Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

La Parábola

Traslación de ejes

Un sistema coordenado rectangular $O'X'Y'$ obtenido del sistema OXY es una *traslación de ejes*, si los ejes X', Y' son paralelos y con la misma dirección que los ejes respectivamente.

Sea $O'(h,k)$ (O' tiene coordenadas (h,k) respecto del sistema OXY).
Un punto P del plano tiene coordenadas con respecto a ambos sistemas.

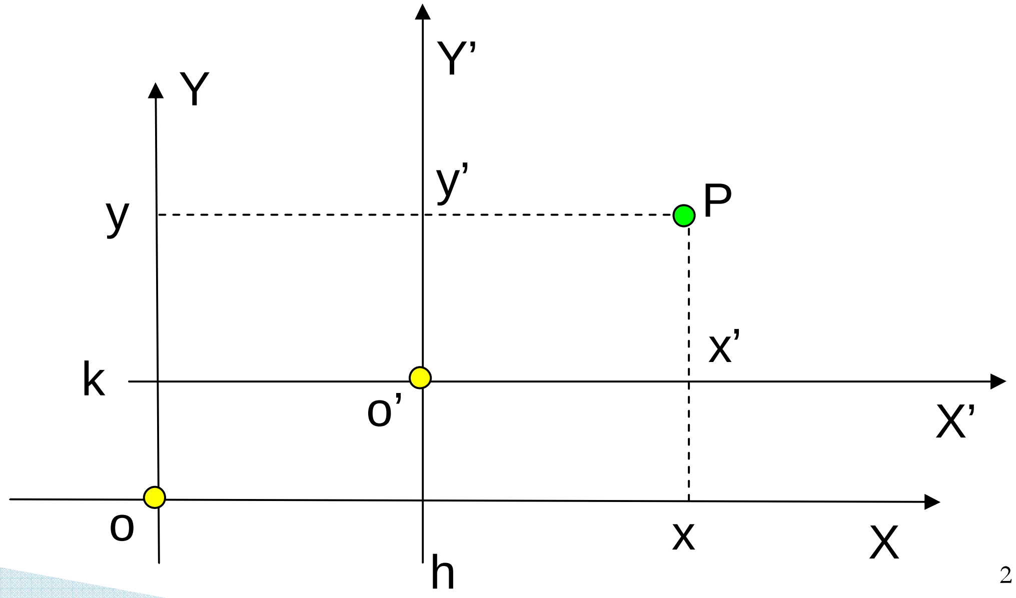
Supongamos que: P tiene coordenadas X,Y con respecto al sistema OXY
P tiene coordenadas X',Y' con respecto al sistema O'X'Y'

Entonces, se obtienen las llamadas *ecuaciones de traslación*:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned}\right\}$$

o también

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned}\right\}$$



Ejemplo

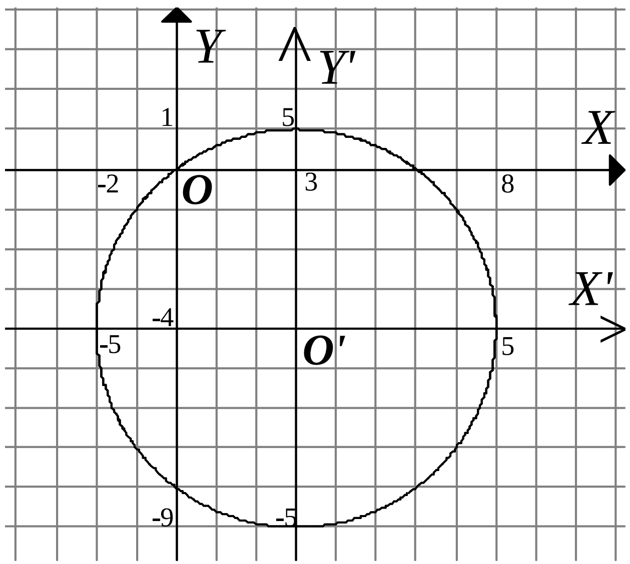
a) Haga el gráfico de la ecuación $x^2+y^2-6x+8y=0$ usando una traslación conveniente de ejes.

