

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ALGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

JORGE ELIÉCER RONDÓN DURÁN

BOGOTÁ, D.C., 2006

COMITE DIRECTIVO

Jaime Alberto Leal Afanador Rector

Roberto Salazar Ramos Vicerrector Académico

Sehifar Ballesteros Moreno Vicerrector Administrativo

Maribel Córdoba Guerrero Secretaria General

Edgar Guillermo Rodríguez Díaz Director Planeación



© Editorial UNAD, 2005

Primera edición 2005 ISBN:

Prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin autorización de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD

La edición de esta guía estuvo a cargo de la Vicerrectoría Funcional de Medios para el Aprendizaje-Unidad de Publicaciones

Ediciones Hispanoamericanas

Diagramación y armada electrónica

Bogotá, D.C. 2005

Contenido

INTRODUCCIÓN	5
UNIDAD 1: ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA	9
INTRODUCCIÓN	15
OBJETIVOS	13
MAPA CONCEPTUAL	21
CAPITULO 1. ECUACIONES	25
Introducción	27
Ecuaciones de primer grado	29
Ecuaciones de primer grado con una incógnita	31
Método egipcio (la régula falsa)	37
Método axiomático	41
Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas	47

Ecuaciones Diofánticas
Ejercicios: ecuaciones de primer grado
Solución general de ecuaciones Diofánticas
Dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas
Método 1: método gráfico
Método 2: método de eliminación
Reducción
Igualación
Sustitución
Método 3: método por determinantes
Tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas
Método 1: solución por eliminación
Método 2: solución por determinantes
Problemas con ecuaciones de primer grado
Ecuaciones de primer grado con una incógnita,
problemas
Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas,
problemas
Ecuaciones de primer grado con tres incógnitas,
problemas
Ecuaciones de segundo grado
Método axiomático
Ге́cnica por factorización
Ге́cnica de completar cuadrados
Ге́спіса por la fórmula cuadrática
Ecuaciones con radicales
Ecuaciones con fracciones
Problemas con ecuaciones de segundo grado
Ecuaciones de tercer grado
Resolución moderna
Solución de ecuación de tercer grado
Ecuaciones polinómicas
Ecuaciones racionales
Fracciones parciales

CAPITULO 2: INECUACIONES
INTRODUCCIÓN
OBJETIVOS
Desigualdad
Propiedades de las desigualdades
Operaciones con intervalos
Inecuaciones lineales
Inecuaciones lineales con una incógnita
Inecuaciones racionales
Inecuaciones cuadráticas
Inecuaciones mixtas
Problemas con inecuaciones de una variable
Inecuaciones condos variables
Sistema de inecuaciones, problemas
Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto
Ecuaciones con valor absoluto
Inecuaciones con valor absoluto
CAPITULO 3: FUNCIONES
INTRODUCCIÓN
OBJETIVOS
Sistema de coordenadas
Coordenadas cartesianas
Diagrama de Venn
Relaciones
Funciones
Funciones de valor real
Las funciones según el tipo de relación

Simetría de las funciones
Descripción de una función
Clasificación de funciones
Funciones especiales
Funciones algebráicas
Función cuadrática
Función cúbica
Función polinómica
Funciones racionales
Función radical
Funciones trascendentales
Función logarítmica
Funciones trigonométricas
Relaciones trigonométricas
Función trigonométrica
Función seno
Función coseno
Función tangente
Funciones hiperbólicas
Algebra de funciones
Composición de funciones
Funciones inversas
Funciones algebráicas inversas
Funciones trascendentales inversas
Aplicación de las funciones
Trigonométricas
CAPITULO 4: Trigonometría
INTRODUCCIÒN
OBJETIVOS

Identidades trigonométricas
Identidades básicas
Identidades de suma y diferencia
Identidades de ángulo doble
Identidades de ángulo mitad
Identidades producto-suma
Identidades de suma- producto
Demostración de identidades trigomoétricas
Ecuaciones trigonométricas
Análisis de triángulos no - rectángulos
Teorema de coseno
Triángulos no rectángulos, problemas de
aplicación
Hipernometría
Identidades hiperbólicas
AUTOEVALUACIÓN UNIDAD 1
UNIDAD 2: GEOMETRÍA ANALÍTICA
INTRODUCCIÓN
OBJETIVOS
MAPA CONCEPTUAL
CAPÍTULO 1: LA RECTA
INTRODUCCIÓN
Distancia Euclidiana La recta
Ecuación de la recta

La pendiente
El intercepto
Rectas paralelas
Rectas perpendiculares
CAPÍTULO 2: LAS CÓNICAS
INTRODUCCIÓN
Circunferencia
La elipse
Ecuación canónica con focos en y
Excentricidad
Parábola
Hipérbolas
Asíntotas
Traslación de ejes
Circunferencia
Elipse
Parábola
Hipérbola
Ecuación general de segundo grado
Circunferencia
Elipse
- Hipérbola
Aplicación de la geometría analítica
UNIDAD 3: SUMATORIA Y PRODUCTORIAS
INTRODUCCIÓN
OBJETIVOS
MAPA CONCEPTUAL

CAPITULO 1: LAS SUMATORIAS
INTRODUCCIÓN
Denotación de sumatorias
Teoremas
Propiedades
Operaciones de sumatorias
La media aritmética
Dobles sumatorias
CAPITULO 2: PRODUCTORIAS
INTRODUCCIÓN
La productoria
Cálculo de productorias
Propiedades de productorias
Ejercicios diversos
Factorial
AUTOEVALUACIÓN UNIDAD 3
INFORMACIONES DE RETORNO
RIRI IOCDAEIA

Introducción

Trigonometría y Geometría Analítica. La matemática como ciencia a través de su historia ha buscado fundamentos sólidos que garanticen su validez absoluta y universal, dando así su gran forma de ser exacta y rigurosa, esto hace que presente diversas ramas, desde la aritmética, pasando por el álgebra, geometría; hasta temáticas avanzadas como la teoría de conjuntos, geometría diferencial y otros. Todo esto tiene como finalidad dar la sociedad una «herramienta formal» que le permite demostrar lo que está bien y lo que está mal.

En este orden de ideas el curso que se presenta aquí, tiene diversas temáticas que de una u otra forma hacen parte de esta gran herramienta formal. Las temáticas presentadas son de interés para estudiantes de cualquier programa unviersitario, están desarrolladas en un lenguaje sencillo; pero con gran rigor matemático, ya que el propósito fundsamental es desarrollar en los estudiantes conocimientos sólidos en álgebra, trigonometría y geometría analítica.

En curso está desarrollado en tres unidades a saber:

La unidad uno, contempla lo referente al álgebra y Trigonometría, allí se presentan, los principios, teorías, propiedades, leyes y aplicaciones de las ecuaciones, inecuaciones y funciones. También lo referente a la trigonometría analítica. Para desarrollar estos conocimientos es pertinente activar los conocimientos previos en aritmética, álgebra y geometría plana y espacial; lo cual se ofrece en el curso de matemáticas básicas, el cual se debe consultar cuando así se requiera.

La unidad dos, hace referencia a la geometría analítica, en donde se analizar lo referente a la recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola, haciendo énfasis a los parámetros, gráfica, ecuación canónica y ecuación general de las mismas. No se puede pasar por alto el análisis de la ecuación general de segundo grado y su relación con las figuras geométricas analizadas. Finalmente se trabajan algunas de las muchas aplicaciones que tiene la geometría analítica.

La tercera unidad, trabaja sobre las sumatorias y productorias, temáticas aparentemente nuevas, pero su importancia es el contexto matemático, motiva a trabajarlas en forma detallada. Estos temas son insumos matemáticos importantes para poder abordar temas de matemáticas más vanzados como las progresiones, integrales, sucesiones, entre otros.

Para una buena comprensión e interiorización de los conocimientos, se debe hacer un buen uso de la metodología que la UNAD propone en su modelo académico - pedagógico, donde desde el estudio independiente hasta el de grupo de curso, son fundamentales en el trabajo autónomo del estudiante; la guía didáctica como la carta de navegación del curso, permite que el estudiante dinamice su proceso de aprendizaje.

Los ejemplos modelos ilustran el tema, los ejercicios propuestos motivan la profundización del mismo; además, de que se presenta su respuesta para corrobar que el procedimiento es adecuado. Cada unidad tiene la autoevaluación, que permite al estudiante hacer un seguimiento de su proceso académico.

Para aprender, matemáticas, se requiere fundamentalmente querer hacerlo, tener algo de perspicacia, sentido lógico y muchas ganas de enfrentarse a más y más retos.

Animo y éxitos en esta gran aventura, que ojalá sea agradable a usted, estimado lector.

El autor



Introducción

l Álgebra y la Trigonometría son áreas dentro del a ciencia de las matemáticas que busca desarrollar los principios fundamentales necesarios para resolver problemas en todos los campos del saber.

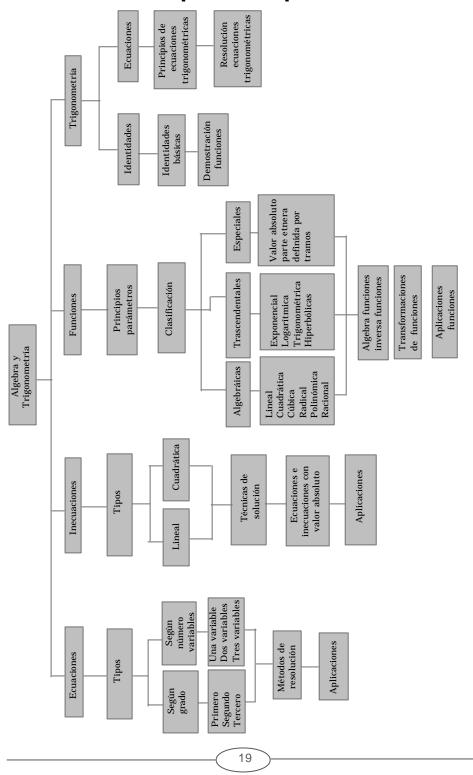
En esta unidad se tratarán los principios, propiedades, definiciones y aplicaciones del álgebra y la trigonometría. Cada temática se desrrollará en forma metódica, ilustrativa y didáctica, con el propóstio de que los estudiantes activen sus conocimientos previos, que exploren y desarrollen nuevos conocimientos, de tal forma que los puedan comprender e interiorirzar para utilizarlos cuando sea necesario.

La parte correspondiente de álgebra contempla las ecuaciones e inecuaciones en todos los contextos, las funciones, sus características, su definición según el tipo de relación y según el tipo de expresión que la representa. Se hace énfasis en las características de cada una, sus parámetros y sus aplicaciones.

Dentro de la trigonometría; además, del análisis de las funciones trigonométricas se desarrollará la trigonometría analítica, especialmente lo referente a identidades y ecuaciones trigonométricas.

Con mucho entusiasmo y excelente trabajo, se consignan buenos resultados sobre álgebra y trigonometría.

Mapa conceptual



OBJETIVOS

General

 Que la comunidad estudiantil de la UNAD, reconozca los principios y teorías del álgebra, trigonometría y geometría analítica, profundice las particularidades de cada temática y finalmente pueda aplicar dichos principios en las diferentes áreas del saber.

Específicos

- Que los estudiantes decriban claramente los ecuaciones e inecuaciones, a través del estudio teórico y el análisis de casos modelo, para que puedan ser utilizados como herramienta matemática en diferentes contextos.
- Que los estudiantes identifiquen claramente las funciones, sus principios, mediante el etudio adecuado y el desglosamiento de las clases de funciones, que facilite su posterior utilización en las situaciones que se requieran.
- Que los estudiantes describan claramente sus sumatorias y productorias, por medio de un trabajo específico de éstos temas, para poder posteriormente asumir temas más avanzados como las sucesiones y series.
- Que los estudfiantes resuelvan problemas modelos que involucren ecuaciones, inecuaciones, funciones, trigonometría, sumatorias y productorias, utilizando los conocimientos adquiridos en cada temática.
- Que los estudiantes planteen y resuelvan ejercicios de diferentes campos del saber, aplicando los conocimientos desarrollados en éste curso académico y así contribuir en la solución de problemas en las áreas de ciencias naturales, ingeniería, administración, ciencias sociales, ciencias agrarias y otros.



ECUACIONES

Introducción

Las ecuaciones son de suma importancia en las matemáticas y otras ciencias, desde los babilonios, pasando por los egipcios y los griegos,, ...hasta nuestra época, las ecuaciones han sido el pan de cada día para resolver problemas donde se requiere saber el valor de una «incógnita».

Las ecuaciones son igualdades, que se hacen verdaderas para valores específicos, por ejemplo si: 2x + 5 = 9; para que esta igualdad sea verdadera, el valor de x debe ser 2 y no otro.

Resolver una ecuación es hallar el valor o los valores de la incógnita que hagan verdadera dicha igualdad. A su vez las soluciones pueden ser reales o imaginarias; según el caso, por ejemplo: $x^2-4=0$, x puede tomar los valores 2 y-2, pero si $x^2+4=0$, x toma valores $\sqrt{2}i y-\sqrt{2}i$. Siendo i el símbolo

de Imaginario. (Recordemos los números imaginarios del curso de matemáticas básica).

Existen diferentes clases de ecuaciones, según el grado del polinomio que la describe, según el número de variables, según los coeficientes.

Según el grado existen ecuaciones de primer grado, segundo grado, etc. Según el número de variables; ecuaciones de una variable, ecuciones de dos variables, etc. Según los coeficientes, ecuaciones de coeficientes enteros, de coeficientes racionales, coeficientes reales, etc.

Para resolver ecuaciones, se utiliza los principios de operaciones opuestas, ya que cuando a una ecuación se le suma y resta la misma cantidad a uno de sus términos,

ésta no se altera, igual si se multiplica y divide uno de sus términos. Otra forma es sumar o restar a los dos términos de la ecuación la misma cantidad, este no se altera.

En general, a medida que avancemos en el estudio de ecuaciones vamos adquiriendo mucha destreza en su forma de solución.

Objetivo general

• Que los estudiantes identifiquen claramente las ecuaciones, su clasificación, su resolución y la forma de plantearla de situaciones descriptivas.

Objetivos específicos

- Reconocer claramente las ecuaciones de primero, segundo y más grados, de una, dos y tres incóginitas.
- Resolver ecuaciones de primero, segundo y más grados, con una, dos y tres incógnitas.
- . Solucionar problemas que involucren ecuaciones.



CUACIONES DE PRIMER GRADO

Para analizar las ecuaciones, es necesario conceptualizar algunos términos que son comunes en las ecuaciones.

Constante: son términos que toman valores fijos. En álgebra se usan por lo general las primeras letras del alfabeto; a, b, c,... todos los números se consideran constantes, por ejemplo en la expresión: $ax^2 + bx + c$: los términos a, b, y c trabajan como constantes.

Variable: se consideran a los símbolos que pueden cambiar, generalmente las variables se simbolizan con las últimas letras del alfabeto; x, y, z, w,... por ejemplo,

la expresión: $ax^2 + bx + cy = k$, x y y trabajan como variables.

A manera de ejercicio, identifique las variables y las constantes en las siguientes expresiones:

$$4x^3 + 5y^2 - 7z = 0$$

 $ax^3 - by^2 + cz = 4$

Las ecuaciones de primer grado se pueden clasificar, en una incógnita, dos incógnitas, tres incógnitas, etc., para el caso de éste curso trabajaremos con ecuaciones de una, dos y tres incógnitas. Es de anotar que el término incógnita es equivalente a variable, en el contexto que estamos trabajando.

En la resolución de una ecuación se pueden aplicar las propiedades de las operaciones definidas en el conjunto numérico que se esté considerando. Pero no siempre una ecuación tiene solución en un conjunto numérico dado.

Si tenemos la ecuación: x + 5 = 3. Esta <u>no</u> tiene solución en los Naturales; pero si tiene solución en los enteros, racionales, reales.

La ecuación: $x^2 - 2 = 0$, No tiene solución en el conjunto de los enteros (Z), pero Si tiene solución en el conjunto de los reales (R) para el caso del presente texto, si no se dice otra cosa, la solución o soluciones, estarán en el conjunto de los Reales.

Leyes de uniformidad: es pertinente recordar las leyes de uniformidad para la suma y producto de número reales.

Sea a, b, c, d número reales; tal que: a = b y c = d, entonces:

- a) a+c=b+d
- b) a + c = b + c
- c) axc = bxd
- d) axc = bxc

Estas leyes se pueden extender a la resta y división, salvo para casos con denominador cero.

Para el caso de la potencia y raíz:

- e) $a^c = b^c$
- f) $c^a = d^d$
- g) $\sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{b}$; para $a \ge 0$ y $b \ge 0$; $c \in z^+$ y $c \ge 2$
- h) $a \cdot b = 0$; sí solo sí; a = 0 ó b = 0



CUACIONES DEL PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

estas ecuaciones son de la forma: ax + b = c, donde a, b, y c son las constantes y x la variable. el valor de a puede ser entero, racional o real, pero nunca cero. Estudiaremos los diferentes casos.

Sean las ecuaciones:

3x-5=0: coeficiente es entero, expresión entera

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{5} = 0$$
: coeficiente es racional, expresión entera

$$\frac{3x-2}{5x^2} = 8$$
: coeficiente es entero, expresión racional

Las ecuaciones de primer grado se caracterizan porque la incógnita (variables) tiene como exponente la unidad; por lo cual, la solución es única, esto significa que éste tipo de cuaciones tienen «una sola» solución.

Resolución: la resolución de ecuaciones, ha tenido diversos aportes desde la antiguedad hasta nuestros días. Vamos a analizar algunos métodos de resolución para éste tipo de ecuaciones.

♦ Método Egipcio: (la Regula falsa)

En algunos libros Egipcios y Chinos, se ha encontrado un método para resolver ecuaciones, llamado la **Regla falsa** o falsa posición. El método, consiste que a partir de la ecuación dada, se da una solución tentativa inicial y la vamos ajustando según la ecuación dada.

El principio consiste que dada la ecuación: ax = b, suponemos una solución tentativa x_0 , reemplazándola en la ecuación: $ax_0 = b_0$, como no se cumple esta solución, se hace el ajuste $asi: x_1 = \frac{b}{b_0} x_0$, la cual es una solución de la ecuación original, ya que:

$$a \left[\frac{b}{b_0} x_0 \right] = b$$

Ejemplo 1

Resolver la ecuación: $x + \frac{x}{4} = 12$

Solución: proponemos $x \cdot = 4$, luego : $4 + \frac{4}{4} = 12$, se debe demostrar!

5 = 12, lo cual no es cierto, luego hacemos el ajuste: $x = \frac{12}{5}$. Ahora : $\frac{12}{5}x4 = \frac{48}{5}$ que es la solución.

Comprobémoslo:

$$\frac{48}{5} + \frac{48/5}{4} = 12 \Rightarrow \frac{48}{5} + \frac{48}{20} = 12 \Rightarrow \frac{240}{20} = 12 \Rightarrow \frac{24}{2} = 12 \text{ . Lo cual es verdadero.}$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación: $2x + \frac{x}{5} = 8$

Solución: solución tentativa inicial $x_0 = 5$, reemplazamos: 2(5)+1=8

11=8 lo cual no es cierto, luego hacemos el ajuste: $x_0 = \frac{8}{11}$ y procedemos a

multiplicar por $x_0: \frac{8}{11} \cdot 5 = \boxed{\frac{40}{11}}$ que es la solución, verifiquemos:

$$2\left(\frac{40}{11}\right) + \frac{40/11}{5} = 8 \implies \frac{80}{11} + \frac{40}{55} = 8 \implies \frac{400 + 40}{55} = 8$$

 $\frac{440}{55}$ = 8 lo cual es verdadero.

Este método a pesar de ser muy rudimentario, es muy efectivo en muchos casos, para este tipo de ecuaciones.

Método axiomático

Es el método utilizado actualmente, el cual utiliza las propiedades algebráicas y las leyes de uniformidad; ya estudiadas, todo esto derivado de los «Axiomas de campo».

Toda ecuación de primer grado se puede escribir de la forma:

ax + b = c, endonde a, b, c son cosntantes $y \ a \neq 0$.

Veamos el caso en donde: ax + b = c, si sumamos (-b) a ambos lados de la ecuación (ley uniformidad de suma tenemos:

 $ax + b + (-b) = 0 + (-b) \Rightarrow ax = -b$. Luego multipliquemos a ambos lados

por
$$(1/a)$$
, tenemos: $\frac{1}{a}(ax) = -b(\frac{1}{a})$ nos resulta: $x = -\frac{b}{a}$

Ejemplo 1

Hallar la solución de la ecuación: 6 - x = 2x + 9

Solución: como estamos aplicando el método axiomático, entonces: <u>sumanos</u> (-2x) a ambos lados de la ecuación: 6-x+(-2x)=2x+(-2x)+9 no resulta:

 $6-x-2x=9 \Rightarrow 6-3x=9$. Ahora sumamos (-6) a los lados de la ecuación: 6+(-6)-3x=9+(-6) obteniendo : -3x=3. Ahora <u>multiplicamos por</u>

$$\left(-\frac{1}{3}\right)$$
_los miembros de la ecuación:

$$-\frac{1}{3}(-3x) = -\frac{1}{3}(3)$$
 nos resulta: $x = -1$

Solución: la pregunta sería ¡cómo corroboramos que x = -1, es la solución? La respuesta es, sustituyendo la solución en la ecuación original, debemos obtener una igualdad verdadera, veamos:

$$6 - (-1) = 2(-1) + 9 \Rightarrow 7 = 7$$
 [verdadero!

Así queda comprobado que x=-1 es la solución UNICA, para la ecuación propuesta.

NOTA: Es pertinente que se analice porque las operaciones propuestas en la resolución del problema, (subrayado con negro) con el fin de entender la lógica del método.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación: $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$

Solución: recordemos por las leyes de uniformidad que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \ x \ d = b \ x \ c$, lo aplicamos al ejercicio propuesto:

 $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 1\big(x+2\big) \Rightarrow 2x = x+2 \;. \quad \text{Sumamos} \; \left(-x\right) \; \text{a los dos lados de la}$ ecuación: $2x + \left(-x\right) = x + \left(-2\right) + 2; \; \text{obtenemos} \; : x = 2 \;, \; \text{que es la solución}.$

Ejemplo 3

Hallar el valor de la incógnita que satisfaga la ecuación:

$$\frac{6t+7}{4t-1} = \frac{3t+8}{2t-4}$$

UNAD

Solución: aplicamos la ley de equivalencia de fracciones:

$$(6t+7)(2t-4)=(3t+8)(4t-1)$$
; multiplica mos:

$$12t^2 - 10t - 28 = 12t^2 + 29t - 8$$
, sumamos $\left(-12t^2\right)$ a ambos lados

$$12t^2 + \left(-12t^2\right) - 10t - 28 = 12t^2 + \left(-12t^2\right) + 29t - 8$$
, obtenemos:

$$-10t - 28 = 29t - 8$$
; sumamos 10t a la ecuación :

$$-10t+10t-28 = 29t+10t-8$$
; obtenemos:

$$-28 = 39t - 8$$
: sumamos (8) a ambos lados de la ecuación:

$$-28 + 8 = 39t - 8 + 8$$
, obtenemos

$$-20 = 39t$$
, multiplica mos por $(1/39)$

$$-20 x \left(\frac{1}{39}\right) = \frac{1}{39} (39t)$$
; obtenemos :

$$-\frac{20}{39}$$
 = t, solución de la ecuación.

Ejemplo 4

Resolver: 8(2x-6)=4(x-3)

Solución: si observamos lo más obvio es hacer la mutiplicación, para iniciar la solución, entonces:

$$8(2x-6)=4(x-3) \Rightarrow 16x-48=4x-12$$
; sumamos 48

$$16x - 48 + 48 = 4x - 12 + 48 \Rightarrow 16x = 4x + 36$$
, sumamos $(-4x)$

$$16x + (-4x) = 4x + (-4x) + 36$$
; obtenemos:

$$16x - 4x = 36$$
; luego : $12x = 36$, multiplica mos por $\frac{1}{12}$

$$\frac{1}{12}(12x) = \frac{1}{12}(36) \Rightarrow \underline{x=3}$$
 solución de la ecuación.

Ejemplo 5

Demuestre que la ecuación: $\frac{3x}{x-1} + 2 = \frac{3}{x-1}$ no tiene solución.

Demostración: para dejar la ecuación entera multiplicamos todo por (x-1)

$$\begin{split} &\frac{3x}{x-1}\left(x-1\right)+2\left(x-1\right)=\frac{3}{x-1}\left(x-1\right)\text{, obtenemos}\ :\\ &3x+2x-2=3\Rightarrow 5x-2=3\text{, sumamos}\left(2\right)\\ &5x-2+2=3+2\Rightarrow 5x=5\text{; divi dim os por }1/5\\ &\frac{1}{5}\left(5x\right)=\frac{1}{5}\left(5\right)\Rightarrow \ \overline{x=1}\ \text{sería la solución}\ . \end{split}$$

Pero x =1, NO hace parte de los valores que puede tomar la variable, ya que cuando x =1, la ecuación se hace indeterminada, por lo cual, la ecuación dada no tiene solución.

Reflexión: en todos los ejemplos propuestos, la solución se resumen en despejar la incógnita (variable). Generalizando precisamente a esto es que se centrará la solución de ecuaciones, a despejar la incógnita, lo cual se hace utilizando principios, leyes y axiomas matemáticas.

(Ver ejercicios ecuaciones de primer grado, página 36



CUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

En éste aparte analizaremos dos casos, el primero es cuando se tiene una ecuación de primer grado con dos incógnitas y el segundo es cuando se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ecuaciones Diofánticas: Diofanto de Alejandría, del Siglo III de nuestra era, desarrolló unas ecuaciones que trabajan sobre el conjunto de los enteros y son de primer grado con dos incógnitas, en honor a su nombre se conocen como **ecuaciones diofánticas**.

La forma general es: ax + by = c, donde a, b y c son constantes y enteros; además, $a \neq 0$ ó $b \neq 0$.

Cuando a, b y c son enteros positivos, la ecuación tiene solución entera, si y solo sí, el máximo común divisor de a y b divide a c. Este tipo de ecuaciones puede tener infinitas soluciones o no tener solución. Entonces la solución consiste en hallar ecuaciones generadoras (paramétricas) del par(x,y) que satisfagan la ecuación propuesta.

Ejemplo 1

Para la ecuación: 2x + 3y = 8, cuál será el par (x,y) que satisface dicha ecuación.

Solución: por simple inspección vemos que x=1 y y=2, satisfacen la igualdad 2(1)+3(2)=8

La solución: (x,y) = (1,2), pero podemos encontrar más soluciones por ejemplo: (x,y) = (4,0) también es solución.

Otras soluciones (x,y) = (-2,4); (x,y) = (-5,6),... como definimos al principio, hay infinitas soluciones; para esta ecuación.

Solución general de ecuaciones Diofánticas (método paramétrico)

Para este tipo de ecuaciones, la solución es buscar ecuaciones para x y y con un parámetro, generalmente se le llama t, llamada solución general.

El procedimiento para hallar esta solución no es fácil, solo deseamos que se conozca que a partir de una solución general, se pueden hallar soluciones específicas para la ecuación dada. Los curioso pueden investigar en libros de matemáticas discretas o en temas de ecuaciones diofánticas, para que profundicen en el tema.

Ejemplo 2

A partir de la ecuación: 2x + 3y = 8, hallar soluciones particulares a partir de la solución general.

Solución: por algoritmo computacional, la solución general es:

$$x = -8 + 3t$$
$$y = 8 - 2t$$

A partir de estas podemos hallar soluciones particulares:

para t= 2, entonces:

$$x = -8 + 3(2) = -8 + 6 = -2$$

$$y = 8 - 2(2) = 8 - 4 = 4$$

solución particular (x-y)=(-2,4)

para t=4. Entonces:

$$x = -8 + 3(4) = -8 + 12 = 4$$

$$y = 8 - 2(4) = 8 - 8 = 0$$

solución particular (x - y) = (4,0)

Así sucesivamente para cualquier t entero.

Ejemplo 3

Hallar soluciones particulares para t = 5 y T = 8, para la ecuación: 3x + 4y = 50.

Solución: de nuevo por algoritmo computacional, la solución general es:

UNAD

$$x = -50 + 4t$$

$$y = 50 - 3t$$

para t = 5, entonces

$$x = -50 + 4(5) = -50 + 20 = -30$$

$$y = 50 - 3(5) = 50 - 15 = 35$$

Solución :
$$(x, y) = (-30,35)$$

Para t = 8. Del amisma manera:

$$x = -50 + 4(8) = -50 + 32 = -18$$

$$y = 50 - 3(8) = 50 - 24 = 26$$

Solución : (x, y) = (-18, 26)

Solución general de ecuaicones Diofánticas (método despeje): cómo hallar las ecuaciones paramétricas para x y y, no es tarea fácil, un método para hallar soluciones particulares a partir de una solución general, es despejando una de las variables de la ecuación y obtener otra ecuación donde se obtiene y = f(x) o x = f(y); es decir, y en función de x ó x en función de y.

Para la ecuación ax + by = c. Si despejamos y obtenemos:

 $y = \frac{c - ax}{b}$ donde y = f(x). Luego dando un valor a x obtenemos el valor de y,

y así la solución (x,y). Pero si despejamos x, obtenemos:

 $x = \frac{c - by}{a}$ donde x = f(y). Aquí damos valores a y para obtener x.

Ejemplo 1

Hallar para x = -2, la solución de la ecuación 2x + 3y = 8.

Solución: despejamos y; luego

$$y = \frac{8-2x}{3}$$
 reemplazam os $x = -2$, entonces : $y = \frac{8-(2)(-2)}{3} = 4$

Solución: (x,y) = (-2,4)

Este resultado coincide con el dado para la misma ecuación en el ejemplo 2, del método anterior.

Ejemplo 2

Para la ecuación: x + 3y = 14. Hallar soluciones para:

- $a \qquad x = 2$
- b. y = 5

Solución:

a. Despejamos

$$y = \frac{14 - x}{3}$$
 como $x = 2 \Rightarrow y = \frac{14 - 2}{3} = 4$
Solución : $(x,y)=(2,4)$

b. Despejamos

$$x = 14 - 3y \Rightarrow x = 14 - 3(5) = -1$$

Solución : $(x, y) = (-1, 5)$

Dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas son de la forma.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Donde a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 son constantes; además $a\neq 0$ ó $b\neq 0$; $a_2\neq 0$ ó $b_2\neq 0$.

Resolver un sistema de este tipo es hallar los valores \mathbf{x}_0 y \mathbf{y}_0 que satisfagan simultáneamente las dos ecuaciones.

Sistema consistente: un sistema de ecuaciones es consistente, cuando tiene al menos una solución. Para el caso que nos ocupa, un valor para x y un valor para y.

EJERCICIOS: ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Resolver las siguientes ecuaciones:

1.
$$3(2-x)=2x-1$$

Rta:
$$x = \frac{7}{5}$$

2.
$$\frac{1}{2}x - 6 = \frac{3}{4}x + 1$$

Rta:
$$x = -14$$

3.
$$\frac{6}{x} + \frac{4}{x} = \frac{1}{2}$$

Rta:
$$x = 20$$

4.
$$x^2 + 6x - 7 = (x+1)^2$$

Rta:
$$x = 2$$

5.
$$\frac{2}{x-2} = \frac{3}{x+5} + \frac{10}{(x+5)(x-2)}$$

Rta:
$$x = 6$$

6.
$$5 - \frac{x+2}{3} = 7 - x$$

Rta:
$$x = 4$$

7.
$$\frac{y+1}{4} + \frac{2y-3}{4} = \frac{y}{2} - 2$$

Rta:
$$y = -6$$

$$8. \quad \frac{6}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$$

Rta:
$$x = 1$$

9.
$$\frac{8}{ay-8} - \frac{6}{3y-6} = 0$$

Rta:
$$y = 0$$

10. Cuánto debe valer γ en la expresión

Rta:
$$\gamma = \frac{5}{3}$$

 $3y - 3\gamma = 3y - 5$ para que se cumpla la igualdad

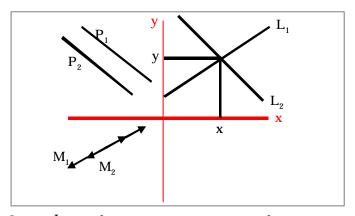
Sistema incosistente: cuando el sistema no tiene solución alguna, se dice que es inconsistente. Esto ocurre en casos donde la propuesta de equivalencia no se satisface en ningún caso.

Existen diversos métodos de resolver sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.



ÉTODO 1. GRÁFICO

Se basa en que en el plano de coordenadas rectángulares, una ecuación de la forma ax +by = c, está representada por una recta, cuyos puntos son parejas cordenadas de número reales; donde el primer componente es x y la segunda y. Como tenemos dos ecuaciones, deben haber dos rectas. El punto de corte de las rectas indica la solución del sistema.



 L_1 y L_2 son las rectas que representan el sistema:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

La solución será: (x,y) punto de corte de las rectas. Cuando las rectas son paralelas, no indica que el sistema no tiene solución $(P_1 \ y \ P_2)$. Cuando las rectas coinciden, nos indica que el sistema tiene infinitas soluciones $(M_1 \ y \ M_2)$.

Ejemplo 1

Hallar la solución al sistema:

$$3x - 2y = 5$$

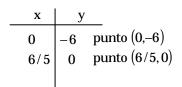
$$5x - y = 6$$

Solución:

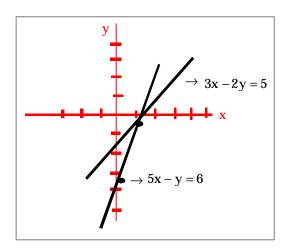
Para 3x - 2y = 5; damos dos valores a x y obtenemos y. Veamos:

X	y	
0	-5/2	punto (0,–5/2)
5/3	0	punto (5/3,0)

para 5x - y = 6, tenemos:



recordemos que para graficar una recta sólo se requieren dos puntos



Solución: x = 1; y = -1

En el ejemplo dimos arbitrariamente el valor de x=0 y y=9, para hallar la otra coordenada y así obtener los puntos.

Ejemplo 1

Resolver el sistema

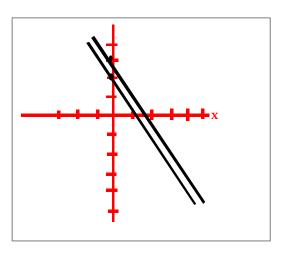
$$2x + y = 5$$

$$4x + 2y = 8$$

Hallemos los puntos: para

$$2x + y = 5$$

<u>y</u>
punto (0,5) punto (5/2, 0)



El sistema No tiene solución, ya que las rectas nos paralelas.

para
$$4x + 2y = 8$$

$$\begin{array}{c|cc} x & y \\ \hline 0 & 4 & \text{punto } (0,4) \\ 2 & 0 & \text{punto } (2,0) \end{array}$$

Este método tiene el inconveniente que la solución no se puede ver exactamente, ya que por visual las coordenadas del punto de corte no son valores exactos; es una aproximación.



ÉTODO 2. ELIMINACIÓN

Es un método algebráico donde se elimina una variable, para hallar el valor de la otra variable. Es el más utilizado y se divide en tres técnicas. Reducción, Igualación y Sustitución.

Reducción

Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la reducción consiste en igualar coeficientes de una de las variables; pero con signo contrario, para poder reducir el sistema a una sola variable y así resolverla como ecuación de primer grado con una incógnita.

Obtenido el valor de la variable despejada, ésta se reemplaza en una de las ecuaciones originales, para hallar el valor de la otra variable.

Ejemplo 1

$$y-x=0$$

Resolver el sistema x + y = 4

Solución: organizamos el sistema según las variables y operamos términos semejantes:

$$-x + y = 0$$
$$x + y = 4$$
$$2y = 4$$

La nueva ecuación permite despejar y; como 2y=4, aplicando el método axiomático; entonces:

$$\frac{2y}{2} = \frac{4}{2} \implies y = 2$$

como y es igual a 2, reemplazamos éste valor en una de las ecuaciones originales, por ejemplo en la primera: -x + (2) = 0; despejamos $x : -x = -2 \Rightarrow x = 2$

Luego la solución es:

$$x = 2$$
$$y = 2$$

Esta solución debe satisfacer las dos ecuaciones simultáneamente.

En el ejemplo 1, vemos que fue fácil reducir a y, eliminando x, ya que ésta variable tenía el mismo coeficiente y signos contrarios, pero no siempre es así, en muchos casos es necesario ajustar ésta situación, multiplicando las ecuaciones por valores que permiten obtener coeficientes iguales con signos contrarios en la variable a eliminar.

Ejemplo 2

Resolver

$$x - y = 4$$

$$3x - 2y = -5$$

Solución: primero elegimos la variable a eliminar, cuando es posible, se busca aquella que tenga signos contrarios. Cuando no es posible así, entonces elegimos la que deseemos. Para éte caso elegimos x. Luego para eliminar x, la primera ecuación debe tener coeficiente 3 en la variable x y la segunda puede queda igual, veamos:

$$(x-y=4)$$
 (-3) $(3x-2y=-5)$ (1) $\Rightarrow -3x+3y=-12$ $3x-2y=-5$

Operando el último sistema obtenemos: y = -17

Sabiendo el valor de y, lo reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones originales, para hallar el valor de la otra ecuación, veamos.

$$3x - 2(-17) = -5 \Rightarrow 3x + 34 = -5 \Rightarrow 3x = -5 - 34$$
. Luego $3x = -39$, despejamos $x : 3x = -39 \Rightarrow x = -13$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-39}{3} \Rightarrow x = -13$$

Vemos que la solución es:

$$x = -13$$
$$y = 17$$

La verificación consiste en reemplazar la solución en las ecuaciones originales y demostrar que se cumple la igualdad.

Ejemplo 3

Hallar el valor de las variables para el sistema:

$$4x + 9y = 8$$
$$2x - 6x = -3$$

Solución: como vemos, se puede eliminar y, ya que tiene signos contrarios, sólo falta igualar coeficientes, lo que se consigue multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por 3. Veamos.

$$(4x + 9y = 8) x (2)$$

 $(2x - 6x = -3) x (3)$ \Rightarrow $8x + 18y = 16$
 $6x - 18y = -9$

Así podemos eliminar y, obteniendo: 14x = 7, luego x = 1/2

Ahora hallamos el valor de y, reemplazando x = 1/2, en cualquiera de las ecuaciones originales, luego seleccionamos la primera:

$$8(1/2)+18y=16 \Rightarrow 18y=16-4=12$$
, por consiguien te :

$$18y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{18}$$
. Luego $y = \frac{2}{3}$

Solución:

$$x = 1/2$$

$$y = 2/3$$

Verificación, reemplazamos la solución en las ecuaciones originales:

$$4(1/2)+9(2/3)=8 \implies 2+6=8$$
: verdadero
 $2(1/2)-6(2/3)=-3 \implies 1-4=-3$: verdadero

como las igualdades son verdaderas, nos indica que la solución es correcta.

♦ Igualación

Consiste en despejar la misma variable en las dos ecuaciones dadas, luego «igular» las expresiones obtenidas en los dos despejes, para que utilizando herramientas matemáticas, se obtenga el valor de la variable en la ecuación de una incógnita obtenida.

Ejemplo 1

Resolver el sistema:

$$x + y = 8$$

$$x - y = 4$$

Solución: despejamos x en las dos ecuaciones para facilitar denominados 1 y 2 a ls ecuaciones:

$$x_1 + y_1 = 8 \implies x_1 = 8 - y_1$$

 $x_2 - y_2 = 4 \implies x_2 = 4 + y_2$

Ahora igualamos:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 8 - y_1 = 4 + y_2$$
, como $y_1 = y_2$, entonces:

$$8 - y = 4 + y$$
, luego : $-2y = 4 - 8 \Rightarrow -2y = -4$. Despejamos y :

Luego :
$$y = \frac{-4}{-2} = 2$$
.

Como sabemos el valor de y, la reemplazamos en cualqueira de las ecuaciones originales:

$$x + y = 8 \Rightarrow x + (2) = 8 \Rightarrow x = 8 - 2 \Rightarrow x = 6$$

Solución:

x = 6

$$y = 2$$

Verificación: por ser tan sencilla, por favor estimado estudiante hacerla.

Ejemplo 2

Hallar la solución del sistema:

$$\frac{2}{5} x - \frac{1}{6} y = \frac{7}{10}$$

$$\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = \frac{19}{8}$$

Solución: recordemos que debemos despejar la misma variable en las dos ecuaciones, elijamos x, pero antes convertimos los coeficientes a enteros para la primera ecuación:

$$\frac{2}{5} \times -\frac{1}{6} y = \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{12x - 5y}{30} = \frac{7}{10} \Rightarrow 12x - 5y = \frac{30(7)}{10} \Rightarrow 12x - 5y = 37$$

para la segunda ecuación:

$$\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = \frac{19}{8} \Rightarrow \frac{9x - 8y}{12} = \frac{19}{8} \Rightarrow 9x - 8y = \frac{12x + 19}{8} \Rightarrow 9x - 8y = \frac{57}{2}$$

Ahora sí despejamos x en las dos ecuaciones:

$$12x - 5y = 37 \Rightarrow 12x = 37 + 5y \Rightarrow x = \frac{5y + 37}{12}$$

$$9x - 8y = \frac{57}{2} \Rightarrow 9x = 8y + \frac{57}{2} \Rightarrow x = \frac{8y + 57}{18}$$

Luego igualamos las dos variables:

$$\frac{5y+37}{12} = \frac{8y+57}{18} \Rightarrow \frac{18(5y+37)}{12} = 8y+57 \Rightarrow \frac{3(5y+37)}{2} = 8y+57$$

Luego:

$$3(5y+37)=2(8y+57) \Rightarrow 15y+111=16y+114$$
, reorganiza ndo : $15y-16y=114-111 \Rightarrow -y=3 \Rightarrow y=-3$

como ya sabemos el valor de y, lo reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones originales, tomemos la segunda:

$$\frac{3}{4}(x) - \frac{2}{3}(-3) = \frac{19}{8} \Rightarrow \frac{3}{4}x + 2 = \frac{19}{8} \Rightarrow \frac{3}{4}x = \frac{19}{8} - 2$$
, luego:

$$\frac{3}{4}x = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{4x3}{8x3} \Rightarrow x = 1/2$$

Solución:

x = 1/2

y = -3

Verificación: se debe verificar la solución obtenida.

Sustitución

Si tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, lo que se hace es despejar una de las incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones y reemplzar la equivalencia de la incógnita en la otra ecuación. Dicho de otra manera, si despejamos la incógnita en la primera ecuación, la reemplazamos en la segunda ecuación o viceversa. Con esto obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita, que ya sabemos resolver.

Ejemplo 1

Hallar la solución al sistema:

$$x-y=-4$$

$$3x - 2y = -5$$

Solución: como lo dice la teoría, despejamos una variable en cualquiera de las ecuaciones, para este caso despejamos x en la primera ecuación:

$$x - y = -4 \Rightarrow x = y - 4$$

Luego este valor de x, lo reemplazamos en la segunda ecuación; entonces:

$$3(y-4)-2y=-5$$

obtenemos una ecuación con una incógnita, que ya sabemos resolver:

$$3y - 12 - 2y = -5 \implies y = -5 + 12 \implies y = 7$$

como ya sabemos el valor de y, lo reemplazamos en una de las ecuaciones originales, tomemos la segunda ecuación.

$$3x-2(7)=-5 \Rightarrow 3x=-5+14 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$$

Luego la solución es:

$$x = 3$$

$$y = 7$$

Ejemplo 2

Resolver el sistema:

$$2x + y = 1$$

$$4x + 2y = 3$$

Solución: despejamos y en la segunda ecuación, luego:

$$4x + 2y = 3 \Rightarrow 2y = 3 - 4x \Rightarrow y = \frac{3 - 4x}{2}$$

Reemplazamos y en la primera ecuación:

$$2x + \left(\frac{3-4x}{2}\right) = 1$$
 operamos y simplifica mos:

$$\frac{4x+3-4x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = 1$$
 No es verdadero

Luego el sistema No tiene solución.

Ejemplo 3

Hallar la solución del sistema:

$$\frac{3x}{5} + \frac{5y}{3} = 2$$

$$\frac{6x}{5} - \frac{5y}{3} = 1$$

Solución: primero convertimos las ecuaciones a coeficientes enteros:

$$\frac{3x}{5} + \frac{5y}{3} = 2 \Rightarrow \frac{9x + 25y}{15} = 2 \Rightarrow 9x + 25y = 30$$

para la ecuación dos es lo mismo.

$$\frac{6x}{5} - \frac{5y}{3} = 1 \Rightarrow \frac{18x - 25y}{15} = 1 \Rightarrow 18x - 25y = 15$$

ya tenemos las dos ecuaciones entonces:

$$9x + 25y = 30$$

$$18x - 25y = 15$$

Despejamos x en la primera ecuación y la reemplazamos en la segunda.

$$9x + 25y = 30 \Rightarrow x = \frac{30 - 25y}{9}$$
. Luego:

$$18\left(\frac{30-25}{9}\right) - 25y = 15 \Rightarrow 60 - 50y - 25y = 15$$

$$-75y = 15 - 60 \Rightarrow -75y = -45 \Rightarrow y = \frac{45}{75} \Rightarrow y = \frac{3}{5}$$

para hallar el valor de la otra variable; o sea x, reemplazamos el valor de y en cualquiera de las ecuaciones originales.

Tomemos la segunda ecuación:

$$\frac{6x}{5} - \frac{5y}{3} = 1 \implies \frac{6x}{5} - \frac{5(3/5)}{3} = 1 \implies \frac{6x}{5} - 1 = 1$$

$$\frac{6x}{5} = 2 \Rightarrow 6x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{6} \Rightarrow x = 5/3$$

Solución:

$$x = 5/3$$

$$y = 3/5$$

Verificación: no olvidemos hacer la verificación.

Observación: las técnicas de eliminación se diferencian en hallar el valor de la primera incógnita, la segunda parte del proceso ES SIMILAR; es decir, para hallar el valor de la segunda incógnita el procedimiento es similar en las tres técnicas.



ÉTODO TRES. POR DETERMINANTES

Para este método, primero recordemos algunos conceptos sobre determinantes. Una determinante, es un arreglo rectangular de filas y columnas, donde los elementos, son los valores de las coeficientes de las ecuaciones que forman el sistema.

$$\begin{array}{c|c} & x_1 & y_1 \\ & & \downarrow \\ \text{Fila} & \rightarrow & x_2 & y_2 \\ \end{array} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ 2 & x & 2 \end{vmatrix}$$

El tamaño del determinante lo da el número de las filas y columnas, Así hay determinantes de 2×2 , 3×3 , 4×4 , etc. Las filas son horizontales y las columnas son las verticales.

Resolver un determinante, es hallar el valor del mismo, según el tamaño, la forma de resolución es muy particular.

<u>Determinante de 2 x 2:</u> para resolver un determinante de 2 x 2, la solución es como se indica a continuación.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \Rightarrow D = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$

Donde D es el valor del determinante.

♦ Ecuaciones por determinantes

Para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, se utilizan determinantes de 2×2 . Kramer propuso una técnica para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, utilizando determinantes, en su honor se le llama regla de Kramer.

Regla de Kramer: sea el sistema

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 = c_1$$

 $a_2 x_2 + b_2 y_2 = c$

Solución: se organizan los determinantes para cada incógnita de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

solución para x

solución para y

Ejemplo 1

Resolver el sistema:

$$3x - 2y = 5$$

$$5x - y = 6$$

Solución: organizamos los determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(-2)(6) - (-1)(5)}{(3)(-1) - (5)(-2)} = \frac{-12 + 5}{-3 + 10} = \frac{-7}{7} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(6) - (5)(5)}{(3)(-1) - (5)(-1)} = \frac{18 - 25}{-3 + 10} = \frac{-7}{7} = -1$$

Solución:

$$\mathbf{x} = -1$$

$$y = -1$$

Esto es el mismo ejemplo 1, que estudiamos en le método gráfico observando que la solución es la misma, como es obvio.

Ejemplo 2

Resolver el sistema

$$4x - 3y = 6$$

$$-2x + 5y = 4$$

Solución: aplicando la regla de Kramer, tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(6)(5) - (4)(-3)}{(4)(5) - (-2)(-3)} = \frac{30 + 12}{20 - 6} = \frac{42}{14} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(4)(4) - (-2)(6)}{(4)(5) - (-2)(-3)} = \frac{16 + 12}{20 - 6} = \frac{28}{14} = 2$$

Solución:

$$x = 3$$

$$y = 2$$

Ejemplo 3

Hallar el valor de x y y en el sistema:

$$7x + 4y = 8$$

$$7x + 4y = 6$$

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{56 - 42}{28 - 28} = \frac{14}{0} = \text{In det erminado}$$

como el denominador es cero,, las incógnitas no tienen valor, esto nos indica que el sistema No tiene solución; es decir, es un sistema inconsistente.

De esta manera hemos aprendido los métodos de resolver ecuaciones simultáneas de dos incógnitas.

(Ver ejercicios ecuaciones simultáneas, página 51)

Tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas

Habiendo estudiado lo referentes a dos ecuaciones con dos incógnitas y sus métodos de solución, podemos iniciar el estudio de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuyos principios son similares.

Para el sistema:

$$a_1x_12 + b_1y_1 + c_1z_1 = d_1$$

$$a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 = d_2$$

$$a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 = d_3$$

La solución se hará para los métodos de eliminación y por determinantes.

EJERCICIOS: ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de reducción:

1.
$$x + 5y = 13$$

Rta :
$$x = 2$$
; $y = 3$

2.
$$x + 2y = 6$$

 $3x - y = -10$

Rta:
$$x = -2$$
; $y = 4$

Rta:
$$x = 20$$
; $y = -12$

3.
$$\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 7$$

$$\frac{5}{3}x - \frac{1}{2}y = 18$$

Resolver los sistemas siguientes utilizando eliminación por igualación:

4.
$$2x - 4y = -2$$
$$3x + 2y = 3$$

Rta:
$$x = \frac{1}{2}$$
; $y = \frac{3}{4}$

5.
$$\frac{2}{5}x - \frac{1}{6}y = \frac{7}{10}$$

Rta:
$$x = \frac{1}{2}$$
; $y = -3$

$$\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = \frac{19}{8}$$

Resolver los sistemas dados a continuación por sustitución:

$$x-\frac{1}{2}y+1=0$$

6.
$$2x - y + 6 = 0$$

Rta: no tiene solución, justificar

7.
$$\frac{-1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

Rta :
$$x = 3$$
; $y = 2$

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 3$$

EJERCICIOS: Ecuaciones simultáneas

Resolver los siguientes sistemas por determinantes.

1.
$$5x - y = 13$$

$$2x + 3y = 12$$

Rta:
$$x = 3$$
; $y = 2$

$$2. 3x - 6y = 24$$

$$5x + 4y = 12$$

Rta:
$$x = 4$$
; $y = -2$

3.
$$y = \frac{-2x+1}{3}$$

Rta :
$$x = 2$$
; $y = -1$

$$3x = 8 + 24$$

4.
$$3p-q=13$$
$$-12p+4q=-52$$

Rta:
$$x = 5$$
; $y = 2$

5.
$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -2$$

Rta:
$$x = -\frac{22}{7}$$
; $y = -\frac{11}{5}$

$$\frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 1$$

Identificar el valor de p en cada determinante, para quese cumpla la igualdad.

6.
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & p \end{vmatrix} = 12$$

Rta:
$$p = 12$$

$$7. \qquad \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ p & 4 \end{vmatrix} = 13$$

Rta:
$$p = -5$$



ÉTODO UNO. SOLUCIÓN POR ELIMINACIÓN

El método consiste en que a partir de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se reduzca a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que ya sabemos resolver. Para facilitar el proceso, las ecuaciones se enumeran con el fin de hacer seguimiento en cada paso hasta la obtención del valor de las variables.

Ejemplo 1

Resolver el sistema:

$$x + y + z = 4(1)$$

$$x + y - z = 0 (2)$$

$$x - y + z = 2(3)$$

Solución: vemos que las ecuaciones están enumeradas.

$$x+y+z=4$$

$$x+y-z=0$$

$$2x+2y=4(4)$$

Vemos que z se elimina fácilmente, así obtenemos una ecuación con dos incógnitas, que la denominamos como la ecuación 4.

El segundo paso es eliminar la misma incógnita de las ecuaciones 1 y 3.

$$x + y + z = 4$$

$$x-y+z=2$$

como debemos eliminar z, entonces la segunda ecuación la multiplicamos por -1, luego:

$$\begin{array}{c}
 x + y + z = 4 \\
 -x + y - z = -2 \\
 2y = 2(5)
 \end{array}$$

Al operar obtenemos la otra ecuación con dos incógnitas, la denominamos con 5.

como tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, el tercer paso es utilizar uno de los métodos estudiados para resolverlos. Para este ejemplo, vemos que la quinta ecuación solo tiene una incógnita, lo que permite la solución más rápida, ya que solo es despejar y. Entonces:

$$2y = 2 \Rightarrow y = 1$$

El cuarto paso es reemplazar y en la ecuación 4, para hallar el valor de x. Entonces:

$$2x+2(1)=4 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$$

El último paso es reemplazar en cualquiera de las ecuaciones originales las variables conocidas, para hallar la desconocida.

Tomemos la ecuación 1. Entonces:

$$x + y + z = 4 \implies (1) + (1) + z = 4 \implies z = 4 - 2$$
, luego $z = 2$

Solución:

x = 1

y = 1

z = 2

El ejemplo se observa extenso, pero por la explicación en cada paso, con buen trabajo, nos daremos cuenta que no es extenso, más bien dinámico y relativamente corto.

Ejemplo 2

Resolver el siguiente sistema:

$$x + y + z = 12(1)$$

$$2x - y + z = 7(2)$$

$$x + 2y - z = 6(3)$$

Solución: como v emos cada ecuación tiene un número, eliminamos y en (1) y (2), Entonces:

$$x + y + z = 12(1)$$

$$\frac{2x - y + z = 7(2)}{3x + 2z = 19(4)}$$

Ahora tomemos (2) y (3)

$$2x - y + z = 7(2)$$

$$x + 2y - z = 6(3)$$

multiplicamos (2) por 2 y (3) queda igual.

$$4x - 2y + 2z = 14$$

$$\frac{x+2y-z=6}{5x+z=20(5)}$$

Las ecuaciones (4) y (5) son de dos incógnitas, que podemos resolver por los métodos ya estudiados.

Apliquemos igualación, entonces:

$$3x+2z=19(4)$$

$$5x + z = 20(5)$$

Eliminamos z, para lo cual multiplicamos (5) por (-2), luego:

$$3x + 2z = 19$$

$$\frac{-10x - 2z = -40}{-7x = -21}$$

Luego:
$$x = \frac{-21}{-7} = 3 \implies x = 3$$

como sabemos el valor de x, lo reemplazamos en (4) ó (5) para hallar z, escogemos (5), luego:

$$5(3) + z = 20 \implies z = 20 - 15 \implies z = 5$$

Ahora, como conocemos x y z, lo reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones originales, para hallar y, escogemos (2); luego:

$$2x - y + z = 7$$
 $\Rightarrow 2(3) - y + 5 = 7 \Rightarrow -y + 11 = 7 \Rightarrow -y = 7 - 11$ $-y = -4 \Rightarrow y = 4$

Solución:

x = 3

y = 4

z = 5

Ejemplo 3

Resolver el sistema:

$$x - 2y + 3z = 1$$
 (1)

$$3x + y - 2z = 0$$
 (2)

$$2x - 4y + 6z = 2(3)$$

Solución: como ya sabemos la metodología, apliquemos los pasos: tomamos (1) y (2) para eliminar y, ya que tienen signo contrario.

$$x - 2y + 3z = 1 \quad (1)$$

$$3x + y - 2z = 0$$
 (2)

multiplica mos(2)por + 2

$$x - 2y + 3z = 1$$

$$\frac{+6x+2y-4z=0}{7x}$$

Ahora tomamos (2) y (3) para eliminar y

$$3x + y - 2z = 0$$
 (2)

$$2x - 4y + 6z = 2(3)$$

multiplica mos (2)por 4, luego

$$12x + 4y - 8z = 0$$

$$2x - 4y + 6z = 2$$

$$14x - 2z = 2(5)$$

Eliminamos z de (4) y (5):

$$7x - z = 1(4)$$

$$14x - 2z = 2(5)$$

multiplicamos (4) por (-2), entonces:

$$\frac{-14x - 2z = -2}{14x - 2z = 2}$$
$$0 + 0 = 0$$

vemos que las variables se eliminan, lo que indica que el sistema es inconsistente. Condición: No hay solución.

Nota: recordemos que el sistema no puede tener solución, ya que es inconsistente.



ÉTODO DOS. SOLUCIÓN POR DETERMINANTES

Cuando tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, debemos trabajar con determinantes de tercer orden.

Determinantes de tercer orden orden son arreglos de tamaño 3 x 3.

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Para resolver determinantes de tercer orden hay tres formas:

Primera forma: la llamamos productos cruzados:

$$A = [a] - [b]$$

Donde:

$$a = (x_{1} \cdot y_{2} \cdot z_{3}) + (y_{1} \cdot z_{2} \cdot x_{3}) + (x_{2} \cdot y_{3} \cdot z_{1})$$

$$\begin{vmatrix} x_{1} & y_{1} & z_{1} \\ x_{2} & y_{2} & z_{2} \\ x_{3} & y_{3} & z_{3} \end{vmatrix}$$

$$b = (x_{3} \cdot y_{2} \cdot z_{1}) + (x_{2} \cdot y_{1} \cdot z_{3}) + (y_{3} \cdot z_{2} \cdot x_{1})$$

$$\begin{vmatrix} x_{1} & y_{1} & z_{1} \\ x_{2} & y_{2} & z_{2} \\ x_{3} & y_{3} & z_{3} \end{vmatrix}$$

Segunda forma: conocido como el método de **«Sarrus»** consiste en aumentar las dos primeras filas a continuación de la tercera fila y hacer productos cruzados, veamos:

$$A = [\beta] - [\gamma]$$

Donde:

$$\beta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (x_1 \cdot y_2 \cdot z_3) + (x_2 \cdot y_3 \cdot z_1) + (x_3 \cdot y_1 \cdot z_2)$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (x_3 \cdot y_2 \cdot z_1) + (x_1 \cdot y_3 \cdot z_2) + (x_2 \cdot y_2 \cdot z_3)$$

Tercer forma: el método por **cofactor**, que explicamos con la siguiente ilustración:

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Rightarrow A = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Ahora, podemos resolver los determinantes de 2×2 , para obtener la solución general.

$$A = x_1 (y_2 \cdot z_3 - y_3 \cdot z_2) - y_1 (x_2 \cdot z_3 - x_3 \cdot z_2) + z_1 (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2)$$

De esta manera podemos resolver determinantes de tercer orden:

Ejemplo 1

Resolver el siguiente determinante:

- a) Por productos cruzados
- b) Por Sarrus

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

a) Por productos cruzados

$$D = [(-2)(-1)(3) + (3)(-2)(1) + (3)(4)(2)] - [(2)(-1)(1) + (3)(3)(3) + (-2)(4)(-2)]$$

$$D = [6-6+24] - [-2+27+16] = (24)-(41)$$

$$D = -27$$

b) Por Sarrus

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = [(-2)(-1)(3) + (3)(-2)(1) + (2)(3)(4)] - [(1)(-1)(2) + (-2)(-2)(4) + (3)(3)(3)]$$

$$= [6 - 6 + 24] - [-2 + 16 + 27] = (24) - (41)$$

$$D = 24 - 41 = -27$$

$$D = -27$$

Ejemplo 2

Resolver el determinante dado por Sarrus y por cofactores:

$$P = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución: por Sarrus:

$$P = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = [(-4)(2)(2) + (1)(4)(0) + (-2)(3)(3)] - [(-2)(2)(0) + (-4)(4)(3) + (1)(3)(2)]$$

$$= [-16 + 0 - 18] - [0 - 48 + 6] = (-34) - (-42)$$

$$P = -34 + 42$$

$$P = 8$$

Por cofactores:

$$P = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow P = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4(4 - 12) - 3(2 + 6) + 0$$

$$P = -4(-8) - 3(8) = -32 - 24$$

$$P = 8$$

Nota: la regla de Sarrus, solo es utilizable para determinantes de 3 x 3, el método de cofactores se puede utilizar para determinantes de mayor tamaño.

Ecuaciones por determinantes: sabiendo cómo se resuelven determinantes de tercer orden, (3 x 3) ahora vamos a analizar la solución de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

«Kramer» propuso una técnica para resolver este tipo de sistema. Veamos el procedimiento.

Dado el sistema:

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = d_1$$

 $a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 = d_2$
 $a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 = d_3$

Entonces, primero definimos el determinantes de coeficientes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \ donde \ \Delta \neq 0$$

Ahora definimos los determinantes para cada variable.

$$\Delta_{\mathbf{X}} = \begin{vmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{d}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{d}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_{\mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{d}_1 & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{d}_3 & \mathbf{c}_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_{\mathbf{z}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{d}_3 \end{vmatrix}$$

Finalmente, la solución para cada variable:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Lambda}$$
 $y = \frac{\Delta_y}{\Lambda}$ $z = \frac{\Delta_z}{\Lambda}$

como podemos ver para que el sistema tenga solución, el determinante de coeficientes debe ser diferente de cero.

Ejemplo 1

Resolver el sistema dado:

$$x + y + z = 5$$

$$3x + 2y + z = 8$$

$$2x + 3y + 3z = 14$$

Solución: hallamos el determinante de coeficientes; y lo resolverlos.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

se puede resolver por productos curvados, por Sarrus o por cofactores.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 7 + 5 = 1$$

$$\Lambda = 1$$

¿Qué método se utilizó?

Calculemos los determinantes de las variables.

$$\Delta_{x} = (30 + 24 + 14) - (28 + 24 + 15) = 68 - 67$$

$$\Delta_{\mathbf{x}} = 1$$

¿Qué método se utilizó para resolver el determinante $\,\Delta x\,?\,$

$$\Delta_y = (24 + 42 + 10) - (16 + 14 + 45) = 76 - 75$$

 $\Delta_y = 1$

Ahora:

$$x = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = \frac{1}{1} = 1$$

$$z = \frac{3}{1} = 3$$

Ejemplo 2

Resolver el sistema:

$$x - y + 2z = 0$$

$$3x + 2y = 0$$

$$-2x+2y-4z=0$$

Solución: con el procedimiento descrito, realicemos la solución secuencialmente.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = [1 \cdot 2(-4) + 3 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot (-2)] - [(-2) \cdot 2 \cdot 2 + 3(-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 0 \cdot 1]$$

$$\Delta = (-8 + 12 + 0) - (-8 + 12 + 0) = 4 - 4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

como el determinante de coeficientes es cero, el sistema no tiene solución, es inconsistente, La única solución que se podría tomar es: x = y = z = 0.

(Ver ejercicios ecuaciones simultáneas, página 65).

P ROBLEMAS CON ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Con el estudio de ecuaciones de primer grado, ahora entraremos a su aplicación por medio de la resolución de problemas. Lo nuevo en esta parte es que a partir del contexto y descripción del problema, se debe plantear la ecuación o ecuaciones, para luego resolverlas.

Es pertinente tener en cuenta para resolver problemas con ecuaciones, los siguientes aspectos, los cuales permitirán obtener resultados claros y verdaderos.

- 1) Se debe leer bien el contexto del problema hasta que quede completamente entendido. Si es necesario, leerlo las veces que se requieran para comprenderlo.
- 2) Llevar dicho problema a un lenguaje matemático, a través de símbolos como coeficientes, variables, igualdades, otros; llamado modelación matemática.
- 3) Si es necesario utilizar gráficos, tablas y otros; como ayuda para la ilustración del problema.
- 4) Realizar las operaciones necesarias, para obtener el valor de las incógnitas.
- 5) Identificar la respuesta y hacer su respectiva verificación.

EJERCICIO: ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Resolver por eliminación los siguientes sistemas:

1.
$$x-2y+3z=7$$

 $2x+y+z=4$

Rta:
$$x = 2$$
; $y = -1$; $z = 1$

$$-3x + 2y - 2z = -10$$

$$-3x + 2y - 2z = -10$$

$$3x + y - z = \frac{2}{3}$$

Rta:
$$x = \frac{1}{3}$$
; $y = \frac{2}{3}$; $z = 1$

$$2x - y + z = 1$$

$$4x + 2y = \frac{3}{8}$$

Resolver los siguientes sistemas por determinantes:

3.
$$x - 2y + 3z = 7$$

Rta:
$$x = 2$$
; $y = -1$; $z = 1$

$$2x + y + z = 4$$

$$-3x + 2y - 2z = -10$$

Rta:
$$x = 0$$
, $-c$, c

4.
$$2x + y + z = 0$$

$$x-2y-2z=0$$

$$x + y + z = 0$$
 5.

Rta:
$$x = \frac{2}{3}$$
, $y = \frac{31}{21}$, $z = \frac{1}{21}$

$$2x - 3y + 2z = -3$$
$$-3x + 2y + z = 1$$

$$4x + y - 3z = 4$$

Ecuaciones de primer grado con una incógnita: problemas

La teoría sobre solución de problemas con ecuaciones, se describió anteriormente. Para resolver problemas de una ecuación con una incógnita, es más pedagógico proponer ejercicios modelos, los cuales nos ilustrarán el proceso.

Ejemplo 1

Escribir en modelación matemática la siguiente situación. El área de un triángulo es la mitad del producto de la longitud de la base y la altura.

Solución: sea A= área del triángulo, b= longitud de la base, h la longitud del triángulo. Finalmente la mitad del producto será $\frac{1}{2}b.h$, luego:

$$A = \frac{1}{2}b.h$$

Ejemplo 2

Un padre debe repartir su fortuna entre sus dos hijos, la cual es de 100.000, si al hijo mayor le corresponde x cantidad de la fortuna, ¿qué cantidad le corresponde al hijo menor?

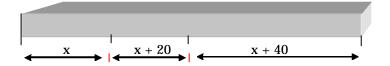
Solución: llamemos cantidad de la herencia del hijo menor y, como la del hijo mayor es x, entonces:

y = 100.000 - x, cantidad que le corresponde al hijo menor.

Ejemplo 3

Un carpintero debe cortar una table de 6m de largo, en tres tramos. Si cada tramo debe tener 20 cm más que el anterior ¿cuáles serán las longitudes de cada tramo?

Solución: Sea x la longitud del tramo más corto, es obvio que sea así, entonces, el segundo tramo será x + 20, del tercer tramo será x + 40.



La modelación matemática será:

$$(x)+(x+20)+(x+40)=600$$
 (centímetros) operamos:

$$3x + 60 = 600 \Rightarrow 3x = 600 - 60 = 540$$

Luego:
$$x = \frac{540}{3} = 180$$

El tramo más corto = 180 cm

El segundo tramo= (180 + 20) = 200 cm

E tercer tramo= (180 + 40)= 220 cm

Ejemplo 4

Se sabe que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. En un triángulo rectángulo uno de sus ángulos es el otro aumentado en 10°. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos no rectángulos de dicho triángulo?

Solución: sea x el ángulo más pequeño, entonces el otro ángulo será:

x + 10°. Por la condición de la suma de ángulos para un triángulo, tenemos

$$(x)+(x+10^{\circ})+90^{\circ}=180^{\circ}$$
, despejamos x

$$2x = 180^{\circ} - 100^{\circ} \Rightarrow 2x = 80^{\circ} \Rightarrow x = 40^{\circ}$$

por consiguien te:

$$x = 40^{\circ} \ y \ x + 10^{\circ} = 50^{\circ}$$

Los ángulos son 40° y 50°

Ejemplo 5

En una molécula de azúcar se encuentran el doble de átomos de hidrógeno que de oxígeno. También tiene un átomo más de carbono que de oxígeno. Si la molécula de azúcar tiene 45 átomos, ¿cuántos átomos de cada elemento tiene dicho sistema?

Solución: sea x los átomos de oxígeno, luego:

átomos de hidrógeno = 2x

átomos de carbono= x + 1, como todo suma 45, entonces:

$$(x)+(2x)+(x+1)=45$$

$$4x + 1 = 45 \implies 4x = 44 \implies x = 11$$

átomos de oxígeno:11

átomos de hidrógeno : 2(x) = 22átomos de carbono : x + 1 = 12

fórmula de la sustancia: $C_{12}H_{22}O_{11}$

Ejemplo 6

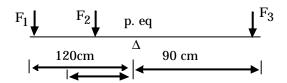
Un Ingeniero desea desarrollar un equipo hidráulico, que está compuesto por dos cilindros. El primer cilindro está a 120 cm del punto de apoyo y ejerce una fuerza de 500 kg-f. El sistema debe soportar una fuerza de 1.200 kg-f ubicada a 90 cm del punto de apoyo y al lado opuesto de los cilindros. ¿En donde se debe colocar el segundo cilindro para que ejerza una fuerza de 700 kg-f?

Solución: para que el sistema esté en equilibrio, se debe cumplir:

 F_1 = fuerza 1 = x_1 = Distancia de F_1 al punto de equilibrio

 $F_2 =$ fuerza $2 = x_2 =$ Distancia de F_2 al punto de equilibrio

 F_3 = fuerza 3 = x_3 = Distancia de F_3 al punto de equilibrio, pero F_3 es el peso que debe soporta F_1 y F_2



$$F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 = F_3 x_3$$

$$500 \cdot 120 + 700 \cdot x = 1200 \cdot 90$$

$$6.000 + 700 x = 108.000$$

700x = 102.000

$$x \cong 145,71 \text{ cm}$$

El cilindro 2 debe colocarse a 145,71 cm del punto de equilibrio.

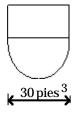
EJERCICIOS: PROBLEMAS ECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Hacer el planteamiento del problema y resolverlos adecuadamente.

1. La suma de dos números enteros, positivos es igual a 12, uno de ellos es el doble del otro. ¿Cuáles son los números?

Rta: 4 y 8

- 2. Un voceador reparte el peródico en 1.800 seg; su compañero lo hace en 120 seg, ¿cuánto tardará en entregar el peródico si lo hace simultáneamente? Rta: 720 seg.
- 3. Se desea construir un silo para granos en forma de cilindro circular y semiesférico en la parte superior. El diámetro del silo debe ser de 30 pies, ¿cuál será la altura del silo, si la capacidad debe ser de $11.250 \,\pi\,\text{pie}^{\,3}$?



Rta: 55 pies

4. El largo de un campo de baloncesto es 12 metros mayor que su ancho, si el perímetro es de 96 metros, ¿cuáles son las dimensiones del campo?

