Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

La Circunferencia

Circunferencia como L.G.

Una *circunferencia* es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo del plano.

El punto fijo se llama *centro* y la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se llama *radio* de la circunferencia.

Ecuaciones de la circunferencia

- Ecuación de la circunferencia de centro $C(h,k)$ y radio $r,\ r>0$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

- Ecuación General de la circunferencia

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Ejemplo 1

Determinar ecuación de la circunferencia:

a) De centro $C(1,-2)$ y radio $r = 3$

Resolución:

a) La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad \text{(Ecuación Centro-Radio)}$$

Desarrollando se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \quad \text{(Ecuación General)}$$

La Circunferencia

Determinar ecuación de la circunferencia:

b) Que tiene $P(-5,7)$, $P'(1,1)$ como puntos extremos de un diámetro. ¿El origen es punto interior, punto exterior o punto de la circunferencia? Grafique

Resolución:

b) Sean $C'(h,k)$ el centro y el radio de la circunferencia, entonces:

$$h = (-5+1)/2 = -2, \quad k = (7+1)/2 = 4 \Rightarrow C'(-2,4)$$

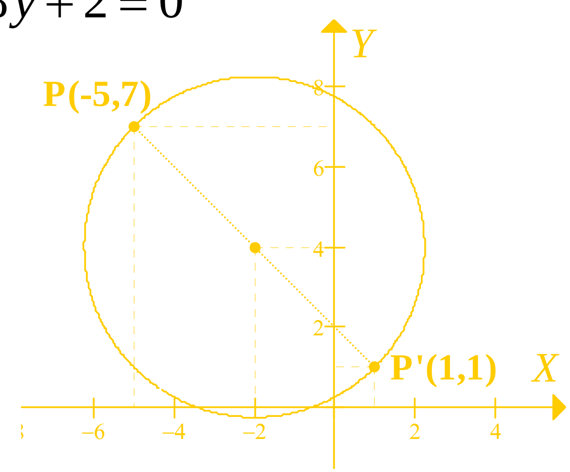
Además, $r' = d(C',P') = \sqrt{(1+2)^2 + (1-4)^2} = 3\sqrt{2}$

Luego, la ecuación de la circunferencia es

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 18 \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$$

Como $d(O,C') = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} > \sqrt{18} = r'$,

entonces es punto exterior a la circunferencia.



Ejemplo 2

Identifique los lugares geométricos definidos por las ecuaciones:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 18 = 0$

Resolución:

En todos los casos completamos cuadrados de binomios.

a) $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) + 9 - 9 - 4 = 0$

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$ Es una circunferencia con centro (3,-2) y radio 2.

b) $4(x^2 + x) + 4(y^2 - 2y) + 5 = 0$

$4(x + \frac{1}{2})^2 + 4(y-1)^2 + 5 - 1 - 4 = 0$

$(x + \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = 0$ El gráfico es el punto

c) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = -1$ El gráfico es el conjunto vacío.

Ejemplo 3

Determine la ecuación de la circunferencia, en cada caso:

a) Que pasa por los puntos $P(-1,2),\ Q(0,0),\ R(3,0)$

Resolución:

a) Sea $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ la ecuación de la circunferencia.

Como $P,\ Q,\ R$ son puntos de la circunferencia, se debe tener:

$$\left.\begin{array}{l} 1+4-D+2E+F=0 \\ F=0 \\ 9+3D+F=0 \end{array}\right\}$$

De aquí, $D=-3,\ E=-4,\ F=0$

Por tanto, la ecuación es

$$x^2+y^2-3x-4y=0$$

Su centro es $(\frac{3}{2},2)$ y su radio es $\frac{5}{2}$

Ejemplo 4

Determine la ecuación de la circunferencia, en cada caso:

b) Que pasa por los puntos $(-1,-4),\ (2,-1)$ y cuyo centro está en la recta de ecuación $4x+7y+5=0$.

Resolución:

b) Sean (h,k) el centro y el radio de la circunferencia de ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Entonces:

$$\left.\begin{aligned}(-1-h)^2+(-4-k)^2&=r^2\\(2-h)^2+(-1-k)^2&=r^2\\4h+7k+5&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}h^2+k^2+2h+8k+17&=r^2\\h^2+k^2-4h+2k+5&=r^2\\4h+7k+5&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}h+k+2&=0\\4h+7k+5&=0\end{aligned}\right\}$$

De aquí, $h=-3,\ k=1,\ r=\sqrt{29}$

Así, la ecuación de la circunferencia es $(x+3)^2+(y-1)^2=29$

o bien $x^2+y^2+6x-2y-19=0$

Tangentes a una Circunferencia

<u>1er Caso</u>: Dada la circunferencia y el punto de tangencia.

