UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA

Tutoría N°5+pauta

2° Semestre de 2013

1. Determine si los siguientes conjuntos son l.i o l.d.

a) $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(2,-1,-1),(-1,0,1)\}$

Desarrollo:

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\alpha(1,1,1)+\beta(2,-1,-1)+\gamma(-1,0,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha+2\beta-\gamma & = & 0 \\ \alpha-\beta & = & 0 \\ \alpha-\beta+\gamma & = & 0 \end{array}\right|$$

Resolviendo el sistema, utilizando su matriz asociada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{3+1(-1)}]{f_{2+1(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{3}\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{1+2(-2)}]{f_{3+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_{2+3\left(\frac{1}{3}\right)}]{f_{1+3\left(\frac{1}{3}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{array}\right|$$

$\therefore$ Como el sistema tiene solución trivial se tiene que $\mathcal{A}$ es L.i.

Obs: También se puede saber si el conjunto es L.i. si el determinante de la matriz de coeficiente asociada al sistema es distinto de 0.

b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

Desarrollo:

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{lcl} \alpha-\gamma & = & 0 \\ \alpha+4\beta+3\gamma & = & 0 \\ \alpha+2\beta+\gamma & = & 0 \\ 2\alpha+\beta-\gamma & = & 0 \end{array}\right|$$

Resolviendo el sistema, utilizando su matriz asociada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_{3+1(-1)} \\ f_{4+1(-2)}}]{f_{2+1(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{24}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{4+2(-4)}]{f_{3+2(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $Rg(A) = 2 < 3$(N° de incógnitas)

$$\therefore \text{ El sistema no tiene solución trivial}$$

$$\therefore \mathcal{B} \text{ es L.d.}$$

$c)$ $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

Desarrollo:

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2\alpha + \beta & = & 0 \\ -\alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma & = & 0 \\ -2\alpha - \beta & = & 0 \\ -4\alpha - \beta + 3\gamma & = & 0 \\ 5\alpha + \frac{\beta}{2} - 2\gamma & & \\ 3\alpha + \frac{\beta}{2} - \gamma & = & 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2\alpha + \beta & = & 0 \\ -\alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma & = & 0 \\ -4\alpha - \beta + 3\gamma & = & 0 \\ 3\alpha + \frac{\beta}{2} - \gamma & = & 0 \end{array}\right|$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{2(-1)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_{4+1(-5)} \\ f_{5+1(-3)}}]{\substack{f_{2+1(-2)} \\ f_{3+1(-4)}}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_{5+2(-1)}]{f_{4+2\left(-\frac{3}{2}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{2\left(\frac{1}{2}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{1+2\left(\frac{1}{2}\right)}]{f_{3+2(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{3\left(\frac{1}{4}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_{2+3(-1)}]{f_{1+3\left(\frac{1}{2}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right|$$

$$\therefore \text{ Como el sistema tiene solución trivial se tiene que } \mathcal{C} \text{ es L.i.}$$

d) $\mathcal{D} = \{2x^3 - 3x^2 + x + 2, x^3 - x^2 - 5x + 1, x^3 - x^2 + 6x - 2\}$

Desarrollo:

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\alpha(2x^3 - 3x^2 + x + 2) + \beta(x^3 - x^2 - 5x + 1) + \gamma(x^3 - x^2 + 6x - 2) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{13}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_{3+1(-2)} \\ f_{4+1(-2)}}]{f_{2+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & -16 & 17 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 11 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{3(\frac{1}{11})}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & -16 & 17 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 11 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_{23}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -16 & 17 \\ 0 & 11 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_{3+2(16)} \\ f_{4+2(-11)}}]{f_{1+2(5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_{2+3(1)} \\ f_{4+3(3)}}]{f_{1+3(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c|} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ Como el sistema tiene solución trivial se tiene que $\mathcal{D}$ es L.i.

2. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto l.i. de vectores de un espacio vectorial V. Muestre que el conjunto $\{v_1 - v_2, v_1 + v_3, 2v_1 - v_2 + 3v_3\}$ es l.i.

   Desarrollo:

   Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tales que:

   $$\alpha(v_1 - v_2) + \beta(v_1 + v_3) + \gamma(2v_1 - v_2 + 3v_3) = 0_V \Leftrightarrow v_1(\alpha + \beta + 2\gamma) + v_2(-\alpha - \gamma) + v_3(\beta + 3\gamma) = 0_V$$

   Como v_1, v_2, v_3 son L.i. se tiene que:

   $$\begin{array}{rcl|} \alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 \\ -\alpha - \gamma & = & 0 \\ \beta + 3\gamma & = & 0 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c|} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \hline \end{array}$$

   $\therefore B$ es L.i.

