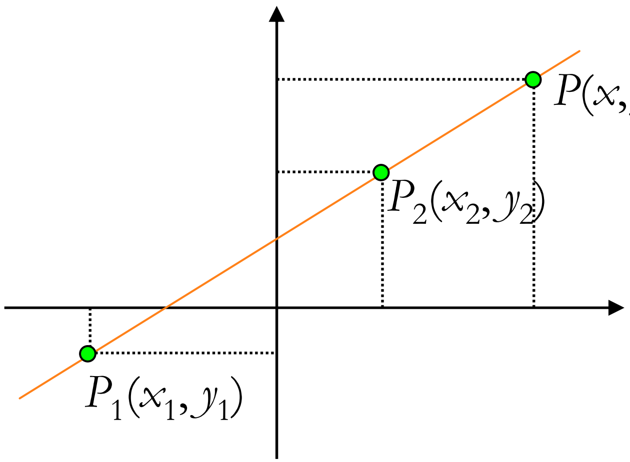
Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

La Recta

La Recta

Recta no vertical: *L. G. de todos los puntos del plano tales que los segmentos que unen dos puntos distintos cualesquiera de él tienen igual pendiente.*

$$m_{P_1P_2} = m_{P_1P} : \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$



Ecuaciones de la recta

- dos puntos

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$$

- punto-pendiente

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

- pendiente - intercepto

$$y = mx + b$$

- interceptos

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

- ecuación general $\quad ax + by + x = 0$

1. Ecuación de una recta

Ejemplo 1.

Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2,1), B(4,5). Grafique

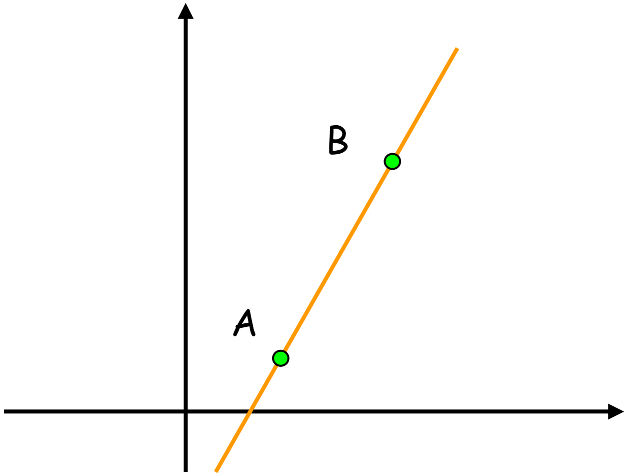
<u>Resolución</u>:

Se tiene :

$$\frac{5-1}{4-2} = \frac{y-1}{x-2}$$

O bien :

$$2x - y - 3 = 0$$

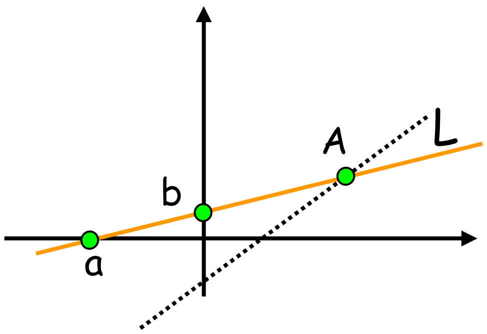


1. Ecuación de una recta

Ejemplo 2.

Encuentre la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) que pasa por A(4,2) si sus interceptos a, b, con los ejes son tales que ab = - 4.