Rta: largo = 30 metros ancho= 18metros

5. En un triángulo, el ángulo más pequeño es la mitad del mayor y las dos terceras partes del ángulo intermedio, ¿cuáles serán las medidas de los ángulos?

Rta: menor: 40°, intermedio= 60°

y mayor 80°

6. Un fabricante de grabadoras reduce el precio de un modelo en el 15%, si el precio con el descuento es de \$125.000, ¿cuál será el precio original del modelo de la grabadora.

Rta: \$147.059

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas: problemas

Con el desarrollo de ecuaciones de primer grado con una incógnita, se ha adquirido alguna destreza en el planteamiento y resolución de problemas. No olvidemos los 5 pasos que se referencian al inicio de esta sección para resolver ecuaciones.

Para ésta sección, analizaremos problemas donde participan 2 variables en el planteamiento y resolución de problemas diversos, lo que nos indica que debemos plantear 2 ecuaciones con 2 incógnitas, la forma de solución ya se han estudiado en temáticas anteriores.

Ejemplo 1

Una industria tiene dos tipos de equipos para comunicación, el tipo A cuesta \$67.000 y el tipo B cuesta \$100.000, si fueron vendidos 72 equipos por \$5´880.000 ¿cuántos equipos de cada tipo fueron vendidos?

Solución: debemos plantear dos ecuaciones, una para cantidad de equipos y otra para costo de los mismos.

```
Cantidad equipos:
```

x= equipos tipo A

y= equipo tipo B, luego:

$$x + y = 72$$

Costo de equipos: 67.000 x + 100.000 y = 5.880.000

tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas, vamos a utilizar reducción:

$$x + y = 72$$

67.000 + 100.000y= 5'880.000

multiplicamos la primera ecuación por -100.000 para eliminar y, luego:

```
-1000.000 \text{ x} - 100.000 \text{ y} = -7^200.000
```

$$67.000x + 100.000 y = 5.880.000$$

operando:

$$-33.000x = -1^{\circ}320.000$$

$$x = \frac{-1^{2}320.000}{-33.000} = 40$$

como x = 40 corresponde a equipo tipo A.

Para hallar y, reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones originales:

$$x + y = 72 \implies y = 72 - x \implies y = 72 - 40 = 32$$

Respuesta:

Equipos de tipo A vendidos: 40 Equipos de tipo B vendidos: 32

Ejemplo 2

Sea una solución obtenida al mezclar 2 soluciones de 5% y 20%, se quiere obtener 200 ml de la solución con una concentración de 15%, ¿cuántos ml de las soluciones se deben mezclar?

Solución:

x= solución al 5% y= solución al 20% ecuación para volumen x+y=200

ecuación para concentración

$$0.05x + 0.20y = 0.15(200) \Rightarrow 0.05x + 0.20y = 30$$

Luego:

$$x + y = 200$$

$$0.05x + 0.20y = 30$$

Por sustitución como $x + y = 200 \Rightarrow x = 200 - y$, entonces :

$$\begin{array}{l} 0.05 \left(200-y\right) + 0.20 y = 30, despejamos \ y \\ 10 - 0.05 y + 0.20 y = 30 \Rightarrow 0.15 y = 30 - 10 \Rightarrow 0.15 y = 20 \\ y = \frac{20}{0.15} = 133,33 \\ para \ hallar \ x : como \ x + y = 200 \Rightarrow x + 133,33 = 200, luego : \\ x = 200 - 133,33 = 66,67 \end{array}$$

Por consiguiente, se deben mezclar $66,67~\mathrm{ml}$ de solución al 5% y $133,33~\mathrm{ml}$ de solución a 20%.

Ejemplo 3

El costo de arreglo para equipos de computación es de \$6.000; su costo unitario es \$400. El costo de arreglo para equipos de comunicación es de \$8.000; su costo unitario es \$300. ¿Cuál será el punto de equilibrio, sabiendo que éste se consigue cuando los costos son equivalentes?

Solución:

 $c_1 = costo$ fabricar x equipos computación

 $c_2 = costo$ fabricar x equipos comunciación

x= cantidad unidades fabricadas

Entonces; para equipos de computación:

$$c_1 = 400x + 6.000$$

para equipos de comunciación:

$$c_2 = 300 x + 8.000$$

punto equilibrio : $c_2 = c_2$. Luego :

$$400\,x + 6.000 = 300\,x + 8.00$$

$$400 \, x - 300 \, x = 8.000 \, -6.000$$

$$100x = 2.000$$

$$x = \frac{200}{100} = 20$$

Entonces el punto de equilibrio se consigue cuando se fabrican 20 unidades.

Ejemplo 4

Los ángulos $\alpha y\beta$ son suplementarios, pero uno es 4 veces y 3 grados mayor que el otro. ¿Cuáles son las medidas de $\alpha y\beta$?

Solución:

Sea α = ángulo mayor y β = ángulo menor

 $\alpha + \beta = 180^{\circ}$ (ángulos suplementario s)

$$\alpha = 4 \beta + 3^{\circ} \Rightarrow \alpha - 4\beta = 3^{\circ}$$

Tenemos 2 ecuaciones con dos incógnitas. Apliquemos reducción:

$$4\alpha + 4\beta = 720^{\circ}$$
$$\alpha - 4\beta = 3^{\circ}$$
$$5\alpha = 723^{\circ}$$
$$\alpha = 144.6^{\circ}$$

Ahora hallamos β , como $\alpha + \beta = 180^{\circ} \Rightarrow \beta = 180^{\circ} - 144.6^{\circ}$

$$\beta = 35.4^{\circ}$$

Luego : $\alpha = 144.6^{\circ} \text{ y}$ $\rho = 35.4^{\circ}$

Ejemplo 5

En un circuito en serie, la resistencia total, es la suma de las resistencias componentes. Un circuito en serie está compuesto por dos resistencias R_1 y R_2 , la resistencia total es de 1.375 ohmios, para suministrar el voltaje requerido, R_1 debe tener 125 ohmios más que R_2 . ¿Cuál será el valor de las resistencias?

Solución:

Sea $R_1 + R_2 = 1.375$ ohmios, por otro lado

 $R_1 = R_2 + 125$ ohmios, luego ordenando, tenemos dos ecuaciones, en dos incógnitas.

$$R_1 + R_2 = 1.375$$

$$R_1 - R_2 = 125$$

resolvermos por sustitución, como: $R_1+R_2=1.375\,$ y además $R_1=R_2+125\,$; reemplazamos R_1 en la primera ecuación, luego:

$$(R_2 + 125) + R_2 = 1.375$$

 $2R_2 + 125 = 1.375 \Rightarrow 2R_2 = 1.375 - 125 \Rightarrow 2R_2 = 1.250$
 $R_2 = \frac{1.250}{2} = 625$

por consiguiente la resistencia, para hallar la resistencia $\,R_1\,$, reemplazamos el valor de $\,R_2\,$ en cualquiera de las ecuaciones planteadas.

$$R_1 + R_2 = 1.375 \Rightarrow R_1 + (625) = 1.375 \Rightarrow R_1 = 1.375 - 625$$

$$R_1 = 750$$

Respuesta:

 $R_1 = 750$ ohmios

 $R_2 = 625$ ohmios

EJERCICIOS: PROBLEMAS DE ECUACIONES CON DOS VARIABLES

Leer cuidadosamente los problemas propuestos y resolverlos haciendo los pasos necesarios en la resolución de los mismos.

1. Un ángulo mide 46° más que su complementario, ¿cuál será la medida de los ángulos?

Rta: 22° y 68°

2. Si en una distribuidora de dulces, 4 paquetes de dulce y 4 paquetes de galletas valen \$7.00, dos paquetes de galletas cuestan \$20 más que un paquete de dulces. ¿Cuánto cuestan un paquete de galletas y un paquete de dulces?

Rta: Galletas = \$665 Dulces\$1.310

3. Un automóvil recorre 50 km en el mismo tiempo que un avión viaja 180 km. la velocidad del avión es de 143 k/hr más que la del automóvil. ¿Cuál será la velocidad del automóvil?

Rta: 55 km/hr

4. El perímetro de un rectángulo es de 16 metros, su área es de 15m². ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Rta: Largo = 5 mts. Ancho= 3 mts.

5. Para entrar a una función de teatro se tienen dos tipos de entradas. el preferencial vale \$4.500 y el popular vale \$3.00, si se vendieron 450 boletas, para un recaudo de \$1´819.500. ¿Cuántas boletas de cada clase se vendieron?

Rta: Preferencia= 313 Popular= 137

6. Se desea preparar 200 litros de ácido nítrico al 34%; a partir de dos soluciones de 28% y 36% de concentración de ácido. ¿Cuáles deberán ser la cantidades de ácido a utilizar de cada uno; para obtener la solución?

Rta: Solución al 28%= 50 lt Solución al 36% = 150 lt

Ecuaciones de primer grado con tres incógnitas: problemas

El método de solución de ecuaciones de este tipo es similar a los casos anteriores, algunos ejemplos nos ilustrarán dicha situación.

Ejemplo 1

La suma de tres números es 4. El primero más dos veces el segundo más el tercero es 1. Por otro lado, tres veces el primero más el segundo, menos el tercero es -2. ¿Cuáles son los números?

Solución:

Sea x = primer número

y = segundo número

z = tercer número

Según las condiciones:

$$x + 2y + z = 1$$
 (1)

$$3x + y - z = -2(2)$$

$$x + y + z = 4 \quad (3)$$

Eliminamos inicialmente z, entonces:

$$x + 2y + z = 1$$
 (1)

$$3x + y - z = -2(2)$$

$$\frac{3x + y - z = -2(2)}{4x + 3y = -1(4)}$$

Ahora:

$$3x + y - z = -2$$

$$x + y + z = 4$$

$$4x + 2y = 2 \quad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5), eliminamos x, multiplicamos (4) por (-1), luego:

$$-4x-3y=1$$

$$4x + 2y = 2$$
$$- y = 3$$

$$-y=3$$

por consiguiente y = -3

Ahora reemplazamos y en (4) ó (5). hagámoslo en (4)

$$4x-3(-3) = -1 \Rightarrow 4x = -1 + 9 \Rightarrow x = \frac{8}{4} = 2$$

 $x = 2$

por último reemplazamos x y y en cualquiera de las ecuaciones originales; tomemos (1).

$$x + 2y + z = 1 \implies (2) + 2(-3) + z = 1 \implies z = 1 + 6 - 2$$

 $z = 5$

Observación: para resolver problemas con ecuaciones del tipo que estamos estudiando, la mayor dificultad están en plantear las ecuaciones, ya que conocidas éstas, la solución ha sido ampliamente analizada.

Ejemplo 2

El ángulo más grande de un rectángulo es 70° mayor que el ángulo más pequeño y el ángulo restante es 10° más grande que tres veces el ángulo más pequeño.¿Cuáles son las medidas de los ángulos?

Solución:

x = ángulo más pequeño

y = ángulo intermedio

z = ángulo mayor

Las condiciones:

$$x + y + z = 180(1)$$
 ¿por qué?

$$x -z = -70(2)$$
 ¿por qué?

$$3x - y = -10(3)$$
 ¿por qué?

cada ecuación tiene su justificación, usted debe buscarla y analizarla. Eliminamos y en las ecuaciones originales, obtenemos:

$$x-z=-70 (4)$$

$$4x + z = 170(5)$$

Por favor hacer el procedimiento que permitió obtener las ecuaciones (4) y (5). Resolviendo (4) y (5): x = 20 y z=90, verificar estos resultados, finalmente y = 70. respueta: los ángulos son 20° , 70° y 90° .

EJERCICIO: PROBLEMAS ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS

Resolver aplicando los principios estudiados sobre ecuaciones lineales, los siguientes problemas.

1. Un Biólogo desea probar un fertilizante a partir de tres clases existentes, referenciados F_1 , F_2 , F_3 , cuyo contenido de nitrógeno es 30%, 20% y 15%, respectivamente. El Biólogo quiere trabajar con 600 kg de mezcla con un contenido de nitrógeno del 25%. La mezcla debe contener 100 kg más de F_3 que da F_2 . ¿Cuánto requiere el Biólogo de cada tipo de fertilizante?

Rta:
$$F_1 = 380 \text{ kg}$$
, $F_2 = 60 \text{kg}$, $F_3 = 160 \text{kg}$

2. Determinar la parábola $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por los puntos $P_1(1,2)$, $P_2(-2,-7)$, $P_3(2,-3)$.

Rta:
$$y = -2x^2 + x + 3$$

3. En la caja de un banco hay \$880 en billetes de \$5, \$10 y \$50. La cantidad de billetes de \$10 es el doble de la de \$50, si hay en total 44 billetes. ¿Cuántos billetes de cada denominación tiene la caja del banco?

4. Para tres grupos de investigación, hay \$1'360.000. La cantidad de científicos en total es 100. Cada científico del primer grupo recibió \$20.000 millones, del segundo grupo; cada científico recibió \$8.000 millones y del tercer grupo; cada científico recibió \$10.000 millones. Los científicos del primer grupo recibió 5 veces más fondos que el segundo grupo. ¿Cuántos científicos hay en cada grupo de investigación?



CUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Las ecuaciones de segundo grado han sido motivadas desde tiempos inmemoriables, inicialmente la necesidad de resolver problemas de áreas y volúmenes condujeron a manipular ecuaciones de este tipo. Como los números negativos aparecieron tarde en la historia de las matemáticas, en sus inicios el manejo de ecuaciones de segundo grado fue con números positivos.

Se reconocen cinco tipos de ecuación de segundo grado, a saber:

$$x^2 = bx$$
: $x^2 = c$: $x^2 + c = bx$: $x^2 = bx + c$: $x^2 + bc = c$

- La ecuación de tipo: $x^2 = bx$, tiene una única solución: x = b, ya que no se acepta a cero como la solución
- La ecuación de tipo: $x^2=c$, equivale a hallar la raíz cuadrada de un número. Para esto existen diversos métodos, como el de tanteo, el de Herón, el de Euclides.

Método Herón: Herón de Alejandría en el Siglo I, propuso una forma de hallar la raíz cuadrada de un número positivo así, si tenemos por ejemplo $x^2 = 2$. Suponemos que la solución es 3/2, para hallar una nueva aproximación aplicamos la siguiente regla.

$$\frac{3/2 + \frac{2/3}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12}$$
, la siguiente aproximación:

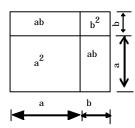
$$\frac{17/12 + \frac{12/17}{2}}{2} = \frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408} \cong 1,4142215686 \ 245 \dots$$

Que es una buena aproximación a $\sqrt{2}$.

Es de anotar que el proceso se debe repetir tantas veces como se desee obtener una buena aproximación.

Método Euclides: el colapso de la aritmética pitagórica provocó una crisis que motivó a los griegos para dar más esfuerzo a la geometría. Las cantidades fijas (constantes) las representaban por segmentos de recta con longitud relativa a una unidad fija. El producto de dos cantidades la representaban como el área de un rectángulo y el producto de tres cantidades como el volumen de un prisma rectangular recto. De aquí el origen de la denominación de cuadrado y cubo para las potencias segunda y tercera.

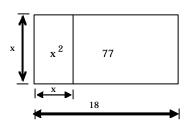
A manera de ejemplo:



La gráfica representa la expresión muy conocida
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

• Las ecuaciones de tipo $x^2 + c = bx$, fueron resueltas geométricamente por los griegos y aritméticamente por los babilonios.

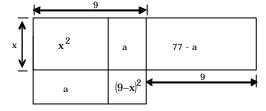
Método griego: inicialmente los griegos y posteriormente los árabes, utilizaron un método geométrico para resolver éste tipo de ecuaciones por ejemplo: $x^2 + 77 = 18x$.



La gráfica indica que la suma de las áreas es igual al área total del rectángulo

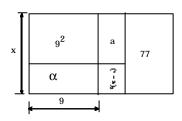
Para encontrar el valor de x, se debe completar un cuadrado de lado 9 que incluye el cuadrado, de lado x, éste es el primer caso.

El cuadrado lo componenen dos rectángulos de igual área, y por dos cuadrados de área $x^2 - y (9-x)^2$



De la gráfica se infiere: $x^2 + a = 77 - a \Rightarrow (x^2 + a) + a = 77$, por otro lado, también de la gráfica: $(x-9)^2 + 77 = (9)^2$, resolviendo x = 7.

El segundo caso, es hacer un cuadrado de lado x que incluya un cuadrado de lado 9, veamos:



El cuadrado de lado x, está formado por dos rectángulos de igual área y por dos cuadrados, uno de área $(9)^2$ y otro de área $(x-9)^2$.

Luego:
$$x^2 - a = 77 + a \Rightarrow x^2 = 77 + 2a$$
.

Además en la gráfica se puede observar:

$$(x-9)^2 + 9^2 = 77$$

por lo tanto x = 11

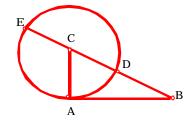
El método griego se fundamentó en la proposición 5 del libro II de los elementos de Euclides. Este establece:

«Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, más el comprendido por las partes desiguales de la recta entera, más el cuadrado de la diferencia entre una de las dos partes iguales y una parte desigual, es equivalente al cuadrado de la mitad de la recta dada».

• La ecuación de tipo $x^2=bx+c$, como siempre los griegos utilizaron la geometría para resolver este tipo de ecuación. Pero en el Siglo XVII, en su libro «La Geometrie», René Descartes, describe un método geométrico para construir una solución de la ecuación cuadrática $x^2=bx+c^2$.

Enla gráfica que tenemos: $\overline{AB}=c$ de la ecuación. La perpendicular \overline{AC} a \overline{AB} ,

donde $AC = \frac{b}{2}$. La línea entre B y C, interseca al círculo en E y D. la solución será: X = BE

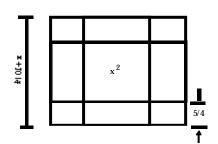


• La ecuación de tipo $x^2 + bx = c$, fue trabajada por los árabes y (Tabit Ben Qurra) por los griegos.

Método árabe: para resolver ecuaciones de éste tipo los árabes utilizan áreas de cuadrados y rectángulos. Por ejemplo:

$$x^2 + 5x = 36$$

para resolver esta ecuación Al-Khowarizmi, dibujó un cuadrado de área x^2y sobre cada lado dibujó 4 rectángulos de dimensión: xy5/4, la figura tendría de área 36.



El lado del cuadrado es evidentementa a $\left(x+10/4\right)$, y el área $36+\frac{25}{4}$, luego el lado del cuadrado debe ser: $x+\frac{10}{4}=\frac{13}{2}$, entonces x=4.

Recordemos que el área era: $\frac{169}{4}$

Hasta aquí hemos trabajado métodos con fundamentos geométricos para valores positivos de la variable. Pero en muchos casos, sabemos que hay soluciones negativas para ecuaciones de segundo grado.

Para resolver ecuaciones de segundo grado donde se presentan coeficientes negativos fueron trabajados inicialmente por Carlyle (1775- 1881) y Von Staudt (1798 - 1867). Ambos se basaron en principios geométricos, utilizando círculos; dichos métodos son muy largos por lo cual no los desarrollamos, solo que es pertinente hacer la referencia a estos inquietos de las matemáticas.

Podemos ver que los métodos utilizados por las antiguas civilizaciones para resolver ecuaciones de segundo grado son muy largas y tediosas, lo que conllevó a los matemáticos a buscar métodos más rápidos pero con buen fundamento matemático

Método axiomático: es el método más usado actualmente y se soporta en los axiomas, definiciones y propiedades establecidas a través de toda la historia de ls matemáticas.

Sea la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c constantes y $a \neq 0$. Se puede resolver por diversas técnicas.

♦ Técnica por factorización

Se soporta en la regla del producto nulo «si a y b son números reales y a.b = 0, entonces a = 0 ó b =0», como una ecuación de segundo grado se puede expresar como producto de dos factores lineales, aplicamos la regla del producto nulo y obtenemos la solución.

Debemos resaltar que las ecuaciones de tipo $ax^2+bx+c=0$, si factorizamos el trinosmio obtenemos:

$$(px + \lambda_1)(qx + \lambda_2) = 0$$

Aplicando la regla del producto nulo, tenemos:

$$px + \lambda_1 = 0 \quad \text{ \'o} \quad qx + \lambda_2 = 0$$

Despejamos la incógnita para obtener las dos soluciones:

$$x = \frac{\lambda_1}{p} y x = \frac{\lambda_2}{q}$$

El despeje es simbólico, ya que en cada caso debemos tener presente los signos de las cantidades.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $3x^2 - 3x - 18 = 0$

Solución: factorizamos; ya hemos estudiado este tipo de factorización, en caso de reforzar, consultar el tema en matemáticas básicas.

$$\frac{3(8x^2 - 3x - 18)}{3} = 0 \Rightarrow \frac{(3x^2) - 3(3x) - 54}{3} = 0$$

$$\frac{(3x-9)(3x+6)}{3} = 0 \Rightarrow (3x-9)(x+2) = 0$$

por la regla del producto nulo, tenemos:

$$3x - 9 = 0$$
 ó $x + 2 = 0 \Rightarrow x = 3$ y $x = -2$

Re spuesta: x = 3 y x = -2

Ejemplo 2

Hallar la solución de la ecuación: $x^2 - 10x + 25 = 0$

Solución: factorizando el trinomio como se estudió en las técnicas de factorización.

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)(x - 5) = 0$$

Aplicamos la regla del producto nulo: $x-5=0 \Rightarrow x=5$. Igual para el segundo factor. Luego la solución x=5.

Observación: en el ejemplo 1, la solución fue real y diferente, en el ejemplol 2, la solución fue real e igual. En el siguiente ejemplo vemos una solución imaginaria.

Ejemplo 3

Determinar el valor de x para la ecuación: $x^2 + 16 = 0$.

Solución: $x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-16}$, como vemos es una raíz par de número negativo, cuya solución es imaginaria.

 $x = \pm 4i$ ¿recordamos los números imaginarios? ¡Por favor repasar!

Respuesta:

$$x = +4i$$

$$x = -4i$$

Nota: en el módulo de matemáticas básicas, se presenta todo lo relacionado con número imaginario.

En el ejemplo 3, para muchos autores es llamado el método de extracción de raíz. Por este camino las soluciones pueden ser imaginarias o reales.

Ejemplo 4

Hallar la solución de: $9x^2 - 25 = 0$

Solución: la idea es despejar x, luego $9x^2 = 25$

$$x^2 = \frac{25}{9} \implies x = \pm \sqrt{\frac{25}{9}} \implies x = \pm \frac{5}{3}$$

Respuesta:

$$x = +5/3$$
 y $x = -5/3$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación: $x^2 - 2x - 4 = 0$

Solución: como es un trinomio de la forma $x^2 + bx + c = 0$, factorizamos como indica la técnica; dos números que multiplicados sea igual a c y sumados sean igual a b, luego:

$$x^2 - 2x - 4 = (x - ?) (x + ?) = 0$$

vemos que no es fácil identificar dos números que multiplicados sean igual a $\,-4\,$ y sumados sean igual a $\,-2\,$, para estos casos hay otra técnica que veremos posteriormente.

Técnica de completar cuadrados

En muchas ocasiones, el trinomio propuesto en la ecuación no se puede resolver directamente por factorización o por extracción de raíz. Entonces lo que se hace

para resolver la ecuación propuesta, es hacer **una transformación** que permita obtener un «trinomio cuadrado perfecto», técnica llamada completar cuadrados.

Sea la ecuación: $x^2 + bx + c = 0$ no se puede factorizar en forma completa

$$x^2 + bx = -c$$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}\ -\frac{b}{2}$$

Se adiciona a la ecuación $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, para tener un trinomio cuadrado perfecto al lado izquierdo de la ecuación.

Extraemos raíz cuadrada.

finalmente

Así se obtiene las dos soluciones para l a ecuación propuesta.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación: $x^2 + 6x - 2 = 0$

Solución:

 $x^2 + 6x - 2 = 0$ completamos cuadrados

$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 2$$
 simplificando

 $x^2 + 6x + 9 = 11$ aplicando trinomios cuadrados perfectos

$$(x+3)^2 = 11$$
 despejamos x

$$x + 3 = \pm \sqrt{11}$$

$$x = \pm \sqrt{11} - 3$$
 y $x = -\sqrt{11} - 3$

Ejemplo 2

Hallar la solución de la ecuación: $x^2 + 2x - 15 = 0$

Solución: $x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 15$, completamos cuadrados

$$x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 15 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$$
 desarrolla ndo

$$x^{2} + 2x + 1 = 16 \Rightarrow (x+1)^{2} = 16 \Rightarrow x+1 = \pm \sqrt{16}$$
, luego

$$x = \pm 4 - 1$$

Respuesta: x = 4 - 1 = 3 y x = -4 - 1 = -5

♦ Técnica por la fórmula cuadrática

Hay situaciones donde las técnicas anteriores no permiten o es muy difícil obtener la solución. Se ha identificado una forma más rápida de resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita.

Sea la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, $c \in R$ y $a \neq 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 fórmula cuadrática

Demostración:

Para obtener la fórmula, aplicamos el principio de completar cuadrados, luego:

 $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = -c$, el coeficiente de $_X^2$ debe ser uno, luego dividir toda la ecuación por a, entonces:

 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$. Completamos cuadrados en la parte izquierda de la ecuación.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$
 operando

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \text{ extraemos la raı́z para despejar } x$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 luego:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

operando las fracciones

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así queda demostrado la ecuación general de segundo grado

En la ecuación observamos que las soluciones las determinan los signos del radical. Así las dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

A la expresión b^2-4ac se le llama el Discriminante, debido a que su valor indica el tipo de solución de la ecuación dada.

Veamos algo más sobre el discrimante Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- $Si \Delta > 0$, hay dos soluciones reales y diferentes
- $Si\Delta = 0$, hay dos soluciones reales iguales, Una raíz con multiplicidad dos
- . $Si\,\Delta < 0$, hay dos soluciones imaginaria diferentes

Ejemplo 1

Resolver la siguiente ecuación usando la fórmula cuadrática $\,x^2-6x+8=0\,$

Solución: en el trinomio dado a = 1, b = -6, c = 8; entonces

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}, \text{ luego}$$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Re spuesta: $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$

Ejemplo 2

Resolver

$$3x^2 - 4x + 2 = 0$$

Solución:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2} \ i}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{2} \ i}{3}$$

$$x_1 = \frac{2 \pm \sqrt{2} i}{2}$$
 y $x_2 = \frac{2 - \sqrt{2} i}{2}$

vemos que en este ejemplo la solución no es real.

Ejemplo 3

Resolver: $4y^2 - y + 2 = 0$

Solución: aplicando la fórmula

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(4)(2)}}{2(4)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{-31}}{8}$$

las soluciones son:

$$y_1 = \frac{1 \pm \sqrt{31} i}{8}$$
 y $y_2 = \frac{1 - \sqrt{31} i}{8}$

Para resolver ecuaciones por medio de la fórmula cuadrática, sólo requiere identificar a, b y c; en la ecuación planteada, además, del signo de cada valor.



CUACIONES DE GRADO N (N = PAR)

A veces se pueden presentar ecuaciones de la forma: $ax^n + bx^m + c = 0$ donde m = n/2. La idea es reducir el grado hasta cuando n = 2, para resolverlo como una cuadrática. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Solución: si hacemos un cambio de variable, $u = x^2$, entonces $u^2 = x^4$, luego:

 $u^2 = 5u + 4 = 0$, la podemos resolver por factorización

$$u^2 = 5u + 4 = (u - 4)(u - 1) = 0$$

aplicando la regla del producto nulo

$$u-4=0$$
 ó $u-1=0 \Rightarrow u=4$ y $u=1$

ahora reemplzamos u por x^2 , luego:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

 $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

se extrajo raíz cuadrada

Respuesta:

 $x_1=2, \quad x_2=-2, \quad x_3=1, \quad x_4=-1$ tenemos 4 soluciones, según el grado de la ecuación propuesta.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación: $y^{10} + 6y^5 - 16 = 0$

solución: hacemos cambio de variable, $w = y^5$, luego $w^2 = y^{10}$, entonces:

$$w^2 + 6w - 16 = 0$$
, factorizam os

$$(w+8)(w-2)=0$$
 por producto nulo

$$w + 8 = 0 \implies w = -8$$

$$w-2=0 \implies w=2$$

reemplazamos w por $\,{}_{V}^{\,5}$, entonces:

$$y^5 = -8 \Rightarrow y = \sqrt[5]{-8}$$

$$y^5 = 2 \Rightarrow y = \sqrt[5]{2}$$

como la ecuación es de grado 10, entonces deben haber 10 soluciones, aquí encontramos solo dos, las 8 restantes se pueden obtener por métodos matemáticos avanzados.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación: $x^{2/3} + 2x^{1/3} - 15 = 0$

Solución: como en los casos anteriores, hacemos cambio de variable.

$$u=x^{1/3}$$
, entonces $u^2=x^{1/3}$, luego $u^2+2u-15=0$, por factorización $(u+5)(u-3)=0$ por ley producto nulo $u+5=0\Rightarrow u=-5$ $u-3=0\Rightarrow u=3$

reemplazamos $u = x^{1/3}$, entonces:

$$x^{1/3}=-5$$
, despejamos x ası́ : $\left(x^{1/3}\right)^3=\left(-5\right)^3\Rightarrow x=-125$ $x^{1/3}=3$, luego $\left(x^{1/3}\right)^3=3^3\Rightarrow x=27$ Re spuesta : $x_1=-125$ y $x_2=27$

Ejemplo 4

Demuestre que la solución para: $y^{2/3} - y^{1/3} - 6 = 0$; es 27 y 8.

Solución: el proceso es similar, solo el cambio de variable que será: $v=x^{1/3}$; lo demás es igual.



CUACIONES CON RADICALES

Cuando se presentan ecuaciones con radicales, al eliminar el radical, ésta se reduce a una ecuacións cuadrática, siempre y cuando el índice de la raíz sea par. Aquí vamos a analizar fundamentalmente las raíces cuadradas.

Ejemplo 1

Resolver: $x + \sqrt{x-4} = 4$

Solución: partiendo de $x + \sqrt{x-4} = 4$, dejamos el radical solo, entonces

$$\sqrt{x-4} = 4-x \Rightarrow \left(\sqrt{x-4}\right)^2 = (x-4)^2$$
 . Así eliminamos el radical, luego

$$x-4 = 16 - 8x + x^2 \implies x^2 - 9x + 20 = 0$$

Apliquemos la cuadrática para resolverla

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(20)}}{2(1)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Re spuesta: $x_1 = 5$ y $x_2 = 4$

Ejemplo 2

Hallar los valores de la variable en la ecuación: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$

Solución: como $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$, entonces

 $\sqrt{2x+3} = 2 + \sqrt{x-2}$, elevamos al cuadrado

$$2x + 3 = 4 + 4 \sqrt{x-2} + x - 2$$
 simplificando

$$x + 1 = 4 \sqrt{x - 2}$$
, volvemos a elevar alcuadrado

$$x^2 + 2x + 1 = 16(x-2)$$
, reorganizando

$$x^2 - 14x + 33 = 0$$
, por factorización

$$(x-11)(x-3)=0$$
, por ley de producto nulo

Respuesta:

$$x = 11$$

$$x = 3$$

Ejercicios

Resolver

1.
$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+9} = 2$$
 Rta: $x = 0$ y $x = 16$

Rta:
$$x = 0$$
 v $x = 16$

2.
$$\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0$$

Rta:
$$x = 64$$



CUACIONES CON FRACCIONES

No se puede dejar pasar por alto unas ecuaciones muy particulares, son ecuaciones con fracciones que pueden llevarse a ecuaciones lineales o cuadrática. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación: $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 10$

Solución: operamos las fracciones

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 10 \Rightarrow \frac{2x + 3x}{6} = 10 \Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{5} = 12$$

Luego: x = 12, para este ejemplo se llegó a una ecuación lineal de primer grado.

Ejemplo 2

Hallar el valor de y para: $\frac{y}{y+2} = \frac{2}{y-1}$

Solución: operamos las fracciones, buscando común divisor:

$$\frac{y}{y+2} - \frac{2}{y-1} = 0 \implies \frac{(y-1)y-2(y+2)}{(y+2)(y-1)} = 0$$
, luego

$$\frac{y^2 - y - 2y - 4}{(y+2)(y-1)} = 0 \implies y^2 - 3y - 4 = 0, \text{ factorizam os}$$

$$(y-4)(y+1)=0 \implies y=4 \quad y \quad y=-1$$

Recordemos la forma de obtener el común denominador en fracciones algebraicas, consultemos el módulo de matemáticas básicas.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación: $\frac{x}{x-2} + 1 = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

Solución:

$$\frac{x+\left(x-2\right)}{x-2} = \frac{x^2+4}{x^2-4} \Rightarrow \frac{2x-2}{x-2} - \frac{x^2+4}{x^2-4} = 0$$
, buscamos el común denominador

$$\frac{(2x-2)(x+2)-(x^2+4)}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 - x^2 - 4 = 0, \text{luego}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
, factorizam os
 $(x+4)(x-2) = 0 \implies x-4$ y $x = 2$

Nota: No olvidemos el manejo de fracciones



ROBLEMAS CON ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Muchos fenómenos del mundo que nos rodea, se pueden expresar matemáticamente por medio de ecuaciones cuadráticas. Para resolver problemas de este tipo, se debe seguir la metodología planteada en la sección anterior donde se resolvieron problemas con ecuaciones de primer grado.

La forma más pertinente de explicar este tipo de problemas, es por medio de ejemplos modelos, por favor analizarlos detenidamente.

Ejemplo 1

La cuarta parte del producto de dos números enteros pares consecutivos es 56 ¿cuáles son los números?

Solución: sea x =entero par positivo, luego x + 2 =entero par consecutivo.

Según las condiciones del problema:

$$\frac{1}{4}$$
 $(x)(x+2)=56$, modelo matemático para el problema

$$x^2 + 2x = 224 \Rightarrow x^2 + 2x - 224 = 0$$
, factorizamos

$$(x+16)(x+14)=0$$
, por regla del producto nulo

$$x + 16 = 0 \implies x = -16$$

$$x - 14 = 0 \implies x = 14$$

como se trata de entero par positivo, la primera solución es x = 14 y x + 2 = 16.

Ejemplo 2

La raíz cuadrada de un número más 4, es lo mismo que el número menor 8, ¿cuál es el número?

Solución: x = número dado

 $\sqrt{x+4} = x-8$, según las condiciones del problema

$$(\sqrt{x+4})^2 = (x-8)^2$$
, para eliminar la raíz

$$x + 4 = x^2 - 16x + 64 \Rightarrow x^2 - 17x + 60 = 0$$

por la cuadrática

$$=\frac{-(-17)\pm\sqrt{(-17)^2-4(1)(60)}}{2(1)}=\ \frac{17\pm\sqrt{289-240}}{2}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2}$$
, luego

$$x_1 = \frac{24}{2} = 12$$
 y $x_2 = \frac{17 - 7}{2} = 5$

Ejemplo 3

Calcular las dimensiones de un rectángulo, cuya área es de 375 m², además, el largo es el doble del ancho menos cinco metros.

Solución:

(x)
$$A = 375 \text{ m}^2$$
 $(2x-5)$

Según las condiciones del problem a, la gráfica nos ilistra dicha situación

$$(2x-5)(x) = 375 \implies 2x^2 - 5x - 375 = 0$$

por la cuadrática

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-375)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 3.000}}{4}$$

$$5 \pm 55$$

$$x = \frac{5 \pm 55}{4}$$

$$x_1 = \frac{5+55}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

$$x_2 = \frac{5-55}{4} = \frac{-50}{4} = -12,5$$

por las condiciones del problema el valor negativo se rechaza, ya que las longitudes negativa no hay. Entonces la solución es:

Largo: 2(15) - 5 = 25m

Ancho: x = 15 m.

Ejemplo 4

Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, cuya ecuación de altura es: $y=-16t^2+v_0$ t. Donde v_0 es le velocidad inicial de lanzamiento. El objeto es lanzado con una velocidad de 400 m/seg.

a. ¿En qué tiempo el objeto regresa al suelo?

b. ¿Cuánto tarda en alcanzar 2.500 m. de altura?

Solución:

a. Cuando el objeto regresa al suelo y = 0, luego

como
$$y = -16t^2 + v_0 t \Rightarrow 0 = -16t^2 + 400t$$
, factorizamos

$$-16t(t-25)=0$$
, por ley de producto nulo

$$-16t = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$t-25=0 \Rightarrow t=25$$

Luego el tiempo en que el objeto regresa el suelo es de 25 seg.

b. Para que el objeto alcance 2.500 metros será:

$$-16t^2 + 400t = 2.500 \Rightarrow -16t^2 + 400t - 2.500 = 0$$
, luego

$$16t^2 - 400t + 2.500 = 0$$
, por la cuadrática

$$t = \frac{400 \pm \sqrt{(-400)^2 - 4(16)(2.500)}}{2(16)} = \frac{400 \pm \sqrt{160.000 - 160.000}}{32}$$

$$t = \frac{400 \pm \sqrt{0}}{32} = \frac{400}{32} = 12,5 \text{seg}.$$

El tiempo que tarda en alcanzar 2.500 m es de 12,5 seg.

Ejemplo 5

En una planta manufacturera el costo mensual de producir x unidades está dado por la ecuación: $c(x)=10x^2-100x-2.000$ ¿cuántos productos se pueden manufacturar para un costo de 10.000 pesos?

Solución:

$$c(x)=10x^2-100x-2.000$$
 para $c=10.000$, entonces

$$10x^2 - 100x - 2.000 = 10.000 \Rightarrow 10x^2 - 100x - 12.000 = 0$$

$$x = \frac{-(-100) \pm \sqrt{(-100)^2 - 4(10)(-12.000)}}{2(10)} = \frac{100 \pm \sqrt{10.000 + 480.000}}{20}$$
$$x = \frac{100 \pm 700}{20}$$

$$x_1 = \frac{100 + 700}{20} = 400$$

$$x_2 = \frac{100 - 700}{20} = -300$$

se toma la solución positiva, por obvias razones, x = 400 unidades producidas

Ejemplo 6

La suma de los primeros n enteros pares consecutivos está dada por la ecuación: S = n(n+1)¿cusántos enteros n pares consecutivos y positivos se deben sumar para que dicha suma sea de 342?

Solución:

$$S=n\big(n+1\big) \Rightarrow n^2+n=342 \Rightarrow n^2+n-342=0, \text{ factorizam os } \\ \big(n+19\big)\big(n-18\big)=0 \quad \Rightarrow \ n=-19 \quad y \ n=18$$

es obvio que por l as condiciones del problema se escoge n = 18. Entonces se deben sumas los 18 primeros enteros pares consecutivos positivos.

Ejemplo 7

Una turbina puede llenar un tanque en 5 hr más rápido que otra turbina. Las dos turbinas pueden llenar el tanque en 5hr, ¿cuánto tiempo tomará llenar el tanque a cada una?

Solución: como el tiempo está en el cociente de un flujo másico, entonces

tiempo llenado turbina más lenta $\frac{1}{x}$

tiempo llenado turbina más rápida $\frac{1}{x+5}$

tiempo llenado por los dos simultáneamente es $\frac{1}{5}$, luego:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x+5+x}{x(x+5)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2x+5}{x^2+5x} = \frac{1}{5}$$

por el principio de fracciones equivalentes:

$$5(2x+5) = x^2 + 5x \implies x^2 + 5x - 10x - 25 = 0 \Rightarrow$$

 $x^2 - 5x - 25 = 0$ por la cuadrática

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4(1)(-25)}}{2} = \frac{5 \pm 11,18}{2} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{5 + 11,18}{2} = 8,09$$

$$x_1 = \frac{5 - 11,18}{2} = 3,09$$

como el tiempo es positivo, escogemos como solución x=8,09.

Luego x = 8,09 será el tiempo de la turbina más lenta

x+5=13,09 será el tiempo de la turbina más rápida

Nota: vemos que como en los casos anteriores, la dificultad está en plantear la ecuación, y que una vez obtenida, la solución se puede hacer por los métodos que hemos estudiado para este tipo de ecuaciones.

EJERCICIOS: PROBLEMAS CON ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Lea cuidadosamente cada problema y con los conocimientos adquiridos resuélvalos adecuadamente.

1. Dos números enteros consecutivos pares tienen como producto 168 ¿cuáles son dichos números?

Rta: 12 y 14

2. El largo de un rectángulo es de 4 metros y el ancho de 2 metros, si las dimensiones se aumentan en la misma cantidad, el área del nuevo rectángulo será el doble del área original ¿cuáles serán las dimensiones del nuevo rectángulo?

Rta: Largo 5,12 mts. Ancho 3,12 mts.

3. La ecuación $p(t) = 1.000 \left(30 + 17t - t^2\right)$ corresponde al crecimiento de una población en t tiempo; medido en años. La primera medida se hizo en el año 1997, p corresponde a la cantidad de peces en t tiempo.

a. ¿Cuántos peces en t tiempo Rta: 30.000

b. A los cuántos años se mueren

todos los peces Rta: 18,61 a partir del momento de la

primer medida

4. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 7 metros más largo que uno de sus lados, el perímetro del triángulo es de 392 metros ¿cuál es la longitud de los lados del triángulo?

Rta: 168 metros, 175 metros y 49 mts.

5. La cantidad de dinero A que resultas al invertir un capital p a una tasa de interés r compuesto anualmente por dos años está dada por la ecuación $A = p \big(1+r\big)^2 \,. \quad \text{Si } \$10.000 \text{ se invierten a una tasa de interés compuesto anualmente, el capital aumenta a $12.321 en dos años. ¿Cuánto fue la tasa de interés?}$

Rta:
$$r = 11\%$$



CUACIONES DE TERCER GRADO

Aunque este tipo de ecuaciones no tienen un método general; como lo es la fórmula cuadrática por la de segundo grado, se han estudiado con detalle.

Una ecuación de tercer grado es de la forma:

$$ax^{3} + bx^{2} + cx + d = 0$$

Resoluciones antiguas

La resolución de ecuaciones de este tipo, se remonta a los babilonios quienes resolvieron problemas que involucraban raíces cúbicas, tenían planteamientos como el siguiente:

$$z = 12x$$
; $y = x$; $v = xyz$ $v = volumen$

Lo que era equivalente a resolver la ecuación $\,v=12x^3\,\,$ para lo cual usaron tablas de potencias cúbicas y raíces cúbicas.

Un profesor de matemáticas de la Universidad de Bolonia, Scipione del Ferro (1465-1526) fue quien por primera vez resolvió algebraicamente una ecuación cúbica de la forma $x^3 + px = q$.

Posteriormente Nicolo Tartaglia, en una competencia con Fior; alumno de Scipione del Ferro, resolvió 30 ecuaciones de éste tipo.

El matemático Girolamo Cardano (1501-1576) se inquietó por los avances de tartaglia y al reunirse con el; en marzo de 1539, éste último revela sus secretos sobre las ecuaciones a Candano.

Después de muchos ires y venires, la fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado, se le llama Fómula de Cardano-Tartaglia.

Resumiendo todo el largo proceso para llegar a la fórmula, podemos decir, sea la ecuación: $x^3 + px = q$, entonces:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano no aceptó ni coeficientes, ni soluciones complejas para las ecuaciones. Vale la pena nombrar a Vietá, quien trabajó las ecuaciones cúbicas, utilizando transformaciones y sustituciones; llegó a obtener ecuaciones cuadráticas para resolver las primeras. La característica es que solo utilizaba raíces cúbicas positivas.

Resolución moderna

A partir de los aportes de Cardano-Tartaglia, se ha venido buscando formas más prácticas para resolver ecuaciones de grado tres. El primer intento llevó a plantear una fórmulas muy parecidas a la de Cardano-Tartaglia, que eran muy largas y no muy fáciles de manejar, pero con el estudio de los polinomios se logró establecer algunos principios que ayudaron a buscar un camino muy dinámico para resolver ecuaciones de este tipo.

Definición: sea p(x) un polinomio de grado n, sea r un número real o complejo, tal que p(r)=0. Entonces se dice que r es un cero del polinomio. Por consiguiente r es una solución o raíz de la ecuación polinómica.

Con la definición anterior, podemos ver que una ecuación de grado tres, se puede reducir a grado dos, buscando una de sus raíces,ya que:

$$\sin p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
; además $p(r)=0$, entonces: $p(x) = (x-r)(px^2 + qx + w)$

Este proceso es una forma de linealizar la ecuación, Recordemos que linealizar la ecuación, es expresar el polinomio de grado n, es n factor de grado uno; es decir, factores lineales.

Los matemáticos se han preocupado por determinar el tipo de soluciones que podría tener una ecuación de grado tres. Esto lo podemos resumir en lo siguiente:

Sea la ecuación:
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = 18abc - 4a^{3}c + a^{2}b^{2} - 4b^{3} - 27c^{3}$$

El discriminante D, es quien determina el tipo de solución. Partiendo del hecho que una ecuación de tercer grado tiene tres soluciones, entonces:

Si D > 0: la ecuación tiene tres soluciones reales diferentes

Si D=0: la ecuación tiene tres soluciones reales y por lo menos dos de ellas iguales

Si D < 0: la ecuación tiene una solución real y dos soluciones complejas

♦ Solución de ecuación de tercer grado

Para resolver ecuaciones de tercer grado, la técnica consiste en reducirla a un producto de dos factores, no lineal y el otro cuadrático, ése último ya sabemos cómo resolverlo, así obtenemos las tres soluciones.

La reducción del polinomio de grado tres a grado dos, es por medio de la división sintética de coeficientes, así:

Sea la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, entonces, planteamos la siguiente división:

Donde r será los divisores de a y d positivos y negativos, de tal forma que al operar: (r . a), se coloca en 1, se opera para tener 2, luego (2.r), se coloca en 3, se opera para tener 4,luego (4.r), se coloca con 5 el último residuo debe ser cero. Si esto no ocurre, el valor seleccionado para r no es cero del polinomio, luego se prueba con el negativo y si queda igual que el caso anterior, entonces se prueba con el siguiente número hasta obtener cero en el último residuo como se ve en el esquema.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación: $x^3 - 3x + 2 = 0$

Solución: inicialmente identificamos los coeficientes del polinomio, como falta $_{\rm X}^{\rm 2}$, se completa con cero. Luego, por otro lado los posibles ceros son: r = 1, -1, 2, -2, que corresponden a los múltiplos de los coeficientes de $_{x}$ 3 y el término independiente. Luego tomamos inicialmente a 1.

El \bigcirc se obtiene al multiplicar 1 x 1, el resultado se opera a cero y obtenemos 1, luego 1 se obtiene al multiplicar 1 x 1 = 1 y se opera con -3, luego -2 x 1 = $\frac{1}{2}$ al operar con 2 obtenemos cero.

Así r=1, es raíz del polinomio, ya que se cumple p(r)=0.

El trinomio se puede expresar así: $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$. Los coeficientes del segundo factor son los números de los residuos obtenidos. Ahora:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$
, por consiguiente:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x + 2)(x - 1)$$

Las soluciones de la ecuaicónes; 1, -2, 1.

Como hay dos factores lineales iguales, se dice que tiene una raíz doble o raíz con multiplicidad dos.

Ejemplo 2

Hallar la solución de: $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

Solución:

 $x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x - 1)(x^2 - 2x - 1)$. el segundo factor lo resolvemos por la cuadrática:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{1}=1\pm\sqrt{2}$$

Entonces:

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}$$
 y $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

las soluciones: 1, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, tres soluciones reales diferentes.

Ejemplo 3

Hallar las raíces del polinomio: $p(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14$

Solución:

$$x^3 - 6x^2 - 9x + 14 = (x - 1)(x^2 - 5x - 14) = (x - 1)(x - 7)(x + 2)$$

tenemos los productos lineales, luego la solución es; 1, 7, -2.

Ejemplo 4

Resolver: $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 40$

Solución: coeficientes para la decisión.

es raíz, veamos.

Luego:

 $2x^3 - 3x^2 + 6x + 40 = (x+1)\left(2x^2 - 7x + 20\right)$. el segundo factor lo resolvemos por l a cuadrática.

$$x = \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(2)(20)}}{4} = \frac{7\pm\sqrt{49-320}}{4} = \frac{7\pm\sqrt{-271}}{4}$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{271} i}{2} y x_2 = \frac{7 - \sqrt{271} i}{2}$$

Luego p(x) tiene una solución real y dos imaginarias.



CUACIONES POLINÓMICAS

En la resolución de ecuaciones de cuarto grado, los babilonios formularon problemas que condujeron a ecuaciones de este tipo, donde la incógnita es un cuadrado, por lo cual se le llamaron ecuaciones bicuadradas. Ferrari desarrolló el método de solución de ecuaciones de cuarto grado, lo cual fue publicado en Ars Magna de Cardano. En trabajos encontrados de Cardano, Tartaglia y Ferrari, se detectó que deseaban establecer una forma general de resolver ecuaciones de cuarto grado.

La metodología actual propone para resolver ecuaciones de cuarto grado, buscar los factores lineales, como se hizo para las ecuaciones de tercer grado.

Respecto a las ecuaciones de grado quinto, se destaca que el matemático griego Niel, Henrik Abel demostró que no es posible resolver ecuaciones de quinto grado por medio de un número finito de operaciones algebraicas, allá en los años 1824.

Para fortalecer esta teoría un prestigioso matemático de tan solo 20 años, francés «Evariste Galois», dedujo bajo qué condiciones una ecuación es soluble por radicales.

Evariste Galois, desarrolló la teoría de grupos para analizar métodos generales de soluciónde ecuaciones, buscando únicamente en las operaciones fundamentales y extracción de raíces, llegando a la demostración de que no hay un método general para resolver ecuaciones de grado quinto o mayor.

Con estos precedentes es pertinente estudiar algunas particularidades de las ecuaciones polinómicas.

Regla de signos de Descartes

El matemático francés René Descartes, padre de la Geometría Analítica, en 1636 propone una técnica para identificar el número de soluciones reales positivas y negativas para un polinomio de n grado; con $n \in \mathbb{R}^+$.

El teorema cuya prueba está fuera del alcance de este curso dice:

Sea p(x) un polinomio con coeficientes reales cuyo término independiente es diferentes de cero. El número de soluciones reales positivas de p(x)=0 es igual al número de variaciones de signos en p(x) o es menor que el número de variaciones en cantidad par. El número de soluciones reales negativas de la ecuación p(x)=0, es igual al número de variaciones de signo en p(-x) o es menor que el número de variaciones en cantidad par.

Ejemplo 1

Determinar las posibles soluciones de $p(x) = 2x^5 - x^4 + 3x - 6$

Solución: como es un polinomio de grado 5, debe tener 5 soluciones, entonces:

Soluciones reales (+) \Rightarrow $2x^5 - x^4 + 3x - 6$. Hay tres variaciones de signo 1 2 3

Soluciones reales
$$(-)\Rightarrow 2\Big(-x^5\Big)-\Big(-x^4\Big)+3\big(-x\big)-6=-2x^5-x^4-3x-6$$
. No hay cambio de signos

El polinomio puede tener: 1 ó 3 soluciones reales positivas, No tiene soluciones reales negativas; además tendrá 2 ó 4 soluciones imaginarias.

Ejemplo 2

Dado el polinomio P $(x) = 5x^4 - 6x^3 + x - 9$. Identificar las posibles soluciones.

Solución: por ser un polinomio de grado 4, debe tener 4 soluciones.

Soluciones reales (+) $\Rightarrow 5x^{4} - 6x^{3} + x \neq 9$ tres variaciones de signo 1 2 3

Soluciones reales
$$(-) \Rightarrow 5(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x) - 9 = 5x^4 + 6x^3 - x - 9$$

una variación según la anterior el polinomio puede tener:

- 1 solución real positiva, 1 solución real negativa y dos imaginarias
- 3 soluciones reales positivas y 1 solución real negativa

Ejemplo 3

Identificar los ceros del polinomio $Q(x) = 7x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$

Solución:

ceros reales (+):
$$7x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$$
, tres variaciones de signo

ceros reales (-):
$$-7x^{5} + 2x^{3} - 5x^{2} - 2x - 1$$
 dos variaciones de signo

El polinomio puede tener:

- 1 solución R⁺, 2 solución R⁻, 2 soluciones imaginarias
- 3 soluciones R+ y 2 soluciones R-
- 1 solución R+ y 4 soluciones imaginarias

Ejemplo 4

Hallar las raíces de: $M(x) = 4x^6 - 2x^4 - 3x^2 - x$

Solución: como el término independiente es cero No podemos aplicar la regla de Descartes. Se puede hacer una factorización:

 $M(x) = x \left(4x^5 - 2x^3 + 3x - 1\right)$. Así vemos que cero es una solución, las demás se pueden obtener del polinomio restante.

Acotación de soluciones

El siguiente teorema permite identificar el intervalo en el que se encuentran las soluciones reales; si éstas existen.

Sea P(x) un polinomio, tal que si P(x) = 0 no tiene raíz real alguna mayor al número real K, entonces K se le llama cota superior de las raíces reales. Análogamente, si P(x) = 0, no tiene raíz real menor que el número real K, entonces a K se le llama cota inferior de las raíces reales.

 $k \le Raices Re ales \le k$

Ejemplo 1

Dado el polinomio: P(x) = (x-1)(2x-1)(2x+1) = 0, hallar la ecuación de P(x).

Solución:

Cota inferior k = -1/2, cualquier número menor a -1/2 es cota inferior de P(x)

Cota inferior: K = 1, cualquier número mayor a 1 es cota superior de P(x).

◆ Teorema de raíces racionales

Para determinar las soluciones de una ecuación polinómica con coeficientes enteros, hay un teorema que simplifica la identificación de las raíces del polinomio.

Sea
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
 con $a_n \neq 0$.

Polinomio con coeficientes enteros . Si p/q es una real irreducible tal que p/q es una raíz de P(x)=0; es decir, $P\bigg(\frac{p}{q}\bigg)=0$, entonces P es factor de a_0 y q es factor de a_n .

El teorema permite obtener los ceros del polinomio P(x) en forma directa, dando una lista limitada de soluciones racionales posibles.

Veamos: si tenemos el polinomio P(x) y suponemos que p/q es una raíz del polinomio, entonces: (x-p/q) es un factor de P(x); además:

$$P(x) = (x - p/q) \cdot Q(x)$$

Donde Q(x) es un polinomio de grado uno menor que P(x). La soluciones adicionales para P(x), se obtienen resolviendo Q(x).

Ejemplo 1

Determinar los ceros de $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$

Solución: identificar los p y q

$$p = 1, -1, 2, -2, 4, -4$$

$$q = 1, -1, 2, -2$$

Las soluciones racionales: $\frac{p}{q} = 1, -1, 2, -2, 4, -4, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

Se aplica división sintética para todos y así se identifican las soluciones por Regla de Descartes; tenemos las siguientes posibilidades:

- Una solución real negativa y tres soluciones reales positivas
- Una solución real negativa, una solución real positiva y dos imaginarias

Al probar todas las soluciones p/q, se identifica a 2 como solución.

Solución:

Según esta división sintética:

$$P(x) = (x-2)(2x^3 + x^2 + 4x + 2)$$

Ahora identificamos las soluciones para $2x^3 + x^2 + 4x + 2$

Al probar con las posibles soluciones, vemos que -1/2 es solución:

Según la división presentada; el polinomio se puede escribir así:

$$2x^3 + x^2 + 4x + 2 = (x - 1/2)(2x^2 + 4)$$

Falta identificar las soluciones en el último polinomio: $2x^2+4$, luego:

$$2x^2+4=0 \Rightarrow 2x^2=-4 \Rightarrow x^2=-2 \Rightarrow x=\sqrt{-2}$$
 , entonces:
$$x_1=\sqrt{2} \ i \quad y \quad x_2=-\sqrt{2} \ i \ .$$

Las cuatro soluciones: 2, -1/2, $\sqrt{2}$ i, $-\sqrt{2}$ i, corresponden a la segunda posibilidad de la regla de Descartes aplicada al polinomio propuesto.

Nota: se recomienda a los estudiantes hacer las divisiones sintéticas para las posibles raíces racionales del primer polinomio y del segundo polinomio, así comprobar que las soluciones identificadas son correctas.

♦

Multiplicidad de una función

Es un aparte anterior hablamos de multiplicidad, a qué vamos a formalizar este concepto.

Sea p(x) un polinomio de grado n; además, sea $(x-r)^m$ un factor del polinomio p(x), entonces r es llamado cero de p(x), con multiplicidad m.

Ejemplo '

Para $p(x) = 4(x+2)(x-3)^2 (x-1)^3$. Identificar los casos y su multiplicidad.

Solución: los casos son 2, – 3, 1, su multiplicidad es:

para 2, multiplicidad 1 para -3 multiplicidad 2 para 1 multiplicidad 3

EJERCICIOS: ECUACIONES POLINÓMICAS

Para las ecuaciones dadas a continuación, identifique cuántas raíces tiene y el tipo de raíz. (Utilice la regla de Descartes).

- 1. $2x^6 4x^4 + x^2 3 = 0$ Rta: 3 relaes positivos y 3 reales negativos
- 2. $x^3 x^2 + 2x + 1 = 0$ Rta: 2 reales positivos y 1 real negativo
- 3. $x^3 + 3x^2 x 9 = 0$ Rta: 1 real positivo y 2 reales negativos
- 4. $8x^8 + 3x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 10 = 0$ Rta: 8 imaginarios
- 5. $x^6 1 = 0$ Rta: 1 real positivo, 1 real negativo y 4 imaginarios

En los siguientes ejercicios hallar las soluciones de los polinomios propuestos:

- 6. $3x^3 + x^2 + 12x + 4 = 0$ Rta : -1/3 y +2i y -2i
- 7. $x^3 + 2x^2 x 2 = 0$ Rta: 1, -1 -2
- 8. $x^4 + x^2 2 = 0$ Rta: -1, 1, $+\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$
- 9. $x^4 + x^3 3x^2 x + 2 = 0$ Rta : -2, -1, 1, 1
- 10. La ecuación $_X{}^3+8_X{}^2+16_X-3=0$, tiene tres ceros; uno de ellos es 3. Hallar la suma de los otros ceros:

Rta: 5



CUACIONES RACIONALES

Las ecuaciones racionales son de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$. donde P(x) y Q(x) son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

Se pueden presentar dos casos en este tipo de ecuaciones:

- . El grado de $P(x) \le$ al grado de Q(x)
- . El grado de P(x) > la grado de Q(x)

Resolver ecuaciones de este tipo, sigue los mismo principios matemáticos utilizados en la resolución de igualdades.

El procedimiento de despejar la incógnita, consiste en aplicar el principio de funciones equivalentes; veamos un ejemplo:

Ejemplo 1

$$\frac{2x-4}{x+2} = \frac{1}{2}$$

Solución: por el principio de ecuaciones equivalentes:

$$(2x-4)x \ 2 = (x+2)x1 \implies 4x-8 = x+2 \implies 4x-x = +2+8$$

$$3x = 10 \Rightarrow x = 10/3$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación:

$$\frac{6x+8}{5}=\frac{3x-4}{2}$$

Solución: por fracciones equivalentes:

$$(6x + 8)x2 = (3x - 4)x5 \Rightarrow 12x + 16 = 15x - 20$$

reorganizando términos: 12x-15x = -20-16

$$-3x = -36 \Rightarrow x = \frac{-36}{-3}$$

Entonces: x = 12

De las ecuaciones racionales, es importante las llamadas fracciones parciales, tema que analizaremos en seguida.



Toda fracción racionales de la forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$; donde g(x) y h(x) son polinomios y $h(x) \neq 0$, se pueden expresaar como suma o resta de fracciones racionales más simples. Para que se pueda hacer este procedimiento, el grado de g(x) debe ser menor al grado de h(x); además, h(x) se puede descomponer en factores primos. Por teoría algebraica cualquier polinomio con coeficientes reales se puede escribir como producto de factores lineales y/o cuadráticos.

Se presentan diversos casos, que analizaremos a continuación:

h(x) es producto de factores lineales diferentes

Podemos hacer una generalización de caso así:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A}{ax + \lambda_1} + \frac{B}{bx + \lambda_2} + \dots + \frac{N}{nx + \lambda_n}$$

Donde A, B,...,N, son constantes Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Dada la fracción: $\frac{4x-5}{x^2-5x+6}$. Expresado como fracciones parciales.

Solución: debemos linealizar el denominador; es decir; expresarlos como producto

de factores lineales, entonces:
$$\frac{4x-5}{x^2-5x+6} = \frac{4x-5}{(x-3)(x-2)}$$

Ahora expresamos dicha fracción como suma de fracciones simples, lo cual se hace de la siguiente manera:

$$\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

El trabajo consiste en hallar el valor de A y B, lo que se hace trabajando la segunda parte de la ecuación y al final compararla con la primera parte de la misma. Veamos:

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{Ax - 2A + Bx - 3B}{(x-3)(x-2)}$$

Ahora igualamos la primera y última fracción:

$$\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)} = \frac{Ax-2A+Bx-3B}{(x-3)(x-2)} \text{ organizando la segunda fracción, tenemos:}$$

$$\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)} = \frac{x(A+B)-2A-3B}{(x-3)(x-2)}$$

como los denominadores son iguales, igualamos los numeradores $4x-5=x\left(A+B\right)-2A-3B$ tomando términos por separado.

- Para x:4 = A + B
- Para indeterminantes: -5 = -2A 3A

tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolvémoslas por reducción:

$$A + B = 4$$

 $-2A - 3B = -5$
 $+2A + 2B = +8$
 $-2A - 3B = -5$
 $-B = 3$

Luego: B = -3

para hallar A, reemplacemos en la cuación: A+B=4; entonces: $A+(-3)=4 \implies A-3=4 \implies A=4+3 \implies A=7$, con los valores de A y B, los reemplazamos en la primera ecuación, luego:

$$\frac{4x-5}{(x-3)(x-2)} = \frac{7}{(x-3)} - \frac{3}{(x-2)}$$

Ejemplo 2

Escribir como fracciones parciales la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{5}{2x^2 - 9x + 4}$$

Solución: expresamos el polinomio del denominador como productos lineales, luego:

$$\frac{5}{2x^2 - 9x + 4} = \frac{5}{(2x - 1)(x - 4)}, \text{ ipor favor compruebe la factorización}$$
 del denominador!

Ahora escribimos la fracción como suma de dos facciones simples:

$$\frac{5}{(2x-1)(x-4)} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{x-4}$$

operamos la segunda parte de la ecuación:

$$\frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(2x-1)}{(2x-1)(x-4)}$$

operando el numerador y reorganizando:

$$\frac{A x - 4A + 2Bx - B}{(2x - 1)(x - 4)} = \frac{x(A + 2B) - 4A - B}{(2x - 1)(x - 4)}$$

Igualamos la primera y última fracción:

$$\frac{5}{(2x-1)(x-4)} = \frac{x(A+2B)-4A-B}{(2x-1)(x-4)}$$

En la ecuación, el denominador es igual; luego debemos igualar numeradores; entonces:

$$5 = x(A + 2B) - 4A - B$$

- Para x:0=A+2B (No hay valor para x en la primera parte de la igualdad)
- Para independientes: 5 = -4A B

Tenemos dos ecuaciones con los incógnitas:

$$A + B = 0$$

 $-4A - B = 5$ Despejamos B, entonces:

por reducción:
$$B = \frac{5}{3}$$

$$4A + 4B = 0$$

$$-4A - B = 5$$

$$3B = 5$$
para hallar A: A + B = 0 \Rightarrow A = -B, luego

$$A = -(5/3) = -\frac{5}{3}$$

Finalmente, reemplazamos ecuación de suma de fracciones parciales:

$$\frac{5}{(2x-1)(x-4)} = -\frac{5}{3(2x-1)} + \frac{5}{3(x-4)}$$

h(x) es producto de factores lineales, repetición de algunos

Cuando h(x) tiene factores lineales que se repite k veces, se presenta una descomposición de la siguiente manera:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A}{(ax + \lambda_1)} + \frac{A}{(bx + \lambda_2)^2} + \dots + \frac{N}{(nx + \lambda_n)^k}$$

Ejemplo 1

Descomponer en fracciones parciales: $\frac{2x-1}{x(x+1)^2}$

Solución: el procedimiento es similar que en el caso anterior, solo que, el factor que se repite, se debe repetir tantas veces como lo indique k; por este caso, 2 veces.

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

operando:

$$\frac{A\left(x+1\right)^{2}+x\left(x+1\right)B+x\,C}{x\left(x+1\right)^{2}}=\frac{A\left(x^{2}+2x+1\right)\left(x^{2}+x\right)\!B+Cx}{x\left(x+1\right)^{2}}=$$

$$\frac{Ax^{2} + 2Ax + A + Bx^{2} + Bx + Cx}{x(x+1)^{2}} = \frac{x^{2}(A+B) + x(2A+B+C) + A}{x(x+1)^{2}}$$

Igualamos la última fracción con la primera.

$$\frac{x-1}{x(x+1)^2} = \frac{x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A}{x(x+1)^2}$$

como los denominadores son iguales, igualamos los numeradores.

$$2x - 1 = x^{2}(A + B) + x(2A + B + C) + A$$

Analizamos término a término:

- Para: $x^2:0=A+B$. En el primer término no hya valor para x^2
- Para: x : 2 = 2A + B + C
- Para independientes: -1 = A

Resolviendo:

$$-1 = A$$

Para hallar B : $A + B = 0 \implies B = -1 \implies B = -(-1) = 1$

$$B = 1$$

Para hallar C; en la ecuación $2A + B + C = 2 \Rightarrow 2(-1) + 1 + C = 2$ $C = 2 + 2 - 1 = 3 \Rightarrow C = 3$ Reemplazando a la fracción propuesta:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$$

h(x) tiene factores cuadráticos irreducibles

Cuando h(x) presenta factores cuadráticos irreducibles, se debe expresar la fracción parcial como cociente de un numerador lineal y un denominador cuadrático:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Ejemplo 1

Expresar como suma de fracciones parciales: $\frac{x-5}{x(x^2+2)}$

Solución: la fracción se puede escribir.

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Operando como se ha venido haciendo:

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} = \frac{A(x^2 + 2) + (x)(Bx + C)}{x(x^2 + 2)} =$$

$$\frac{Ax^{2} + 2A + Bx^{2} + Cx}{x(x^{2} + 2)} = \frac{x^{2}(A + B) + Cx + 2A}{x(x^{2} + 2)}$$

Igualando la primera y última fracción:

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{x^2(A+B)+Cx+2A}{x(x^2+2)}$$

como el denominador es equivalente, igualamos numerador y procedemos:

- Para $x^2:0=A+B$ no hay término de x^2 en le primer término
- Para x:1=C
- Para independiente: -5 = 2A

Hallemos los valores de A, B y C.

Tenemos que C=1 de la ecuación para x. De la ecuación de los términos independientes – $5=2A \Rightarrow A=-5/2$. Finalmente

$$B = -A \Rightarrow B = -(-5/2) = 5/2$$

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = -\frac{5}{2x} + \frac{\frac{5}{2}x+1}{x^2+2}$$

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = -\frac{5}{2x} + \frac{\frac{5x+2}{2}}{x^2+2} = \frac{-5}{2x} + \frac{5x+2}{2(x^2+2)}$$

Así queda expresada la fracción inicial, como suma de fracciones parciales.

$$\frac{x-5}{x(x^2+2)} = \frac{5x+2}{2(x^2+2)} - \frac{5}{2x}$$

EJERCICIOS:

Dada las siguientes expresiones, escribirlas como suma o resta de fracciones parciales.

$$\frac{1}{\big(\!x-\!1\big)\!\big(\!x+\!2\big)}$$

Rta:
$$\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

$$\frac{5}{(x-1)(x+4)}$$

Rta:
$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}$$

$$\frac{x+14}{x^2-2x-8}$$

Rta:
$$\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+2}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2}$$

Rta:
$$\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

5.
$$2x^2$$

$$\frac{2x^2-5x+2}{x^3+x}$$

Rta:
$$\frac{2}{x} - \frac{5}{x^2 + 1}$$

$$\frac{3x^3 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Rta:
$$\frac{x-2}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} + 3$$



INECUACIONES

Introducción

Las inecuaciones son expresiones donde dos términos se comparan por medio de símbolos particulares, por esto las inecuaciones se le llama también desigualdades.

Para este tema, se va a estudiar inicialmente los intervalos; ya que la solución de una desigualdad se da por un intervalo. También analizaremos las propiedades que gobiernan las desigualdades, demostrando algunas de ellas.

Al igual que se hizo en las ecuaciones, vamos a estudiar las clases de inecuaciones tales como: lineales con una y dos variables,cuadráticas con una variables y mixtas; que pueden ser lineal y cuadrática con una incógnita.

Las desigualdades son la base para abordar temáticas más avanzadas como la programación lineal y la investigación de operaciones en general, área de las matemáticas muy importante para la optimización en problemas de ingeniería, administración, economía y otras.

Para desarrollar la temática de inecuaciones, es importante tener en cuenta el concepto de comparación entre dos expresiones algebraicas. Dichos signos son >, <, \ge , \le . Que indica mayor, menor, mayor o igual y menor o igual respectivamente. A las dos primeras se les llama desigualdades estrictas.

Un trabajo juicioso y sistemático para el desarrollo de desigualdades permitirá adquirir conocimientos sólidos que conllevan a resolver problemas del mundo real en donde se necesitan las desigualdades.

Objetivo general

 Que los estudiantes identifiquen claramente las inecuaciones, sus propiedades, principios, clasificación y las formas de resolverlas; además, plantear situaciones descriptivas con desigualdades.

Objetivos específicos

- · Conocer los principios sobre intervalos y desigualdades.
- · Reconocer una inecuación lineal, sus carcterísticas y la forma de resolución.
- . Identificar inecuaciones cuadráticas y la forma de resolverlas.
- . Plantear y resolver problemas que involucren inecuaciones



ESIGUALDAD

Una desigualdad es una expresión de la forma P(x) < Q(x), donde P(x) es un polinomio; al igual que Q(x), pero también uno de ellos puede ser un término independiente. la expresión indica que P(x) es menor que Q(x). Otras formas de expresar desigualdades:

P(x) > Q(x): indica que P(x) es mayor que Q(x)

 $P(x) \le Q(x)$: indica que P(x) es menor o igual que Q(x)

 $P(x) \ge Q(x)$: indica que P(x) es mayor o igual que Q(x)

Por ejemplo si decimos: a>2, está indicando que cualquier valor mayor que dos satisface la expresión dada. Cuando decimos $a\le 5$, nos indica que cualquier valor menor que cinco satisface la expresión, pero además cinco también lo satisface.

Propiedades de las desigualdades

Sean a, b y c números reales, entonces:

1. Si
$$a < b$$
, entonces $a + c < b + c$

Demostración:

Como a < b, por deinifición b-a es positivo, como (b+c)-(a+c)=b-a, entonces (b+c)-(a+c) es positivo, así: a+c < b+c.