Resolución

La ecuación también se escribe en la forma $(x-3)^2+(y+4)^4=25$

Haciendo $x'=x-3,\ y'=y+4$ se obtiene la ecuación $x'^2+y'^2=25$

Así, en el sistema $O'X'Y'$ el gráfico es una circunferencia de centro O' y radio , donde las coordenadas de O' respecto del sistema OXY son $(3,-4)$:



Ejemplo

b) Elimine el término constante en la ecuación $3y^2 + 2x + 6y - 1 = 0$

Resolución

$3(y+1)^2 + 2(x-2) = 0$ y $x' = x - 2,\ y' = y + 1 \Rightarrow 3y'^2 + 2x' = 0$

Parábola como L.G.

Una *parábola* es el lugar geométrico de todos los puntos del plano, tales que equidistan de un punto y de una recta dados.

En una parábola llamamos:

Foco: el punto dado fijo
Directriz: la recta dada fija

Eje: recta que pasa por el foco perpendicular a la directriz

Vértice: punto de la parábola sobre el eje de ella

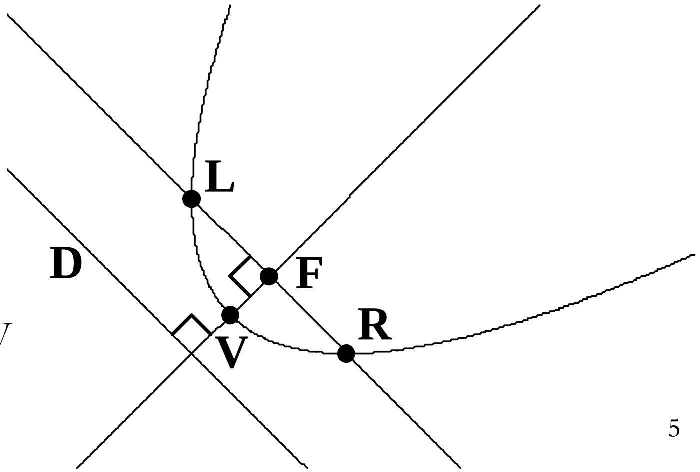
Lado recto: segmento de extremos puntos de la parábola, perpendicular al eje y que pasa por el foco

Cuerda: segmento de extremos puntos de la parábola

Cuerda focal: cuerda que pasa por el foco

Gráficamente se tiene:

Foco:	F
Directriz	D
Vértice	V
Eje	Recta por F y V
Lado Recto	$\overline{LR}$



Ecuaciones de la Parábola

Parábola de vértice el origen $V(0,0)$, foco $F(p,0)$ y directriz $x = -p$

$P(x,y)$ está en la parábola

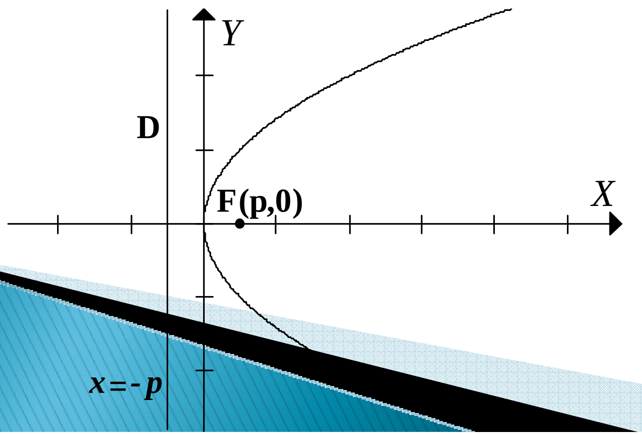
$$\Leftrightarrow d(P,F) = d(P,D)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

