UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

Guía 1 de Cálculo I

BAIN 037

Ejercicio 1 *Determine la derivada de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

b) $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 5)^5$

c) $f(x) = \frac{(2x+3)^3}{(3x^2-2x+6)^2}$

d) $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{\sqrt[3]{3x^2-2x+5}}$

e) $f(x) = \sin^3(x^3)$

f) $f(x) = \sin(3x^2 - x)$

g) $f(x) = (3x^4 + x + 2) \cdot \sin(x^2 + 4x - 1)$

h) $f(x) = x \cdot e^{2x+1}$

i) $f(x) = e^{(2x^4-4x^2+7x+4)^5}$

j) $y(x) = \sec(\ln(x^2 + x) + \cos x)$

k) $u(x) = e^{\sqrt{x}+\ln x}$

l) $t(x) = \sqrt[6]{x^3 \cos x + x^5 + 8}$

Ejercicio 2 *La Ley de enfriamiento de Newton dice: "La temperatura de un cuerpo cambia a una velocidad que es proporcional a la diferencia de las temperaturas entre el medio externo y el cuerpo". Esto da paso a la siguiente ecuacion diferencial:*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

donde T es la temperatura del cuerpo, T_m es la temperatura del medio externo, t es el tiempo y k es la constante de proporcionalidad.

Verifique que $T = T_m + ce^{-kt}$ es solución de la ecuacion diferencial donde c es una constante.

Ejercicio 3 *En la relación* $\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \pi - \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ *se define implícitamente y como función de x. Muestre que*

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Ejercicio 4 *En cada caso, determine y', donde y está definida implícitamete como función de x:*

a) $x^2 - 2xy = 5$

b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a \in \mathbb{R}$.

c) $2x^2 - 3xy - 4y^2 = 5$

Ejercicio 5 *En cada caso determinar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto P.*

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$, $P(1, 3)$.

b) $y^2 = 4ax$, $P(a, 2a)$ *con* $a > 0$.

c) $x - y = \sqrt{x+y}$, $P(3, 1)$.

Ejercicio 6 *Dos carreteras se cruzan formando un ángulo de 45°. Dos automóviles A y B avanzan, por rutas distintas, con una rapidez de $80Km/hr$ y $60Km/hr$, respectivamente. Sabiendo que en el instante t_0 ambos distan $100Km$ del cruce, determine la rapidez con que se separan uno del otro en el instante t_0.* **Indicación:** *Analice cada uno de los casos posibles.*

Ejercicio 7 *Derive las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \arcsin(x^2 + 2)$

b) $f(x) = \arccos(3x^2 - 4x + 1)$

c) $f(x) = \arctan(x^3 + 5)$

d) $f(x) = (2x + \ln x)^x$

e) $p(x) = (3x + 2)^{\ln x}$

f) $a(x) = 2^{x^2 + \cos x}$

Ejercicio 8 *Calcule, si existen:*

a) $(f^{-1})'(4)$ *si* $f(x) = x^5 + x^2 + 2$.

b) f^{-1} *y* $(f^{-1})'(3)$ *si* $f(x) = 3\ln(1 + x)$ *para* $x > -1$.

c) $(f^{-1})'(3)$ *si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y se sabe que* $f(1) = 3$ *y* $f'(x) = e^{x(1+\cos^2 \pi x)}$.

Ejercicio 9 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f'(x) = e^x(1 + \cos^2 \pi x)$ *y* $f(1) = 3$. *Muestre que*

$$\frac{2a(f^{-1})'(3) + f^{-1}(3)}{2a^2(f^{-1})'(3) - \dfrac{1}{2(f^{-1})'(3)}} = \frac{1}{a - e}.$$

Ejercicio 10 *Sea* f *una función derivable cuya inversa es* g, *definida en* $\mathbb{R}$. *Determine* $h'(2)$ *si* $h(x) = g(g(x^3))$, $f(2) = 8$, $f(5) = 2$, $f'(2) = 4$ *y* $f'(5) = -1$.

Ejercicio 11 *Sea* f *una función derivable en* $\mathbb{R}$ *tal que* $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{3}$. *Determine la ecuación de la recta tangente a* $y = f(x)$ *en el punto* $(1, 2)$.

Ejercicio 12 *Sea* f *una función derivable tal que* $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *La ecuación de la recta tangente a* $y = f(x)$ *en el punto* $(2, 3)$ *es* $y = 4x - 5$. *Determine la ecuación de la recta tangente a* $y = f^{-1}(x)$ *en el punto de abscisa 3.*

Ejercicio 13 *Sea* f *una función derivable e invertible, definida en* $\mathbb{R}$. *Si* $f(2) = 1$ *y* $\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{3}$, *calcule* $h'(1)$ *donde* $h(x) = f(x \cdot f^{-1}(x))$.

Ejercicio 14 *Para cada una de las siguientes curvas definidas paramétricamente, determine* $\dfrac{dy}{dx}$.

a) $\gamma(t) = \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos t \\ y(t) & = & \operatorname{sen} t \end{array} \right. , \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

b) $\delta(u) = \left\{ \begin{array}{lcl} x(u) & = & \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2} \\ y(u) & = & \dfrac{2u}{1 + u^2} \end{array} \right. , \quad u \in [-1, 1].$

c) $\omega(t) = \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & t^3 + 1 \\ y(t) & = & t^3 - 1 \end{array} \right. , \quad t \in [-2, 2].$

d) $\tau(t) = \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & \sqrt{t^2 - 2t + 1} \end{array} \right. , t \in [0, 4].$

Ejercicio 15 *Encuentre, indicado los puntos de tangencia, la ecuación de la recta tangente horizontal a la curva definida por:*

$$\gamma(t) = \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & 4t^2 - 4t \\ y(t) & = & 1 - 4t^2 \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 16 *Dada la curva definida por:*

$$\omega(t) = \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2\sin t \\ y & = & 5\cos t \end{array} \right. \; ; \; t \in [0, 2\pi].$$

determine:

a) *La recta tangente a esta curva en el punto donde* $t = \dfrac{\pi}{3}$.

b) *El(los) punto(s) donde la recta tangente sea horizontal.*

Ejercicio 17 *Para la curva, llamada lemniscata, definida por*

$$L(t) = \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \cos t \\ y & = & \sin(2t) \end{array} \right. \; ; \; t \in [0, \pi].$$

determine:

a) *El(los) punto(s) donde la recta tangente es paralela al eje* $\mathcal{X}$.

b) *Los valores del parámetro* t *para los cuales la recta tangente es vertical.*