Si $C(h,k)$ es el centro, r es el radio y $P(x_0, y_0)$ es punto de tangencia

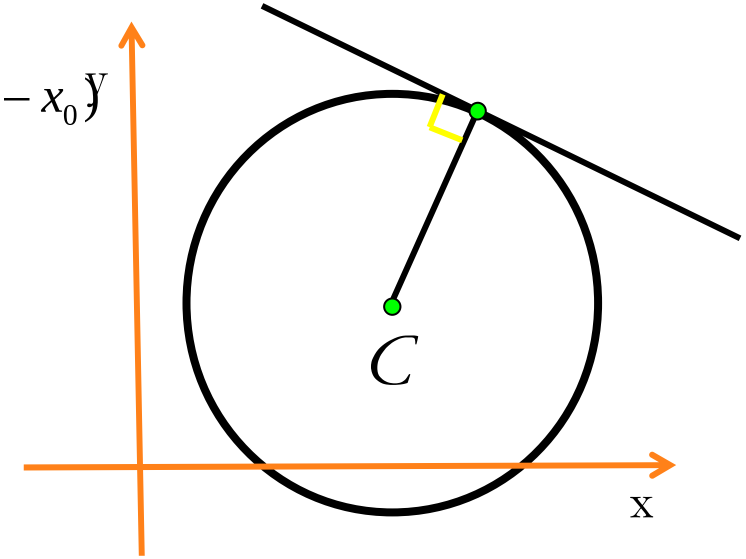
La pendiente del segmento $\overline{CP}$ es $\dfrac{y_0 - k}{x_0 - h}$

La pendiente de la tangente es $-\dfrac{x_0 - h}{y_0 - k}$

Luego la recta tangente es $y - y_0 = -\dfrac{x_0 - h}{y_0 - k}(x - x_0)$

que se puede expresar como

$$(x_0 - h)(x - h) + (y_0 - k)(y - k) = r^2$$



La Circunferencia

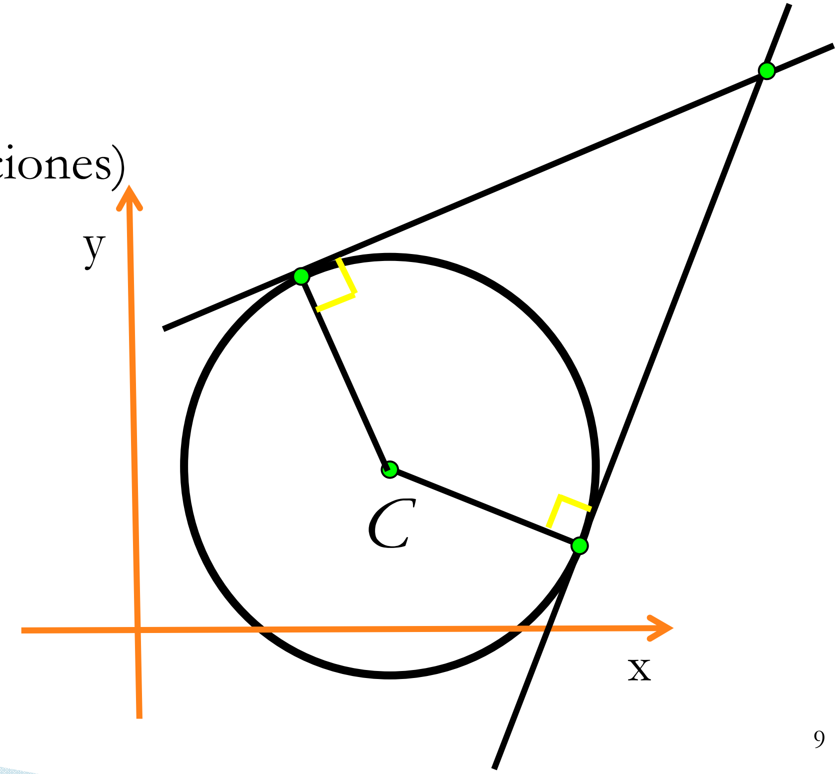
<u>2º Caso</u>: Dada la circunferencia y un punto exterior a ella (por donde pasa la tangente).

Si $C(h,k)$ es el centro, r es el radio y $P(x_1,y_1)$ es punto exterior a la circunferencia, por donde debe pasar la tangente.

La familia de rectas que pasan por $P(x_1,y_1)$ es $L_m:\ y-y_1=m(x-x_1)$

Se debe cumplir que $d(C,L_m)=r$

De aquí se obtiene valor de r (Dos soluciones)

