UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA

Pauta Tutoría N°7
Álgebra Lineal para Ingeniería
Octubre 2013

1. Muestre que $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 2x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

   i) Sea $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\langle v, v\rangle &= \langle (x, y), (x, y)\rangle \\ &= 2x^2 - 2xy - 2xy + 5y^2 \\ &= 2x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= 2(x^2 - 2xy + y^2) + 3y^2 \\ &= 2(x - y)^2 + 3y^2\end{aligned}$$

   como $(x - y)^2 \geq 0 \wedge y^2 \geq 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, se concluye que $\langle v, v\rangle \geq 0\ \forall v \in \mathbb{R}^2$.
   Además,

$$\langle v, v\rangle = 0 \iff 2(x - y)^2 + 3y^2 = 0$$

   para que la suma anterior sea cero, dado que $(x-y)^2 \geq 0 \wedge y^2 \geq 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, es necesario y suficiente que ambos sumandos sean cero, es decir,

$$(x - y)^2 = 0\ \wedge\ y^2 = 0 \iff (x - y) = 0\ \wedge\ y = 0 \iff x = 0\ \wedge y = 0 \iff v = (0, 0).$$

   ii) Sean $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle &= \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle \\ &= 2x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2 \\ &= 2x_2x_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + 5y_2y_1 \\ &= \langle (x_2, y_2), (x_1, y_1)\rangle \\ &= \langle v_2, v_1\rangle\end{aligned}$$

   iii) Sean $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ y $v_3 = (x_3, y_3)$ vectores de $\mathbb{R}^2$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\langle v_1 + v_2, v_3\rangle &= \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_3, y_3)\rangle \\ &= 2(x_1 + x_2)x_3 - 2(x_1 + x_2)y_3 - 2x_3(y_1 + y_2) + 5(y_1 + y_2)y_3 \\ &= 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1y_3 - 2x_2y_3 - 2x_3y_1 - 2x_3y_2 + 5y_1y_3 + 5y_2y_3 \\ &= (2x_1x_3 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 5y_1y_3) + (2x_2x_3 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5y_2y_3) \\ &= \langle (x_1, y_1), (x_3, y_3)\rangle + \langle (x_2, y_2), (x_3, y_3)\rangle \\ &= \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_2, v_3\rangle\end{aligned}$$

   iv) Sean $v_1 = (x_1, y_1),\ v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle \alpha v_1, v_2\rangle &= \langle (\alpha x_1, \alpha y_1), (x_2, y_2)\rangle \\ &= 2(\alpha x_1)x_2 - 2(\alpha x_1)y_2 - 2x_2(\alpha y_1) + 5(\alpha y_1)y_2 \\ &= \alpha(2x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2) \\ &= \alpha\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle \\ &= \alpha\langle v_1, v_2\rangle\end{aligned}$$

   Dado que el producto definido satisface i,ii,iii y iv, es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

2. En $M_2(\mathbb{R})$ considere el producto interno definido por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right\rangle = ae + 2bf + 3cg + dh.$$

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule

a) $\|A\|$ y $\|B\|$

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{\langle A, A\rangle} \\ &= \sqrt{1^2 + 2\cdot(-1)^2 + 3\cdot 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \|B\| &= \sqrt{\langle B, B\rangle} \\ &= \sqrt{2^2 + 2\cdot 1^2 + 3\cdot(-1)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

b) $d(A, B)$.

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \|A - B\| \\ &= \sqrt{\langle A - B, A - B\rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 2\cdot(-2)^2 + 3\cdot 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

c) El ángulo comprendido entre A y B.

Si θ es el ángulo entre A y B, entonces $\cos\theta = \dfrac{\langle A, B\rangle}{\|A\|\cdot\|B\|}$.

$$\langle A, B\rangle = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 1$$

entonces, tenemos que

$$\cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{10}} \to \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{10}}\right)$$

3. Sea V un espacio vectorial y $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to R$ un producto interno. Muestre que $\forall u, v \in V$ se satisface

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2.$$

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|u\|^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \|u-v\|^2 &= \langle u-v, u-v\rangle \\ &= \langle u, u-v\rangle - \langle v, u-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|u\|^2 \end{aligned}$$

entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|u\|^2 - (\|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|u\|^2) \\ &= 4\langle u,v\rangle \\ &\Updownarrow \\ \langle u,v\rangle &= \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 \end{aligned}$$

4. En una base ortonormal los vectores u y v tienen coordenadas $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, respectivamente. Calcule:

   a) $\langle u, v \rangle$.
   Como las coordenadas están con respecto a una base ortonormal, basta realizar el producto de sus coordenadas:

   $$\langle u, v \rangle = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 4 = 10 - 12 = -2$$

   b) La norma de cada vector.

   $$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \\ \|v\| &= \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \end{aligned}$$

   c) El ángulo que forman u y v.
   Si θ es el ángulo que forman u y v, entonces

   $$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{13}\sqrt{41}} = \frac{-2}{\sqrt{533}} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{533}}\right) \end{aligned}$$

5. En una base $B = \{v_1, v_2\}$ tal que $\langle v_1, v_2 \rangle = 1$ y $\|v_1\| = \|v_2\| = \sqrt{2}$, los vectores u y v tienen coordenadas $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, respectivamente. Calcule $\langle u, v \rangle$ y compare su resultado con el del ejercicio anterior.
   Se tiene que $u = 2v_1 - 3v_2$ y $v = 5v_1 + 4v_2$, de donde

   $$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle 2v_1 - 3v_2, 5v_1 + 4v_2 \rangle \\ &= \langle 2v_1, 5v_1 + 4v_2 \rangle - \langle 3v_2, 5v_1 + 4v_2 \rangle \\ &= \langle 2v_1, 5v_1 \rangle + \langle 2v_1, 4v_2 \rangle - \langle 3v_2, 5v_1 \rangle - \langle 3v_2, 4v_2 \rangle \\ &= 10\langle v_1, v_1 \rangle + 8\langle v_1, v_2 \rangle - 15\langle v_2, v_1 \rangle - 12\langle v_2, v_2 \rangle \\ &= 10 \cdot 2 + 8 \cdot 1 - 15 \cdot 1 - 12 \cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$