Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Trigonometría

Módulo 1: Medidas angulares y funciones circulares

Medidas Angulares

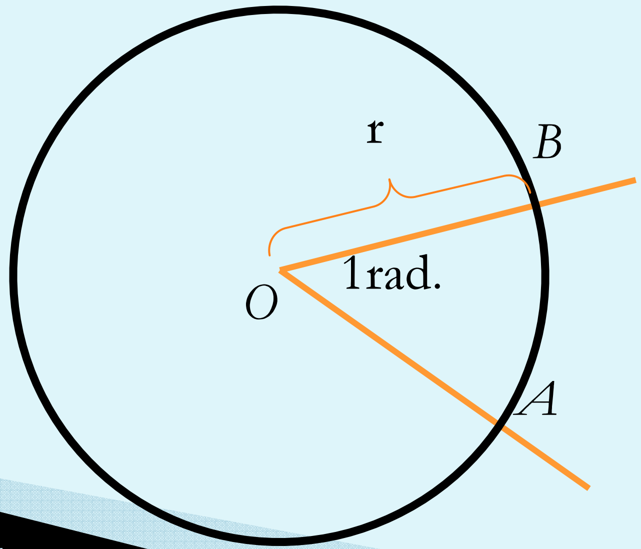
Se usarán 2 sistemas de medición de ángulos:

- **Grados sexagesimales:**

  Un grado sexagesimal es la medida de un ángulo central que subtiende un arco de longitud 1/360 de la circunferencia.

- **Radianes:**

  Un radián es la medida de un ángulo central que subtiende un arco de longitud igual al radio del círculo.



$$m(\overset{\frown}{AB}) = r$$

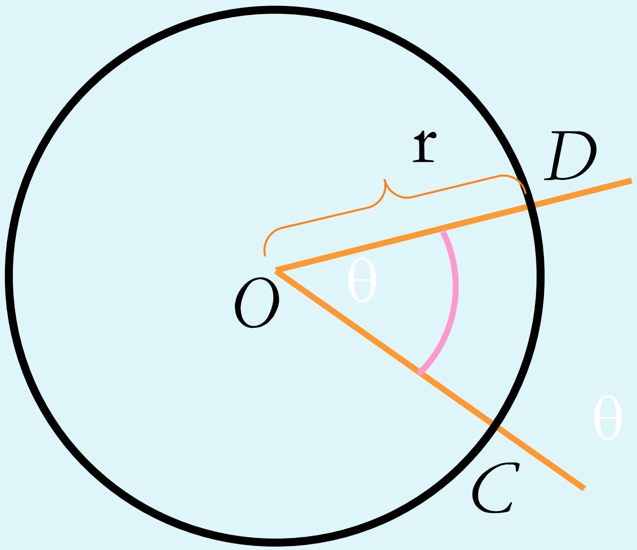
Medidas Angulares

En las calculadoras generalmente se abrevian

- Grado sexagesimal: **Mode Deg** (degree).
- Grado centesimal: **Mode Gra** (grade).
- Radián: **Mode Rad**

La medida en radianes de un ángulo es el número de radianes contenido en ese ángulo.

En este sistema, la medida de un ángulo es anotada por un número (La unidad está implícita).



$$m(\overset{\frown}{CD}) = s$$

θ mide $\dfrac{s}{r} rad$

Medidas Angulares

Relación entre los 2 sistemas de medición: $\frac{grados}{180^{o}} = \frac{radianes}{\pi}$

Longitud de un arco: $s = r\theta$, θ medido en radianes

Area de un sector circular: $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$, θ medido en radianes

Angulos positivos y negativos. Angulos en posición normal

Consideremos un rayo que ejecuta una rotación (plana) alrededor de su punto inicial.

Las posiciones inicial y final del rayo determinan un ángulo.

Los lados del ángulo se denominan **lado inicial** y **lado final**, respectivamente.

La medida de un ángulo será:

Positiva: Si la rotación es en sentido contrario a las agujas del reloj (rotación positiva).

Negativa: Si la rotación es en el mismo sentido de las agujas del reloj (rotación negativa).

Medidas Angulares

La medida de un ángulo puede ser cualquier número real de radianes (o equivalentemente de grados).

En general, las rotaciones dadas por: $\theta + 2n\pi$ rad. ó $\theta + 360^{\circ} \cdot n,\ n \in Z$

dan la misma figura geométrica, aunque las medidas son diferentes

Sea un sistema coordenado rectangular XOY:

- Un ángulo está en **posición normal**, si su vértice es el origen del sistema y el lado inicial del ángulo coincide con el semieje X positivo.

- Un ángulo **cuadrantal** es un ángulo en posición normal y con lado final uno de los semiejes coordenados.

- Un ángulo es **del primer (segundo, tercer, o cuarto) cuadrante** si está en posición normal y su lado final está en ese cuadrante.

- **Angulos coterminales** son ángulos en posición normal con el mismo lado final.

