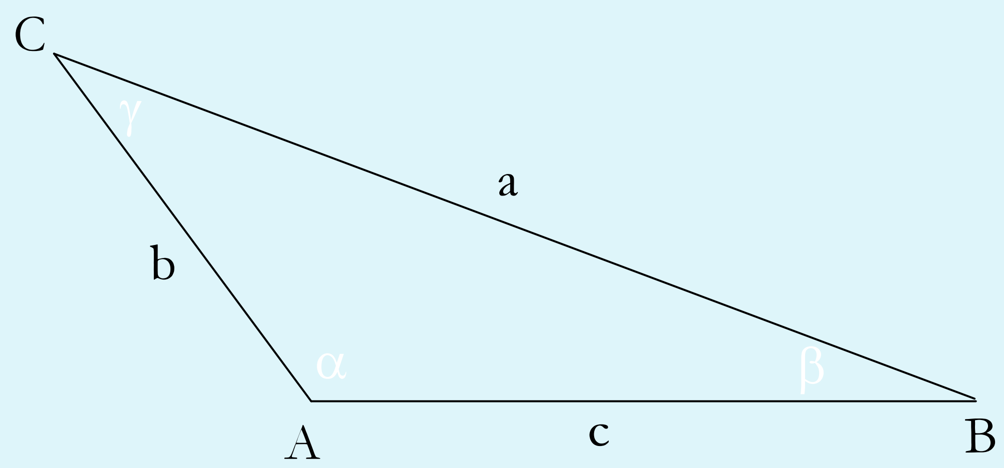
Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Trigonometría

Módulo 6: Leyes del Seno y Coseno

Leyes del Seno y Coseno

- Un triángulo tiene seis elementos básicos: tres lados y tres ángulos.
- Es usual denotar un triángulo en la forma ABC, donde los ángulos son A, B, C (ó α, β, γ) de lados opuestos a, b, c, respectivamente.



- Resolver un triángulo significa determinar tres elementos, dados los otros tres (Al menos uno de éstos debe ser un lado).
- Para resolver un triángulo es conveniente usar los teoremas del seno y/o del coseno.

Leyes del Seno y Coseno

Teorema (Ley de los senos)

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, esto es:

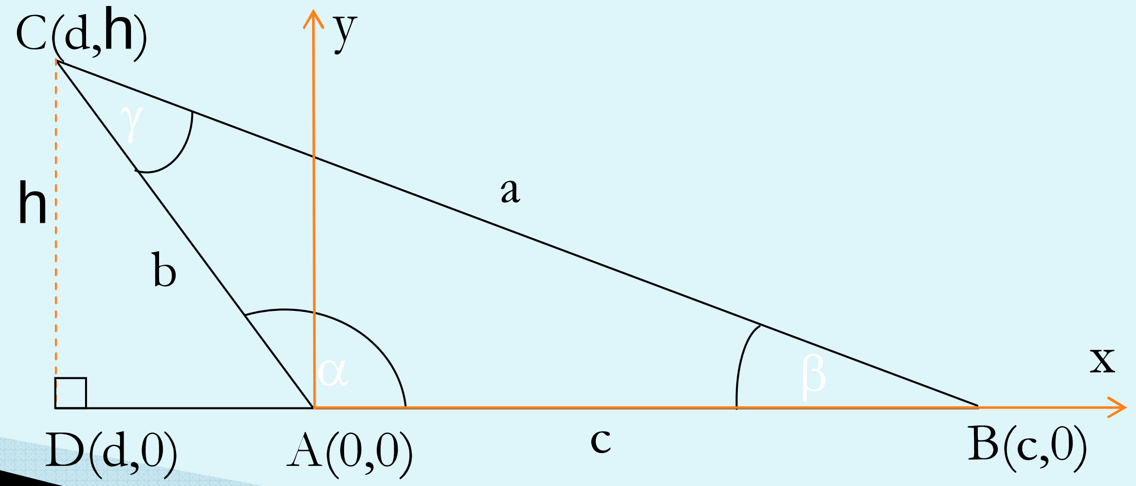
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

(Observar que son 3 igualdades:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad)$$

Demostración:

- Consideremos en la figura los puntos $A(0,0),\ B(c,0),\ C(d,h)$ y $D(d,0)$, donde $\overline{CD}\perp$ Eje X .



Leyes del Seno y Coseno

- Según la definición de la función seno, tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b} \quad , \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{h}{a}$$

- De donde: $h = b\operatorname{sen}\alpha \quad , \quad h = a\operatorname{sen}\beta$

- Y de ahí se obtiene que: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b}$

- Para las otras igualdades, es análogo.

