UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA

Tutoría N°3

Septiembre de 2013

1. Resuelva los siguientes sistemas:

   a) $\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 &=& 0 \end{array}\right|$

   Desarrollo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{2+(-2)1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{(\frac{1}{9})2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{1+(2)2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_3 &=& 0 \\ x_2 &=& 0 \end{array}\right|$$

$$\therefore S = \left\{ \begin{bmatrix} -3k \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R} \right\}$$

   b) $\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &=& 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 &=& 0 \end{array}\right|$

   Desarrollo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{13}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+(-2)1}]{f_{2+(-3)1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 14 & -14 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{(\frac{1}{14})2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{14} \\ 0 & 7 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[f_{3+(-7)2}]{f_{1+(4)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{12}{14} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

   Luego, $Rg([A|B]) > Rg(A)$ por lo que el sistema tiene conjunto solución vacío.

$$\therefore S = \emptyset$$

2. Determine las condiciones de $k \in \mathbb{R}$, tal que los siguientes sistemas tengan:

   a) Única solución (Encuéntrela).

   b) Infinitas soluciones (Encuéntrelas).

   c) Conjunto solución vacío.

i) $\left.\begin{array}{rcl} kx+y+z & = & 1 \\ x+ky+z & = & 1 \\ x+y+kz & = & 1 \end{array}\right|$

Desarrollo:

Escalonando la matriz asociada al sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{13}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+(-k)1}]{f_{2+(-1)1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_{3+(1)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & -(k+2)(k-1) & 1-k \end{array}\right]$$

- El sistema tendrá única solución si $Rg([A|B]) = Rg(A) = 3$, es decir:

$$-(k+2)(k-1) \neq 0 \wedge k \neq 1 \Leftrightarrow k \neq -2 \wedge k \neq 1$$

Luego:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & -(k+2)(k-1) & 1-k \end{array}\right] \xrightarrow{f_{\left(\frac{1}{k-1}2\right)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -(k+2)(k-1) & 1-k \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_{1+(-1)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -(k+2)(k-1) & 1-k \end{array}\right] \xrightarrow{f_{\left(\frac{-1}{(k+2)(k-1)}\right)3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[f_{2+(1)3}]{f_{1+(-k-1)3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{k+2} \\ y & = & \frac{1}{k+2} \\ z & = & \frac{1}{k+2} \end{array}\right|$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{k+2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \right\}$$

- El sistema tendrá infinitas soluciones si $Rg([A|B]) = Rg(A) < 3$, es decir:

$$1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Luego:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y & = & y \\ z & = & z \end{array}\right|$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1-y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

- El sistema tendrá conjunto solución vacío si $Rg([A|B]) > Rg(A)$, es decir:

$$-(k+2)(k-1) = 0 \wedge 1 - k \neq 0 \Leftrightarrow (k = -2 \vee k = -1) \wedge k \neq 1 \Leftrightarrow k = -2$$

ii) $\left.\begin{array}{rcl} x+2y+kz & = & 1 \\ 2x+ky+8z & = & 3 \end{array}\right|$

Desarrollo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & k & 8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{2+(-2)1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & k-4 & -2(k-4) & 1 \end{array}\right]$$

- Este sistema nunca tendrá única solución ya que posee más incógnitas que ecuaciones.
- Este sistema tendrá infinitas soluciones si

$$k - 4 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 4$$

Luego:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & k-4 & -2(k-4) & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{(\frac{1}{k-4})2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{k-4} \end{array}\right] \xrightarrow{f_{1+(-2)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k+4 & \frac{k-6}{k-4} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{k-4} \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x+(k+4)z & = & \frac{k-6}{k-4} \\ y-2z & = & \frac{1}{k-4} \end{array}\right|$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{k-6}{k-4} - (k+4)z \\ \frac{1}{k-4} + 2z \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R} - \{4\} \right\}$$

- El sistema tendrá conjunto solución vacío si

$$k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

3. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios indicados:

   a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq y \leq z\}$, de $\mathbb{R}^3$.

   Desarrollo:

   - $W_1 \subseteq \mathbb{R}^3$
   - $(0, 0, 0) \in W_1$ ya que $0 \leq 0 \leq 0$, $W_1 \neq \emptyset$
   - Sean $v = (x, y, z), w = (a, b, c) \in W_1, \alpha \in \mathbb{R}$
     $\alpha v + w = \alpha(x, y, z) + (a, b, c) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (a, b, c)$
     pero $(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \notin W_1$, ya que:
     si $\alpha \geq 0, \quad x \leq y \leq z / \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha x \leq \alpha y \leq \alpha z$
     si $\alpha < 0, \quad x \leq y \leq z / \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha x \geq \alpha y \geq \alpha z$