2. Si
$$a < b$$
, entonces $a - c < b - c$

Demostración:

Para el mismo argumento de la propiedad uno, tenemos: a+(-c) < b+(-c), así: a-c < b-c

3. Si
$$a < b$$
 y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$

Demostración:

Como a < b, entonces b-a es positivo; como c es positivo, el producto (b-a). c espositivo, luego $b \cdot c - a \cdot c$ es positivo, por lo tanto $a \cdot c < b \cdot c$.

4. Si
$$a < b$$
 y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$

Demostración:

Hacer la demostración individual, en grupo colaborativo, como último recurso con el tutor.

5. Tricotomía: sea a y b números reales, una de las siguientes expresiones se cumple: a < b o a = b o a > b ¿qué pasa cuando b = 0? ¡Analícelo!

6. La No negatividad: para cualquier número real a;

$$a^2 \ge 0$$

7. Para cualquier número real a:

Si
$$a > 0$$
, entonces $\frac{1}{a} > 0$

Si
$$a < 0$$
, entonces $\frac{1}{a} < 0$

Se recomienda que plantee ejemplos que ilustren las 7 propiedades de las desigualdades, por lo menos dos de cada una. Esto le permitirá comprender la esencia de las mismas.



NTERVALOS

Podríamos preguntarnos cómo gráfico: x>3, $x\le 2$, x<-5; -1< x<4. la respuesta está en los intervalos. Un intervalo es un segmento de recta que contiene los valores que satisfacen la desigualdad, limitado por dos extremos.

Veamos las clases de intervalos.

◆ Intervalo cerrado

Son todos aquellos donde los extremos hacen parte del intervalo, La notación se hace con paréntesis angular: [a,b], en desigualdad $a \le x \le b$ y gráficamente.



vemos que hay dos formas de presentación gráficas.

♦ Intervalo abierto

Son todos aquellos donde los extremos no hacen parte del intervalo. La notación se hace con paréntesis circular (a,b), en desigualdad a < x < b y gráficamente.



♦ Intervalo semiabierto

Ocurre cuando uno de los extremos no hacen parte del intervalo. Se conocen como semiabiertos de izquierda o semiabierto a derecha.

Operaciones con intervalos

Las operaciones realizadas entre conjuntos, tales como: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento, se puede trasladar a los intervalos, ya que los intervalos se puede considerar como un conjunto de números.

Unión: sean los intervalos S=(a,b) y R=(c,d), entonces: $S \cup R$ sea la unión de los elementos de S y los de R.



Ejemplo 1

Sea
$$S = [-4,2)y R = (0,10]$$
 hallar $S \cup R$

Solución:

 $S \cup R = [-4,10]$, gráficamente

Ejemplo 2

Dado
$$p = (-8, 20)$$
 y $q = (2,10)$, hallar $p \cup q$

Solución: vemos que los extremos de la unión son (-8, 20), gráficamente

La solución nos hace ver que $q \subseteq p$ (q contenido en p).

♦ Intrersección

Se busca identificar los elementos comunes en los intervalos que participan en la operación.

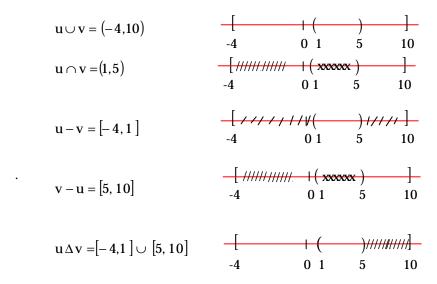
A = (2,18) y B = (10,30). la intersección será el conjunto de [10,18]

La solución es donde se cruzan las líneas.

Las demás oepraciones son similares a como se hace en los conjuntos. Para el fin de las desigualdades, las operaciones más importantes son la unión y la intersección.

sea u = [-4, 5) y v = (1,10]. Hallar la unión, intersección, diferencia u - v y v - u y la diferencia simétrica.

Solución:



NECUACIONES LINEALES

Las inecuaciones lineales que vamos a analizar en este aparte son de dos tipos: una inecuación con una incógnita y dos inecuaciones con dos incógnitas.

Inecuaciones lineales con una incógnita

Son inecuaciones de la forma $a_{X}+b< c$, puede ser con cualquiera de los signos de comparación. Para resolver inecuaciones de éste tipo se busca despejar la

variable, aplicando las propiedades estudiadas anteriormente y las leyes matemáticas básicas; como la de los signos, términos semejantes y demás.

Ejemplo 1

Resolver la desigualdad: -3x + 4 < 11

Solución: la idea es despejar x dejándola al lado derecho de la desigualdad. aplicamos la propiedad 2.

 $-3x+4-4 < 11-4 \Rightarrow -3x < 7$, divi dim os por -3, luego

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{7}{-3} \Rightarrow x > -7/3$$

La solución será todo valor mayor de -7/3



para comprobar reemplazamos cualquier valor de intervalo solución en la intersección original; por ejemplo 0.

$$-3(0)+4<11 \Rightarrow 4<11$$

observamos que la solución No incluye el extremo, ya que es una desigualdad estricta.

Ejemplo 2

Hallar el conjunto solución de la desigualdad: $2(x+5)+x \ge 3(x+1)$

Solución: primero hacemos la multiplicación, luego:

$$2x+10+x \ge 3x+3 \implies 3x+10 \ge 3x+3$$
, luego $10 \ge 3$

como la desigualdad es verdadera, ésta es equivalente a la desigualdad original.

Como la expresión es verdadera independiente del valor de x, nos indica que cualquier valor es solución de la desigualdad.

Probemos; tenemos 3 valores para x.

$$x = -2 \implies 2(-2+5)-2 \ge 3(-2+1) \Rightarrow -4+10-2 \ge -6+1 \Rightarrow 4 \ge -5$$

$$x = 0 \Rightarrow 2(0+5)+0 \ge 3(0+1) \Rightarrow 10 \ge 3$$

$$x = 3 \Rightarrow 2(3+5)+3 \ge 3(3+1) \Rightarrow 19 \ge 12$$



como es obvio los extremos son abiertos ya que infinito es una símbolo más no una cantidad.

Ejemplo 3

Resolver:
$$-5 \le \frac{4-3x}{2} < 1$$

Solución: como debemos despejar x y por ser una desigualdad compuesta, aplicamos las propiedades para tal fin.

$$-\,5\cdot 2 \leq \,\frac{\left(4-3x\right)\cdot 2}{2} < 1\cdot 2$$
 , multiplicamos todo por 2 para que la expresión quede entera.

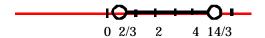
 $-10 \le 4 - 3x < 2$, ahora restamos -4 a todo

$$-10-4 \le 4-4-3x < 2-4 \Rightarrow -14 \le -3x < -2$$

Nos falta solo eliminar el -3 que acompaña a la x, luego dividimos todo por -3, ojo el signo de la desigualdad cambia, recordemos la propiedad 7.

$$\frac{-14}{-3} \ge \frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3} \Rightarrow 2/3 < x \le 14/3$$

La solución será todos los x entre 2/3 y 14/3, vemos que incluye el extremo superior.



Ejemplo 4

Hallar los valores de x que satisfacen la expresión.

$$\frac{1}{x-2} > 0$$

Solución: para que la función sea mayor que cero, como el numerador siempre es positivo, entonces el denominador debe ser mayor que cero, esto sucede cuando: $x-2>0 \Rightarrow x>2$.

La solución son todos los valores mayores que 2.



Ejemplo 5

Resolver la desigualdad: 5(y+2)-3>3(y-1)

Solución: como ya sabemos la técnica, procedemos secuencialmente a despejar la incógnita. Entonces:

$$5y + 10 - 3 > 3y - 3 \Rightarrow 5y + 7 > 3y - 3 \Rightarrow 5y - 3y + 7 > 3y - 3y - 3$$

Obtenemos: $2y + 7 > -3 \Rightarrow 2y + 7 - 7 > -3 - 7 \Rightarrow 2y > -10$

por último: $\frac{2y}{2} > -\frac{10}{2} \Rightarrow y > -5$ en este caso el signo de la desigualdad no cambia, ya que se dividió por un valor positivo.

La solución son los valores mayores de -5 $(5,\alpha)$

Ejemplo 6

Hallar el conjunto solución para la expresión:

$$\frac{x+1}{3} \le \frac{x+1}{2}$$

Solución: lo primero que debemos hacer es transformar las fracciones a enteros, ya que los denominadores son constantes. Luego:

$$2(x+1) \le 3(x+1) \Rightarrow 2x+2 \le 3x+3$$
. Ahora:

$$2x-2x+2 \leq 3x-2x+3 \Rightarrow 2 \leq x+3 \Rightarrow 2-3 \leq x+3-3$$

Finalmente : $-1 \le x$

La solución son todos los valores mayores o iguales a -1.





NECUACIONES RACIONALES

Las inecuaciones racionales son aquellas donde el numerador y denominador de la fracción que la define son polinomios lineales, se pueden esquematizar así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < c$$
 para $Q(x) \neq 0$, puede ser con >, \leq , \geq

Resolver inecuaciones de éste tipo, se puede hacer por dos métodos, el que relaciona el valor de la desigualdad respecto a cero, llamada por conectivos lógicos y el otro se le llama por diagrama de signos.

Con ejemplos modelos ilustrar los métodos propuestos.

Ejemplo 1

Resolver la inecuación: $\frac{x+2}{x+3} > 0$

Solución: resolvámoslo por los dos métodos:

Método de conectivos lógicos: como la desigualdad está comparada con cero, entonces; para que la fracción sea mayor que cero, hay dos posibilidades:

a. x+2>0, \land , x+3>0. dicho en otras palabras cuando el numerador es positivo y el denominador positivo, el cociente será mayor que cero.

Resolviendo:

 $x>-2,\ \land,\ x>-3$. Obtenemos dos intervalos que debemos intersectar, ya que la $_{\land}$, indica intersección.

b. x+2<0, \land , x+3<0. Cuando el numerador es negativo y el denominador negativo, el cociente será positivo.

Luego, para la fracción puede ocurrir: a, \vee, b . Quiere decir que para que la fracción sea positiva, puede ocurrir a ó b. Siendo \vee , la disyunción, que indica unión.

Con este principio la solución general es la unión de las dos soluciones obtenidas en las posibildiades propuestas.

Solución:
$$(-\alpha - 3) \cup (-2, \alpha)$$
; $-\alpha < x < -3 \ y - 2 < x < \alpha$

La solución la dimos en forma de conjunto, en forma de desigualdad y en forma gráfica.

Método de diagrama de signos: existe método que es relativamente más corto que el anterior. Graficamos cada parte de la fracción y determinamos en donde ésta es positiva y negativa en la recta real, por último hacemos ley de signos para cociente que cumple la desigualdad. Veamos.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$
 punto crítico -2

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$
 punto crítico -3

Luego miramos como es x+2 y después de -2, igual para x+3.

$$x + 2$$
 $-\alpha$ -2 0 0

Las x menores que -2, son negativos y los mayores que -2, positivos

$$x+3$$
 $-\alpha$ α α Solución: $x+3$ -3 $x+3$ $x+4$ $x+4$

Las x menores que -3, son negativos y los mayores que -3, positivos

La ley de signos para cociente produce que entre $(-\alpha-3)$ la función sea positiva, entre (-3,-2) la fracción sea negativa y entre $(-2,\alpha)$ la fracción sea positiva.

Como la expresión original nos dice que la fracción debe ser positiva, entonces la solución será la parte positiva de los intervalos; luego, la solución es: $(-\alpha, -3) \cup (-2, \alpha)$

vemos que las soluciones son iguales.

Ejemplo 2

Hallar el conjunto solución para la expresión: $\frac{3x-12}{2x+6} < 0$

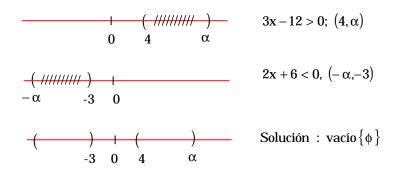
Solución:

Método conectivos lógicos: para que la fracción sea menor que cero, se pueden presentar dos posibilidades.

a. 3x-12>0 , \land , 2x+6<0 , porque positivo sobre negativo produce un cociente negativo

$$3x-12>0 \Rightarrow 3x>12 \Rightarrow x>4$$

$$2x + 6 < 0 \implies 2x < -6 \implies x < -3$$



b. 3x-12 < 0, \land , 2x+6 > 0, porque negativo sobre positivo produce cociente negativo.

$$3x - 12 < 0 \Rightarrow 3x < 12 \Rightarrow x < 4$$

$$2x + 6 > 0 \Rightarrow 2x > -6 \Rightarrow x > -3$$

$$\frac{(///////// + /////////)}{-\alpha \qquad 0 \qquad 4}$$

$$3x - 12 < 0; (-\alpha, 4)$$

$$-\alpha \qquad 0 \qquad 4$$

$$2x + 6 > 0; (-3, \alpha)$$

$$-3 \qquad 0 \qquad \alpha$$

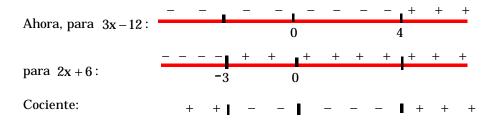
$$-(xxx + x - xxxxxx)$$

$$-3 \qquad 0 \qquad 4$$
Solución : (-3,4)

Método diagrama de signos: despejamos la incógnita en numerador y denominador para identificar los puntos críticos.

$$3x-12=0 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$$
, punto crítico

$$2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$
, punto crítico



como la fracción debe ser menor que cero, se toma el cociente que sea negativo **Solución**: (-3,4); -3 < x < 4

Ejemplo 3

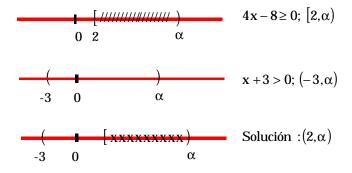
Hallar la solución de la desigualdad.

$$\frac{4x-8}{x+3} \ge 0$$

Solución:

Método conectivos lógicos:

a. $4x-8\geq 0$ y x+3>0 $\Rightarrow 4x\geq 8$: $x\geq 2$ y x>-3, no puede ser igual porque incluiría el denominador y no habría solución.



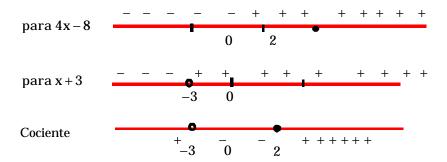
b.
$$4x-8 \le 0 \ y \ x+3 < 0 \implies 4x \le 8 : x \le 2 \ y \ x < -3$$

Solución total: $(-\alpha, -3) \cup [2, \alpha)$

Método diagrama de signos:

$$4x-8=0 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$$
 punto crítico

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$
 punto crítico



Como el cociente de la fracción debe ser positiva o igual a cero, se escoge donde se obtiene cociente positivo.

Solución: $(-\alpha.-3) \cup [2,\alpha)$

Ejemplo 4

Resolver
$$\frac{x+4}{2x-1} < 2$$

Solución: antes de aplicar cualquiera de los métodos descritos, debemos llevar la fracción a comparación con cero, veamos como se hace.

$$\frac{x+4}{2x-1} < 2 \Rightarrow \frac{x+4}{2x-1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{x+4-2(2x-1)}{2x-1} < 0$$

operando y simplidicando:

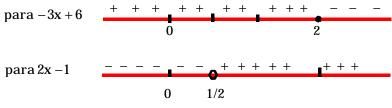
$$\frac{-3x+6}{2x-1} \le 0$$

Con esta última fracción si aplicamos cualquiera de los métodos propuestos, para este caso vamos a aplicar el diagrma de signos.

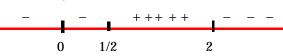
Dejamos como ejercicio que usted estimado estudiante lo resuelva por conectivos lógicos y compara resultados.

$$-3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$$
 punto crítico

$$2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=1/2$$
 punto crítico



cociente



Solución: $(-\alpha,+1/2) \cup [2,\alpha)$

EJERCICIOS: INECUACIONES LINEALES Y RACIONALES

1. Dada la desigualdad -2 > -4 cuál será la desigualdad obtenida si:

a. Se suma - 4

Rta: -6 > -8

b. Se resta 10

Rta: -8 > -14

c. Se multiplica por -3

Rta: 18 < 52

2. Expresar las siguientes desigualdades como intervalo y hacer la gráfica.

a. x < 4

Rta: $(-\alpha, 4)$

b. $x \ge -3$

Rta: $[-3, \alpha)$

c. $-5 < x \le 2$

Rta: (-5, 2]

d. $0 \le x \le 8$

Rta: [0, 8]

3. Expresar los siguientes intervalos como desigualdad.

a. (-3,4)

Rta. $-3 < x \le 4$

b. $(-\alpha,6) - [-5]$

Rta: desarrollar con el tutor

c. [-2,4]-(0)

Rta. desarrollar con el tutor

4. Resolver los siguientes desigualdades lineales.

a. $2x + 5 \ge 7$

Rta: $x \le 1$; $(-\alpha, 1]$

b. $\frac{x}{3} \ge 2 + \frac{x}{6}$

Rta: $x \ge 12$; $[12, \alpha)$

c. $3 \le \frac{2x-3}{5} < 7$

Rta: $9 \le x < 19$; [9,19)

d.
$$9 + \frac{1}{3} x \ge 4 - \frac{1}{2} x$$

Rta:
$$[-6,\alpha)$$

5. Resolver las siguientes desigualdades racionales.

a.
$$\frac{4}{3x+2} \ge 0$$

Rta:
$$x > -2/3$$

$$b. \qquad \frac{x+1}{1-x} < 0$$

Rta:
$$(-\alpha, -1) \cup (1, \alpha)$$

$$c. \qquad \frac{(x-1)(x+1)}{x} < 0$$

Rta:
$$(-\alpha, -1) \cup (0,1)$$

$$d. \qquad \frac{3x-2}{2x+5} \ge -2$$

Rta:
$$(-\alpha, -5/2) \cup [-8/7, \alpha)$$

$$e. \qquad \frac{7R}{7+R} > 3$$



NECUACIONES CUADRÁTICAS

Las designaldades cuadráticas son de la forma $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c>0$; también puede ser \leq \acute{o} \geq , con $a\neq 0$.

La resolución de este tipo de inecuaciones, se puede hacer por los métodos ya descritos en desigualdades racionales.

Como ya sabemos resolver una expresión cuadrática, solo la conjugamos con las desigualdades.

Ejemplo 1

Resolver la inecuación: $x^2 - x - 6 \le 0$

Solución: primero expresamos el trinomio como factores lineales. Luego aplicando el método de conectivos lógicos, debemos definir la siguiente propiedad:

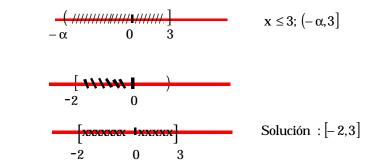
Si $a \cdot b > 0$; puede ocurrir : a > 0, \land , b > 0, \lor , a < 0, \land , b < 0

Si $a \cdot b < 0$; puede ocurrir: $a > 0, \land, b < 0, \lor, a < 0, \land, b > 0$

Aplicando el ejemplo propuesto:

 $x^2 - x - 6 \le 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) \le 0$. Para que esto ocurra:

b.
$$x-3 \le 0$$
, \land , $x+2 \ge 0 \implies x \le 3$, \land , $x \ge -2$



Solución total: $\begin{bmatrix} -2, 3 \end{bmatrix} \cup \{\phi\} = \begin{bmatrix} -2, 3 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2

Hallar la solución para la desigualdad:

$$x^2 - 4x - 12 > 0$$

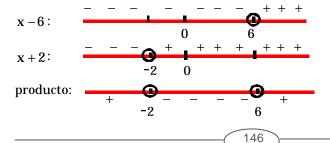
Solución: usemos para este ejercicio el método de diagrama de signos, primero expresamos el polinomio como producto de factores lineales.

$$x^{2}-4x-12=(x-6)(x+2)$$
, luego:

$$(x-6)(x+2) > 0$$

para $x - 6 \Rightarrow x = 6$, punto crítico

para $x + 2 \Rightarrow x = -2$, punto crítico



como la desigualdad debe ser mayor que cero; es decir, positiva, se selecciona los intervalos que dieron positivo el producto.

Solución:
$$(-\alpha, -2) \cup (6, \alpha)$$
, otra forma de dar la solución. $-\alpha < x < -2$ y $6 < x < \alpha$

Ejemplo 3

Aunque el ejemplo que proponemos en seguida no es cuadrático, pero se puede resolver de igual manera que polinomios cuadráticos.

Hallar la solución de: $x^4 \le x$

Solución: recordemos que debemos llevar la desigualdad a compararla con cero, luego:

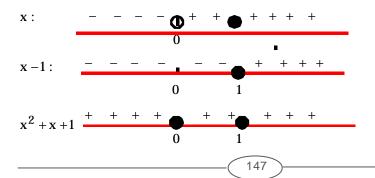
$$x^4 - x \le 0 \Rightarrow x \left(x^3 - 1 \right) \le 0 \rightarrow x \left(x - 1 \right) \left(x^2 + x + 1 \right) \le 0$$

Resolvamóslo por diagrama de signos:

puntos críticos: x = 0 y x = 1 ¡verifiquenlo!

El trinomio $_X^2$ $_{+\,X\,+1}$, no tiene solución real, pero podemos ver que esta expresión siempre será positiva para todo $x\in R$.

Entonces:



producto: + + + + - - - + + + + + - - - 1

- Indica incluye extremo
- ○Indica no incluye extremo

Solución: [0,1]; es decir : $0 \le x \le 1$.

Observación: los ejemplos modelos muestran que las inecuaciones racionales y cuadráticas (también polinómicas) se pueden resolver por el método de conectivos lógicos o diagramas de signos, también llamado técnica del cementerio; por aquello de las cruces. Cualquiera de los métodos es válido, pero en muchos casos es más práctico el diagrama de signos, como lo veremos a continuación.



Se le ha denominado a aquellas inecuaciones que son racionales, pero el numerador y denominador son polinomios cuadráticos o de mayor grado. Para este tipo de desigualdades el método más adecuado es el de diagrama de signos.

Ejemplo 1

Hallar la solución para: $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x} < 0$

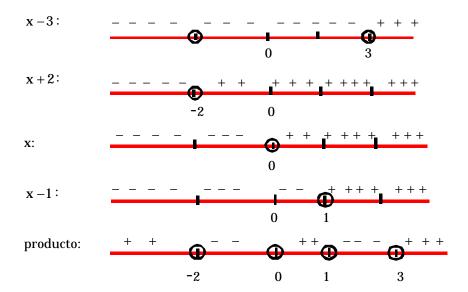
Solución: expresamos la fracción como productos lineales.

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x(x-1)}$$

Ahora se identificamos los puntos críticos:

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$
 y $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$$x = 0$$
 y $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



como la desigualdad indica que la fracción es negativa; entonces la solución es: (– 2,0) $\cup\,$ (1,3)

Ejemplo2

Resolver:
$$\frac{x^2-x-2}{x-1} \le 2$$

Solución: llevamos la fracción a compararla com cero; luego:

$$\frac{x^2-x-2}{x-1}-2 \le 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-2-2x+2}{x-1} \le 0 \Rightarrow \frac{x^2-3x}{x-1} \le 0$$

Ahora expresamos el numerador como factores lineales:

$$\frac{x(x-3)}{x-1} \le 0$$

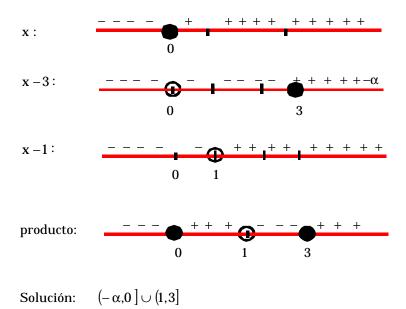
En seguida, podemos aplicar el diagrama de signos.

x = 0 punto crítico

 $x-3=0 \Rightarrow x=3$, punto crítico

 $x-1=0 \Rightarrow x=1$, punto crítico

por las condiciones de la desigualdad, $x \neq 1$.



 $-\alpha < x \le 0$ $y \quad 1 < x \le 3$

En la medida que se estudien detalladamente los ejemplos modelos y se resuelvan los ejercicios propuestos, se podrá comprender, interiorizar y aplicar las temáticas de inecuaciones, en cualquier contexto.

EJERCICIOS: INECUACIONES MIXTAS

1.
$$(x+2)(x-1)(4-x) < 0$$

Rta:
$$(-2,1) \cup (4,\alpha)$$

2.
$$2x^2 - 2x < 12$$

Rta:
$$(-2,3)$$

3.
$$\frac{1}{2}(x-4) > x+8$$

Rta:
$$(-\alpha, -20)$$

4.
$$x^3 - 2x^2 - 3x \ge 0$$

Rta:
$$[-1,0] \cup [3,+\alpha]$$

5.
$$x^3 > x^2$$

Rta:
$$1 < x < \alpha$$

Hallar el conjunto solución de las inecuaciones racionales polinómicas propuestas a continuación:

$$6. \quad \frac{x+4}{x-2} \le 1$$

Rta:
$$-\alpha < x < 2$$

7.
$$\frac{2x+5}{x+1} > \frac{x+1}{x-1}$$

Rta:
$$(-\alpha, -3) \cup (-1, 1) \cup (2, \alpha)$$

$$8. \quad \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x} \le 0$$

Rta:
$$(-2,0) \cup (0,1]$$

9.
$$\frac{x-2}{x^2-3x-10} > 0$$

Rta:
$$(-2,2) \cup (5,\alpha)$$

10.
$$\frac{(x+3)^2(x-4)(x+5)^2}{x^2-3x-10} > 0$$

Rta:
$$(-\alpha, -5) \cup (-5,3] \cup [3,4) \cup (4,\alpha)$$



ROBLEMAS CON INECUACIONES DE UNA

VARIABLE

Para resolver problemas con inecuaciones, aparece una inquietud nueva y es el **planteamiento de la desigualdad**, lo cual se hace por medio de una lectura y análisis cuidadoso del problema, se debe comprender términos como: **a lo más, mínimo, máximo,** que son quienes darán las condiciones para plantear la inecuación.

Por favor lea el problema las veces que sea necesarias hasta que sea bien comprendido, ya que así es posible plantear la inecuación.

Esperando que los ejemplos modelos seleccionados sean suficientes para enfrentarse a cualquier situación.

Ejemplo 1

La función utilidad al valor x unidades está dado por:

 $P=x^2+7x-120$, ¿cuál será el mínimo de unidades para que no haya pérdida, tampoco ganancia?

Solución: para que no haya pérdida, ni ganancia, P = 0. Entonces.

$$0 = x^2 + 7x - 120 \implies (x + 8)(x - 15) = 0$$

por la ley de producto nulo:

$$x+8=0 \Rightarrow x=-8$$
 y $x-15=0 \Rightarrow x=15$

En número de unidades que se debe producir para que no haya pérdida ni ganancia es de 15.

Ejemplo 2

Para el problema del ejemplo 1, cual será el número mínimo de unidades para obtener ganancia.

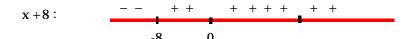
Solución: para obtener ganancia P > 0, luego:

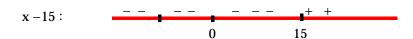
$$x^2 + 7x - 120 > 0$$
, resolviend o

$$(x+8)(x-15) > 0$$
, por dia grama de signos

$$x + 8 = 0 \implies x = -8$$
, punto crítico

$$x-15=0 \Rightarrow x=15$$
, punto crítico







Solución: $(-\alpha,-8) \cup (15,\alpha)$

por las condiciones del problema es obvio que la solución debe ser positiva. Entonces para obtener utilidad se deben producir más de 15 unidades; es decir, mínimo 16 unidades.

Ejemplo 3

En una clase de matemáticas un estudiante obtuvo las notas en sus primeras cuatro evaluaciones de 60, 80, 78, 82, faltando el examen. Para obtener una calificación de aprobatoria el promedio de las 5 notas debe ser mayor o igual a 80 y menor que 95, ¿cuál debe ser la nota mínima que necesita el estudiante para aprobar el curso?

Solución: según las condiciones del problema, el promedio de las notas es:

$$\frac{68+85+78+84+x}{5}$$
 , este promedio debe estar entre 80 y 90 para aprobar, luego:

$$80 \le \frac{60 + 80 + 78 + 82 + x}{5} < 95$$

$$400 \ \leq \ 315 \, + \, x < 475$$

$$400 - 315 \le 300 - 300 + x < 475 - 315$$
, luego:

$$85 \le x < 160$$

para aprobar el curso, el estudiante debe obtener mínimo 85 de calificación en el examen.

Ejemplo 4

En la fabricación de un equipo para calentamiento, la renta obtenida por venta de x unidades es de 450x. El costo de producción para x equipos es 200x + 750, ¿cuántos equipos mínimo se deben fabricar para obtener utilidad?

Solución: la utilidad se mide así: ingresos- egresos, luego.

$$(450x)-(200x+750)>0$$

$$450x - 200x - 750 > 0 \Rightarrow 250x - 750 > 0$$
, luego:

$$250 x > 750 \Rightarrow x > \frac{750}{250} = 3$$
, por consiguiente:

x > 3. Se deben fabricar mínimo 4 equipos para obtener utilidad.

Ejemplo 5

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 90 m/seg. La distancia y de la pelota al suelo después de t segundos es: $y = 80t - 16t^2$. ¿En qué intervalo de tiempo la pelota estará a más de 96 metros de altura?

Solución: como $y = 80t - 16t^2$ y además y > 96, entonces

$$80t-16t^2 > 96 \Rightarrow 80t-16t^2-96 > 0$$
, luego por cambio de signo:

 $16t^2 - 80t + 96 < 0$, dividiendo por 16 tenemos:

$$t^2 - 5t + 6 < 0$$
, factorizamos

 $\big(t-3\big)\big(t-2\big)\!<0\,,$ resolvemos por conectivos lógicos

a. t-3>0, \land , t-2<0, recordemos mayor y menor, produce menor

b. t-3>0, \land , t-2>0, para este caso, menor y mayor da menor t<3, \land , t>2

La solución es (2,3), luego la pelota estará a más de 96 metros entre 2 y 3 segundos.

EJERCICIOS: PROBLEMAS CON INECUACIONES DE UNA VARIABLE

Lea cuidadosamente cada problema y resuélvalos con todos los pasos necesarios.

1. El costo de producir x unidades está dada por la expresión: $c=x^2+6x \text{, la utilidad por concepto de ventas está dada por } u=2x^2+x \text{,}$ ¿cuántas unidades se deben vender para obtener la utilidad?

Rta:
$$x > 5$$

2. Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, cuya función altura está dada por $_{h\,=\,-9.8t}^2{}_{+147t}$, donde h en metros y t en segundos. ¿En qué intervalo de tiempo el objeto estará por encima de 529,2m?

Rta:
$$6 < t < 9$$

3. Según la ley de Boyle, para un gas específico a temperatura constante; se tiene la relción P.V=200. Donde P es presión en p si y V volumen en $p l g^3$ ¿En qué intervalo se desplaza la presión; si el volumen se encuentra entre 25 y 50 plg?

Rta:
$$4 \le p \le 8$$

4. El cuerpo humano tiene una temperatura normal de 37°C; si una temperatura x difiere a lo normal en menos en 2°, se considera anormal, ¿cuál será el intervalo de temperatura para que considere anormal?

Rta:
$$x \le 35^{\circ}C$$
 y
 $x = 37^{\circ}C$

5. La función ingreso por venta de un producto está dado por la ecuación $40x-\frac{1}{5}x^2$. El costo de producir una unidad del artículo es de \$28, ¿cuántos relojes se deben vender para que la utilidad sea de \$100?

Rta:
$$10 < x < 50$$



NECUACIONES CON DOS VARIABLES

Las inecuaciones con dos variables son aquellas de tipo:

$$ax + bx < 1$$
, $ax^2 - by > k$, siendo $k \in R$.

Inicialmente analizaremos la técnica de resolución de este tipo de inecuaciones y posteriormente algunas aplicaciones.

Resolver una inecuación con las variables es hallar, un **conjunto de puntos en el plano**, que llamaremos R que satisfagan la desigualdad.

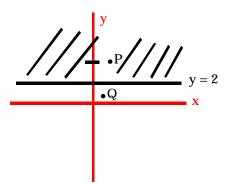
Vamos a describir una metodología general para resolver desigualdades con dos variables:

- 1. Dada la desigualdad, graficar la ecuación que aparece al cambiar de < ó > a =. Si la desigualdad es < ó > ,usar líneas interrumpidas;pero si la desigualdad es \le ó \ge , usar líneas continuas.
- 2. La gráfica divide el plano en 2 semiplanos, se prueba un punto (x,y) de cada semiplano, para determinar cuál de ellos la desigualdad es verdadera.
- 3. El punto que haga verdadera la desigualdad incluye el semiplano que lo contiene, luego dicho semiplano será la solución, generalmente se subraya o sombrea.

Ejemplo 1

Resolver la desigualdad y > 2

Solución: primero hacemos y = 2 y graficamos



Ahora reemplazamos un punto en los dos semiplanos obtenidos.

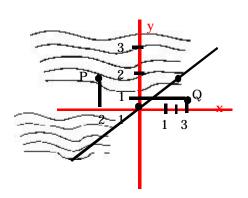
 $P\left(2,3\right)$ para este punto $\ y>2$. La desigualdad se hace verdadera $Q\left(1,1\right), \ para \ este \ punto \ \ y<2 \ , \ no$ es verdadera

Solución el semiplano superior.

Ejemplo 2

Resolver el sistema $y \ge 2x$

Solución: primero hacemos y = 2x y graficamos (0,0), (1,2) que satisfecen la ecuación propuesta.



Como tenemos los dos semiplanos, reemplazamos un punto en cada uno de estos.

P(-2,2). Luego $y = 2(-2) \Rightarrow y = -4$ entonces $y \ge -4$ es verdadero, ya que y = 2.

Q(3,1). Luego $y=2(3) \Rightarrow y=6$ $y \ge 6$, es falso porque y=1Solución el semiplano que contiene a P

P

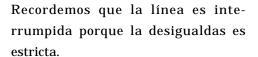
Ejemplo 3

Hallar el conjunto solución de: x + 2y < 2

Solución: primero planteamos la ecuación x + 2y = 0, para x = 0; y = 0, para x = 2, y = -1.

Escogemos dos puntos, uno por encima y otro por debajo de la recta, digamos P(2,2) y Q(-2,-2).

Ahora para P tenemos: (-2)+2(-2)<2 verdadero La solución será el semiplano que contiene a Q.

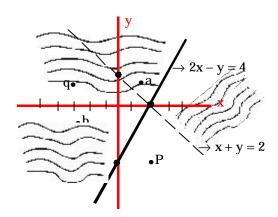


Enseguida veremos la resolución de unn sistema de desigualdades.

Ejemplo 4

Resolver el sistema: x + y > 2 y $2x - y \le 4$

Solución: como en los casos anteriores.



x+y=2 y 2x-y=4 para graficar.

Para x + y > 2. Escogemos los puntos a(2,2) y b(-2,-1),

para a: 2+2>2, verdadero para b: -2-1>2, falso

La solución será el semiplano que contiene el punto a.

Para $\,2x-y\leq 4$, escogemos los puntos $\,p\big(3,-4\big)\,\,\,y\,\,q\big(-\,2,-\,2\big).\,\,$ Ahora:

para $p: 2(3)-(-4) \le 4$, falso

para q: $2(-2) - (-2) \le 4$, verdadero

La colución coró el semiplano que contiene a q.

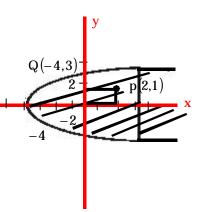
Ejemplo 4

Hallar la solución para: $x + 4 > y^2$

Solución: $x+4>y^2>0$, graficamos

para p: 2+4-1>0, verdadero

para q: $-4 + 4 - (3)^2 > 0$, falso



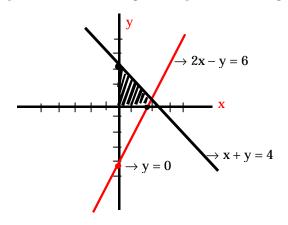
Ejemplo 6

Solución es la región que contiene p, es decir la parte interna de la curva.

Hallar la solución común para el sistema:

$$x \ge 0$$
; $y \ge 0$; $x + y < 4$; $2x - y \le 6$

Solución: graficar x=0, y=0, x+y=4 y 2x-y=6, obtenemos 4 rectas que encierran una región del plano, dicha región será la solución común.



Gráficamente, la solución es la región que rodea las 4 rectas.

Por favor estimado estudiante verifique las 4 soluciones individuales.

(S)

ISTEMA DE INECUACIONES; PROBLEMAS

Para raesolver problemas que involucran inecuaciones, lo fundamental es plantear las desigualdades, ya que la resolución de éstas se puede hacer como lo planteamos anteriormente.

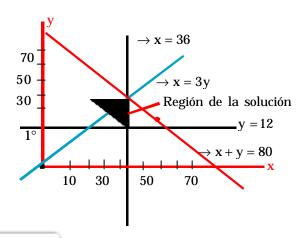
Ejemplo 1

Una almacén vende dos clases de artículos, la demanda exige tener al menos tres artículos, tipo A que tipo B. Además se debe tener al menor 12 artículos tipo B. El espacio permite tener máximo 80 artículos exhibidos.

Plantear elsistema de desigualdades y describir la región solución del sistema.

Solución: si leemos cuidadosamente el problema, podemos plantear:

x =	cantidad artículo A
y =	cantidad artículo B
$x \ge 3y$	tener tres veces de artículos tipo A que B
$y \ge 12$	tener al menos 12 artículos tipo B
$x \ge 36$	tener tres veces artículos tipo A
$x + v \le 80$	capacidad de exhibición en la tienda



Ejemplo 1

La compañía π desea comprar cable tipo AA y tipo BB para instalaciones telefónicas, para el cual cuenta con un capital que oscila entre 600 y 1.200 millones de pesos. El valor de la unidad de cable tipo AA es de 400 mil pesos y de tipo BB es de 300 mil pesos. La compañía requiere al menor dos veces más cable tipo BB que tipo AA. ¿Cuál será la zona de solución del sistema y enumerar 2 posibles propuesta de compra?

Solución: se x = cable tipo AA y = cable tipo BB, según el problema:

- a. $400 x + 300 y \ge 600$ valor mínimo de capital para la compra
- b. $400x + 300y \le 1.200$ valor máximo de capital para la compra
- c. $y \ge 2x$ requerimiento de cable

Vamos a resolver cada desigualdad por separado y al final las agrupamos para tener la solución total. Entonces:

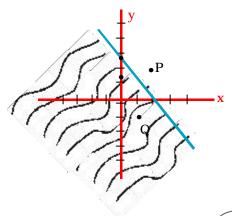
a.
$$400x + 300y = 600 \implies 4x + 3y = 6$$

y Q Tenemos dos puntos para graficar la recta:

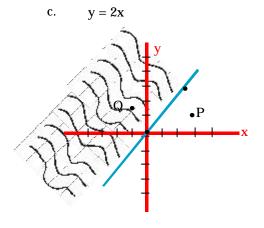
para
$$x=0$$
; $y=6/3=2$
para $y=0$; $x=6/4$
Veamos si el punto $p(2,3)$ o $Q(-2,2)$ es solución de la desigualdad.

para $p:4(2)+3(3)\geq 6$, verdadero para $Q:4(-2)+3(-2)\geq 6$, falso como p es solución, el semiplano que contiene p es la solución.

b.
$$400x + 300y = 1.200 \Rightarrow 4x + 3y = 12$$

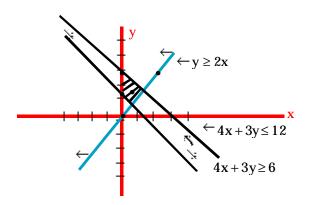


para
$$x = 0$$
; $y = 4$
para $y = 0$; $x = 3$
sea $p(4,2)$ y $Q(-2,2)$
para $p:4(4)+3(2) \le 12$, falso
para $Q:4(2)+3(-2) \le 12$, verdadero



para x=0; y=0para x=2; y=4sea p(3,2) y Q(-2,2)para $p:2\geq 2(2)$, falso para $Q:+2\geq 2(-2)$, verdadero Solución el semiplano que contiene a Q

Agrupando las tres gráficas:



La región R solución, está demarcada por las líneas oblicuas.

Una posible solución es: (1/2, 2), ya que está dentro de R

Otra posible solución es: (1, 2).

Así las demás posibles soluciones

EJERCICIOS: SISTEMA DE INECUACIONES

Para los siguientes problemas, leerlos cuidadosamente y resolverlos. Las respuestas dadas son matemáticas; las gráfics no, por lo cual se deben compartir con sus compañeros y su tutor.

- 1. 3x + y < 3 y 4 y < 2x Rta: hacer la gráfica
- 2. y-x<0 y 2x+5y<10 Rta: hacer la gráfica
- 3. $x \ge 1$ y $y \ge 2$ y $x + 3y \le 19$ y $3x + 2y \le 22$ Rta: hacer la gráfica
- 4. Un negociante de fina raíz vende casas y apartamentos, por la demanda se debe tener al menos tres veces más casas que apartamentos. Se debe tener disponible al menos 6 casas y 2 apartamentos para su ocupación. Las casas cuestan 30 millones y los apartamentos 20 millones. El comerciante desea mantener sus costos de inventario en 600 millones o menos. Elaborar el sistema de desigualdades y hacer la gráfica.

Rta:
$$c \ge 6$$
; $A \ge 2$; $c-2A \ge 10$
 $30c + 20A \le 600$

5. Una refinería de petróleo puede producir hasta 5.00 barriles por día, el petróleo es de dos tipos A y B del tipo A se deben producir por día al menos 1.000 y a lo más 3.500 barriles, si hay una utilidad de 7 dólares por barril para A y 3 dólares por barril para B. ¿Cuál será la utilidad máxima por día?

6. La empresa Sport fabrica dos tipos de balones para fútbol, el modelo pieduro de una utilidad de 20 mil pesos y el modelo pie blando una utilidad de 13 mil pesos, para satisfacer la demanda la empresa debe producir diriamente del modelo pieduro entre 20 y 100 inclusive, mientras que del modelo pieblando entre 10 y 70, inclusive, por las condiciones de la fábrica el total de producción diaria debe ser máximo de 150. ¿Cuántos balones se deben fabricar en un día para obtener la máxima utilidad?

Rta: 100 balones pieduro y 50 balones pie blando



CUACIONES E INECUACIÓN CON VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto es una figura matemática que se creó con el fin de relacionar un valor con una distancia. En los casos de matemática básica se estudia el concepto de valor absoluto de un número. Vamos a estudiarlo con algo de detalle.

Valor absoluto: la definición del valor absoluto de un número x, esquematizado así: |x|, es como sigue:

$$\begin{vmatrix} x \end{vmatrix} = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Esta definición quiere decir que el valor absoluto de una cantidad positiva, es positivo. El valor absoluto de una cantidad negativa, es negativo, y el valor absoluto de cero es cero.

Como vemos el valor absoluto está relacionado con una medida de distancia, ya que el valor absoluto de cualquier cantidad siempre será positivo.

Ejemplo 1

Hallar el valor absoluto de $10, -5, \pi$

Solución:

|10| = 10, porque 10 es positivo

|-5| = -(-5), porque -5 es negativo; simplifica ndo |-5| = 5

 $|\pi| = \pi$; ya que π es un valor positivo

Ejemplo 2

Determinar el valor absoluto de: e-5, $2-\pi$. e= número de Euler cuyo valor es 2,71828... y $\pi=3,141592$

Solución:

$$|e-5| = -(e-5) = 5 - e$$
; porque $(e-5)$ es negativo

$$|2-\pi| = -(2-\pi) = \pi - 2$$
, ya que $(2-\pi)$ es negativo

Con este concepto de valor absoluto, podemos abordar los temas siguientes:



CUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Ya sabemos resolver ecuaciones; además, se hizo un análisis de valor absoluto: Ahora vamos a combinar los dos conceptos.

De la misma definición de valor absoluto, podemos definir una técnica para resolver ecuaciones con valor absoluto.

Sea |x| =a, entonces: x = a, v, x = -a, para todo $x \neq 0$, como vamos a resolver este tipo de ecuaciones se resuelve aplicando la definición.

Ejemplo 1

Hallar la solución para la ecuación:

$$|x-3|=8$$

Solución: aplicando la definición expuesta anteriormente:

$$x-3=8$$
, v , $x-3=-8$, resolviend o

$$x - 3 = 8 \Rightarrow x = 8 + 3 = 11$$

$$x-3 = -8 \implies x = -8 + 3 = -5$$

La solución es: -5 y11

podemos comprobarlo:

$$|-5-3| = |-8| = -(-8) = 8$$

Ejemplo 2

Resolver:
$$\left| \frac{2x-8}{4} \right| = 12$$

Solución: aplicamos las dos posibilidades

$$\frac{2x-8}{4} = 12$$
, v, $\frac{2x-8}{4} = -12$

Resolviendo:

$$\frac{2x-8}{4} = 12 \Rightarrow 2x-8 = 48 \Rightarrow 2x = 48+8 = 56 \Rightarrow x = 28$$

$$\frac{2x-8}{4} = -12 \Rightarrow 2x-8 = -48 \Rightarrow 2x = -48 + 8 = -40 \Rightarrow x = -20$$

La solución es -28 y 28, por favor comprobar las soluciones.

En los ejemplos propuestos, observamos que se obtienenn dos soluciones, una positiva y una negativa. por consiguiente para ecuaciones de primer grado con valor absoluto, la solución es doble.

Ejemplo 3

Resolver:
$$|x^2 - 8x - 18| = 2$$

Solución:

a)
$$x^2 - 8x - 18 = 2$$
, v, b) $x^2 - 8x - 18 = -2$. Resolvemos:

a)
$$x^2 - 8x - 18 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$$
. Factorizam os:

$$(x-10)(x+2)=0$$
, por la ley del producto nulo

$$x-10=0 \Rightarrow x=10$$
 y $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

b)
$$x^2 - 8x - 18 = -2 \Rightarrow x^2 - 8x - 18 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 16 = 0$$

por la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{128}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 2}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 8\sqrt{2}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{1} = 4 \pm 4\sqrt{2}$$

$$x_1 = 4 \pm 4 \sqrt{2}$$

$$x_2 = 4 - 4 \sqrt{2}$$

la solución total es: -2, 10, $4+4\sqrt{2}$; $4-4\sqrt{2}$ para ecuaciones de segundo grado con valor absoluto, se tienen 4 soluciones.

Ejemplo 4

Resolver la ecuación: $|x^2 - 4| = 3x$

Solución:

a)
$$x^2 - 4 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

b)
$$x^2 - 4 = -3x \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

Factorizam os:

a)
$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 4$$
 y $x = -1$

b)
$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -4$$
 y $x = 1$

Los valores negativos No satisfacen la igualdad, luego las únicas soluciones son 1 y 4.

Para terminar las ecuaciones con valor absoluto, es pertinente recordar algunas propiedades:

1.
$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$$

$$2. \qquad \left| \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} \right| = \frac{\left| \mathbf{x} \right|}{\left| \mathbf{y} \right|}$$

3.
$$\left|x^{n}\right| = \left|x\right|^{n}$$

Estas propiedades nos puede servir en muchas situaciones.

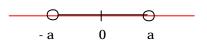


NECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

En la naturaleza existen muchos fenómenos que suceden bajo ciertos límites o mejor en un intervalo determinado, las inecuaciones con valor absoluto, es el dispositivo matemático que ayuda a resolver tales fenómenos. Por ejemplo la temperatura corporal, la resitencia de un cable, otros.

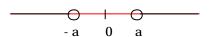
Para resolver inecuaciones con valor absoluto, recurrimos a las siguientes propiedades.

1.
$$|x| < a$$
, entonces: $-a < x < a$



Esta propiedad no dice que cuando el valor absoluto de la variable es menor que un valor fijo, éste se encuentra en el intervalo entre el negativo y positivo del valor definido.

2.
$$|x| > a$$
, entonces: $x < -a$ ó $x > a$



Para este caso el valor absoluto de la variable es mayor que un valor fijo, ésta puede ser menor que el negativo o mayor que el positivo del valor fijado.

Las dos propiedades se definieron para desigualdades estrictas, pero se pueden definir para las no estrictas; es decir: \leq ó \geq .

Si observamos detalladamente las gráficas al asociar las dos propiedades obtenemos la recta real.

Ejemplo 1

Resolver |x| < 8

Solución: aplicando la propiedad uno, tenemos:

-8 < x < 8. Esto significa que cualquier valor entre -8 y 8 es solución de la desigualdad, probemos con dos ejemplos.

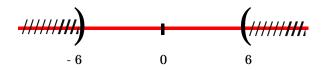
|-5| = -(-5) = 5; vemos que 5 es menor que 8

|2|=2; obviamente 2 es mejor que 8

Ejemplo 2

Hallar el conjunto solución para: |x| > 6

Solución: aplicando la propiedad dos, tenemos: x < -6, v, x > 6. Tenemos dos intervalos, luego por la disyunción los unimos.



La solución es: $(-\alpha, -6) \cup (6, \alpha)$, probemos con un valor en cada intervalo. |-7| = -(-7) = 7, vemos que 7 es mayor que 6, entonces dicho intervalo es solución.

8 = 8, también 8 es mayor que 6.

Ejemplo 3

Hallar la solución de: $|2x-6| \le 4$

Solución: por la propiedad uno.

 $-4 \le 2x-6 \le 4$, como estudiamos despejar la incógnita en las desigualdades compuestas, tenemos:

$$-4+6 \le 2x-6+6 \le 4+6 \Rightarrow 2 \le 2x \le 10$$
, ahora:

$$\frac{2}{2} \le \frac{2x}{2} \le \frac{10}{2} \Rightarrow 1 \le x \le 5$$

La solución son todos los valores que están entre 1 y 5: [1,5]

Ejemplo 4

Resovler
$$\left| \frac{x}{x-4} \right| \ge 2$$

Solución: aunque resolver esta desigualdad es algo extensa, pero no difícil, con la ventaja que los pasos para resolverla ya los conocemos, veamos:

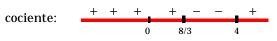
a.
$$\frac{x}{x-4} \le -2$$
, v, b. $\frac{x}{x-4} \ge 2$

Resolvemos a y luego b, para finalmente unir las dos soluciones-

$$\frac{x}{x-4} \le -2 \Rightarrow \frac{x}{x-4} + 2 \le 0 \Rightarrow \frac{x+2x-8}{x-4} \le 0$$

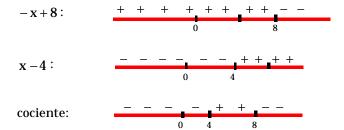
a. $\frac{3x-8}{x-4} \le 0, \text{ por dia grama de signos}$

$$3x-8$$
: $---+++$ + 0 $8/3$



La solución: [8/3, 4). Justifique porque el intervalo es cerrado en el límite inferior y abierto en el superior.

b.
$$\frac{x}{x-4} \ge 2 \implies \frac{x}{x-4} - 2 \ge 0 \implies \frac{x-2x+8}{x-4} \ge 0$$
$$\frac{-x+8}{x-4} \ge 0$$



La solución es:(4,8]. Justificar igual que en la solución aterior.

solución total: $[8/3,4) \cup (4,8]$



La solución No incluye el 4, ¿por qué?

EJERCICIOS: ECUACIONES- INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Resolver las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

1. |2x+3|=5

Rta: x = -4; x = 1

2. |1-4|=5

Rta: y = -1; y = 3/2

 $3. \qquad \left| \frac{x}{3} + \frac{2}{5} \right| = 2$

Rta: $x = \frac{-36}{5}$; $x = \frac{24}{5}$

4.

Rta: x = 4; x = -2/3

|x+3|=|2x-1|

5. |q|-q=1

Rta: $q = \frac{-1}{2}$

Hallar la solución de las siguientes desigualdades:

6. |z| < 7

Rta: (-7,7): -7 < x < 7

7. $\left|\frac{y+7}{3}\right| > 3$

Rta : $(-\alpha, -16) \cup (2, \alpha)$

8. $|2w-7| \le 0$

Rta: w = 7/2

9. $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| > 2$

Rta: -4 < x < -1

 $10. \qquad \left| \frac{1}{2} x - 3 \right| < \frac{1}{10}$

Rta: $\left(\frac{29}{5}, \frac{31}{5}\right)$

11. El peso de llenado de un recipiente que contiene granos debe cumplir p= peso en gramos. Un tarro se pesa y marca 17 gr. Dicho tarro está en el rango del peso.

Rta: No; el rango debe ser (15,95-16,05)



FUNCIONES

Introducción

De los conceptos más importantes en matemáticas, diría que el más importante es el de FUNCION. Se cree que el gran matemático alemán Leibinz la introdujo al finales del siglo XVII. El concepto proviene de la palabra latina *functio*, que quiere decir Acto de Realizar.

Todas las áreas de las matemáticas tienen que ver con funciones, he allí su importancia.

El capítulo está estructurado de una manera secuencia, iniciando el estudio del sistema de referencia más utilizado, las características de las relaciones y la conceptualización de funciones. Se ha dado bastante importancia a los principios sobre funciones, para poder posteriormente analizar las clases de funciones.

Respecto a la clasificación se ha dado una forma macro de tal manera que cualquier función caiga dentro de algunas de estas clases y por supuesto las aplicaciones, el fin y propósito de las mismas.

Es importante desarrollar cada temática detenidamente y hacer los ejercicios propuestos, lo que permitirá afianzar los conocimientos acerca de este tema tan interesante y apasionante.

Objetivo general

 Que los estudiantes cumprendan los principios, leyes y propiedades de las funciones, los campos donde se pueden aplicar y las particularidades que tiene la amplia gama de funciones

Objetivos específicos

- · Analizar y comprender claramente las relaciones, dominio y rango.
- Identificar las cuatro formas de definir una función, sus partes, sus representaciones gráficas.
- Comprender las clasificaciones realizadas a las funciones, las características de cada clase y sus aplicaciones.
- . Comprender los principios de trigonometría.



ISTEMA DE COORDENADAS

Los matemáticos y científicos, han inquietado sus estudios a las representaciones gráficas de los fenómenos naturales, por lo cual se han diseñado diversas formas de representación, a lo cual se le ha llamado **Sistema de Coordenadas**, entre las más conocidas; las coordenadas cartesianas, las cilíndricas, las esféricas, las polares y otras.

Para el objeto de este curso, valos a estudiar las cartesianas.

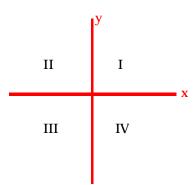
Coordenadas cartesianas

Desde Descartes (1596-1650) en su gran sabiduría, estableció que un punto cualquiera del plano geométrico se podría ilustrar por medio de un par ordenado (x, y), que representa la distancia euclidia perpendicular desde los ejes del sistema que él propone a dicho par ordenado. Se consideró el principal conector entre el lenguaje geométrico y el algebráico, ya que por medio de éste se puede relacionar una ecuación; una curva.

Actualmente se le llama sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, la cual se forma al cruzar dos rectas en un punto llamado **origen**, en forma perpendicular, de esta manera el plano es dividido en cuatro cuadrantes.

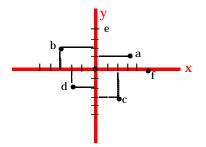
Por convención la recta horizontal se le ha llamado Abscisa o eje \mathbf{x} y a la recta vertical ordenada o eje \mathbf{y} .

Los cuadrantes son los números romanos que indicann el número del cuadrante.



En este sistema cualquier pareja (x, y), según el cuadrante, tendrá su signo. Como x es positivo a la derecha del origen, entonces para los cuadrantes I y IV, el valor de \mathbf{x} sea positivo y para los cuadrantes II y III será negativo. De igual manera para y, el cual es positivo del origen hacia arriba y negativo hacia abajo. Luego \mathbf{y} será positivo I y II cuadrante; negativo III y IV cuadrante.

Veamos algunos casos:



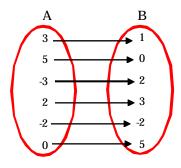
Los puntos ubicados en el plano son a(3,1); b(-3,2), c(2,-3); d(-2,-2) e(0,5), f(5,0)

en cada pareja ordenada, la primera componente corresponde a \mathbf{x} y la segunda componente corresponde a \mathbf{y} .

◆ Diagrama de Venn

Otra forma de representar un par ordenado, es por medio de los llamados diagramas de Venn. John Venn, un lógico británico (1834- 1923) propone un sistema de óvalos para representar las propiedades y operaciones entre conjuntos. El sistema buscaba reducir los análisis lógicos y la teoría de conjuntos, a un cálculo simbólico. Actualmente esta herramienta es fundamental en matemáticas, especialmente en el estudio de las funciones y en teoría de conjuntos.

Cada pareja ordenada estaría relacionada a través de los óvalos así: la componente \mathbf{x} en el primer óvalo y la componente \mathbf{y} en el segundo óvalo.



En el diagrama estamos representando las parejas ordenadas que ubicamos en el plano anterior. Al cojunto A se conoce como conjunto inicial y al conjunto B se le llama conjunto final.

La línea indica las componentes que está interactuando.



ELACIONES

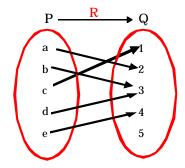
En el mundo que nos rodea, existen relaciones entre dos conjuntos, que en matemáticas llamamos **Variables**, más adelante analizaremos este concepto. Solo basta ver la relación entre la temperatura y la altitud; lo que nos indica que a mayor altitud, menor temperatura. Otro ejemplo es la relación entre el número de kilómetros recorridos y el costo del servicio de un taxi.

El concepto de relación lo asociamos a ${\color{blue}{\bf una}}$ condición entre dos conjuntos, de tal

manera que los elementos de un conjunto le **corresponde** alguno o algunos elementos del otro conjunto.

Una relación la podemos representar en un diagrama de Venn.

Al conjunto P lo llamamos conjunto de partida y al conjunto Q lo llamamos conjunto de llegada. R indica la relación entre los dos conjuntos, para este caso en particular está dado por las parejas: (a, 2); (b, 3); (c, 1); (d, 3); (e, 4)



◆ Componente de una relación

Toda relación presenta componentes, como lo hemos referenciado anteriormente.

Dominio: corresponde a todos los elementos que conforman el conjunto de partida; es decir; P en nuestro gráfico.

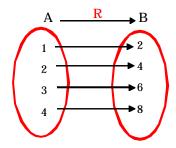
Codominio: corresponde a todos los elementos que conforman el conjunto de llegada, Q para nuestro gráfico.

Regla o Norma: corresponde a la forma en que se asocian los elementos del dominio con los elementos del codominio, generalmente se representa con la R.

Sea $R:A \rightarrow B$. Significa la relación que se presenta entre los conjuntos A y B.

Ejemplo 1

Dada la relación; deducir la norma o regla que relaciona los dos conjuntos.



Solución:

Las parejas ordenadas son:

(1, 2); (2,4); (3,6); (4,8), vemos que la norma o regla es que el elementos del codominio es el dobloe del elemento del dominio; luego:

R: A
$$\longrightarrow$$
 B tal que: B = 2A

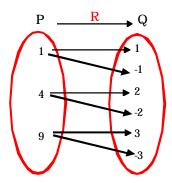
Ejemplo 2

Dados los conjuntos P y Q, cuya norma es que los elementos de Q son la raíz cuadrada de P. Hacer el diagrama de Venn y obtener las parejas ordenadas.

Solución:

Las parejas ordenadas:

$$(1, 1)$$
; $(1,-1)$; $(4,2)$; $(4,-2)$; $(9,3)$; $(9,-3)$ tomamos algunas parejas; pero se pueden tomar más elementos del dominio





UNCIONES

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas son las funciones, ya que en todas las ciencias puras y aplicadas son el insumo fundamental para analizar

diferentes fenómenos. En Biología, en crecimiento de organismos, en Economía, para describir el costo o utilidad de un artículo, en Física para describir la distancia como función del tiempo y muchos otros más.

Dentro del análisis de funciones hay dos conceptos que debemos estudiar; estos son variables y constantes.

Variables

Se puede decir que es todo aquello que cambia a través del espacio o tiempo. El mismo espacio y tiempo se consideran variables. La clave de este concepto es cambio ya que cuando se presenta cambio, se dice que hay variación.

En el análisis de funciones se conocen dos tipos de variables: **variable independiente**, se considera aquella que se define por sí solo, una de estas variables por su naturaleza, es el tiempo; pero existen otras.

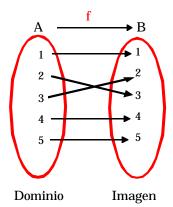
Variable dependiente: como su nombre lo indica es aquella que queda definida a partir de otra; es decir, depende de otra para que sea establecida. cuando se dice que el área de un círculo es función del radio, decimos que el área depende del radio.

Constantes

Son términos que tienen valores fijos; es decir, no cambian en ninguna circunstancia. Los valores numéricos son el ejemplo típico de constantes.

En la antigüedad se utilizaban las vocales para indicar variables y consonantes para indicar constantes. En la actualidad la convención es que las primeras letras del alfabeto se utilizan como constantes y las últimas letras del alfabeto como variables.

Definición: una función **f** es una relación, donde a cada elemento del conjunto de partida, le corresponde **uno y solo un** elemento del conjunto de llegada.



En funciones el conjunto de partida se le llama Dominio y los elementos del conjunto de llegada se le llama Imagen.

En el sistema de coordenadas cartesianas (plano cartesiano) los elementos del dominio se ubican en el eje x y los elementos de la Imagen en el eje y.

Existen cuatro formas de definir una función:

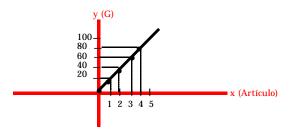
1. Descriptiva: es la decripción verbal del fenómeno que se estudia. En ésta se detallan las condiciones en que ocurren los hechos.

Como ejemplo digamos que la ganancia G que resulta de vender x artículos, en el cual cada uno vale \$20.

2. Númerica: consiste en hacer una tabla de valores, con los datos obtenidos del fenómeno que se está analizando.

Siguiendo con el ejemplo que estamos tomando:

3. Gráfica: es hacer una representación visual, utilizando pares ordenados, los cuales se grafican en el sistema de coordenadas cartesianas.



En el eje de las x se ubican el número de artículos y en el eje y la ganancia. al ubicar los puntos y unirlos se observa una tendencia a formar una recta. **4. Analítica:** también llamada matemática, es aquella donde por medio de una expresión matemática, se describe el fenómeno. Para el ejemplo que nos ocupa.

$$G = 20 x$$

Esta fórmula describe la ganancia en función del número de artículos vendidos.

Elementos de una función

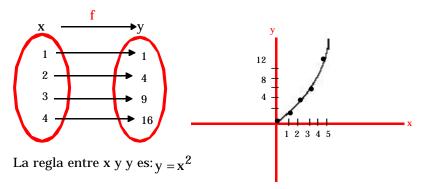


 Dominio: son los elementos del conjunto de partida; es decir, los elementos de x, que corresponden a la variable independiente.

En el ejemplo de la ganancia, la variable independiente es del número de artículos vendidos. Cuando se analiza la distancia recorrida en función del tiempo; éste último es la variable independiente. Por convención universal, los elementos del dominio se ubican en el eje x en el sistema de coordenadas rectangulaes.

- **2. Imagen:** son los elementos del conjunto de llegada; es decir, los elementos de y, que corresponden a la variable dependiente. En el ejemplo de la ganancia, es ésta la variable dependiente; ya que la **ganancia** depende del número de artículos vendidos. También por convención, los elementos de la imagen se ubican en el eje y del sistema de coordenadas cartesianas.
- 3. Regla o condición: se considera a la forma en que se relacionan los elementos de x y y- Cada función tiene una regla que relaciona las dos variables. Solo se debe tener presente que cada elemento de x solo le corresponde un y.

Ejemplo 1

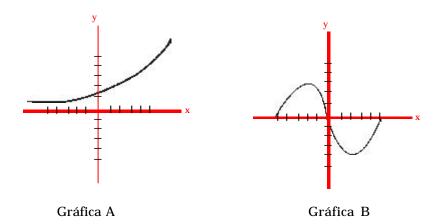


Dominio: todos los valores que pueda tomar x.

Imagen: todos los valores que toma y.

◆ Determinación del dominio e imagen

En el análisis de funciones es importante identificar el dominio e Imagen de una función. Esto se puede hacer a partir de la lectura de la gráfica o a partir del análisis de la fórmula matemática que describe la función.



En la gráfica A se observa que el Dominio puede ser todos los valores de x, ya sean positivois o negativos, la Imagen son los valores de y mayores que cero.

En la gráfica B se observa que el Dominio pueden ser todos los valores de x y la Imagen también pueden ser todos los valores de y.

A partir de la fórmula matemática:

Sea $y = \frac{1}{x}$ vemos que x puede tomar valores diferentes de cero, ya que la división no está definida cuando el denominador es cero.

Sea $y=\sqrt{x}$, para este caso, x puede tomar valores positivos o cero, ya que las raíces pares solo tienen solución real para valores positivos o cero.

En general, el dominio de una función está determinado por los valores que puede tomar la variable, sin que se presenten ambigüedades en el momento de hacer la operación matemática para hallar y.

Para hallar la imagen de la fórmula matemática, se despeja \mathbf{y} y se determina qué valores puede tomar \mathbf{v} sin que se presenten ambigüedades.

Nota: con la práctica y muchos ejercicios se ganará mucha destreza para determinar el dominioo e imagen de una función.

Notación moderna de función

El matemático francés Augustin Lovis Cauchy (1789-1857) dentro de los aportes dados a las matemáticas, como la precisión de los conceptos de función, límites y continuidad, propone una nomenclatura para definir esquemáticamente una función, de la siguiente manera.

y = f(x)

en esta representación ${\bf x}$ es la varible independiente y ${\bf y}$ es la variable dependiente o función.



UNCIONES DE VALOR REAL

Con lo analizado hasta el momento ya estamos en capacidad de dar una respuesta correcta a las siguientes afirmaciones.

Toda relación es función: (V) (F

Toda función es relación: (V)(F)

Teniendo claro las afirmaciones anteriores, podemos entrar a analizar lo siguiente: **que valores de los conjuntos numéricos** pueden tomar las variables **x** y **y**.

Una función de valor real, nos indica que los elementos del dominio y del rango son valores reales; es decir, los números reales, por esto en muchas ocasiones las funciones de valor real se define así:

Sea $f: R \rightarrow R$

Esto significa que la función f(x) está definida de reales en reales; o sea, el dominio y el rango están en el conjunto de los números reales.

Es pertinente aclarar los conceptos de rango e imagen. El rango es el conjunto que conforma el codominio de la relación. La imagen son los elementos del rango que interactúan con los elementos del dominio.



AS FUNCIONES SEGÚN EL TIPO DE RELACIÓN

Según el tipo de relación que se presente entre el dominio y rango de una función, se conocen tres tipos.

♦ Función inyectiva

Llamada también **uno a uno.** Sea la función y = f(x); si para todo x_1 y x_2 en el dominio de f(x), donde $x_1 \neq x_2$; entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, nos indica que la función es inyectiva.

Dicho en términos textuales, una función uno a uno, es aquella donde los elementos del rango que son imagen de elementos del dominio, sólo lo hacen una vez. Las funciones crecientes y decrecientes, son ejemplos de funciones inyectivas.

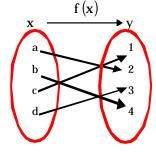
◆ Función sobreyectiva

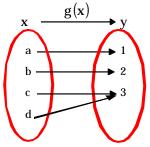
Para una función $y=f\left(x\right)$, cuando todos los elementos del rango son **al menos** imagen de un elemento del dominio, se dice que la función es sobreyectiva. Esto significa que todos los elementos del rango se relacionan con algún o algunos elementos del dominio.

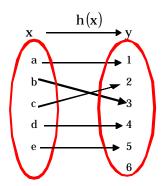
♦ Función biyectiva

Una función y = f(x), es biyectiva; si solo si, es inyectiva y sobreyectiva.

En las siguientes gráficas identifique cada tipo de función.







- f(x):_____
- g(x):
- h(x):_____



IMETRÍA DE FUNCIONES

La simetría de una función está relacionada con el concepto de función para e impar.

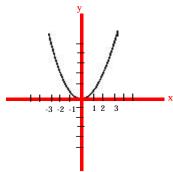
Función par

Una función f(x) es par, si para todo x en el dominio de la función: f(-x) = f(x)

Esto quiere decir que al cambiar (x) por (-x) en la función, ésta no cambia su estructura. Ejemplos de funciones de este tipo son las potencias pares, veamos:

Sea $f(x)=x^2+2$. Ahora definamos: $f(-x)=\left(-x^2\right)+2=x^2+2$, vemos que f(x) y f(-x) son iguales.

Las funciones pares son **simétricas** respecto al eje y.



La función y = f(x) que se observa en la gráfica es la muy conocida función cuadrática $f(x) = x^2$.

Otras funciones pares: $y = g(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2$; $h(x) = \frac{x^3 - 4x}{x + 1}$

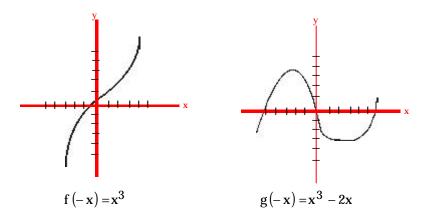
♦ Función impar:

Una función f(x) es impar, para todo x en el dominio de la función; si: f(-x) = -f(x).

Funciones de este tipo, las potencias impares.

 $Sea: \ f\left(x\right)=x^3-2x \ . \quad ahora \quad f\left(-x\right)=\left(-x\right)^3-2\left(-x\right)=-x^3+2x=-\left(x^3-2x\right),$ vemos que se cumple la condición.

Las funciones impares son simétricas respecto al origen.



Estos son ejemplos de funciones simétricas respecto al origen de coordenadas cartesianas.

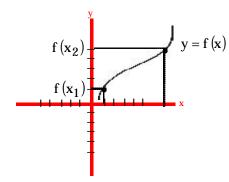
M ONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

Una función se considera monótona si es creciente o decreciente, luego debemos analizar los conceptos de creciente y decreciente.

Función creciente

Sea f(x) una función definida en el intervalo I; si para x_1 y x_2 que pertenecen a I; donde $x_1 < x_2$, luego si $f(x_1) < f(x_2)$,s e dice que la función es creciente en el intervalo I.

Cuando decimos que f(x) está definido en I, estamos afirmando que el intervalo I es parte del dominio de la función.



