UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA

Pauta Tutoría N°6
Álgebra Lineal para Ingeniería
Octubre 2013

1. Sean $U = \langle(1,2,0,1),(0,1,1,0)\rangle$ y $V = \langle(1,1,2,1),(2,5,1,2)\rangle$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$. Encuentre $U+V$ y una base de este subespacio de $\mathbb{R}^4$.
Desarrollo:

$$U+V = \langle(1,2,0,1),(0,1,1,0),(1,1,2,1),(2,5,1,2)\rangle$$

Para determinar una base a partir del conjunto generador, escalonamos (sin intercambiar filas) la matriz cuyas filas corresponden a los vectores generadores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{3+(-1)1} \\ \to \\ f_{4+(-2)1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{3+(1)2} \\ \to \\ f_{4+(-1)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esto quiere decir que solo 3 vectores del conjunto generador son l.i. y que $\{(1,2,0,1),(0,1,1,0),(0,0,3,0)\}$ es una base de $U+V$.

Nota: Si desea caracterizar $U+V$, puede realizar el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} U+V &= \langle(1,2,0,1),(0,1,1,0),(1,1,2,1),(2,5,1,2)\rangle \\ &= \{\alpha(1,2,0,1)+\beta(0,1,1,0)+\gamma(1,1,2,1)+\delta(2,5,1,2)/\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha+\gamma+2\delta, 2\alpha+\beta+\gamma+5\delta, \beta+2\gamma+\delta, \alpha+\gamma+2\delta)/\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Para determinar las ecuaciones cartesianas que definen al espacio $U+V$ caracterizamos un vector (x,y,z,t) cualquiera de este espacio:

$$(x,y,z,t) = (\alpha+\gamma+2\delta, 2\alpha+\beta+\gamma+5\delta, \beta+2\gamma+\delta, \alpha+\gamma+2\delta)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha+\gamma+2\delta &= x \\ 2\alpha+\beta+\gamma+5\delta &= y \\ \beta+2\gamma+\delta &= z \\ \alpha+\gamma+2\delta &= t \end{aligned}$$

la matriz aumentada de este sistema es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 1 & 5 & y \\ 0 & 1 & 2 & 1 & z \\ 1 & 0 & 1 & 2 & t \end{array}\right)$

$$\begin{matrix} f_{2+(-2)1} \\ \to \\ f_{4+(-1)1} \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y-2x \\ 0 & 1 & 2 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-x \end{array}\right) \begin{matrix} f_{3+(-1)2} \\ \to \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2x-y+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-x \end{array}\right)$$

De aquí que la condición que deben cumplir los vectores (x,y,z,t) de este espacio sea $t-x=0$, de donde

$$U+V = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/t-x=0\}.$$

2. Sean $U = \langle (1,1,2),(1,1,1)\rangle$ y $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = z, y = -x\}$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Determine si $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.
Desarrollo: Para determinar $U+W$ primero determinemos un generador de W. Sea $(x,y,z) \in W$, entonces

$$(x,y,z) = (x,-x,-x) = x(1,-1,-1) \Rightarrow W = \langle (1,-1,-1)\rangle.$$

$$U + W = \langle (1,1,2),(1,1,1),(1,-1,-1)\rangle$$

El conjunto $\{(1,1,2),(1,1,1),(1,-1,-1)\}$ es linealmente independiente, por lo tanto es una base de $U+W$ y como $dim(U+W) = 3 \wedge U+W \leqslant \mathbb{R}^3$, se tiene que $U+W = \mathbb{R}^3$.

Para mostrar que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ resta probar que $U \cap W = \{(0,0,0)\}$. Supongamos que $(x,y,z) \in U \cap W$, es decir

$$\begin{array}{rcl}
(x,y,z) \in U & \wedge & (x,y,z) \in W \\
 & \Updownarrow & \\
\exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \alpha(1,1,2) + \beta(1,1,1) & \wedge & \exists \gamma \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \gamma(1,-1,-1) \\
 & \Updownarrow & \\
\alpha(1,1,2) + \beta(1,1,1) & = & \gamma(1,-1,-1) \\
\alpha(1,1,2) + \beta(1,1,1) - \gamma(1,-1,-1) & = & 0 \\
 & \Updownarrow & \\
\left.\begin{array}{rcl} \alpha+\beta-\gamma & = & 0 \\ \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \end{array}\right\} & \Rightarrow & \gamma = 0 \wedge \beta = -\alpha \\
2\alpha+\beta+\gamma \;\; = \;\; 0 & \Rightarrow & 2\alpha+\beta = 0 \Rightarrow 2\alpha - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \\
\therefore (x,y,z) & = & (0,0,0)
\end{array}$$

