UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA

Prueba Parcial I+Pauta

Martes 9 de Abril de 2013

1) *a*) (0,5 pts.)Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} c & c & c \\ 3c & 5c & 7c \\ 4c & 6c & 8c \end{bmatrix}$, con $c \neq 0$. Calcule $det(A)$ utilizando propiedades del determinante.

Desarrollo:

$$A = \begin{bmatrix} c & c & c \\ 3c & 5c & 7c \\ 4c & 6c & 8c \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{2+(1)1}} \begin{bmatrix} c & c & c \\ 4c & 6c & 8c \\ 4c & 6c & 8c \end{bmatrix}$$

Luego:

$det(A) = c^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0,$ ya que la matriz posee dos filas iguales.

$$\therefore det(A) = 0$$

b) (0,5 pts.)Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, tal que A es invertible y $(A + I_n)$ es invertible. Pruebe que la inversa de $(I_n + A^{-1})$ es $A(A + I_n)^{-1}$.

Desarrollo:

Forma 1:
$(I_n + A^{-1})$ es la inversa de $A(A + I_n)^{-1}$ ssi: $(I_n + A^{-1}) \cdot (A(A + I_n)^{-1}) = I_n$. Luego:

$$\begin{aligned} (I_n + A^{-1}) \cdot A(A + I_n)^{-1} &= (I_nA + A^{-1}A)(A + I_n)^{-1} \\ &= (A + I_n)(A + I_n)^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Forma 2:
Buscamos la inversa de $A(A + I_n)^{-1}$

$$\begin{aligned} [A(A + I_n)^{-1}]^{-1} &= [(A + I_n)^{-1}]^{-1}A^{-1} \\ &= (A + I_n)A^{-1} \\ &= (AA^{-1} + I_nA^{-1}) \\ &= (I_n + A^{-1}) \end{aligned}$$

$$\therefore [A(A + I_n)^{-1}]^{-1} = (I_n + A^{-1})$$

c) (1,0 pts.)Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertible, tal que $AXA^{-1} = B$

i) Despeje la matriz X usando propiedades de la operatoria de matrices.

Desarrollo:

$$\begin{array}{rrcll} & AXA^{-1} & = & B & / \cdot A^{-1} \text{ por la izquierda} \\ \Leftrightarrow & (A^{-1}A)XA^{-1} & = & A^{-1}B & \\ \Leftrightarrow & I_nXA^{-1} & = & A^{-1}B & \\ \Leftrightarrow & XA^{-1} & = & A^{-1}B & / \cdot A \text{ por la derecha} \\ \Leftrightarrow & X(A^{-1}A) & = & A^{-1}BA & \\ \Leftrightarrow & XI_n & = & A^{-1}BA & \\ \Leftrightarrow & X & = & A^{-1}BA & \end{array}$$

ii) Use lo obtenido en $i)$ para hallar la matriz X si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Desarrollo:

Necesitamos calcular A^{-1}, lo haremos utilizando la matriz ampliada y operaciones elementales fila.

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+(-2)2}]{f_{1+(-1)2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_{(-1)3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego, como $X = A^{-1}BA$ se tiene:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2) Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ x-y & = & 0 \\ 3x+y+bz & = & 0 \end{array}\right|$$

Desarrollo:

El sistema en forma matricial queda $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Escalonamos la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & b & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+(-3)1}]{f_{2+(-1)1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & -a \\ 0 & -2 & b-3 & -3a \end{array}\right] \xrightarrow{f_{3+(-1)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & -a \\ 0 & 0 & b-2 & -2a \end{array}\right]$$

a) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que el sistema:

i) Tenga única solución.

Respuesta:

$b \neq 2, a \in \mathbb{R}$

ii) Tenga infinitas soluciones.

Respuesta:

$b = 2 \wedge a = 0$

iii) Tenga conjunto solución vacío.

Respuesta:

$b = 2 \wedge a \neq 0$

b) Resuelva el sistema anterior para $a = 0$ y $b = 2$.

Desarrollo:

Si $a = 0$ y $b = 2$ es sistema anterior queda:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \\ 3x+y+2z & = & 0 \end{array}\right|$$

El cual es un sistema homogéneo, escalonando la matriz asociada se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{3+(-3)1}]{f_{2+(-1)1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{3+(-1)2}]{f_{2(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2y+z & = & 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & -2y \end{array}\right|$$

$$\therefore S = \left\{ \begin{bmatrix} y \\ y \\ -2y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & k-1 & k \end{bmatrix}$.

Encuentre el (los) valor(es) de $k \in \mathbb{R}$, sabiendo que el rango de A es igual a 2.

Desarrollo:

Escalonamos la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & k-1 & k \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & k-1 & k \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{3+(1)1}]{f_{2+(-3)1}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 10 & 16 \\ 0 & k-5 & k-5 \end{bmatrix}$$

como el rango de A es 2 se tiene que $k = 5$.