Producto Interno

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un producto interno en V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $a \in \mathbb{K}$ y para todo$u, v, w \in \mathbb{K}$ se satisface:

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un producto interno en V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $a \in \mathbb{K}$ y para todo$u, v, w \in \mathbb{K}$ se satisface:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0; \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un producto interno en V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $a \in \mathbb{K}$ y para todo $u, v, w \in \mathbb{K}$ se satisface:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0; \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un producto interno en V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $a \in \mathbb{K}$ y para todo$u, v, w \in \mathbb{K}$ se satisface:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0; \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
3. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un producto interno en V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $a \in \mathbb{K}$ y para todo$u, v, w \in \mathbb{K}$ se satisface:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0; \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
3. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
4. $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$

Ejemplo

En $V = \mathbb{R}^n$ *el producto punto o escalar definido por:*

Ejemplo

En $V = \mathbb{R}^n$ *el producto punto o escalar definido por:*

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle \\ &= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots x_n \cdot y_n \end{aligned}$$

es producto interno y es llamado el producto interno usual o estándar en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

En $V = \mathbb{R}^n$ *el producto punto o escalar definido por:*

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle \\ &= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots x_n \cdot y_n \end{aligned}$$

es producto interno y es llamado el producto interno usual o estándar en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio

Calcule el producto interno entre los vectores de $\mathbb{R}^3$, *dados por* $u = (1, 2, -1)$ *y* $v = (-1, 3, 4)$

Ejemplo

En $V = M_n(\mathbb{R})$, *si* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *entonces*

$$\begin{aligned} \langle A, B\rangle &= tr(B^t A) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \end{aligned}$$

Ejemplo

En $V = M_n(\mathbb{R})$, *si* $A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij})$ *entonces*

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= tr(B^t A) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \end{aligned}$$

Ejercicio

Calcule el producto interno entre las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejemplo

En $V = P_n(\mathbb{R})$, *si* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *y* $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ *entonces*

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Ejemplo

En $V = P_n(\mathbb{R})$, *si* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *y* $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ *entonces*

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Ejercicio

Calcule el producto interno entre los vectores $p(x) = 1 - 2x + 3x^2$ *y* $q(x) = -2 + x^2$

Ejemplo

- *Sea* $V = C[a, b] = \{f/f : [a, b] \to \mathbb{R}, \;\; f \;\; continua\}$ *el espacio vectorial de las funciones continuas con dominio en* $[a, b]$*, un producto interno en* V *es:*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Ejemplo

- *Sea* $V = C[a,b] = \{f/f : [a,b] \to \mathbb{R}, \;\; f \;\; continua\}$ *el espacio vectorial de las funciones continuas con dominio en* $[a,b]$*, un producto interno en* V *es:*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

- *Sea* V *un espacio vectorial y* $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *una base ordenada de* V*. El producto definido por*

$$\langle u, v\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

donde $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ *y*
$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$*, es un producto interno.*

Norma en un espacio vectorial.

Definición

Una norma en un espacio vectorial V *es una función* $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ *que satisface:*

Definición

Una norma en un espacio vectorial V es una función $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ que satisface:

1. $\|v\| \geq 0, \ \forall v \in V, \ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$

Definición

Una norma en un espacio vectorial V es una función $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ que satisface:

1. $\|v\| \geq 0,\ \forall v \in V,\ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$
2. $\|kv\| = |k|\|v\|,\ \forall k \in \mathbb{K},\quad \forall v \in V$

Definición

Una norma en un espacio vectorial V es una función $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ que satisface:

1. $\|v\| \geq 0, \ \forall v \in V, \ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$
2. $\|kv\| = |k|\|v\|, \ \forall k \in \mathbb{K}, \quad \forall v \in V$
3. $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|, \ \forall u, v \in V$

Definición

Una norma en un espacio vectorial V es una función $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ que satisface:

1. $\|v\| \geq 0, \ \forall v \in V, \ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$
2. $\|kv\| = |k|\|v\|, \ \forall k \in \mathbb{K}, \quad \forall v \in V$
3. $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|, \ \forall u, v \in V$

Definición

Sea V un espacio vectorial y sean $u, v \in V$ vectores.

Definición

Sea V un espacio vectorial y sean $u, v \in V$ vectores.

1. *La norma euclídea o longitud de v es $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$*

Definición

Sea V un espacio vectorial y sean $u, v \in V$ vectores.

1. *La norma euclídea o longitud de v es* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$
2. *v se dira unitario si* $\|v\| = 1$

Definición

Sea V un espacio vectorial y sean $u, v \in V$ vectores.

1. *La norma euclídea o longitud de v es $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$*
2. *v se dira unitario si $\|v\| = 1$*
3. *La distancia euclídea entre los vectores u y v de V es:*

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Definición

Sea V un espacio vectorial y sean $u, v \in V$ vectores.

1. *La norma euclídea o longitud de v es $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$*
2. *v se dira unitario si $\|v\| = 1$*
3. *La distancia euclídea entre los vectores u y v de V es:*
$$d(u, v) = \|u - v\|$$
4. *El ángulo θ, $\theta \in [0, \pi]$ entre $u, v \neq 0_V$ está dado por:*
$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

Definición

Sea V un espacio vectorial y sean $u, v \in V$ vectores.

1. *La norma euclídea o longitud de v es $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$*
2. *v se dira unitario si $\|v\| = 1$*
3. *La distancia euclídea entre los vectores u y v de V es:*
$$d(u, v) = \|u - v\|$$
4. *El ángulo θ, $\theta \in [0, \pi]$ entre $u, v \neq 0_V$ está dado por:*
$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$
5. *Un vector normalizado, es un vector en la dirección de v, $v \neq 0_V$ definido por*
$$\frac{v}{\|v\|}$$

Ejemplo

Calcule la norma del vector $v = (1, 2)$

Ejemplo

Calcule la norma del vector $v = (1, 2)$

1. *Usando el producto interno usual.*

Ejemplo

Calcule la norma del vector $v = (1, 2)$

1. *Usando el producto interno usual.*
2. *Usando el producto interno dado por:*

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Calcula la distancia y ángulo entre las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

con el producto interno $\langle A, B \rangle = tr(B^t A)$