Finalmente, como $U + W = \mathbb{R}^3$ y $U \cap W = \{(0,0,0)\}$, se concluye que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

3. Encuentre la dimensión de $H \cap L$ donde

$$H = \{ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R}) / 2a - b = 0\} \quad \text{y} \quad L = \langle x^2 + x + 2, x^2 - x + 1 \rangle$$

Desarrollo: $dim(H + L) = dim(H) + \dim(L) - dim(H \cap L)$.

- Claramente, el conjunto $\{x^2 + x + 2, x^2 - x + 1\}$ es l.i (ya que ningún vector es múltiplo escalar del otro), por lo tanto constituye una base de L y por tanto $dim(L) = 2$.
- Para determinar la dimensión de H buscamos una base de este. Sea $ax^2 + bx + c \in H$, es decir,

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax + c = a(x^2 + 2x) + c \cdot 1 \Rightarrow H = \langle x^2 + 2x, 1 \rangle,$$

además el conjunto $\{x^2 + 2x, 1\}$ es l.i., por lo tanto es una base de H y $dim(H) = 2$.
- Tenemos que $H + L = \langle x^2 + 2x, 1, x^2 + x + 2, x^2 - x + 1 \rangle$, a partir del conjunto generador buscamos la base escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_{3+(-1)1} \\ \to \\ f_{4+(-1)1} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_{23} \\ \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{4+(-3)2} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_{4+(5)2} \\ \to \end{array} 0 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\{x^2 + 2x, x + 2, 1\}$ es base de $H + L$ y $dim(H + L) = 3$. Finalmente, se tiene que

$dim(H + L) = dim(H) + \dim(L) - dim(H \cap L) \iff 3 = 2 + 2 - dim(H \cap L)$, de donde

$$dim(H \cap L) = 1.$$

Nota: Otra alternativa para resolver este ejercicio es caracterizar el conjunto L, es decir, escribirlo de la forma

$$L = \{ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R}) / \text{condiciones sobre a, b, c}\}$$

buscar la intersección de H con L, obtener una base de esta y su dimensión.

4. En cada caso, determine las coordenadas del vector dado en la base ordenada respectiva:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ en la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

Desarrollo: Escribimos el vector dado como combinación lineal de los elementos de la base, respetando el orden de esta,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & a+c-2d \\ -a+3b-c & b+4d \end{pmatrix}$$

se origina el sistema

$$\begin{aligned} a+2b &= 2 \\ a+c-2d &= -1 \\ -a+3b-c &= 4 \\ b+4d &= 6 \end{aligned}$$

cuya solución es $a = -\dfrac{10}{7}, b = \dfrac{12}{7}, c = \dfrac{18}{7}, d = \dfrac{15}{14}$. De donde, el vector de coordenadas de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ en la base ordenada dada es

$$\begin{bmatrix} -10/7 \\ 12/7 \\ 18/7 \\ 15/14 \end{bmatrix}$$

b) $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ en la base $\{1, 1+x, x+x^2, x^2+x^3\}$.

Desarrollo: Escribimos el vector dado como combinación lineal de los elementos de la base, respetando el orden de esta,

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 + 5x - 6 &= \alpha \cdot 1 + \beta(1+x) + \gamma(x+x^2) + \delta(x^2+x^3) \\ &= \delta x^3 + (\delta+\gamma)x^2 + (\beta+\gamma)x + \alpha + \beta \end{aligned}$$

lo que da origen al sistema

$$\begin{aligned} \delta &= 2 \\ \delta+\gamma &= -3 \\ \beta+\gamma &= 5 \\ \alpha+\beta &= -6 \end{aligned}$$

cuya solución es $\alpha = -16, \beta = 10, \gamma = -5, \delta = 2$. De donde, el vector de coordenadas del polinomio $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ en la base dada es

$$\begin{bmatrix} -16 \\ 10 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$