La gráfica nos ilustra una función creciente, vemos que $x_1 < x_2$; entonces $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$.

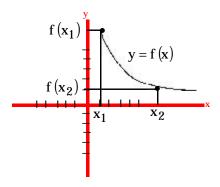
Funciones de este tipo muy usadas en Biología, Microbiología, Economía, Administración e Ingeniería.

Función decreciente

Sea f(x) una función definida en el intervalo I, si para x_1 y x_2 que pertenecen a I; donde $x_1 < x_2$, luego si: $f(x_1) > f(x_2)$, se dice que la función es decreciente.

Funciones de este tipo tenemos las funciones logarítmicas de base impar con variable negativa:

$$f(x) = Log_3(-x)$$
: la función de tipo $f(x) = \frac{1}{x}$, también es ejemplo típico de función decreciente.





ESCRIPCIÓN DE UNA FUNCIÓN

Para finalizar esta parte acerca de las funciones, debemos afianzar los principios aprendidos haciendo la descripción de una función. Para fines de una comprensión más dialéctica, vamos a partir de la ecuación matemática que define la función.

La idea es que a partir de la ecuación y = f(x), se describe la función, identificando su dominio, su imagen, su simetría,, su monotonía y unn breve bosquejo de la gráfica.

Ejemplo 1

Dada la función f(x) = 3x - 1, hacer una descripción de la misma.

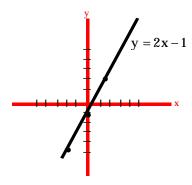
Solución: primero definimos el dominio, para lo cual vemos que x puede tomar cualquier valor real y no se presenta ambigüedad. $D: x \in R$. La imagen $como_{Y} = 3x - 1$, despejamos x; luego:

 $y-1=3x\Rightarrow x=rac{y-1}{3}$. Entonces y puede tomar cualquier valor real y no se presenta ambigüedad: I: $x\in R$, podemos decir f(x): $R\to R$

Tomemos algunos pares ordenados para ubicarlos en el plano cartesiano y así observar la tendencia de la gráfica.

Como x puede tomar cualqueir valor real: para x=0,entonces: y=3(0)-1=-1, luego y=-1, para x=1; y=3(1)-1=2, luego y=2. Así para otros valores de x, veamos el siguiente cuadro.

X	f(x)
0	-1
1	2
-1	-4
-2	-7
2	5



Determinamos la simetría:

 $f(x)=3x-1\Rightarrow f(-x)=3(-x)-1=-3x-1=-(3x+1)$, vemos que no cumple ninguna de las condiciones de simetría,luego la función no es par tampoco impar.

La monotonía:

Tenemos $x_1=1$ y $x_2=2$, $f(x_1)=2$ y $f(x_2)=5$, luego como $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$, la función es creciente.

Ejemplo 2

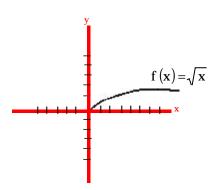
Sea la función $f(x) = \sqrt{x}$, hacer una descripción de f(x) .

Solución: dominio, serán todos los x mayores o iguales a cero, ¿por qué?

imagen, todos los y mayores o iguales que cero ¿por qué?

Luego $f(x): R^* \to R^*$; R^* , significa los reales no negativos. Pares ordenados para hacer un bosquejo de la gráfica.

x	f(x)
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
4	2
6	$\sqrt{6}$
9	3



La simetría: no hay simetría ya que no se puede reemplazar x por -x en la raíz par. Todos sabemos porqué, comparta esta situación con los compañeros y con el tutor.

Monotonía: si tomamos $x_1=1$ y $x_2=2$, vemos que $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$, luego la función es creciente.

EJERCICIOS: FUNCIONES

Hallar el dominio e imagen de las siguientes funciones.

- 1. Rta: Dominio $x \in R$, Im agen $y \in R/y \ge 19/3$ $f(x) = 3x^2 4x + 5$
- 2. $g(x) = \frac{5x-1}{2x-6}$ Rta: Dominio $x \in R / x \neq 3$, Im agen $y \in R / y \neq 5/2$
- 3. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 16}}$ Rta: Dominio $x \in R/x > 4$, Im agen $y \in R/y > 0$
- 4. Dada la función $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{x+4}}$, hallar f(0); f(-1), f(3)

Rta:
$$f(0) = -4$$
; $f(-1) = f(3) = 1$

5. Para la función $g(x)=\frac{x-4}{3x-8}$; si g(x)=1/2, cuánto vale x. si g(x)=0, cuánto vale x

Rta: para
$$g(x) = 1/2$$
; $x = 0$, para $g(x) = 0$; $x = 4$

- 6. Demuestre que la función $f(x) = \frac{3}{2-x}$ es creciente.
- 7. Demuestre que la función $h(x) = \sqrt{4x^3 5}$ es creciente
- 8. Proponga tres ejemplos de funciones inyectiva y sobreyectiva
- 9. Para la función $f(x) = x^3$, demuestre que la simetría es respecto al origen.
- 10. ¿En qué condiciones una parábola y una circunferencia serían funciones?

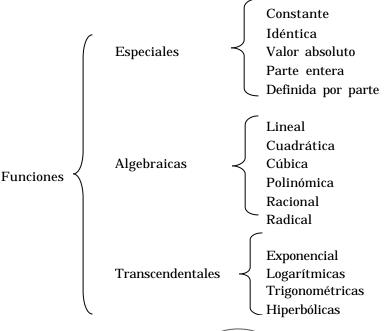


LASIFICACIÓN DE FUNCIONES

Clasificar la gran cantidad y variedad de funciones no es fácil, anteriormente vimos que según la relación entre los conjuntos de partida y llegada, las funciones pueden ser inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Existen otros criterios para clasificar las funciones.

Para los fines del curso, el criterio tomado ha sido la expresión matemática que describe la función, por ejemplo si es un ecuación lineal, hallamos de función lineal, si es una ecuación polinómica, estaremos hablando de las funciones polinómicas, si es un logaritmo estamos hablando de funciones logarítmicas. Este criterio es muy pertinente ya que puede involucrar la mayoría por no decir todas las funciones que existen y puedan existir.

Bajo este contexto las funciones se clasifican en: Algebraicas y Transcendentales, pero además de éstas, hay algunas funciones que llamamos especiales, ya que su definición no es compleja y sus características muy particulares y fáciles de describir.





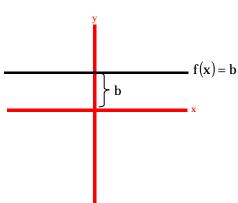
UNCIONES ESPECIALES

Función constante

Sea f(x) = b, donde b = constante. Esta función indica que para todo x, su imagen siempre será b.

La función constante es una función lineal, Su dominio son todos los reales y su imagen es el elemento b.

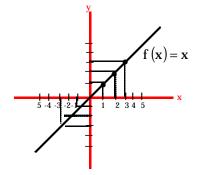
Siendo b la distancia del origen el punto b es el eje y. Esta función es par, o sea simétrica respecto al eje y.



Esta función no es creciente, tampoco decreciente; por lo cual no se considera monótona.

♦ Función idéntica

Sea f(x) = x, se le llama idéntica, ya que para un valor de x, el valor de y es el mismo. También es una función lineal, cuyo dominio e imagen son los Reales.

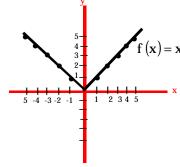


La función idéntica es una función impar; o sea simétrica respecto al origen. También es creciente en su dominio, por lo cual esta función es monótona.

♦ Función de valor absoluto

Sea f(x) = |x|. Esta función tiene como dominio todos los reales y como imagen los reales no negativos.

Esta función es par; o sea, simétrica respecto a y. También es decreciente en el intervalo $\left(-\alpha,0\right]$ y creciente en el intervalo $\left(0,\alpha\right)$



♦ Función parte entera

También se le llama función máximo entero o función escalonada. Se define así:

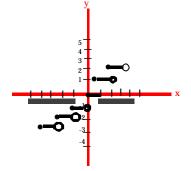
Sea f(x) = [|x|]. que significa el valor máximo entero menor a igual que x. Por ejemplo.

$$f(x) = [|1|] = 1$$
 $f(x) = [|-3/2|] = -2$

$$f(x) = [|0.5|] = 0$$
 $f(x) = [|3/4|] = 0$

$$f(x) = [|-0.5|] = -1$$

Haciendo un poco más extensiva la definición: para todo $x:-1\leq x<0; \quad f(x)=-1; \quad 0\leq x<1; \quad f(x)=0; \ 1\leq x<2; \quad f(x)=1$, así sucesivamente.



En la gráfica podemos ver porque se le llama escalonada. Para esta función es dominio son todos los reales y la imagen los enteros, de ahí el nombre parte entera.

Esta función se puede definir así: $f(x): R \to Z$

La función parte entera no es par tampoco impar; además, no es monótona, pero presenta una característica muy notoria, su discontinuidad en cada valor entero de x. Se diría que es una de las funciones más discontinuas que existen.

♦ Función definida por partes

Existen funciones mediante una regla que está compuesta por dos o más ecuaciones, por lo cual se le dice que está definida por puntos.

Veamos un caso de los muchos que existen.

Sea
$$f(x)$$

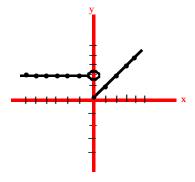
$$\begin{cases} x; & \text{si } x > 0 \\ 0; & \text{si } x = 0 \\ 2; & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

vemos que esta función está definida por 3 partes, según el valor que tome x. Vemos que para valores positivos la función toma la forma de una función idéntica. Para valores negativos, la función toma la forma de una función constante, para x=0, su imagen es cero.

La función presenta una discontinuidad en x = 0.

El dominio todos los reales y la imagen los reales no negativos.

No es par, tampoco impar. Es creciente en el intervalo $[0,\alpha)$ y constante en el intervalo $(-\alpha,0)$.





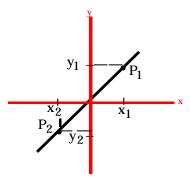
UNCIONES ALGEBRAICAS

La funciones algebraicas, se caracterizan porque la ecuación que los describe son polinomios, lo que hace que estas, presenten las propiedades y principios que poseen las expresiones algebraicas.

◆ Función lineal

Su nombre es dado por las gráficas que presenta, la cual es una línea recta no vertical, además su ecuación es de primer grado.

Sea f(x)=ax+b; donde a y b son constantes y $a \neq 0$, se define como una función lineal. Si observamos la ecuación que distingue la función lineal, vemos que corresponde a una ecuación lineal. A el valor **a** se le conoce como pendiente y a **b** como el intercepto o corte en el eje y.



Por la teoría Euclidiana, para obtener una recta, sólo se requieren dos puntos

$${\rm P}_{1}\left({{x}_{1}},\!{{y}_{1}} \right)\;{\rm y}\;\;{\rm P}_{2}\left({{x}_{2}},\!{{y}_{2}} \right)\!\cdot\!$$

la pendiente se puede obtener así:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El intercepto se pueden obtener conociendo la ecuación, reemplazar un punto que esté sobre la recta y despejar b.

Ejemplo 1

Sea la función f(x) = ax + b; por la cual pasan los puntos $P_1(2,4) \ y \ P_2(-2,-3)$. Hallar la pendiente y el intercepto.

Hallar la pendiente y el intercepto.

Solución: primero calculamos a; o sea, la pendiente.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 4}{-2 - 2} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

Ahora reemplazando el valor de a en la ecuación, obtenemos:

$$y = \frac{7}{4}x + b$$

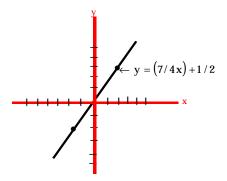
para hallar b, reemplazamos cualquiera de los dos puntos en la ecuación, tomemos P_1 , luego:

$$4 = \frac{7}{4}(2) + b \Rightarrow 4 - \frac{14}{4} = b \Rightarrow b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
, luego 1/2

La función quedará definida por la ecuación: $y = \frac{7}{4} x + \frac{1}{2}$

Estimado estudiante:

Analice con sus compañeros de pequeño grupo, la simetría de las funciones lineales.



La monotonía de las funciones lineales, se determina según el valor de a, cuando a es positiva, la función es creciente, cuando a es negativa, la función es decreciente y cuando a=0, la función es constante. Ilustremos con algunos ejemplos. El ejemplo anterior (ejemplo 1) presentó la pendiente a>0, luego la función es creciente, veamos:

Definamos $P_1(-2,-4)$ y $P_2(2,4)$ para el ejemplo anterior; luego $x_1=-2$, $y_1=-4$ y $x_2=2$, $y_2=4$, según la teoría de Monotonía para $x_1< x_2 \Rightarrow f(x_1)< f(x_2)$; por consiguiente la función es creciente en todo su dominio.

Ejemplo 2

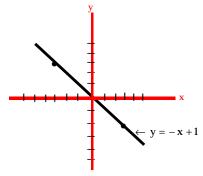
Dados los puntos $P_1(-3,4)$ y $P_2(3,-2)$. Determinar la ecuación, hacer la gráfica y determinar la monotonía de la función lineal que satisface los puntos dados.

Solución: debemos obtener una ecuación de la forma y = ax + b, calculamos a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 4}{3 - \left(-3\right)} = \frac{-6}{6}$$

Ahora hallamos b: tomemos $\ P_2$, como $\ y=-1x+b \Rightarrow -2=-1(3)+b \Rightarrow =1$. La ecuación será: y=-x+1

La monotonía: $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$ $x_1 < x_2$; ahora $f(x_1) = 4$ y $f(x_2) = -2$ vemos que $f(x_1) > f(x_2)$, luego la función es decreciente. Gráficamente observamos que efectivamente la función es decreciente.

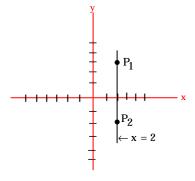


Si retomamos las funciones constante e idéntica, podemos inferir que son lineales; pues bien; dichas funciones son casos especiales de funciones lineales.

Ejemplo 3

Sean los puntos $P_1(2,3)$ y $P_2(2,-2)$ que pasan por una recta, hallar la ecuación, su gráfica y determinar si es función.

Solución: la ecuación lineal que identifica la función lineal y = ax + b, calculamos a:



$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 3}{2 - 2} = \frac{-5}{0} = Ind.$$
No hay pendiente. Al nohaber pendiente, nos indica que la línea es vertical, luego la ecuación será $x = x_1$.

Esta ecuación No representa una función, ya que el valor x=2 tiene infinitas imágenes, luego x=2 será una relación; pero no función.

Generalizando, podemos decir que toda línea vertical representa una relación, pero No una función. Toda línea vertical representa una función, específicamente toda línea horizontal no representa una función constante.



UNCIÓN CUADRÁTICA

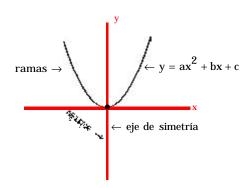
Sea
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
 donde a, b y c $\in R$ y $a \neq 0$.

Se conoce como función cuadrática, como podemos observar, el concepto de cuadrática está relacionada con el grado del polinomio que describe éste tipo de funciones.

La gráfica de una función cuadrática es la llamada parábola.

La gráfica consta de dos ramas que se unen en un punto llamado vértice. Además una recta que pasa por el vértice llamada eje de simetría, el cual divide la curva en dos partes iguales.

Para que una parábola describa una función cuadrática, el eje de simetría siempre debe ser vertical.



Analizando la ecuación $y=ax^2+bx+c$, podemos hacer dos particularidades: cuando b=c=0, la parábola tiene el vértice en el origen. Si b y/o $c\neq 0$, el vértice está fuera del origen de coordenadas, en este caso el vértice se halla así:

$$x = \frac{-b}{2a}$$
; $y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$: vértice (x,y)

El eje de simetría, tendrá la ecuación: $x = \frac{-b}{2a}$

Por otro lado, cuando a; es decir, el coeficiente de la variable al cuadrado, toma valores positivos o negativos, la gráfica cambia.

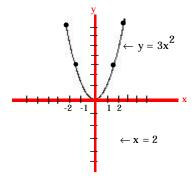
Cuando a > 0: las ramas abren hacia arriba del vértice Cuando a < 0: las ramas abren hacia abajo del vértice

Ejemplo 1

Dada la función $f(x)=3x^2$, hallar dominio, imagen, gráfica, simetría y monotonía.

Solución: la ecuación nos indica que es una función cuadrática, como b=c=0, el vértice de f(x) está en el origen.

El dominio, son todos los reales, ya que x puede tomar cualquier valor sin que se presente redundancia. La imagen son los reales no negativos, ya que f(x) será siempre positivo sea cual fuera el valor de x.



El eje de simetría tiene como ecuación: x=0La función es decreciente de $\left(-\alpha,0\right)$ y creciente de $\left[0,\alpha\right)$.

Las ramas abre hacia arriba ya que a > 0

Ejemplo 2

Hacer una descripción de la función $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$

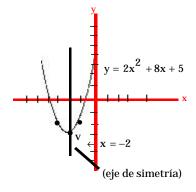
Solución: el dominio son todos los reales, la imagen son los reales donde $f\left(-\frac{b}{2a}\right) \ge 0$

El eje de simetría
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(+8)}{2(2)} = \frac{-8}{4} = -2$$

Vértice
$$x = \frac{-b}{2a} = -2$$
; $y = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-2) = 2(2)^2 + 8(-2) + 5 = -3$

Luego v(-2,-3)

Como a > 0, las ramas abren hacia arriba a partir del vértice. Ahora podemos definir explícitamente la imagen $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = -3$.



Para determinar en donde la curva corta al eje x, hallamos las raíces o ceros del polinomio.

Por favor calculen los ceros, utilizando la cuadrática. La solución es:

$$x_1 = -0.775$$
 y $x_2 = -3.224$

Ejemplo 3

Dada la función $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$, hacer su descripción.

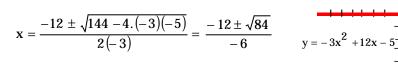
Solución: el dominio son todos los reales. La imagen, son todos los y tal que

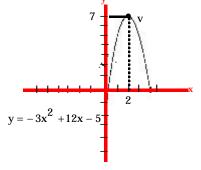
$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) \le 0$$
, pero $\frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-3)}$. Ahora $f(2) = -3(4) + 12(2) - 5$

f(2)=7, la imagen son los $y \le 7$; por qué menores o iguales?, como a < 0, las ramas abren hacia abajo a partir del vértice, el eje de simetría x=2.

Vértice
$$x = \frac{-b}{2a} = 2$$
 y $y=f\left(\frac{-b}{2a}\right) = 7$, luego $v(2,7)$

Los ceros del polinomio, para saber donde la curva corta a x.





$$x_1 = 0.472$$

$$x_2 = 3,527$$

Observación: las funciones lineales y cuadráticas tienen como dominio todos los reales. La imagen de las funciones lineales son los reales y de las funciones cuadráticas son los reales que cumplan:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) \ge 0$$
, cuando $a > 0$ y $f\left(-\frac{b}{2a}\right) \le 0$, cuando $a < 0$.

Es una observación muy pertinente que debemos tener presente, cuando estudiemos funciones de este tipo.

EJERCICIOS: FUNCIONES LINEALES- CUDRÁTICAS. ESPECIALES

Dada la expresión: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ para $x \neq 1$, hallar el valor de cada función.

1.
$$f(x) = 3x$$

Rta:3

2.
$$f(x) = 1 - 3x$$

Rta: -3

3.
$$f(x) = \sqrt{x}$$

Rta: $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

Dadas las siguientes funciones, hallar dominio, imagen, simetría y monotonía; además, hacer la gráfica.

4.
$$f(x) = -4x + 6$$

5.
$$g(x) = x^2 - 4$$

6.
$$h(x) = x + |x|$$

7.
$$p(x)=[|2x|]$$

8.
$$E(x) = |4x|$$

Para las siguientes funciones, hallar dominio, imagen, simetría, monotonía y hcer la gráfica.

$$9. \qquad f(x) = 3x^2$$

10.
$$g(x) = 2x^2 - 5x$$

11.
$$h(x) = 3x^2 + 4x - 10$$

12.
$$f(x) = -4x^2 + 2x - 1$$



UNCIÓN CÚBICA

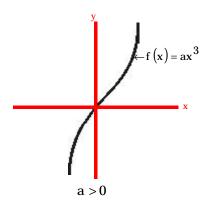
La función cúbica es una función definida de la siguiente manera:

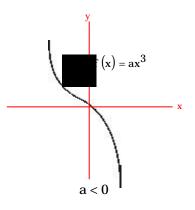
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
, siendo $a, b, c, d \in R$ $y \ a \neq 0$

Una función cúbica muy particular es cuando b=c=d=0. Así la función se resumen en: $f(x)=ax^3$

El dominio de f(x) son los Reales y la imagen los Reales. Este tipo de funciones son simétricas respecto al origen, esto quiere decir que son funciones impares.

Cuando a > 0, la función es creciente en todo su dominio, pero si a < 0, la función es decreciente en todo su dominio.







UNCIÓN POLINÓMICA

Las funciones polinómicas son funciones de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a.$$

siendo $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$ y $a_n \neq 0$. Además $n \in Z$ y $n \geq 3$. aunque una función polinómica es cuando $n \geq 2$, pero las funciones de n = 2 y n = 3, las estudiamos por separado, por sus particularidades.

Una función polinómica es aquella cuya regla está dado por el polinomio que la define, por lo tanto el grado de la función será dada por el grado del polinomio.

El dominio de las funciones polinómicas son los Reales. La imagen dependerá del tipo de función definida.

El análisis de las funciones polinómicas, será más eficiente, si manejamos todo lo referente a polinomios estudiado en la temática de ecuaciones polinómicas.

Aunque analizar funciones polinómicas requiere sólidos conocimientos de polinomios y buena cantidad de análisis de ejercicios modelos, vamos a ver algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Sea la función: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$; hacer una descripción de ella.

Solución: el dominio de f(x) son los reales. Para hacer un bosquejo de la gráfica debemos linealizar el polinomio.

$$f(x)=x^2(x^2-4x+3)=x^2(x-1)(x-3)$$
. Luego los ceros del polinimio son: 0,

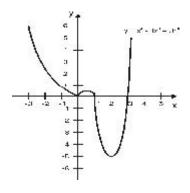
1, 3. Ahora con el diagrama de signos podemos ver como se comporta la curva en su dominio.

$$x^{2}$$
: $+++++++++$
 $x-1$: $---++++$
 $x-3$: $+++++--++$
 0
 1
 3

producto:
$$\underbrace{+++++--+++}_{0}$$

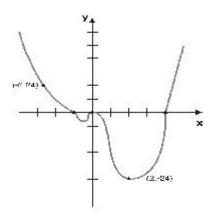
Luego f(x) > 0 en los intervalos $(-\alpha, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \alpha) y$ f(x) < 0 en el intervalo (1, 3).

La gráfica, nos muestra que la imagen es: $y \ge -5$



Ejemplo 2

Dada la gráfica siguientes, identificar el dominio, imagen y la ecuación.



Solución:

Dominio, los reales

Imagen, los reales mayores o iguales a -24

$$y = x^4 - 3x^3 - 4x^2$$

¡verificar los resultados!

Ejemplo 3

Dada la función $f(x)=x^4-4x^2+4$, describirla y graficarla.

Solución: dominio: la función por ser polinómica tienen como dominio los Reales

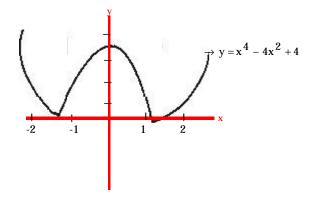
Imagen: f(x) siempre será positiva o cero, luego $y \ge 0$

Por ser una función de potencia par; f(-x)=f(-x), luego es simétrica respecto a y. Además, su intercepto es y = 4.

Para hallar los ceros y poder graficar, factoricemos la función:

$$f\left(\!-x\right)\!=\!\!\left(x^2-2\right)^{\!\!2}=\!\left(x^2-2\right)\!\left(x^2-2\right)\!=\!\left(\!x-\!\sqrt{2}\right)\!\!\left(\!x+\!\sqrt{2}\right)\!\!\left(\!x+\!\sqrt{2}\right)\!\!,\text{ vemos que tiene}$$

4 ceros, donde dos se repiten; es decir, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$



E

UNCIONES RACIONALES

El cociente de dos números enteros nos produce los números racionales, en el mismo orden de ideas, el cociente de dos polinomios nos origina las funciones racionales.

Sea $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ se denomina R(x) una función racional, con la condición que $g(x) \neq 0$.

El dominio de una función racional son todos los Reales, excepto aquellos valores que hagan a g(x) = 0.

La imagen serán todos los valores de y, dados según los valores de x.

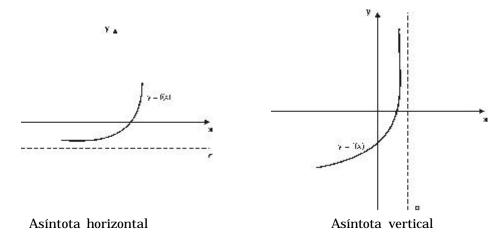
Estas funciones, pueden presentar simetría y monotonía; cada caso es particular.

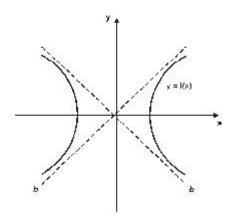
La graficación de una función racional, se puede hacer analizando las carcterísticas de una función: dominio, imagen, simetría, monotonía y los límites hasta donde puede llegar la curva. Estos límites se determinan por medio de las llamadas Asíntotas.

♦ Asíntotas

En términos muy sencillos una Asíntota es una recta que limita la curva de una función racional, Podríamos decir que la Asíntota es como la cebra que hay en los semáforos en donde no debe estar el carro cuando el semáforo está en rojo. La Asíntota es la cebra donde no debe estar la curva, solo muy cerca.

Las Asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.





Asíntota vertical

Asíntota horizontal

Decimos que y=c es una asíntota horizontal para la gráfica de una función f(x), sí:

$$f(x) \rightarrow c$$
 cuando $x \rightarrow \alpha$ ó $x \rightarrow -\alpha$

Lo anterior quiere decir que la función f(x) tiende a c; cuando x tiende a infinito o a menos infinito. En la gráfica podemos ver la ilustración. En esta observación que f(x) tiende a c, cuando x tiende a menos infinito.

Asíntota vertical

Se dice que x = a es una asíntota vertical para la gráfica de una función f(x), sí:

$$f(\!x)\!\to\!\alpha\quad \text{cuando}\quad x\to a^+,\ v,\quad x\to a^-$$

$$f(x) \rightarrow -\alpha$$
 cuando $x \rightarrow a^+$, v , $x \rightarrow a^-$

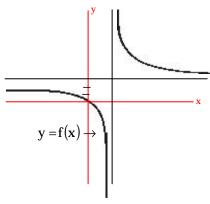
El significado es similar al caso de la asíntota horizontal, solo que en este caso cuando decimos $x \to a^+$ o $x \to a^-$, estamos diciendo que x tiende a \boldsymbol{a} por la derecha o izquierda respectivamente.



En la gráfica se ilustran dos casos:

$$x \to a^- \quad y \quad x \to b^+$$

Veamos un ejemplo gráfico:



La función f(x) tiene una asíntota horizontal en y = 3 y una asíntota vertical en x = 2.

A.H
$$\begin{cases} \text{Cuando} & x \to \alpha, f(x) \to 3\\ \text{Cuando} & x \to -\alpha, f(x) \to 3 \end{cases}$$

$$A.V = \begin{cases} \text{Cuando} & x \to 2^-, f(x) \to -\alpha \\ \text{Cuando} & x \to 2^+, f(x) \to +\alpha \end{cases}$$

◆ Asíntota oblicua

Dada la función racional R(x) y dada la recta y = ax + b; con $a \ne 0$, decimos que y es una asíntota oblicua de R(x); si:

$$R(x) \rightarrow y$$
 cuando $x \rightarrow +\alpha$ o $x \rightarrow -\alpha$

En la gráfica de Asíntota oblicua, las asíntotas son b y b´.

La pregunta sería: ¿cómo obtener una asíntota oblicua?, veamos:

a. Sea $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, donde f(x) y g(x), no tienen factores comunes y además el grado de f(x) que es \mathbf{n} es mayor que el grado de g(x) que es \mathbf{m} . Entonces hacemos el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$; digamos que se obtiene h(x) (n, n+1=m)

b. Al dividir
$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) = ax + b + \frac{r}{g(x)}$$

r = residuo de la división

$$\text{para cuando} \ \, x \rightarrow -\alpha \quad \text{o} \quad x \rightarrow +\alpha; \text{ entonces } \frac{r}{g(x)} \rightarrow 0$$

c. Por lo anterior: $R(x) \rightarrow ax + b$. Luego la asíntota oblicua es la recta ax + b, obtenida del cociente entre los polinomios de la función racional.

Ejemplo 3

Hacer una descripción general de la función: $f(x) = \frac{2}{x-1}$

Solución: el dominio son todos los reales $\neq 1$ ¿por qué?

La imagen son todos los reales ≠ 0 ¿por qué?

Simetría no tiene respecto a \mathbf{y} y respecto al origen; ya que no cumple $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ o $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$

La monotonía, la función presenta dos intervalos: $(-\alpha,1)$ y $(1,\alpha)$, vemos el primer intervalo $x_1=-1$ y $x_2=0 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ ¡compruébelo! Luego f(x) es decrecient e en $(-\alpha,1)$

Ahora veamos el segundo intervalo:

$$x_1 = 2$$
, $y x_2 = 4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; compruébelo!

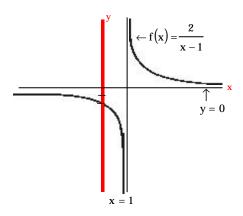
En el intervalo $(1,\alpha)$ la función es decreciente

Obtengamos las asíntotas:

horizontal: cuando $x \to \alpha$, la función tiende a 0, también cuando $x \to -\alpha$, la función tiende acero.

vertical: cuando $_{X\to 1^+}$, la función tiende a infinito y cuando $_{X\to 1^-}$, la función tiende a menos infinito.

Bosquejo de la gráfica



x = 1 Asíntota vertical

y = 0 Asíntota horizontal

la función se fracciona en dos partes, a razón de los dos intervalos de su dominio

E

unción radical

Las funciones de este tipo, pueden ser de dos clases según el índice de la raíz.

1.
$$f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$$
 $n \in z^+$ $y(n = par)$

El dominio de este tipo de funciones son los reales que no hagan el radicando negativo; es decir $p(x) \ge 0$

p(x) puede ser un polinomio, luego aplica las propiedades de polinomios. Si p(x) es una expresión racional, p(x) tendrá las propiedades de las funcionaes racionales.

2.
$$f(x) = \sqrt[n]{q(x)}$$
 $n \in z^+$ y $n = impar$

El dominio son todos los reales, según sea q(x), se aplican las propiedades del caso.

Unad

Ejemplo 1

Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$

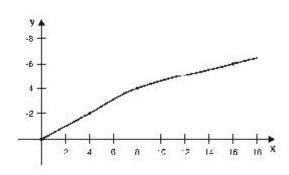
Solución: dominio, $x \ge 0$ el radicando no puede ser negativo, ya que n es par

imagen, $y \ge 0$, recordamos que no puede tomar valores negativos ya que si fuera así, no sería función.

simetría, no hay simetría no con y ni con el origen

monotonía, como el dominio es un intervalo $[0,\alpha)$, tomemos los valores $x_1=0\ y\ x_1=4 \Rightarrow f(x_1)<\ f(x_2)$, luego la función es creciente en su dominio.

Un bosquejo de la gráfica.



Ejemplo 2

Describa la función: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Solución: dominio, todos los reales ¿por qué?

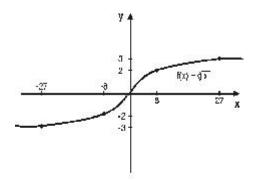
imagen, todos los reales ¿por qué?

simetría, la imagen es impar ua que f(-x) = -f(x), veamos

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$$

monotonía, la función es creciente en su dominio

La gráfica, un bosquejo es la siguiente:



Ejemplo 3

Analizar la ecuación: $f(x) = \sqrt{\frac{1}{(x-4)}}$

Solución: dominio son todos los reales para los cuales $\frac{1}{(x-4)} > 0$, como el numerador simpre es positivo, en único que puede ser mayor a cero es el denominador.

 $x-4>0 \implies x>4$, luego el dominio $(4,\alpha)$ ¿por qué no puede ser igual a 4?

Imagen, ya sabemos que son los reales positivos.

Esta función no presenta simetría respecto a y tampoco respecto al origen.

Monotonía, busquemos dos valores en el intervalo del dominio

$$\mathbf{x}_1 = 5$$
 \mathbf{y} $\mathbf{x}_2 = 8 \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \sqrt{\frac{1}{5-4}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$ \mathbf{y} $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) = \sqrt{\frac{1}{8-4}}$

 $=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \ f(x_1)>\ f(x_2)\,; \ por \ consiguiente \ la \ función \ es \ decreciente \ en \ su \ dominio.$

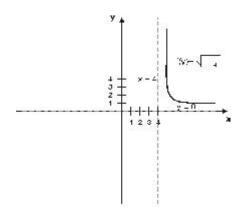
UNAD

Hallemos las asíntotas:

Horizontal, cuando $x \to \alpha \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{1}{\alpha - 4}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = 0$ hay una asíntota horizontal en y = 0.

Vertical, cuando $x\to 4$, $f(x)=\sqrt{\frac{1}{4-4}}=\sqrt{\frac{1}{0}}=\alpha$, entonces hay una asíntota vertical en x=4.

Un bosquejo de la gráfica



EJERCICIOS: FUNCIONES RACIONALES Y POLINÓMICAS

Para las funciones dadas, hallar dominio, imagen, simetría, monotonía y hacer un bosquejo de la gráfica

$$f(x) = x^3 - 4$$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$f(x) = x^4 + 7x^3 + 12x^2$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3$$

Dadas las siguientes funciones, identificar dominio, imagen, simetría, monotonía y hacer bosquejo de la gráfica

5.
$$g(x) = \frac{2}{x+1}$$

$$6. g(x) = \frac{3x}{x+4}$$

7.
$$g(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$$

9.
$$g(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

La concentración (t) de un fármaco en la sangre, para t horas, está dado por 10.

$$(t) = \frac{25t}{(t+1)^2}$$
, ¿cuál será la concentración inicial del fármaco y cuánto fármaco

hay a las 4 horas?

Identifique una aplicación de las funciones racionales en el área de ingeniería, administración y ciencias agrarias.



UNCIONES TRANSCENDENTALES

Las funciones transcendentales, son un tipo de funciones muy particulares ya que la expresión que las define No son polinomios, más bien son expresiones matemáticas como exponentes, logaritmos, expresiones trigonométricas y expresiones combinadas. Esto nos indica que este tipo de funciones no se definen en términos solo de sumas, restas, producto o cociente.

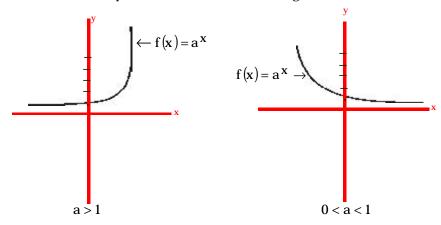


UNCIÓN EXPONENCIAL

la función exponencial deriva de los principios de los exponentes, esto indica que debemos tener bien claro los principios y propiedades de los exponentes (ver matemáticas básicas). La función exponencial se caracteriza porque la variable está en el exponente.

♦ Función exponencial base a

Sea $f(x) = a^x$, con a > 0 y $a \ne 1$, decimos que f(x) es una función exponencial de base a, podemos ver una ilustración gráfica de esta función.



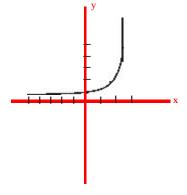
La función exponencial tiene las siguientes propiedades.

- El dominio es el conjunto de los números reales.
- La imagen son todos los reales positivos.
- El intersepto está en y = 1. El eje x es asíntota horizontal para esta función.
- La monotonía se caracteriza por ser creciente para $\alpha > 1 \ y$ decreciente para 0 < a < 1.
- En algunos casos presenta asíntota respecto a y, pero la mayoría no la tiene.
- Por otro lado, esta función es inyectiva; es decir, uno a uno.

Ejemplo 1

Sea $f(x) = 2^x$, describirla:

vemos que esta función cumple todas las propiedades descritas anteriormente.

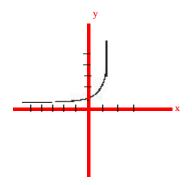


Todas las funciones de la forma a^x , tienen la misma forma; solo cambia la pendiente de la curvatura; según el valor de a. Por esto existen dos tipos de funciones especiales que merecen ser analizadas por separado.

Función exponencial decimal

Es una función exponencial, cuya base es 10.

Sea $f(x)=10^{X}$, se define como la función exponencial decimal; sus propiedades son las mismas para las funciones exponenciales, veamos la gráfica.



La función exponencial decimal tiene una curva muy pendiente, es decir se acerca mucho al eje y.

◆ Función exponencial natural

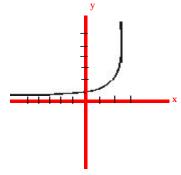
Esta función tiene como base el llamado número ${\bf e}$, conocido como el número de Euler.

El gran matemático Suizo obtuvo el número e, desarrollando la expresión

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^X\to 2{,}71828\dots \text{ a medida de } x\to\alpha \,. \ \text{ Este número es irracional, pero se}$$
 ha tomado como base de las funciones exponenciales naturales.

Sea $f(x) = e^x$, definida como la función exponencial natural,. Esta también goza de las propiedades para las funciones exponenciales. La gráfica la obtenemos enseguida.

La función exponencial presenta una curva menos pendiente que la función exponencial decimal.

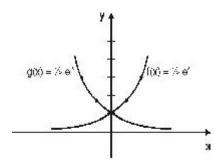


La función exponencial tiene abundantes explicaciones en Biología, Microbiología, Economía, ciencias y otras áreas de l conocimiento.

Ejemplo 1

Graficar las funciones: $f(x) = \frac{1}{2}e^{x}$ y $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$

Solución:



La función f(x) y g(x), también presentar las propiedades de este tipo de función.

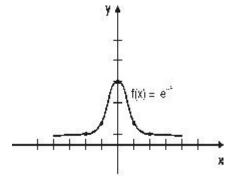
Estas dos funciones son la base de las funciones hiperbólicas, que veremos más adelante.

Ejemplo 2

Describa la función $f(x)=e^{-x^2}$

Solución: la gráfica nos ayudará a describirla, tomemos algunos valores para $x\ y$ así ubicar los puntos para hacer la gráfica.

X	y
0	1
1	0,3678
-1	0,36678
2	0,1353
-2	0,1353



El dominio, los reales, la imagen: $0 < y \le 1$, simetría respecto a y; es decir es una función par, creciente en $\left(-\alpha,0\right]$ y decreciente $\left(0,\alpha\right)$.



UNCIÓN LOGARÍTMICA

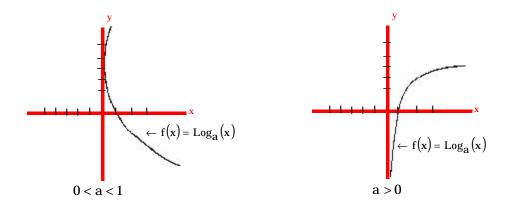
La logaritmación es una operación inversa a la potenciación, luego la función logarítmica es la función inversa a la función exponencial. Para comprender este tipo de función, es pertinente repasar todo lo referente a la logartimación, lo que se analiza en le curso de matemáticas básicas.

Sea, $f(x) = Log_a x$. Decimos que corresponde a la función logarítmica de base a, donde a > 0 y $a \ne 1$.

Al igual que la función exponencial, la función logarítmica tiene algunas propiedades:

- El dominio de f(x) son todos los reales positivos. Recordemos que logaritmo de números negativos no existen.
- · La imagen son todos los reales.
- El intersepto es y no tiene, pero la curva corta a x en uno.
- Presenta asíntota vertical en x = 0.
- Monotonía, la función es creciente para $a>1\ y$ decreciente para 0< a<1
- La función es inyectiva; es decir, uno a uno.

La gráfica de la función logarítmica es como sigue.



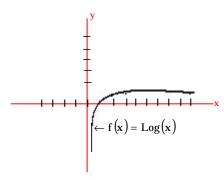
Vemos la monotonía de la función logarítimica en las gráficas respectivas. De las funciones logarítmicas, cabe resaltar dos funciones logarítimicas muy utilizadas y de gran aplicación.

♦ Función logarítimica decimal

Son las funciones logarítimicas cuya base es 10.

Sea $f(x) = Log_{10}(x)$ o f(x) = Log(x), se dice que corresponde a la función logaritmo decimal.

Esta función recibe todas las propiedades de la función logarítmica y las propiedades de los logaritmos.



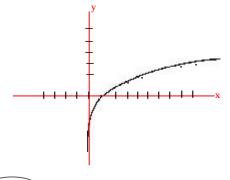
La función Log(x) es creciente en su dominio, pero la curva presenta poca distancia hacia el eje x; es decir, su pendiente es muy pequeña.

Función logaritmo natural

Corresponde a las funciones logarítimica cuya base es el número de Euler e.

Sea $f(x) = Log_e(x)$ o f(x) = Ln(x), se dice que corresponde a la función logarítmisca; también aplica en este tipo de funciones.

La función Ln(x) es creciente en su dominio, la curva es más pendiente que la función logaritmo decimal; esto quiere decir que la curva se separa más del eje x que la función logaritmo decimal.



Propiedades de logaritmos

Aunque los logaritmos los hemos trabajado en cursos anteriores, es pertinente recordar las propiedades más importantes de esta operación matemática.

Inversa:
$$\text{Log}_{a}(x) = y \Rightarrow y^{a} = x$$

Suma:
$$\text{Log}_{a}p + \text{Log}_{a}q \Rightarrow \text{Log}_{a}(p,q)$$

$$\text{Re sta}: \ \text{Log}\,_{a}p - \text{Log}\,_{a}q \Rightarrow \text{Log}\,_{a}\bigg(\frac{p}{q}\bigg)$$

Potencia:
$$\text{Log}_{a}(x)^{k} = k \text{Log}_{a}(x)$$

Nulo:
$$\operatorname{Log}_{a}(1) = 0$$

Operación opuesta :
$$Log_a a^{(x)} = a^{Log_a(x)} = (x)$$

◆ Cambio base

En ocasiones tenemos una función con base a, pero necesitamos cambiar la base para trabajar la función. Veamos cómo podemos cambiar la base de una función logarítmica, sin que sus propiedades se alteren.

Sea $y = Log_a(x) \Rightarrow a^y = x$. Aplicamos logaritmo de la base que deseamos a la última ecuación.

$$Log_b(a^y) = Log_b(x) \Rightarrow yLog_b(a) = Log_b(x)$$
, despejando y, tenemos:

$$y = \frac{Log_b(x)}{Log_b(a)}$$
 es la suma de cambiar de base a una función logarítmica.

Recordemos que $y = Log_a(x)$, por consiguiente otra forma de escribir la anterior

ecuación es:
$$\log_{a}(x) = \frac{\text{Log}_{b}(x)}{\text{Log}_{b}(a)}$$

Ejemplo 1

Dada la función $f(x) = y = \text{Log }_2(x)$, expresada con base e.

Solución: como $y = \frac{Log_b(x)}{Log_b(a)}$, donde a = 2 y b = e, entonces:

 $y = \frac{Log_{e}(x)}{Log_{e}(2)} \Rightarrow y = \frac{Ln(x)}{Ln(2)}, \text{ as i queda la función } f(x) \text{ definida con base e.}$

Ejemplo 2

Sea la función $f(x) = y = Log_{10}(x)$, expresada como base 2.

Solución: $y = \frac{Log_b(x)}{Log_b(a)}$, donde a = 10 y b = 2, luego:

$$y = \frac{\text{Log }_2(x)}{\text{Log }_2(10)}$$

EJERCICIOS: FUNCIONES EXPONENCIAL - LOGARÍTMICA

Identificar las características de las siguientes funciones y hacer la gráfica.

- 1. $f(x) = 2^x$
- $2. g(x) = 4^{x}$
- 3. $h(x) = 3^{x} + 3$
- 4. $I(x) = 10^{x}$
- $J(x) = e^{x}$
- 6. $K(x) = 10^{x-2}$
- 7. $L(x) = e^{x-1}$
- 8. $M(x) = e^{x} + 4$

Para las siguiente funciones, hacer lo mismo que en el caso anterior.

- 9.
- 10. $f(x) = \text{Log }_2(x)$
- 10. $g(x) = Log_4(x)$ 11. $g(x) = Log_4(x)$
- 11. h(x) = Log(x+4)12. I(x) = In(x+4)
- 12. I(x) = Ln(x+4)
- 13. J(x) = Ln(2x) + 6
- 14. $K(x) = Ln\left(\frac{x}{2}\right)$
- 15. La relación entre el ingreso anual x y el número de individuos y en un país capitalista está dado por la función: p(x) = Log(y) = Log(b) k log(x) .¿Cuál será el número de individuos en un país donde k = 2 y b = 12.000;K si el ingreso anual es de 10?



UNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

La trigonometría fue desarrollada hace más de 2000 años, siendo los griegos sus gestores y el matemático y astrónomo Hiparco (Siglo II A. de C.) uno de sus representantes. Sus inicios fueron motivados por la necesidad de predecir rutas y posiciones de cuerpos celestes, para mejorar la navegación y para el cálculo de tiempos.

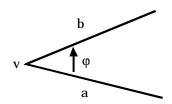
El estudio de la trigonometría se centró en el conocimiento de los triángulos. la palabra se deriva de los griegos Trigonom que significa triángulo y metros de medición.

Sabemos por nuestros conceptos propios que todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos; además, los triángulos rectángulos tienen un ángulo conocido, luego el estudio de centra en analizar solo dos ángulos y sus lados.

Los ángulos

En geometría se estudiaron los ángulos, clases, propiedades y demás. Se analizaron diversas definiciones de ángulos, por lo cual sólo se dará en este espacio una definición muy sencilla y particular.

Un ángulo se forma al cruzarse dos segmentos de recta en un punto llamado vértice, los segmentos de recta que se cruzan son llamados lado inicial y lado terminal.



v = vértice

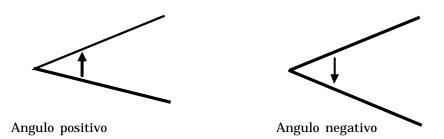
a = lado inicial

b = lado teminar

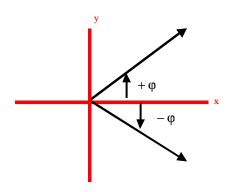
Φ = ángulo formado

Podemos decir que un ángulo es el «espacio formado» por los segmentos de recta que se cruzan en el vértice.

Por convención un ángulo es positivo cuando se mide en sentido contrario a la manecillas del reloj y negativo cuando se mide en sentido de las manecillas del reloj.



Si tomamos como referencia el plano cartesiano para medir los ángulos, podemos dar una métrica a este concepto.



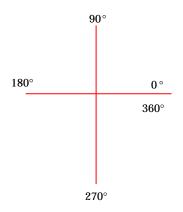
 ϕ = el ángulo formado por los general para simbolizar los ángulos se usan las letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \phi,...$ o letras latinas A, B, C, D,...

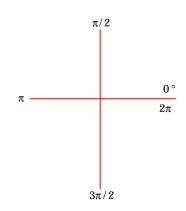
♦ Medida de los ángulos

La medida de un ángulo depende de la abertura o separación que se presenta entre las dos semirectas.

Existen dos sistemas para medir los ángulos. El sistema **sexagesimal**, cuya unidad son los grados y el sistema **hexagesimal**, que mide el ángulo en radianes.

Ilustremos los dos sistemas de medida, para observar sus equivalencias.





Sistema sexagesimal

Sistema hexagesimal

Observamos que una vuelta equivale en el sistema sexagesimal a 360° equivalente en el sistema hexagesimal a 2π .

Sistema de conversión

Con las gráficas anteriores podemos hacer conversión de un sistema a otro. Esto se hace por medio del llamado factor de conversión.

$$x_{\text{radianes}} = \frac{\pi}{180} x y_{\text{grados}}$$

 $x_{radianes}$ = la medida a buscar

 $y_{grados} = la medida dada$

$$y_{gra\ dos} = \frac{180}{\pi} x x_{radianes}$$

y_{gra dos} = la medida a buscar

 $x_{radianes}$ = la medida dada

Ejemplo 1

A cuántos grados equivale $\pi/3$ radianes.

Solución: como debemos convertir de radianes a grados; aplicamos la ecuación

$$y = \frac{180}{\cancel{\pi}} x \, \frac{\cancel{\pi}}{3} \Rightarrow \ y = \frac{180}{3} = 60^{\circ}. \ \text{Luego} \ \ \pi/3 \ \text{equivale a } 60^{\circ}$$

UNAD

Ejemplo 2

Dados 120°, a cuántos radianes equivale.

Solución: debemos convertir de grados a radianes

$$x = \frac{\pi}{180}(120) = \frac{12\pi}{18} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

Luego 120° es equivalent e a $2\pi/3$

Ejemplo 3

A cuántos radianes equivale 420°

Solución:
$$y = \frac{\pi}{180}.420 = \frac{42\pi}{18} = \frac{7\pi}{3}$$

Ejemplo 4

Sean $\frac{12\pi}{5}$ los radianes de rotación de una rueda, ¿cuántos grados barrió la rueda?

Solución:
$$y = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{12\pi}{5} = \frac{36x12}{1} = 432^{\circ}$$

Ejemplo 5

A cuántos grados y radianes equivalen tres vueltas y media.

Solución: como una vuelta equivale a 360° , 3 vueltas valdrán $360 \times 3 = 1.080$ y media vuelta equivale a 180° , entonces 31/2 vueltas equivalen a $1.080 + 180 = 1.260^\circ$

En radianes $x=\frac{\pi}{180}.1.260=7\pi$, por consiguiente 31/2 vueltas equivalen a 1.260 o 7π

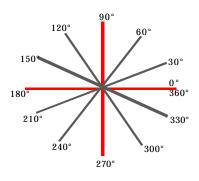
Angulos notables

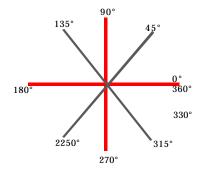
Angulos existen muchos, diríamos que infinitos. Para facilitar el análisis de los ángulos y en general de la trigonometría se han definido los llamados ángulos notables.

En el sistema de coordenadas rectangulares, el primer cuadrante está entre 0° - 90° del sistema sexagesimal, correspondiente a $0-\pi/2$ de sistema hexagesimal; el segundo cuadrante entre 90° - 180°; $\pi/2-\pi$. El tercero entre 180°- 270°; $\pi-3\pi/2$ y el cuarto entre 270° - 360°; $3\pi/2-2\pi$.

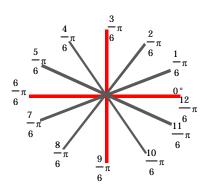
Para obtener los ángulos notables, dividimos cada cuadrante en 3 partes y en 2 partes, según el siguiente gráfico:

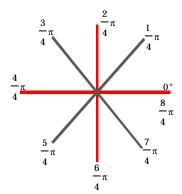
Sistema sexagesimal





Veásmoslo en el sistema hexagesimal





Al simplificar las fracciones se obtienen las medidas de los ángulos notables que se conocen.

Unad

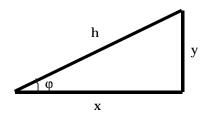
Podemos resumir los ángulos notables en los 4 cuadrantes y en los dos sistemas son presentados en el siguiente cuadro.

	Sexagesimal	Hexagesimal
1°. cuadrante	0°-30°-45°-60°-90°	$0 - \pi/6 - \pi/4 - \pi/3 - \pi/2$
2°. cuadrante	120° - 135° - 150° - 180°	$2\pi/3 - 3\pi/4 - 5\pi/6 - \pi$
3°. cuadrante	210° - 225° - 240° - 270°	$7\pi/6 - 5\pi/4 - 4\pi/3 - 3\pi/2$
4°. cuadrante	300° - 315° - 330° - 360°	$5\pi/3 - 7\pi/4 - 11\pi/6 - 2\pi$

(Ver ejercicios: ángulos y sus conversiones página 237)

◆ Relaciones trigonométricas

Recordemos que las relaciones son interacciones entre dos conjuntos, para el caso de las trigonométricas, la relación es de cociente entre dos longitudes; tomando como referencia el triángulo rectángulo, con un ángulo del mismo.



y = lado opuesto al ángulo ϕ

 $x = lado adyacente al ángulo \Phi$

h= hipotenusa

Existen 6 relaciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y consecante.

$$\begin{split} sen(\phi) &= \frac{y}{h} & csc(\phi) = \frac{y}{h} \\ cos(\phi) &= \frac{x}{h} & sec(\phi) = \frac{h}{x} \\ tan(\phi) &= \frac{y}{x} & cot(\phi) = \frac{x}{y} \end{split}$$

EJERCICIOS: ÁNGULOS Y SUS CONVERSIONES

Dados los siguientes ángulos en grados, convertirlo en radianes:

1. 15°

Rta: $\pi/12$

2. 70°

Rta: $7\pi/18$

3. -25°

Rta: $67\pi/36$

4. 480°

 $Rta:\,8\pi/3$

5. -78°

Rta: $141\pi/90$

Dados los siguientes ángulos en radianes, convertirlos a grados:

6. $4\pi/3$

Rta: 240°

7. $3\pi/8$

Rta: 67,5°

8. $-7\pi/8$

Rta: 202,5°

9. $7\pi/12$

Rta: 105°

 $10. -9\pi/12$

Rta: 225°

Para las siguientes gráficas, hallar y calcular la longitud del área del sector circular.

11.



r = 8cm

 $\alpha = 45^{\circ}$

Rta: Longitud: L = 6.28 cm

Area: $A = 25,13 \text{ cm}^2$

12.



r = 18cm

 $\alpha = 120^{\circ}$

Rta: Longitud: L = 37,69 cm

area: $A = 339,29 \text{ cm}^2$

UNAD

Se puede inferir según las relciones definidias, que el cociente es un valor real. Por consiguiente las relaciones trigonométricas, son interacciones entre ángulos y números reales.

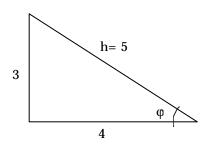
Ejemplo 1

Sea el triángulo cuyos lados miden $x=4\ y\ y=3$, hallar las relaciones trigonométricas correspondientes.

Solución: grafiquemos el triángulo, primero calculemos h; por el teorema de pitágoras:

$$h = \sqrt{x^2 + y^2} \implies h = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$h = \sqrt{25} = 5$$



Ahora sí calculamos las relaciones:

$$\operatorname{sen}(\varphi) = 3/5$$
 $\operatorname{csc}(\varphi) = 5/3$

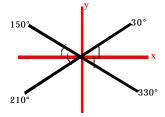
$$\cos(\varphi) = 4/5$$
 $\sec(\varphi) = 5/4$

$$tan(\varphi) = 3/4$$
 $cot(\varphi) = 4/3$

De la definición podemos observar que las funciones, seno, coseno, tangente, son las relaciones principales y las demás son recíprocas de las primeras.

Reducción de ángulos al primer cuadrante

Sabemos que los ángulos del primer cuadrante van de 0 a $\pi/2$. Cualquier ángulo mayor a estos, se pueden reducir a un ángulo equivalente del primer cuadrante. Lo anterior se debe a que la medida de los ángulos se hacen respecto al eje x, luego en el plano cartesiano, para la circunferencia unidad, siempre habrán 4 ángulos equivalentes respecto al eje x, solo que cada uno estará en un cuadrante diferente, veámoslo gráficamente.



Los ángulos tienen la misma abertura respecto al eje x, solo que están en cuadrantes diferentes. Luego se puede llevar cualquiera de los tres ángulos 150°, 210° ó 330° el primer cuadrante así:

Del 2°. cuadrante: $x^{\circ} = 180 - 150^{\circ}$ Del 3°. cuadrante: $x^{\circ} = -180^{\circ} + 210^{\circ}$ Del 4°. cuadrante: $x^{\circ} = 360^{\circ} - 330^{\circ}$

Generalizando: sea a el ángulo dado, xº el ángulo llevado al primer cuadrante, para reducir cualquier ángulo a > 90°, se tiene:

Del 2°. al 1°. cuadrante:

$$x^{\circ} = 180^{\circ} - a$$

Del 3° al 1°. cuadrante:

$$x^{\circ} = -180^{\circ} + a$$

Del 4°o. al 1°. cuadrante: $x^{\circ} = 360^{\circ} - a$

$$x^{\circ} = 360^{\circ} - a$$

Ejemplo 1

Reducir el primer cuadrante 125°

Solución: como el ángulo está en el segundo cuadrante $x^{\circ} = 180^{\circ} - a = 180^{\circ} - 125^{\circ} = 55^{\circ}$. Luego: $125^{\circ} = 55^{\circ}$ en el primer cuadrante.

Ejemplo 2

Reducir el primer cuadrante 230°

Solución: el ángulo está en el tercer cuadrante, luego:

$$x^{\circ} = -180^{\circ} + a = -180^{\circ} + 230^{\circ} = 50^{\circ}$$

Así cualquier ángulo de los cuadrantes II, III y IV, se pueden llevar a un ángulo equivalente del primer cuadrante.



UNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Las funciones trigonométricas son relaciones donde a cada ángulo le corresponde un único número real. El dominio de estas funciones son todas las medidas de los ángulos, pero según la función definida, el dominio se puede extender a otros ángulos. Esto quiere decir que para todas las funciones trigonométricas, todos los ángulos agudos hacen parte de su dominio.

Vamos a estudiar cada función, para analizar sus particularidades, no sin antes resaltar que este tipo de funciones son de tipo periódico, ya que se repite cada cierto ángulo, es decir f(x) = f(x + p) para p > 0.



UNCIÓN SENO

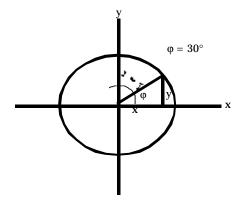
Define la relación $sen(\phi)$, podemos definir la función seno como sigue: seaf(x) = sen(x), que define la función seno; donde x representa un ángulo y f(x) un número real. Esto significa que cada ángulo le corresponde un número real.

Dominio = son todos los reales, ya que x puede tomar cualquier valor real.

Imagen = la imagen de la función seno están en el intervalo [-1,1], ya que el cociente de la ecuación nunca puede superar la unidad. Ampliando un poco esta parte; como sen(x) = y/h; siendo $h \ge y$; lo máximo es que h = y, así el cociente será uno, pero si h > y; el cociente estará entre $0 \ y \ 1$, siendo cero, cuando y = 0, El signo negativo se da en los cuadrantes donde el eje y es negativo.

Simetría = para la función sen(x) se cumple: sen(-x) = -sen(x), luego es una función impar, por consiguiente es simetría respecto al origen de coordenadas cartesianas.

Valores de la función = por ser una función trascendental, la obtención de las parejas ordenadas es muy particular. Para calcular dichos valores recurrimos a la llamada **circunferencia unidad**, la cual se caracteriza por tener como radio la unidad r = 1.

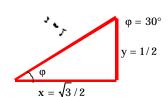


Teorema: en un triángulo rectángulo de 30° - 60°, la longitud, del lado opuesto al ángulo de 30°, es la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Demostración: se deja como ejercicio para que el estudiante la investigue.

El anterior teorema nos permite hallar los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30° y 60° $(\pi/6\ y\ \pi/3)$.

El triángulo tiene como hipotenusa h=1, que corresponde al radio de la circunferencia unidad. El valor y=1/2, se obtiene por el teorema y el valor de $_{x=\sqrt{3}/2}$ por el teorema de pitágoras.



Así: sen
$$(30^\circ) = \frac{1/2}{1} = 1/2$$

sen
$$(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \sqrt{3}/2$$

$$\operatorname{sen}\left(0^{\circ}\right) = \frac{0}{1} = 0$$

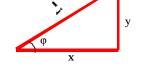
$$sen (90^\circ) = \frac{1}{1} = 1$$

para 90°; el lado opuesto; o sea, y = 1 y la hipotenusa h = 1

Ahora calculamos el seno para 45° y así obtenemos los valores del seno de los ángulos notables del primer cuadrante.

Para 45°, se sabe que los lados del triángulo son iguales, luego:

$$h^2 = x^2 + y^2$$
 para $x = y$, entonces :
 $1 = x^2 + y^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 1/2$, luego
 $x = \sqrt{1/2} = \sqrt{2}/2$



 $\phi = 45^{\circ}$

entonces: sen $(45^\circ) = \sqrt{2}/2$

Resumiendo:

Función/ángulo	0°	30°	45°	60°	90°	
Seno	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	

Para hallar el valor del seno en los demás cuadrantes, se deben tener en cuenta dos aspectos: la reducción de ángulos para hallar el equivalente en el primer cuadrante y el signo del cuadrante correspondiente. Analicemos un poco lo del signo, el seno está definido en términos del eje y, luego el seno será positivo donde y es positivo; es decir, los cuadrantes I y II; el seno será negativo donde y es negativo; o sea, los cuadrantes III y IV.

Hallemos dos valores, los demás se dejan como ejercicio:

- 1. $sen(120^\circ) = sen(60^\circ) = \sqrt{3}/2$. Recordemos que 120° están en el 2°. cuadrante luego $x^\circ = 180^\circ 120^\circ = 60^\circ$; para identificar su equivalente en el primer cuadrante; además en el segundo cuadrante seno es positivo.
- 2. $sen(240^\circ) = sen(60^\circ)$, pero 240° está en el tercer cuadrante, luego seno es negativo; pero con el mismo valor de 60°. Entonces: $sen(240^\circ) = -\sqrt{3}/2$.

Simplificando:

Segundo cuadrante:

Función/ángulo	120°	135°	150°	180°	
Seno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	

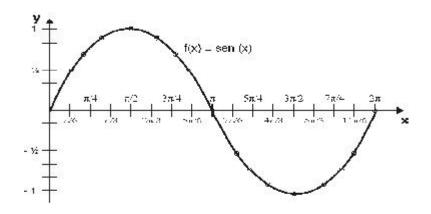
Tercer cuadrante:

Función/ángulo	210°	225°	240°	270°	
Seno	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	

Cuarto cuadrante:

Función/ángulo	300°	315°	330°	360°	
Seno	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}$ /2	-1/2	0	

Veamos la gráfica



Monotonía = la gráfica es creciente en los intervalos $\left[0,\pi/2\right)$ y $\left(3\pi/2,2\pi\right]$ y decreciente en el intervalo $\left[\pi/2,3\pi/2\right]$.

Perioricidad = anteriormente hicimos referencia a que una función es periódica cuando $f(x)=f\left(x+p\right)$, para un p>0. La función seno cumple esta igualdad, ya que $sen\left(x\right)=sen\left(x+2\pi\right)$, luego el periodo de seno es 2π . Esto significa que cada 2π , la función seno se repite en las mismas condiciones.

Propiedades adicionales: por las características de la función seno, hay algunas propiedades que merecen tenerse en cuenta:

- $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x)$
- $sen(\pi x) = sen(x)$
- $\operatorname{sen}(\pi/2 x) = \cos(x)$

Las demostraciones son relativamente sencillas, recordando lo referente a reducción de ángulos al primer cuadrante, es un buen camino para la demostración.

E) ı

UNCIÓN COSENO

Al igual que el seno; la función coseno se define: f(x) = cos(x), siendo x un ángulo y f(x) un número real.

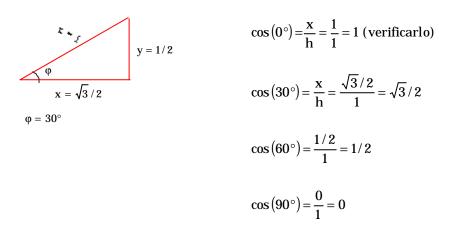
La función coseno está definida en términos del eje x, recordemos la relación coseno.

Dominio = para el coseno, el dominio son todos los reales $(-\alpha, \alpha)$

Imagen = la imagen está en el intervalo [-1,1], al igual que el seno, solo que para el coseno; el cociente es x/h.

Simetría = en la función cos(x); se cumple f(-x)=f(x), luego esta función es par, por consiguiente su simetría es respecto al eje y, de las coordenadas cartesianas.

Valor de la función = las parejas ordenadas se obtienen a partir de la circunferencia unidad, como se hizo en el seno; además, con el teorema definido para el ángulo de 30° **(recordarlo)**.



Para 45°, el procedimiento es similar que el realizado para seno.

$$x=y\Rightarrow h^2=x^2+x^2=2x^2$$
 como h =1,entonces :
$$1=2x^2\Rightarrow x^2=1/2\Rightarrow x=\sqrt{1/2}, \text{ luego :}$$

$$x=\sqrt{2}/2$$

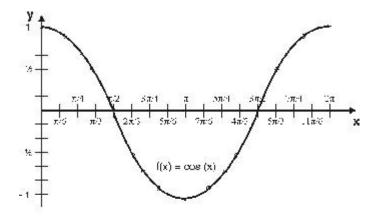
$$\cos\left(45^\circ\right)=\sqrt{2}/2$$

Como el seno se relaciona con el eje x, entonces el coseno será positivo en I y IV cuadrante y negativo en II y III cuadrante.

I	Función/ángulo	0°	30°	45°	60°	90°	
1	coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	
II	Función/ángulo	120°	13	35°	150°	180°	
	coseno	-1/2	$-\sqrt{2}$	2/2 -	$-\sqrt{3}/2$	-1	
Ш	Función/ángulo	210°	225°	240	2	270°	
111	coseno	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1/2	;	0	
IV	Función/ángulo	300°	315	5° 33	30°	360°	
- V	coseno	1/2	$\sqrt{2}$ / 2	2 √3	/2	1	

Unad

Grafiquemos el coseno



Monotonía = la función coseno es decreciente de $[0,\pi]$ y creciente de $(\pi,2\pi]$. la gráfica la ilustra visualmente.

Perioricidad = para la función coseno también se cumple que: f(x) = f(x+p), ya que: $cos(x) = cos(x+2\pi)$, siendo $p=2\pi$. Luego la función coseno se repite en las mismas condiciones cada 2π .

Propiedades adicionales: veamos las propiedades que se deben tener en cuenta para muchas situaciones.

- $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$
- $\cos(x-\pi) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi/2 x) = \sin(x)$

Las demostraciones se pueden hacer de igual manera que las realizadas para el seno.



UNCIÓN TANGENTE

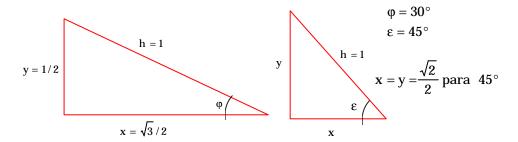
Sea: f(x) = tan(x), definida como la función tangente, la cual está definida a partir del cociente de los dos ejes; y/x. La palabra tangente significa que toca.

Dominio = son todos los valores para el cual $x \neq 0$, luego el dominio son los valores reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$, el valor de x=0, luego el cociente y/x está indefinido, por consiguiente la tangente no está defindia en $\pi/2$.

Imagen = para la función tangente la imagen son todos los Reales,

Simetría = la función tangente es una función impar, es decir su simetría es respecto al origen: tan(-x) = -tan(x)

Valores de la función = los argumentos son los mismos de seno y coseno, solo que en este caso el cociente es y/x.



$$\tan (30^\circ) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
 $\tan (60^\circ) = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

$$\tan (45^{\circ}) = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$
 $\tan (90^{\circ}) = \frac{1}{0} = \alpha$

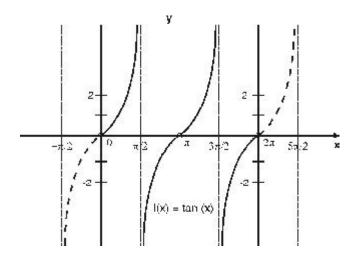
La función tangente será positivo donde x y y tengan signos iguales; es decir, I y III cuadrantes, será negativo donde x y y tengan signos contrarios; es decir, en el II y III cuadrante.

ī	Función/ángulo	0°	30°	45°	60°	90°	
1	tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	α	
TT	Función/ángulo	120°	1	35°	150°	180°	
II	tangente	$-\sqrt{3}$	_	1	$-\sqrt{3}/3$	0	

UNAD

	Función/ángulo	210°	225°	240°	270°
III	coseno	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	α
	Función/ángulo	300°	315°	330°	360°
IV	coseno	$-\sqrt{3}$	-1	$\sqrt{3}/3$	0

La gráfica presenta asíntotas verticales en $\pi/2~y~3\pi/2$, de la circunferencia unidad.



La gráfica de la tangente se interrumpe en el $\pi/2$ y $3\pi/2$. Vemos que se repite la curva cada π . Además es simétrica respecto al origen.

Monotonía = la función tangente es creciente en todo su dominio, ya que cumple

 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < (x_2)$. Entonces el periodo de la tangente es π . Esto se puede observar en la gráfica.

Asíntotas = como la tangente se hace nula cuando x = 0; es decir para $\pi/2$ ó 90° y sus múltiplos $n(\pi/2)$, para n = impar. En la circunferencia undidad las asíntotas verticales son $\pi/2$ y $3\pi/2$.

Propiedades adicionales:

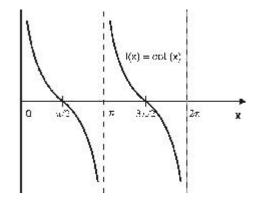
- $\tan(\pi/2 x) = \cot(x)$
- $\tan(\pi x) = -\tan(x)$

De esta manera quedan analizadas las tres funciones trigonométricas principales, a continuación describiremos las funciones restantes por medio de un cuadro que destaca las características de cada una y su respectiva gráfica.

