Universidad Austral de Chile
Facultad de Ciencias de la Ingeniería
Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería

PAUTA PRUEBA PARCIAL I – BAIN037 – Cálculo I para Ingeniería
14 – 10 – 2010

Pregunta 1 (2.5 ptos)

1.1-Dos deportistas que corren los 100 metros planos inician una carrera. Las funciones de posición de cada uno de los deportistas con respecto al tiempo son respectivamente $s_1(t)=t^3+1$ y $s_2(t)=(t+1)^3$

Determinar:

a) El deportista más rápido en la partida.

Solución:

Puesto que se tienen la funciones de posición sabemos que la derivada de ellas con respecto al tiempo nos entrega la velocidad en el instante t, en este caso se requiere determinar quién es más rápido en la partida, es decir en $t=0$

$$s_1(t)=t^3+1 \Rightarrow \frac{ds_1}{dt}(t)=3t^2 \Rightarrow \frac{ds_1}{dt}(0)=0\frac{m}{s}$$
$$s_2(t)=(t+1)^3 \Rightarrow \frac{ds_2}{dt}(t)=3(t+1)^2 \Rightarrow \frac{ds_2}{dt}(0)=3\frac{m}{s}$$

Por lo tanto el más rápido en la partida es el deportista número dos.

b) El deportista que alcanza la meta con mayor rapidez.

Solución:

Dadas la funciones de posición es posible determinar el tiempo que tardan cada uno de los deportistas en alcanza la meta que está a 100 metros

$$s_1(t)=t^3+1 \Rightarrow 100=t^3+1 \Rightarrow t^3=100-1 \Rightarrow t=\sqrt[3]{99}\,s$$
$$s_2(t)=(t+1)^3 \Rightarrow 100=(t+1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{100}=t+1 \Rightarrow t=\sqrt[3]{100}-1$$

Como determinamos los tiempos correspondientes a cada uno de los deportistas es posible calcular cual es la rapidez con la cual llega cada uno a la meta, ya que además conocemos la velocidad en función del tiempo, luego

$$\frac{ds_1}{dt}(t)=3t^2 \Rightarrow \frac{ds_1}{dt}\left(\sqrt[3]{99}\right)=3\sqrt[3]{99}^{\,2}\,\frac{m}{s}\approx 64,2\frac{m}{s}$$
$$\frac{ds_2}{dt}(t)=3(t+1)^2 \Rightarrow \frac{ds_2}{dt}\left(\sqrt[3]{100}-1\right)=3\left(\sqrt[3]{100}-1+1\right)^2=3\sqrt[3]{100}^{\,2}\,\frac{m}{s}\approx 64,6\frac{m}{s}$$

Por lo tanto el deportista que alcanza la meta con mayor rapidez es el deportista número dos.

c) El deportista que gana la carrera.

Finalmente el deportista que gana la carrera es aquel que alcanza la meta en un menor tiempo y este cálculo ya fue determinado en el apartado b.

Deportista 1 $t=\sqrt[3]{99}\,s\approx 4,62s$

Deportista 2 $t=\sqrt[3]{100}-1\approx 3,64s$

Por lo tanto el deportista que gana la carrera es el deportista número dos.

1.2-Dada la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x&=8t \\ y&=8\left(1+t^2\right)\end{aligned}\right\} t\in\mathbb{R}$$

Pruebe que para $x=0$ la curva posee un mínimo relativo.

Solución:

Mostar que para $x=0$ la curva posee un mínimo relativo es equivalente a mostrar que la curva posee un mínimo relativo para $t=0$, ya que $x(0)=0$. Dada la curva paramétrica la primera derivada corresponde a:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ donde } \frac{dy}{dt}=16t \;\; y \;\; \frac{dx}{dt}=8 \text{, luego } \frac{dy}{dx}=\frac{16t}{8}=2t \text{ .}$$

	$-\infty$ $t<0$	0 $t>0$ $+\infty$
dy/dx	$-$	$+$
Monotonia	□	□

Por lo tanto existe un punto crítico en donde $2t=0 \Rightarrow t=0$ Luego aplicando el Criterio o Test de la primera derivada se concluye que en $t=0$ ($x=0$) la curva alcanza un mínimo relativo, ya que cambia de monotonía. Por otro la se puede aplicar el Criterio de la segunda derivada la cual en este caso corresponde a

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}>0$ .Por lo tanto la segunda derivada de la curva es siempre positiva (Cóncava hacia arriba) en particular para $t=0$ por lo tanto en $x=0$ se alcanza un mínimo relativo.

Solución Alternativa:

Despejando el parámetro t y reemplazando en y se obtiene la ecuación:

$$x=8t \Rightarrow t=\frac{x}{8}$$

$$y=8\left(1+\left(\frac{x}{8}\right)^2\right)$$

$$y=\frac{x^2}{8}+8$$

Ecuación que corresponde a una parábola que se abre hacia arriba por lo cual posee un mínimo relativo en la coordenada y de su vértice que en este caso corresponde a $(0,8)$.