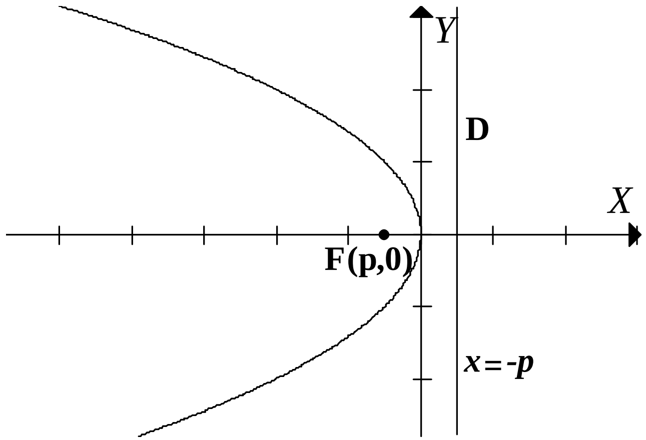
$$\Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 4px$$

El gráfico para el caso $p > 0$ es



El gráfico para el caso $p < 0$ es

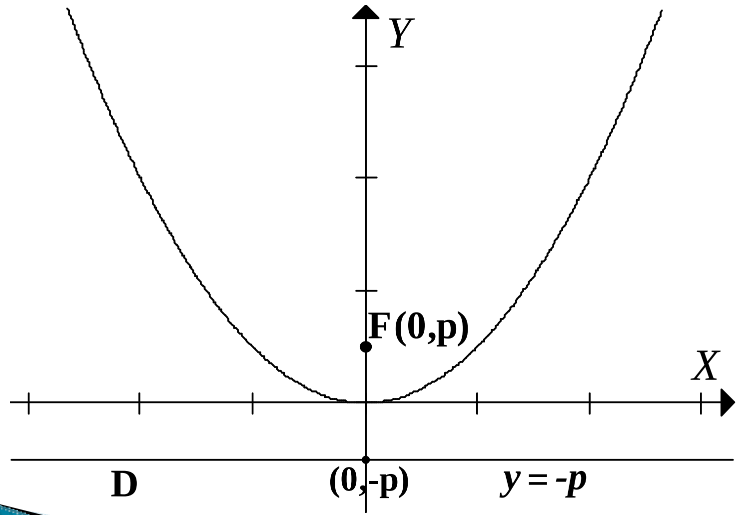


Ecuaciones de la Parábola

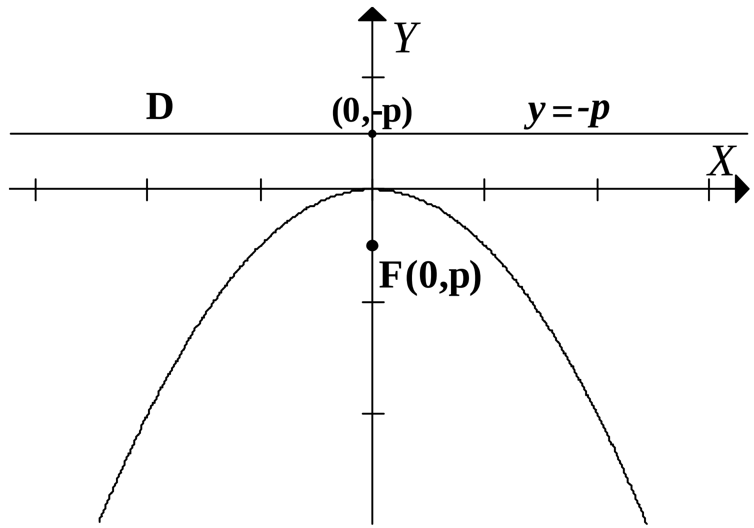
Parábola de vértice el origen $V(0,0)$, foco $F(0,p)$ y directriz $x = p$