3. Sea $B = \{(1,2,3), (-1,-2,3), \left(1, \frac{1}{2}, 8\right)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

a) ¿Es el vector $(-1,-2,3)$ combinación lineal de los vectores de B?

Desarrollo:

Para que $(-1,-2,3)$ sea combinación lineal de los vectores de B se debe cumplir que existan tres escalares α, β, γ, tales que:

$$\alpha(1,2,3) + \beta(-1,-2,3) + \gamma\left(1, \frac{1}{2}, 8\right) = (-1,-2,3)$$

Con $\alpha = 0, \beta = 1$ y $\gamma = 0$ se cumple la igualdad, por lo tanto, el vector $(-1,-2,3)$ es combinación lineal de los vectores de B

b) ¿Es B un conjunto L.i?

Desarrollo:

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\alpha(1,2,3) + \beta(-1,-2,3) + \gamma\left(1, \frac{1}{2}, 3\right) = (0,0,0)$$

La matriz de coeficientes de este sistema homogéneo que se obtiene de la igualdad anterior es la misma del sistema obtenido en $a)$ por lo que se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{r|} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \hline \end{array}$$

Como el sistema tiene solución trivial B es L.i.

4. Hallar una base de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales:

   a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$.

   Desarrollo:

$$\begin{array}{rcl} W_1 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\} \\ \Leftrightarrow W_1 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y + 2z\} \\ \Leftrightarrow W_1 & = & \{(-y + 2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} \\ \Leftrightarrow W_1 & = & \{y(-1,1,0) + z(2,0,1) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

$$\therefore W_1 = \langle(-1,1,0),(2,0,1)\rangle$$

   El conjunto $B_1 = \{(-1,1,0),(2,0,1)\}$ es L.i, ya que sus vectores no son múltiplos. Además genera a W_1.

$$\therefore B_1 \text{ es una base de } W_1.$$

   b) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$.

   Desarrollo:

$$\begin{array}{rcl} W_2 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} \\ \Leftrightarrow W_2 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \\ \Leftrightarrow W_2 & = & \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \\ \Leftrightarrow W_2 & = & \{x(1,1) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

$$\therefore W_2 = \langle(1,1)\rangle$$

   El conjunto $B_2 = \{(1,1)\}$ es L.i, ya que contiene un solo vector, distinto del nulo. Además genera a W_2.

$$\therefore B_2 \text{ es una base de } W_2.$$

   c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0, x + y = 0\}$.

   Desarrollo:

$$\begin{array}{rcl} W_3 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0, x + y = 0\} \\ \Leftrightarrow W_3 & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x}{2}, y = -x\right\} \\ \Leftrightarrow W_3 & = & \left\{\left(x, -x, \frac{x}{2}\right) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\right\} \\ \Leftrightarrow W_3 & = & \left\{x\left(1, -1, \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\right\} \end{array}$$

$$\therefore W_3 = \left\langle\left(-1, 1, \frac{1}{2}\right)\right\rangle$$

   El conjunto $B_3 = \left\{\left(-1, 1, \frac{1}{2}\right)\right\}$ es L.i, ya que sus vectores no son múltiplos. Además genera a W_3.

$$\therefore B_3 \text{ es una base de } W_3.$$

5. Caracterizar el subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ generado por el conjunto $\mathcal{F} = \{(1,2,3), (-1,1,-1), (2,1,4)\}$.

Desarrollo:

Sean $(x,y,z) \in W, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\alpha(1,2,3) + \beta(-1,1,-1) + \gamma(2,1,4) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha - \beta + 2\gamma & = & x \\ 2\alpha + \beta + \gamma & = & y \\ 3\alpha - \beta + 4\gamma & = & z \end{array}\right|$$

Como F genera a W, el sistema anterior debe tener solución. Escalonando la matriz asociada al sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 1 & y \\ 3 & -1 & 4 & z \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+1(-3)}]{f_{2+1(-2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 3 & -3 & -2x+y \\ 0 & 2 & -2 & -3x+z \end{array}\right] \xrightarrow{f_{2\left(\frac{1}{3}\right)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-2x+y}{3} \\ 0 & 2 & -2 & -3x+z \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_{3+2(-2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-2x+y}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-5x-2y+3z}{3} \end{array}\right]$$

El sistema tendrá solución si:

$$\frac{-5x-2y+3z}{3} = 0 \Leftrightarrow -5x - 2y + 3z = 0$$

$$\therefore W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 5x + 2y - 3z = 0\}$$