Función	Dominio	Imagen	Simetría
cotangente	$Los x \neq \pi y 2\pi$	LosReales	Impar. Respecto al origen
secante	$\operatorname{Los} x \neq \frac{\pi}{2} y \frac{3\pi}{2}$	$(-\alpha,-1]\cup[1,\alpha)$	Par. Respecto al eje y
cosecante	Los x≠π y 2π	$(-\alpha,-1]\cup[1,\alpha)$	Impar. Respecto al origen

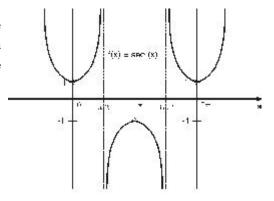
Función	Monotonía	Perioricidad	Asíntotas
cotangente	Decreciento en todo su dominio	periodo π	$x = \pi y 2\pi$
secante	Creciente $\begin{bmatrix} 0, \pi/2 \end{pmatrix} \cup \begin{bmatrix} \pi/2, \pi \end{bmatrix}$ Decreciente $\begin{bmatrix} \pi/3\pi/2 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 3\pi/2, 2\pi \end{bmatrix}$	periodo 2π	$x = \frac{\pi}{2} y 3 \pi/2$
cosecante	Decreciente $\left[0,\pi/2\right)\cup\left(3\pi/2,2\pi\right]$ Creciente $\left(\pi/2,\pi\right)\cup\left(\pi,3\pi/2\right]$	periodo 2π	$x = \pi y 2\pi$

Estas características están dadas en la circunferencia unidad

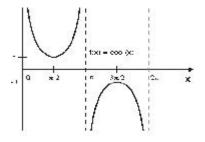


La función cotangente se interrumpe en $\,\pi\,$ y $\,2\pi$. La curva se repite en $\,\pi\,$ y su simetría es respecto al origen.

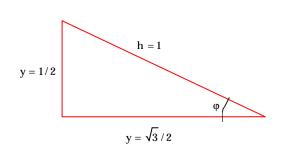
La función secante se interrumpe en $\pi/2$ y $3\pi/2$. Es simétrica respecto al eje y. La curva se repite cada 2π .

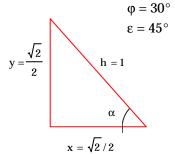


La función cosecante se interrumpe en π y 2π . Es simétrica respecto al origen; además, la curva se repite cada 2π .



Valores de la función = los valores para los ángulos notables para las funciones cot (x) y sec (x) y csc (x), se obtienen de los triángulos de 30° y 45° ; analizados anteriormente.





Hagamos algunos ejemplos:

$$\cot(30^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\cot (45^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

$$\sec(30^\circ) = \frac{h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

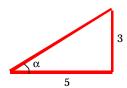
$$\csc\left(30^{\circ}\right) = \frac{h}{y} = \frac{1}{1/2} = 2$$

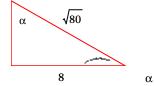
Así para los demás.

Ejercicio: estimado estudiante, para afianzar lo relacionado con las funciones trigonométricas, es pertinente que calcule los valores de las funciones cot (x), sec (x) y csc (x); para los cuatro cuadrantes de los ángulos notables. Es un ejercicio muy interesante.

EJERCICIOS: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Para el triángulo dado, hallar las 6 funciones trigonométricas





2. Para las funciones dadas hallar los restantes y hacer la gráfica

$$\operatorname{sen}\left(\alpha\right) = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{7}{5}$$

- 3. Dada la función f(x) = tan(x) cuáles son las intersecciones en x y y para la circunferencia unidad.
- 4. Dada la función $g(x)=\cot(x)$; para $0\leq x\leq 2\pi$, cuáles son las asíntotas verticales; si tiene.
- 5. Graficar las funciones

$$f(x) = -\cot(x)$$

$$g(x) = -\cos(x)$$

$$h(x) = sen(3x)$$

6. Hallar el valor de:

$$\operatorname{sen}(\pi/2) + \cos(\pi/6)$$

$$\tan(\pi/4) + \cot(\pi/3) - \sin(0)$$

$$\sec (\pi/6) + \csc (\pi/6) + \cot (\pi/4)$$

$$3\cos(5\pi/6) - 4\tan(7\pi/6) + 2\sec(11\pi/6)$$



UNCIONES HIPERBÓLICAS

Dentro de las funciones trascendentales, existen unas funciones que se obtienen a partir de las funciones exponenciales, conocidas como las funciones hiperbólicas, cuyo nombre está relacionado con una hipérbola; al igual que las trigonométricas con un triángulo.



ENO HIPERBÓLICO

Denotado así: f(x) = senh(x), se define de la siguiente manera:

$$Senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Dominio = son todos los reales, vemos que x puede tomar cualquier valor real.

Imagen = para cualquier valor de x, f(x) es real, luego la imagen son todos los reales.

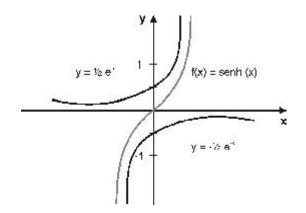
Simetría = para Senh(x); se cumple que f(-x) = -f(x), luego es una función impar, por consiguiente es simétrica respecto al origen de coordenadas cartesianas.

Montonía = si tomamos $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$; $f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = 1,175$, luego siendo $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$, por consiguiente la función es creciente en todo su dominio.

Veamos la gráfica

La función es la composición

de las funciones
$$\frac{1}{2}e^x$$
 $y - \frac{1}{2}e^{-x}$





OSENO HIPERBÓLICO

Denotado por: $f(x) = \cosh(x)$, se define de la siguiente manera:

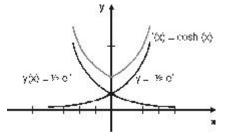
$$\cosh\left(x\right) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Dominio = aquí también x puede tomar cualquier valor, luego el dominio son todos los reales.

Imagen = par acualquier valor de x, f(x) toma valores mayores o iguales a 1, luego la imagen son los $\ y \geq 1$.

Simetría = esta función cumple f(-x) = f(x), luego la función es par, por consiguiente es simétrica respecto al eje y.

Monotonía = la función es decreciente de $\left(-\,\alpha,0\right)$ y creciente de $\left[0,\alpha\right),$ veamos la gráfica



En la gráfica se observa que a partir de $\frac{1}{2}e^x$ y $\frac{1}{2}e^{-x}$ se obtiene la función cosh(x)



ANGENTE HIPERBÓPLICA

Se denota: $f(x) = \tanh(x)$, y se define como:

$$\tanh\left(x\right) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

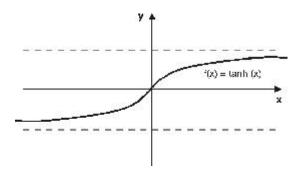
Dominio = son todos los reales

Imagen = todos los reales entre -1 y 1 -1 < y < 1

Simetría = la tanh(x) es una función impar, luego es simétrica respecto a origen de coordenadas cartesianas

Monotonía = la función es creciente en todo su dominio.

Asíntotas = presenta dos asíntotas horizontales en y = 1 y y = -1





OTANGENTE HIPERBÓLICA

Denotado como: $f(x) = \coth(x)$, se define de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

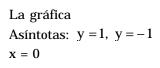
Unad

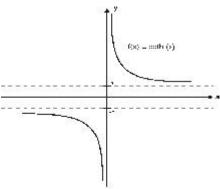
Dominio = son todos los reales diferentes de cero; o sea: $(-\alpha, 0) \cup (0, \alpha)$

Imagen = está comprendida entre $(-\alpha, -1) \cup (1, \alpha)$

Simetría = esta función cumple: f(-x) = -f(x), luego es impar, por consiguiente es simétrica respecto al origen.

Montonía = la función es decreciente en todo su dominio de definición.



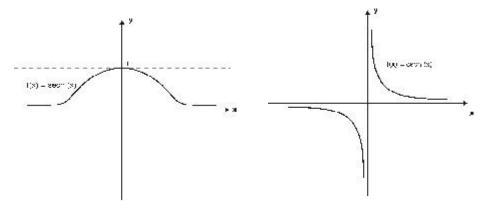


Resumamos en un cuadro las dos últimas funciones hiperbólicas.

Función	Dominio	Imagen	Simetría	Monotonía	Asíntotas
sech(x)	Todos los reales	(0,1]	Par. Respecto al eje y	creciente $\left(-lpha,\ 0 ight)$ decreciente $\left[0,lpha ight)$	y = 1 $y = 0$
csch (x)	$ig(-lpha,\ 0ig)\cupig(0,lphaig)$	$ig(-lpha, 0 ig) \cup ig(0, lpha ig)$	Impar. Respecto al origen	Decreciente en su dominio	x = 0 $y = 0$

$$\operatorname{sec} h(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csc} h(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$



Las funciones hiperbólicas tienen utilidades en electricidad, su gran ejemplo es «la cutenaria», que es una cuerda pesada que está entre dos puntos de soporte, como es el caso del cable de la luz suspendido entre dos postes.

(Ver ejercicios: funciones hiperbólicas página 258)



LGEBRA DE FUNCIONES

Como el recorrido que se ha hecho sobre las clases de funciones, ahora vamos a analizar las operaicones que se pueden hacer con funciones.

Suma: sean las funciones f(x) y g(x), la suma de las dos funciones nos origina otra función.

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

El dominio de h(x), son los elementos comunes a f(x) y g(x). La operación cumple las leyes básicas de la suma; conmutativa, clausurativa, asociativa.

EJERCICIOS: FUNCIONES HIPERBÓLICAS

1. Hallar el valor de f(x = a) para las funciones dadas.

$$f(x) = senh(x)$$
 parax =0, x =1 Rta: 0 y $\frac{e^2 - 1}{2}$

$$g(x) = tanh(x)$$
 parax = 2; x = 4 Rta: $\frac{e^4 - 1}{e^4 + 1}$, $\frac{e^8 - 1}{e^8 + 1}$

2. Dada la función $f(x) = 4 \cosh(x)$, cuánto vale la función para:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Rta. 4

$$x = 2$$

Rta : $2e^4 + \frac{2}{e^2}$

3. Verificar que:

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^{x}$$

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^{2x}$$

4. Para la función h(x) = f(x) + g(x), hallar el valor correspondiente para los x dados:

$$f(x) = 3 \coth(x)$$
 $y g(x) = 4 \sec h(x)$

$$x = 1$$

Rta:
$$\frac{3e^2+3}{e^2-1} + \frac{8e}{e^2+1}$$

$$x = 5$$

$$Rta: \frac{3e^{10}+3}{e^{10}-1} + \frac{8e^5}{e^{10}+1}$$

5. En un cuadro hacer un paralelo entre las funciones senh(x), cosh(x) y tanh(x); respecto a sus características.

Resta: sean las funciones f(x) y g(x), la resta será:

$$m(x) = f(x) - g(x)$$

El dominio al igual que en la suma, son los elementos comunes de las dos funciones. Esta operación sólo se cumple con la ley clausurativa; es decir; la resta de dos funciones origina otra función.

Producto: para las funciones definidas en la suma y resta.

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

El dominio es similar que el caso de la suma y resta. El producto entre funciones cumple las leyes; clausurativa, conmutativa, asociativa.

Cociente: el cociente entre dos funciones es de la forma:

$$Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio son todos los valores de x, excepto aquellos que hagan g(x) = 0

Ejemplo 1

Sean $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ $g(x) = x^2$, hallar f(x) + g(x), f(x) - g(x).

Solución:

$$f(x)+g(x)=(3x^2-2x+5)+(x^2-6)=4x^2-2x-1$$

$$f(x)-g(x) = (3x^2-2x+5) - (x^2-6) = 2x^2-2x+11$$

UNAD

Ejemplo 2

Hallar

$$f(x) \cdot g(x) y f(x)/g(x)$$
 para:

$$f(x) = e^{2x} + 4$$
 $y g(x) = Ln(x) - 6$

Solución:

$$f(x) \cdot g(x) = \left(e^{2x} + 4\right) (Ln(x) - 6) = e^{2x} Ln(x) - 6e^{2x} + 4Ln(x) - 24$$

$$f(x) / g(x) = \frac{e^{2x} + 4}{Ln(x) - 6}$$

Ejemplo 3

Dadas las funciones:

$$f(x) = e^{3x} + 2x$$
; $g(x) = \sqrt{x^3}$; $h(x) = senh(x)$
hallar: $f(x) + g(x) - h(x)$ y $g(x) - f(x) - h(x)$

Solución:

•
$$f(x) + g(x) - h(x) = e^{3x} + 2x + \sqrt{x^3} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^3} + e^{3x} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{4x + 2\sqrt{x^3} + 2e^{3x} - e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f(x) = \frac{4x + 2\sqrt{x^3} + 2e^{3x} - e^x + e^{-x}}{2}$$

•
$$g(x)-f(x)-h(x) = \sqrt{x^3} - (e^{3x} + 2x) - \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$L(x) = \frac{2\sqrt{x^3} 2e^{3x} - e^x + e^{-x}}{2}$$

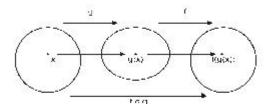
♦ Composición de funciones

Una operación muy especial es la composición de funciones.

Sea $f \circ g(x)$. Definida como f de g o g compuesta f.

Sea $g \circ f(x)$. Definida como g de f o f compuesta g.

La composición de funciones la podemos ilustrar de la siguiente manera.



El dominio de la función compuesta, serán todos los x para el cual, $x \in$ Dominio de g y a su vez g(x) está en el dominio de f.

La función compuesta no es conmutativa; es decir $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$.

Ejemplo 1

Sea
$$f(x) = x^2 + 2$$
 y $g(x) = \sqrt{x}$, hallar $f \circ g(x) y$ $g \circ f(x)$

Solución:

f o
$$g = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 2 = x + 2$$
. La función $g(x)$, hace las veces de variable para f (x)

g o f = $\sqrt{x^2 + 2}$. En esta, la función f(x) hace de variable para la función g(x)

Ejemplo 2

Sea
$$f(x) = 3x^2 - 2$$
 y $g(x) = \frac{x-1}{x}$, hallar $f \circ g(2)$ y $g \circ f(3)$

Solución: primero hallamos f o g(x) y luego hallamos para x = 2

$$f \circ g = f\left(g(x)\right) = 3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 2 = \frac{3\left(x-1\right)^2}{x^2} - 2 \text{ , ahora hallamos}$$

UNAD

$$f \circ g(2) = \frac{3(2-1)^2}{(2)^2} = \frac{3(1)}{4} = 3/4$$

Ahora: $g \circ f(3)$

$$g(f(x)) = \frac{(3x^2 - 2) - 1}{3x^2 - 2} = \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2}$$
, luego hallamos $g \circ f(3)$

$$g \circ f(3) = \frac{3(3)^2 - 3}{3(3)^2 - 2} = \frac{24}{25}$$

por consiguien te:

$$f \circ g(3) = 3/4 \quad yg \circ f(3) = 24/25$$

Ejemplo 3

Hallar: $f \circ g(x) y g \circ f(x)$; para f(x) = sen(4x) yg(x) = Ln(3x)

Solución:

$$f \circ g = f(g(x)) = sen (4(Ln(3x))) = sen (4Ln(3x))$$

 $g \circ f = g(f(x)) = Ln(3(sen(4x))) = Ln (3 sen (4x))$

Ejemplo 4

Para el caso del ejemplo 3, hallar f \circ g(1/3) y g \circ f(π /8)

$$\begin{array}{lll} f \circ g\left(1/3\right) = sen\left(4Ln\left(3(1/3)\right)\right) & = sen\left(4Ln\left(1\right)\right) = sen\left(0\right) = 0 \\ g \circ f\left(\pi/8\right) = Ln\left(3sen\left(4\left(\pi/8\right)\right)\right) = Ln\left(3sen\left(\pi/2\right)\right) = Ln\left(3\right) \\ Entonces : f \circ g\left(1/3\right) = 0 \quad y \quad g \circ f\left(\pi/8\right) = Ln\left(3\right) \end{array}$$

EJERCICIOS: ÁLGEBRA DE FUNCIONES

- 1. Dada las funciones: $f(x) = \frac{5x+1}{x-4}$ y $g(x) = \frac{x-4}{3x}$, hallar
 - f(x)+g(x)
 - g(x)-f(x)
 - f(x).g(x)
 - $g(x) \div f(x)$
- 2. Para las funciones: $h(y)=y^2-5y+4$ $y L(y)=3y^2-5y+8$, hallar
 - h(y)-3L(y)
 - L(y) + 5h(y)
 - $5h(y) \div 3L(y)$
- 3. Sea: $E(x) = 3e^{2x}$ y $M(x) = 10^{2x} e^{3x}$, hallar
 - $E(x) \cdot M(x)$
 - $[E(x)]^3 [M(x)]^{-2}$
 - $\frac{M(x)-E(x)}{2}$
- 4. Dadas: $f(x) = 4 \sin^2(x)$ y $g(x) = \cos^2(x)$, hallar
 - f(x) + g(x)
 - $f(x) \div g(x)$
 - $f(x) \div g(x)$
 - $[f(x)\cdot g(x)]^{-1}$
- 5. Hallar $f \circ g(x)$ $y g \circ f(x)$, para :

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2x - 4} \quad y \quad g\left(x\right) = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$f(x) = 2^x y$$
 $g(x) = sen(3x)$



UNCIONES INVERSAS

Cuando definimos la función y = f(x), se identificó su dominio y su imagen. La función de f, que se denota $f^{-1}(x)$ es aquella donde el dominio y la imagen cambian su posición.

Definición: sea y = f(x) una función inyectiva; o sea, uno a uno, la inversa $f^{-1}(x)$, es una función cuyo dominio es la imagen de f(x) y su imagen es el dominio f(x).

Es importante resaltar que para invertir una función y = f(x); esta debe ser inyectiva, de otra manera la función no es invertible.

$$f(f^{-1}(x))=x$$
, también $f^{-1}(f(x))=x$

Bajo las condiciones dadas podemos inferir que ls funciones monótonas; es decir, las funciones crecientes y decrecientes, son invertibles.

Dominio = el dominio $f^{-1}(x)$ es la imagen de f(x).

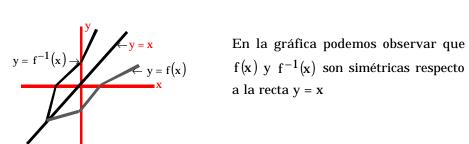
Imagen = la imagen de $f^{-1}(x)$ es el dominio de f(x).

Simetría = las funciones f(x) y $f^{-1}(x)$, son simétricas respecto a la recta y = x

La función inversa se puede expresar de dos maneras:

Forma implícita: x = f(y), se intercambian las variables

Forma explícita: $y = f^{-1}(x)$, se explicita la inversa de f(x).

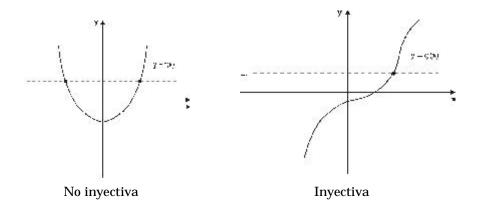


◆ Funciones algebráicas inversas

Es pertinente tener en cuenta que para invertir una función, ésta debe ser inyectiva, (uno a uno; biunívoca).

las funciones algebraicas cuyo polinomio es de grado 1 y 3 son inyectivas. La función cuadrática No es inyectiva, la función radical también es inyectiva.

Para identificar una función inyectiva en la gráfica trazamos una línea horizontal y si corta en un solo punto a la curva, dicha función es inyectiva.



Vemos que L_1 corta la curva en dos puntos; mientras que L_2 corta la curva en un solo punto; luego f(x) no es inyectva, mientras que g(x); si lo es.

Ejemplo 1

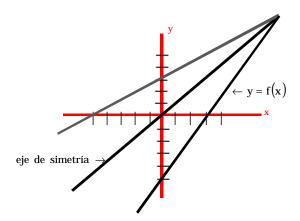
Hallar la función inversa de f(x) = 4x - 5

Solución: como es función lineal, ésta tiene inversa, para obtener la inversa de f(x), debemos despejar x.

 $y=4x-5 \Rightarrow y+5=4x \Rightarrow x=\frac{y+5}{4}$, luego expresamos de forma implícita y explícita.

forma implícita
$$\Rightarrow x = \frac{y+5}{4}$$
, forma explícita $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{4}$

UNAD

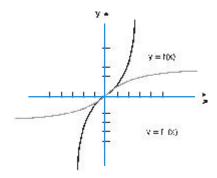


Ejemplo 2

Dada la función: $g(x) = x^3$, hallar $g^{-1}(c)$.

Solución: despejamos x, luego

$$y=x^3\Rightarrow\sqrt[3]{y}=x,$$
 por consiguien te : $f^{-1}(x){=}\sqrt[3]{x}$



Recordemos que al invetir una función se debe cumplir:

$$f(f^{-1}(x)) = x \ o \ f^{-1}(f(x)) = x,$$

comprobemóslo para esta función:

$$f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

Ejemplo 3

Hallar la inversa de la función $f(x) = \frac{2}{x-1}$

Solución: despejamos x en la ecuación $y=\frac{2}{x-1} \Rightarrow x-1=\frac{2}{y} \Rightarrow \ \ x=\frac{2}{y}+1$ (forma

implícita), expresémoslo de la forma explícita $f^{-1}(x) = \frac{2}{x} + 1$

Ejemplo 4

Determinar la función inversa de $g(x) = \frac{x-1}{3x+4}$, comprobar la inversión.

Solución: despejamos x en la ecuación.

$$y = \frac{x-1}{3x+4} \Rightarrow (3x+4)y = x-1 \Rightarrow 3xy+4y = x-1 \Rightarrow 3xy+4y-x = -1$$

$$3xy - x = -4y - 1 \Rightarrow x (3y - 1) = -4y - 1 \Rightarrow x = \frac{-4y - 1}{3y - 1}$$

entonces: $g^{-1}(x) = \frac{-4x-1}{3x-1}$, comprobemos la inversión, para esto sólo se debe

probar $g(g^{-1}(x))=x$, entonces:

$$g\left(\frac{-4x-1}{3x-1}\right) = \frac{\frac{-4x-1}{3x-1}-1}{3\left(\frac{-4x-1}{3x-1}\right)+4} = \frac{-4x-1-3x+1/(3x-1)}{-12x-3+12x-4/(3x-1)} = \frac{-7x+0}{-7} = x$$

Nota: siempre que se invierta una función, es conveniente comprobar la inversión.



UNCIONES TRASCENDENTALES INVERSA

Función exponencial

La Función exponencial es inyecta, luego tiene inversa.

Sea: $f(x) = a^x$, para hallar la inversa, como se ha dicho, despejamos la variable x

 $y = a^x \Rightarrow Log_a y = Log_a a^x \Rightarrow Log_a y = x$, recordemos las propiedades de los logaritmos, luego:

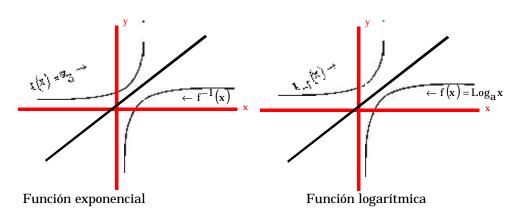
Unad

$$f^{-1}(x) = \text{Log}_a x$$

función inversa de la exponencial

Función logarítmica

La función logarítmica también es inyectiva, sea $f(x) = Log_a x$, veamos: $y = Log_a(x) \Rightarrow a^y = a^{Log_a(x)} = x$, entonces: $\boxed{f^{-1}(x) = a^x}$, función inversa de la logarítmica



(Ver ejercicios: funciones inversas, página 269)

Función trigonométrica

Dentro de las funciones trigonométricas se presenta la característica que No son inyectivas, luego no se podrían invertir. para superar este inconveniente y poder invertir las funciones trigonométricas, lo que se hace es **restringir el dominio**, para de esta manera si hacer la inversión.

Función Diminio restringido

$$\begin{array}{llll} sen\left(x\right) & \left[-\pi/2,\pi/2\right] & cot\left(x\right) & \left(o,\pi\right) \\ cos\left(x\right) & \left[0,\pi\right] & sec\left(x\right) & \left(o,\pi\right) \ excepto \ \pi/2 \\ tan\left(x\right) & \left[-\pi/2,\pi/2\right] & csc\left(x\right) & \left(-\pi/2,\pi/2\right) \ excepto \ 0 \end{array}$$

EJERCICIOS: FUNCIONES INVERSAS

1. Dadas las siguientes funciones, determinar cuáles son inyectivas y cuáles no, justificando la respuesta.

$$f(x) = 5x - 6$$

Rta: si

$$g(x) = x^2 + 4$$

Rta: no

$$h(x) = |x|$$

Rta: no

$$L(x) = \sqrt{4-x^2}$$

Rta: si

2. Las funciones dadas a continuación son inyectivas, hallar la función inversa y su dominio.

$$M(x) = 10 - 4x$$

Rta:
$$M^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$$

$$N(x) = \frac{4x}{5+x}$$

Rta:
$$N^{-1}(x) = -\frac{5x}{4-x}$$

$$P(x) = 4 - x^3$$

Rta:
$$P^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-4}$$

3. Hallar $f^{-1}(x)$ para las funciones:

$$f(x) = e^{2x}$$

Rta:
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} Ln(x)$$

$$g(x) = 3 + Ln(x)$$

Rta:
$$g^{-1}(x) = e^{x-3}$$

$$h(x) = e^{x} \div 4$$

Rta:
$$h^{-1}(x) = Ln(4) + Ln(x)$$

$$L(x) = Log\left(\frac{2+x}{x}\right)$$

Rta:
$$L^{-1} = \frac{2}{10^x - 1}$$

4. Grafique las funciones y su inversa para:

$$f(x) = 10^{3x}$$

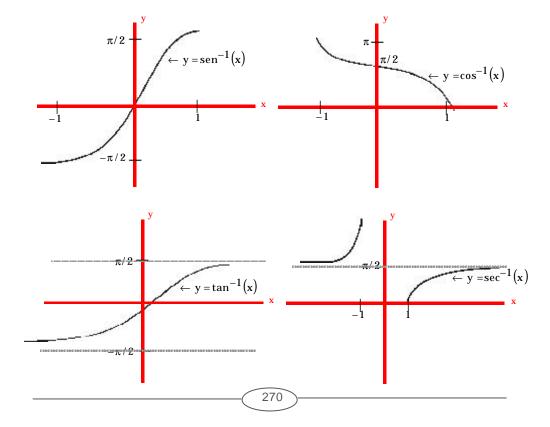
$$g(x) = e^{2x}$$

$$f(x) = 10^{3x}$$
$$h(x) = Ln(4x)$$

$$L(x) = 3 Log_2(x)$$

Bajo estas condiciones las funciones trigonométrics se pueden invertir, donde el dominio serán los reales y la imagen los ángulos.

Función	Dominio	Imagen	Simetría	Monotonía
$\operatorname{sen}^{-1}(\mathbf{x})$	[-1,1]	$\left[-\pi/2,\pi/2\right]$	Impar	Creciente
$\cos^{-1}(\mathbf{x})$	[-1,1]	$\left[0,\pi ight]$	Impar	Decreciente
$\tan^{-1}(x)$	$(-\alpha,\alpha)$	$\left(-\pi/2,\pi/2\right)$	Impar	Creciente
$\cot^{-1}(\mathbf{x})$	$(-\alpha,\alpha)$	$ig(0,\piig)$	Impar	Creciente
$\sec^{-1}(x)$	$ x \ge 1$	$ig(0,\pi/2ig) igcup ig(\pi/2,\piig)$	¡Investigar!	¡Investigar!
$\csc^{-1}(\mathbf{x})$	$ x \ge 1$	$(-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2)$	¡Investigar!	¡Investigar!



Ejemplo 1

Hallar $y = sen^{-1}(1/2)$

Solución: debemos buscar en el rango de $-\pi/2$, $\pi/2$, en donde el seno vale 1/2, luego sen $^{-1}(1/2)=\pi/6$

Ejemplo 2

Determinar la solución para $y = tan^{-1}(1)$

Solución: en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, debemos buscar en dónde la tangente tiene el valor de 1, corresponde al ángulo de $\pi/4.(45^{\circ})$.

Ejemplo 3

Hallar la función de $y = cos^{-1} (1/2) + cos^{-1} (\sqrt{3})$

Solución: el conseno vale 1/2 en $\pi/3$ y cotangente vale $\sqrt{3}$ en $\pi/6$, luego $y=\pi/3+\pi/6=\frac{2\pi+\pi}{6}=3\pi/6=\pi/2$

Función hiperbólica

De las funciones hiperbólicas, senh(x), tanh(x), coth(x) y csch(x) son uno a uno, luego tienen inversa. Para el caso de cosh(x) y sech(x), por no ser inyectivas, se debe restringir el dominio, para poderlos invertir.

En el siguiente cuadro resumimos las funciones hiperbólicas inversas, en donde se encuentran espacios para llenar, es para que el estudiante investigue.

Función	Dominio	Imagen	Simetría	Monotonía	Explícita
$\operatorname{senh}^{-1}(\mathbf{x})$	Reales	Re ales	Impar	Creciente	$\operatorname{Ln}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
$\cosh^{-1}(x)$	x ≥1	x ≥ 0		Creciente	$\operatorname{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ $x \ge 1$
$\tan^{-1}(\mathbf{x})$	-1 < x <1	Re ales	Impar	Creciente	$\frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ $-1 < x < 1$
$\operatorname{sec} h^{-1}(x)$	0 < x ≤ 1	x ≥1		Creciente	$\operatorname{Ln}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ $0 < x \le 1$
$\coth^{-1}(\mathbf{x})$					
$\csc h^{-1}(x)$					

Una pregunta surge del cuadro ¿cómo se obtiene la forma explícita de cada función? A manera de ejemplo desarrollemos el de $\cos^{-1}(x)$.

Sea $y = \cosh^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \cosh(y)$; además: $\cosh(x) = \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right)$ para $x \ge 0$, la idea es despejar x (multiplicamos por $2e^x$)

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow 4ye^x = 2e^x \left(e^x + e^{-x}\right) \Rightarrow 4ye^x = 2e^{2x} + 2$$

Luego: $2ye^x - e^{2x} - 1 = 0$; podemos apuntar a una ecuación cuadrática, la ecuación anterior, haciendo la trasformación tenemos:

$$\left(\, e^{X} \, \right)^{\! 2} - 2y \left(e^{X} \, \right) \! + 1 = 0 \, , \ por \ la \ fórmula cuadrática$$

$$e^x = \frac{2y + \sqrt{(2y)^2 - 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1}$$
 , despejamos x aplicando inversa:

$$x = Ln \bigg(y + \sqrt{y^2 - 1} \ \bigg) \Rightarrow f^{-1} \left(x \right) = cosh^{-1} \big(x \big) = Ln \bigg(x + \sqrt{x^2 - 1} \ \bigg) para \ x \geq 1$$

como ejercicio hacerlo para las demás funciones hiperbólicas inversas.

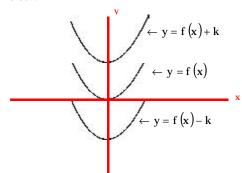


RASFORMACIÓN DE FUNCIONES

♦ Traslación

Sucede cuando la gráfica se corre ya sea horizontal o verticalmente, según el valor adicionado y la manera de hacer dicha adición.

Corrimiento vertical: sea y = f(x) una función, si adicionamos k de tal manera que la función queda: y = f(x) + k, la función sufre un corrimiento vertical.



cuando:

k > 0, el corrimiento vertical es hacia arriba.

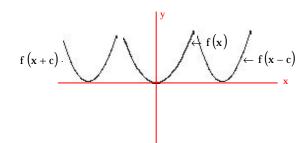
 $\label{eq:k-def} k < 0, \ el \ corrimiento \ vertical \ es$ hacia abajo

Corrimiento horizontal: sea y = f(x) una función, si adicionamos un C de tal forma que: y = f(x+c), la función sufre un corrimiento horizontal

Cuando:

la derecha

c > 0, el corrimientohorizontal es hacia laizquierdac < 0, el corrimientohorizontal es hacia



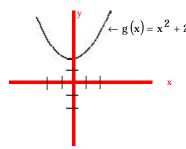
UNAD

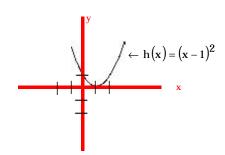
Ejemplo 1

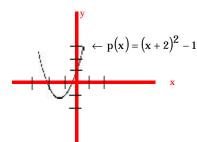
A partir de la función $f(x) = x^2$, graficar

$$g(x) = x^2 + 2$$
, $h(x) = (x-1)^2$ y $p(x) = (x-1)^2 - 1$

Solución: las funciones son cuadráticas g(x) sufre un corrimiento vertical, h(x) un corrimiento horizontal y p(x) en los dos ejes.





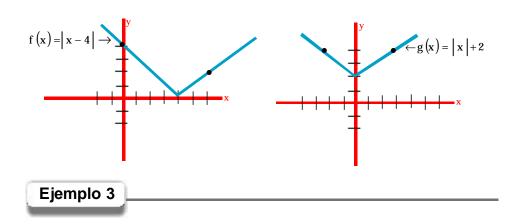


La traslación se hace a partir de una función base, o función conocida con anterioridad

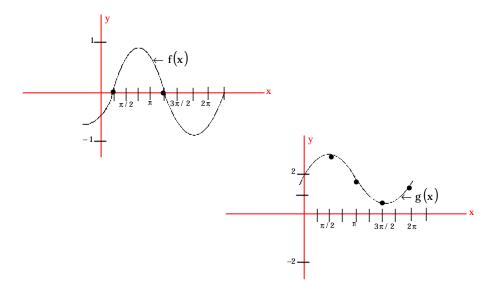
Ejemplo 2

Graficar ls funciones f(x) = |x-4| y g(x) = |x| + 2

Solución: sabemos que la función valor absoluto parte de cero y tiene forma de v, luego f(x) corre 4 unidades a la derecha, g(x) corre dos unidades haci arriba.



Según las gráficas siguientes, cuál será la función que identifica cada una.



Solución: para el caso de f(x) vemos que no comenzó en cero, se corrió $\pi/4$ a la derecha, luego hizo taslación horizontal, la función será: f(x) = sen (x – $\pi/4$).

Para el caso de g(x), la traslación fue vertical, vemos que corrió 2 unidades hacia arriba, luego: g(x)=sen (x)+2

Estiramiento

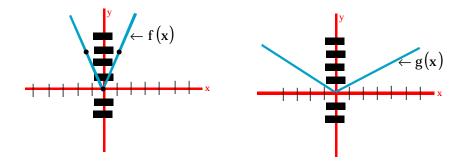
Cuando a una función se le antepone un coeficiente, esta puede sufir estiramiento o comprensión. Los mismo ocurre si el coeficiente se le antepone a la variable. Veamos las posibilidades:

- 1. Sea $y = k \cdot f(x)$. la función sufre estiramiento vertical en k unidades.
- 2. Sea $y = \frac{1}{k} f(x)$. La función sufre compresión vertical en k^{-1} unidades
- 3. Sea y = f(k.x). La función sufre compresión horizontal en k unidades
- 4. Sea $y = f\left(\frac{1}{k} \cdot x\right)$. la función sufre estiramiento horizontal en k^{-1} unidades.

Ejemplo 1

Graficar las funciones: f(x) = 3|x| y $g(x) = \frac{1}{2}|x|$

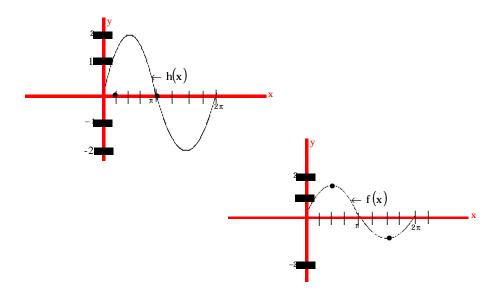
Solución: como vemos f(x) sufre estiramiento vertical en 3 unidades y g(x) sufre compresión vertical en 1/2 unidades.



Ejemplo 1

Dada las funciones: $h(x) = sen(x) y f(x) = \frac{1}{2} sen(x)$. Graficar.

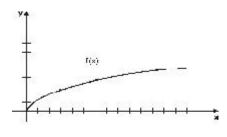
Solución: h(x) sufre estiramiento vertical 2 unidades y f(x) sufre compresión vertical 1/2 unidades.

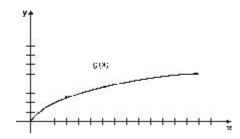


Ejemplo 3

Hacer la gráfica de las funciones $f(x) = \sqrt{2x}$ y $g(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x}$.

Solución: la función f(x) sufre compresión horizontal en 2 unidades y la función g(x) sufre estiramiento horizontal en 1/3 unidades.





Reflexión: a toda función f(x), se le puede hallar otra función que será el reflejo de f(x). La función y su reflejo forman simetría respecto a uno de los ejes.

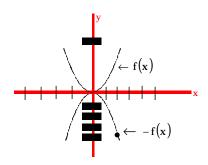
Sea y = f(x), entonces -f(x), es la función reflejo respecto al eje x.

Sea y = f(x), entonces f(-x), es la función reflejo respecto al eje y.

Ejemplo 1

Sea la función $f(x) = x^2$, cuál será la función reflejo.

Solución: como f(x) es par el reflejo será respecto al eje y, luego dicha función será $_{-x}{}^2$

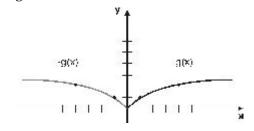


En la gráfica observamos, la función y su reflejo, la simetría está respecto al eje y también respecto al eje x.

Ejemplo 2

Dada la función: $g(x) = \sqrt{x}$, cuál será la función reflejo, si el eje de simetría es y.

Solución: la función reflejo es $\sqrt{-x}$, luego:



EJERCICIOS: TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

1. Graficar las siguientes funciones, identificando el cambio que manifiesta, según la función base:

$$\begin{split} f\left(x\right) &= x^{2} + 2 \qquad y \quad g\left(x\right) = \left(x - 2\right)^{2} \\ f\left(x\right) &= \left|x\right| + 4 \qquad y \quad g\left(x\right) = \left|x + 4\right| \end{split}$$

$$f(x) = |x| + 4$$
 $y g(x) = |x + 4|$

$$f(x)=3|x|$$
 $y g(x)=\frac{1}{3}|x|$

2. De las funciones dadas, graficarlas identificando si hubo corrimiento, alargamiento o compresión de la curva.

$$h(x)=6\sqrt{6}$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\mathbf{x}}$$

$$L(x) = \sqrt{8+x} -3$$

3. De las funciones dadas a continuación, compararlas con la función base y decir cuáles fueron los cambios.

$$f(x) = 4 \operatorname{sen}(x)$$

$$g(x) = sen(4x)$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$$

$$I(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$J(x)=2\tan(x)$$

$$K(x) = tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

4. De cuánto fue el cambio de fase en las siguiente funciones

$$f(x) = sen(x + \pi/2)$$

$$h(x) = 5\cos(2x + 2\pi)$$

$$g(x) = cos(x - \pi/3)$$

$$M(x) = 2 \tan(x + \pi)$$



PLICACIÓN DE LAS FUNCIONES

Las funciones tienen una amplia utilidad en todas las disciplinas, vamos a analizar diversos ejemplos modelos de éstas, con el fin de motivar para profundizar en dichas aplicaciones en la disciplina de interés para los estudiantes.



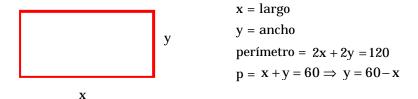
LGEBRAICAS

La mejor manera de ver las aplicaciones es a través de ejemplos modelos.

Ejemplo 1

El perímetro de un rectángulo mide 120 cm. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de su largo.

Solución: una gráfica nos ayudará a resolver el problema.



Despejamos y, para expresar solo en función de x.

Como área = largo x ancho \Rightarrow A = x . y pero y = 60 - x, entonces A = x(60 - x)

Así queda expresada el área en función del largo del rectángulo.

Ejemplo 2

La relación entre la temperatura ambiente y la altitud es aproximadamente lineal para $0 \le y \le 3.500~T = {}^{\circ}\text{C}~y~y = \text{metros}$. La temperatura a nivel del mar es del 16°C aproximadamente, al aumenta la altitud a 1.500 metros, la temperatura disminuye en 7°C.

- a. Hallar T (y); es decir, la temperatura en función de la altitud
- b. Qué temperatura ambiental habrá a 2.000 metros de altura
- c. A qué altitud la temperatura será de 0°C

Solución:

a. Según las condiciones del problema $T=m\ y+b$, donde $m\ y\ b$ son constantes. Ahora para $T=16^{\circ}C,\ y=0$, así:

 $16 = m(0) + b \Rightarrow b = 16$. la nueva ecuación será:

T = m(y) + 16, para hallar m, tenemos un dato, cuando y = 1.500 m,

 $T = 16 - 7 = 9^{\circ}C$. Ahora

9 = m(1.500) + 16. El punto es (9°C, 1.500 m), despejamos m, luego:

$$m = \frac{9 - 16}{1.500} = -\frac{7}{1.500}$$

La función lineal obtenida es: $T = -\frac{7}{1.500}(y) + 16$

b. A 2.000 metros :
$$T = -\frac{7}{1.500} (2000) + 16 = 6,67^{\circ} C$$

c. A 0°C, la altitud será :0 =
$$-\frac{7}{1.500}(y)+16 \Rightarrow -\frac{7}{1.500}(y)=-16$$

$$-7y = -24.000 \Rightarrow y = \frac{24.00}{7} = 3.428,57m$$

como y está en el rango de altura para el modelo que se construyó, el dato es confiable.

UNAD

Ejemplo 3

Expresar el área del círculo como función del perímetro.

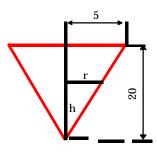
Solución: $A=\pi r^2$ para el círculo y $p=2\pi r$. Despejamos r de la ecuación del perímetro. $r=\frac{p}{2\pi}$, ahora la reemplazamos en la ecuación del área:

$$A = \pi \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi p^2}{4\pi^x} = \frac{p^2}{4\pi} \Rightarrow A(p) = \frac{p^2}{4\pi}$$

Ejemplo 4

Un tanque de almacenamiento de líquido tiene forma de cono circular recto, con altura de 20 metros y radio de la base 5 metros. Expresar el volumen del líquido en cualquier instante como función de la altura del líquido.

Solución: la gráfica nos ayudará a analizar el problema.



por geometría se sabe que $V = \frac{\pi}{3} r^2 . h$; que es el volumen de un cono circular recto.

Vemos que el volumen depende del radio y de la altura.

El problema es expresar el volumen solo en función de la altura h.

Con algo de observación y los conocimientos previos sobre proporcionalidad, podemos decir que tenemos dos triángulos, semejantes, (por favor detectarlos) se sabe que cuando dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionados; luego:

 $\frac{20}{5}=\frac{h}{r}\Rightarrow r=\frac{h}{4}$, despejamos $\,r\,$ para reemplazarlo en la ecuación del volumen, ahora:

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{h}{4}\right)^2$$
. $h = \frac{\pi h^3}{48}$; por consiguiente:

$$V(h) = \frac{\pi}{48} h^3$$

Ejemplo 5

Para el ejemplo anterior, ¿a qué altura estará el líquido, si el volumen es de 4m³?

Solución: como ya tenemos la función, reemplazamos volumen y despejamos altura.

$$4m^3 = \frac{\pi}{48} h^3 \Rightarrow \pi h^3 = 192 \Rightarrow h^3 = \frac{192}{\pi} = 61,115m^3$$

 $h = \sqrt[3]{61,115m^3} = 3,938 m$

Ejemplo 6

En economía una función muy trabajada es la de interés compuesto. Si se invierte c pesos a un interés i compuesto anualmente, en t años el monto inicial será de:

$$P = c (1+i)^t$$

si se invierten \$500.000 al 10% interés anual compuesto ¿cuánto se tendrá al tercer año y cuánto ganó de intereses?

Solución:

$$P = ? \\ c = 500.000 \\ t = 3$$

UNAD

Entonces: $p = 500.000 (1 + 0.1)^3 = 665.500

Luego ganó intereses \$165.500

Ejemplo 7

El costo de producción de un artículo está compuesto por los costos fijos más los costos variables. En una compañía los costos fijos para productir el artículo es de \$50.000. El costo de producir un artículo es de 200 pesos. ¿Cuál será el costo de producir 1.000 artículos?

Solución:

Costo total = costos fijos + costos variables C(x) = k + n(x)

c(x) = 50.000 + 200(x)Ahora para x = 1.000

c(x) = 50.000 + 200(1.000) = 250.000

Luego, productir 1.000 unidades costará \$250.000

(Ver ejercicios: aplicaciones funciones algebraicas, página 285)



RASCENDENTALES

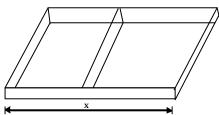
Al igual que las funciones algebraicas, las trascendentales tienen inmensas aplicaciones, en ciencias, economía, ingeniería, ciencias sociales y otras. Vamos a analizar a continuación ejemplos modelos diversos.

EJERCICIOS: APLICACIÓN FUNCIONES ALGEBRAICAS

 Dado un cubo de lado l, expresar el volumen del cubo, como función del área de su base.

Rta:
$$v = \sqrt{A^3}$$

2. Dada la gráfica, el perímetro p corresponde al total de longitud, los dos rectángulos son iguales. El área total es de 4.000 m². Expresar p en términos de x.



Rta:
$$p(x) = 2x + \frac{12.000}{x}$$

3. El crecimiento de un bebé de más 84 días de gestación está dado por la expresión: $L\left(t\right) = 1.52t - 6.8 \,. \ donde \ L \ es \ la \ longitud \ de \ centímetros \ y \ t \ es \ el \ tiempo \ en \ semanas.$ ¿Cuál será la edad de gestación de un bebé cuya longitud es de 35 cm?

Rta :
$$t = 27,5$$
 semanas

- 4. Un jugador de fútbol, tiene un récord de goles dados por 8 goles en 17 juegos. El jugador fue alineado en 180 partidos manteniendo el récord de goles.
- a. Expresar el número de goles como función del número de alineaciones donde $\text{Rta}: G(l) = \frac{8}{17}l$
- b. ¿Cuántos goles anotó en la temporada de los 180 partidos?
 Rta: aprox. 85 goles
- 5. Un cilindro circular recto de volumen \mathbf{v} , altura \mathbf{h} y radio \mathbf{r} , tiene una altura del doble del radio. Expresar el volumen del cilindro como función del radio.

Rta:
$$v(r) = 2\pi^3$$

6. Sea la función: $g(x)=x^2-8$; el punto p(x,y) está sobre la gráfica de g(x). Expresar la distancia **d** que se presenta desde p(x,y) al punto Q(0,1); como función de x.



XPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ejemplo 1

En medicina la recuperación normal de una herida se puede modelar por medio de una función exponencial Sea A_0 el área original de la herida y A es área de la herida después de ${\bf n}$ días. Luego la función es de la siguiente manera:

$$A = A_0 \; e^{-0.35 \left(n \right)}$$

En un proceso de recuperación, ¿cuánto medirá la herida a los 3 días, si el área inicial era de 1,5 cm²?

Solución:

 $A = A_0 e^{-0.35(n)}$

A = incógnita

n = 3dias, entonces:

$$A = 1.5 e^{-0.35(3)} = 1.5 e^{-1.05} = 0.525 cm^2$$

A los 3 días el área ha disminuido a 0,525 cm²

Ejemplo 2

La presión atmosférica p ejercida sobre un avión disminuye al aumentar la altura y. La presión en mmHg está relacionada con la altura en kilómetros, por medio de la ecuación: $p=760\,e^{-\,0.145\,\left(y\right)}$, vemos que la presión es función de la altura. ¿cuál será la altura, cuando la presión es de 570 mm Hg?

Solución:

En el problema nos dan la presión y se debe obtener la altura,, luego debemos despejar y. Veamos:

$$p = 760 e^{-0.145(y)} \Rightarrow \frac{p}{760} = e^{-0.145(y)} \Rightarrow Ln\left(\frac{p}{760}\right) = -0.145(y)$$

Luego:
$$y = \frac{Ln(p/760)}{-0.145} = \frac{Ln(570/760)}{-0.145} = \frac{-0.2876}{-0.145} = 1,98 \text{ km}$$

cuando la presión es de 579 mm Hg, la altura es de 1,98 km.

Ejemplo 3

El pH es una solución química está dada por la ecuación: $pH = -Log\left[H^+\right]$

Donde $\left[H^{+}\right]$, es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro, ¿cuál será el pH de un litro de agua que tiene $2x10^{-8}$ moles de hidrógeno?

Solución: reemplazamos en forma directa:

pH =
$$-\text{Log}\left[2 \times 10^{-8}\right] = -(-7,698) = 7,698$$

El pH = 7,698

Ejemplo 4

En la escala de Richter para medir los sismos, se utiliza la función:

$$R = Log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
 $I_0 = intensidad mínima del sismo$

 $I=intesidad\ dada\ del\ sismo\ en\ un\ instante\ dado$ Si la intensidad de un sismo es 500 veces la intensidad mínima, ¿cuál será el valor de R?

Solución:

$$I = 500 I_0$$
, luego $R = Log \left(\frac{500 I_0}{I_0} \right) = Log (500)$, luego $R = Log (500) = 2,6989$

Ejemplo 5

Para el ejemplo 4, si la intensidad mínima es $\rm\,I_0$, cuál será la intensidad para una escala de Richter de 4,5.

Solución: de la ecuación R, necesitamos despejar I, luego:

$$R = Log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow 10^R = 10^{Log\left(\frac{I}{I_0}\right)} \Rightarrow 10^R = \frac{I}{I_0}$$

 $I = I_0 . 10^R$, reemplazam os R = 4.5; luego:

$$I = I_0 \cdot 10^{4,5} = I_0 (31622,77)$$

por consiguiente la intensidad será de 31.622,77 veces la intensidad mínima.

(Ver ejericicios: problemas funciones exponencial y logarítmica, página 289)



RIGONOMÉTRICAS

En este aparte vamos a resolver diversos tipos de problemas, tomando como base el triángulo rectángulo; para lo cual debemos tener presente, el teorema de pitágoras, las funciones trigonométricas, una calculadora científica que nos permita apresurar los cálculos; ojo no simplificarlos. Es pertinente que todos los cálculos sean planteados metódicamente para poder entender lo que se está resolviendo y cómo se están resolviendo.

EJERCICIOS: PROBLEMAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

La tasa de interés compuesto continuo está dado por la expresión: $A = c e^{it}$, siendo:

A = cantidad acumulada a los t años

c = capital inicial

i = interés anual, expresado en tanto por uno

t = tiempo en años de c invertido

Aplicar esta fórmula a los siguientes problemas.

1. Si depositamos \$1000 a un interés del 33/4 de interés anual, ¿cuál será el saldo al os 5 años de hacer el ahorro?

Rta: A = \$1.510,59

2. ¿En cuánto tiempo t en años, la cantidad acumulada es de \$10.500 el capital ahorrado de \$8.500 y el interés fue de 9,2%. ¿Qué tiempo transcurrió para obtener la cantidad acumulada?

Rta: t ≅ 2,3 años

3. Después de 4 años del depósito, un capital presenta una cantidad acumulada de \$26.300 al 7.8% anual. ¿De cuánto fue el depósito inicial?

Rta : c = \$19.252

En una investigación se determinó que el área de cuerpo en su superficie está dada por: Log (A) = -2,144+0,425 Log (m) + 0,725 Log (h), donde **m** es masa en kg y **h** la altura en metros.

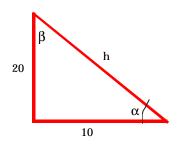
- 4. Una persona tiene 75 kg de peso y 1,80 metros de altura, ¿cuál será el área superficial de su cuerpo? Rta : $A=0.06886~{\rm m}^2$
- 5. ¿Cuál será la estatura de una persona que pesa 68 kg y su área superficial es de 0.05615 m^2 ? Rta : $h \cong 1.44 \text{ metros}$
- 6. Una persona tiene un área superficial de $0.0725 \,\mathrm{m}^2$; su estatura es de $1.92 \,\mathrm{m}$ ¿cuál será la masa de la persona? Rta : $\mathrm{m} \cong 75.86 \,\mathrm{kg}$

UNAD

Ejemplo 1

En un triángulo rectángulo el lado adyacente mide 12 cm y el opuesto mide 20 cm. hallar las medidas de los ángulos de dicho triángulo.

Solución: ilustramos el problema con un gráfico.



Sabemos dos cosas;

$$h^2 = (20)^2 + (10)^2$$

$$\cos(\alpha) = \frac{10}{h}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{20}{h}$$

con estos argumento, podemos iniciar la solución, calculemos inicialmente h:

$$h^2 = (20)^2 + (10)^2 = 400 + 100 = 500$$

$$h = \sqrt{500} = 2,36cm$$

Ahora hallamos el ángulo α , puede ser con sen (α) o $cos(\alpha)$, hallemóslo con los dos.

$$sen^{-1}\left(sen\left(\alpha\right)\right)=sen^{-1}\left(0.8945\right) \Rightarrow \alpha=63.44^{o}$$

$$\cos \alpha = \frac{10}{22.36} = 0,4472$$

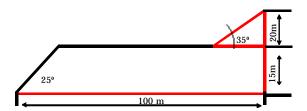
$$\cos^{-1}(\cos(\alpha)) = \cos^{-1}(0.4472) \Rightarrow \alpha = 63.44^{\circ}$$

para hallar β , partimos del teorema: $90^{\text{o}} + \alpha + p = 180^{\text{o}}$ para un triángulo rectángulo.

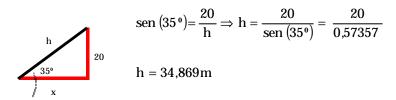
Entonces: $\beta = 180^{\circ} - (90^{\circ} + 63,44) = 26,56^{\circ}$

Ejemplo 2

Se requiere diseñar un tobogán según la gráfica, calcular la longitud del tobogán, que cumple las especificaciones dadas.



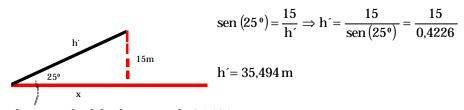
Solución: dividimos el problema en 3 partes, comencemos con la parte más alta.



La longitud de la primera parte es de 34,869 m.

Calculamos
$$x = h \cos(35^{\circ}) = 34,869 \times \cos(35^{\circ}) = 28,563 \text{m}$$

Ahora resolvamos la parte más bajas.



La última caída del tobogán mide 35,494 m.

Calculemos $x = h \cos(25) = 35,494 \times \cos(25^{\circ}) = 32,168 \text{m}$

Finalmente, la parte horizontal:

100 - (32,168 + 28,563) = 39,269m Luego la longitud del tobogán es:

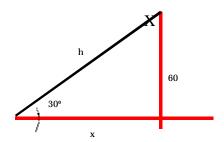
L = 35,494 m + 39,269 m + 34,869 m = 109,632 m.

UNAD

Ejemplo 3

Un niño eleva su cometa, la cual está a 60 m. de altura y donde el niño no puede soltarle más cuerda. El ángulo que la cuerda hace con el piso es de 30º. ¿Cuánta piola tenía el niño?

Solución:



La pregunta es h es el gráfico, por la función sen (α) se puede resolver:

$$sen (30^{\circ}) = \frac{60m}{h} \Rightarrow h = \frac{60m}{sen (30^{\circ})}$$

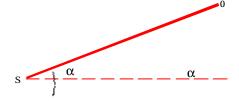
$$h = \frac{60m}{1/2} = 120m$$

El niño solo tenía 120 m de piola para elevar la cometa.

AI

Angulo de elevación

Cuando un observador ubicado en un punto dado, observa un objeto que está a mayor altura que el, el ángulo formado entre la visual y la horizontal se le llama ángulo de elevación.



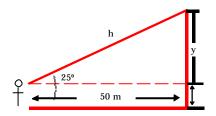
S = observador

0 = objeto

 α = ángulo de elevación

Ejemplo 4

Un observador está a 50metros de una iglesia. El ángulo de elevación a la punta de la torre de la iglesia es de 25º, ¿cuál será la altura de la iglesia? el observador mide 1,70 m.



La incógnita es y,, Luego $y = h sen (25^{\circ})$, pero no conocemos h, la calculamos utilizando la longitud x = 50 m, luego:

$$\cos\left(25^{\circ}\right) = \frac{50m}{h} \Rightarrow h = \frac{50m}{\cos\left(25^{\circ}\right)} = \frac{50m}{0,9063}$$

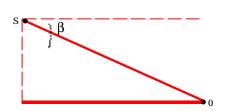
h= 55,169 m, ahora sí podemos hallar la altura y.

 $y = h. sen (25^{\circ}) = 55,169 x0,4226 = 23,31m.$

La altura de la iglesia será: 23,31 m + 1,70 m = 25,01 m.

◆ Angulo de depresión

Es el formado por la visual y la horizontal, cuando el observador està a mayor nivel del objeto observado.



S = observador

0 = objeto observado

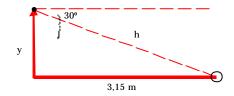
β = ángulo de depresión

Ejemplo 5

Un futbolista está a 3,15 metros del balón. El ángulo de depresión es de 30°, ¿cuál es la estatura del futobolista?

UNAD

Solución:



Debemos hallar y; la cual se calcula así: $y = h \cdot sen (230^{\circ})$, pero debemos calcular h, lo cual se hace utilizando la longitud x del triángulo.

$$x=h.\cos\left(30^{\circ}\right)$$
 $\Rightarrow h=\frac{x}{\cos\left(30^{\circ}\right)}=\frac{3,15\,m}{0,866}=3,637\,m$ Ahora sí podemos hallar la altura del futbolista:

$$y = h.sen(30^{\circ}) = 3,637 m \times 0,5 = 1,8185 m$$

Altura del futbolista = 1,8185 metros.

EJERCICIOS: PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

1. Un salvavidas está en su torre de observación a 20metros de altura, una persona implora su ayuda con un ángulo de depresión de 35°. ¿A qué distancia de la base de la torre de observación está la persona que solicitó ayuda?

Rta: d = 28,56 metros

2. Un poste de 35 metros de altura debe ser apoyado por unalambre que se fija a tierra. Si el alambre forma un ángulo de 52º con la horizontal, ¿cuál será la longitud del alambre?

Rta: 44,42 metros

3. Una persona de 1,62 metros; proyecta su sombra de 1,15 metros a lo largo del suelo ¿cuál será el ángulo de elevación del sol sobre la sombra?

Rta: $\alpha = 54,63^{\circ}$

4. Un cohete se dispara y éste sube a un ángulo constante de 70º hasta llegar a una distancia de 12.000 metros, ¿qué altitud alcanzó el cohete?

Rta: h = 11.276, 31 metros

5. El pentágono en los EEUU, tiene forma de pentágono regular; cuyo lado mide 921 pies, ¿cuál será el área del pentágono?

Rta: $A = 1^459.379 \text{ pies}^2$

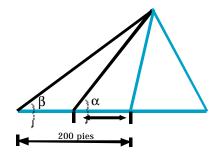
6. Un deslizadero forma un ángulo de 35º con la horizontal, si la disancia del punto donde llega el deslizadero en tierra a la horizontal donde inicia éste es de 100 metros, ¿qué longitud tiene el deslizadero?

Rta: L = 70 metros

7. Una de las siete maravillas del mundo es la pirámide de Keops, su altura original fue de 480 pies y 11 pulgadas, pero por la pérdida de piedra su altura ha disminuido. Según la figura ¿cuál será la altura actual de la pirámide?

$$\alpha = 46,27^{\circ}$$

$$\beta = 40,30^{\circ}$$



Rta: h = 449,36 pies



TRIGONOMETRÍA

Introducción

En el contexto de este capítulo, cuando hablemos de trigonometría hacemos referencia a triángulos y cuando se hable de hipernometría, estamos haciendo referencia a funciones hiperbólicas.

Analizadas las funciones trigonométricas e hiperbólicas, es imporante profundizar en estas temáticas que son necesarias para afianzar los conocimientos en este campo, como son las identificadas y las ecuaciones trigonométricas, también identidades hiperbólicas, cuyas temáticas inducirán al desarrollo en los estudiantes competencias cognitivas muy importantes en el campo de las matemáticas.

Pero con la profundización no es suficiente; por lo cual, se hace un énfasis a la transferencia, por medio de diversas aplicaciones a través del análisis de ejemplos modelos, los cuales se deben estudiar con detenimiento para adquirir sólidos conocimientos y poder aplicarlos cuando así se requiera.

Esperando; como sabemos que es, que este capítulo sea de su agrado y les de buenos aportes en trigonometría y hipernometría.

Objetivo general

 Profundizar en los conceptos trigonometría analítica e hipernometría, que permitan adquirir las herramientas para ser utilizadas cuando así se requiera.

Objetivos específícos

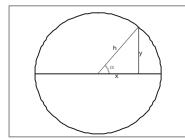
- . Analizar las identidades trigonométricas e hiperbólicas.
- Resolver identidades trigonométricas e hiperbólicas.
- . Desarrollar ecuaciones trigonométricas.
- Estudiar los triángulos no- rectángulos y sus aplicaciones.



DENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

En trigonometría existen unas ecuaciones muy particulares a las cuales se han llamado identidades trigonométricas, debido a que son ecuaciones que se satisfacen para cualquier ángulo. Existen unas identidades llamadas básicas, otras llamadas específicas.

- **Identidades básicas:** se definen a partir del análisis del círculo trigonométrico unitario, analizado en el capítulo anterior.
- 1. Identidad fundamental, partiendo del teorema de pitágoras y la relación de los lados del triángulo.



h = 1 radio de la circunferencia unidad

$$h^2 = x^2 + y^2 \implies 1 = x^2 + y^2$$

h² = x² + y²
$$\Rightarrow$$
 1 = x² + y²
Pero: sen (\alpha) = $\frac{y}{h}$ \Rightarrow sen (\alpha) = y
 $\cos(\alpha) = \frac{x}{h} \Rightarrow \cos(\alpha) = x$

$$\cos (\alpha) = \frac{x}{h} \Rightarrow \cos^{11}(\alpha) = x$$

Si reemplazamos x e y en la ecuación de Pitágoras, tenemos:

Como: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$. Luego la identidad fundamental

A partir de ésta se pueden obtener otras identidades.

2. Identidades de cociente, sabemos que:

sen
$$(\alpha) = \frac{y}{h} y \cos(\alpha) = \frac{x}{h}$$
, si hacemos el cociente $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ tenemos:

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{y}{h}}{\frac{x}{h}} = \frac{y}{x}.$$
 Este cociente por definición es tan (\alpha), luego:

$$\tan (\alpha) = \frac{\operatorname{sen} (\alpha)}{\cos (\alpha)}$$

Ahora realicemos los mismo, pero al contrario, es decir: $\frac{\cos{(\alpha)}}{sen{(\alpha)}}$, entonces:

$$\frac{\cos (\alpha)}{\text{sen }(\alpha)} = \frac{x}{y} = \frac{x}{y}.$$
 Cociente que por definición es cot (\alpha), luego:

$$\cot (\alpha) = \frac{\cos (\alpha)}{\text{sen } (\alpha)}$$

3. Identidades recíprocas: se llaman así debido a que por definición, al intercambiar los términos del cociente de la relación trigonométrica se obtienen éstas. Veámos:

$$sen (\alpha) = \frac{y}{h} \quad y \ csc (\alpha) = \frac{h}{y}; \quad entonces \quad sen (\alpha) \ y \ csc (\alpha)$$

son recíprocas, luego: sen $(\alpha) = \frac{1}{\csc(\alpha)}$. Lo mismo con las demás.

 $\cos{(\alpha)} = \frac{x}{h}$ y $\sec{(\alpha)} = \frac{h}{x}$, entonces $\cos{(\alpha)}$ y $\sec{(\alpha)}$ son recíprocas. En general:

también : csc (
$$\alpha$$
) = $\frac{1}{\text{sen}(\alpha)}$

$$\cos (\alpha) = \frac{1}{\sec (\alpha)}$$

también : sec
$$(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\tan (\alpha) = \frac{1}{\cot (\alpha)}$$

también : cot
$$(\alpha) = \frac{1}{\tan (\alpha)}$$

4. Identidades pitagóricas: a partir de la identidad fundamental, a veces llamada también pitagórica, se puede obtener las llamadas identidades pitagóricas.

Si dividimos la identidad fundamental por cos (α) , tenemos otra identidad:

$$\frac{\operatorname{sen}^{2}(\alpha)}{\cos^{2}(\alpha)} + \frac{\cos^{2}(\alpha)}{\cos^{2}(\alpha)} = \frac{1}{\cos^{2}(\alpha)} \Rightarrow \tan^{2}(\alpha) + 1 = \sec^{2}(\alpha), \text{ entonces:}$$

$$\boxed{\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)}$$

Ahora, dividamos la identidad fundamental por sen (α), luego:

$$\frac{\operatorname{sen}^{2}\left(\alpha\right)}{\operatorname{sen}^{2}\left(\alpha\right)}+\frac{\cos^{2}\left(\alpha\right)}{\operatorname{sen}^{2}\left(\alpha\right)}=\frac{1}{\operatorname{sen}^{2}\left(\alpha\right)}\Rightarrow1+\cot^{2}\left(\alpha\right)=\csc^{2}\left(\alpha\right),\text{ entonces:}$$

$$\boxed{\cot^2(\alpha) + 1 = \csc^2(\alpha)}$$

5. Identidades pares-impares: cuando definimos la simetría de las funciones trigonométricas, identificamos las funciones pares e impares. De aquí se pueden definir las identidades pares e impares.

Pares:
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$sec (-\alpha) = sec (\alpha)$$

Impares: sen
$$(-\alpha) = -$$
 sen (α) cot $(-\alpha) = -$ cot (α)

$$tan (-\alpha) = -tan (\alpha)$$
 $csc (-\alpha) = -csc (\alpha)$

6. Identidades de cofunción: cuando a $\frac{\pi}{2}$ se le resta un ángulo cualquiera, se obtiene la confunción: veamos:

a.
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
 y $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x)$

b.
$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot (x)$$
 $y \cot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan (x)$

c.
$$\sec \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x)$$
 $y \csc \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x)$

Para x medida en radianes de un ángulo agudo. De esta manera se dejan definidas las identidades trigonométricas básicas.

♦ Identidades de suma y diferencia

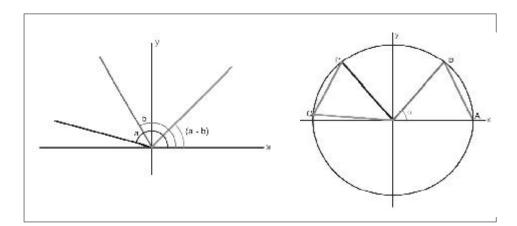
En muchas ocasiones, se puede expresar un ángulo dado, como una suma o una resta de ángulos notables, por ejemplo: 15º es igual a 45º - 30º; 75º es igual a 30º + 45º y así muchos más. Para este tipo de situaciones es que se utilizan las llamadas identidades de suma y diferencia de ángulos.

Iniciemos con: cos(a-b); siendo ayb medidas de angulos y por conveniencia a>b. Entonces:

$$\cos (a - b) = \cos (a) \cdot \cos (b) + \sin (a) \cdot \sin (b)$$

Demostración

Vamos a utilizar como herramienta la geometría del círculo trigonométrico unitario.



Las coordenadas de cada punto son:

$$B(\cos(a-b), \sin(a-b))$$

$$P(x_1, y_1) = (\cos(b), \sin(b))$$

$$Q(x_2, y_2) = (\cos(a), \sin(a))$$

La distancia de $\overline{\,AB}\,$ es igual a la distancia de $\overline{\,PQ}\,$. Por la fórmula de distancia:

$$\begin{split} d\left(AB\right) &= d(PQ) \Rightarrow \sqrt{\left[\cos\left(a-b\right)-1\right]^2 + \left[\sin\left(a-b\right)\right]^2} = \\ \sqrt{\left[\cos\left(a\right) - \cos\left(b\right)\right]^2 + \left[\sin\left(a\right) - \sin\left(b\right)\right]^2} &= \text{elevamos al cuadrado ambos} \\ \text{términos de la ecuación, tenemos:} \\ \left(\cos(a-b)-1\right)^2 + \left(\sin\left(a-b\right)\right)^2 = \left(\cos(a) - \cos(b)\right)^2 + \left(\sin(a)\right) - \sin(b)\right)^2 \end{split}$$

$$(\cos(a-b)-1)^{-2} + (\sin(a-b))^{-2} = (\cos(a) - \cos(b))^{-2} + (\sin(a))^{-2} = (\cos(a) - \cos(b))^{-2}$$

Desarrollando cuadrados:

$$\cos^2(a-b) - 2\cos(a-b) + 1 + \sin^2(a-b) = \cos^2(a) - 2\cos(a)\cos(b)$$

+ $\cos^2(b) + \sin^2(a) - 2\sin(a)\sin(b) + \sin^2(b)$

Agrupamos términos:

$$\left(\cos^{2}(a-b) + \sin^{2}(a-b)\right) - 2\cos(a-b) + 1 = \left(\cos^{2}(a) + \sin^{2}(a)\right) +$$

$$\left(\cos^{2}(b) + \sin^{2}(b)\right) - 2\cos(a)\cos(b) - 2\sin(a)\sin(b); \text{ entonces:}$$

$$1 - 2\cos(a - b) + 1 = 1 + 1 - 2\cos(a)\cos(b) - 2\sin(a)\sin(b)$$
.

Operando:

$$2 - 2 \cos (a - b) = 2 - 2 \cos (a) \cos (b) - 2 \sin (a) \sin (b)$$
.

Simplificando:

$$\cos (a - b) = \cos (a) \cos (b) + \sin (a) \sin (b)$$

Asì queda demostrada la identidad de diferencia de coseno.

Ahora: $\cos (a + b)$; de igual manera que el caso anterior.

$$\cos (a + b) = \cos (a) \cos (b) - \sin (a) \sin (b)$$

Demostrando la diferencia de ángulos para coseno, lo podemos utilizar para otras identidades como cos (a + b). Veámos:

$$\cos (a + b) = \cos (a - (-b)) = \cos (a) \cdot \cos (-b) + \sin (a) \sin (-b)$$

Sabemos que $\cos (-b) = \cos (b)$ y sea $(-b) = -\sin (b)$, luego:
 $\cos (a + b) = \cos (a) \cos (b) - \sin (a) \sin (b)$.

En seguida analizamos la suma y diferencia para seno.

Demostración

Para demostrar esta identidad vamos a utilizar la identidad de suma y diferencia de coseno, la identidad de cofunción y algunas transformaciones sencillas.

Llamamos a (a + b) = w, entonces.

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - w \right) = \text{sen (w) por la identidad de cofunción, ahora:}$$

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right), \text{ pero: }$$

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) - \sin b$$

pero:
$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = \sin (a)$$
, luego:

$$\cos \left(\left(\frac{\pi}{2} - a \right) - b \right) = \sin (a) \cos(b) + \cos (a) \sin (b)$$
. Finalmente como:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right) = \operatorname{sen}(w) = \operatorname{sen}(a+b), \text{ entonces:}$$

$$sen (a+b) = sen (a) cos (b) + cos (a) sen (b)$$

Así queda demostrada la identidad de suma de ángulos para seno.

