UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 Álgebra Lineal para Ingeniería
Pauta Prueba Parcial 3
Martes 17 de Diciembre de 2013

1.- Dada la siguiente transformación lineal

$$\begin{array}{rrcl} T : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, z, -y+z) \end{array}$$

i) Pruebe que T es invertible

ii) Explicite $T^{-1}(a,b,c)$

Solución.

i) $\ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 0 \\ z & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \end{array}\right|$$

resolviendo el sistema, tenemos que $x=0, y=0, z=0$, entonces $\ker(T) = \{(0,0,0)\}$
$\therefore T$ es inyectiva.

$$\begin{array}{rcl} Im(T) & = & = \langle T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1) \rangle \\ & = & \langle (2,0,0), (-1,0,1), (0,1,1) \rangle \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $r(A) = 3$ =número de elementos, por lo tanto $B = \{(2,0,0), (-1,0,1), (0,1,1)\}$ es base de $Im(T)$. Así $Im(T) = \mathbb{R}^3$ y entonces T es sobreyectiva. Como T es inyectiva y sobreyectiva, entonces T es invertible.

ii) $T(x,y,z) = (a,b,c)$, tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y & = & a \\ z & = & b \\ -y+z & = & c \end{array}\right|$$

La solución del sistema es

$$\left.\begin{array}{rcr} x & = & \frac{a+b-c}{2} \\ y & = & b-c \\ z & = & b \end{array}\right|$$

por lo tanto,

$$T^{-1}(a,b,c) = \left(\frac{a+b-c}{2}, b-c, b \right)$$

Otra manera de resolver.

i) La matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, T es invertible si $[T]_C$ es una matriz invertible, en efecto, $\det([T]_C) = 2 \neq 0$.

ii) Para calcular $T^{-1}(a,b,c)$, usamos lo siguiente

$$[T^{-1}(a,b,c)]_C = [T^{-1}]_C[(a,b,c)]_C$$

pero como

$$[T^{-1}]_C = ([T]_C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $[(a,b,c)]_C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ entonces

$$[T^{-1}(a,b,c)]_C = [T^{-1}]_C[(a,b,c)]_C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b-c}{2} \\ b-c \\ b \end{pmatrix}$$

Así,

$$T^{-1}(a,b,c) = \left(\frac{a+b-c}{2}, b-c, b\right).$$

2.- Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{rcrcl} T & : & P_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & P_2(\mathbb{R}) \\ & & p(x) & \longmapsto & (x^2-1)p(1)+(x+1)p(0) \end{array}$$

Hallar $[T]_B^{B'}$ donde $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ base de $P_3(\mathbb{R})$ y $B' = \{1, x, x^2\}$ base canónica de $P_2(\mathbb{R})$.

Solución.

La imagen de $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ es $T(p(x)) = -b - c - d + ax + (a + b + c + d)x^2$ Para calcular la matriz asociada evaluamos los vectores de la base B y los escribimos como combinación lineal de la base B', es decir,

$$\begin{array}{lcl} T(1) & = & x + x^2 \\ T(1+x) & = & -1 + x + 2x^2 \\ T(1+x+x^2) & = & -2 + x + 3x^2 \\ T(1+x+x^2+x^3) & = & -3 + x + 4x^2 \end{array}$$

como B' es la base canónica, entonces,

$$[T]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

i) Encuentre los valores propios de A.

ii) Encuentre los espacios propios de A.

iii) Determine si A es diagonalizable, justifique adecuadamente. En caso afirmativo encuentre la matriz P invertible que diagonaliza a A y la matriz diagonal D similar a A.

Solución.

i) El polinomio caracterísitico de A es

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = 4$ con multiplicidad 1 y $\lambda_2 = -2$ con multiplicidad 2

ii) Calculamos los espacios propios.

$$V_4 = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \langle (1,1,1) \rangle$$

$$V_{-2} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle$$

iii) es diagonalizable ya que $B = \{(1,1,1), (-1,1,0), (-1,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A. Otra manera de justificar es la dimensión de cada espacio propio coincide con su dimensión, en este caso,

$$\dim(V_4) = 1 := \text{multiplicidad del valor propio } 4$$

$$\dim(V_{-2}) = 2 := \text{multiplicidad del valor propio } -2$$

La matriz P es la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz D es

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$