Análogamente se obtiene $x^2 = 4py$

El gráfico para el caso $p > 0$ es



El gráfico para el caso $p < 0$ es



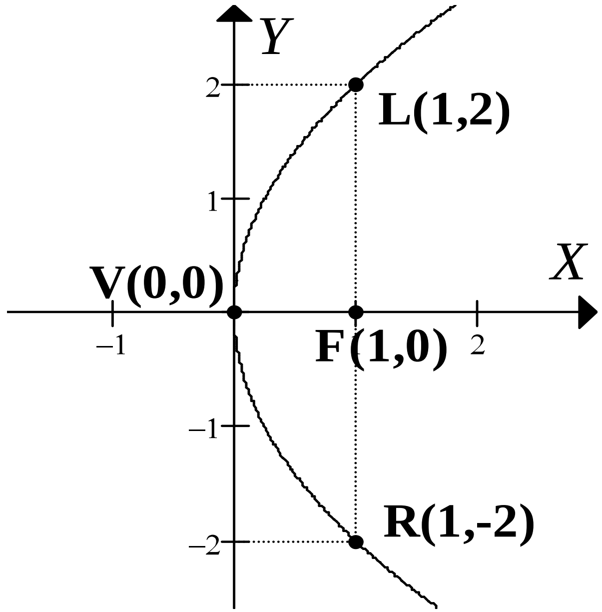
Ejemplo 1

a) Obtenga la ecuación de la parábola con vértice en el origen, con foco el punto $F(1,0)$. Grafique.

Resolución

La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = 4px$

Como $p = 1$, entonces $y^2 = 4x$. Además, la longitud del lado recto es $|4p| = 4$



Ejemplo 1

b) Determine vértice, foco, puntos extremos del lado recto y una ecuación de la directriz de la parábola de ecuación $x^2 = -12y$. Grafique.

Resolución

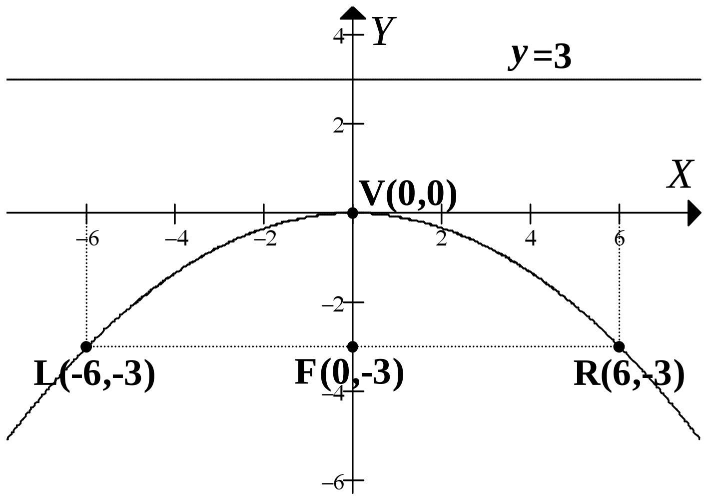
La ecuación es de la forma $x^2 = 4py$, y por tanto, $p = -3$.

Así, el vértice es el origen, el foco es $F(0,-3)$ y la ecuación de la directriz es

Como la longitud del lado recto es 12 entonces sus puntos extremos son

$L(-6,-3),\ R(6,-3)$

Además, como $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo



Ejemplo 2

Una parábola con vértice en el origen y eje el eje Y , es tangente a la recta de ecuación $x-2y=4$. Encuentre la ecuación de la parábola y las coordenadas del punto de contacto.

Resolución

$$\left.\begin{array}{r} x^2 = 4py \\ x = 2y+4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4y^2+16y+16 = 4py \Rightarrow y^2+(4-p)y+4=0$$

$$\Rightarrow y = \frac{p-4\pm\sqrt{p^2-8p+16-16}}{2} = \frac{p-4\pm\sqrt{p(p-8)}}{2}$$