Sigamos con sen (a-b)

$$sen (a-b) = sen (a) cos(b) - cos(a) sen (b)$$

$$sen (a-b) = sen ((a)+(-b)) = sen (a).cos(-b)+cos(a) sen (-b)$$

pero por identidades pares e impares:

$$cos(-b)=cos(b)$$
 y sen $(-b) = -sen(b)$, luego:
 $sen(a-b) = sen(a)cos(b) - cos(a)sen(b)$

Finalmente veamos la suma y diferencia para tangente.

$$\tan (a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1-\tan(a) \cdot \tan(b)}$$

Demostración:

Como
$$tan(a+b) = \frac{sen(a+b)}{cos(a+b)}$$
 desarrollemos el cociente.

$$\tan (a+b) = \frac{\sin (a) \cos (b) + \cos (a) \sin (b)}{\cos (a) \cos (b) - \sin (a) \sin (b)}$$

dividimos todo por cos (a) cos (b)

$$\tan (a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \frac{\cos(a)\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} - \frac{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)}{\cos(a)\cos(b)}}$$

Simplificando:

$$\tan (a+b) = \frac{\tan(a) \cdot 1 + 1 \cdot \sin(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}$$
 resumiendo:

$$\tan (a+b) = \frac{\tan (a) + \tan (b)}{1 - \tan (a) \cdot \tan (b)}$$

Ahora veamos la resta de dos ángulos para tangente:

$$\tan (a-b) = \frac{\tan (a) - \tan (b)}{1 + \tan (a) \bullet \tan (b)}$$

Queda como ejercicio para que lo desarrollen en pequeño grupo colaborativo.

Ejemplo 1

Hallemos sen
$$\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} = 15^{\circ}$$

Solución: podemos expresar sen $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ como: $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, luego:

$$\operatorname{sen}\left(\begin{array}{c}\pi_{12}'\\\end{array}\right) = \operatorname{sen}\left(\begin{array}{c}\pi_{4}' - \pi_{6}'\\\end{array}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi_{4}'\right) - \cos\left(\pi_{6}'\right) \bullet \cos\left(\pi_{4}'\right) \operatorname{sen}\left(\pi_{6}'\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\begin{array}{c}\pi/12\end{array}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \bullet \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo 2

Calcular:
$$\cos (75^{\circ})$$
 : $...$ $75^{\circ} = 30^{a} + 45^{\circ}$

Solución

$$Cos(75^{\circ}) = cos(30^{\circ} + 45^{\circ}) = cos(30^{\circ}) cos(45^{\circ}) - sen(30^{\circ}) sen(45^{\circ})$$

$$\cos(75^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \bullet \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos (75^{\circ}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo 3

Demostrar que: $\tan (\pi + \sigma) = \tan (\sigma)$

Solución: por identidad de suma para tangente

$$\tan\left(\pi+\sigma\right) = \frac{\tan\left(\pi\right) + \tan\left(\sigma\right)}{1 - \tan\left(\pi\right) \bullet \tan\left(\sigma\right)} = \frac{0 + \tan\left(\sigma\right)}{1 - 0 \bullet \tan\left(\sigma\right)} \text{, entonces:}$$

$$\tan (\pi + \sigma) = \frac{\tan (\sigma)}{1} = \tan (\sigma)$$

Identidades de ángulo doble

Cuando en la suma o diferencia de ángulos, si a = b, entonces se obtienen los que llamamos ángulos dobles, que son herramienta en el análisis del movimiento curvilíneo.

1)
$$sen (2a)=2 sen (a) cos (a)$$

Demostración

Sabemos que sen (a + b) = sen (a) cos (b) + cos (a) sen (b), pero a = b, luego: sen (a + b) = sen (a) cos (a) + cos (a) sen (a)

2)
$$\cos (2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

Demostración

Al igual que en el caso anterior:

$$\cos (a + a) = \cos (a) \cdot \cos (a) - \sin (a) \cdot \sin (a) = \cos^2 (a) - \sin^2 (a)$$

Luego:

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

3)
$$\tan (2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Demostración

Se deja como ejercicio para realizar en pequeño grupo colaborativo.

Identidades de ángulo mitad

En matemáticas, especialmente en cálculo el ángulo mitad es muy utilizado, por esto es pertinente referenciar los ángulos mitad.

De la identidad de ángulo doble, podemos hacer esta demostración.

 $\cos (2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$; pero $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$ por la identidad fundamental, luego:

$$\cos (2a) = -1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2 \sin^2(a)$$
, despejamos $\sin^2(a)$

$$\cos (2a)-1=-2\sin^2(a) \Rightarrow \sin^2(a) = \frac{1-\cos (2a)}{2}$$

Hacemos un cambio así: $a = \frac{x}{2}$ y reemplazamos en la ecuación:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{1-\cos(x)}{2}, \text{ por consiguiente:}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\left(x\right)}{2}}$$

$$\left(\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}} \quad y \quad \tan\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sin(a)}{1+\cos(a)}\right)$$

Demostración

La demostración de las dos anteriores identidades, se dejan como ejercicio para resolver en pequeño grupo colaborativo o con asistencia del docente.

Identidad de producto-suma

Vamos a referenciar este tipo de identidades; los demostraciones se dejan como investigación, para que lo resuelvan individualmente y luego socializarlo con los compañeros y el docente.

1. sen (a) • cos (b) =
$$\frac{1}{2}$$
 [sen (a+b)+sen (a-b)]

2. sen (a) • sen (b) =
$$\frac{1}{2}$$
 [cos (a-b)-cos (a-b)]

3.
$$\cos (a) \cdot \sin (b) = \frac{1}{2} [\sin (a+b) - \sin (a-b)]$$

4.
$$\cos (a) \cdot \cos (b) = \frac{1}{2} [\cos (a+b) + \cos (a-b)]$$

Identidades de suma-producto

Al igual que en el caso anterior, las demostraciones se dejan como investigación.

1. sen (a) + sen (b) =
$$2 \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

2. sen (a) – sen (b) =
$$2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
• sen $\left(\frac{a-b}{2}\right)$

3.
$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

3.
$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Demostración de identidades trigonométricas

En el inicio de este capítulo se hizo referencia a las identidades básicas, en este aparte se va a trabajar en la demostración de otras identidades, utilizando los principios matemáticos que se conocen y las identidades básicas.

Como una identidad es una igualdad, la demostración se centra precisamente en demostrar dicha igualdad.

El proceso se puede hacer de tres maneras distintas, como la igualdad tiene dos términos; digamos:

$$a = b$$

Entonces, podemos escoger uno de los siguientes caminos:

- A partir del primer término, con el uso del álgebra y las identidades conocidas, obtener el segundo término.
- 2. A partir del segundo término, obtener el primero.
- 3. Hacer transformaciones simultáneamente a los dos términos de la igualdad y llegar a una equivalencia.

Por experiencia y facilidad, es aconsejable utilizar la técnica 1 ó la 2, dando prioridad al término más complejo; es decir, el que presente más términos, partiendo de este para llegar al otro término.

Ejemplo 1

Demostrar la identidad: $\cos(x) [\sec(x) - \cos(x)] = \sin^2(x)$

Solución

$$\cos(x)\left[\sec(x) - \cos(x)\right] = \cos(x)\left[\frac{1}{\cos(x)} - \cos(x)\right] = \cos(x)\left[\frac{1 - \cos^2(x)}{\cos(x)}\right]$$

$$\cos(x) \left[\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} \right] = \sin^2(x)$$

Así queda demostrada la igualdad.

En cada paso se hizo cambio usando identidades conocidas, el trabajo que debe hacer estimado estudiante, es que identifique que funciones fueron reemplazadas y por cuáles, pero verificar que en el proceso es correcta.

UNAD

Demostrar que
$$\frac{\tan(x)}{\sec(x)} = \sin(x)$$

Solución

Como es obvio partimos del primer término:

$$\frac{\tan(x)}{\sec(x)} = \frac{\sin(x)/\cos(x)}{1/\cos(x)} = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{\cos(x)} = \sin(x)$$

Ejemplo 3

Reducir la siguiente expresión en términos solo de la función seno.

$$\frac{\tan(x) + \sec(x) \bullet \tan(x)}{1 + \sec(x)}$$

Solución

Por medio de las identidades básicas y las conocidas, podemos hacer la transformación.

$$\frac{\tan\left(x\right)+\sec\left(x\right)\bullet\tan\left(x\right)}{1+\sec\left(x\right)} = \frac{\frac{\mathrm{sen}\left(x\right)}{\cos\left(x\right)} + \frac{1}{\cos\left(x\right)}}{1+\frac{1}{\cos\left(x\right)}} = \frac{\frac{\mathrm{sen}\left(x\right)}{\cos\left(x\right)} + \frac{\mathrm{sen}\left(x\right)}{\cos\left(x\right)} + \frac{\mathrm{sen}\left(x\right)}{\cos^{2}\left(x\right)}}{1+\frac{1}{\cos\left(x\right)}}$$

por la identidad fundamental $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ entonces:

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}(x)}} + \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}^{2}(x)} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)(1-\operatorname{sen}^{2}(x)) + \operatorname{sen}(x)\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}(x)}}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}(x)} \cdot \left(1-\operatorname{sen}^{2}(x)\right)}}{\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}(x)} + 1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}(x)}}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)}\left(\operatorname{sen}\left(x\right)\left(1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)+\operatorname{sen}\left(x\right)\bullet\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)}\right)\right)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)}\left(1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)\right)\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)}+1\right)}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left(x\right)\left(1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)\right)+\left(\operatorname{sen}\left(x\right)\sqrt{1.\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)}\right)}{\left(1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)\right)\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)}+1\right)}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left(x\right)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)+1}}+\frac{\operatorname{sen}\left(x\right)\sqrt{1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)}}{\left(1-\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)\right)\!\left(\sqrt{1\operatorname{sen}^{2}\left(x\right)}\right.+1}\right)$$

Ejemplo 4

Demostrar la identidad:

$$[\tan(x) - \sec(x)]^2 = \frac{1 - \sec(x)}{1 + \sec(x)}$$

Solución

Para este ejemplo, vamos a aplicar la tercera técnica; es decir, partimos de los dos términos para llegar a una equivalencia.

$$\left[\tan(x) - \sec(x) \right]^{2} \qquad \frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)}$$

$$\tan^{2}(x) - 2\tan(x) \sec(x) + \sec^{2}(x)$$

$$\frac{\sin^{2}(x)}{\cos^{2}(x)} - 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} + \frac{1}{\cos^{2}(x)} \qquad \frac{\left(1 - \sin(x) \left(1 - \sin(x)\right)\right)}{\left(1 + \sin(x)\right)\left(1 - \sin(x)\right)}$$

$$\frac{\sin^{2}(x)}{\cos^{2}(x)} - \frac{2\sin(x)}{\cos^{2}(x)} + \frac{1}{\cos^{2}(x)} \qquad \frac{1 - \sin(x) - \sin(x) + \sin^{2}(x)}{1 - \sin^{2}(x)}$$

$$\frac{\sin^{2}(x) - 2\sin(x) + 1}{\cos^{2}(x)} \qquad \frac{1 - 2\sin(x) + \sin^{2}(x)}{\cos^{2}(x)}$$

$$\frac{\sin^{2}(x) - 2\sin(x) + 1}{\cos^{2}(x)} \qquad \frac{1 - 2\sin(x) + \sin^{2}(x)}{\cos^{2}(x)}$$

Como podemos ver los dos puntos de la ecuación, llegan a una equivalencia.

Ejemplo 5

Demostrar

$$\frac{\cos^3(x) - \sin^3(x)}{\cos(x) - \sin(x)} = 1 + \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Solución

Por la estructura de la identidad, es conveniente partir del término primero para llegar al segundo; veamos:

$$\frac{\cos^{3}(x) - \sin^{3}(x)}{\cos(x) - \sin(x)} = \frac{(\cos(x) - \sin(x))(\cos^{2}(x) + \cos(x)\sin(x) + \sin^{2}(x)}{(\cos(x) - \sin(x))}$$

Simplificando:

 $\cos^2(x) + \sin^2(x) + \cos(x) \cdot \sin(x)$ por la identidad fundamental: $1 + \cos(x) \sin(x)$. Que corresponde al segundo término de la identidad.

Reflexión

Para demostrar identidades se requiere algunos principios: conocer las identidades básicas de suma y diferencia y las demás analizadas en este capítulo. Algo de ingenio para saber de que parte iniciar y a dónde se quiere llegar y lo más importante, bastantes ejercicios que permitan adquirir destreza para hacer este tipo de demostraciones. Como se dice en el lenguaje matemático popular; pedaliar, pedaliar... haciendo referencia a que pedaliando se llega a la meta.

Para los ejercicios propuestos a continuación, reducir a una sola función las expresiones dadas.

EJERCICIOS: IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Para los ejercicios propuestos a continuación, reducir a una sola función las expresiones dadas.

1.
$$\frac{\tan(x) + \sec(x) \cdot \tan(x)}{1 + \sec(x)}$$

Rta. tan(x)

$$2. \qquad \frac{\csc^2(x)-1}{\cot^2(x)}$$

Rta. 1

3.
$$\frac{\tan(A) + \cot(A)}{\csc(A)}$$

Rta. sec (A)

4.
$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} + \frac{1+\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Rta. 2 csc (x)

Demostrar las siguientes identidades.

5.
$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1-\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sec}(x) = \tan(x)$$

6.
$$\left[\operatorname{sen}(\sigma) + \cos(\sigma)\right]^2 + \left[\operatorname{sen}(\sigma) - \cos(\sigma)\right]^2 = 2$$

7.
$$\operatorname{sen}(x+180^{\circ}) = -\operatorname{sen}(x)$$

8.
$$\tan (x+45^{\circ}) = \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}$$

9.
$$\frac{\sin^4(x) - \cos^4(x)}{1 - 2\cos^2(x)} = 1$$

10.
$$\cos \left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos (t) + \sin (t)\right)$$

11.
$$\frac{\cos(7\sigma) + (\cos(\sigma))}{\sin(7\sigma) + \sin(\sigma)} = \cot(4\sigma)$$

12.
$$\frac{\tan(x-y)}{\tan(x+y)} = \frac{\sin(2x) - \sin(2y)}{\sin(2x) + \sin(2y)}$$

UNAD



Anteriormente se decía que las identidades son igualdades que se cumplen para cualquier ángulo. existen unas identidades muy particulares, ya que solo se cumplen para ciertos ángulos, dichas identidades son llamadas ecuaciones trigonométricas.

Definición

Las ecuaciones trigonométricas, son identidades que satisfacen solo ciertos ángulos. La solución se expresa en medidas de ángulos, puede ser grados o radianes.

La resolución de ecuaciones trigonométricas, requiere un buen manejo de las funciones trigonométricas inversas; además, de los principios de álgebra y trigonometría, por otro lado, es recomendable reducir la ecuación a una función para poderla resolver, generalmente se reducen a seno o coseno.

Es importante aclarar que si no se dice otra cosa, la solución para nuestro caso se dará solo para la circunferencia unidad de $0 \le x \le 2\pi$. Algunos autores acostumbran a dar la solución general para todo círculo, recordemos que las funciones trigonométricas son periódicas, luego se repiten cada x intervalo.

Ejemplo 1

Resolver: $sen(x) = \frac{1}{2}$

Solución

Como debemos despejar el ángulo, es decir, x; entoncs aplicamos la función inversa. $sen^{-1}(sen(x)) = sen^{-1}(\frac{1}{2}) \Rightarrow x = sen^{-1}(\frac{1}{2})$. Lo que nos indica que

debemos buscar en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$, en donde el seno vale 1/2. Evidentemente con algo de trabajo se puede detectar que el ángulo es $30^{\circ} \left(\frac{\pi}{6} \right)$. Pero el seno es positivo en el I y II cuadrante, luego nos faltaría la solución en el II cuadrante, con el concepto de reducción de ángulo al primer cuadrante (estudiado anteriormente), podemos saber que se trata de $150^{\circ} \left(\frac{5\pi}{6} \right)$.

Respuesta:
$$x = \frac{\pi}{6}$$
 y $\frac{5\pi}{6}$

Ejemplo 2

Hallar la solución de:

$$\cos\left(\mathbf{x}\right) = -\frac{1}{2}$$

Solución

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \implies \cos^{-1}(\cos(x)) = \cos^{-1}(-\frac{1}{2}) \implies x = \cos^{-1}(-\frac{1}{2})$$

Debemos hallar el o los ángulos donde el coseno vale $-\frac{1}{2}$, el coseno es negativo en el II y III cuadrante, luego habrá una solución en cada uno de ellos.

Sabemos que el coseno vale $\frac{1}{2}$ en 60° para el primer cuadrante, para el segundo por reducción de ángulo es 120° $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ en el II cuadrante y 240° $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ en el III cuadrante.

Respuesta:
$$\mathbf{x} = \frac{2\pi}{3} \text{ y } \frac{4\pi}{3}$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación:

$$sen(x) - cos(x) = 0$$

Recordemos que la recomendación es trabajar con una sola función, luego: $sen(x) - cos(x) = 0 \Rightarrow sen(x) = cos(x)$ dividimos por cos(x), entonces:

$$\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} \implies \tan(x) = 1$$
. Ya tenemos la ecuación con una sola función.

Ahora despejamos x, como:

$$\tan (x) = 1 \Rightarrow \tan^{-1} (\tan (x)) = \tan^{-1} (1) \Rightarrow x = \tan^{-1} (1)$$

Debemos identificar en donde la tangente vale 1. Recordemos que la tangente es positiva en el I y III cuadrantes. La tangente vale 1 en 45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$, también en $225^{\circ}\left(5\frac{\pi}{4}\right)$.

Respuesta:
$$x = \pi/4$$
 y $5\pi/4$

Comprobación

Al igual que en las ecuaciones algebráicas, en las ecuaciones trigonométricas también se pueden hacer las comprobaciones del caso.

$$x = \frac{\pi}{4}$$
 sen $\frac{\pi}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, luego la solución es verdadera.

$$x = \frac{5\pi}{4}$$
: sen $\left(\frac{5\pi}{4}\right) \bullet \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$, también la solución

es correcta.

Ejemplo 4

Hallar la solución de la ecuación:

$$\tan^5(x) - 9\tan(x) = 0$$

Solución

Factoricemos: $\tan (x) \left[\tan^4 (x) - 9 \right] = 0$, por el teorema del producto nulo:

 $\tan(x)=0$ ó $\tan^4(x)-9=0$, desarrollemos cada uno:

$$\tan(x)=0 \ \Rightarrow \ \tan^{-1} \ (\tan(x))=\mathrm{Tan}^{-1} \ (0) \ \Rightarrow x=\mathrm{Tan}^{-1} \ (0)$$

la tangente vale 0 en 0 y π .

Ahora: $\tan^4(x) - 9 = 0 \Rightarrow \tan^4(x) = 9$ extraemos raíz cuadrada.

 $tan^{2}(x) = 3$, de nuevo raíz cuadrada:

 $tan(x) = \pm \sqrt{3}$ Ahora función inversa para despejar x.

$$x = Tan^{-2} \left(\pm \sqrt{3} \right)$$

La tangente vale $\sqrt{3}$ en $\frac{\pi}{3}$. Pero como tiene signo positivo y negativo habrán cuatro ángulos, dos del valor positivo y dos del valor negativo.

Para
$$+\sqrt{3}$$
: $x = \frac{\pi}{3}$ y $\frac{7\pi}{6}$

Para
$$-\sqrt{3}$$
: $x = 2\pi/3$ y $5\pi/3$

Respuesta: x = 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π , $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación:

$$Sec(x) = tan(x) = cos(x)$$

Solución

Como se dijo en el inicio del estudio de las ecuaciones, lo primero es reducir a una sola función trigonométrica, para luego poder hallar la solución.

$$\sec(x) - \tan(x) = \cos(x) \implies \frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \cos(x) \implies \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)} = \cos(x)$$

 $1-\text{sen}(x) = \cos^2(x) \text{ como} : \cos^2(x) = 1-\text{sen}^2(x)$, reemplazamos:

$$1 - \text{sen } (x) = 1 - \text{sen } ^2(x) \Rightarrow \text{sen } ^2(x) - \text{sen } (x) = 0$$

Como ya tenemos la ecuación expresada como una sola función; resolvemos:

$$\operatorname{sen}^{2}(x) - \operatorname{sen}(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) [\operatorname{sen}(x) - 1] = 0$$
, por producto nulo,

sen (x) = 0 ó sen (x)-1=0: despejamos x en cada una.

sen
$$(x) = 0 \Rightarrow x = \text{sen}^{-1}(0)$$
: $x = 0, \pi$

sen
$$(x)-1 = 0 \Rightarrow \text{sen}(x) = 1 \Rightarrow x = \text{sen}^{-1}(1)$$
: $x = \frac{\pi}{2}$, se rechaza ¿por qué? Luego: la solución total es: $x = 0$, π

Ejemplo 6

Resolver la siguiente ecuación:

$$\cos^2(2x) - \sin^2(2x) = 0$$

Solución

Expresemosla como una sola función, veámos:

$$\cos^2(2x) = \sin^2(2x)$$
, dividimos por $\cos^2(2x)$.

$$\frac{\cos^2(2x)}{\cos^2(2x)} = \frac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)} \Rightarrow \tan^2(2x) = 1 \Rightarrow \tan(2x) = \pm 1$$

Utilizamos la fórmula de ángulo doble para tangente.

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} \Rightarrow \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} = 1, \text{ luego.}$$

 $2\tan(x) = (1-\tan^2(x)) \Rightarrow 2\tan(x) = 1-\tan^2(x)$, reorganizando:

 $\tan^2(x)+2\tan(x)-1=0$. Por la cuadrática:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \ (1) \ (-1)}}{2} \ = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{1} \implies x_1 = -1 + \sqrt{2}$$
 $y x_2 = -1 - \sqrt{2}$

Debemos identificar en donde la tangente toma estos valores.

 $x_1 = Tan^{-1} \left(-1 + \sqrt{2}\right) \Rightarrow x = 22,5^{\circ} = \frac{\pi}{8}$ en el primer cuadrante, pero también la tangente es positiva en el tercer cuadrante, el ángulo es:

$$180 + 22.5 = 202.5^{\circ} = \frac{9\pi}{8}$$
.

Ahora:

$$x=Tan^{-1}\,\left(\,-1-\sqrt{2}\,\,\right) \Rightarrow = x = -67, 5^{o} \quad \text{que es equivalente en ángulo positivo es:}$$

 $292.5^{\circ} = 13\pi/8$. En el cuarto cuadrante, pero nos falta en el segundo cuadrante donde también la tangente es negativa, en este el ángulo será:

$$180^{\circ} - 67.5 = 112.5^{\circ} = \frac{5\pi}{8}$$
 Luego la solución general:

$$\frac{\pi}{8}$$
, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$ y $\frac{13\pi}{8}$.

Estimado estudiante, compruebe la solución.

Podemos hacer una reflexión sobre la solución de ecuaciones trigonométricas. Es importante conocer las identidades básicas, de ángulo suma y diferencia, de ángulo doble y ángulo mitad; además de las herramientas algebráicas, para resolverlas adecuadamente, pero también una buena gama de ejercicios permitirán adquirir destreza, como se dijo antes: pedaliando, pedaliando, se llega lejos.

EJERCICIOS: ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas; para la circunferencia unidad.

1.
$$\cos(x) = \sqrt{3}/2$$

Rta.
$$x = 30^{\circ} y 330^{\circ}$$

2.
$$\operatorname{sen}^{2}(x) - 1 = 0$$

Rta.
$$x = \frac{\pi}{2}$$
 y $\frac{3\pi}{2}$

3.
$$\sec (\sigma) - 2\sqrt{\frac{3}{3}} = 0$$

Rta.
$$\sigma = \frac{\pi}{6} \text{ y } \frac{11\pi}{6}$$

4.
$$\cos(4\sigma) = \sin(2\sigma)$$

$$\cos (4\sigma) = \text{sen } (2\sigma)$$
 Rta. $\sigma = 15^{\circ}, 75^{\circ} \text{ y } 135^{\circ}$

5.
$$\tan^2(\alpha) + \tan(\alpha) = 0$$
 Rta. $\alpha = 3\pi/4$ y $\alpha = \pi$

Rta.
$$\alpha = 3\pi/4$$
 y $\alpha = \pi$

6.
$$2 \sin^2(\alpha) + \sin(\alpha) - 1 = 0$$

$$2 \operatorname{sen}^{2}(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) - 1 = 0$$
 Rta. $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

7.
$$\operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x) = 0$$

Rta.
$$x = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2$$

8.
$$2 \operatorname{sen} \left(\frac{3\sigma}{2} \right) \cos \left(\frac{\sigma}{2} \right) = \operatorname{sen} (\sigma) \operatorname{Rta.} \sigma = 0^{\circ}, 90^{\circ}, 180^{\circ}, 270^{\circ}$$

$$9. \qquad \sqrt{\frac{1+2\,\cos(x)}{2}} = 1$$

Rta.
$$x = \frac{\pi}{3} y \frac{4\pi}{3}$$

10.
$$2 \operatorname{sen} (\alpha) + 3 \sqrt{\operatorname{sen} (\alpha)} = 0$$
 Rta. $\alpha = \pi$

Rta.
$$\alpha = \pi$$



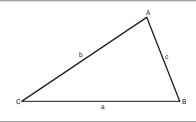
NÁLISIS DE TRIÁNGULOS NO-RECTÁNGULOS

En los apuntes anteriores, hemos analizado lo referente al triàngulo rectàngulo, pero existen muchas situaciones que se describen con triángulos que no son rectángulos, es decir, **triángulos oblicuos**. El trabajo en este aparte se centrará en analizar los triángulos no rectángulos y sus aplicaciones.

Teorema de seno

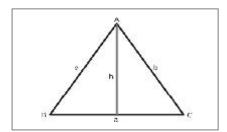
Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos A, B, C, respectivamente, se cumple:

$$\frac{\text{sen A}}{\text{a}} = \frac{\text{sen B}}{\text{b}} = \frac{\text{sen C}}{\text{c}}$$



Demostración

Para hacer la demostración vamos a utilizar un triángulo acutángulo, pero el teorema se puede aplicar para cualquier triángulo.



Según la gráfica:

sen
$$B = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c$$
 sen B similarmen te

$$\operatorname{sen} C = \frac{h}{b} \implies h = b \operatorname{sen} C.$$
 Igualando

c sen B = b sen C reorganizando :
$$\frac{\text{sen B}}{\text{b}} = \frac{\text{sen C}}{\text{c}}$$

Similarmente se puede probar que:

$$\frac{\text{sen A}}{\text{a}} = \frac{\text{sen B}}{\text{b}}$$
 por consiguien te: $\frac{\text{sen A}}{\text{a}} = \frac{\text{sen B}}{\text{b}} = \frac{\text{sen C}}{\text{c}}$

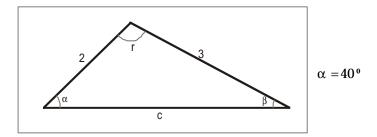
De esta manera podemos hallar los lados y los ángulos de cualquier triángulo, aunque esta metodología es utilizada para triángulos no rectángulos.

Para esto, podemos encontrar varios casos:

- 1. LAA o ALA: conocen un lado y dos ángulos.
- 2. LLA: conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- 3. LAL: conocen dos lados y el ángulo entre ellos.
- 4. LLL: conocen los tres lados.

Ejemplo 1

Hallar todos los lados y todos los ángulos del triángulo descrito a continuación:



Solución

Corresponde al caso: LLA. Entonces:

$$\frac{sen \, \left(\, 40^{\scriptscriptstyle 0}\right)}{3} \,\, = \frac{sen \, (\, \beta\,)}{2} \,\, \Rightarrow \,\, sen \, \left(\, \beta\,\right) = \frac{2 \, sen \, (\, 40^{\scriptscriptstyle 0})}{3} = \frac{1{,}285}{3} = 0{,}4283...$$

Luego: sen (β) = 0,4283: debemos despejar β :

$$\mbox{sen}^{-1}$$
 (sen (β)) = \mbox{sen}^{-1} (0,4283) $\Rightarrow \beta = \mbox{sen}^{-1}$ (0,4283) \cong 5,36°

Así podemos hallar r.

$$\alpha + \beta + r = 180^{\circ} \implies r = 180^{\circ} - (40^{\circ} + 25{,}36^{\circ}) = 114{,}64^{\circ}$$

En seguida podemos hallar c, veamos:

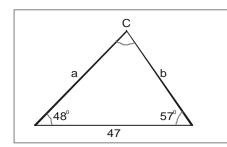
$$\frac{\text{sen (r)}}{\text{c}} = \frac{\text{sen (\alpha)}}{3} \Rightarrow \text{c} = \frac{3 \text{sen (r)}}{\text{sen (r)}} = \frac{3 \text{-sen (114,64°)}}{\text{sen (40°)}} \quad \text{entonces}$$

$$\text{c} = \frac{2,7268}{0.6428} = 4,24$$

Ejemplo 2

En un triángulo dos de los ángulos miden 48° y 57°; el lado que está entre ellos mide 47 cm. Hallar los lados restantes.

Solución



$$C=180^{\circ} - (48^{\circ} + 57^{\circ}) = 75^{\circ}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(A)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(C)}{c} \Rightarrow a = \frac{\operatorname{csen}(A)}{\operatorname{sen}(C)}$$

reemplazando:

$$a = \frac{47 \,\text{cm x sen } (57^\circ)}{\text{sen } (75^\circ)} = \frac{39,417}{0,966}$$

a = 40,80 cm.

Hallemos ahora b; aplicamos el mismo teorema:

$$\frac{\text{sen (B)}}{\text{b}} = \frac{\text{sen (C)}}{\text{c}} \implies \text{b} = \frac{\text{c sen (B)}}{\text{sen (C)}} \implies \text{b} = \frac{47 \text{ x sen (48^\circ)}}{\text{sen (75^\circ)}}$$

$$\text{b} = \frac{34,927}{0.966} = 36,16 \text{ cm}$$

Teorema de coseno

Existen situaciones donde el teorema del seno no se puede aplicar de forma directa, en casos como tener dos lados y el ángulo entre ellos o cuando se tienen los tres lados. Para estos casos se aplica la llamada ley del coseno.

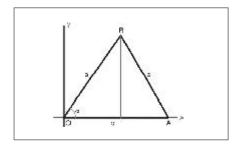
Sea un triángulo cuyos lados son a, b, c y ángulos A, B, C, respectivamente opuestos, se cumple:

UNAD

$$a2 = b2 + c2 = 2bc \cos A$$

$$b2 = a2 + c2 - 2ac \cos B$$

$$c2 = a2 + b2 - 2ab \cos C$$



La demostración ha haremos con un triángulo, obtusángulo pues se puede hacer con cualquiera. Las coordenadas de cada vértice.

$$B(x,y) = (a cos(\alpha), a sen(\alpha))$$

Por medio de la ecuación de distancia euclidia, podemos hallar c, veamos:

$$c^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Pero: $x_2 - x_1 = (b - a\cos(\alpha))$ y $y_2 - y_1 = (0 - a\sin(\alpha))$, luego:

$$c^2 = (b - a\cos(\alpha))^2 + (0 - a \sin(\alpha))^2$$

$$c^2 = b^2 - 2ab \cos(\alpha) + a^2 \cos^2(\alpha) + a^2 \sin^2(\alpha)$$

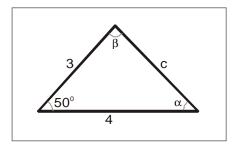
 $c^2 = a^2 (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) + b^2 - 2ab \cos(\alpha)$ por la identidad fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$$

La demostración de $\ b^2\ y\ c^2$; se hace de forma similar; el estudiante debe hacer las dos demostraciones faltantes y compartidas con los compañeros y el tutor.

Ejemplo 1

Del triángulo propuesto a continuación determinar sus lados y ángulos.



Solución

Calculamos c:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

$$c^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos(50^\circ) = 9 + 16 - 24\cos(50^\circ)$$

$$c^2 = 25 - 15,4269 = 9.5731$$

$$c = 3.094$$

Ahora hallemos el ángulo α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$
, despejamos $\cos(\alpha)$:

$$a^{2}-b^{2}-c^{2} = -2bc \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{a^{2}-b^{2}-c^{2}}{-2bc}$$

$$\cos (\alpha) = \frac{3^2 - 4^2 - (3.094)^2}{-2 (4) (3.099)} = \frac{9 - 16 - 9.57}{-24,752} = \frac{-16.57}{-24,752}$$

 $cos(\alpha) = 0,6694$. Para hallar el ángulo, aplicamos la inversa:

$$\cos^{-1}(\cos(\alpha)) = \cos^{-1}(0.6694) \Rightarrow \alpha = 47.98^{\circ}$$

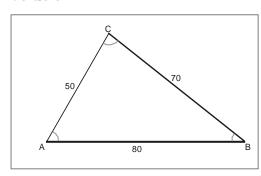
Por último calculamos B:

$$B=180^{\circ}-(50^{\circ}+47{,}98)=180^{\circ}-97{,}98^{\circ}=82{,}02^{\circ}$$

Ejemplo 2

Dado el triángulo T, cuyos lados miden: a= 80cm; b= 50cm y c=70cm. Hallar los ángulos de dicho triángulo.

Solución



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A)$$

despejamos $\cos(A)$, luego:

$$\cos (A) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

$$\cos (A) = \frac{(70)^2 - (50)^2 - (80)^2}{-2(50)(80)}$$

$$\cos (A) = \frac{4.900 - 2.500 - 6.400}{-8.000}$$

$$\cos\left(A\right) = \frac{-4.000}{-8.000} = 0.5$$

Despejamos A;
$$\cos^{-1} (\cos (A)) = \cos^{-1} (0.5)$$

 $A = \cos^{-1} (0.5) = 60^{\circ}$

Para el ángulo B:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(B),$$

$$\cos{(B)} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{(50)^2 - (70)^2 - (80)^2}{-2(70)(80)} = \frac{2.500 - 4.900 - 6.400}{-11.200}$$

$$\cos\left(\mathrm{B}\right) = \frac{-8.800}{-11.200} = 0,7857$$

$$B = \cos^{-1} (0.7857) = 38.21^{\circ}$$

Para hallar C, por teoría de triángulos sabemos que A + B + C = 180°, luego:

$$C = 180^{\circ} - (60^{\circ} + 38,21^{\circ}) = 180^{\circ} - 98,21^{\circ}$$

$$C = 81,79^{\circ}$$

Problemas de aplicación

Para abordar problemas con triángulos no rectángulos, ya tenemos todos los principios, teorías y demás, solo falta recomendar:

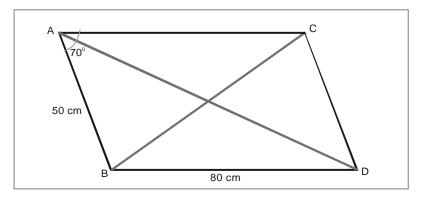
- a. Leer el problema las veces que sean necesarias, para comprenderlo.
- b. Hacer en lo posible una gráfica que explique el fenómeno.
- c. Aplicar el teorema adecuado, según las condiciones del problema.
- d. Hacer los cálculos matemáticos de manera correcta, para obtener lo que se requiere.

Ejemplo 1

Hallar la longitud de las diagonales de un paralelogramao, si sus lados miden 50 cm y 80 cm, además, uno de sus ángulos mide 70°.

Solución

Asumido el punto ${\boldsymbol a}$, vamos al ${\boldsymbol b}$, la gráfica explicativa.



Calculamos el lado BC, entonces:

$$(BC)^2 = (50)^2 + (80)^2 - 2(50)(80) \cos (A)$$
 $(BC)^2 = 2.500 + 6.400 - 8.000 \cos (70^\circ) = 8.900 - 2.736,16$
 $(BC)^2 = 6.163,84 \Rightarrow BC = 78,51cm$

Ahora calculamos AD, pero necesitamos el ángulo B ó C.

$$B = 180^{\circ} - 70^{\circ} = 110^{\circ}$$
.

$$(AD)^2 = (50)^2 + (80)^2 - 2(50)(80)\cos(B) = 2.500 + 6.400 - 8.000\cos(110^\circ)$$

$$(AD)^2 = 8.900 + 2736,16 = 11.636,16 \text{cm}^2$$

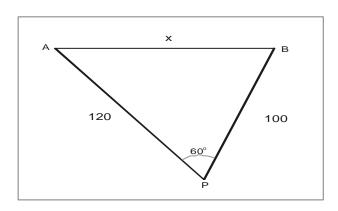
$$AD = 107,87 cm$$

Así quedan determinadas las longitudes de las dos diagonales del paralelogramo.

Ejemplo 2

Un topógrafo quiere determinar la distancia entre dos casas A y B. Del punto de observación el ángulo entre las dos casas y éste es de 60° . La distancia del punto de observación a la casa A es de 120m y a la casa B es de 100m. ¿Qué distancia separa las dos casas?

Solución



La incógnita es x.

$$x^2 = (120)^2 + (100)^2 - 2(120)(100)\cos(60^\circ)$$

Por el teorema del coseno

$$x^2 = 14.400 + 10.000 - 24.000 \cos(60^\circ)$$

$$x^2 = 24.000 - 12.000 = 12.400$$

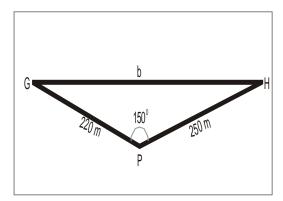
$$x = 111,35 \text{ m}.$$

Las casas se separan 111,35 m.

Ejemplo 3

Un golfista golpea la pelota y la desplaza 220 m en línea recta, la pelota queda a 250 m del hoyo. El ángulo que se forma en el punto donde queda la pelota con la ubicación del golfista y el hoyo es de 150°. ¿Cuál es la distancia del golfista al hoyo?

Solución



G = ubicación del golfista

H = Ubicación del hoyo

P = punto donde queda la pelota

a = 220 m

c = 250 m

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(B)$$

$$b^2 = (220)^2 + (250)^2 - 2(220)(250) \cos(150^\circ)$$

$$b^2 = 110.900 + 95262,794 = 206162,79$$

 $b = 454,05 \,\mathrm{m}$

El golfista está a 454,05 m del hoyo.

Ejemplo 4

La puerta del baúl de un auto tiene 1,10 m de largo, el soporte que sostiene la puerta mide 0,65 m cuando está completamente extendida y en posición vertical, quedando un espacio de apertura de 0,85m. ¿Cuál será la longitud desde la base del baúl al punto donde esta fijado el soporte y qué ángulo de apertura presentará el baúl?

UNAD

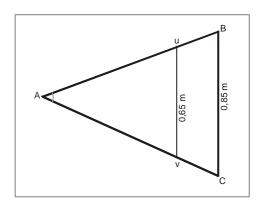
Solución

AB = Longitud de la puertadel baúl = 1,10 m

UV = longitud del soporte extendido.

BC = espacio de apertura = 0,85 cm.

A = ángulo de apertura



Por triángulos semejantes:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{UV}{AU} \Rightarrow \frac{0.85}{1.10} = \frac{0.65}{AU}, \ despejamos \ AU:$$

$$AU = \frac{1,10 \times 0,65}{0.85} = 0,84$$

Ahora calculamos el ángulo A:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos(A)$$

Reemplazando valores:

$$(0.85)^2 = (1.10)^2 + (1.10)^2 - 2(1.10)(1.10)\cos(A)$$

$$0.7225 = 1.21 + 1.21 - 2.42 \cos(A)$$
 luego:

$$\cos(A) = \frac{-1,6975}{-2,42} = 0,7014$$

$$A = \cos^{-1} (0.7014) \Rightarrow A = 45.46^{\circ}$$

EJERCICIOS: PROBLEMAS DE TRIÁNGULOS NO-RECTÁNGULOS

1. Una circunferencia tiene un radio de 25 cm, suntendido por el ángulo central de 36º. ¿Cuál será la longitud del arco de la circunferencia?

2. Una persona se encuentra a 120 metros de la base de una torre inclinada, el ángulo de elevación desde su posición a la punta de la torre es de 24º, a su verz la torre forma un ángulo con el suelo de 72º. ¿Cuál es la altura de la torre?

Rta.
$$h = 49,08$$
 metros.

3. Asumiendo que las órbitas de mercurio y tierra son circulares y se encuentran en el mismo plano. La tierra se encuentra a 9.3×10^7 millas del sol y mercurio se encuentra a 3.6×10^7 millas del sol. Si mercurio se ve desde la tierra y el ángulo entre mercurio, tierra y sol es de 8.35° ; seindo la tierra el vértice. ¿Qué tan lejos esta la tierra de mercurio?

Rta: D =
$$1,25 \times 10^8 \text{ millas}$$

4. Las casas de José y Alberto están a los lados opuestos de un rio, un ingeniero debe hacer un puente que comunique las dos casas, para esto ubica a 100 metros de la casa de José por la misma orilla el teodolito, obteniendo los siguientes datos: el ángulo entre la casa de José, Alberto y el teodolito es de 50°, siendo ésto último el vértice. El ángulo enter la casa de José, Alberto y el teodolito es de 40°, siendo la casa de José el vértice. ¡Cuál será la longitud del puente entre las casas?

Rta.
$$L = 76,604$$
 metros

5. Para medir la altura de una montaña, un topográfo determina que el ángulo de elevación desde su ubicación a lapunta de la montaña es de 25°, luego camina 100 metros y mide el nuevo ángulo de elevación el cual fue de 15°. ¿Cuál será la longitud de la punta de la montaña hasta la ubicación inicial del topógrafo?

6. Dos autos parten de una intersección de dos conectores cuya separación es de 80° , uno viaja a 80 km/hr y el otro a 100 km/hr. Al cabo de 45 minutos, ¿qué tan separados estarán los autos?

Rta. L = 87,53 km



Cuando hablamos de trigonometría hacemos referencia al estudio del triángulo, la hipernometría la estamos referenciando al estudio de las hipérbolas, específicamente a las funciones hiperbólicas. Ya se han estudiado las funciones hiperbólicas, en este aparte se analizarán algunos aspectos referentes a las identidades hiperbólicas.

Identidades hiperbólicas

De manera análoga a las trigonométricas, las hiperbólicas presentan identidades básicas y específicas.

Identidad fundamental: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Pitagóricas: $\tanh^2(x) + \sec h^2(x) = 1$

 $\coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) = 1$

Cociente: $\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cos h(x)}$

 $\coth(x) = \frac{\cos h(x)}{\operatorname{sen} h(x)}$

Recíprocas: $\cosh(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$

 $\operatorname{sen} h(x) = \frac{1}{\operatorname{csc} h(x)}$

Suma y diferencia:

 $sen h(x \pm y) = senh(x) cosh(y) \pm cosh(x) \bullet senh(y)$

 $\cos h(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \operatorname{sen} h(x) \bullet \operatorname{sen} h(y)$

Ángulo doble:

$$senh^{2}(x) = \frac{cos h(2x) - 1}{2}$$

$$cosh^{2}(x) = \frac{1 + cos h(2x)}{2}$$

$$sen h(2x) = 2 sen h(x) cos h(x)$$

$$cos h(2x) = cos h^{2}(x) + sen h^{2}(x)$$

Autoevaluación Unidad 1

1. Resolver la ecuación:

$$\frac{x-3}{2(x-1)} = \frac{1}{6} - \frac{1-4x}{3(x-1)}$$

2. Hallar la solución para el siguiente sistema; utilice la metodología de eliminación por cualquiera de sus métodos.

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -1$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{2}$$

3. Resolver el siguiente sistema utilizando el método de Kramer.

$$18x-y=2$$

$$3y + 4z = 1$$

$$x-z=0$$

4. Un tanque de forma cilíndrica se puede llenar por medio de un tubo, una manguera o los dos conductos. Utilizando el tubo para llenar el tanque tarda 12 horas; utilizando el tubo y la manguera, el llenado tarda $\frac{84}{7}$ horas. ¿Qué tiempo tardará en llenar el tanque la manguera?

5. Hallar el conjunto solución para la desigualdad:

$$\frac{4}{x-2} < \frac{x-3}{5} < \frac{x}{2}$$

6. Resolver:

$$\left|3x^2-x\right|>4$$

7. Un ascensor para poder funcionar, máximo debe traer de carga 700 kg. A él se subieron 5 mujeres y 5 hombres, cuyos peso promedio para las mujeres es de 68 Kg. ¿Cuál será el peso promedio de los hombres, si el ascensor funcionó con su límite de peso?

8. Dada la función:

$$f(x) = (x-1)^3 + 3$$

Identificar su dominio, imagen, monotonía, simetría y su gráfica.

9. En la fabricación de un producto, el precio P está dado por la función: $P = \frac{1}{2}x + 80 \quad \text{y la función ingreso R es igual a la cantidad de unidades}$

vendidas por el precio unitario. ¿Cuál será el ingerso si en una transacción el presio P fué de 200 millones?

10. Sea la función: $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$

Hallar el dominio, imagen, monotonía y la gráfica.

11. Resolver la siguiente ecuación:

$$3^{5x-8} = 9^{x+2}$$

12. El conocimiento de una publicación está dada por la función:

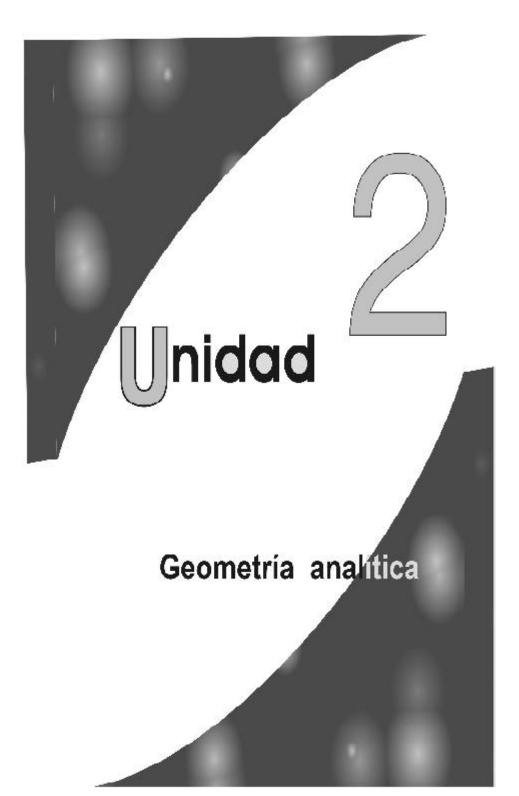
 $P(t)=1.000 e^{t}$. Siendo t en años.

a. ¿Cuál será la población inicial?

b. ¿En qué tiempo la población se triplica?

- **13.** Dada la función $Tan(\alpha) = \frac{3}{4}$. Identificar las restantes funciones trigonométricas.
- **14.** Halalr el valor de cos (105°) utilizando identidades trigonométricas básicas.
- **15.** Resolver la ecuación dada, dar el resultado en radianes. sen $(2x) = \cos(x)$.
- **16.** Un avión viaja a 1.200 metros de altura y desea iniciar su descenso para aterrizar. El ángulo de depresión mide 30º al iniciar el descenso. ¿A qué distancia del inicio de la pista se encuentra el avión?
- **17.** Demostrar que:

sen h⁻¹ (x) = Ln
$$\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$





Cuando hablamos de trigonometría hacemos referencia al estudio del triángulo, la hipernometría la estamos referenciando al estudio de las hipérbolas, específicamente a las funciones hiperbólicas. Ya se han estudiado las funciones hiperbólicas, en este aparte se analizarán algunos aspectos referentes a las identidades hiperbólicas.

Identidades hiperbólicas

De manera análoga a las trigonométricas, las hiperbólicas presentan identidades básicas y específicas.

Identidad fundamental: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Pitagóricas: $\tanh^2(x) + \sec h^2(x) = 1$

 $\coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) = 1$

Cociente: $\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cos h(x)}$

 $\coth(x) = \frac{\cos h(x)}{\operatorname{sen} h(x)}$

Recíprocas: $\cosh(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$

 $\operatorname{sen} h(x) = \frac{1}{\operatorname{csc} h(x)}$

Suma y diferencia:

 $sen h(x \pm y) = senh(x) cosh(y) \pm cosh(x) \bullet senh(y)$

 $\cos h(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \operatorname{sen} h(x) \bullet \operatorname{sen} h(y)$

Ángulo doble:

$$senh^{2}(x) = \frac{cos h(2x) - 1}{2}$$

$$cosh^{2}(x) = \frac{1 + cos h(2x)}{2}$$

$$sen h(2x) = 2 sen h(x) cos h(x)$$

$$cos h(2x) = cos h^{2}(x) + sen h^{2}(x)$$

AUTOEVALUACIÓN UNIDAD 1

1. Resolver la ecuación:

$$\frac{x-3}{2(x-1)} = \frac{1}{6} - \frac{1-4x}{3(x-1)}$$

2. Hallar la solución para el siguiente sistema; utilice la metodología de eliminación por cualquiera de sus métodos.

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -1$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{2}$$

3. Resolver el siguiente sistema utilizando el método de Kramer.

$$18x-y=2$$

$$3y + 4z = 1$$

$$x-z=0$$

4. Un tanque de forma cilíndrica se puede llenar por medio de un tubo, una manguera o los dos conductos. Utilizando el tubo para llenar el tanque tarda 12 horas; utilizando el tubo y la manguera, el llenado tarda $\frac{84}{7}$ horas. ¿Qué tiempo tardará en llenar el tanque la manguera?

5. Hallar el conjunto solución para la desigualdad:

$$\frac{4}{x-2} < \frac{x-3}{5} < \frac{x}{2}$$

6. Resolver:

$$\left|3x^2-x\right|>4$$

7. Un ascensor para poder funcionar, máximo debe traer de carga 700 kg. A él se subieron 5 mujeres y 5 hombres, cuyos peso promedio para las mujeres es de 68 Kg. ¿Cuál será el peso promedio de los hombres, si el ascensor funcionó con su límite de peso?

8. Dada la función:

$$f(x) = (x-1)^3 + 3$$

Identificar su dominio, imagen, monotonía, simetría y su gráfica.

- 9. En la fabricación de un producto, el precio P está dado por la función: $P = \frac{1}{2}x + 80 \quad \text{y la función ingreso R es igual a la cantidad de unidades}$ vendidas por el precio unitario. ¿Cuál será el ingerso si en una transacción
- **10.** Sea la función: $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ Hallar el dominio, imagen, monotonía y la gráfica.

el presio P fué de 200 millones?

11. Resolver la siguiente ecuación:

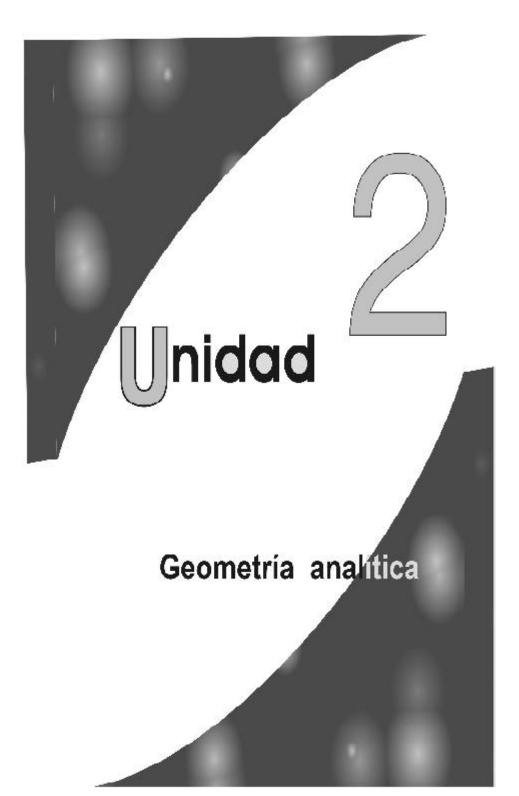
$$3^{5x-8} = 9^{x+2}$$

12. El conocimiento de una publicación está dada por la función:

$$P(t)=1.000 e^{t}$$
. Siendo t en años.

- a. ¿Cuál será la población inicial?
- b. ¿En qué tiempo la población se triplica?
- **13.** Dada la función $Tan(\alpha) = \frac{3}{4}$. Identificar las restantes funciones trigonométricas.
- **14.** Halalr el valor de cos (105°) utilizando identidades trigonométricas básicas.
- **15.** Resolver la ecuación dada, dar el resultado en radianes. sen $(2x) = \cos(x)$.
- **16.** Un avión viaja a 1.200 metros de altura y desea iniciar su descenso para aterrizar. El ángulo de depresión mide 30º al iniciar el descenso. ¿A qué distancia del inicio de la pista se encuentra el avión?
- **17.** Demostrar que:

sen h⁻¹ (x) = Ln
$$\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$



Introducción

a geometría Analítica o llámada también la **Geografía Matemática**, es la ciencia que combina el álgebra y la geometría, para describir figuras geométricas planas desde el punto de vista Algebraico y Geométrico. Esto se podría resumir diciendo que dando una gráfica específica, se debe encontrar una ecuación, hacer la gráfica que explique dicha ecuación.

Esta ciencia matemática fue desarrollada por el famoso filósofo y matemático Renato Descartes (1596-1650); quien a partir del planteamiento del plano cartesiano, también de su autoría, desarrolla toda la teoría geométrica para darle nombre matemático a las figuras como elipse, parabola, circunferencia e hipérbola.

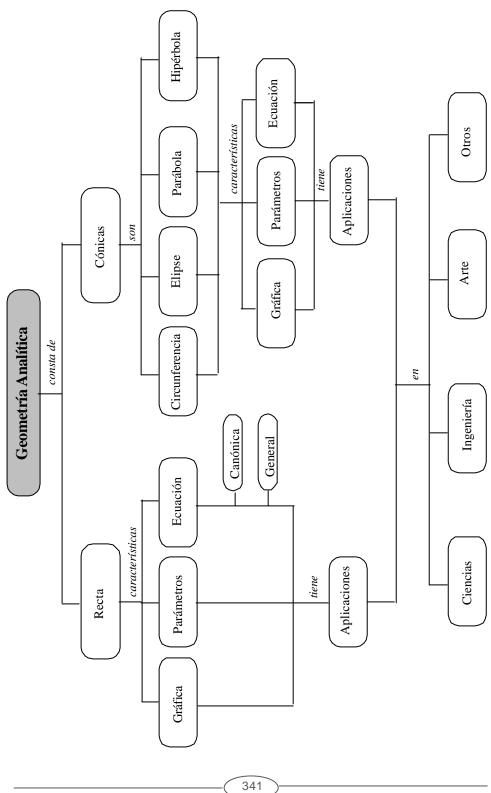
En este orden de ideas, el trabajo a desarrollar será el análisis de diversas figuras geométricas como la recta, la circunferencia, la elipse la parábola, a las cuales se les identificará sus perímetros, que las describan claramente. Se llegará hasta el análisis general de la ecuación de segundo grado y la traslación de ejes coordenados. No sobra decir que se estudiarán las aplicaciones que tienen estas figuras.

OBJETIVO GENERAL

Analizar gráfica y matemáticamente la recta y las cónicas, identificando los parámetros de cada una, su formula cónica y general, además de los campos de aplicación de las mismas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar analíticamente los parámetros de la recta y las cónicas.
- Obtener la ecuación de la figura geométrica, a partir de los parámetros establecidos.
- Identificar la figura geométrica, utilizando la ecuación cónica o general.
- Resolver problemas de diferentes campos del saber utilizando la geometría analítica.





LA RECTA

Introducción

De las figuras geométricas, la mas sencilla es la recta, ya que los parámetros que la caracterizan son en general sencillos de obtener.

Desde tiempos inmemorables se dice que la distancia mas corta entre dos puntos es una recta, lo cual es evidente. Del concepto de distancia la mas común y muy usada es la distancia euclidia, aunque existen otros tipos de distancia.

Este capítulo se concentrara en estudiar la recta, desde el análisis de la distancia euclidia entre dos puntos, la recta y sus parámetros, hasta el estudio de las rectas paralelas y perpendiculares. Se proponen ejercicios diversos para desarrollar habilidades y competencias cognitivas.

Por la gran utilidad que tiene la recta en los diferentes campos del saber, invitamos a los estudiantes a sumergirse en tan interesante tema matemático, tendrá muchas satisfacciones.

DISTANCIA EUCLIDIANA

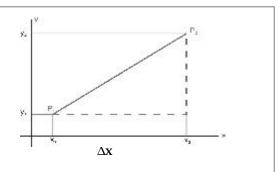
A través de la historia de las matemáticas la distancia ha sido un concepto de gran trascendencia por su utilidad, desde la antigüedad se buscaron formas de determinarla, fue EUCLIDES, el gran matemático de la antigüedad y aún vigente por sus grandes aportes, quien dió una solución para hallar la distancia entre dos puntos.

Con ayuda del teorema de Pitágoras definió la distancia entre dos puntos de la siguiente manera:

Como: $d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ por Pitágoras, donde:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta x = y_2 - y_1$$



Entonces:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para señalar la distancia euclidia se escribe $d\left(p_1,p_2\right)$. la cual se halla por la fórmula anterior. Es pertinente aclarar que: $d\left(p_1,p_2\right)=d\left(p_2,p_1\right)$

Ejemplo 1

Sean los puntos: (-2,4) y (2,5). Hallar la distancia entre dichos puntos.

Solución

Podemos escoger p_1 (-2,4) yp_2 (2,5) o viceversa, lo importante es establecer (x_1,y_1) y (x_2,y_2) . Para el caso que definimos:

 $x_1 = -2$; $y_1 = 4$ y $x_2 = 2$; $y_2 = 5$. Luego por la ecuación de distancia tenemos:

$$d = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{(4)^2 + (1)^4} = \sqrt{17}$$

Entonces, la distancia $d(p_1, p_2) = \sqrt{17}$

Ejemplo 2

Determinar la distancia de (0,0) a (10,0)

Solución

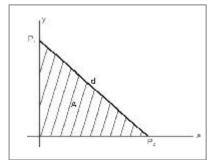
$$\begin{aligned} & p_1 = (0,0) \;\; y \;\; p_2 \; (10,0), \; luego : \\ & d = \sqrt{\left(10-0\right)^2 + \left(0-0\right)^2} \; = \sqrt{\left(10\right)^2} \; = & 10 \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{Corrobórelo gráficamente.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Sea $p_1(0.15)$ y $p_2(15.0)$. ¿Cuál será la distancia entre dichos puntos y el área que tiene la figura formada? Tomando como límites los ejes coordenados.

Solución

Dibujamos el esquema.



$$p_{1}(0,15) \quad \text{y} \quad p_{2}(15,0)$$

$$d = \sqrt{(15-0)^{2} + (0-15)^{2}} = \sqrt{(15)^{2} + (-15)^{2}}$$

$$d = 21,21$$

Para hallar el área de la figura, vemos que es un triángulo rectángulo, luego:

$$A = \frac{1}{2} bxh = \frac{1}{2} (15)(15) = 112,5$$
 unidades cuadradas.

UNAD

De los conceptos fundamentales en geometría: La recta. Dar una definición de esta figura geométrica es respectivamente fácil, todos conocemos una línea recta, la dibujamos, la construimos relativamente, pero acerquémonos a una definición

que sea satisfactoria a nuestros intereses.

Definición: una recta, es una línea de puntos colineales. Es decir, puntos ubicados uno tras otro de tal manera que uno esconde al anterior al mirar la fila de frente.

También el concepto de colineal, se puede explicar diciendo que cada punto de la

línea recta no se sale de la fila.

Características: toda recta tiene una grafica, una ecuación que la distingue,

además, de los parámetros de la recta.

Los parámetros de la recta se conocen como:

- Pendiente: se simboliza con la letra m, esta relacionada con la inclinación que

la recta presenta, respecto al eje x. (abscisa).

- Intercepto: se simboliza con la letra b, esta relacionada con el punto donde la

recta corta al eje y. (ordenada).

El trabajo con la recta se centra en que a partir de la grafica, se obtenga su

ecuación o viceversa.

Ecuación de la recta: vamos a estudiar las formas de expresar matemáticamente

una recta, la primera es la ecuación canónica o llamada también analítica y la

ecuación general.

.Ecuación canónica: y = m x + b

.Ecuación general: a x + b y + c = 0

346

La primera ecuación nos es familiar ya que ésta corresponde a la función lineal. En esta podemos ver explícitamente la pendiente y el intercepto.

Analicemos los parámetros que caracterizan a una recta.

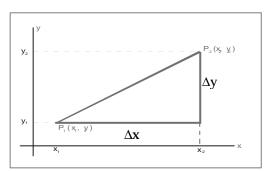
La pendiente

La teoría Euclidiana nos dice que para graficar o determinar una recta, basta sólo con dos puntos, este hecho nos permite determinar la pendiente de la recta. Como una recta presenta desplazamiento en X y desplazamiento en Y, entonces la pendiente está definida, determinando dichos desplazamientos.

$$m = \frac{desplazami\ ento\ en\ y}{desplazami\ ento\ en\ x}$$

 Δx = desplazami ento en x

 $\Delta y = desplazami ento en y$



Pero $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$; fórmula para hallar la pendiente se puede obtener conociendo dos puntos de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
 para $p_1 (x_1, y_1) \ y \ p_2 (x_2, y_2)$

Según el valor de la pendiente, la recta puede presentar cuatro comportamientos.

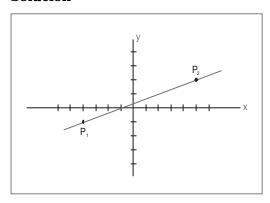
- 1. m > 0: la recta presenta inclinación hacia la derecha; es decir, el ángulo es agudo: $0^{\circ} < \sigma < 90^{\circ}$.
- **2.** m < 0: la recta presenta inclinación hacia la izquierda, es decir, el ángulo es obtuso; $90^{\circ} < \sigma < 180^{\circ}$.
- **3.** $\mathbf{m} = \mathbf{0}$: la recta es horizontal, luego el ángulo $\sigma = 0$
- **4. m** = **indeterminado** (α): la recta es vertical, luego el ángulo $\sigma = 90^{\circ}$

UNAD

Ejemplo 1

Dados los puntos: p_1 (-4,-1) y p_2 (5,2), hallar la pendiente y dibujar la gráfica.

Solución



En la gráfica observamos que la recta presenta inclinación hacia la derecha, luego m > 0, veamos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{5 - (-4)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{ Vemos que } \quad m > 0.$$

Hallar la pendiente de la recta, que pasa por dos puntos (4, -2) y (-3, 2). Hacer la gráfica.

Solución

Para este caso la inclinación es hacia la izquierda; luego m deberá ser menor que cero.



$$p_1 (4,-2) y$$

 $p_2 (-3,2)$. Luego:

$$m = \frac{2 - (-2)}{-3 - (+4)} = \frac{4}{7} = -\frac{4}{7} \quad m = \frac{2 - (-2)}{-3 - (+4)} = \frac{4}{7} = -\frac{4}{7}$$

El intercepto

Como se dijo antes el intercepto es el punto donde la recta corta al eje y, es decir, la ordenada. Según esto, cuando $m=\infty$, la recta no tendrá intercepto (¿ por que?), en los demás casos sí. En la ecuación canónica, el intercepto corresponde al valor de b. En la ecuación general se debe despejar \mathbf{y} , para identificar el intercepto.

Retomando las ecuaciones canónica y general de la recta; podemos resaltar que se puede transformar de una en la otra.

A partir de la ecuación canónica, podemos llegar a la general, llevando toda la ecuación a cero. A partir de la general, podemos obtener la canónica; despejando \mathbf{y} .

Ejemplo 2

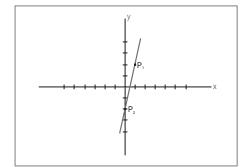
Dada la ecuación y=4x-2. Hacer la gráfica y obtener la ecuación general.

Solución

Para hacer la gráfica, debemos tener mínimo dos puntos, esto se consigue dado valores a x y determinar su correspondiente y, veámos:

$$x=0 \Rightarrow y=4(0)-2=-2$$
 $p_1(0,-2)$
 $x=1 \Rightarrow y=4(1)-2=2$ $p_2(1,2)$

La pendiente m = 4, para esta ecuación.



Para la ecuación general, solo hacemos que la ecuación canónica sea igual a 0, luego:

$$y=4x-2 \Rightarrow 4x-y-2=0$$

UNAD

Ejemplo 3

Dada la ecuación: 4y-16x+12=0. Hallar la ecuación canónica, identificar la pendiente, el intercepto y hacer la gráfica.

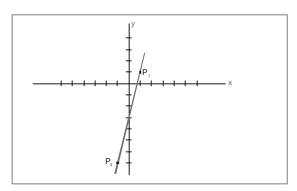
Solución

Como tenemos la ecuación general, debemos obtener la canónica, con la cual es más fácil obtener los parámetros y hacer la gráfica.

$$4y-16x+12=0 \Rightarrow 4y=16x-12 \Rightarrow y=\frac{16x-12}{4}$$
; finalmente: $y=4x-3$. Entonces:

Pendiente = 4 Intercepto = -3p₁ (1,1) p₂ (-1,-7)

Estimado estudiante analice ¿cómo se obtuvieron p_1 y p_2 ?



En diversas situaciones se trabaja la recta con una ecuación alterna, conocida como: **la ecuación de la recta: punto-pendiente;** donde los parámetros son la pendiente y un punto particular de la recta.

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$
 $p(x_1, y_1)$

Es similar a la cónica, solo que en esta última en lugar del intercepto, se define un punto en particular. De la ecuación punto-pendiente, se puede obtener la ecuación cónica y la ecuación general de la recta.

Ejemplo 4

Una recta tiene como pendiente m=-2 y pasa por el punto (3,4), hallar la ecuación canónica y general, hacer la gráfica.

Solución

Como tenemos la pendiente y un punto, reemplazamos:

$$y-4 = -2 (x-3) \implies y-4 = -2x+6 \implies y = -2x+10$$

Con la ecuación canónica, damos dos valores a x, para obtener los dos puntos mínimos necesarios para hacer la gráfica.

$$x=0 \Rightarrow y=-2(0) +10 =10$$
 $p_1(0,10)$
 $x=+2 \Rightarrow y=-2(+2) +10 =6$
 $p_2(2,6)$

P₂

Para la ecuación general, de la canónica, la llevamos a cero.

$$y=-2x+10 \Rightarrow y+2x-10=0$$
, luego:
 $y=-2x+10$ Ecuación canónica o analítico.

2x+y-10=0 Ecuación general.

Ejemplo 5

La recta L tiene los puntos (4,3) y (-2,-4). Hallar la ecuación analítica (canónica), la ecuación general y la ecuación punto punto - pendiente para la recta obtenida.

Solución

Inicialmente debemos hallar y = mx + b, luego debemos calcular m.

$$m = \frac{-4-3}{-2-4} = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}$$

Luego la ecuación quedaría: $y = \frac{7}{6}x + b$. Ahora hallamos b, lo cual se hace reemplazando uno de los puntos conocidos y despejamos b.

Tomemos p (4, 3), luego:

$$3 = \frac{7}{6}(4) + b \Rightarrow 3 = \frac{14}{3} + b \Rightarrow b = 3 - \frac{14}{3} = -\frac{5}{3}$$
, entonces:

$$y = \frac{7}{6}x - \frac{5}{3}$$
. Que es la ecuación cónica.

Para hallar la ecuación general: $y = \frac{7x - 2(5)}{6} = \frac{7x - 10}{6}$, luego;

$$6y = 7x - 10 \implies 6y - 7x + 10 = 0$$

Para la ecuación punto-pendiente, tomamos la pendiente y uno de los puntos que conocemos: tomamos $\ p_2\ (-2,-4)$.

$$(y-y_1) = m(x-x_1) \Rightarrow y-(-4) = \frac{7}{6} (x-(-2))$$
 entonces:
$$y+4 = \frac{7}{6} (x+2)$$

EJERCICIOS. ANÁLISIS DE LA RECTA

Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados:

1. (4,7) y (-2,-3)

Rta: $m = \frac{5}{3}$

2. (-4,3) y (3,-2)

Rta: $m = -\frac{5}{7}$

3. (-2,3) y(4,3)

Rta: m = 0

4. (5,4) y (5,-4)

Rta: m = intederminada

Hallar la ecuación de la recta que cumple las condiciones dadas.

5. Tiene pendiente 4 y el intercepto es -2

Rta. y=4x-2

6. Pasa por el punto (2,-2) y pendiente -3

Rta: y = -3x + 4

7. Pasa por los puntos (8, 1) y (-3,1)

Rta: y = 1

8. Intercepto en x = 4 y en y = -2

Rta: $y = \frac{1}{2}x - 2$

Para las ecuaciones dadas, hallar los parámetros:

9. 2x+5y-8=0

Rta: $m = -\frac{2}{5} y b = \frac{8}{5}$

10. $\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 2$

Rta: $m = \frac{9}{4} y b = -6$

11. $\frac{2}{3x+4y} = \frac{1}{3}$

Rta: $m = -\frac{3}{4}$ y $b = \frac{3}{2}$

12. Hallar la ecuación de la recta que se ve en la gráfica.



ECTAS PARALELAS

De los conceptos básicos sobre la recta está aquel que dice que dos rectas son paralelas cuando tienen el mismo ángulo, o cuando para todo x, la distancia entre ellas es igual.

Teorema: dos rectas no verticales son paralelas, si y solo sí, estas tienen la misma pendiente; es decir, $m_1 = m_2$; para $y_1 = m_1x_1 + b$, $y y_2 = m_2x_2 + b_2$.

Demostración

Sean L_1 y L_2 , dos rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, con interceptos b_1 y b_2 . Las rectas tendrán como ecuación:

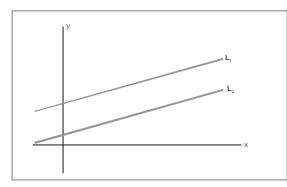
L₁:
$$y = m_1x + b_1$$

L₂: $y = m_2x + b_2$

Las rectas se cortan en algún punto (x, y), sí y sólo sí; los valores de y para L_1 y L_2 serán iguales para algún x, luego:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \implies (m_1 - m_2)x = b_2 - b_1$$

La última ecuación se puede resolver solo sí $m_1 \neq m_2$. Por consiguiente, dos rectas se cortan, sí y sólo sí; $m_1 \neq m_2$, luego cuando $m_1 = m_2$, las rectas no se cortan.



$$L_1: y = m_1x + b_1$$

$$L_2: y = m_2x + b_2$$
 Rectas paralelas:
$$m_1 = m_2$$

Ejemplo 1

Dadas las rectas: $L_1=4x-2y+8=0$ y $L_2=2x-y+6=0$. Determinar si L_1 y L_2 son paralelas.