<u>Resolución</u>:



De la figura:

L : $y-2=m(x-4)$

$$y=0 \;\Rightarrow\; -2=m(a-4)$$

$$x=0 \;\Rightarrow\; b-2=-4m$$

$\therefore\; a=\frac{4m-2}{m},\quad b=2-4m$ de donde: $\frac{4m-2}{m}(2-4m)=-4$

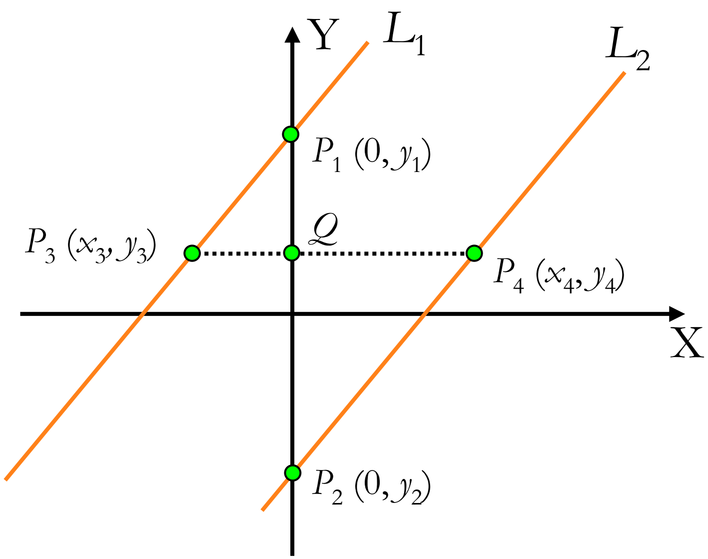
Soluciones de ésta ecuación: $m=\frac{1}{4}$, $m=1$

Rectas solución: $y-2=\frac{1}{4}(x-4),\quad y-2=x-4$

Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

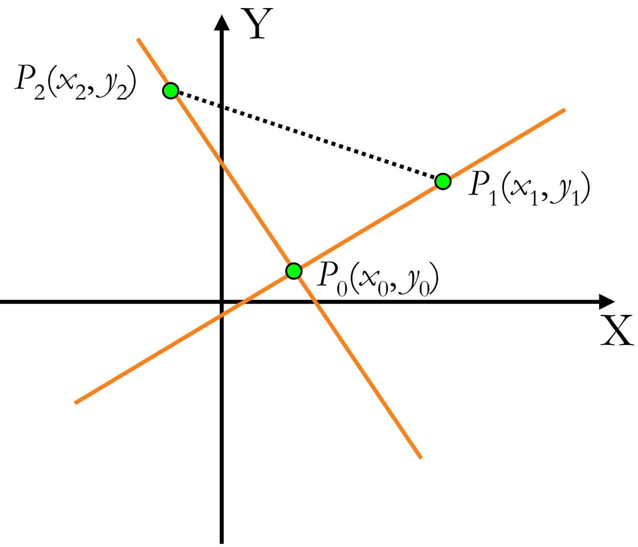
2. Paralelismo, perpendicularidad

$L_1 : y = m_1 x + b_1 \qquad L_2 : y = m_2 x + b_2$



- L_1 y L_2 , no verticales, son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$

Esto se sigue de la semejanza de los triángulos $P_1 P_3 Q$ y $P_2 P_4 Q$



- L_1 y L_2, no verticales, son perpendiculares si y sólo si $m_1\ m_2 = -1$

Se obtiene al aplicar T. de Pitágoras en el triángulo $P_0 P_1 P_2$

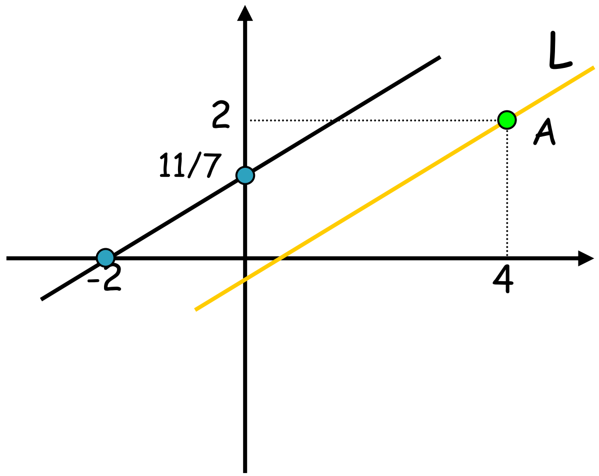
(puede suponerse $P_0 = O$)

2. Paralelismo, perpendicularidad

Ejemplo 1.