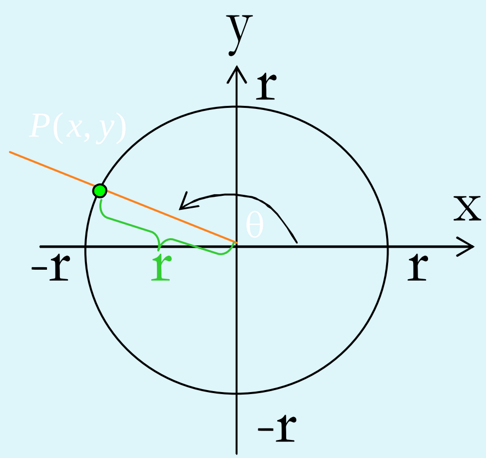
Los ángulos coterminales con un ángulo θ, están dados por:

$$\theta + 2n\pi \text{ rad. } ó \ \ \theta + 360^{\circ} \cdot n,\ n \in Z$$

Funciones Circulares

- Sea un ángulo en posición normal en un sistema de coordenadas rectangulares. Sea $P(x,y)$ el punto de intersección del lado final del ángulo con la circunferencia de radio r y centro en el origen del sistema.

- Si θ es la medida en radianes del ángulo, entonces:



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \text{(seno de } \theta\text{)} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad \text{(cotangente de } \theta\text{)}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{(coseno de } \theta\text{)} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad \text{(secante de } \theta\text{)}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{(tangente de } \theta\text{)} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} \quad \text{(cosecante de } \theta\text{)}$$

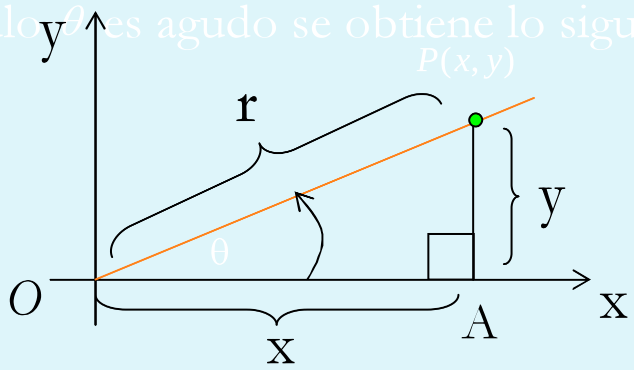
- Las seis fórmulas anteriores permiten definir 6 funciones, que se llamarán funciones circulares o trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

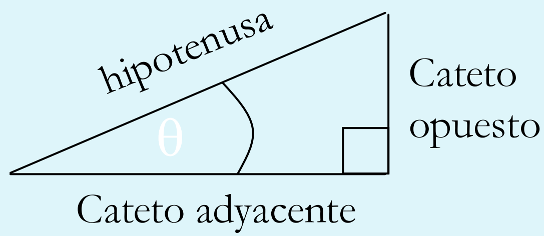
- El ángulo θ también puede estar medido en grados.

- Observar que los valores de las funciones trigonométricas no dependen del radio r de la circunferencia (Por semejanza de triángulos).

Funciones Circulares

- Si el ángulo θ es agudo se obtiene lo siguiente:





Así en el triángulo OAP, rectángulo, se cumple:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad (\text{seno de } \theta)$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad (\text{coseno de } \theta)$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \quad (\text{tangente de } \theta)$$

$$\cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} \quad (\text{cotangente de } \theta)$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyecente}} \quad (\text{secante de } \theta)$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \quad (\text{cosecante de } \theta)$$

Se obtiene directamente lo siguiente:

- Como los ángulos coterminales originan el mismo punto P en el lado terminal, entonces los valores de cualquiera de las seis funciones circulares para ángulos coterminales, son iguales.

Funciones Circulares

Las funciones seno y coseno son periódicas con período 2π y la función tangente es periódica con período π.

- $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$, $|\cos\theta| \leq 1$, $\tan\theta \in R$, $\cot\theta \in R$, $|\sec\theta| \geq 1$, $|\csc\theta| \geq 1$.
- Las funciones coseno y secante son pares.

  Esto es: $\cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \sec(-\theta) = \sec\theta$

  Las funciones seno, tangente, cotangente, cosecante son impares.

  Esto es: $$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$
  $$\cot(-\theta) = -\cot\theta, \quad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$
- Los signos de las funciones circulares en los distintos cuadrantes, están dados por la tabla:

Cuadrante	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Funciones Circulares

El cuadro anterior se puede resumir en el siguiente (en el cual sólo aparecen las funciones que son positivas):

II seno cosecante	todas positivas I
tangente cotangente III	coseno secante IV

"todas sin tacos"

- Se usa la notación:

$(\operatorname{sen}\theta)^n = \operatorname{sen}^n\theta$, $(\cos\theta)^n = \cos^n\theta$ (análogo para las otras funciones)

Funciones circulares para ángulos cuadrantales y para ángulos de medidas $\pi/3, \pi/4, \pi/6$

	0° 0	30° $\pi/6$	45° $\pi/4$	60° $\pi/3$	90° $\pi/2$	180° π	270° $3\pi/2$	360° 2π
Sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
Cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
Tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0