} - \dfrac{x}{12} = 0$, esto es,

$$5x + 12y = 0,\ 5x - 12y = 0$$

Ejemplo 1: (cont…)

(Se obtienen de considerar $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 0$).

El gráfico es:



Ejemplo 2:

Halle la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(3,-1)$, su centro es el origen, su eje transverso es parte del eje X y una de sus asíntotas es la recta de ecuación $2x+3\sqrt{2}y=0$.

Resolución

Como $(3,-1)$ es punto de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, entonces $\frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$.

Por otro lado, de la ecuación de la asíntota se tiene: $y=-\frac{\sqrt{2}}{3}x$

Pero $\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{b}{a}\Rightarrow b^2=\frac{2a^2}{9}$

Así, $\frac{9}{a^2}-\frac{9}{2a^2}=1\Rightarrow 2a^2=9\Rightarrow a=\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow b=1$

Luego, la ecuación de la hipérbola es:

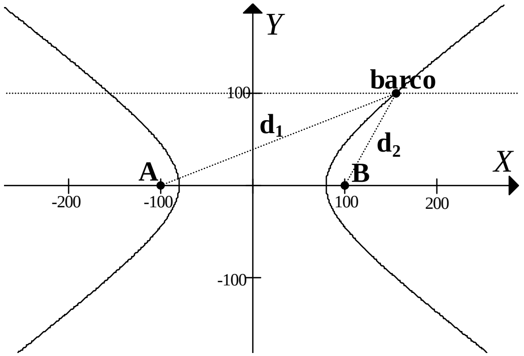
$$\frac{2x^2}{9}-y^2=1 \quad \text{o} \quad 2x^2-9y^2=9$$

La Hipérbola

Ejemplo 3: Un barco navega por una ruta en forma paralela y a $100\ millas$ de distancia de una costa recta. El barco manda una señal de auxilio que reciben dos estaciones guardacostas a $200\ millas$ de distancia entre si. A partir de la diferencia entre tiempos de recepción de la señal, se calcula que la nave está $160\ millas$ más cerca de una que de la otra estación. ¿Dónde se encuentra la embarcación?

Resolución

Consideremos un sistema de ejes de modo que las estaciones guardacostas estén en el eje X con el origen equidistante de estas dos estaciones.



Entonces:

$$d_1 - d_2 = 2a = 160 \Rightarrow a = 80$$

$$c = 100 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 10000 - 6400 = 3600$$

De aquí:

Para $y = 100$:

$$x^2 = 6400\left(1 + \frac{10000}{3600}\right) = \frac{6400}{3600} \cdot 13600 \Rightarrow x = \frac{40}{3}\sqrt{136} = \frac{80}{3}\sqrt{34}\ millas$$

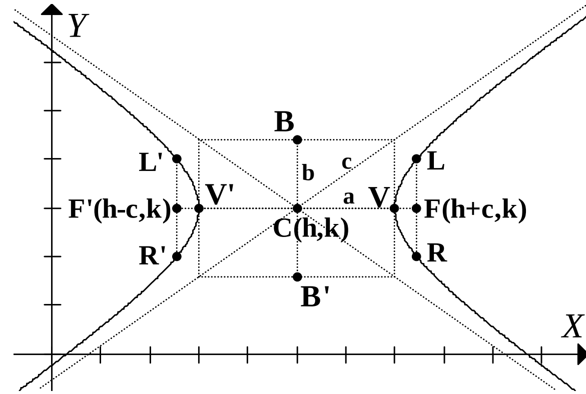
Ejemplo 3: (cont…)

Luego, las coordenadas del barco son $(\frac{80}{3}\sqrt{34},100)$, esto es, aproximadamente, $(155.5,100)$.

(El sistema de navegación a grandes distancias *loran*, long range navigation, es una extensión de lo que se hizo en este ejemplo).

La Hipérbola

Ecuación de la hipérbola de centro $C(h,k)$, longitud del eje transverso $2a$, distancia entre el centro y cada foco .



1) $$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$

si el eje transverso es paralelo al eje .

2) $$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,$$

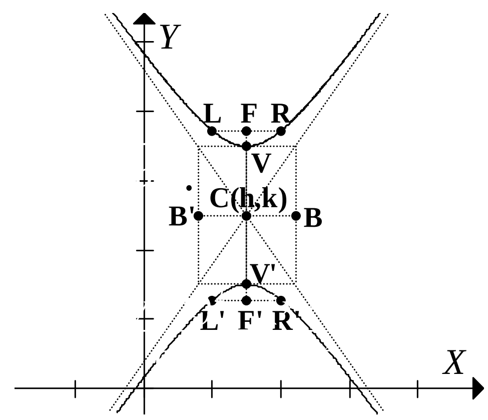
si el eje transverso es paralelo al eje

Las asíntotas de las hipérbolas son :

$$y-k=\frac{b}{a}(x-h),\ y-k=-\frac{b}{a}(x-h),$$ en el caso 1)

$$y-k=\frac{a}{b}(x-h),\ y-k=-\frac{a}{b}(x-h),$$ en el caso 2)

(Se obtienen de considerar: $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$, respectivamente).