Determine la ecuación de la recta que pasa por A(4,2), paralela a la recta de ecuación 5x -7y + 11 = 0.

Resolución:



La ecuación de L es de la forma:

$$5x - 5y + C = 0$$

$$A \in L \;\Rightarrow\; 5 \times 4 - 7 \times 2 + C = 0$$

$$C = -6$$

La recta L tiene ecuación : $5x - 7y - 6 = 0$

2. Paralelismo, perpendicularidad

Ejemplo 2.

La recta que pasa por los puntos A(1,3) y B(4,-2) es paralela a la que pasa por C(0,7) y D(a,2) y es perpendicular a la que pasa por E(3,5) y F(-1,b). Encuentre a,b.

Resolución:

La primera condición se escribe:

$$m_{AB} = m_{CD} : \quad \frac{3-(-2)}{1-4} = \frac{7-2}{0-a} \qquad \therefore\ a = 3$$

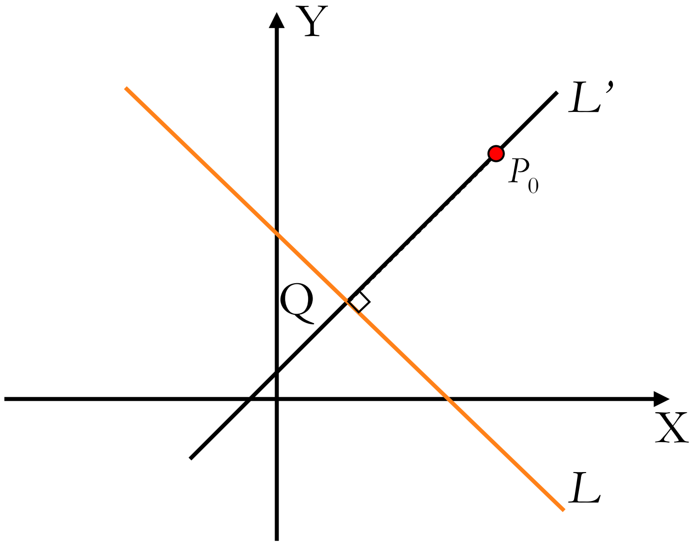
La segunda condición se escribe:

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{EF}} : \quad \frac{3-(-2)}{1-4} = -\frac{1}{\frac{b-5}{-1-3}} \qquad \therefore\ b = \frac{13}{5}$$

3. Distancia de un punto a una recta

La distancia de $P_0(x_0 , y_0)$ a la recta $L: \ Ax + By + C = 0$ está dada por

$$d(P_0, L) = \frac{|\, Ax_0 + By_0 + C \,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



1. La pendiente de L es $m = -A/B$.

2. L' , perpendicular a L por P_0 , tiene pendiente $m' = B/A$.

3. El punto de intersección de L y L' es $Q\left(\frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2+B^2}, \frac{Ay_0 - ABx_0 - BC}{A^2+B^2}\right)$

4. La distancia se obtiene como $d(P_0 , L) = d(P_0 , Q)$

3. Distancia de un punto a una recta

Ejemplo 1.

Encuentre la distancia del punto
A(10, 11) a la recta L : 3x -4y + 7 = 0

Resolución:

Aquí : $$d(A,L)=\frac{|3\times 10-4\times 11+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{7}{5}$$

Ejemplo 2.

¿Cuál es la longitud de la altura h_c del triángulo de vértices A(-2, -1), B(3, 1), C(1, 3)?

