UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA

Tutoría N°4+pauta

Septiembre de 2013

1. Sea V el primer cuadrante en el plano XY, esto es:

$$V = \left\{(x,y) \subseteq \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\right\}$$

   a) Si u, v están en V , ¿está $u+v$ en V ?, ¿Por qué?
   Desarrollo:
   Sean $u=(x,y), v=(a,b) \in V \Rightarrow x \geq 0, y \geq 0, a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow x+a \geq 0 \wedge y+b \geq 0$
   $\Rightarrow u+v=(x+a, y+b) \in V$

   b) Encuentre un vector específico u en V y un escalar específico c tal que $c \cdot u$ no esté en V. (Esto basta para demostrar que V no es un espacio vectorial).
   Desarrollo:
   Sean $v=(2,3) \in V, c=-1$.
   $(-1) \cdot v = (-2,-3) \notin V$.

2. Sea $B = \left\{(1,2,3), (-1,-2,3), \left(1, \dfrac{1}{2}, 3\right)\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   a) Es el vector $\left(1, \dfrac{3}{5}, 2\right)$ combinación lineal de los vectores de B?
   Desarrollo:
   Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\left(1, \frac{3}{5}, 2\right) = \alpha(1,2,3) + \beta(-1,-2,3) + \gamma\left(1, \frac{1}{2}, 3\right)$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha - \beta + \gamma & = & 1 \\ 2\alpha - 2\beta + \frac{1}{2}\gamma & = & \frac{3}{5} \\ 3\alpha + 3\beta + 3\gamma & = & 2 \end{array}\right|$$

   El vector $\left(1, \dfrac{3}{5}, 2\right)$ será combinación lineal de los vectores de B si el sistema anterior tiene solución.
   En este caso, este sistema tiene única solución, luego:

$$\left(1, \frac{3}{5}, 2\right) = -\frac{1}{10} \cdot (1,2,3) + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-1,-2,3) + \frac{14}{15} \cdot \left(1, \frac{1}{2}, 3\right)$$

$$\therefore \text{ El vector } \left(1, \frac{3}{5}, 2\right) \text{ es combinación lineal de los vectores de } B$$

b) Es B un conjunto l.i?
Desarrollo:
Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\alpha(1,2,3) + \beta(-1,-2,3) + \gamma\left(1, \frac{1}{2}, 3\right) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \alpha - \beta + \gamma & = & 0 \\ 2\alpha - 2\beta + \frac{1}{2}\gamma & = & 0 \\ 3\alpha + 3\beta + 3\gamma & = & 0 \end{array}\right|$$

El conjunto B será L.i. si el sistema anterior tiene única solución.
Al resolver dicho sistema se tiene que tiene única solución.

$$\therefore B \text{ es L.i.}$$

3. Pruebe que $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x = y = -2z\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y encuentre un conjunto que lo genere y una base.
Desarrollo:
Probamos que $W \leq \mathbb{R}^3$

- $W \subseteq \mathbb{R}^3$
- $(0,0,0) \in W$, ya que $3 \cdot 0 = 0 = -2 \cdot 0$. $\therefore W \neq \emptyset$
- Sean $(x,y,z), (a,b,c) \in W \Rightarrow \left.\begin{array}{ccccc} 3x & = & y & = & -2z \\ 3a & = & b & = & -2c \end{array}\right|$

  Si sumamos las igualdades anteriores se tiene:

  $$3x + 3a = y + b = -2z - 2c \Leftrightarrow 3(x+a) = y + b = -2(z+c)$$

  Luego $(x,y,z) + (a,b,c) \in W$
- Sean $\alpha \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in W \Rightarrow 3x = y = -2z$

  $$3x = y = -2z / \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha \cdot 3x = \alpha \cdot y = \alpha \cdot (-2z) \Leftrightarrow 3\alpha x = \alpha y = (-2)\alpha z$$

  Luego $\alpha \cdot (x,y,z) \in W$

  $$\therefore \text{ De lo anterior se tiene que } W \leq \mathbb{R}^3$$

  Ahora buscaremos un generador y una base de W.

  $$\begin{array}{rcl} W & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x = y = -2z\} \\ \Leftrightarrow W & = & \left\{\left(\frac{y}{3}, y, -\frac{y}{2}\right) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\right\} \\ \Leftrightarrow W & = & \left\{\left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{2}\right) \cdot y \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\right\} \\ \Leftrightarrow W & = & \left\langle\left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{2}\right)\right\rangle \end{array}$$

  $\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ es L.i. ya que contiene un solo vector, distinto del nulo y como además genera a W se tiene que:

  $$\mathcal{B} \text{ es una base de } W$$

4. Considere el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 5y - 2z = 0\}$$

a) Demuestre que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
Desarrollo:

- $W \subseteq \mathbb{R}^3$
- $(0, 0, 0) \in W$, ya que $3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$, $\therefore W \neq \emptyset$.
- Sean $\alpha \in \mathbb{R}, (x, y, z), (a, b, c) \in W \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 3x - 5y - 2z & = & 0 \\ 3a - 5b - 2c & = & 0 \end{array}\right|$

  Luego: $\alpha(x, y, z) + (a, b, c) = (\alpha x + a, \alpha y + b, \alpha z + c)$.
  Se cumple que:

$$\begin{array}{rcl} 3(\alpha x + a) - 5(\alpha y + b) - 2(\alpha z + c) & = & 3\alpha x + 3a - 5\alpha y - 5b - 2\alpha z - 2c \\ & = & \alpha(3x - 5y - 2z) + (3a - 5b - 2c) \\ & = & \alpha \cdot 0 + 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

$$\therefore \alpha(x, y, z) + (a, b, c) \in W$$

$$\therefore W \leq \mathbb{R}^3$$

b) Encuentre una base y la dimensión de W.
Desarrollo:

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 5y - 2z = 0\} \\ \Leftrightarrow W & = & \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{5}{3}y + \frac{2}{3}z\right\} \\ \Leftrightarrow W & = & \left\{\left(\frac{5}{3}y + \frac{2}{3}z, y, z\right) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\right\} \\ \Leftrightarrow W & = & \left\{y\left(\frac{5}{3}, 1, 0\right) + z\left(\frac{2}{3}, 0, 1\right) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\right\} \\ \Leftrightarrow W & = & \left\langle\left(\frac{5}{3}, 1, 0\right), \left(\frac{2}{3}, 0, 1\right)\right\rangle \end{array}$$

Sea $\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{5}{3}, 1, 0\right), \left(\frac{2}{3}, 0, 1\right)\right\}$. Es L.i, ya que sus vectores no son múltiplos y como además genera a W se tiene que:

$$\mathcal{B} \text{ es una base de } W \text{ y } dim(W) = 2.$$