UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA
Prueba Parcial III

Martes 6 de Marzo de 2012

Alumno(a):...Carrera..........Grupo.........

- Debe responder **una pregunta por hoja**.
- Conteste en forma ordenada identificando la pregunta e item que corresponde.
- No se permite el uso de CALCULADORA.
- Cada solución debe llevar desarrollo y respuesta.
- Debe **justificar** adecuadamente cada una de sus respuesta.
- Tiempo: 90 minutos.

1.-(1,5 pts.) ....
2.-(1,5 pts.) ....
3.-(3,0 pts.) ....

1. Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, $\mathcal{B} = \{(0,1),(1,1)\}$ y $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, y $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Determine $T(1,2)$.

Respuesta:

Utilizaremos la propiedad $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{C}}$

Forma 1: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(1,2) = \alpha(0,1) + \beta(1,1) \Leftrightarrow \begin{array}{|rcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 1 \end{array}, \quad \therefore [(1,2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego $$[T(1,2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow T(1,2) = 3(1,0,0) + 1(1,1,0) + (-1)(0,1,1) = (4,0,-1)$$

$$\therefore T(1,2) = (4,0,-1)$$

Forma 2: Sean $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(x,y) = \alpha(0,1) + \beta(1,1) \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \alpha & = & y - x \\ \beta & = & x \end{array}$$

$$\therefore [(x,y)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y - x \\ x \end{bmatrix}$$

Luego $$[T(x,y)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y - x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x \\ x - y \end{bmatrix}$$

Así $T(x,y) = (x+y)(1,0,0) + x(1,1,0) + (x-y)(0,1,1) = (2x+y, 2x-y, x-y)$

Luego $T(1,2) = (4,0,-1)$

2. Sea la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & P_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & a+bt+ct^2 & \rightsquigarrow & (-b+3c, 2b+2c, 2b+2c+2a) \end{array}$$

Considerando las bases $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ y $\mathcal{C} = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, calcular $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Respuesta:

$T(1) = (0,0,2) = 2(0,0,1) + 0(0,1,1) + 0(1,1,1)$
$T(t) = (-1,2,2) = 0(0,0,1) + 3(0,1,1) + (-1)(1,1,1)$
$T(t^2) = (3,2,2) = 0(0,0,1) + (-1)(0,1,1) + 3(1,1,1)$

$$\therefore [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

   a) Determine el polinomio característico de A.

   Respuesta:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= det(A - \lambda I_3) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(3-\lambda)(3-\lambda) - 1] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\ &= (\lambda-2)^2(\lambda-4) \end{aligned}$$

$$\therefore p_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)$$

   b) Determine los valores propios de A.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda-2)^2(\lambda-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda = 2 &\vee \lambda = 4 \end{aligned}$$

   Los valores propios de A son 2 y 4

c) Determine los espacios propios correspondientes a cada valor propio, indicando la dimensión de cada uno.

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; y - z = 0, x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \;/\; x, y \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

$$\therefore W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad dim(W_2) = 2$$

$$
\begin{aligned}
W_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; x = 0, y = -z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} \;/\; z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

$$\therefore W_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad dim(W_4) = 1$$

d) Determine si A es diagonalizable, indicando la matriz P que diagonaliza y la matriz diagonal D.

Respuesta:

La matriz A es diagonalizable ya que posee tres vectores propios linealmente independientes y cumple con el teorema 1 del apunte 3.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$