Solución

Las ecuaciones están en forma general, llevémoslas a la forma canónica para ver la pendiente en forma explícita.

$$L_1 = 4x - 2y + 8 = 0 \quad \Rightarrow -2y = -4x - 8 \Rightarrow 2y = 4x + 8 \Rightarrow y = \frac{4x + 8}{2}$$

Luego: y = 2x + 4

$$L_2 : 2x - y + 6 = 0 \implies -y = -2x + 6 \implies y = 2x - 6$$

Vemos que para las dos ecuaciones obtenidas $\,m=2,\,$ por consiguiente $\,L_1\,$ y $\,L_2\,$ son paralelas.

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto p (4,2) y es paralela a la ecuación 8x + 2y - 12 = 0

Solución

Si la recta de la ecuación desconocida y la de la ecuación conocida son paralelas, sus pendientes son iguales.

Expresamos la ecuación conocida en forma canónica:

$$8x+2y-12=0 \Rightarrow 2y=-8x+12 \Rightarrow y=\frac{-8x+12}{2}$$
, luego: $y=-4x+6$, entonces: $m=-4$.

La ecuación desconocida, tendrá como pendiente m=-4. Su forma es: y=-4x+b, para hallar b, reemplazamos el punto que satisface esta ecuación. $2=-4(4)+b \Rightarrow 2+16=b \Rightarrow b=18$, la ecuación será: y=-4x+18



ECTAS PERPENDICULARES

Cuando dos rectas se cortan algún punto, estas no son paralelas, pero si las rectas se cruzan en un punto de tal manera que el ángulo estre ellas sea de $\frac{\pi}{2}$, se dice que las rectas son perpendiculares.

Teorema: dos rectas L_1 y L_2 , cuyas pendientes son m_1 y m_2 respectivamente, son perpendiculares, sí y sólo sí, m_1 • m_2 = -1.

Demostración

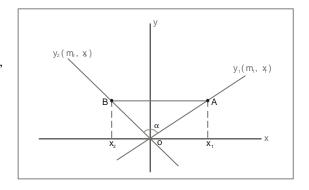
Para demostrar este teorema, vamos a tomar como hipótesis el famoso teorema de Pitágoras; si un triángulo es rectángulo, entonces:

$$h^2 = x^2 + y^2$$

Para facilitar la demostración, vamos a hacer que las dos rectas se corten en el orígen.

$$A(x,y)=(x_1,y_1)$$

$$B(x,y) = (x_2,y_2)$$



Como
$$y_1 = m_1 x_1$$
 y $y_2 = m_2 x_2$, entonces:

$$A(x_1, m_1x_1) y B(x_2, m_2x_2)$$

Las rectas y_1 y y_2 son perpendiculares, sí y sólo sí, el ángulo α es un ángulo recto, es decir, que el triángulo OAB es rectángulo, entonces:

$$[d(AB)]^2 = [d(OA)]^2 + [d(OB)]^2$$
 por teorema de Pitágoras.

Donde:

$$\left(\,d\,(AB\,)\,\right)^{2} \ = \left(\,x_{\,2} - x_{\,1}\,\right)^{\,2} \, + \left(\,m_{\,2}x_{\,2} \, - m_{\,1}x_{\,1}\,\right)^{\,2}$$

$$(d(OA))^{2} = (x_{1} - 0)^{2} + (m_{1}x_{1} - 0)^{2}$$
$$(d(OB))^{2} = (x_{1} - 0)^{2} + (m_{1}x_{1} - 0)^{2}$$

Luego:

$$\begin{array}{l} \left(x_{2}-x_{1}\right)^{2} + \left(m_{2}x_{2} - m_{1}x_{1}\right)^{2} &= x_{1}^{2} + \left(m_{1}x_{1}\right)^{2} + x_{2}^{2} + \left(m_{2}x_{2}\right)^{2} \\ x_{2}^{2} - 2\,x_{1}\,x_{2} + x_{1}^{2} + \left(m_{2}x_{2}\right)^{2} - 2\,m_{2}x_{2}m_{1}x_{1} + \left(m_{1}x_{1}\right)^{2} &= \\ x_{1}^{2} + \left(m_{1}x_{1}\right)^{2} + x_{2}^{2} + \left(m_{2}x_{2}\right)^{2} + \\ x_{2}^{2} - 2\,x_{1}\,x_{2} + x_{1}^{2} - 2\,m_{2}x_{2}m_{1}x_{1} &= x_{1}^{2} + x_{2}^{2} \Rightarrow \\ -2\,x_{1}\,x_{2} - 2\,m_{2}x_{2}m_{1}x_{1} &= 0 \\ -2\,x_{1}\,x_{2} + \left(1 + m_{2}\,m_{1}\right) &= 0 \Rightarrow m_{2}m_{1} + 1 = 0 \; ; \; luego : \\ \hline \left(m_{2}\,m_{1}\right) &= -1 \end{array}$$

Así queda demostrado cuando dos rectas son perpendiculares

Ejemplo 1

Demostrar que las rectas:

$$x-2y+8=0$$
 y $2x+y+3=0$; son perpendiculares.

Solución

Expresamos las dos ecuaciones de forma canónica; veámos:

$$x-2y+8=0 \Rightarrow -2y=-x-8 \Rightarrow y = \frac{-x-8}{-2} = \frac{1}{2}x + 4$$

Luego:
$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

 $2x + y + 3 = 0 \implies y = -2x + 3$

Tenemos las dos ecuaciones canónicas:

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$
 y $y = -2x + 3$
 $m_1 = \frac{1}{2}$ y $m_2 = -2$
 $m_1 \bullet m_2 = \frac{1}{2}(-2) = -1$

Luego como $m_1(-m_2) = -1$, las rectas son perpendiculares.

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta $\,L_1\,$ que pasa por el punto p (3,5) y es perpendicular a la recta $\,6x+3y-12=0\,$

Solución

De la ecuación conocida, identifiquemos la pendiente:

$$6x + 3y - 12 = 0 \implies 3y = -6x + 12 \implies y = \frac{-6x + 12}{3}$$

 $y = -2x + 4$

como la pendiente de L_1 es m_1 y de la ecuación conocida $m_2 = -2$ entonces:

$$m_1 \bullet m_2 = -1 \Rightarrow m(-2) = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

Ya conocemos la pendiente de la recta que estamos buscando: L_2 .

 $y = \frac{1}{2}x + b$; para hallar b, reemplazamos el punto en la ecuación:

$$5 = \frac{1}{2}(3) + b \Rightarrow 5 = \frac{3}{2} + b \Rightarrow 5 - \frac{3}{2} = b \Rightarrow b = \frac{7}{2}$$
, luego:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Ecuación buscada.

EJERCICIOS: RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

De cada par de rectas determinar si son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

1. 3y-2x-8=0 y -4x+6y-10=0

Rta. paralelas

2. $\frac{1}{2}x + y - 5 = 0$ $y \quad y - 2x = 8$

Rta. perpendiculares

3. 3x+4y-9=0 y 3y-4x-10=0

Rta. perpendiculares

4. 2x + 3y = 1 $y \quad x - 2y = 9$

Rta. oblicuas

Resolver los problemas propuestos:

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (-2,4) y es paralela a la recta x+3y-2=0.

Rta.
$$3y + x - 10 = 0$$

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-5,4), y es perpendicular a la recta que pasa por (1,1) y (3,7)

Rta.
$$x + 3y - 7 = 0$$

7. ¿Cuál será la ecuación de la recta en forma general para aquella que pasa por el punto (3,4) y su pendiente es el doble de la pendiente de la recta 4x-6y-12=0

Rta.
$$3y + 4x - 24 = 0$$

8. Una recta corta al eje x en 5 y es paralela a la recta 2x + y - 5 = 0.

Rta.
$$y + 2x - 10 = 0$$

9. Una recta cuya ecuación es 5y-4x-20=0, limita un triángulo rectángulo con los ejes coordenados. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

Rta. 10 unidades cuadradas.



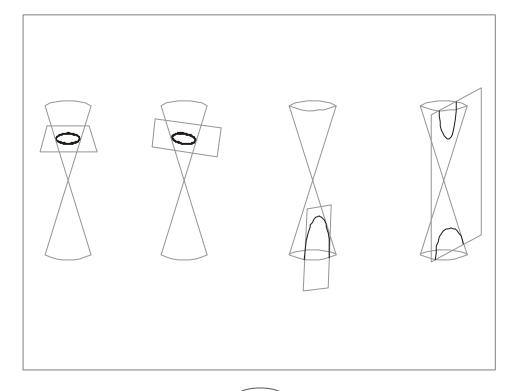
Las cónicas

Introducción

La palabra cónica viene de la figura geométrica cono. Las secciones cónicas son figuras geométricas que se obtienen al hacer pasar un plano de diferentes formas a través de un par de conos invertidos y unidos por el vértice.

El trabajo con las cónicas, consiste en describir por medio de una ecuación matemática, unas figuras geométricas específicas; o viceversa, por medio de una ecuación matemática hacer la gráfica correspondiente.

Las figuras son en su orden: Circunferencia elipse, parábola e hipérbola.



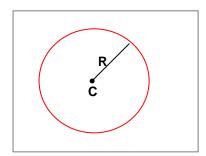


La circunferencia es el perímetro del círculo, ésta no tiene área, sólo longitud y los parámetros que la caracterizan.

Definición: La circunferencia es un conjunto de puntos en el plano cartesiano que equidistan a un punto fijo llamado **centro**.

La distancia fija es llamada **radio**.

En el orden de ideas de la definición, la circunferencia queda descrita por medio de su radio y su centro, además, del conjunto de puntos que la conforman.



c = centro

R = radio

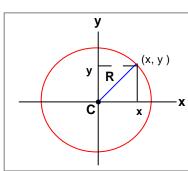
Recordemos dos conceptos de la circunferencia.

Diámetro D = 2R

Longitud: $L = 2\pi R$

Conociendo las características básicas de la circunferencia, ahora busquemos una ecuación matemática que la identifique.

Para obtener la ecuación, hacemos que el centro de la circunferencia este en (0,0). Ubicamos cualquier punto (x,y) que satisfaga la ecuación.



Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = R^2$$
 Ecuación canónica

Todo punto (x, y) que satisfaga la anterior ecuación, hace parte de la circunferencia que tiene centro (0,0) y radio R.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (0,0) y radio 2. Además, la longitud de la misma.

Solución

Aplicando la ecuación canónica:

$$x^2 + y^2 = R^2 \implies x^2 + y^2 = 4$$

Como $L = 2\pi R$ y sabemos que R = 2, entonces:

$$L = 2\pi(2) = 4\pi$$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (0,0) y pasa por el punto (3,4).

Solución

Como el punto satisface la ecuación, reemplazamos éste en la canónica para obtener el radio, entonces:

$$(3)^{2} + (4)^{2} = R^{2} \Rightarrow 9 + 16 = R^{2} \Rightarrow R^{2} = 25 \Rightarrow R = 5$$

Luego, la ecuación de la circunferencia quedaría:

$$x^2 + v^2 = 25$$

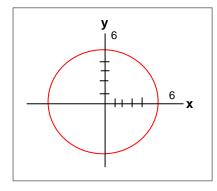
Ejemplo 3

Una circunferencia tiene como ecuación: $x^2+y^2=36$. Hallar el diámetro, hacer la gráfica y determinar la longitud de dicha circunferencia.

Solución

La ecuación canónica es de la forma $x^2 + y^2 = R^2$, luego en la ecuación dada.

$$R^2 = 36 \implies R = 6$$
. El radio vale 6.



El diámetro D = 2R, luego D = 2 (6): 12
 La longitud:
$$l = 2\pi r$$
, luego
 $L = 2\pi(6) = 12\pi$



Muchas veces escuchamos sobre el movimiento elíptico de la tierra, del electrón y otros fenómenos, pero cómo es la descripción matemática de esta figura geométrica. La elipse es una curva ovalada, se asemeja a un círculo alargado.

Definición: la elipse es un conjunto de puntos en el plano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, es constante. Los puntos fijos son llamados focos.

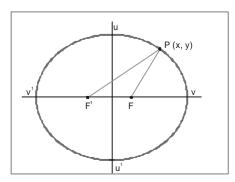
En la elipse se identifican un centro, para nuestro caso tomamos el origen de coordenadas (0,0). Cuatro vértices y dos focos.

Las coordenadas de cada punto son:

$$V (a, 0); V^{1}(-a, 0)$$

 $u=(0, b); u^{1}(0, -b)$
 $F (c, 0); F^{1}(-c, 0)$

p (x, y) los puntos de la elipse.



A V y V¹ se le llama los vértices mayores y a u y u¹ se le llaman los vértices menores. De estos se originan los ejes mayor y menor de la elipse.

Eje mayor: 2a y Eje menor: 2b

Según la gráfica 2a > 2b, primer aspecto importante de la elipse.

Por definición:

$$d(pF') + d(pF) = 2a$$

Teorema: la ecuación canónica de la elipse con centro (0,0), eje mayor sobre el eje x, es de la forma:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$$

Demostración

Identifiquemos las distancias:

d
$$(p_f^1) = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2}$$

d $(p_f) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$

Ahora:

$$\begin{split} &\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\ &\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ &\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\ &(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ &x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \end{split}$$

Simplificando:

$$-2xc - 2xc = 4a^2 - 4a \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
 entonces:
 $-4xc = 4a^2 - 4a \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ reorganizando.

$$4a \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc$$
 dividiendo todo por cuatro obtenemos:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2+xc$$
 elevando al cuadrado, queda:

$$a^{2}\left(x^{2}+2xc+c^{2}+y^{2}\right) = a^{4}+2a^{2}xc+x^{2}c^{2}$$

$$a^{2}x^{2} + 2a^{2}xc + a^{2}c^{2} + a^{2}v^{2} = a^{4} + 2a^{2}xc + x^{2}c^{2}$$

por trinomio cuadrado perfecto; reorganizando tenemos:

$$x^{2}\left(a^{2}-c^{2}\right)+a^{2}y^{2}=a^{2}\left(a^{2}-c^{2}\right)$$

Si dividimos todo por: $a^2 \left(a^2 - c^2 \right)$

$$\frac{x^2 \left(a^2 - c^2\right)}{a^2 \left(a^2 - c^2\right)} + \frac{a^2 y^2}{a^2 \left(a^2 - c^2\right)} = \frac{a^2 \left(a^2 - c^2\right)}{a^2 \left(a^2 - c^2\right)} = tenemos:$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Como a > c, ya que la distancia del eje mayor es mayor que la distancia focal, luego $a^2>c^2\Rightarrow a^2-c^2>0$, así podemos reemplazar $a^2-c^2=b^2$, entonces:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1$$

CUACIÓN CANÓNICA CON FOCOS EN Y

De la misma manera para cuando el eje mayor está sobre la ordenada, la ecuación canónica es de la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Para este caso los focos están en el eje \mathbf{y} , los vértices mayores en el eje \mathbf{y} y los vértices menores en el eje \mathbf{x} .

La demostración se deja como ejercicio para que lo trabajen en pequeños grupos colaborativos.

Ejemplo 1

A partir de la ecuación dada, hallar los focos, el eje mayor y el eje menor de la elipse.

$$50x^2 + 72y^2 = 3.600$$

Solución

Expresamos la ecuación dada como la canónica, es decir, igualando a uno, luego debemos dividir todo por 3.600, veámos:

$$\frac{50x^2}{3.600} + \frac{72y^2}{3.600} = \frac{3.600}{3.600} \implies \frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{50} = 1$$

De la ecuación canónica:

$$a^2 = 72 \implies a = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$b^2 = 50 \implies b = \sqrt{50} = 2\sqrt{5}$$

UNAD

Eje mayor: $2\left(6\sqrt{2}\right) = 12\sqrt{2}$

Vértices mayores: $V\left(6\sqrt{2},0\right)$ y $V'\left(-6\sqrt{2},0\right)$

Vértices menores: $u\left(0,2\sqrt{5}\right)$ y $u'\left(0,-2\sqrt{5}\right)$

Para hallar las coordenadas de los focos; sabemos que:

$$a^{2}-c^{2}=b^{2} \implies c^{2}=a^{2}-b^{2}=72-50=22$$

 $c^{2}=22 \implies c=\sqrt{22}$

Coordenadas de los focos:

 $F\left(\sqrt{22},0\right)$ y $F'\left(.\sqrt{22},0\right)$ Veámos la gráfica:

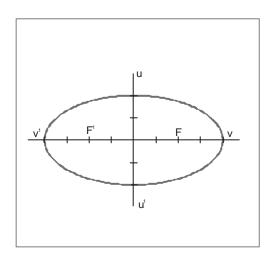
$$V\left(6\sqrt{2},0\right) \quad y \quad V'\left(-6\sqrt{2},0\right)$$

$$u\left(0,2\sqrt{5}\right) \quad y \quad u'\left(0,-2\sqrt{5}\right)$$

$$F\left(\sqrt{22},0\right) \quad y \quad F'\left(-\sqrt{22},0\right)$$

Eje mayor: $12\sqrt{2}$

Eje menor: $4\sqrt{5}$



Ejemplo 2

Una elipse tiene como vértices: $(\pm 4,0)$ y focos $(\pm 2,0)$. Hallar la ecuación canónica y hacer la gráfica.

Solución

Como se conocen las vértices, entonces:

$$a = 4 \implies a^2 = 16$$

Además conocemos los focos, luego:

$$c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$$

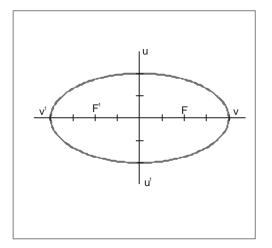
Por definición:

$$b^2 = 16 - 4 = 12$$

 $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

La ecuación canónica:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$



Ejemplo 3

Dada la ecuación de la elipse: $9x^2 + 4y^2 = 36$, hallar vértices, focos, ejes y hacer la gráfica.

Solución

Primero expresamos la ecuación en forma canónica:

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Podemos ver que el valor mayor $a^2=9$, esta sobre el eje de las y, luego el eje mayor está en la ordenada la igual que los focos.

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

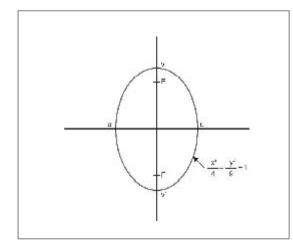
 $b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$

Como
$$b^2 = a^2 - c^2 \implies c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 - 5$$
, luego:

$$c^2 \, = 5 \, \Rightarrow \, c = \pm \, \sqrt{5}$$

Eje mayor : 2a = 2(3) = 6Eje menor: 2b = 2(2) = 4

Focos: (0,c) y (0,c) \Rightarrow $\left(0,\sqrt{5}\right)$ y $\left(0,-\sqrt{5}\right)$

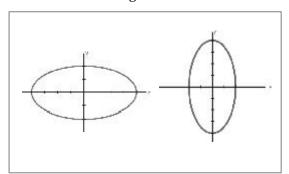


$$\begin{array}{ccccc} V & (0,3) & y & V' & (0,-3) \\ V & (0,3) & y & V' & (0,-3) \\ u & (2,0) & y & u' & (2,0) \\ F & \left(0,\sqrt{5}\right) & y & F' & \left(0,-\sqrt{5}\right) \end{array}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

EJERCICIOS: ELIPSE

1. Relacionar la gráfica con la ecuación correspondiente.



a.
$$\frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

b.
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

2. Dada la ecuación, hallar focos, vértices y hacer un bosquejo de la gráfica.

a.
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Rta.
$$V(0,5)$$
 y $V'(0,-5)$
 $F(0,4)$ y $F'(0,-4)$

b.
$$4x^2 + y^2 = 16$$

Rta.
$$V(0,4)$$
 y $V'(0,-4)$
 $F\left(0,2\sqrt{3}\right)$ y $F'\left(0,-2\sqrt{3}\right)$

- 3. Encontrar la ecuación analítica de la elipse que cumple los registros dados:
 - a. Centro (0,0), foco (3,0) y vértice (5,0)

Rta.
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

b. Focos
$$(0, \pm 3)$$
, interjeción $x = \pm 2$ Rta. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$

Rta.
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$$

- 4. Determinar la ecuación y hacer la gráfica para la elipse que cumple:
 - a. Foco en $\left(\ 0,\,\pm\,\sqrt{3}\ \right)$ y eje mayor mide 4.

Rta.
$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{16} = 1$$

b. Foco en (2, 0), centro (0, 0) y b = 3

Rta.
$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

UNAD



El concepto de excentricidad es usado para describir la forma de la curva, esta hace una relación entre las longitudes del foco y el eje mayor. Esto nos permite determinar si una elipse es aplanada o abombada, igual para otras curvas.

$$e = \frac{c}{a}$$

Excentricidad.

Siendo
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Para la elipse la excentricidad está entre 0 y 1. (0 < e < 1) cuando $e \to 0$, la elipse es casi circular, cuando $e \to 1$, la elipse es casi plana. (\to significa tiende ó se acerca a....)

Para la circunferencia la excentricidad es 0: e=0, esto significa que cuando e=0, la figura es concéntrica, circular. Lo anterior quiere decir que cuando a=b; entonces c=0, obteniendo así una circunferencia.

Ejemplo 1

Una elipse tiene vértices mayores en $(\pm 8,0)$ y focos en $(\pm 5,0)$. ¿Cuál será su excentricidad?

Solución

 $e = \frac{c}{9}$; en el problema planteado c = 5 y a = 8, luego:

$$e = \frac{5}{8} = 0.625$$

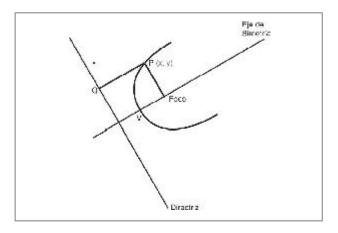


La parábola es una figura que describe diversos fenómenos, como la trayectoria de un balón de fútbol o de un tejo, en el juego autóctono de Colombia, muchos otros.

Definición

Una parábola es un conjunto de puntos en el plano p(x, y) que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo F, llamado foco y una recta D llamada directriz. Como consecuencia de la definición:

$$d(PF) = d(PQ).$$



De acuerdo con la definición y según la gráfica, podemos identificar en la parábola los siguientes elementos:

Eje de simetría, directriz, vértice, foco y por supuesto los puntos p (x, y) que conforman la curva.

A continuación analizaremos la descripción matemática de la parábola para facilitar el análisis, tomemos el eje de simetría como el eje Y, y su vértice es el origen.

UNAD

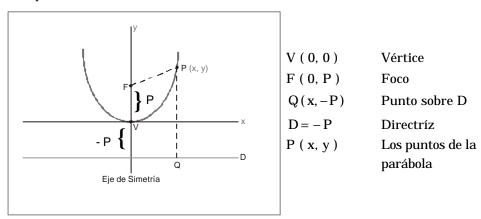
Teorema

Toda parábola con eje de simetría vertical y vértice en el origen, tiene como ecuación canónica:

Donde p es la distancia del vértice el foco.

Demostración

Para hacer la demostración utilicemos una gráfica que nos ilustre los elementos de la parábola.



Por hipótesis: d (PF) = d (PQ), por la fórmula de distancia tenemos:

d (PF) =
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$$

d (PQ) =
$$\sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{0+(y+p)^2}$$

Entonces:

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(y+p)^2} \quad \text{eliminando raı́z:}$$

$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2 \quad \text{desarrollando los productos notables:}$$

$$x^2+y^2-2yp+p^2=y^2+2yp+p^2$$
 Simplificando:
$$x^2-2yp-2yp=0 \ \Rightarrow \ x^2-4yp=0 \ , \ luego:$$

$$x^2 = 4py$$

Como la parábola tiene dos ramas que se abren a partir del vértice; debemos tener presente lo siguiente:

Cuando $\,P>0:\,$ las ramas abren hacia arriba a partir del vértice

Cuando P < 0 : las ramas abren hacia abajo a partir del vértice.

También se debe resaltar que el vértice y el foco están sobre el eje de simetría; además este último y la directriz son perpendiculares.

Teorema

Toda parábola con eje de simetría horizontal y vértice en el origen, tiene como ecuación canónica:

$$x^2 = 4py$$

Demostración

Se deja como ejercicio, para hacerlo en pequeño grupo colaborativo y corroborarlo con el docente.

Para este caso:

Cuando P > 0: las ramas abren hacia la derecha a partir del vértice

Cuando P < 0: las ramas abren hacia la izquierda a partir del vértice.

UNAD

Ejemplo 1

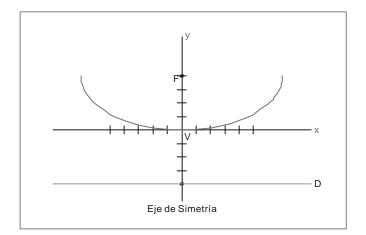
Dada la ecuación: $x^2=16\,y$, hallarla ecuación de la directriz, el foco, vértices y hacer la gráfica.

Solución

Como la variable x está al cuadrado, significa que el eje de simetría es vertical, el vértice es $(\ 0,\ 0\).$

Como: $4P=16 \implies P=\frac{16}{4}=4$, además P>0, entonces las ramas abren hacia arriba. La ecuación de la directriz y=-4.

 $V = (0, 0) \\ F = (0, 4) \\ Directriz y = -4.$



Ejemplo 2

Una parábola tiene vértice en el origen, abre sus ramas hacia abajo y pasa por el punto (2,-6). Hallar la ecuación y hacer la gráfica.

Solución:

La ecuación es de la forma: $x^2 = 4py$ pero p < 0

Como pasa por (2,-6), reemplazamos en la ecuación: para hallar P, entonces:

$$(2)^2 = 4P(-6) \Rightarrow 4 = -24P$$

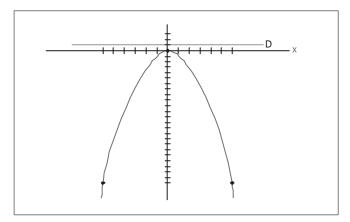
$$p = -\frac{4}{24} = -\frac{1}{6}$$

por consiguiente:

$$F = \left(0, -\frac{1}{6}\right)$$

$$D = y = \frac{1}{6}$$

La ecuación:



$$x^2 = -\frac{4}{6}y \implies \mathbf{x}^{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\mathbf{N}}$$

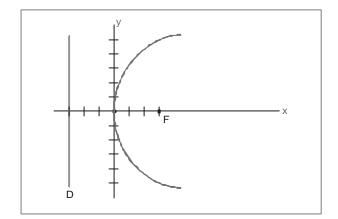
Ejemplo 3

Hallar la ecuación y hacer la gráfica de la parábola que tiene foco en (3, 0) y directriz en x=-3 y vértice en el origen.

Solución

Vemos que el foco está ubicado sobre el eje x, lo que indica que el eje de simetría es horizontal, luego la ecuación para este caso es de la forma: $y^2=4px$

La directriz x=-3, nos indica que P=3, corresponde a la coordenada en x del foco, entonces: $y^2=4\,(3)\;x\Rightarrow y^2=12x$



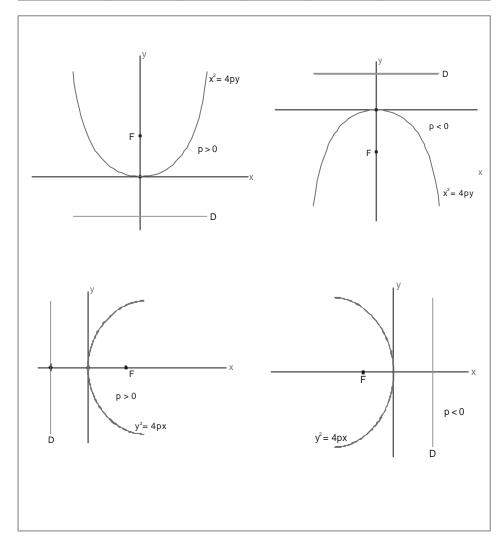
$$V (0, 0)$$

 $F (3, 0)$
 $D=x=-3$

Ecuación: $y^2 = 12x$

Vamos a resumir la forma estándar de la parábola:

Ecuación canónica	Vértice	Eje de simetría	Foco	Directriz	Ramas
$x^2 = 4Py$	V (0,0)	x = 0	F (0,P)	y=-p	P > 0: hacia arriba p< 0: hacia abajo
$y^2 = 4Px$	V (0,0)	y = 0	F (P, 0)	x = -p	P > 0: hacia arriba p< 0: hacia abajo



EJERCICIOS: PARÁBOLAS

Para las ecuaciones dadas, hallar vértice, foco y directriz.

 $y^2 = 16x$ 1.

Rta. V (0,0) F (2,0) directriz x=-2

2. $x^2 = 36y$

Rta. V (0,0) F (0,9) directriz y=-9

 $12x + y^2 = 0$ 3.

Rta. V (0,0) F (-3,0) directriz x = 3

A partir de los datos dados hallar la ecuación:

Foco (3, 0); directriz x=-34.

Rta. $y^2 = 12 x$

Vértice (0,0), eje simetría horizontal y pasa por (-1,4) | **Rta.** $y^2 = 16x$ **5.**

6. Foco (3,2) directriz y=-2 **Rta.** $(x-3)^2 = 8y$

7. La fachada de un edificio tiene forma parabólica, el largo es de 32.5 metros y el ancho de la base 24,2 metros. Exprese la ecuación que modela la fachada.

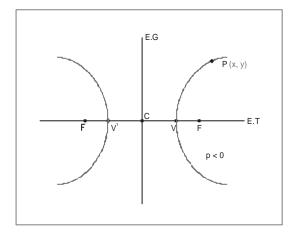
Rta.
$$x^2 = \frac{9}{2}y$$

8. Un túnel tiene forma parabólica, su altura máxima es de 12,8 metros y el ancho de la base es de 10,2 metros; cuál será el espacio libre vertical a 1,5 metros de la orilla del túnel.

Rta. y = 6.4 metros



Para entender que es una hipérbola, podemos hacer una analogía a una elipse partida por el eje menor e invertida. Veamos un esquema básico de una hipérbola.



C= centro de la hipérbola

V y V'= vértices

F y F'= focos

ET= eje transverso

EC= eje conjugado

P (x,y)= todos los puntos del plano que hacen parte de la hipérbola.

Definición

Una hipérbola es un conjunto de los puntos del plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es constante. Esto quiere decir que dado un punto p(x, y), entonces la definición establece que:

$$d(P, F') - d(P, F') = 2$$

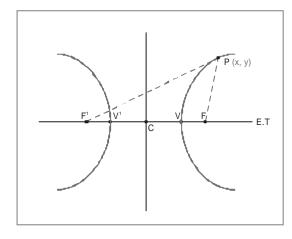
Teorema

Toda hipérbola con eje transverso paralelo al eje de las abcisas y centro en el origen de coordenadas, tiene como ecuación canónica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demostración





$$C(0,0)$$
 $F(C,0)$ y $F'(-c,0)$
 $V(a,0)$ y $V'(-a,0)$
Según la construcción: $a < c$
 $d(F,F') = 2c$

A partir de la definición d(P,F) - d(P,F') = 2a. Aplicamos el teorema para distancia euclidia para obtener la ecuación canónica.

d
$$(P,F) = (x-c)^2 + (y-0)^2$$

d $(P,F') = (x-(-2))^2 + (y-0)^2$

Luego:

$$\sqrt{(x+c)^2 y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

El desarrollo lo veremos a continuación, pero usted estimado estudiante, debe identificar qué propiedad, operación o ley se aplica en cada uno. Continuemos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$2xc + 2xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4xc - 4a^{2} = 4a\sqrt{(x-c)^{2} + y^{2}}$$

$$xc - a^{2} = a\sqrt{(x-c)^{2} + y^{2}}$$

$$(xc - a^{2})^{2} = a^{2}\left[(x-c)^{2} + y^{2}\right]$$

$$x^{2}c^{2} - 2a^{2}xc + a^{4} = a^{2}\left[x^{2} - 2xc + c^{2} + y^{2}\right]$$

$$x^{2}c^{2} - 2a^{2}xc + a^{4} = a^{2}x^{2} - 2a^{2}xc + a^{2}c^{2} + a^{2}y^{2}$$

$$x^{2}c^{2} + a^{4} = a^{2}x^{2} + a^{2}c^{2} + a^{2}y^{2}$$

$$x^{2}c^{2} + a^{2}x^{2} - a^{2}x^{2} - a^{2}y^{2} = a^{2}c^{2} - a^{4}$$

$$x^{2}(c^{2} - a^{2}) - a^{2}y^{2} = a^{2}(c^{2} - a^{2})$$

Como a < c \Rightarrow c - a > 0 y c² - a² > 0; entonces; denominamos a c² - a² = b². Pero antes dividamos toda la ecuación por a² (c² - a²), luego:

$$\frac{x^2 \, \left(\, c^2 \, - a^2 \, \right)}{a^2 \, \left(\, c^2 \, - a^2 \, \right)} \, - \, \frac{a^2 y^2}{a^2 \, \left(\, c^2 \, - a^2 \, \right)} \, = \frac{a^2 \, \left(\, c^2 \, - a^2 \, \right)}{a^2 \, \left(\, c^2 \, - a^2 \, \right)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$
, pero $b^2 = c^2 - a^2$, entonces:

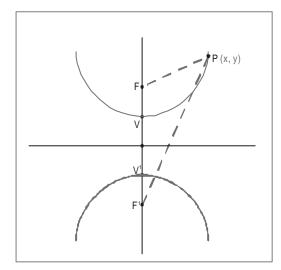
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Teorema: toda hipérbola con eje transverso paralelo al eje de las ordenadas y centro en el origen de coordenadas, tiene como ecuación canónica:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
 $b^2 = c^2 - a^2$

Demostración

Como en el caso anterior, usando la siguiente gráfica, por favor hacer la demostración, en el pequeño grupo colaborativo.



F (0,c) y F' (0,-c)
V (0,a) y V' (0,-a)

$$d(F,P)=(x-0)^{2}+(y-(-c))^{2}$$

$$d(F',P)=(x-0)^{2}+(y-c)^{2}$$
Recordemos:

$$d(F',P)-d(F,P)=2a$$

Continuen, sabemos que llegarán a la meta.

Asíntotas

En la hipérbola identificamos dos rectas que pasan por el centro de esta y permiten hacer la gráfica de la misma. Este tipo de asíntotas son oblicuas.

1. Para una hipérbola con ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, las asíntotas se obtienen despejando y, así:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \text{ si } x \neq 0,$$
 entonces:

$$y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{x^2 b^2}{a^2} \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right)};$$

$$y^2 = \pm \frac{bx}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Cuando $x \to \alpha$, o cuando $\, x \to \, 0$, $\,$ la expresión $\frac{a^2}{x^2} \, \to \! 0$, luego a medida que

x crece, la expresión se reduce a: $y = \pm \frac{bx}{a}$.

Entonces; las asíntotas de la hipérbola con eje transverso en x son:

$$y = \frac{b}{a}x$$

 $y = -\frac{b}{a} x$

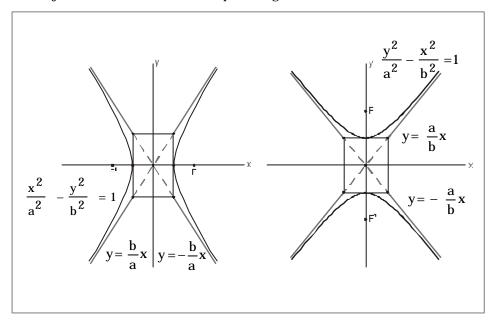
2. Para una hipérbola con ecuación canónica: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, las asíntotas son

de la forma:

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a} x$$

Como ejercicio de refuerzo, la idea es que se haga la demostración de estas asíntotas.



Las gráficas anteriores dejar ver las asíntotas y su utilidad para dibujar la hipérbola.

Ejemplo 1

Hallar las vértices, focos y asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Solución

De la ecuación podemos obtener:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

 $b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$

Como el valor mayor está sobre x, entonces el eje transverso está sobre el eje x.

$$V(4,0) y V'(-4,0)$$

Para hallar c, aplicamos la relación:

$$b^2 = c^2 - a^2 \implies c^2 = b^2 + a^2 \implies c^2 = 4 + 16 = 20$$

Luego:

$$\begin{split} c &= \pm \sqrt{20} = 2 \sqrt{5} \\ F\Big(2\sqrt{5}\,,0\,\Big) &= y F'\left(-2\sqrt{5},\,0\,\right) \end{split}$$

Las asíntotas:

$$y = \frac{b}{a}x$$
 y $y=-\frac{b}{a}x$

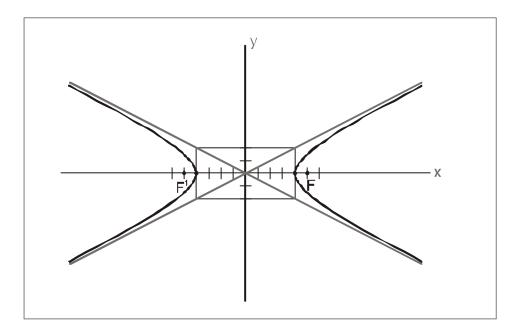
 $\boldsymbol{U}_{\text{NAD}}$

$$y = \frac{2}{4}x \implies y = \frac{1}{2}x$$

$$y = -\frac{2}{4}x \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

E.T:
$$y = 0$$

E.C.:
$$x = 0$$



Ejemplo 2

Dada la ecuación de la hipérbola con centro en (0, 0) como: $16y^2-9x^2=144$ Hacer la gráfica identificando vértices, focos, asíntotas.

Solución

Primero llevemos la ecuación dada a la canónica, lo cual se hace dividiendo todo por 144. Luego:

$$\frac{16y^2}{144} - \frac{9x^2}{144} = \frac{144}{144} \implies \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$
 El eje transverso está en x.

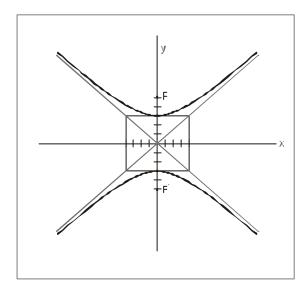
Ahora si podemos hallar los valores de a y b y c.

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

 $b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$

Ahora:
$$c^2 = a^2 + b^2 \implies c = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \pm 5$$

Luego:



Cuado y en la ecuación es positiva, entonces el eje transverso es paralelo al eje y. Cuando x es la positica en la ecuación, entonces el eje transverso es paralelo al eje x.

Ejemplo 3

Hallar la ecuación canónica de la hipérbola cuyos focos son ($\pm 4,0$) y a=2.

Solución

Según los datos: $c=\pm 4$ y a=2; como $b^2=c^2-a^2$, entonces $b^2=4^2-2^2=16-4=12$.

Por otro lado, como el foco está sobre la abscisa, el eje transverso estará en el eje x, luego la ecuación correspondiente es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
 $\Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

En el siguiente cuadro resuminos las características de la hipérbola.

Ecuación canónica	Vértice	Eje de simetría	Foco	Directriz	Ramas
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	(0,0)	F (± C, 0)	v (±a,0)	E.T: Y=0	$y = \pm \frac{b}{a}x$
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	(0,0)	F (0, ± C,)	v(0, ± a)	$E.T: \mathbf{x} = 0$	$y = \pm \frac{a}{b}x$

EJERCICIOS: HIPÉRBOLA

Encontrar la ecuación de la hipérbola, según los datos dados:

1. Centro (0, 0), foco (3, 0), vértice (1, 0)

Rta.
$$x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$$

2. Centro (0, 0), foco (0, -6), vértice (0, 4)

Rta.
$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$$

3. Focos $(\pm 5,0)$, vértice $(\pm 3,0)$

Rta.
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

4. Vértice (0, ± 6), asíntota $y = \pm \frac{3}{4}x$

Rta.
$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

A partir de la ecuación dada hallar, vértices, focos, eje transverso.

5. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

Rta. F $(\pm \sqrt{29}, 0)$; V $(\pm 5, 0)$

Eje transverso: 10

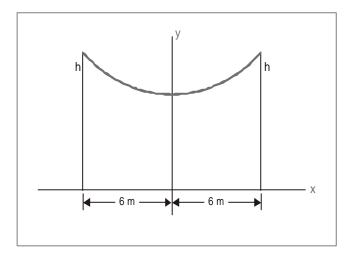
 $6y^2 - 3x^2 = 18$

Rta. F $\left(0, \pm \sqrt{9}\right)$; V $\left(0, \pm \sqrt{3}\right)$

Eje transverso = $2\sqrt{3}$

7. $x^2 - y^2 - 25 = 0$

Rta. F $(\pm \sqrt{50}, 0)$; V $(\pm 5, 0)$ Eje transverso = 10 8. El techo de un auditorio de música tiene forma de hipérbola, cuya ecuación es: $y^2 - x^2 = 25$. Donde x y y están en metros. Cuál será la altura de las paredes exteriores, según la siguiente figura.



T RASLACIÓN DE EJES

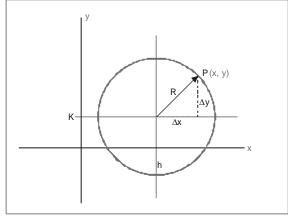
En muchas situaciones el centro de la circunferencia, de la elipse o hipérbola no se encuentran en el origen, o el vértice de la parábola. En este aparte vamos a analizar las cónicas, cuando el centro o vértice se encuentran en un punto fuera del origen de coordenadas.

Circunferencia

El centro de la circunferencia está en c (h, k). Aquí h corresponde ala coordenada en x y k corresponde ala coordenada en y. Para hallar R, debemos hallar el cambio en x y en y.

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{h}$$

$$\Delta x = y - k$$



Ahora hallamos la distancia R, por el teorema de pitágoras:

$$R^2 \ \ (\Delta y)^2 + (\Delta y)^2$$
 , por consiguiente:

Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k).

UNAD

Ejemplo 1

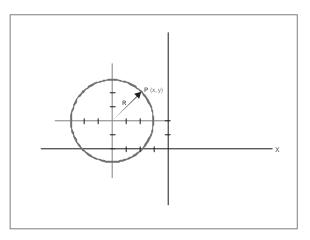
Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en (-4,2) y radio 3 unidades.

Solución

Según la ecuación obtenida: c(h,k) = (-4,2), luego

$$(x-(-4))^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

 $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$



Ejemplo 2

Hallar el centro y el radio de la circunferencia que tiene como ecuación:

$$x^2 - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

Solución

La ecuación que nos dan no es la canónica, luego debemos transformar la ecuación dada a canónica. Para esto, debemos agrupar las x y las y así:

 $(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = 3$ Completamos cuadrados en los dos grupos.

$$\left(x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) = 3 + 9 + 4$$

 $(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=16$ factorizando, tenemos:

 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ Ecuación canónica-

Entonces:

centro (3-2) y radio = 4

EJERCICIOS: TRASLACIÓN CIRCUNFERENCIA

Dados los parámetros de la circunferencia, hallar la ecuación canónica y general.

1.
$$radio = 2 \ y \ centro (0, 2)$$

Rta.
$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

2. radio = 5 y centro
$$(4,-3)$$

Rta.
$$(x-4)^2 + (x+3) = 25$$

 $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

Rta.
$$(x-1)^2 + (y-6)^2 = 8$$

 $x^2 + y^2 - 2x - 12y + 29 = 0$

Rta.
$$(x-5)^2 + (y-6)^2 = 36$$

 $x^2 + y^2 - 10x - 12y = 0$

Para las ecuaciones dadas, hallar el centro y el radio.

5.
$$(x-1)^2 + (y-3) = 49$$

Rta. centro
$$(1,-3)$$
; radio:7

6.
$$(y+5)^2 + (x-4)^2 = 12$$

Rta. centro
$$(-1,3)$$
; radio $2\sqrt{3}$

7.
$$6X^2 + 6Y^2 + 12X + 36Y - 112 = 0$$

Rta. centro
$$(-1,-3)$$
; radio $2\sqrt{3}$

8.
$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y - 24 = 0$$

Rta. centro
$$(3,-2)$$
, radio = 5

9. Un canal de conducción tiene forma semicircular de 10 metros de profundidad en el centro, ¿cuál será la ecuación que describe el canal y cuál será su profundidad a 4 metros del borde?

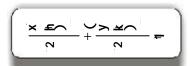
Rta.
$$y^2 + x^2 = 100$$
 $y = 8$ mts

Elipse

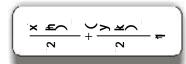
Cuando demostramos la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen,

obtuvimos la ecuación ya conocida.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cuando el eje mayor está en X. En este orden de ideas, cuando el centro es (h,k), indica que la elipse se desplazo h con respecto a x y k respecto a y. La ecuación canónica para este caso será.



Ecuación canónica de la elipse con centro en (h, k) y eje mayor paralelo al eje de las abcisas.



Ecuación canónica de la elipse con centro en (h, k) y eje mayor paralelo al eje de las ordenadas.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la elipse cuyo centro es (3, 2), focos en (1,2) y (5, 2); además b=2.

Solución

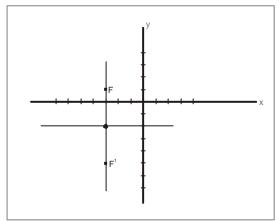
Según los datos (h, k) = (3, 2), además b = 2, luego podemos hallar el valor de a si conocemos c, el cual se obtiene del foco; entonces c = 2. Luego:

 $b^2=a^2-c^2\Rightarrow a^2=b^2+c^2=(2)^2+(2)^2=8$ Como los focos están en x, entonces la ecuación será:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{h^2} = 1$$
 reemplazando valores:

$$\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Una elipse tiene centro en (-3,-2), un foco está en (-3,-5) y pasa por el punto (-3,3). Hallar la ecuación canónica y hacer la gráfica.



$$c(-3,-2); F(-3,1) yF'(-3,-5)$$

La ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Como sabemos (h, k), entonces: $\frac{(x-(-3))}{b^2} + \frac{(y-(-2))}{a^2} = 1, luego:$

$$\frac{(x+3)^2}{h^2} + \frac{(y+2)^2}{a^2} = 1$$

Para hallar a y b por distancia focal c = 3.

 $b^2=a^2-c^2\Rightarrow c^2=a^2-b^2\Rightarrow 9=a^2-b^2$, luego expresamos una incógnita en función de la otra, por ejemplo: $b^2=a^2-9$. Como conocemos un punto reemplacemoslo en la ecuación y además el valor de b^2 para resolver la ecuación, veámos:

$$\frac{(-3+3)^2}{a^2-9} + \frac{(3+2)^2}{a^2} = 1 \implies \frac{6^2}{a^2} = 1 \implies 36 = a^2$$

UNAD

Ahora podemos hallar a b^2 ; así: como $b^2 = a^2 - c^2$, reemplazamos

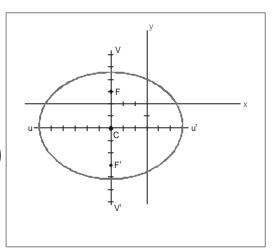
$$b^2 = 36 - 9 = 27$$

La ecuación

$$\frac{(x+3)^2}{27} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1$$

$$\begin{aligned} &a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \\ &b^2 = 27 \Rightarrow b = 3\sqrt{3} \\ &V(-3,4) \ y \ V'(-3,-8) \\ &a\left(3\sqrt{3} - 3 - 2\right) y \ u'\left(-3\sqrt{3} - 3,-2\right) \\ &F(-3,1) \ y \ F'(-3,-5) \end{aligned}$$

La gráfica



Ejemplo 3

Para el problema del ejemplo 2, hallar la excentricidad.

Solución

Recordemos que la excentricidad es la relación de c con a, luego:

$$e = \frac{c}{a}, = \frac{\sqrt{9}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Como e = 0.5, la elipse no es ni muy circular ni muy ovalada.

EJERCICIOS: TRASLACIÓN ELIPSE

Dada la ecuación de la elipse, identifique centro, focos y vértice respectivos.

1.
$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Rta.
$$V(3,2) y V'(3,-4)$$

 $F(3,-1+\sqrt{3}) y F'(3,-1-\sqrt{3})$
centro $(3,-1)$

$$2. 9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$$

Rta.
$$V(1,1) y V'(1,-5)$$

centro $(1,-2)$

3.
$$\frac{(y-1)^2}{9} + \frac{(x-2)^2}{25} = 1$$

Rta.
$$V(7,1)$$
 y V' (-3,1)
F(6,1) y F'(-2,1)
centro (2,1)

$$4. \qquad 3x^2 + 18x + y^2 + 18 = 0$$

Rta.
$$V(-2,1) \ y \ V'(-4,-1)$$

centro $(-3,-1)$

A partir de los parámetros dados, hallar la ecuación de la elipse

5. Centro en (3, 1); un foco en (0, 1) un vértice en (-1, 1)

Rta.
$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$

6. Vértices en (-1,3) y (-1,-), pasa por $\left(0,\frac{3}{4}\sqrt{15}\right)$

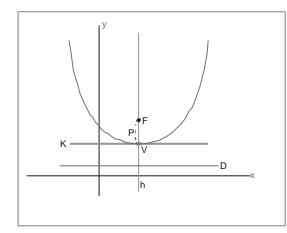
Rta.
$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

7. Centro en (1, 2), un vértice en (4,2) y pasa por el punto P (1,3)

Rta.
$$\frac{(x-1)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$$

Parábola

Cuando el vértice de la parábola está en (h,k) la ecuación canónica; ya estudiada, solo cambia al adicionar h y k a las variables X y Y respectivamente. El valor de h y k al entrar a la ecuación cambia de signo y viceversa.



La ecuación canónica queda de la forma:



Eje de simetría: x = h

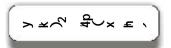
Vértice: V (h, k)

Foco: F(h, k + p)

Directríz D = k - p

Recordemos que si p > 0, las ramas abren hacia arriba a partir del vértice y si p < 0, las ramas abren hacia abajo a partir del vértice. Veamos ahora qué ocurre cuando el eje de simetría es paralelo al eje X, es decir corta el eje Y.

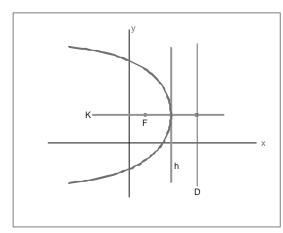
La ecuación canónica es de la forma:



Eje de simetría: y = k

Vértice : V(h, k)Foco: F(h + p, k)

Directríz Q = h - p



Aquí también se debe saber el signo de p para ver hacia donde van las ramas. Si p>0, las ramas abren hacia la derecha y si p<0, las ramas abren hacia la izquierda.

Dada la ecuación $(x+3)^2 = -8(y-2)$. Identificar el eje de simetría, el vértice, el foco y directríz de la parábola, hacer la gráfica.

Solución

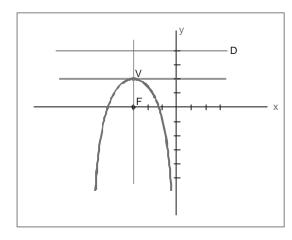
De la ecuación, vemos que $h=-3\,$ y k=2, entonces V(-3,2). El eje de simetría es : x=-3.

Como: $4p = -8 \Rightarrow p = -\frac{8}{4} = -2$ Las ramas abren hacia abajo a partir del vértice.

El foco: $F(h,k+p) \Rightarrow F(-3,2-2) \Rightarrow F(-3,0)$

La directríz: $D = k-p \Rightarrow D = 2-(-2) \Rightarrow D=4$

Ahora podemos hacer la gráfica:



Podemos hacer algunas reflexiones:

A partir de la ecuación, para saber cómo es la gráfica, cuál variable está al cuadrado.

Si X está al cuadrado, entonces el eje de simetría es vertical, pero si es Y la que está al cuadrado, luego el eje de simetría será horizontal.

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la parábola y hacer la grafica, si el foco esta en (-3, -2) y la directriz tiene como ecuación X = 1.

Solución

Al ubicar los puntos en el plano podemos tener una idea del comportamiento de la curva, por otro lado como la directriz es vertical, X=1, entonces el eje de simetría es horizontal. ¿ Por qué?

Como la distancia de la directríz al foco es 4, entonces, el vértice estará en (-1,-2). Luego: p=-2

La ecuación será de la forma:

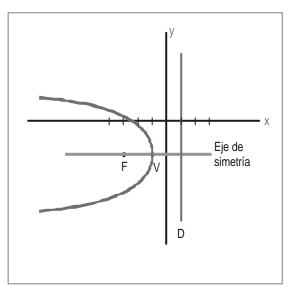
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
, luego

$$(y-(-2))^2 = 4p(x-(-1))$$

 $(y+2)^2 = 4p(x+1)$, pero p=-2
entonces:

$$(y+2)^2 = -8 (x+1)$$

El bosquejo de la gráfica se observa aquí.



Reflexión

En el análisis de la parábola, hemos dicho que según el valor de p, las ramas toman una dirección. Al respecto vale la pena hacer una reflexión del por qué de esta situación.

Tomamos el caso de la ecuación de la ecuación cuando el vértice está en el orígen y el eje de simetría es vertical.

 $x^2 = 4py$; si despejamos x tenemos:

 $x = \pm 2\sqrt{py}$. Para que x tenga solución real, se debe cumplir:

. Si p > 0, entonces y debe ser mayor que cero, para que haya solución, por consiguiente y > 0, entocnes las ramas van hacia arriba.

. Si p < 0, y debe ser menor que cero, para que haya solución, por consiguiente y < 0, entonces las ramas van hacia abajo.

El otro caso:

 $y^2 = 4px$, despejamos y, tenemos:

 $y = \pm 2\sqrt{px}$. Para que y tenga solución real, se debe cumplir:

- . Si p>0, entonces x debe ser mayor que cero, por consiguietne x>0, luego las ramas van hacia la derecha.
- . Si p < 0, entonces x debe ser menor que cero, por consiguiente x < 0, luego las ramas van hacia la derecha.

EJERCICIOS: TRASLACIÓN PARÁBOLA

Encontrar los parámetros: vértices, foco, directriz y eje de simetría para la parábola identificada por la ecuación dada.

1.
$$(y+1)^2 = -4x$$

$$\textbf{Rta.} \begin{array}{l} V \ (0,-1), F (-1,-) \\ \textbf{Directriz} \quad x=1 \\ Eje: y=-1 \end{array}$$

2.
$$(x-2)^2 = 4(y-1)$$

Rta.
$$V(2,1)$$
, $F(2,2)$
Directríz : y=0; eje x=2

3.
$$x^2 + 18x - 2y + 1 = 0$$

$$V(-9,-40)$$
, $F\left(-9-\frac{79}{2}\right)$

Rta. Directriz $Y = -\frac{81}{2}$

Ej: $x = -9$

4.
$$-3y^2 - 18y + 6x = 0$$

$$V(-\frac{9}{2}, -3), F(-4, -3)$$
Rta. Directriz: x=-5
Eje: y=-3

Hallar la ecuación de la parábola que cumple las condiciones dadas.

- Directriz y = -1 (4, 5) **Rta**. $x^2 8x 12y + 40 = 0$ **5.**
- 6. Vértice (4, -6), eje de simetría x = 4, pasa por el punto p (0, -8)**Rta.** $x^2 - 8x + 8y + 64 = 0$

Rta.
$$x^2 - 8x + 8y + 64 = 0$$

7. Vértice (8,-7), eje simetría es paralelo el eje x, pasa por el punto P(6,-8)

Rta.
$$2y^2 + 28y - x + 90 = 0$$

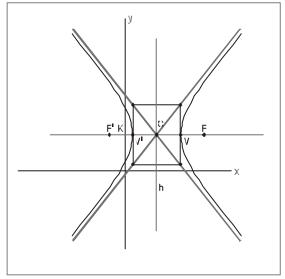
8. El arco de la ventana de una iglesia tiene forma parabólica, la altura del arco en el punto medio es de 16 pies y el ancho de la base es de 7 pies. Se desea pasar una caja en forma rectangular a través de la ventana. Si la caja tiene una altura de 12 pies, ¿ cuál debe ser el máximo ancho de la caja para que pueda pasar por la ventana)

Rta. 3,5 pies

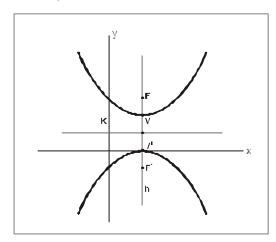
Hipérbola

Con el análisis hecho para circunferencia, elipse y parábola, podemos inferir como será el comportamiento de una hipérbola, con centro en (h , k) y eje transverso paralelo al eje X y de la forma:

$$\left[\frac{(x-h)^{2}}{a^{2}} - \frac{(y-k)^{2}}{b^{2}} = 1\right]$$



Para el caso de centro en ($h,\,k$) y eje transverso paralelo al eje y ocurre algo similar, veámos:



$$\left[\frac{(y-k)^{2}}{a^{2}} - \frac{(x-h)^{2}}{b^{2}} = 1\right]$$

La solución entre a, b y c son similares a la hiperbole con centro en el origen: $b^{\,2} = \! c^{\,2} - a^{\,2}$

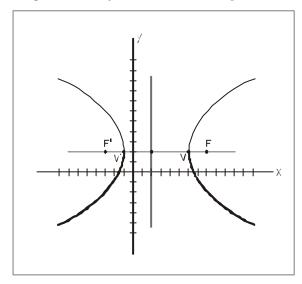
UNAD

Ejemplo 1

Una hipérbola tiene vértices en (5,2) y (-1,2); además un foco en (7,2), hallar la ecuación y hacer la gráfica.

Solución

La gráfica nos ayudará a resolver el problema.



Según la gráfica del vértice V al foco F, hay dos unidades, luego el otro foco están a 2 unidade de F'.

$$F(7,2)$$
 y $F(-3,2)$
Centro $c(2,2)$

Ahora
$$a=3 \text{ y } b^2 = c^2 - a^2$$

Ya que la distancia del centro al vértice es 3.

c = 5, que es la distancia del centro del foco.

Ahora,
$$b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \implies b^2 = 16$$
.

Con los datos obtenidos podemos hacer la ecuación canónica de esta elipse.

$$\frac{(x-b)^{2}}{a^{2}} - \frac{(y-k)^{2}}{b^{2}} = 1 \implies \frac{(x-2)^{2}}{9} - \frac{(y-2)^{2}}{16} = 1$$

Ejemplo 2

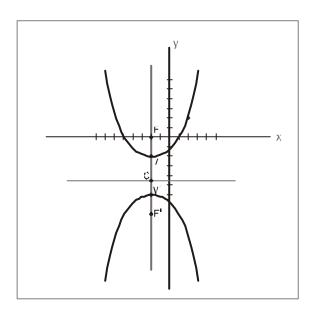
Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en (-2,-6), además F(-2,9)

Solución

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y+2)^{2}}{a^{2}} - \frac{(x+4)^{2}}{b^{2}} = 1$$
a=2 y c=3, entonces:
$$b^{2} = 3^{2} - 2^{2} = 9 - 4 = 5$$
Luego:

$$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{5} = 1$$



EJERCICIOS: TRASLACIÓN HIPÉRBOLA

A partir de la ecuación dada, identificar centro, vértices, focos y asíntotas de la hiperbola.

1.
$$\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{36} = 1$$
 Rta. Centro (3, -2), focos $(3 \pm \sqrt{61}, -2)$
Vértice (8,-2), (-2, -2)
Asíntota $y+2 = \pm \frac{6}{5}$ (x-3)

2.
$$\frac{(y+2)^2}{25} - x^2 = 1$$
 Rta. centro $(6,-2)$, fo cos $(0,-2\pm\sqrt{26})$ vértice $(0,3)$, $(0,-7)$ Asíntota : $y+2=15x$

3.
$$4(x-1)^2 - 25(y-2)^2 = 100$$
 Rta. centro (1,2), fo cos $(1 \pm \sqrt{29}, 2)$ vértice (6,2); $(-4,2)$ asíntota $:y-2 = \pm \frac{2}{5}(x-1)$

4.
$$4y^2 - x^2 + 8y - 6x - 4 = 0$$
 Rta. centro $(-3, -1)$; fo $\cos\left(-3 \pm \frac{3}{2}, -1\right)$ vértice $(-2, -1), (-4, -1)$ asíntota $y + 1 = \pm \frac{1}{2}(x + 3)$

Determinar la ecuación de la parábola, que cumple las condiciones dadas.

5. Centro
$$(-3,2)$$
 fo cos $(-3,8)$ y $(-3,-4)$ vértices en $(-3,6)$ y $(-3,-2)$

Rta.
$$\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{20} = 1$$

6. Centro (0, 0), un vértice $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y un foco (-2,0)

Rta.
$$\frac{4x^2}{9} - \frac{4y^2}{7} = 1$$

7. Centro (2,-1), un foco (2,-3) y un vértice en (2,-2)

Rta.
$$(y+1)^2 - \frac{(x-2)^2}{3} = 1$$

8. Centro (3,-1), un vértice en (4,-1) y pasa por el punto $(3+\sqrt{5},-5)$

Rta.
$$(x-3)^2 - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

CUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Recorrido todo el análisis de las secciones cónicas, utilizando como fundamento la distancia euclidia y además, conocidas las ecuaciones canónicas de la recta, circunferencia, parábola elipse e hipérbola.

Ahora nos ocuparemos de expresar las cónicas por medio de una ecuación que se le ha llamado **ecuación general de la curva**, para cada caso.

Circunferencia

A partir de la ecuación canónica podemos tomar un procedimiento algebraico para llegar a la ecuación general. Con un ejemplo ilustramos este caso.

Sea la ecuación canónica de una circunferencia así: x ★ペ ソ> ペペ 🛱

Cual sería la ecuación general. Para resolver el problema lo que se hace es **desarrollar los productos notables** así:

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 25$$

Reagrupando y simplificando: $x^2 + 8x + y^2 - 4y + 20 - 25 = 0$, luego:

 $x^2+y^2+8x-4y-5=0$. Corresponde a la ecuación general de la circunferencia dada.

Definición

Toda ecuación de la forma: $ax^2 + by^2 + cx + ey + f = 0$, corresponde a una circunferencia, siempre y cuando a = b y $a \ne 0$. Además de tener signos iguales.

Como podemos observar, la ecuación corresponde a una de segundo grado, donde $c\ y\ e$ indican que el centro está fuera del origen cuando $\ c=0\ y\ e=0$, la circunferencia tiene centro en el origen.

Hallar la ecuación general de la circunferencia, si su ecuación canónica es:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 40$$

Solución

Desarrollamos los cuadrados:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 40 \Rightarrow x^2 - 8x + y^2 - 4y + 20 = 40$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y - 20 = 0$$

Como aparece termino en x y y, el centro está fuera del orígen.

Ejemplo 2

Una circunferencia tiene el centro en (4, 0) y su radio es 7, cuál es la ecuación general de dicha circunferencia.

Solución

Inicialmente buscamos la ecuación canónica $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$, reemplazamos valores:

 $(x-4)^2+(y-0)^2=49$ Ya podemos obtener la general, desarrollando esta ecuación, veámos: $x^2-8x+16+y^2=49$, reorganizando:

$$x^2 + y^2 - 8x - 33 = 0$$

En este ejemplo vemos que no aparece término en y, la que indica que la coordenada del centro en y es cero; es decir, $\mathbf{k}=\mathbf{0}.$

Elipse

Para el caso de la elipse el procedimiento para obtener la ecuación general a partir de la canónica, es asimilar a la de la circunferencia. Un ejemplo nos puede ilustrar el procedimiento.

Si tenemos una elipse con ecuación canónica: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, cuál deberá ser la ecuación general. Lo primero que debemos hacer es hacer la ecuación entera.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{9x^2 + 4y^2}{36} = 1 \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36$$
. Si igualamos a cero, tenemos:

 $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$, que será la ecuación general de la elipse propuesta.

Definición

Toda ecuación de la forma $ax^2 + by^2 + cx + ey + y = 0$, corresponde a una elipse, siempre y cuando: $a \neq 0$ y $b \neq 0$, $a \neq b$; pero a y b de igual signo.

Si c y e son cero, el centro de la elipse estará en el origen de coordenadas. Cuando c y e son distintos de cero, el centro de la elipse estará fuera del origen de coordenadas

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la elipse cuyo centro es (2, -3), el eje mayor mide 10 y el menor mide 6, pero el eje mayor es paralelo a la coordenada X.

Solución

La ecuación canónica es de la forma:

$$\frac{\left(x-h\right)^{2}}{a^{2}}+\frac{\left(y-k\right)^{2}}{b^{2}}=1. \quad \text{Donde} \quad (h,k)=(2,-3) \, . \quad \text{Como el eje mayor mide 10;}$$
 entonces $a=5$. Lo mismo para el eje menor, $b=3$.

Entonces

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-(-3))^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

Buscamos común denominador.

$$\frac{9(x-2)^2 + 25(y+3)^2}{225} = 1$$
$$9(x-2)^2 + 25(y+3)^2 = 225$$

$$9(x^2-4x+4)+25(y^2+6y+9)=225$$
 operando:

$$9x^2 - 36x + 36 + 25y^2 + 150y + 225 = 275$$
, simplificando

$$9x^2 + 25y^2 - 36x + 130y + 36 = 0$$
 ecuación general.

Dada la ecuación:

 $5x^2 + 4y^2 - 30x + 16y + 41 = 0$. Hallar el centro, los ejes y hacer la gráfica de la elipse correspondiente.

Solución

De la ecuación dada agrupamos por variable:

$$5x^2 + 4y^2 - 30x + 16y + 41 = 0 \Rightarrow (5x^2 - 30x) + (4y^2 + 16y) = -41$$

Factoricemos en cada expresión, para dejar la variable con coeficiente 1:

$$5(x^2-6x)+4(y^2+4y) = -41$$
 completamos cuadrados

$$5 \left(\begin{array}{c} x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2} \right)^2 \end{array} \right) + 4 \left(\begin{array}{c} y^2 + 4y + \left(\frac{4}{2} \right)^2 \end{array} \right) = -41 + 45 + 16$$

$$5(x^2-6x+9)+4(y^2+4y+4)=-41+45+16$$

$$5(x-3)^2 + 4(y+2)^2 = 20$$
 Dividim os todo por 20

$$\frac{5(x-3)^2}{20} + \frac{4(y+2)^2}{20} = \frac{20}{20}$$
 Luego:

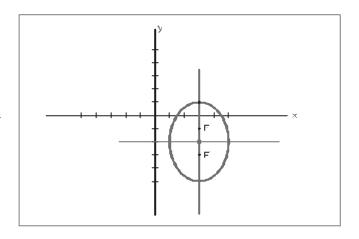
$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{5} = 1$$

Recordemos que $\ a^2>b^2 \ \Rightarrow 5>4$, entonces el eje mayor está paralelo al eje de la coordenada y.

UNAD

Centro (3,-2)

$$a = \sqrt{5} = 5$$
; $2a = 2\sqrt{5}$
 $b = \sqrt{4} = 2$; $2b = 4$
 $c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 4 = 1$
 $t = 1$ dis tan cia focal
 $F(3,-1 \ y \ F'(3,-3))$



Parábola

Definición

Una ecuación de la forma $ax^2 + by^2 + cx + ey + f = 0$. Corresponderá a una parábola, siempre y cuando: a = 0 ó b = 0.

Cuando c y e son cero, el vértice de la parábola estará en el origen.

Ejemplo 1

Sea la parábola con ecuación canónica: $(y-3)^2 = 18 (x+3)$. Hallar la ecuación general.

Solución

A partir de la ecuación canónica $(y-3)^2=18(x+3)$; desarrollamos el cuadrado y multiplicamos: $y^2-6y+9=18x+54$, igualamos a cero; $y^2-6y+9-18x+54=0$; entonces: $y^2-6y+18x+63=0$.

Así obtenemos la ecuación general para la parábola dada. Para este caso no hay término en $\ _X^2$, luego b = 0, según la ecuación general.

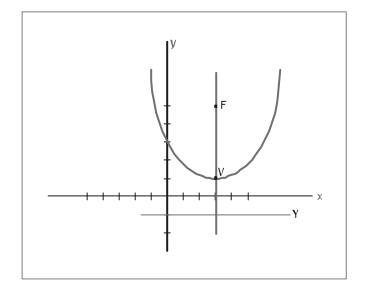
Dada la ecuación de la parábola $x^2-6x-12y+33=0$. Hallar vértice, foco y hacer la gráfica.

Solución

A partir de la ecuación dada, agrupamos la $\ variable\ x$ en un $\ lado\ y$ la $\ variable\ y$ al otro lado de la ecuación. Entonces:

$$x^2-6x=12y-33$$
, completamo s cuadrado en x $(x^2-6x+9)=12y-33+9$ Operando : $(x-3)^2=12y-24$, luego : $(x-3)^2=12(y-2)$ tenemos la ecuación canónica

V(3,2) x=3 eje de simetría p=3 F(3,5)y=directriz



Hipérbola

La hipérbola presenta una ecuación analítica muy parecida a la de la elipse, la diferencia esta en el signo y el denominador como lo vimos en el aparte correspondiente.

UNAD

Definición

Una ecuación de la forma: $ax^2 + by^2 + cx + ey + f = 0$, corresponde a una hipérbola, siempre y cuando: $a \ne b$, **y b diferente de cero**, **a y b con signos contrarios**.

El análisis de c y e; son similares a los casos anteriores.

Ejemplo 1

Dada la siguiente ecuación, hallar la ecuación general de la hipérbola.

$$12(x+2)^2-4(y-2)^2+24=0$$

Solución

De la ecuación dada, desarrollemos los cuadrados:

$$12\left(x+2\right)^{2}-4\left(y-2\right)^{2}+24=0 \Rightarrow 12\left(x^{2}+4x+4\right)-4\left(y^{2}-4y+4\right)+24=0$$

$$12x^{2}+48x+48-4y^{2}+16y-16+24=0, \text{ simplificando tenemos :}$$

$$12x^{2}-4y^{2}+48x+16y+56=0$$

La ecuación que obtuvimos tiene las condiciones que se debe cumplir para que una ecuación de segundo grado sea hipérbola. a y b son diferentes; $12\ y-4$, son de signos contrarios y por supuesto diferentes de cero.

Ejemplo 2

Encontrar la ecuación general de la hipérbola, la cual tiene focos en ($\pm 4,0$) y a=2

Solución

$$c = 4$$
 y $a = 2$

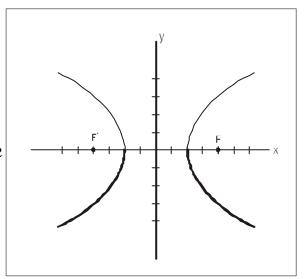
Según los datos dados.

Ahora:

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 16 - 4 = 12$$

Con esto podemos hallar el centro c (0, 0), vértice $V(\pm\,2,0)$.

El eje transverso y = 0



La ecuación canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
 Pero (h, k) = (0, 0). Luego:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2y^2}{12} = 1 \Rightarrow 3x^2 - y^2 = 12$$
, luego $3x^2 - y^2 - 12 = 0$

EJERCICIOS: ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Dada la ecuación de segundo grado, identificar su gráfico y sus parámetros.