     Contra ejemplo:
     Sean $(3, 4, 5) \in W_1, (-2) \in \mathbb{R}$
     $(-2) \cdot (3, 4, 5) = (-6, -8, -10) \Rightarrow -6 \geq -8 \geq -10$

$$\therefore W_1 \nleq \mathbb{R}^3$$

   b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$, de $\mathbb{R}^3$.
   Desarrollo:

   - $W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$
   - $(0, 0, 0) \in W_2$ ya que $0 = 0 = 0$, $W_2 \neq \emptyset$
   - Sean $\alpha \in \mathbb{R}, v = (a, a, a), w = (b, b, b) \in W_2$
     $\alpha v + w = \alpha(a, a, a) + (b, b, b) = (\alpha a, \alpha a, \alpha a) + (b, b, b) = (\alpha a + b, \alpha a + b, \alpha a + b)$
     como las componentes del vector son iguales se tiene que $\alpha v + w \in W_2$.

$$\therefore W_2 \leq \mathbb{R}^3$$

   c) $W_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A \text{ es diagonal}\}$, de $M_3(\mathbb{R})$
   Desarrollo:

   - $W_3 \subseteq M_3(\mathbb{R})$
   - $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ ya que la matriz nula es diagonal, $W_3 \neq \emptyset$.
   - Sean $v = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \in W_3, \alpha \in \mathbb{R}$.
     $\alpha v + w = \alpha \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha b & 0 \\ 0 & 0 & \alpha c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + d & 0 & 0 \\ 0 & \alpha b + e & 0 \\ 0 & 0 & \alpha c + f \end{bmatrix}$
     Se tiene que la matriz obtenida es diagonal
     $\therefore \alpha v + w \in W_3$

$$\therefore W_3 \leq M_3(\mathbb{R})$$

d) $W_4 = \left\{ \left[\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array} \right] \in M_2(\mathbb{R}) : a = b = c \right\}$, de $M_2(\mathbb{R})$

Desarrollo:

- $W_4 \subseteq M_2(\mathbb{R})$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_4$ ya que $0 = 0 = 0$. $W_4 \neq \emptyset$
- Sean $\alpha \in \mathbb{R}, v = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & a \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} b & b \\ 0 & b \end{bmatrix} \in W_4$
  $\alpha v + w = \alpha \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha a \\ 0 & \alpha a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + b & \alpha a + b \\ 0 & \alpha a + b \end{bmatrix}$
  Como sus coeficientes no nulos son iguales se tiene que $\alpha v + w \in W_4$

$$\therefore W_4 \leq M_2(\mathbb{R})$$

e) $W_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$, de $\mathbb{R}^2$

Desarrollo:

- $W_5 \subseteq \mathbb{R}^2$
- $(0, 0) \in W_5$, ya que $0 \cdot 0 = 0$. $W_5 \neq \emptyset$
- Sean $\alpha \in \mathbb{R}, v = (x, y), w = (a, b) \in W_5$
  $\alpha v + w = \alpha(x, y) + (a, b) = (\alpha x, \alpha y) + (a, b) = (\alpha x + a, \alpha y + b)$

  Luego $\alpha(x+a)(\alpha y+b) = \alpha^2 xy+\alpha xb+\alpha ay+ab = \alpha xb+\alpha ay$, no sabemos si $\alpha xb+\alpha ay = 0$

  Contra ejemplo: Sean $(3, 0), (0, 1) \in W_5, 2 \in \mathbb{R}$
  $2(3, 0) + (0, 1) = (6, 0) + (0, 1) = (6, 1) \Rightarrow 6 \cdot 1 = 6 \neq 0$

$$\alpha(x + a)(\alpha y + b) \notin W_5$$

$$\therefore W_5 \not\leq \mathbb{R}^2$$

f) $W_6 = \{ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R}) : ac - b = 0\}$, de $P_2(\mathbb{R})$

Desarrollo:

- $W_6 \subseteq \mathbb{R}_2[x]$
- $p(x) = 0x^2 + 0x + 0 \in W_6$, ya que $0 \cdot 0 - 0 = 0$.
- Sean $v = p_1(x) = ax^2 + bx + c, w = p_2(x) = dx^2 + ex + f \in W_6$
  $v + w = ax^2 + bx + c + dx^2 + ex + f = (a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)$

  Luego: $(a + d) \cdot (c + f) - (b + e) = ac + af + dc + df - b - e = af + dc$, no sabemos si $af + dc = 0$.

  Contra ejemplo: Sean $x^2 + x + 1, x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \in W_6$

  $x^2 + x + 1 + x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 2x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \neq 0.$

$$ax^2 + bx + c + dx^2 + ex + f \notin W_6$$

$$W_6 \not\leq \mathbb{R}_2[x]$$