Universidad Austral de Chile
Facultad de Ciencias de la Ingeniería
Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería

PAUTA CONTROL II – BAIN037 – Cálculo I para Ingeniería

30 – 09 – 2010

Pregunta 1(2.0 ptos)

Determine cada uno de los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}$

***Solución* :**

Si evaluamos el siguiente límite se tiene que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}$ existe una indeterminación de la forma $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Por lo tanto, es aplicable la regla de L´hopital, luego se tiene que:

$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f´(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $g(x)=1-e^{2\sqrt{x}} \Rightarrow g´(x)=\dfrac{-e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g´(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{-e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2e^{2\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2}$$

b) Si $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$. Calcular $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

Solución:

i) Se tiene que si $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ entonces $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$

ii) Por otro lado $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ presenta una indeterminación del tipo $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ por lo cual podemos aplicar la regla de L´hopital, luego:

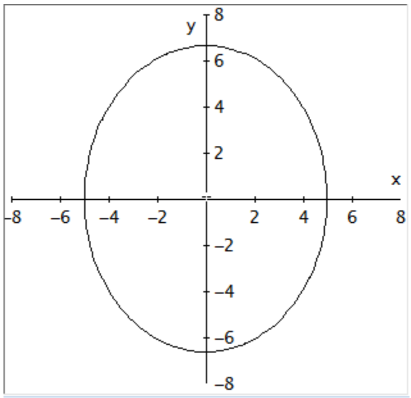
$f(x)=\ln(x) \Rightarrow f´(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x)=\sqrt{x} \Rightarrow g´(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Así se tiene que $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{f´(x)}{g´(x)} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = 2\cdot \lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Pregunta 2 (2.0 ptos)

Una partícula se mueve siguiendo la elipse de ecuación $16x^2 + 9y^2 = 400$ en sentido antihorario.¿En qué punto(s) de la elipse la ***ordenada decrece con la misma rapidez que la abscisa aumenta***?

Solución:



Se quiere conocer en qué punto o puntos de la elipse la ordenada y decrece a la misma razón con que aumenta la abscisa x, es decir, donde ocurre que $\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt}$, luego, derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$16 \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 9 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$$16x \cdot \frac{dx}{dt} + 9y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

Pero, como se sabe, queremos conocer donde $\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt}$, reemplazando

$$-16x \cdot \frac{dy}{dt} + 9y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt}(9y - 16x) = 0 \qquad luego \ \frac{dy}{dt} \neq 0 \, entonces$$

$$9y - 16x = 0$$

$$y = \frac{16}{9}x$$

Finalmente reemplazando en la ecuación de la elipse se tiene:

$$16x^2 + 9\left(\frac{16}{9}x\right)^2 = 400$$

$$16x^2 + 9 \cdot \frac{256}{81}x^2 = 400$$

$$\frac{144x^2 + 256x^2}{9} = 400$$

$$x^2 = \frac{400 \cdot 9}{400}$$

$$x^2 = 9$$

$$|x| = 3 \ \ pero \ se \ descarta \ la \ solución \ x = 3 \ \ por \ no \ cumplir \ con \ la \ condición \frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt}$$

$$luego \ x = -3 \ \ e \ \ y = -\frac{16}{3}$$

Por lo tanto, el único punto de la elipse que satisface la condición está en el tercer cuadrante y corresponde a

$$\left(-3, -\frac{16}{3}\right)$$

Pregunta 3 (2.0 ptos)

Considere la función $f(x)=e^{-x}-x$ en el intervalo $[0,1]$. Encuentre el valor de c cuya existencia asegura el TVM.

Solución:

a) f es continua en $[0,1]$

b) f es diferenciable en $(0,1)$

Por lo tanto, por el TVM existe $c\epsilon(0,1)$ tal que :

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)=e^{-1}-1-1$$

Pero $f'(x)=-e^{-x}-1$, $f'(c)=-e^{-c}-1$

Luego:

$$f'(c)=f(1)-f(0)$$
$$-e^{-c}-1=\frac{1}{e}-1-1$$
$$-e^{-c}=\frac{1}{e}-1$$
$$e^{-c}=\frac{e-1}{e}$$
$$-c=\ln\left(\frac{e-1}{e}\right)$$
$$c=ln\left[\left(\frac{e-1}{e}\right)^{-1}\right]$$
$$c=ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$$
$$c=1-\ln(e-1)$$

Por lo tanto el valor de c cuya existencia asegura el TVM corresponde a: $c=1-\ln(e-1)$