Para que las dos curvas sean tangentes, se debe tener $p(p-8)=0$, esto es,

Como $p=8$, la ecuación de la parábola es $x^2=32y$

Además $y=\dfrac{8-4}{2}=2 \Rightarrow x^2 = 2\cdot 32 \Rightarrow x=8$

Luego, el punto de contacto es $(8,2)$

La Parábola

- **Parábola de vértice** $V(h,k)$**,** $d(F,V)=|p|$ **y eje focal paralelo al eje** X

  $$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

- **Parábola de vértice** $V(h,k)$**,** $d(F,V)=|p|$ **y eje focal paralelo al eje** Y

  $$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

- **Ecuación General de la Parábola**

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A \neq 0,\ E \neq 0$ es una parábola de eje paralelo (o coincidente) al eje Y

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $C \neq 0,\ D \neq 0$ es una parábola de eje paralelo (o coincidente) al eje X

La Parábola

- **Función Cuadrática**

$y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, tiene por gráfico una parábola de eje paralelo al eje Y o coincide con él y su vértice es $V(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$,

Si $a > 0$ ($a < 0$) la parábola se abre hacia arriba (abajo) y el punto más bajo (alto) es su vértice. Así, el valor mínimo (máximo) se alcanza para $x = -\frac{b}{2a}$ y es $y_{\min} = \frac{4ac-b^2}{4a}$ ($y_{\max} = \frac{4ac-b^2}{4a}$).

En forma análoga, $x = ay^2 + by + c$ con $a \neq 0$ tiene por gráfico una parábola de eje paralelo al eje X o coincide con él. Si $a > 0$ la parábola se abre hacia la derecha y si $a < 0$ la parábola se abre hacia la izquierda.

Ejemplo 3

Halle las ecuaciones del eje focal, de la directriz y de la parábola con vértice $V(-4,3)$ y foco $F(-1,3)$.

Resolución

El eje de la parábola es paralelo al eje X, y por tanto la ecuación es de la forma: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

Como la parábola se abre hacia la derecha, entonces $p = 3 > 0$.

Así, la ecuación de la parábola es $(y-3)^2 = 12(x+4)$.

Además, $x = -7$ es la ecuación de la directriz, $y = 3$ es la ecuación del eje focal.

Ejemplo 4

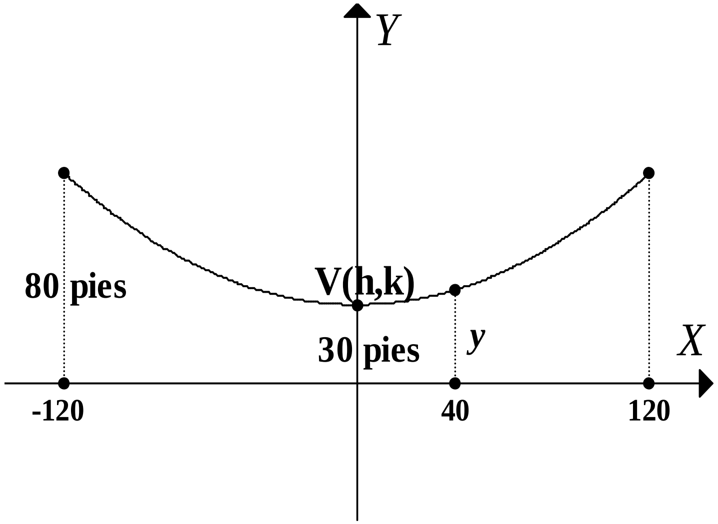
El cable de suspensión de un puente colgante toma forma parabólica si el peso del puente conjuntamente con el del cable está uniformemente distribuido en sentido horizontal.

El puente se sostiene por un sistema de cables verticales sujetos al de suspensión, de los cuales el más corto mide 30 pies y los más largos miden 80 pies y están ubicados en las torres de suspensión que se encuentran en los extremos de la calzada del puente que mide 240 pies de longitud.

Calcule la longitud del cable vertical que sostiene la calzada en un punto que dista 80 pies de una torre.

Resolución (Ejerc. 4)

Consideramos un sistema de ejes coordenados de manera que la calzada sea parte del eje X y el cable vertical de menor longitud es parte del eje Y.



