RESPUESTAS GUIA Nº4

1. Son lineales: a), b), d)
2. a) $Ker\ T = \{(x,y,z,w)/2x - y + z = 0, y + 3z - w = 0\} = \langle(1,0,-2,-6),(0,1,1,4)\rangle;\ Im\ T = \mathbb{R}^2$

   b) $Ker\ T = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}/a + b - 2c = 0, -b + 3c = 0, a + c = 0\right\} = \left\langle\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\rangle;$

   $Im\ T = \langle x^2 + 1, x^2 - x\rangle$

3. a) $T(x,y,z) = (4x - 6y - 2z,\ 4x - 8y - 3z.\ 4x - 6y - 2z, 2x - 3y - z\ )$

   b) $Ker\ T = \langle(1,2,-4)\rangle;\ n(T) = 1;\quad Im\ T = \langle(2,2,2,1),(0,1,0,0)\rangle,\ r(T) = 2$

6. a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $P \cdot Q = I_3 \quad \therefore Q = P^{-1}$ c) $x = 2f_1 + 0{\cdot}f_2 + (-1)f_3$

7. a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

8. a) $T(x,y,z) = \left(x - \frac{y}{2}, -x - 2y, 2x + \frac{3y}{2}, -x + \frac{y}{2}\right)$ c) $\begin{bmatrix} 8/5 & -6/5 \\ 1/5 & -7/5 \end{bmatrix}$

9. a) c I_n b) $[T]_\beta = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}; [T]_\beta = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix}; [T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}$

10. Valores propios: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 6$

    $W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x + 3y = 0\}$ Base de W_2: $\{(-3,1)\}$

    $W_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x - y = 0\}$ Base de W_6: $\{(1,1)\}$

11. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$ No tiene solución real, por lo tanto *A* no tiene valores propios.

12. a) Para *A*: Valores propios: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

    Espacios propios: $W_1 = \langle(1,1,1)\rangle,\ W_{-1} = \langle(1,0,0),(0,1,2)\rangle$

    Para *B*: Valores propios: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$

    Espacios propios: $W_1 = \langle(-1,1,2)\rangle,\ W_2 = \langle(1,1,1)\rangle$

    b) *A* es diagonalizable pues $B = \{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,2)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ formado por vectores propios de *A*.

    B no es diagonalizable pues no existe base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores propios de *B*, sólo existen 2 vectores propios L.I., ya que cada espacio propio tiene dimensión 1.

14. a) $D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$ asi $e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} d_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{d_n} \end{bmatrix}$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} PD^k P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k \right) P^{-1} = P \cdot e^D \cdot P^{-1}$$

b) Valores propios de A: $-2, 1, 4$ Vectores propios asociados: $(1,-1,1), (1,0,1), (1,-2,0)$, por lo tanto A es diagonalizable pues existe base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ Se cumple que: $P^{-1}AP = D$ o sea: $A = PDP^{-1}$

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2} + 2e + e^4 & -e^{-2} + e & 2e^{-2} - e - e^4 \\ 2e^{-2} - 2e^4 & e^{-2} & -2e^{-2} + 2e^4 \\ -2e^{-2} + 2e & -e^{-2} + e & 2e^{-2} - e \end{bmatrix}$$

15. $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6$ Valores propios: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

$Tr(A) = -3 + 2 + 5 = 4$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 + 2 + 3 = 4$

$\det(A) = -6$; $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -6$