Pregunta 2 (1.0 ptos)

Un recipiente de agua está sobre una mesa. Se sabe que $\dfrac{dV}{dy}=A(y)$, donde V denota el volumen y $A(y)$ es el área de la superficie de agua que se encuentra expuesta a la altura y. También se sabe, que la razón a la cual se evapora el agua es proporcional al área de la superficie del agua expuesta. Con esta información muestre que $\dfrac{dy}{dt}$ es constante.

Solución:

Se sabe que $\dfrac{dV}{dy}=A(y)$, además que $\dfrac{dV}{dt}=\alpha\cdot(A(y))$ donde α es la constante de proporcionalidad, luego por la regla de cadena conocemos que:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} \Rightarrow \alpha\cdot(A(y))=A(y)\cdot\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\alpha$$

Por lo tanto $\dfrac{dy}{dt}$ es constante.

Pregunta 3 (2.5 ptos)

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$ con $x<-\sqrt{2}\wedge x>\sqrt{2}$.

a) Determine la existencia de puntos críticos y analice la monotonía de f.

Solución:

Para analizar la existencia de puntos críticos y monotonía de f es necesario calcular la primera derivada

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\Rightarrow \ln(f(x))=2\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2-2)\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}-\frac{x}{x^2-2}\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x^2-4-x^2}{x\left(x^2-2\right)}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x^2-4}{x\left(x^2-2\right)}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4}{x\left(x^2-2\right)}\cdot f(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4}{\cancel{x}\left(x^2-2\right)}\frac{\cancel{x}^2}{\sqrt{x^2-2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x\left(x^2-4\right)}{\sqrt{\left(x^2-2\right)^3}}$$

Luego f posee puntos críticos en $x=-2$ y $x=2$ por lo tanto la tabla de variación queda determinada de la siguiente forma

$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$

Factores / Valor de Prueba	$x=-3$	$x=-3/2$			$x=3/2$	$x=3$
x	$-$	$-$			$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$			$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$			$-$	$+$
signo f`	$-$	$+$			$-$	$+$
Monotonia	□	□			□	□

Finalmente f es decreciente en $(-\infty,-2)\cup\left(\sqrt{2},2\right)$ y creciente en $\left(-2,-\sqrt{2}\right)\cup(2,+\infty)$

b) Determine la existencia de valores extremos.

Solución:

Aplicando el Criterio o Test de la primera derivada se tiene que f alcanza un valor mínimo relativo(Absoluto) en $x=-2$ y $x=2$ el cual corresponde a $2\sqrt{2}$.

c) Determine la concavidad de f y la existencia de puntos de inflexión.

Solución:

Para determinar la concavidad de f es necesario calcular la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{x\left(x^2-4\right)}{\sqrt{\left(x^2-2\right)^3}}\Rightarrow \ln\left(f'(x)\right)=\ln(x)+\ln\left(x^2-4\right)-\frac{3}{2}\ln\left(x^2-2\right)$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-4}-\frac{3x}{x^2-2}\Rightarrow \frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right)+2x\cdot x\left(x^2-2\right)-3x\cdot x\left(x^2-4\right)}{x\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right)}$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{\cancel{x^4}-6x^2+8+\cancel{2x^4}-4x^2-\cancel{3x^4}+12x^2}{x\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right)}\Rightarrow \frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2\left(x^2+4\right)}{x\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right)}$$

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2+4\right)}{\cancel{x}\left(x^2-2\right)\cancel{\left(x^2-4\right)}}\cdot\frac{\cancel{x}\cancel{\left(x^2-4\right)}}{\sqrt{\left(x^2-2\right)^3}}\Rightarrow f''(x)=\frac{2\left(x^2+4\right)}{\sqrt{\left(x^2-2\right)^5}}$$

Se aprecia claramente que f no posee puntos de inflexión, además $f''>0\ \forall x\in Dom\ f$. Por lo tanto f es siempre cóncava hacia arriba.

d) Analice la existencia de asíntotas de f .

Solución:

Se observa que f es una función par (simétrica con respecto al eje y) por lo tanto basta con analizar las asíntotas a la derecha.

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} = +\infty$. Por lo tanto f posee una asíntota vertical en $x=\sqrt{2}$ y además por ser una función par existe otra asíntota vertical en $x=-\sqrt{2}$

Asíntotas oblicuas:

Oblicua por la derecha

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}} = 1$. Luego la pendiente de la asíntota oblicua derecha es 1 .

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 - x\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 - x\sqrt{x^2-2}\right)$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 - x\sqrt{x^2-2}\right)\cdot\frac{x^2+x\sqrt{x^2-2}}{x^2+x\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^4+2x^2}{x^2+x\sqrt{x^2-2}}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+x\sqrt{x^2-2}} = 0\cdot 1$$

$b = 0$

Luego el coeficiente de posición de la asíntota oblicua derecha es 0 . Por lo tanto la asíntota oblicua derecha es $y=x$ además debido a que f es par se tiene que también posee una asíntota oblicua izquierda correspondiente a $y=-x$.

e) Grafique la función.

Solución: