UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL
Control N°1+pauta

2° Semestre de 2013

1) Sean $A, B, C, D \in M_2(\mathbb{R})$ con A y C invertibles.

a) Resuelva, utilizando propiedades, la ecuación matricial, en términos de A, B, C, D.

$$(AX + B) \cdot C = D$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} (AX+B)\cdot C &= D \quad / \quad \cdot C^{-1} \\ \Leftrightarrow AX+B &= DC^{-1} \quad / \quad -B \\ \Leftrightarrow AX &= DC^{-1} - B \quad / \quad \cdot A^{-1} \\ \Leftrightarrow X &= A^{-1}(DC^{-1} - B) \end{aligned}$$

b) Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

utilizando el resultado anterior, halle la matriz X.

Desarrollo:

Debemos Calcular A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \right) \\ \Leftrightarrow X &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \right) \\ \Leftrightarrow X &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -7 & -9 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow X &= \begin{bmatrix} -26 & -35 \\ 19 & 26 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2) Considere el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y+3z+t & = & 3 \\ 3x+2y+z+t & = & 7 \\ 2y+4z+t & = & 1 \\ x+y+z+t & = & 4 \end{array}\right|$$

a) Indique, utilizando rango, si el sistema tiene única, infinitas o conjunto solución vacío.

Desarrollo:

Escalonando la matriz asociada al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1|3 \\ 3 & 2 & 1 & 1|7 \\ 0 & 2 & 4 & 1|1 \\ 1 & 1 & 1 & 1|4 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{14}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1|4 \\ 3 & 2 & 1 & 1|7 \\ 0 & 2 & 4 & 1|1 \\ 1 & 2 & 3 & 1|3 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{4+1(-1)}]{f_{2+1(-3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_{2(-1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{f_{3+2(-2)} \\ f_{4+2(-1)}}]{f_{1+2(-1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_{3\left(-\frac{1}{3}\right)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{f_{2+3(-2)} \\ f_{1+3(1)}}]{f_{4+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\therefore R(A) = 3 < 4 \text{ N}^\circ \text{ de incógnitas}, \; R(A|B) = 3$$

Como $R(A) = R(A|B)$ el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Determine la(s) solución(es), si existe(n).

Desarrollo:

A partir de la matriz escalonada reducida por filas obtenida en a) se tiene el siguiente sistema equivalente al inicial:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-z & = & 2 \\ y+2z & = & -1 \\ t & = & 3 \end{array}\right|$$

$$\therefore S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = z+2, y = -2z-1, z = k, t = 3; k \in \mathbb{R} \right\}$$

Obs: El conjunto solución también se puede expresar como:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} k+2 \\ -2k-1 \\ k \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : k \in \mathbb{R} \right\} \text{ o } S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot k + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : k \in \mathbb{R} \right\}$$