1.
$$y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$$

Rta. Parábola:
$$(-4,2)$$

$$F\left(-4,\frac{5}{2}\right)$$
 eje $x=-c$

Directriz
$$y = \frac{3}{2}$$

2.
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$$

$$radio = 7$$

3.
$$y^2 - 4x^2 - 16x - 2y - 19 = 0$$

Focos
$$\left(-2,1\pm\sqrt{5}\right)$$

4.
$$25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$$
 Rta.

Vértice
$$(5,2\pm5)$$

Focos:
$$\left(5,2\pm\sqrt{21}\right)$$

5.
$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 15 = 0$$

Radio:
$$\sqrt{70}/2$$

6.
$$6x^2 - 2y^2 + 8y - 12x = 0$$

Focos:
$$\left(1\pm2\sqrt{3}/3\right)$$
, 2

7.
$$x^2 + 4x + 8y - 4 = 0$$

Foco
$$(-4,+1)$$
. eje; y=1

Directriz:
$$x = 0$$

8.
$$x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$$

Vértices:
$$(\sqrt{8} \pm 1.5)$$



PLICACIÓN DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

La geometría analítica es una fuerte herramienta matemática para resolver problemas de la vida diaria. Inicialmente es pertinente recordar los principios de cada figura estudiada, para poder seleccionar la que se aplica adecuadamente al problema planteado.

Los ejemplos que se propondrán solo son una motivación para que con buenos argumentos matemáticos, algo de astucia, pero ante todo buen sentido lógico, se pueda resolver problemas donde la geometría analítica es protagonista.

Lo anterior significa que con solo estos ejemplos, no se aprenderá a resolver problemas con geometría analítica, mas bien es una motivación, inducir a los estudiantes a hacer mas y más ejemplos para adquirir buena destreza en este campo.

A continuación vamos a dar unos lineamientos generales para la resolución de problemas diversos.

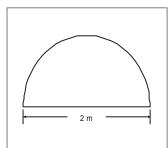
- 1. Leer el problema las veces que sea necesario, hasta entender que se debe hacer y como hacerlo.
- 2. Determinar la figura que se adapta al problema mostrado, identificarle los datos dados y los datos a obtener, o a calcular.
- 3. Escoger los datos dados a la ecuación de la cónica seleccionada, realizando las operaciones requeridas.
- 4. Obtener el valor o los valores preguntados en el problema y dar los resultados del mismo.

Se debe construir una ventana de forma semicircular, cuya base debe medir 2 metros. Cuanto material se requiere para el contorno de la misma.

Solución

La forma semicircular significa media circunferencia. El material requerido es para la mitad de una circunferencia más la base que ya conocemos.

Debemos hallar la longitud de la circunferencia y dividirla por dos.



 $L=2\pi R \quad El \ diámetro \ será \ 2, \ luego \ el \ radio \ será \ 1.$ $L=2\pi(1)=2\pi \ pero \ es \ media \ circunferencia, \ luego$

$$\frac{L}{2} = \pi = 3{,}1416$$
 por consiguiente:

El material para el contorno de la ventana requerida es de $(2+\pi)m$.

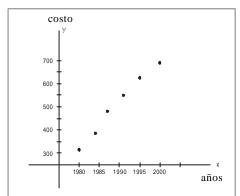
Ejemplo 2

La siguiente tabla muestra los datos de los costos de una publicidad de 10 seg, dados en miles de pesos, en un horario de mediana sintonía.

x año	y costo
1980	315
1984	385
1987	480
1991	550
1995	625
2000	695

- a. Ubicar en el plano cartesiano los puntos correspondientes.
- b. Establecer una recta de la forma y = a x + b, identificando los parámetros.
- c. Con el modelo obtenido pronosticar el valor de la publicidad para los años 1982 y 1994.

Solución



Según los puntos ubicados en el plano, los puntos tienden hacia una recta.

b. La ecuación a buscar es de la forma y=mx+b. Hallemos inicialmente m. tenemos los primeros dos puntos: p_1 (1980, 315) y p_2 (1984, 385).

$$m_1 = \frac{385 - 315}{1984 - 1980} = \frac{70}{4} = 17.5$$

Hallemos otra pendiente P_3 (1987,480) y p_4 (1991,550)

$$m_2 = \frac{550 - 480}{1991 - 1987} = \frac{70}{4} = 17.5$$

Igual con los dos últimos puntos P_5 (1995,625) y p_6 (2000,695)

$$m_3 = \frac{695 - 625}{2000 - 1995} = \frac{70}{5} = 14$$

Hallemos:

$$\overline{m} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} = \frac{17,5 + 17,5 + 14}{3} = 16,33$$
 $m = 16,33$

Hallemos el valor de b, reemplazando un punto; tomamos p1 (1980, 315)

$$y = 16.33x + b \Rightarrow 315 = 16.33 (1980) + b \Rightarrow b = -32018.4$$

La ecuación $y = 16.33x - 32.018.4$

c. Para el año 1982:

$$y = 16.33 (1982) - 32.018,4$$

 $y = 437,66$

Para el año 1994

$$y = 16.33 (1999) - 32.018,4 = 543,62$$

Ejemplo 3

El planeta mercurio se mueve en forma elíptica al rededor del sol, con una excentricidad de 0,206. El eje mayor es de 0,774 U.A. (unidades astronómicas). ¿Cuál será la distancia máxima entre mercurio y el sol?

Solución

Como sabemos para la elipse la excentricidad

$$e = \frac{c}{a}$$
 donde $c = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

El sol está ubicado en F.

Como $2a = 0.774 \, U \cdot A \cdot \text{entonces}$:

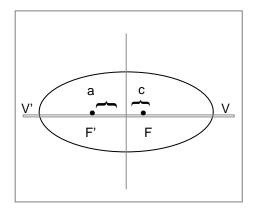
a = 0.387

Para hallar c, tenemos:

$$c = e \cdot a = 0.206 \times 0.387$$

$$c = 0.079$$

La máxima distancia entre el sol y mercurio es: FV', lo cual será:



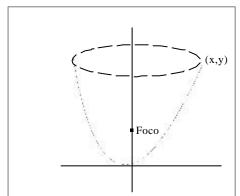
$$a+c \Rightarrow distancia máxima = 0.387 + 0.079$$

Distancia máxima entre mercurio y el sol es de 0.466 U.A.

Las señales de un satélite son recibidas en una antena parabólica y reflejadas en un solo punto, donde esta colocado un receptor de señales. La antena mide 6 metros de diámetro y 2,8 metros de profundidad. ¿ En qué posición se debe colocar el receptor tomando como base el vértice del disco?

Solución

Una figura nos ilustra el fenómeno.



La figura se ajusta a la ecuación:

$$x^2 = 4py \quad x = 3 \quad y \quad y = 2.8$$

Tenemos el punto (3,2.8) reemplazamos en la ecuación:

$$3^2 = 4p(28) \Rightarrow 9 = 11.2p \Rightarrow p = 0.8035$$

El foco se debe colocar a 0,8035m del vértice de la antena.

Ejemplo 5

Un puente está construído en forma de arco semielíptico, cuya extensión es de 90 metros y altura máxima de 8 metros. ¿Cuál será la altura del puente a 10 y 15 metros del centro del puente?

Solución

Según los datos del problema, la grafica permite identificar algunos parámetros del mismo.

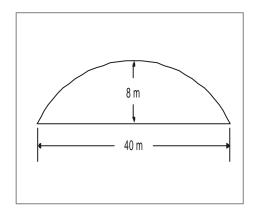
$$2a = 40 \Rightarrow a = 20$$

 $b = 8 \Rightarrow b = 8$

La ecuación canónica, haciendo que el centro coincida con el orígen de coordenadas, será:

$$\frac{x^{2}}{(20)^{2}} + \frac{y^{2}}{(8)^{2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x^{2}}{400} + \frac{y^{2}}{64} = 1$$



. La altura y, cuando x = 10 metros es:

$$\frac{(10)^2}{400} + \frac{y^2}{64} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{64} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} - 64 = \frac{192}{4}$$
$$y^2 = 48 \Rightarrow y = \sqrt{48} \Rightarrow y = 4\sqrt{3}$$

La altura a 10 metros del centro del punto es de aproximadamente 6,928 m.

. La altura y, cuando x = 15 metros será:

$$\frac{\left(15\right)^{2}}{400} + \frac{y^{2}}{64} = 1 \Rightarrow \frac{y^{2}}{64} = 1 - \frac{225}{400} = \frac{175}{400}, \text{ luego}:$$

$$y^{2} = \frac{175}{400} \times 64 = \frac{11.200}{400} = \frac{112}{4} = 28$$

$$y = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

La altura del puente a 15 metros del centro es de aproximadamente 5,2915m.

EJERCICIOS: PROBLEMAS CON SECCIONES CÓNICAS

1. Un rayo de luz es emanado del foco de una parábola, cuya ecuación es $x^2+y-4=0$, este toca con la parábola en el punto p (-1, 3). ¿Cuál será la ecuación del rayo de luz?

Rta.
$$4y-3x-15 = 0$$

2. La superficie que describe la tierra tiene una ecuación de la forma. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4091 = 0$. Un satélite da vuelta a la tierra en forma circular a 0, 6 unidades por encima de ésta. ¿Cual será la ecuación de la órbita del satélite?

Rta.
$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4168 = 0$$

3. Un puente esta construido en forma de aro semielíptica, su extensión es de120 metros y la mínima altura del puente es de 25 metros. ¿Cuál será la altura del arco a 50 metros del centro del puente?

4. En el punto (- 2.200,0) se produce una explosión, el sonido hace sonido en un acantilado ¿ en (2.200 , 0). Una persona ubicada en p (x, y), escucha el eco 6 seg después de oír la explosión. ¿Cuál será la ecuación de la curva para el punto p (x , y) donde se encuentra la persona? La distancia en pies y el sonido viajó a 1.100 pie/seg.

Rta.
$$\frac{x^2}{1.21} - \frac{y^2}{3.63} = 1$$

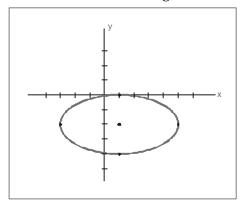
5. Un disco receptor de sonido esta construido en forma paraboloide, el foco esta a 5 cm del vértice cual es el nudo del disco si la profundidad es de 2 cm.

6. Una pista para maratón tiene forma elíptica, la distancia focal es de 40 metros y la longitud del eje menor que pasa por el centro es de 60 metros. ¿Cuál será la longitud del eje mayor de la pista.

Rta. 100 metros.

Autoevaluación. Unidad 2

- 1. ¿Cuál será la ecuación de la recta que corta a x en 3 y es perpendicular a la recta x+2 y-2=0.
- Una pista de ciclismo tiene forma circular, el diámetro es de 80 metros.
 Expresar la forma de la pista como una ecuación matemática. Además determinar la longitud de la pista.
- 3 Para la gráfica dada, hallar la ecuación general correspondiente.



- 4. La recepción de televisión esta en una antena parabólica, cuya ecuación es: $x^2-12y=0$ ¿Cuál será la profundidad del plato de la antena, donde |x|<5.
- 5. Dada la ecuación de la hipérbola $4x^2-y^2-8x-4y-4=0$ identificar, centro, vértice, focos y asíntotas de la misma



Sumatorias y productorias

UCCIÓN

entro del estudio de muchos fenómenos de la naturaleza, la formulación del modelo que describe el comportamiento del mismo, puede estar bajo el uso de variables discretas, siendo las sumatorias y productorias el insumo fundamental.

Las sumatorias y productorias son dos procesos matemáticos muy particulares de gran uso en ciencias estadísticas, ciencias económicas y otras. Aun los fundamentos del cálculo integral, tiene como insumo sus sumatorias; es común hablar de las sumas de Riemman. En el análisis de las series, las sumatorias son el pan de cada día. Pero el caso de las productorias; aunque su uso es muy particular; es pertinente hacerle el espacio para su análisis.

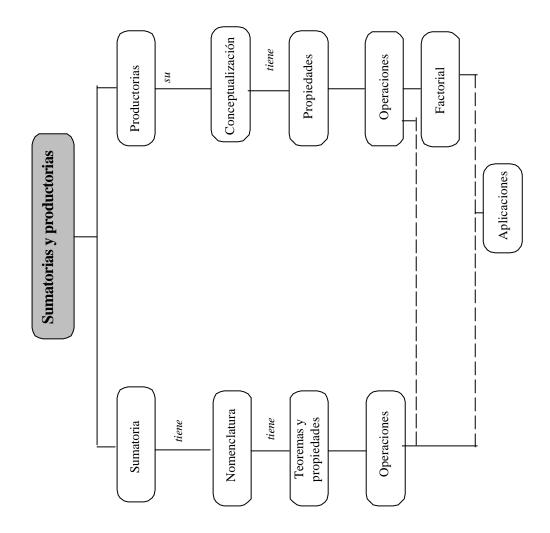
En esta ultima parte del curso, se tratarán estos temas de sumatorias y productorias, como una necesidad, para poder abordar temáticas de calculo, estadística y ciencias; donde son necesarias sus aplicaciones.

OBJETIVO GENERAL

Comprender los principios, propiedades y nomenclatura de las sumatorias y productorias, como herramienta matemática potente para diversos campos del saber.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conceptualizar la sumatoria y sus principios
- Comprender las propiedades de las sumatorias
- Conceptualizar la productoria y sus principios
- Analizar las propiedades de las productorias
- Desarrollar problemas de sumatorias y productorias, utilizando las propiedades.





Las sumatorias

Introducción

La sumatoria, como su nombre lo indica es sumar términos, pero el concepto de sumatoria está asociado con " las sucesiones ", temática que se analizará con detalle en el curso de cálculo diferencial.

Por ahora sólo digamos que una sucesión es una secuencia de términos que siguen una norma de repetición. La sumatoria opera dichos términos.

La sumatoria consiste en operar un conjunto finito de términos númericos; esto significa, la suma de una cantidad de números, donde se conoce del primero al último.

Por ejemplo; nos dice que sumamos los siguientes términos; 1, 2, 3, 4, 5, 6 debemos hacer.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Siendo S la sumatoria de los 6 términos.

Las sumatorias son una gran herramienta en el campo del cálculo y la estadística.

Pero su alcance tiene un enorme espectro en las diferentes ciencias.

D ENOTACIÓN DE SUMATORIA

Las sumatorias se simbolizan con la letra griega sigma $\, \sum \,$, presenta unos limites y una magnitud.

$$s = \sum_{i=a}^{i=a+k} n = n_a + n_{a+1} + n_{a+2} + ... + n_{a+k-1} + n_{a+k}$$

S = La magnitud de la operación realizada

i = El índice de la suma, este varía de a hasta a + k

a = Término inicial de la sumatoria

a + k = Término final de la sumatoria

 n_i = Valor del termino en el punto i.

K = Cantidad de términos a operar en la sumatoria.

Existe un caso particular de sumatoria, son aquellas donde K tiende a infinito y son llamadas series, cuya simbología es:

$$s = \sum_{i=a}^{i=\alpha} n;$$

Esta temática de series será abordada con detalles en cursos mas avanzados.

Veámos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Hallar la suma de los siguientes términos: (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.)

Solución

Expresemos analíticamente el problema:

$$s = \sum_{i=1}^{8} \ \left(2n\right) \ \ \text{ya que 2n, es la representación por comprensión del conjunto de los}$$

números pares positivos.

Para este caso:

i =índice varia de 1 y 8

$$.a = 1$$

$$a + k = 1 + 7 = 8$$

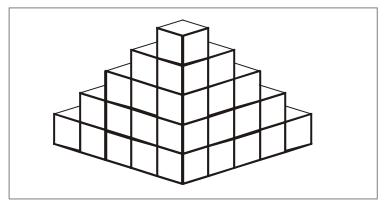
Luego:

$$s = \sum_{i=1}^{8} (2n) = 2(1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) + 2(5) + 2(6) + 2(7) + 2(8)$$

$$s=2+4+6+8+10+12+14+16=72$$

Ejemplo 2

Según la figura, cuántos cubos hay en la organización dada por la pirámide.



Solución

Vemos que cada fila tiene el cuadrado de la cantidad presentada, luego.

$$S=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$$
; luego

$$s = \sum_{i=1}^{5} i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

Ejemplo 3

Resolver la siguiente sumatoria

$$s = \sum_{i=1}^{7} (2i + 2)$$

Solución

Debemos darle valores a i = 1, ..., 7. Entonces:

$$S = (2(1) + 2) + (2(4 + 2) + ... + (2(7) + 2)$$

$$S = 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 70$$

Ejemplo 4

Hallar el valor de $\sum_{i=1}^{6} (5)$

Solución

Debemos sumar 5, 6 veces:

$$S = \sum_{i=1}^{6} (5) = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 6(5) = 30$$

Para facilitar las operaciones con sumatorias, vamos a estudiar a continuación algunos teoremas y propiedades de las sumatorias.

Teoremas

Los siguientes teoremas permiten el buen desarrollo de las sumatorias, algunos se demostraron, pero otros requieren conocimientos más avanzados, por lo cual no serán demostrados; sólo se definirán por su utilidad.

1.
$$\sum_{i=1}^{n} C = Cn$$
 para $n \in \mathbb{R}^+$ y $c = constante$

Demostración

El teorema está indicando sumas n veces el valor de la constante, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} = c + c + c \dots n \text{ veces } = n \bullet c$$

2.
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
 para $n \in \mathbb{R}^+$ y $i=1,2,...,n$

Demostración

La demostración se le atribuye al gran matemático Gauss. (1777-1855) primero desarrollamos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

Como la suma es conmutativa, podemos sumar el contrario.

$$\sum_{i=1}^{n} i = n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1$$

Si sumamos las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)+(2+n-1)+(3+n-2)+...+(2+n-1)+(n+1)$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1) = 2 \sum_{i=1}^{n} n (n+1)$$

Finalmente:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

3.
$$2\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
 para $n \in \mathbb{R}^+$

Demostración

Como investigación. Buscar el método que se utiliza para demostrar este teorema.

4.
$$\sum_{i=n}^{m} i^2 = \sum_{i=1}^{m} i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

5.
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \text{ para } n \in \mathbb{R}^+$$

6.
$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \text{ para } n \in \mathbb{R}^+$$

Los teoremas anteriores son los básicos, su utilidad es amplia, por lo cual es pertinente comprenderlos.

Ejemplo 1

Hallar la sumatoria de: $\sum_{i=1}^{4} i$

Solución

Como n = 4, entonces por el teorema número uno:

$$\sum_{i=1}^{4} i = \frac{4(4+1)}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Ejemplo 2

Hallar la magnitud de: $\sum_{i=1}^{5} i^2$

Solución

Para n = 5, por el teorema número 2, tenemos:

$$S = \sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{5(5+1)(2-5+1)}{6} = \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55$$

Ejemplo 3

¿Cuál es el valor de: $\sum_{i=1}^{8} i^3$

Solución

Por el teorema 4 tenemos:

$$S = \sum_{i=1}^{8} i^3 = \left(\frac{8(8+1)}{2}\right)^2 = \frac{(72)^2}{(2)^2} = \frac{5184}{4} = 1.296$$

Las sumatorias también tienen diversas propiedades; además de los teoremas estudiados.

Propiedades

A continuación enunciaremos algunas propiedades de las sumatorias, muy pertinentes para la resolución de sumatorias, las demostraciones se pueden hacer por inducción matemática, por las metas del curso, se omitirán dichas demostraciones, sólo se recomienda comprenderlas para poder utilizarlas cuando así se requiera.

1.
$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$$
 para $n \in Z^{+}$

Esta propiedad es consecuencia del teorema uno.

2.
$$\sum_{i=p}^{q} i = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$$
 para pyq $\in Z^+$ y p

Esta propiedad nos permite hacer sumatorias, partiendo de cualquier i, diferente de uno.

3.
$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$
 para $n \in \mathbb{R}^+$

4.
$$\sum_{i=1}^{n} 4i = 2n(n+1)$$
 para $n \in Z^{+}$

Las propiedades 3 y 4 son facilmente demostrables, intentarlo como ejercicios.

5.
$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
 para $n \in Z^{+}$ (entero positivo)

La demostración de esta propiedad es relativamente fácil de hacer, pruebe hacerla, es interesante.

6.
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Ejemplo 1

Resolver:
$$\sum_{i=1}^{6} 2i$$

Solución

Por la propiedad uno, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{6} 2i = 6(6+1) = 6 \bullet 7 = 42$$

Ejemplo 2

Hallar la sumatoria de: $\sum_{i=4}^{7} i$

Solución

La propiedad 2, nos indica que la sumatoria se puede hacer desde cualquier valor inicial, luego:

$$\sum_{i=4}^{7} i = \frac{(4+7)(7-4+1)}{2} = \frac{(11)(4)}{2} = 11 \times 2 = 22$$

Ejemplo 3

Hallar la operación de: $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i(i+1)}$

Solución

Por la propiedad 6, podemos hacer la operación:

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

Para comprender las propiedades, se recomienda que usted estimado estudiante proponga diversos ejemplos y los socialice con sus compañeros, eso les dará gran riqueza matemática en sumatorias.

PERACIONES DE SUMATORIA

La sumatoria es un operador que podemos aplicar a suma o resta de términos; también a producto por escalar, veámos:

1.
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Lo anterior significa que la sumatoria de una suma de dos términos, es equivalente a la suma de la sumatoria de cada termino. Este se puede hacer extensiva a más términos.

Demostración

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \dots + a_n + b_n$$

Agrupamos todos los a_i y todos los b_i , luego:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n)$$

Por consiguiente, aplicando operador sumatoria a los dos grupos.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i) + \sum_{i=1}^{n} (b_i)$$

2.
$$\sum_{i=n}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i) - \sum_{i=1}^{n} (b_i)$$

Demostración

Se deja como ejercicio, es muy sencillo.

3.
$$\sum_{i=1}^{n} K a_i = K \sum_{i=1}^{n} a_i$$
 para $k = constante$

Esto significa que la sumatoria del producto de una constante por una secuencia, es equivalente al producto de la constante por la sumatoria de la secuencia.

Demostración

$$\sum_{i=1}^{n} K a_{i} = Ka_{i} + Ka_{2} + Ka_{3} + ... + Ka_{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Ka_{i} = K(a_{1} + a_{2} + a_{3} + ... + a_{n}) \text{ luego}$$

$$\sum_{i=1}^{n} K a_i = K \sum_{i=1}^{n} a_i$$

4.
$$\sum_{i=n}^{m} K = (m-n+1).K$$
 para $k = constante$

Ejemplo 1

Resolver:
$$\sum_{i=1}^{8} (4i+3)$$

Solución

Aplicando la propiedad de suma:

$$\sum_{i=1}^{8} (4i+3) = \sum_{i=1}^{8} 4i + \sum_{i=1}^{8} 3$$

Por el teorema 1 y la propiedad 2, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{8} 4_i + \sum_{i=1}^{8} 3 = 4 \sum_{i=1}^{8} i + 8 \cdot 3 = 4 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + 24 \quad \text{entonces:}$$

$$\sum_{i=1}^{8} (4i+3) = 4 \left(\frac{8.9}{2} \right) + 24 = 4.36 + 24 = 144 + 24$$

Luego:
$$\sum_{i=1}^{8} (4_i + 3) = 168$$

Ejemplo 2

Resolver:
$$\sum_{i=1}^{5} (5_i^2 - 7i)$$

Solución

Aplicando adecuadamente las propiedades:

$$\sum_{i=1}^{5} (5_i^2 - 7_i) = \sum_{i=1}^{5} 5_i^2 - \sum_{i=1}^{5} 7_i = 5 \sum_{i=1}^{5} i^2 - 7 \sum_{i=1}^{5} i$$

Luego:

$$5\sum_{i=1}^{5} i^2 - 7\sum_{i=1}^{5} i = 5\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - 7\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

Como n = 5, reemplazando, tenemos:

$$5\left(\begin{array}{c} 5(5+1)(2.5+1) \\ \hline 6 \end{array}\right) - 7\left(\begin{array}{c} 5(5+1) \\ \hline 2 \end{array}\right) = 5\left(\begin{array}{c} 5(6)(11) \\ \hline 6 \end{array}\right) - 7\left(\begin{array}{c} 5.6 \\ \hline 2 \end{array}\right)$$

Entonces:

$$5\sum_{i=1}^{5} (5i^2 - 7i) = 5\left(\frac{330}{6}\right) - 7\left(\frac{30}{2}\right)$$

$$5\sum_{i=1}^{5} (5i^2 - 7i) = 380$$

Ejemplo 3

Desarrollar
$$5\sum_{i=1}^{N} (x_{ij} - \overline{x}_{j})^{2}$$

Solución

La sumatoria está expresada sobre i, j no es índice de la sumatoria, luego:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(x_{ij} - \overline{x}_{j}\right)^{2} = \left(x_{1j} - \overline{x}_{j}\right)^{2} + \left(x_{2j} - \overline{x}_{j}\right)^{2} + \left(x_{3j} - \overline{x}_{j}\right)^{2} + \dots + \left(x_{N} - \overline{x}_{j}\right)^{2}$$

En la operación sumatoria, dentro de las propiedades se deben aclarar dos situaciones:

1.
$$\sum_{i=1}^{n} x^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x\right)^2$$

$$2. \sum_{i=1}^{n} xi yi \neq \left(\sum_{i=1}^{n} xi \right) \left(\sum_{i=1}^{n} yi \right)$$

Estas dos observaciones se deben tener presentes cuando se trabaja con sumatorias.

Veámos un ejemplo para corroborar la primera observación.

$$\sum_{i=1}^{3} x^{2} \quad y \left(\sum_{i=1}^{3} xi \right)^{2} \quad \text{veámos.}$$

$$\sum_{i=1}^{3} x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_{1}\right) = (x_{1} + x_{2} + x_{3})^{2}$$

Evidentemente
$$\begin{pmatrix} x^2 + x_2^2 + X_3^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}^2$$

A MEDIA ARITMÉTICA

Un ejemplo vivo de la aplicación de la sumatoria, es la muy conocida media aritmética, la cual usando el operador sumatoria es expresada como:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} xi$$
:

De esta se pueden desarrollar dos ecuaciones alternas:

$$nx = \sum_{i=1}^{n} x_i$$
 y $n = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Ejemplo 1

Demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x} \right) = 0$$

Solución

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

La expresión $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$ por la definición de media aritmética la exprexión

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{x} = n\overline{x}$$
 por el teorema 1, visto anteriormente.

Ejemplo 2

Demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x^2 - n\overline{x}^2$$

Solución

Desarrollando el producto notable:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i \overline{x} + \overline{x}^2)$$
 por propiedad de sumatorias

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2x \sum_{i=1}^{n} x_{i} + \sum_{i=1}^{n} x^{2} = \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2} - 2x (nx) + nx^{2}$$

Operando:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2$$

Finalmente:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

D OBLE SUMATORIAS

En situaciones encontradas de álgebra lineal, economía, estadística y otros, se presentan casos donde se debe hacer la suma de n sumas; es decir , la sumatoria de una serie de sumatorias.

La doble sumatoria se expresa de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \sum_{i=1}^{n} a_{i3} + ... + \sum_{i=1}^{n} a_{im}$$

Resumindo:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + ... + \sum_{i=1}^{n} a_{im} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right)$$

Para este tipo de sumatorias, se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Lo anterior nos indica que en una doble sumatoria finita, el orden del operador es irrelevante; o sea, no afecta la operación en su resultado.

Ejemplo 1

Hallar el valor de:
$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} (i+2j)$$

Solución

Haciendo el desarrollo extendido como se expone en la teoría:

$$\begin{split} &\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} \left(i+2j\right) = \sum_{i=1}^{3} \left[\left(i+2(1)\right) + \left(i+2(2)\right) + \left(i+2(3)\right) + \left(i+2(4)\right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(\left(i+2\right) + \left(i+4\right) + \left(i+6\right) + \left(i+8\right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(4i + 20 \right) \end{split}$$

Ahora, aplicamos la segunda sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{3} (i+20) = (4(1)+20) + (4(2)+20) + (4(3)+20)$$

$$= (24) + (28) + (32) = 84, luego$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} (i+2j) = 84$$

Ejemplo 2

Desarrollar:
$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \left(i \bullet 3^{j} \right)$$

Solución

Al igual que en el caso anterior, primero desarrollamos los j y luego los i.

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \left(i \cdot 3^{j} \right) = \sum_{i=1}^{4} \left[i \cdot 3 + i \cdot 3^{2} + i \cdot 3^{3} + i \cdot 3^{4} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left[3i + 9i + 27i + 81i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{4} (120i)$$

Ahora aplicamos la sumatoria sobre i:

$$\sum_{i=1}^{4} (120 i) = [120(1) +120(2) +120(3) +120(4)]$$
$$= \sum_{i=1}^{4} (120 i) = 120 +240 +360 +480 =1200$$

Luego:

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \left(i \bullet 3^{j} \right) = 1.200$$

Ejemplo 3

Demostrar que la expresión:

$$\sum_{j=0}^{2} \sum_{j=2}^{4} \left(\frac{j \bullet i}{j+i} \right)^{2} = \frac{21.113}{3.600}$$

Por favor desarrollar este ejemplo en pequeño grupo colaborativo y compartir el resultado con el docente.

EJERCICIOS: SUMATORIAS

Calcular las siguientes sumatorias:

$$1. \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}i$$

Rta.
$$\frac{1}{4} \left(n^2 + n \right)$$

2.
$$\sum_{j=4}^{15} j$$

3.
$$\sum_{l=1}^{12} \left(l^2 + l \right)$$

4.
$$\sum_{i=1}^{8} 6i^4$$

5.
$$\sum_{j=7}^{18} (12)$$

6.
$$\sum_{K=5}^{14} K^2$$

Resolver las siguientes dobles sumatorias:

7.
$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=3}^{7} (i+1)(j-1)$$

8.
$$\sum_{i=0}^{5} \sum_{j=2}^{3} \left[(-2)^{i} \cdot j + j^{3} \right]$$

Rta. 105



PRODUCTORIAS

Introducción

El operador productoria no es muy conocido o mejor muy divulgado, tal vez por que su utilidad es muy particular, sin embargo este operador es fundamental en algunos temas de matemáticas por ejemplo, hemos escuchado o aun trabajado con el producto factorial, (n!) dicha operación es consecuencia de este operador. Quizás existan mas razones, pero solo la mencionada nos induce a que debemos analizar tan interesante operación matemática.



Para simbolizar una productoria, se utiliza el símbolo griego Pi mayúscula π Así, una productoria se define de la siguiente manera.

$$\pi_{i=1}^{n} a_{i} = a_{1} \times a_{2} \times a_{3} \times ... \times a_{n}$$

Esto quiere decir que la productoria, es la multiplicación de todos los valores ${\bf a}$ i, dado que i varia de 1 hasta n.

Podemos generalizar la definición comenzando en cualquier punto, así:

$$\begin{matrix} m \\ \boldsymbol{\pi} \\ a_i = a_n . & a_{n+1} . & a_{n+2} & ... & a_m \end{matrix}$$
 siendo $n \le m$

En esta opinión es importante identificar el número de factores el cual se obtiene con la siguiente relación:

Numerode factores: m - n + 1

Ejemplo 1

Dada la productoria $\pi_{i=1}^{a_i}$ identificar la productoria y el número de factores.

Solución

Como $\prod_{i=1}^4 a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$. Así queda indicada la productoria. Ahora el número de factores: m-n+1=4-1+1=4. Efectivamente hay cuatro factores.

Ejemplo 2

Calcular: $\prod_{i=1}^{5} 2^{i}$

Solución

Si hacemos la extensión de la sumatoria:

$$\prod_{i=1}^{5} \, 2^i \, = 2^1 \, . \, 2^2 \, . \, 2^3 \, . \, 2^4 \, . \, 2^5 \, = 2 \, . \, 4 \, . \, 8 \, . \, 16 \, . \, 32$$

$$\prod_{i=1}^{5} 2^{i} = 208.846$$

El número de factores: 5 - 1 + 1 = 5

Ejemplo 3

Desarrollar $\int\limits_{i=3}^{6} \left(\frac{i^2}{i+1} \right) \, y$ determinar el número de factores.

Solución

$$\begin{split} & \frac{6}{\pi} \left(\begin{array}{c} \frac{i^2}{i+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{3^2}{3+1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{4^2}{4+2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{5^2}{5+2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{6^2}{6+2} \end{array} \right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{6} \cdot \frac{25}{7} \cdot \frac{36}{8} \\ & \frac{6}{\pi} = \frac{9}{4} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{25}{7} \cdot \frac{9}{2} = \frac{16.200}{168} = \frac{2.025}{21} = \frac{675}{7} \text{, luego:} \\ & \frac{6}{\pi} \left(\begin{array}{c} \frac{i^2}{i+1} \end{array} \right) = \frac{675}{7} \end{split}$$

El número de factores 6-3+1=4 factores ¿es cierto?

♦ Cálculo de productorias

A continuación vamos a estudiar algunas formulas que nos permiten desarrollar productorias de manera más racional.

$$\begin{array}{c}
 n \\
 \pi \quad i = n \\
 i = 1
\end{array}$$

$$4. \qquad \begin{array}{c} n \\ \pi \\ i=m \end{array} \left(\begin{array}{c} i \end{array} \right) \ = \frac{n!}{(m-1)!} \quad para \quad m \leq n$$

 \textbf{U}_{NAD}

Ejemplo 1

Hallar $\pi_{i=1}^{6}(p)$ siendo p = constante.

Solución

Como p es constante, entonces por la operación 1, tenemos:

$$\mathop{\pi}_{i=1}^{6}\left(p\right)=p^{6}$$

Ejemplo 2

Resolver $\begin{array}{c} 4 \\ \pi \\ i=1 \end{array}$ (3). Identificar el número de factores.

Solución

$${\pi\atop i=1}^4 (3) = 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

El número de factores: 4 - 1 + 1 = 4 factores.

Ejemplo 3

Hallar el valor de: $\int_{i=1}^{5} (i)$

Solución

Como i varía de 1 a 5, entonces:

Ejemplo 4

Resolver:
$$\pi_{i=3}^{7}$$
 (i)

Solución

Como inicia en 3, termina en 7, aplicamos la operación 4, luego:

$$\pi_{i=3}^{7} (i) = \frac{7!}{(3-1)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$



ROPIEDADES DE PRODUCTORIAS

Como cualquier operación matemática, las productorias tienen sus propiedades, las cuales simplifican las operaciones que se requieran.

Esta propiedad nos dice que la productoria de una constante por una secuencia, es igual al producto de la constante elevada al valor mayor de la productoria, multiplicado por la productoria de la secuencia.

La productoria de un producto de varios términos, es igual al producto de las productorias de cada termino.

3.
$$\frac{n}{\pi} \left(\frac{f(i)}{g(i)} \right) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(i)}{\prod_{i=1}^{n} g(i)}$$
 para
$$\frac{n}{\pi} g(i) \neq 0$$

La productoria de un cociente, es igual al cociente de las productorias de los términos.

4.
$$\sum_{i=1}^{n} \log x_i = \operatorname{Log} \begin{bmatrix} n \\ \pi \\ i=1 \end{bmatrix} (x_i)$$

Esta propiedad nos relaciona las sumatorias con la productoria, por medio del logaritmo.

Ejemplo 1

Desarrollar:
$$\begin{bmatrix} 6 \\ \pi \\ 2i \end{bmatrix}$$

Solución

Como 2 es constante, entonces:

Entonces:

$$\begin{array}{ccc}
6 \\
\pi & 2i \\
i = 1
\end{array}$$

Ejemplo 2

Desarrollar la productoria:

$$\frac{m}{\pi} \left(\frac{i^2}{(i+1)^2} \right)$$

Solución

$$\frac{m}{\pi} \left(\frac{i^2}{(i+1)^2} \right) = \frac{n^2}{(n+1)^2} \bullet \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} \bullet \dots \bullet \frac{(m-1)^2}{m^2} \bullet \frac{m^2}{(m+1)^2}$$

Simplificando términos semejantes, obtenemos:

$$\frac{m}{\pi} \frac{i^2}{(i+1)^2} = \frac{n^2}{(m+1)^2}$$

Ejemplo 3

Para el caso del ejemplo 2, si n = 4 y m = 9. Hallar la productoria.

Solución

Como se hizo el desarrollo de la productoria da n hasta m, entonces:

$$\frac{9}{\pi} \frac{i^{2}}{(i+1)^{2}} = \frac{4^{2}}{(9+1)^{2}} = \frac{16}{100} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

$$\begin{array}{cc}
9 & i^2 \\
\pi & (i+1)^2
\end{array} = \frac{4}{25}$$

Ejemplo 4

Resolver:

$$\sum_{i=1}^{4} \text{Log } (4i)$$

Solución

Por la propiedad de equivalencia entre sumatorias y productorias:

$$\sum_{i=1}^{4} \text{Log } (4i) = \text{Log} \begin{bmatrix} 4 \\ \pi \\ i=1 \end{bmatrix} (4i) = \text{Log } \begin{bmatrix} 4^{4} & 4 \\ 4^{5} & \pi \\ i=1 \end{bmatrix} = \text{Log } [256 (4!)]$$

$$\sum_{i=1}^{4} \text{Log (4i)} = (256.24) = \text{Log (61.44)}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \text{Log (4i)} \cong 3,788$$

EJERCICIOS DIVERSOS

Con el fin de analizar este tema, el cual requiere buen trabajo para comprenderlo e interiorizarlo, vamos a desarrollar ejemplos diversos, algunos mezclamos los

operadores $\sum y \pi$.

Ejemplo 1

Hallar el cálculo de:

$$\prod_{i=1}^{6} 3^{-i}$$

Solución

Operando normalmente:

$$\pi \left(3^{-i} \right) = 3^{-1} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-4} \cdot 3^{-5} \cdot 3^{-6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{3^6}$$

$$\pi \left(3^{-1} \right) = \frac{1}{3^{22}}$$

El número de factores es: 6-1+1=6

Ejemplo 2

Hallar
$$\sum_{j=3}^{7} \sum_{i=1}^{5} 3(2i + j)$$

Solución

Hacemos la primera sumatoria:

$$\sum_{j=3}^{7} \left(\sum_{i=1}^{5} 6i + 3j \right) = \sum_{j=3}^{7} \left(6 \sum_{i=1}^{5} i + 3 \sum_{i=1}^{5} j \right), \text{ por propiedades de sumatoria.}$$

$$\sum_{j=3}^{7} \left(6 \left[\frac{5(5+1)}{2} \right] + 3.5j \right) = \sum_{j=3}^{7} \left(90 + 15j \right)$$
 Ahora hacemos la sumatoria sobre j.

$$\sum_{j=3}^{7} (90+15j) = \sum_{j=3}^{7} (90) + \sum_{j=3}^{7} (15j) = (7-3+1) \cdot 90+15 \left(\frac{(7+3)(7-3+1)}{2} \right)$$

$$\sum_{j=3}^{7} \left(90 + 15j \right) = 5.90 + 15.25 = 450 + 375$$
 , por consiguiente:

$$\sum_{j=3}^{7} \sum_{i=1}^{5} 3(2i+j) = 825$$

Ejemplo 3

Resolver:

$$\pi_{i=-2}^{1} \left(\frac{i}{i+3} \right)$$

Solución

Como va de -2 hasta 1, la secuencia no se restringe, es decir, no hay restricciones en este intervalo.

$$\pi \left(\frac{i}{i+3} \right) = \left(\frac{-2}{-2+3} \right) \left(\frac{-1}{-1+3} \right) \left(\frac{0}{0+3} \right) \left(\frac{1}{1+3} \right) = (-2) \left(-\frac{1}{2} \right) (0) \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$\pi \left(\frac{1}{i-2} \left(\frac{i}{i+3} \right) = 0 \right)$$

Ejemplo 4

Resolver:

$$\pi \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=6}^{10} \left(20j - 2j^2 - i \right) \bullet i$$

Solución

Resolvemos primero la sumatoria:

$$\pi \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=6}^{10} \left(20j - 2j^{2} - i \right) \bullet i = \pi \sum_{i=2}^{3} \left[i \sum_{j=6}^{10} \left(20j - 2j^{2} - i \right) \right] =$$

$$\pi \sum_{i=2}^{3} \left[i \bullet \left(20 \sum_{j=6}^{10} j - 2 \sum_{j=6}^{10} j^{2} - \sum_{j=6}^{10} j \right) \right] =$$

$$\pi \sum_{i=2}^{3} \left[i \bullet \left(20 \frac{(10+6)(10-6+1)}{2} - 2 \left(\sum_{j=1}^{10} j^{2} - \sum_{j=1}^{5} J^{2} \right) - (10-6+1)i \right) \right] =$$

$$\pi \sum_{i=2}^{3} \left[i \bullet \left(800 - 2 \left(\frac{10(10+1)(2.10+1)}{6} - \frac{5(5+1)(2.5+1)}{6} \right) - 5i \right) \right] =$$

$$\pi \sum_{i=2}^{3} \left[i \bullet \left(800 - 2(385 - 55) - 5i \right) \right] =$$

$$\pi \sum_{i=2}^{3} \left[i \bullet \left(800 - 660 - 5i \right) \right] = \pi \sum_{i=2}^{3} \left[i (140 - 5i) \right] =$$

$$\pi \sum_{i=2}^{3} \left[140i - 5i^{2} \right] \text{ por propiedad de productorias y desarrollando:}$$

$$= \left(140 (2) - 5 (2)^{2}\right) \left(140 (3) - 5 (3)^{2}\right) = (280 - 20) (420 - 45)$$
$$= (260) (375) = 95.500$$

Entonces:

$$\pi \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=6}^{10} \left(20j - 2j^2 - i \right)^{\bullet i} = 95.500$$

Ejemplo 5

Qué valor debe tomar p en la siguiente expresión, para que se cumpla la igualdad.

$$\sum_{j=1}^{p} (j+1) \bullet j \pi_{i=1}^{j} \left(\frac{i}{i+1} \right) = 6$$

Solución

Desarrollando la productoria:

$$\sum_{j=1}^{p} (j+1) \bullet j \left[\frac{1}{1+1} \bullet \frac{2}{2+1} \bullet \frac{3}{3+1} \bullet \dots \bullet \frac{j-2}{j-1} \bullet \frac{j-1}{j} \bullet \frac{j}{j+1} \right] = 6$$

Simplificando tenemos:

$$\sum_{j=1}^p (j+1) \bullet j \left[\begin{array}{c} \frac{1}{j+2} \end{array} \right] = \sum_{j=1}^p j = 6 \quad \text{por desarrollo de sumatoria:}$$

$$\sum_{j=1}^{p} j = 6 \implies \frac{p(p+1)}{2} = 6 \implies p(p+1) = 12, \text{ luego}$$

$$p^2 + p - 12 = 0 \implies (p+4)(p+3) = 0, p = -4 \text{ ó } p = 3$$

Es obvio que el valor será p=3, ya que el valor negativo para p no tiene sentido; ya que la secuencia inició en 1 y p debe ser mayor o igual a uno. p=1.

EJERCICIOS: PRODUCTORIAS

Calcular las siguientes productorias:

1.
$$\pi^{6}_{i=1}^{2^{i}}$$

Rta. 2'097.152

$$2. \qquad \pi \left(\frac{1+j}{j+2} \right)$$

Rta.1/3

3.
$$\pi_{1=6}^{10}$$
 (i)

Rta.30.240

4.
$$\pi_{K=1}^{4} (8x_{k})$$

Rta. 4096 $x_1.x_2.x_3.x_4$

5.
$$\pi_{j=1}^{20}(5+j)$$

Rta. 1,2926 x 10²³

6.
$$\pi^{6} \frac{i^{2}}{(i+1)^{2}}$$

Rta. $\frac{a^2}{(b+1)^2}$

Resolver las siguientes operaciones:

7.
$$\sum_{i=2}^{7} \sum_{j=1}^{5} (j+i)$$

Rta. 225

8.
$$\sum_{i=2}^{7} \pi_{i=4}^{5} 3 \left[2i + (-1)^{i} \bullet j \right] \quad \text{Rta.2.83}$$

9.
$$\sum_{i=1}^{3} \frac{i-1}{\pi} \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{k}{(j+1)^{2}} \right)$$

R ACTORIAL

El factorial o producto factorial de un numero, es una operación que permite hacer productos secuenciales, cuando se requiere; tal es el uso de las combinatorias en el calculo de probabilidades

Definición

Para todo numero natural n, el factorial de \mathbf{n} , es el producto de todos los naturaleza desde 1 hasta n.

$$n! = 1x2x3x...x(n-1)xn$$

Ejemplo 1

Hallar 3!.

Solución

Por la definición:

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$
, luego $3! = 6$

Ejemplo 2

Calcular 6!.

Solución

 $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

Este operador factorial es pieza fundamental en análisis matemático, como el desarrollo polinomial de las funciones, las fórmulas de Taylor y Maclaurin; en la series.

Dos propiedades importantes de la productoria

- **1.** 0! = 1. Por definición el factorial de cero es uno.
- 2. n! = n x(n-1)!. Descomposición del factorial, en dos factores, dados por el número y el factorial del número anterior.

Ejemplo 3

Descomponer 7! en producto de dos factores.

Solución

 $7! = 7 \times 6!$ Según la propiedad dos propuesta.

3. $n! \cong \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \colon \text{ conocido como la fórmula de Stirling, que permite}$ hallar el factorial de n; cuando éste tiende a infinito.

AUTOEVALUACIÓN UNIDAD 3

1. Hallar la sumatoria propuesta

$$\sum_{i=7}^{12} j^2$$

2. Cuál será el valor de:

$$\sum_{i=1}^{5} \left(3i^2 - 4\right)$$

3. Resolver:

$$\sum_{j=3}^{7} \sum_{i=1}^{5} [3(2i+j)]$$

4. Resolver la expresión:

$$\sum_{j=3}^{7} \pi_{i=4}^{5} \left[2i + 3j \right]$$

5. Hallar la solución de la siguiente productoria:

$$\prod_{j=4}^{7} \left[2i - j \right]$$

6. Resolver:

$$\prod_{i=n}^{m} \frac{i^2}{(i+1)^2}$$

Autoevaluación Unidad 1

1.
$$\frac{x-3}{2(x-1)} = \frac{1}{6} - \frac{1-4x}{3(x-1)}$$

Revisamos el común denominador y operamos: 6(x-1), luego:

$$\frac{3(x-3)}{6(x-1)} = \frac{(x-1) \cdot 1 - 2(1-4x)}{6(x-1)}$$

Operamos los numeradores y simplificamos denominadores:

$$3x-9x = x-1-2 +8x \Rightarrow 3x-9=9x-3$$
, reorganizando:

$$3x-9x=3+9 \Rightarrow -6x \ 6 \Rightarrow x=-1$$

Solución

2. Primero concretamos las ecuaciones fraccionarias entonces:

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -1 \implies \frac{3x - 4y}{6} = -1 \implies 3x - 4y = -6$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y = \frac{5}{2} \implies \frac{9x + 4y}{12} = \frac{5}{2} \implies 9x + 4y = \frac{5}{2} (12) = 30$$

Tenemos dos ecuaciones enteras, eliminamos y; por reducción:

$$3x - 4y = -6$$

$$\frac{9x - 4y = 30}{12x} = 24$$

$$12y = 24$$

Despejando x, tenemos:

$$x = \frac{24}{12} \Rightarrow x = 2$$

Con el valor de x, remplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones enteras, veamos: tomemos la ecuación primera:

$$3x - 4y = -6 \implies 3(2) - 4y = -6 \implies 6 - 4y = -6$$

 $-4y = -6 - 6 \implies -4y = -12 \implies y = \frac{-16}{-4}$; luego $y = 3$

Solución

$$x = 2 y y = 3$$

3. Organizando el sistema:

$$18x - y \ 0z = 2$$

 $0x + 3y + 4z = 1$
 $x + 0y - z = 0$

Por Kramer:

$$x = \frac{Dx}{D}$$
; $y = \frac{Dy}{D}$; $z = \frac{Dz}{D}$

Hallamos D:

$$D = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 18 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (18 x 3 x - 1) + (0x0 x0) + (|x| x4) \\ - [(0x3x1) + (4x0 x18) + -1x0x0) \end{bmatrix}$$

$$D = -54 - 4 = -58$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left[(2x) x - 1 + (1x0x0) + (0x - 1x4) \right]$$

$$Dx = -6 - (1) = -7$$

Para resolver el determinante, utilizamos el método de sarros.

$$D = \begin{vmatrix} 18 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 18 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \left[(18x1 x - 1) + (0x0x0) + (1x2x4) \right] - \left[(0x1x1) + (4x0x18) + (-1xx20) \right]$$

$$Dy = -18 + 8 = -10$$

Ahora:

$$D = \begin{vmatrix} 18 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 18 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (18 \times 3 \times 0) + (0 \times 0 \times 2) + (1 \times -1 \times 1) \\ - [(2 \times 3 \times 1) + (1 \times 0 \times 18) + (0 \times -180)] \end{vmatrix}$$

$$Dz = (-1) - (6) = -7$$

Ahora hallemos el valor de cada variable:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-7}{-58} = \frac{7}{58}$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-10}{-58} = \frac{10}{58} = \frac{5}{29}$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{-7}{-58} = \frac{7}{58}$$

4. El tubo tarda: T = 12 hr

El tubo y manguera tardan T +M = $8\frac{4}{7}$ hr. La pregunta: M =.? hr.

Sea M = tiempo que tarda la manguera en llegar al tanque, luego: $\frac{1}{M}$ es la parte del tanque que es llenado por la manguera en 1 hora.

Como T = tiempo que tarda el tubo en llenar el tanque equivale a 12hr, entonces; $\frac{1}{12}$ es la parte del tanque que es llenado por el tubo en 1 hora.

Ahora, la parte del tanque que es llenado por los dos, tubo y manguera; será:

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{12} = \frac{1}{8\frac{4}{7}} \quad \Rightarrow \frac{1}{M} + \frac{1}{12} = \frac{7}{60} \; . \quad \text{Despejamos } M.$$

$$\frac{1}{M} + \frac{7}{60} - \frac{1}{12} \implies \frac{7-5}{60} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$$
 entonces.

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{30}$$
; por consiguiente: M = 30 hr.

Luego el tanque es llenado pro la manguera en 30 hr.

5. Por ser una desigualdad compuesta, la podemos trabajar por partes.

$$\frac{4}{x-2} < \frac{x-3}{5} < \frac{x}{2}$$
. Entonces se puede expresar como:

$$\frac{4}{x-2} < \frac{x-3}{5}$$
 y $\frac{x-3}{5}$ < $\frac{x}{2}$

Vemos que se prestan dos desigualdades conectadas con la y; es decir la conjunción, lo que indica que las dos desigualdades intersectan para obtener la solución general.

$$\frac{4}{x-2} < \frac{x-3}{5} \qquad y \qquad \frac{x-3}{5} < \frac{x}{2}$$

$$\frac{4}{x-2} - \frac{x-3}{5} < 0 \qquad y \qquad \frac{x-3}{5} - \frac{x}{2} < 0$$

$$\frac{20 - (x-2)(x-3)}{5(x-2)} < 0 \qquad y \qquad \frac{2x-6-5x}{10} < 0$$

$$\frac{20 - (x^2 - 5x+6)}{5(x-2)} < 0 \qquad y \qquad \frac{-3x-6}{10} < 0$$

$$\frac{-x^2 + 5x - 6 + 20}{5(x-2)} < 0 \qquad y \qquad \frac{-3x-6}{10} < 0$$

$$\frac{-x^2 + 5x + 14}{5(x-2)} < 0 \qquad y \qquad \frac{-3x-6}{10} < 0$$

$$\frac{x^2 - 5x - 14}{5(x - 2)} > 0 y \frac{-3x - 6}{10} < 0$$

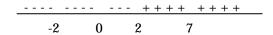
$$\frac{(x-7)(x+2)}{5x-10} > 0 y \frac{-3x-6}{10} < 0$$

Para resolver la primera desigualdad, utilizamos el método de ley de signos; es decir ,por medio de puntos críticos.

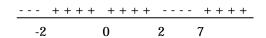
X – 7: Parte crítica 7, los valores mayores a 7 darán positivo la resta y los menores darán negativa la recta.

x + 2: similar al caso anterior, el puntro centro - 2, luego:

5x su punto crítico en 2, entonces:



Haciendo producto de signos, tenemos:



Como la desigualdad dice que la fracción debe ser mayor que cero, la solución sera la parte positiva; entonces:

Solución

$$(-2, 2) \cup (7, \alpha)$$

La segunda desigualdad:

 $\frac{-3x-6}{10} < 0~$ esta será negativa cuando el numerador sea negativo, ya que el denominador es positivo, luego:

$$-3x - 6 < 0 \implies -3x < 6 \implies x > 6/3 \implies x > -2$$

Solución

 $(-2, \alpha)$

Finalmente: Las dos soluciones las intersectamos por el conectivo.

Primera solución:



Solución general:

Solución general: $(-2,2) \cup (7,\alpha)$

6. Para
$$3x^2 - x > 4$$
; entonces: $3x^2 - x > 4$ y $3x^2 - x < -4$

Luego:

$$3x^2 - x - 4 > 0$$
 Y $3x^2 - x + 4 < 0$

para la primera:

$$\frac{\left(\,3x\,\right)^{\,2}\;-\left(\,3x\,\right)\;-12}{3}\;>0\;\;\Rightarrow\;\frac{\left(\,3x\;-4\,\right)\;\left(\,\,3x\,+3\right)}{3}\;>0\;,\;\text{simplificando:}$$

(3x-4)(x+1) > 0. Por el método de producto signos.

Como el producto debe ser positivo, entonces:

Solución

$$(-\alpha,-1) \cup (4/3,\alpha)$$

 $3x^2 - x + 8 < 0$: por lo cual para el segundo término:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(5)(4)}}{2(3)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 48}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{-47}}{6}$$

Vemos que la solución es imaginaria.

7. Peso mujeres: 5.68=340kg. Peso hombre x.5. Peso máximo $5x + 340 \le 700$

Resolvemos para x:

$$5x \le 700 - 340$$

 $5x \leq 360$

 $x \leq 72$

El peso promedio máximo del hombre es 72. kg.

8. Para la función

 $f(x) = (x-1)^3 + 3$

.Do min io $x/x \in R$

. Im agen $y/y \in R$

. Monotonía : sea $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$;

entonces vemos que entonces vemos que, debemos hallar:

$$f(x_1)$$
 y $f(x_2)$ para compararlos:

$$f(1) = (0)^2 + 3 = 3$$

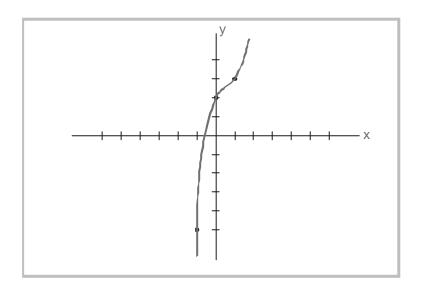
$$f(4) = 27 + 3 = 30$$

Como $f(x_1) < f(x_1)$ la función es creciente en su dominio.

Simetría. Determinamos f(-x); si es igual a f(x) la forma es par, luego sería simetría, respecto a y: pero si es igual a -f(x), la función será impar y la simetría sería respecto al origen, a ninguna de las dos. Veámos:

 $f(-x) = (-x-1)^3 + 3 = -(x+1)^3 + 3 = -((x+1)^3 - 3)$, lo que no es igual a - f(x), luego no es par, tampoco impar, entonces no presenta simetría.

La gráfica:



9. Precio
$$p = \frac{1}{2}x + 80$$

Ingreso $R = x \cdot p$.

Como de la transacción P = 200 millones, reemplazamos en la función presio.

$$200 = \frac{x}{2} + 80 \implies 400 = x + 80 \implies x = 320 \quad unidades.$$

Ahora, calculemos el ingreso R:

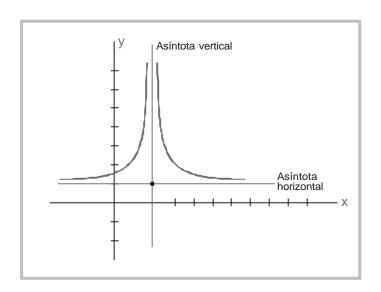
$$R = x \cdot p = x \left(\frac{1}{2}x + 80 \right) = \frac{1}{2}x^2 + 80 x$$

$$R = \frac{1}{2} (320)^2 + 80 (320) = 51.200 + 25.600$$

$$R = 76.800 \text{ millones}$$

10. La función $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ y de la forma básica $\frac{1}{x^2}$, solo que fue trasladada dos unidades a la derecha de x y una unidad hacia arriba de y.

UNAD



Dominio: $x \in R / x \neq 2$

Imagen: $y \in R / y > 1$

Monotonía: la función es creciente de $(-\alpha,2)$ y decreciente de $(2,\alpha)$, luego no es monótona en su dominio.

11. Si tenemos:

 $3^{5x-8} = 9^{x+2}$, lo dejamos con la misma base:

$$3^{5x-8} = 3^{2(x+2)} \implies 3^{5x-1} = 3^{2x+4}$$
. Aplicamos función inversa.

 $\text{Log }_{3} \ 3^{5x-8} = \text{Log }_{3} \ 3^{2x+4}$; obtenemos:

$$5x - 8 = 2x + 4 \implies 5x - 2x = 4 + 8 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

Solución

x = 4

12. Para p (t) = 1.000^{-4}

a. La población inicial es cuando t=0, entonces:

$$p(t = 0) = 1.000 = 0 = 1.000$$

Población inicial 1.000 personasl.

b. Cuando p (t) = 3 (1.000) = 3.000, luego:

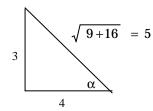
$$3000 = 1000$$
 t $\Rightarrow 3 = ^{t}$

$$\operatorname{Ln} Z = \operatorname{Ln} \boldsymbol{\varphi}$$
)^t \Rightarrow t = Ln(3)

t=1,098 años

La población se triplica a dos 1,098 años.

13. Una gráfica nos ayuda a resolver el problema:



$$\tan (\alpha) = \frac{3}{4}$$
, entonces

sen
$$(\alpha) = \frac{3}{5}$$
; cos $(\alpha) = \frac{4}{5}$

cot
$$(\alpha) = \frac{4}{3}$$
; sec $(\alpha) = \frac{5}{3}$

$$\csc(\alpha) = \frac{5}{4}$$

14. El ángulo de 105° , se pide descomponer en: $60^{\circ} + 45^{\circ}$, luego $\cos (105^{\circ}) = \cos (60^{\circ} + 45^{\circ})$; por identidad de suma de ángulos para coseno:

$$\cos (60^{\circ} + 45^{\circ}) = \cos 60^{\circ} \cdot \cos 45^{\circ} - \sin 60^{\circ} - \sin 45^{\circ}$$

cos
$$(60^{\circ}+45^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{6}{4}$$
, luego

$$\cos (105^{\circ}) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

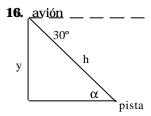
15. sen $(2x) = \cos(x)$, primero reducimos el ángulo doble a ángulo sencillo. sen $(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$. luego:

2sen
$$(x) \bullet \cos(x) = \cos(x) \Rightarrow 2sen(x) \cos(x) - \cos(x) = 0$$

 $\cos\left(x\right)\left[\,2\,\text{sen}\,\left(\,x\right)\,-1\,\right]\ =\,0\,,\,\text{por la ley del producto nulo.}$ $\cos\left(\,x\right)\,=\!0\quad \acute{o}\quad 2\,\text{sen}\,\left(\,x\,\right)\,-1\,=\,0\,,\,\text{despejamos el ángulo; así:}$

$$\cos(x) = 0 \Rightarrow \cos^{-1}(\cos(x)) = \cos^{-1}(0) \Rightarrow x = \cos^{-1}(0)$$
$$x = \frac{\pi}{2}, \ 3\frac{\pi}{2}, \text{ ángulos donde el coseno vale 0.}$$

.
$$2\text{sen}(x) - 1 = 0 \Rightarrow 2\text{ sen}(x) = 1 \Rightarrow \text{sen}(x) = \frac{1}{2}$$
. Luego:
$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}(x)) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \ \frac{5\pi}{6}, \text{ ángulos donde el seno}$$
 vale 1/2.



y=1.200 metros $h=distancia del avión a la pista <math display="block">\alpha = 30^{\circ} \ por \ ángulos \ alternos \ inernos.$ Luego:

$$sen (\alpha) = \frac{y}{h} = h = \frac{y}{sen (\alpha)} = \frac{1.200 metros}{sen (30^{\circ})} = \frac{1.200}{\frac{1}{2}} = 2.400 metros$$

El avión se encuentra a 2.400 metros de distancia de la pista de aterrizaje.

17.

Sea
$$y = \operatorname{sen} h^{-1}(x)$$

$$x = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^{y} - \frac{1}{e^{y}} \Rightarrow 2x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{y}}$$

$$2x^{y}e = e^{2y} - 1 \Rightarrow 2xe^{y} - e^{2y} + 1 = 0 \text{ reorganizando:}$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$
. por la cuadrática

$$e^y = \frac{2x \, \pm \, \sqrt{\, 4x^{\, 2} \, - 4 \, (1) \, \left(- \, 1 \right)}}{2} \, = \frac{2x \, \pm \, \sqrt{\, 4x^{\, 2} \, + 4}}{2} \quad \text{simplificando}$$

$$e^y = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 + 1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$
, para despejar y, aplicamos función inversa

$$Lne^y = Ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$$
 tomamos solo el valor postizo.

$$y = Ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Autoevaluación Unidad 2

1. Primero hallamos la pendiente de la ecuación de la recta que se conoce:

$$x + 2y - 2 = 0 \implies 2y = -x + 2 \implies y = -\frac{1}{2}x + 2$$
,

luego la pendiente es $-\frac{1}{2}$.

Como dos rectas son perpendiculares cuando el producto sus pendientes $\,$ es igual $a\,$ -1 , entonces:

$$m\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \implies m = -1 \bullet (-2) = 2$$

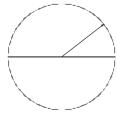
La pendiente de la ecuación desconocida es 2, entonces :

y=2x+b, para hallar b, el problema nos dice que la recta corta a x=3, entonces el punto (3,0) hace parte de dicha recta, luego:

$$0 = 2(3) + b \implies b = -6$$
, por consiguiente:

$$y=2x-6 \Rightarrow -2x+y+6=0$$
 ecuación de la recta buscada

2. Como la pista es circular y su diámetro es 80 metros, su radio será de 40 metros. La ecuación será de la forma:



 $x^2 + y^2 = r^2$. Si tomamos el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas, entonces:

$$x^2 + y^2 = (40)^2 \implies x^2 + y^2 = 1.600$$

La longitud es de laforma:

$$S = 2\pi r \implies S = 2\pi (40) = 80\pi \text{ metros}$$

3. Según la gráfica:

$$a = 4$$
 y $b = 2$, el vértice $(h,k) = (1,-2)$, entonces como

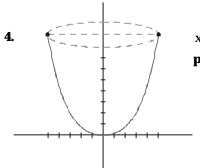
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
 Tomando la ecuación canónica y reemplazando,

tenemos:

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

Para hallar foco:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \implies c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



$$x^2 - 12y = 0 \implies x^2 = 12y$$
 $4p = 12$
p = 3 distancia focal es 3.

Para x = 5, buscamos el valor de y, que será equivalente a la profundidad del plato.

Como:
$$x^2 - 12y = 0 \implies (5)^2 - 12y = 0 \implies -12y = -25$$
, luego:

$$y = \frac{25}{12}$$
 por consiguiente la profundidad del plato es de 25/12.

$$y \cong 2,083.$$

5. A partir de la ecuación: $4x^2-y^2-8x-4y-4=0$, agrupamos términos semejantes y completamos cuadrados:

$$4\left(x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) - \left(y^2 + 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) = 4, \text{ equivalente a:}$$

$$4\left(x^2-2x+1\right) - \left(y^2 + 4y + 4\right) = 4 + 4 - 4$$

$$4(x-1)^2 - (y^2 + 4y + 4) = 4 + 4 - 4$$
, reorganizando:

$$(x-1)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$
 Ecuación canónica.

De esta podemos hallar:

Centro (1, -2).

$$a = 1$$
 $y b = 2$

Focos: para hallar los focos, hallamos

 $c: c^2=a^2+b^2; c^2=1+4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$. Ahora si hallamos los focos. Como el eje transverso está sobre x, ya que en la ecuación x es positivo y y negativo, luego;

$$F(h \pm c, k) = \left(1 \pm \sqrt{5}, -2\right)$$

Vértices:
$$(h \pm a, k) = (1 \pm 1, -2) \Rightarrow V(2, -2) \quad y \quad V'(0, -2)$$

Asíntotas:
$$y+2=(2x-2) \Rightarrow y=\pm 2x-2)-2$$

Autoevaluación Unidad 3

1. Como la sumatoria es de tipo: $\sum_{i=a}^{b} i^2$ reemplazamos la propiedad que nos

lleva a i desde uno hasta n.

$$\sum_{i=a}^{b} i^{2} = \sum_{i=a}^{b} i^{2} - \sum_{i=a}^{a-1} i^{2}$$

Para el caso que nos ocupa:

$$\sum_{i=7}^{12} i^2 = \sum_{i=1}^{12} i^2 - \sum_{i=1}^{6} i^2$$
 resolvemso:

$$\sum_{i=1}^{12} i^2 = \frac{12 (12+1) (2(12)+1)}{6} = \frac{12x 13x 25}{6} = 650 \text{ Luego}$$

$$\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{6(6+1)(6(2)+1)}{6} = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 91$$

Finalmente:

$$\sum_{i=1}^{6} i^2 = 650 - 91 = 559$$

2. Para resolver $\sum_{i=n}^{5} (3i^2 - 4)$ aplicamos las paorpiedades de sumatorias,

veámos;

$$\sum_{i=1}^{5} 3i^{2} - \sum_{i=1}^{5} 4 = 3 \sum_{i=1}^{5} i^{2} - 4(5) = 3 \left(\frac{5(5+1)(2(5)+1)}{6} \right) - 20$$

UNAD

$$\sum_{i=1}^{5} \left(3i^2 - 4 \right) = 165 - 20 = 145$$

3. Se resuelve primero la sumatoria más interna y luego la más externa:

$$\sum_{j=3}^{7} \sum_{i=1}^{5} \left[3 \left(2i + j \right) \right] = \sum_{j=3}^{7} \sum_{i=1}^{5} \left(6i + 3j \right) \text{ Ahora:}$$

$$\sum_{j=3}^{7} \left[\sum_{i=1}^{5} 6i + \sum_{i=1}^{5} 3j \right] = \sum_{j=3}^{7} \left[6 \sum_{i=1}^{5} i + 3 \sum_{i=1}^{5} j \right] = \sum_{j=3}^{7} \left[6 \left(\frac{5(5+1)}{2} \right) + 3 - 5j \right] = \sum_{j=1}^{7} \left[90 + 15j \right]$$

Ahora resolvemos para j:

$$\sum_{j=1}^{7} 90 + \sum_{j=3}^{7} 15j = \sum_{j=1}^{7} 90 - \sum_{j=1}^{2} 90 * 15 \sum_{j=3}^{7} j$$

Resolviendo:

$$\sum_{j=1}^{7} 90 + \sum_{j=1}^{2} 90 + 15 \sum_{j=3}^{7} j = 7.90 - 2.90 + 15 \sum_{j=3}^{7} j =$$

$$450 + 15 \left[\sum_{j=1}^{7} j - \sum_{j=1}^{2} j \right] = 450 + 15 \left[\frac{7(7+1)}{2} - \frac{2(2+1)}{2} \right]$$

$$= 450 + 15 (28-3) = 450 + 15(25), \text{ entonces}$$

$$\sum_{j=3}^{7} \sum_{i=1}^{5} \left[3(2i+j) \right] = 825$$

4. El problema tiene sumatoria y productorias, primero resolvemos la productoria.

$$\sum_{j=3}^{7} \pi^{5} 4 \left[2i + 3j \right] = \sum_{j=3}^{7} \left[4 \left[2(4) + 3j \right] \bullet \left[4 \left[2(5) + 3j \right] \right] = \sum_{j=3}^{7} \left[4(8+3j) \bullet 4 (10+3j) \right] = \sum_{j=3}^{7} \left[(32+12j)(40+12j) \right] = \sum_{j=3}^{7} \left[1.280 + 384j + 480j + 144j^{2} \right] = \sum_{j=3}^{7} \left[144j^{2} + 864j + 1.280 \right]$$

Por propiedades de sumatoria:

$$\sum_{j=3}^7 144\,j^2 + \sum_{j=3}^7 864\,j + \sum_{j=3}^7 1.280$$
 , resolvemos por separado y al final agrupamos:

a.
$$\sum_{j=3}^{7} 144 j^2 = 144 \sum_{j=3}^{7} j^2 = 144 \left[\sum_{j=1}^{7} j^2 - \sum_{j=1}^{2} j^2 \right]$$
 rsolviendo
$$= 144 \left[\frac{7 (7+1) (7-2+1)}{6} - \frac{2 (2+1) (2 \cdot 2+1)}{6} \right] = 144 \cdot (140-5) = 19.440$$

b.
$$\sum_{j=3}^{7} 864 j^2 = 864 \sum_{j=3}^{7} j = 864 \left[\sum_{j=1}^{7} j - \sum_{j=1}^{2} j \right]$$
$$= 864 \left[\frac{7(7+1)}{2} - \frac{2(2+1)}{2} \right]$$
$$= 864 (28-3) = 864 \cdot 25 = 21.600$$

$$\sum_{\substack{c. \ j=3\\ =8.960\ -2.560\ =6.400}}^{7} 1.280 - \sum_{\substack{j=1\\ j=1}}^{2} 1.280\ =7\ (1.280)\ -2\ (1.280)$$

Finalmente:

$$\sum_{j=3}^{7} \pi \atop i=4 \qquad 4 \quad \left[\ 2i+3j \ \right] = 19.440 + 21.600 \ + 6.400 \ = 47.440$$

$$\pi \left(2^{j} - j \right) = \left(2^{4} - 4 \right) \left(2^{5} - 5 \right) \left(2^{6} - 6 \right) \left(2^{7} - 7 \right) \\
= (12)(27)(58)(121)$$

Finalmente:

$$\prod_{j=4}^{7} \left(2^{i} - j \right) = 2.273.832$$

6. Tenemos que hacer la expansi{on de la productoria.

$$\pi \atop i=n \frac{i^2}{(i+1)^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \cdots \frac{(m-1)^2}{m^2} \cdot \frac{(m)^2}{(m+1)^2}$$

Si generalizamos ya que la secuencia de la productoria es evidente que:

$$\pi_{i=n}^{m} \frac{i^{2}}{(i+1)^{2}} = \frac{n^{2}}{(m+1)^{2}}$$

Vemos que hay términos que se pueden simplificar para obtener finalmente la productoria dada.