UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA
Prueba Parcial III+pauta

Jueves 29 de Noviembre de 2012

1. Considere $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y una transformación lineal $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que:

$$T(1,1) = (2,2,0), \quad T(1,-1) = (4,0,2)$$

Explicitar $T(x,y)$.

Desarrollo:

Sean $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tal que:

$$(x,y) \quad = \quad \alpha(1,1) + \beta(1,-1) \quad \Rightarrow \alpha = \tfrac{x+y}{2}, \beta = \tfrac{x-y}{2}$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} (x,y) & = & \left(\frac{x+y}{2}\right)(1,1) + \left(\frac{x-y}{2}\right)(1,-1) \qquad /T, \text{ Es transformación lineal.} \\ \Rightarrow\; T(x,y) & = & \left(\frac{x+y}{2}\right)T(1,1) + \left(\frac{x-y}{2}\right)T(1,-1) \\ \Rightarrow\; T(x,y) & = & \left(\frac{x+y}{2}\right)(2,2,0) + \left(\frac{x-y}{2}\right)(4,0,2) \\ \Rightarrow\; T(x,y) & = & (3x-y, x+y, x-y) \end{array}$$

$$\therefore T(x,y) = (3x-y, x+y, x-y)$$

2. Considere la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+\alpha z,\ x+y+(\alpha+2)z,\ (\alpha-3)z)$$

Determinar todos los valores de α en $\mathbb{R}$ para los cuales T es un isomorfismo.

Desarrollo:

$$T \text{ es isomorfismo} \iff \quad n(T) = 0 \ \wedge \ r(T) = 3$$

Busquemos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $n(T) = 0$, es decir, para que $Ker\ T = \{(0,0,0)\}$

$$Ker\ T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+\alpha z = 0,\ x+y+(\alpha+2)z = 0,\ (\alpha-3)z = 0\}.$$

El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+\alpha z & = & 0 \\ x+y+(\alpha+2)z & = & 0 \\ (\alpha-3)z & = & 0 \end{array}\right|$$

tiene única solución, $(0,0,0)$, si y solo si

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{vmatrix} \neq 0 \iff (\alpha-3) \neq 0 \iff \alpha \neq 3.$$

Si $\alpha \neq 3$, entonces $n(T) = 0$ y como

$$n(T) + r(T) = \dim \mathbb{R}^3$$

se deduce que $r(T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Por lo tanto, la T.L. dada es un isomorfismo para todo $\alpha \in \mathbb{R} - \{3\}$.

Observación: Otra alternativa es la siguiente:

$$T \text{ es isomorfismo} \iff \quad det\,([T]_B) \neq 0 \text{ para cualquier base } B \text{ de } \mathbb{R}^3$$

Si consideramos $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, se tiene que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{pmatrix}$$

y $det\,([T]_B) = \alpha - 3$.

Así T es un isomorfismo para todo $\alpha \neq 3$.

3. Sean $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \leq M_2(\mathbb{R})$ y $T : W \to \mathbb{R}_3[x]$ una transformación lineal definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = (2a-b)x^3 + (b+c)x + (2b+a)$$

Hallar $[T]_{B_1}^{B_2}$, donde:

$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$,

$B_2 = \{x^3, \quad x^3+x^2, \quad x^3+x^2+x, \quad x^3+x^2+x+1\}$

Desarrollo:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2x^3+1 \quad = \quad \alpha x^3 + \beta(x^3+x^2) + \gamma(x^3+x^2+x) + \delta(x^3+x^2+x+1)$$

$$\iff \quad \left.\begin{array}{rcr} \alpha+\beta+\gamma+\delta & = & 2 \\ \beta+\gamma+\delta & = & 0 \\ \gamma+\delta & = & 0 \\ \delta & = & 1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{rcr} \alpha & = & 2 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & -1 \\ \delta & = & 1 \end{array}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -x^3+x+2 \quad = \quad \alpha x^3 + \beta(x^3+x^2) + \gamma(x^3+x^2+x) + \delta(x^3+x^2+x+1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{rcl|} \alpha+\beta+\gamma+\delta & = & -1 \\ \beta+\gamma+\delta & = & 0 \\ \gamma+\delta & = & 1 \\ \delta & = & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcr} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & -1 \\ \gamma & = & -1 \\ \delta & = & 2 \end{array}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x \quad = \quad \alpha x^3 + \beta(x^3+x^2) + \gamma(x^3+x^2+x) + \delta(x^3+x^2+x+1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{rcl|} \alpha+\beta+\gamma+\delta & = & 0 \\ \beta+\gamma+\delta & = & 0 \\ \gamma+\delta & = & 1 \\ \delta & = & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcr} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & -1 \\ \gamma & = & 1 \\ \delta & = & 0 \end{array}$$

$$\therefore [T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Indicar si la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Desarrollo:

El polinomio característico de A está dado por:

$$p_A(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 3 & 4-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (4-\lambda)(\lambda+2)^2$$

Del cual se obtiene que los valores propios de A son -2 (con multiplicidad dos) y 4 (con multiplicidad uno).
Para saber si A es diagonalizable basta con obtener la dimensión del espacio propio asociado a $\lambda = -2$

$$W_{-2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow W_{-2} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = z \wedge y = -\frac{4}{3}z\right\}$

$\Rightarrow W_{-2} = \{(z, -\frac{4}{3}z, z) \in \mathbb{R}^3\}$

$\Rightarrow W_{-2} = \left\langle \left(1, -\frac{4}{3}, 1\right) \right\rangle$

Es claro que $\{(1, -\frac{4}{3}, 1)\}$ es Li. ya que contiene un solo vector, distinto del nulo, y es una base de W_{-2}, luego $dim(W_{-2}) = 1$.

Como la multiplicidad del valor propio -2 no coincide con la dimension de su espacio propio asociado, la matriz A no es diagonalizable.