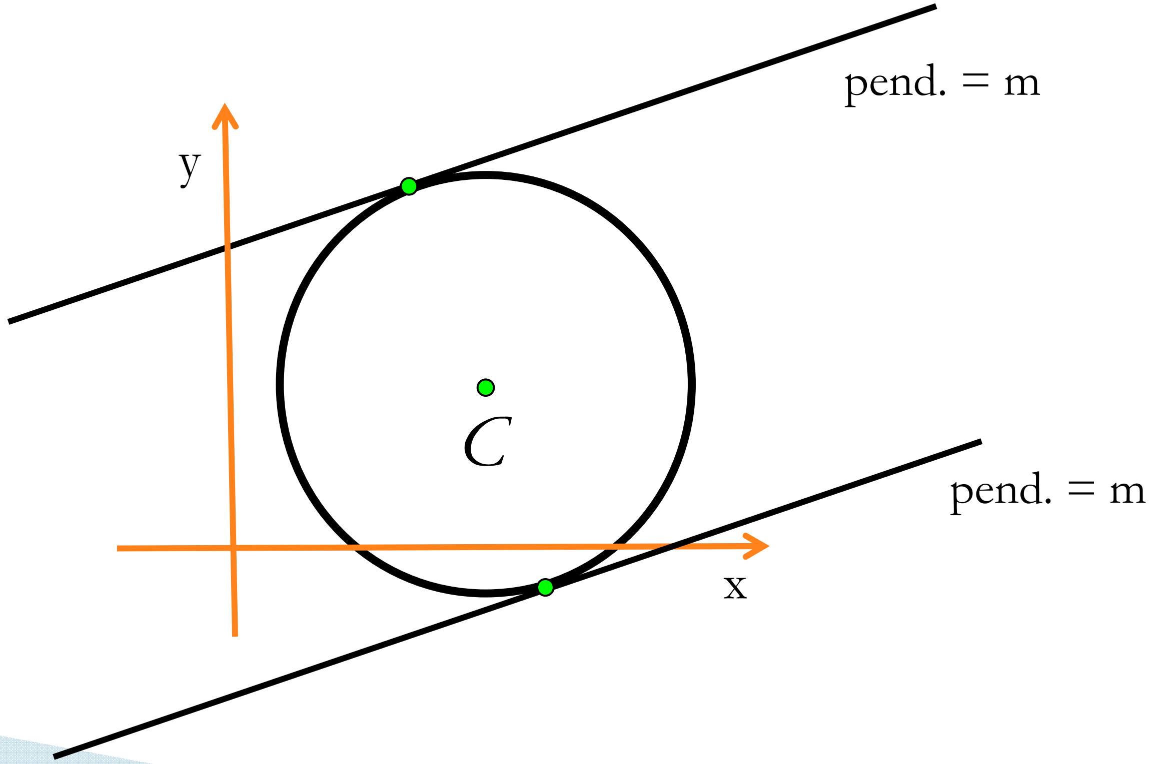


Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Tangentes a una Circunferencia

<u>3er Caso</u>: Dada la circunferencia y la pendiente de la recta tangente.

Análogo al caso 2º, considerando ahora la familia de rectas con pendiente dada m, que es $L_b:\ y = mx + b$. (También hay dos soluciones)



Ejemplo 5

Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación:

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$, en el punto $(3,5)$

Resolución

Completando cuadrados se obtiene que la circunferencia tiene ecuación

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$, centro $C(4,3)$ y radio $r = \sqrt{5}$

La recta tangente L es perpendicular al segmento CP con $P(3,5)$

Entonces: $m_{CP} = -2 \Rightarrow m_L = \dfrac{1}{2}$

Luego, la ecuación de la recta tangente es $y - 5 = \dfrac{1}{2}(x-3)$

o bien $x - 2y + 7 = 0$

Ejemplo 6

Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación:

$x^2+y^2+2x+2y-24=0$, trazada desde el punto $(8,6)$.

Resolución

La circunferencia tiene ecuación $(x+1)^2+(y+1)^2=26$, centro $C(-1,-1)$ y radio $r=\sqrt{26}$.

La ecuación de la familia de rectas que pasan por (8,6) es $y-6=m(x-8)$ o también

$$mx-y-8m+6=0$$

Se debe cumplir $d(C,L_m)=r$ O sea $\dfrac{\left|-m+1-8m+6\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{26}$

$$\Leftrightarrow \left|7-9m\right|=\sqrt{26}\sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 55m^2-126m+23=0 \Rightarrow m_1=\frac{1}{5}\ ,\ m_2=\frac{23}{11}$$

Así se obtienen dos rectas tangentes de ecuaciones

$y-6=\dfrac{1}{5}(x-8),\ y-6=\dfrac{23}{11}(x-8)$ o bien $x-5y+22=0,\ 23x-11y-118=0$

Ejemplo 7

Halle la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación:

$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$ y que tiene pendiente 1 .

Resolución

La circunferencia tiene centro $C(5,-1)$ y radio $\sqrt{8}$

La familia de rectas de pendiente 1 está dada por $y = x + b$ con $b \in \mathbb{R}$.
O bien $L_b: \; x - y + b = 0$.

Se debe cumplir. $d(C, L_b) = r$ o sea $\dfrac{|6+b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$

Resolviendo se obtiene $b = -2, \; b = -10$

Luego, las ecuaciones de las rectas son

$$y = x - 2, \; y = x - 10$$