UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 Álgebra Lineal para Ingeniería
Prueba Parcial I+Pauta
Martes 8 de Octubre de 2013

---

1. *a*) Obtenga B si
$$(B^{-1}A)^t - (B^tA)^{-1} = I$$
Siendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
[**Indicación**: Si $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$, $\quad (X \cdot Y)^t = Y^t \cdot X^t \quad$ y $\quad (X^t)^{-1} = (X^{-1})^t$.]
Solución:
$$\begin{array}{rrcl} & (B^{-1}A)^t - (B^tA)^{-1} & = & I \\ \Leftrightarrow & A^t(B^{-1})^t - (A^{-1}(B^{-1})^t) & = & I \\ \Leftrightarrow & (A^t - A^{-1})(B^{-1})^t & = & I \\ \Leftrightarrow & (A^t - A^{-1})(B^t)^{-1} & = & I \end{array}$$
Entonces tenemos que:
$$\begin{array}{rrcl} & A^t - A^{-1} & = & B^t \\ \Leftrightarrow & (A^t - A^{-1})^t & = & B \end{array}$$
$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
Reeplazando se tiene:
$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right)^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = B$$

b) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtenga A^{100}.

Solución:
$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Para el siguente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl}(m+1)x+y+z &=& 3\\ x+2y+mz &=& 4\\ x+my+2z &=& 2\end{array}\right|$$

   a) Obtenga todos los valores de m para que este sistema pueda resolverse usando la regla de Cramer.

   Desarrollo:

$$\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & m\\ 1 & m & 2\end{vmatrix} \overset{f_{3+(-1)2}}{=} \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & m\\ 0 & m-2 & -m+2\end{vmatrix} = (m-2)\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & m\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$=(m-2)(-m^2-3m)=-m(m-2)(m+3)$.

   Por lo tanto, para poder usar la regla de Cramer el determinante debe ser distinto de cero, entonces m debe ser distinto de 0,2 y -3

   b) Para $m=-2$, halle el valor de la incógnita z.

   Desarrollo:

   Para $m=-2$ el sistema a resolver es $\left.\begin{array}{rcl}-x+y+z &=& 3\\ x+2y-2z &=& 4\\ x-2y+2z &=& 2\end{array}\right|$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}}{-8}=\frac{-22}{-8}=\frac{11}{4}$$

3. Para el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl}x+y+z &=& 3\\ x-y+3z &=& 1\\ 2x+az &=& b\end{array}\right|$$

   Encuentre las condiciones para a y b de modo que el sistema:

   a) Tenga única solución.
   b) Tenga conjunto solución vacío.
   c) Tenga infinitas soluciones y encuéntrelas.

   Primero escalonaremos la matriz asociada al sistema de ecuaciones para así estudiar los rangos.

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & a & b\end{array}\right] \xrightarrow[f_{2+(-1)1}]{f_{3+(-1)1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & a & b-6\end{array}\right] \xrightarrow{f_{\left(-\frac{1}{2}\right)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & a-2 & b-6\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_{3+(2)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & a-4 & b-4\end{array}\right]$$

a) Para que el sistema tenga única solución $R(A) = R(A|B) = 3$, debido a que el sistema tiene 3 incognitas entonces $a \neq 4$ y $b \in \mathbb{R}$.

b) Para que el sistema tenga conjunto solución vacío $a = 4$ y $b \neq 4$.

c) Para que el sistema tenga infinitas soluciones $R(A) = R(A|B) = 2$ entonces a y b deben ser 4.

A partir de la matriz escalonada y reeplazando a y b por 4 se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl|} x + y + z & = & 3 \\ y - z & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = -2z + 2, y = 1 + z, z = z; z \in \mathbb{R} \right\}$$