Resolución:

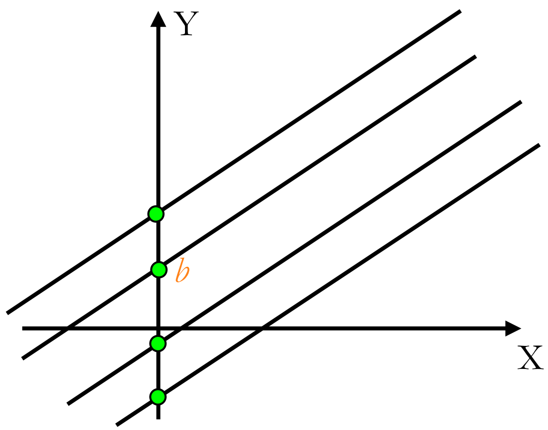
- Para la recta L por A,B : $$m_{AB}=\frac{1-(-1)}{3-(-2)}=\frac{2}{5}$$

$$\therefore\ y-(-1)=\tfrac{2}{5}\big(x-(-2)\big)$$ o bien $$L:2x-5y-1=0$$

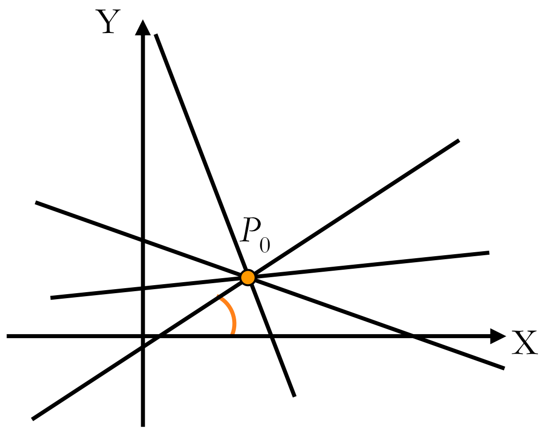
- La longitud de h_c es : $$d(C,L)=\frac{|2\times 1-5\times 3-1|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\frac{14}{\sqrt{29}}\approx 2,6$$

4. Familia de rectas

1. $y = mx + b$, con m dado

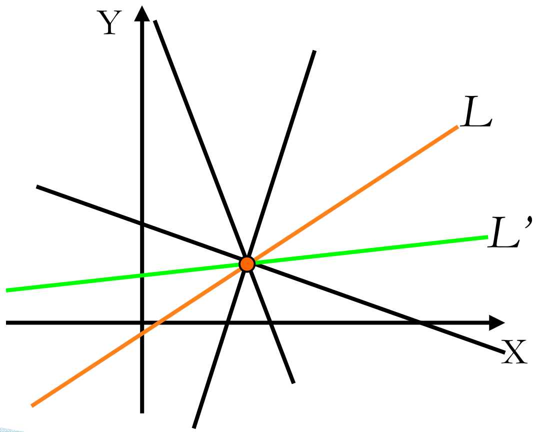


2. $y - y_0 = m(x - x_0)$, con P_0 dado



3. $Ax + By + C + k(A'x + B'y + C') = 0$

Todas las rectas que pasan por la intersección de L y L'



4. Familia de rectas

Ejemplo 1.

Determine la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas de ecuaciones $x - 3y + 5 = 0$, $2x + 4y - 3 = 0$ y por el punto $A(4,6)$.

<u>Resolución</u>:

La ecuación de la familia que pasa por la intersección es:

$$x - 3y + 5 + k(2x + 4y - 3) = 0 \qquad (*)$$

Escogemos aquella que pasa por el punto A:

$$4 - 3\times 6 + 5 + k(2\times 4 + 4\times 6 - 3) = 0 \;\Rightarrow\; k = \frac{9}{29}$$

Reemplazando en (*) y simplificando:

$$47x - 51y + 118 = 0$$

ecuación de la recta pedida.

Nota: también se puede buscar el punto de intersección de ambas rectas.