Observaciones:

- La ley de los senos es útil si se dan un lado y dos ángulos (y por tanto también conocemos el tercer ángulo) del triángulo, o si se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

- Si θ es un ángulo agudo, entonces: $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(180^{\circ} - \theta)$, de manera que si un ángulo de un triángulo se obtiene a través de la Ley del Seno, debe considerarse dos posibles valores para este ángulo.

Leyes del Seno y Coseno

Ejemplo 1:

Resolver los triángulos siguientes:

(a) $\alpha = 42^{o}10', \quad \gamma = 61^{o}20', \quad b = 19,7$

(b) $\gamma = 81^{o}, \quad c = 11, \quad b = 12$

(c) $\gamma = 53^{o}20', \quad \alpha = 140^{o}, \quad c = 115$

Ejemplo 2:

Un barco de guerra navega a lo largo de la costa con rumbo N 18º 40' E a una velocidad constante de 36,5 millas/hora. Si una escuadrilla de aviones, volando a 186 millas/hora, se encuentra directamente al este del barco, ¿en qué dirección debe volar para alcanzarlo lo antes posible?.
(N 18º 40' E significa que a partir de la dirección norte, el rumbo forma un ángulo de 18º 40' hacia el este).

Leyes del Seno y Coseno

Teorema (Ley de los cosenos):

En un triángulo, el cuadrado de cualquier lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo que forman, esto es:

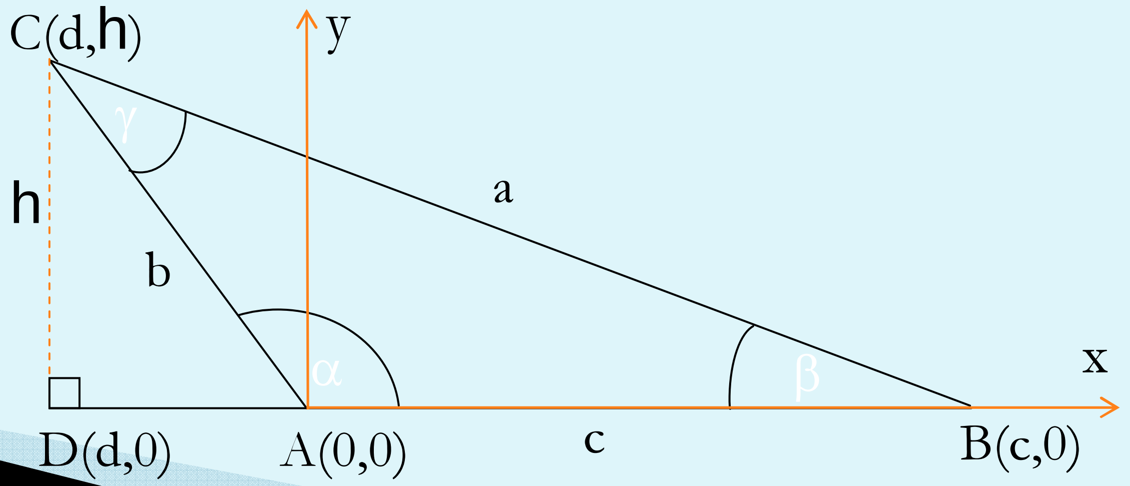
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Demostración:

Consideremos en la figura los puntos $A(0,0)$, $B(c,0)$, $C(d,h)$ y $D(d,0)$, donde $\overline{CD} \perp$ Eje X.



Leyes del Seno y Coseno

Se tiene que: $\cos\alpha = \dfrac{d}{b},\ \ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{b}$

Despejando h y d tenemos. $d = b\cos\alpha,\ \ h = b\operatorname{sen}\alpha$

De lo anterior tenemos:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \left(d(B,C)\right)^2 \\
&= (d-c)^2 + (h-0)^2 \\
&= (b\cos\alpha - c)^2 + (b\operatorname{sen}\alpha)^2 \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha
\end{aligned}
$$

Así queda demostrado que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Las otras dos igualdades se demuestran en forma análoga.

Leyes del Seno y Coseno

Observaciones:

En particular, si $\gamma = 90^{\circ}$ γ=90º (Esto es, el triángulo ABC es recto en C), se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(Por esto, el teorema del coseno se llama a veces **Teorema General de Pitágoras**).

La ley del coseno es útil si se dan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos o se dan los tres lados (siendo el mayor de ellos menor que la suma de los otros dos).

Ejemplo 3

Resolver los triángulos siguientes:

(a) $\alpha = 60^{\circ}, \ \ b = 20, \ \ c = 30$

(b) $a = 10, \ \ b = 15, \ \ c = 12$

Ejemplo 4

Los puntos A y B quedan en los lados opuestos de un monte. Se miden las distancias de A y B a un punto C, accesible a A y B, obteniéndose 2000 y 3000 metros, respectivamente. Si el ángulo ACB mide 30º, calcular la distancia de A a B.