



UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.



BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA

Prueba Parcial I

24 de Abril de 2012

Nombre:.....Carrera.....Grupo.....

- Conteste en forma ordenada identificando la pregunta e ítem que corresponde.
- No se permite el uso de CALCULADORA.
- Cada solución debe llevar desarrollo y respuesta.
- Debe justificar adecuadamente su respuesta.
- Tiempo: 90 minutos.

1.(1,5 pts)

2.(1,0 pts).....

3.(1,0 pts).....

4.(2,5 pts)

Nota:.....

1. Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinar todos los valores de a tal que la matriz A sea invertible.

Respuesta:

Para que la matriz A sea invertible se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \det(A) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow 3(0) - a(0) + a(-2 + 3) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow a &\neq 0 \end{aligned}$$

\therefore Si $a \neq 0$ la matriz es invertible.

b) Para $a = 1$ determine la inversa de A .

Respuesta:

Ampliando por la identidad y haciendo operaciones filas obtendremos la matriz inversa, a saber:

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{f_{12}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{f_{1(-3)+3} \\ f_{1(-3)+2}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{f_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{f_{2(-4)+3} \\ f_{2(1)+1}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 9 & -4 \end{array} \right) \therefore \text{ Si } a = 1 \text{ entonces } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Una matriz A se dice involutiva si su cuadrado es igual a la matriz identidad, esto es, $A^2 = I$. Halle las condiciones de una matriz diagonal $B \in M_2(\mathbb{R})$ para que sea involutiva.

Sea $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (recordemos que es una matriz cuadrada de orden dos y diagonal)

Para que B sea involutiva, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} B^2 &= I \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 &= I \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} &= I \end{aligned}$$

De lo anterior se desprende que:

$$a^2 = 1 \wedge b^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1 \wedge b = \pm 1.$$

\therefore Para que una matriz $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ sea involutiva $a = \pm 1 \wedge b = \pm 1$

3. Usando propiedades de determinante, calcule:

$$\det \begin{pmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix} \quad \text{Sabiendo que:} \quad \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} = 7$$

Respuesta

Utilizaremos operaciones elementales filas para mostrar que ambas matrices son equivalentes.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} &\xrightarrow{f_{12}} \begin{pmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \xrightarrow{f_{23}} \begin{pmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{3(-2)}]{f_{1(2)} \mid f_{2(2)}} B = \begin{pmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix} \\ \downarrow & \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \det(A) = 7 & \qquad -\det(A) = -7 \qquad -(-\det(A)) = - - 7 = 7 \qquad 2 \cdot 2 \cdot -2 \cdot \det(A) = \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = -56 \end{aligned}$$

\therefore El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix}$ es -56

Forma opcional

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix} &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} p & q & r \\ 2u & 2v & 2w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix} = 2^2 \cdot \det \begin{pmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix} \\ &= -2^3 \cdot \det \begin{pmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} = 2^3 \cdot \det \begin{pmatrix} u & v & w \\ p & q & r \\ a & b & c \end{pmatrix} = -2^3 \cdot \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} = -8 \cdot 7 = -56 \end{aligned}$$

4. Dado el siguiente sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 1 \\ 2x + 2z - 3y & = & 3 \\ -2y + 3x + az & = & b \end{array} \right|$$

Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, tal que el sistema:

- a) Tenga única solución.
- b) Tenga conjunto solución vacío.
- c) Tenga infinitas soluciones y encuéntrelas.

Respuesta

Al sistema anterior le asociamos el sistema matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema anterior utilizaremos la matriz ampliada, a saber:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & a & b \end{array} \right)$$

Escalonando,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & a & b \end{array} \right) \xrightarrow[f_{1(-2)+2}]{f_{1(-3)+3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & a+3 & b-3 \end{array} \right) \xrightarrow{f_{2(-1)+3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & b-4 \end{array} \right)$$

- a) Tenga única solución.

El sistema tiene única solución si $Rg(A) = 3$. Según el trabajo previo, esto ocurre si $a - 1 \neq 0$.

\therefore Para que el sistema tenga única solución $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ y $b \in \mathbb{R}$.

- b) Tenga conjunto solución vacío.

El sistema tiene solución vacía si $Rg(A) < Rg(A|b)$. Observando la matriz escalonada en el trabajo previo, la condición de los rangos se produce si $a = 1 \wedge b \neq 4$.

\therefore El sistema tiene solución vacía si $a = 1 \wedge b \neq 4$

c) Tenga infinitas soluciones y encuéntrelas.

El sistema tendrá infinitas soluciones si $Rg(A) = Rg(A|b) < 3$, esto ocurre si $a = 1 \wedge b = 4$

\therefore El sistema tiene infinitas soluciones si $a = 1 \wedge b = 4$.

Por otra parte si $a = 1 \wedge b = 4$, reemplazando obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_{2(-1/5)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_{2(-1)+1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Lo anterior equivale a:

$$\left. \begin{array}{lcl} x - \frac{1}{5}z & = & \frac{6}{5} \\ y - \frac{4}{5}z & = & -\frac{1}{5} \\ z & = & z \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{5}z + \frac{6}{5} \\ y & = & \frac{4}{5}z + \frac{-1}{5} \\ z & = & z \end{array} \right|$$

Por lo que un vector solución $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ está dado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}z + \frac{6}{5} \\ \frac{4}{5}z + \frac{-1}{5} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{-1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5}z \\ \frac{4}{5}z \\ z \end{pmatrix}$$

Luego el conjunto solución está dado por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{-1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} / k \in \mathbb{R} \right\}$$