UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA

BAIN 036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA
Guía de Ejercicios Nº 4

1.- Determine cuáles de las funciones siguientes son transformaciones lineales :

a) $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y)=(2x-y,x)$

b) $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y,z)=(z,3x-4y)$

c) $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y,z)=(2x+1,y+z)$

d) $F:M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2,\ F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(a+d,b+c)$

e) $F:P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ F\left(at^3+bt^2+ct+d\right)=ad-bc$

2.- Determine Ker(T) e Im(T) para las transformaciones lineales siguientes:

a) $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y,z,w)=(2x-y+z,y+3z-w)$

b) $T:M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}), T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})=(a+b-2c)x^2+(-b+3c)x+(a+c)$

3.- Sean $x_1=(1,1,-1),\ x_2=(1,0,1),\ x_3=(2,1,-1),\ x_1'(1,0,1,0),\ x_2'(0,1,1,0),\ x_3'=(1,0,0,1)\ y\ x_4'(1,1,1,0).$
$\{x_1,x_2,x_3\}$ es base de IR^3 y $\{x_1',x_2',x_3',x_4'\}$ en base de $\mathbb{R}^4$. Definamos $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ transformación lineal por : $T(x_1)=x_1'-x_4'$, $T(x_2)=x_1'+x_2'+x_3'$, $T(x_3)=x_1'+2x_2'+2x_3'+x_4'$.

a) Halle $T(x,y,z)$, para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

b) Determine Ker(T) y Im(T) y nulidad y rango de T.

4.-

a) Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z)=(x-3y-2z,y-4z,z)$. Pruebe que T es un isomorfismo y halle T^{-1}.

b) Halle una aplicación lineal $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya imagen sea : < (1,2,3),(4,5,6) >.

c) Halle una aplicación lineal $F:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ / Ker$F$= <(1,2,3,4),(0,1,1,1) >.

d) Sea $T_u:V \to V$ la traslación en el vector u, o sea : $T(v)= v + u$. ¿Para qué valores de u, T_u es lineal?.

5.- Pruebe que :

a) Si $T_1,\ T_2\ :\ V \to\ V$ son lineales, entonces $T_1 \circ T_2$ es lineal.

b) Si $A\in M_{mxn}(\mathbb{R})$, entonces $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ T(X)=AX$ es transformación lineal.
¿Cuál es el Kernel de T?.

c) Si $F:\ V \to V$ es transformación lineal y biyectiva (o sea isomorfismo) entonces, F^{-1} también es lineal y biyectiva.

d) Si $T:\ U \to V$ es transformación lineal, y $k\in K, k\neq 0$, entonces : T y kT tienen el mismo Kernel e Imagen.

6.- Considere las bases de $\mathbb{R}^3,\ E=\{e_1=(1,-1.1),\ e_2=(1,0,1),\ e_3=(0,1,1)\}$ y
$F=\{f_1=(2,-1,2),\ f_2=(1,1,2),\ f_3=(1,0,2)\}$.

a) Halle P, matriz cambio de base de E a F, y Q, matriz cambio de base de F a E.

b) Compruebe que : $Q=P^{-1}$.

c) Sea $x=e_1+2e_2-e_3$. Exprese x como combinación lineal de los elementos de la base F, usando la parte a).

7.- Considere las bases de $P_1(\mathbb{R})$: $\beta_1=\{p_1=1,p_2=x\},\ \beta_2=\{q_1=1+2x,q_2=2+3x\}$.

a) Halle matrices de cambio de base de β_1 *a* β_2 (A) y de β_2 *a* β_1 (B).

b) Pruebe que : $A[f]_{\beta_1}=[f]_{\beta_2}$, para todo $f\in P_1(\mathbb{R})$.

c) Pruebe que : $B[f]_{\beta_2}=[f]_{\beta_1}$, para todo $f\in P_1(\mathbb{R})$.

d) Sea $T:P_1(\mathbb{R})\to P_1(\mathbb{R}),\ T(a+bx)=(2a-3b)+(a+b)x$, operador lineal.
Pruebe que : $[T]_{\beta_1}=B\cdot\ [T]_{\beta_2}\cdot A$

8.- Sean $V = \langle(1,0,1),(1,-2,1)\rangle$ y $W = \langle(1,0,1,-1),(0,1,-1,0)\rangle$.

Sea $T: V \to W$ cuya matriz en las bases dadas de V y W es $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Describa explícitamente la aplicación *T*.
b) Pruebe que {2,-2,2),(0,2,0)} y {(2,1,1,-2),(-1,2,-3,1)} son bases de *V* y *W* respectivamente.
c) Halle la matriz de *T* en las bases dadas en b).

9.- a) Sea $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$ fijo. ¿Cuál es la matriz asociada a *F* en la base canónica?

b) Sea $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Halle T_β, donde β es la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$, para las transformaciones:

- $T(A) = MA$
- $T(A) = AM$
- $T(A) = MA - AM$

10.- Para las siguientes transformaciones lineales, halle valores propios, el espacio propio de cada uno y una base.

a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (3x+3y, x+5y)$
b) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x-y, 2x+3y+2z, x+y+2z)$

11.- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Muestre que *A* no tiene valores propios y por tanto no es diagonalizable.

12.- Sean $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

a) Halle valores propios y espacio propio para cada una.
b) Determine si son diagonalizables o no.

13.- Demuestre que :

a) Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.
b) Una matriz y su traspuesta tienen los mismos valores propios.
c) Si λ es valor propio de *A* y *X* es vector propio de *A* asociado a λ, entonces $A^2X = \lambda^2 X$.
¿se puede concluir que todos los valores propios de A^2, son los cuadrados de los valores propios de *A* ?.
d) $T: V \to V$ invertible, λ valor propio de $T \Rightarrow \lambda^{-1}$ es valor propio de T^{-1}.
e) *x* vector propio de T_1 y T_2, operadores lineales en *V* (*K*) espacio vectorial
$\Rightarrow$ *x* es vector propio de $k_1T_1 + k_2T_2, \forall k_1, k_2 \in K$.

14.- a) Para $A \in M_n(\mathbb{R})$, definimos $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (*Exponencial de la matriz A*).

Pruebe que :

- Si $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$ es matriz diagonal entonces : $e^D = \operatorname{diag}(e^{d_1}, e^{d_2}, ..., e^{d_n})$
- Si $A = PDP^{-1}$ entonces : $e^A = Pe^D P^{-1}$.

b) Considere ahora $A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -9 \\ -12 & -2 & 12 \\ 6 & 3 & -5 \end{bmatrix}$. Calcule e^A. Para ello :

- Pruebe que *A* es diagonalizable.
- Halle *P* tal que : $P^{-1}AP = D$, *D* diagonal (o sea : $A = PDP^{-1}$).
- Use parte a) para calcular e^A .

15.- Sea $A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, Halle polinomio característico de *A*. A partir de él halle valores propios de *A*. verifique que la suma de los valores propios de *A* es igual a la traza de *A* y que el producto de ellos es el determinante de *A*.