La ecuación de la parábola es de la forma $y-k=4p(x-h)^2$, esto es, $y-30=4px^2$

Como $(120,80)$ es un punto de la parábola, entonces:

$$80-30=4p120^2 \Rightarrow p=\frac{50}{4\cdot 120^2}=\frac{5}{5760}$$

Así, la ecuación de la parábola queda: $y-30=\frac{20}{5760}x^2 \Rightarrow y=\frac{1}{288}x^2+30$

Para $x=40$: $y=\frac{1}{288}40^2+30=\frac{1600}{288}+30\approx 35,56\ pies$

<u>Resp</u>: La longitud del cable a 80 pies de una torre es de aprox. 35,56 pies.

Ejemplo 5

Determine los elementos y grafique :

a) $2x^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

Resolución

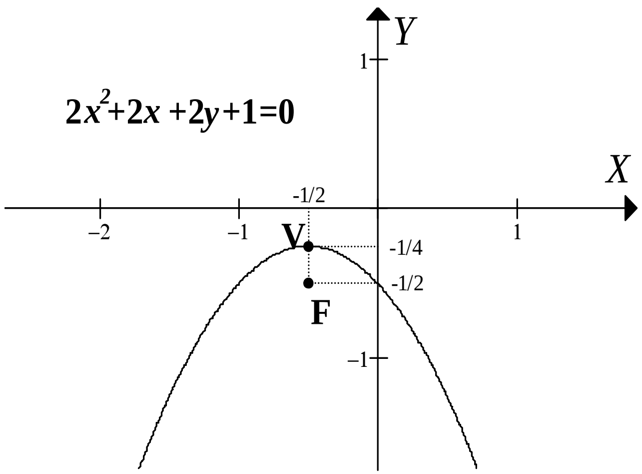
$$x^2 + x + y + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = -y - \frac{1}{4} \Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = -(y + \frac{1}{4})$$

Así, se trata de una parábola de eje paralelo al eje Y, vértice $V(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

Además, $p = -\frac{1}{4}$ y la parábola se abre hacia abajo.

De aquí, el foco es $F(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Su gráfico es:



Ejemplo 5

b) Determine los elementos y grafique :

Resolución

Esta ecuación es de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

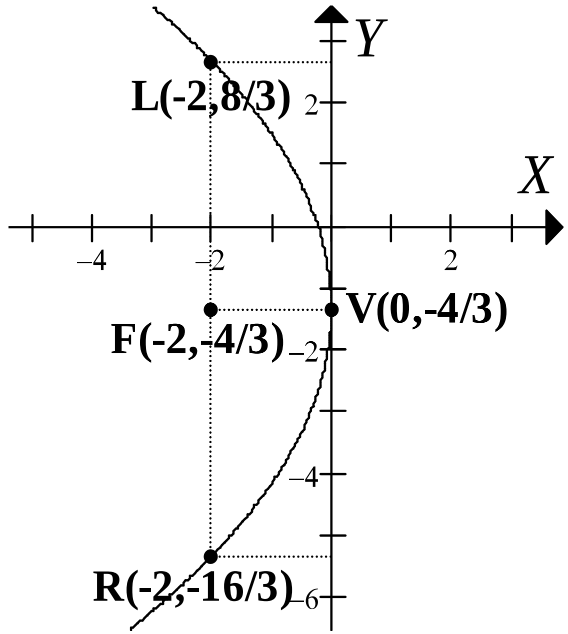
Esto es, se trata de una parábola de vértice $V(0,-\frac{4}{3})$, eje paralelo al eje X ,
y como $p=-2$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Además, el foco es $F(-2,-\frac{4}{3})$.

La longitud del lado recto es $|4p| = 8$.

Los extremos del lado recto son $L(-2,\frac{8}{3}),\ R(-2,-\frac{16}{3})$.

El gráfico es:



Ejemplo 5

c) Determine los elementos y grafique : $y^2 - 4y - 5 = 0$

Resolución:

$$(y-2)^2 = 9 \Rightarrow y - 2 = \pm 3 \Rightarrow y = 5 \text{ o } y = -1$$

La ecuación tiene por gráfico dos rectas paralelas.