UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA

Prueba Parcial I

24 de Abril de 2012

Nombre:...Carrera..........Grupo.........

- Conteste en forma ordenada identificando la pregunta e item que corresponde.
- No se permite el uso de CALCULADORA.
- Cada solución debe llevar desarrollo y respuesta.
- Debe justificar adecuadamente su respuesta.
- Tiempo: 90 minutos.

1.(1,5 pts) ....
2.(1,0 pts)..........
3.(1,0 pts)..........
4.(2,5 pts) ....

Nota:..........

1. Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinar todos los valores de a tal que la matriz A sea invertible.

Respuesta:
Para que la matriz A sea invertible se debe cumplir que:

$$det(A) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow 3(0) - a(0) + a(-2+3) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \; a \neq 0$$

$\therefore$ Si $a \neq 0$ la matriz es invertible.

b) Para $a = 1$ determine la inversa de A.

Respuesta:
Ampliando por la identidad y haciendo operaciones filas obtendremos la matriz inversa, a saber:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underrightarrow{f_{12}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_{1(-3)+2}]{f_{1(-3)+3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \underrightarrow{f_{23}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_{2(1)+1}]{f_{2(-4)+3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 9 & -4 \end{array}\right) \therefore \text{Si } a = 1 \text{ entonces } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz A se dice involutiva si su cuadrado es igual a la matriz identidad, esto es, $A^2 = I$. Halle las condiciones de una matriz diagonal $B \in M_2(\mathbb{R})$ para que sea involutiva.

Sea $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (recordemos que es una matriz cuadrada de orden dos y diagonal)

Para que B sea involutiva, se debe cumplir que:

$$B^2 = I$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 = I$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = I$$

De lo anterior se desprende que:

$a^2 = 1 \wedge b^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1 \wedge b = \pm 1.$

$\therefore$ Para que una matriz $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ sea involutiva $a = \pm 1 \wedge b = \pm 1$

3. Usando propiedades de determinante, calcule:

$$det \begin{pmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix} \qquad \text{Sabiendo que:} \quad det \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} = 7$$

Respuesta

Utilizaremos operaciones elementales filas para mostrar que ambas matrices son equivalentes.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} \overrightarrow{f_{12}} \begin{pmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \overrightarrow{f_{23}} \begin{pmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \xrightarrow[f_{3(-2)}]{f_{1(2)} \ | \ f_{2(2)}} B = \begin{pmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$det(A) = 7 \qquad - det(A) = -7 \qquad -(-det(A) = - - 7 = 7 \qquad 2 \cdot 2 \cdot -2 \cdot det(A) =$

$-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = -56$

$\therefore$ El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix}$ es -56

Forma opcional

$$det\begin{pmatrix} 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix} = 2 \cdot det\begin{pmatrix} p & q & r \\ 2u & 2v & 2w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix} = 2^2 \cdot det\begin{pmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix}$$

$$= -2^3 \cdot det\begin{pmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} = 2^3 \cdot det\begin{pmatrix} u & v & w \\ p & q & r \\ a & b & c \end{pmatrix} = -2^3 \cdot det\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} = -8 \cdot 7 = -56$$

4. Dado el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ 2x+2z-3y & = & 3 \\ -2y+3x+az & = & b \end{array}\right|$$

Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, tal que el sistema:

a) Tenga única solución.

b) Tenga conjunto solución vacío.

c) Tenga infinitas soluciones y encuéntrelas.

Respuesta
Al sistema anterior le asociamos el sistema matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema anterior utilizaremos la matriz ampliada, a saber:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & a & b \end{array}\right)$$

Escalonando,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[f_{1(-2)+2}]{f_{1(-3)+3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & a+3 & b-3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_{2(-1)+3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & b-4 \end{array}\right)$$

a) Tenga única solución.

El sistema tiene única solución si $Rg(A) = 3$. Según el trabajo previo, esto ocurre si $a - 1 \neq 0$.

$\therefore$ Para que el sistema tenga única solución $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ y $b \in \mathbb{R}$.

b) Tenga conjunto solución vacío.

El sistema tiene solición vacía si $Rg(A) < Rg(A|b)$. Observando la matriz escalonada en el trabajo previo, la condición de los rangos se produce si $a = 1 \wedge b \neq 4$.

$\therefore$ El sistema tiene solución vacía si $a = 1 \wedge b \neq 4$

c) Tenga infinitas soluciones y encuéntrelas.

El sistema tendrá infinitas soluciones si $Rg(A) = Rg(A|b) < 3$, esto ocurre si $a = 1 \wedge b = 4$
$\therefore$ El sistema tiene infinitas soluciones si $a = 1 \wedge b = 4$.
Por otra parte si $a = 1 \wedge b = 4$, reemplazando obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_{2(-1/5)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_{2(-1)+1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lo anterior equivale a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - \frac{1}{5}z & = & \frac{6}{5} \\ y - \frac{4}{5}z & = & \frac{-1}{5} \\ z & = & z \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{5}z + \frac{6}{5} \\ y & = & \frac{4}{5}z + \frac{-1}{5} \\ z & = & z \end{array}\right|$$

Por lo que un vector solución $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ está dado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}z + \frac{6}{5} \\ \frac{4}{5}z + \frac{-1}{5} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{-1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5}z \\ \frac{4}{5}z \\ z \end{pmatrix}$$

Luego el conjunto solución está dado por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{-1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \;/\; k \in \mathbb{R} \right\}$$