Ejemplo 4:

El centro de una hipérbola es $(2,-2)$ y uno de sus vértices es $(0,-2)$. Si la longitud del lado recto es 8, halle su ecuación.

Resolución:

$$a=2,\ \frac{2b^2}{a}=8 \ \Rightarrow\ b=2\sqrt{2}$$

Así, la ecuación es:

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{8}=1$$

Ecuación General de la Hipérbola:

Las ecuaciones $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ se pueden reducir a la forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde $A,C\neq 0$, $A,\ C$ con signo distintos.

Recíprocamente, toda ecuación de la forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ con $AC<0$ se puede reducir a una de las dos anteriores, y por tanto representa una hipérbola (o un par de rectas).

Ejemplo 5: Identifique las curvas de ecuaciones:

a) $x^2 - 4y^2 + 8x + 24y - 20 = 0$

b) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y - 43 = 0$

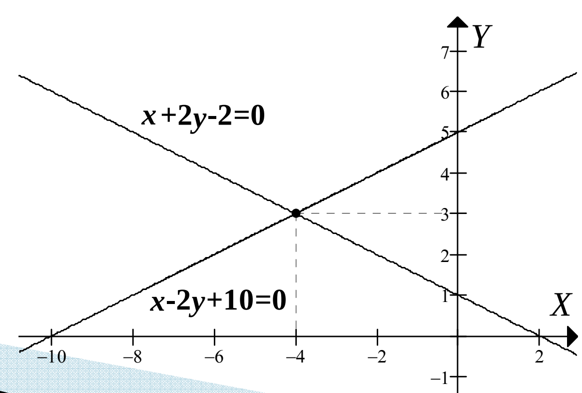
c) $9x^2 - 25y^2 + 36x - 50y + 236 = 0$

Determine sus elementos y grafique.

Resolución:

a) $(x+4)^2 - 4(y-3)^2 = 0 \Rightarrow (x+4)^2 = 4(y-3)^2 \Rightarrow x+4 = \pm 2(y-3)$

Así, se obtienen dos rectas de ecuaciones $x - 2y + 10 = 0,\ x + 2y - 2 = 0$.



b) La ecuación se puede escribir:

$$9(x+1)^2 - 4(y-2)^2 = 36, \text{ esto es, } \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Comparando con la ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, la ecuación dada representa una hipérbola con centro $C(-1,2)$, eje focal paralelo al eje X y con semiejes de longitudes $a = 2,\ b = 3$.

Las asíntotas son rectas que pasan por el centro y de pendientes $\pm b/a$, de modo que sus ecuaciones son:

$$y - 2 = \pm\frac{3}{2}(x+1), \text{ esto es, } 3x - 2y + 7 = 0,\ 3x + 2y - 1 = 0$$

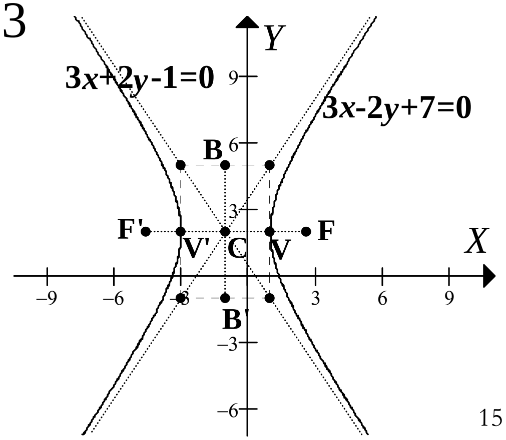
Además: $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

Focos: $F(-1+\sqrt{13}, 2),\ F'(-1-\sqrt{13}, 2)$

Vértices: $V(1,2),\ V'(-3,2)$

Longitud del lado recto: $2b^2/a = 9$

Su gráfico es:



c) $9(x+2)^2 - 25(y+1)^2 = -225 \Rightarrow \dfrac{(y+1)^2}{9} - \dfrac{(x+2)^2}{25} = 1$

Esta ecuación es de la forma $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$.

Entonces, el gráfico es una hipérbola de centro $C(-2,-1)$, eje transverso paralelo al eje Y, con asíntotas de ecuaciones:

$$y+1 = \pm\frac{3}{5}(x+2)$$

Además:

Vértices: $(-2,2),\ (-2,-4)$

Focos: $(-2,-1+\sqrt{34}),\ (-2,-1-\sqrt{34})$

El gráfico es: