UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA

Tutoría N°1+pauta

Agosto de 2013

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Determine la inversa de AB si la inversa de B es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   (Puede ser útil $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).

   Desarrollo:

   Necesitamos calcular la inversa de A.

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+(-3)1}]{f_{2+(-2)1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{(-1)3}]{f_{23}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_{1+(-2)2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{1+(3)3}]{f_{2+(-3)3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Luego $(AB)^{-1} = B-1 \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, usando operaciones elementales filas determine A^{-1}. Verifique que obtuvo la inversa.

   Desarrollo:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{1+(3)3}]{f_{2+(-4)3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{1+(-2)2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Verificando:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Usando las propiedades del determinante calcule $det(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   Desarrollo:

   Primero triangularizaremos la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{4+(-1)1}]{f_{2+(-2)1} \quad f_{3+(-4)1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{(\frac{1}{4})3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_{4+(-3)2}]{f_{3+(-5)2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{(-\frac{1}{4})3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{4+(-4)3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_{(-\frac{1}{8})4}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

   Luego, $det(A) = 4 \cdot (-4) \cdot (-8) \cdot det(B) = 128$.

4. Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 5$, calcule usando propiedades, el valor de:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 4a_{11} + 7a_{21} & 4a_{12} + 7a_{22} & 4a_{13} + 7a_{23} \end{vmatrix}$$

   Desarrollo:

   Sean $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ y $B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 4a_{11} + 7a_{21} & 4a_{12} + 7a_{22} & 4a_{13} + 7a_{23} \end{vmatrix}$

   Le realizamos operaciones elementales filas a B para obtener A y así calcular $det(B)$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 4a_{11} + 7a_{21} & 4a_{12} + 7a_{22} & 4a_{13} + 7a_{23} \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{3+(-4)1}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 7a_{21} & 7a_{22} & 7a_{23} \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{(\frac{1}{7})3}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_{23}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A$$

   Luego, $det(B) = 7 \cdot (-1) det(A) = -35$

5. Resuelva la ecuación
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollo:

Para $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$, se cumple la igualdad, pues en cada caso resultan dos filas iguales.
Al desarrollar el determinante resulta un polinomio de a lo más grado 4. Así el número de soluciones es a lo más 4.
$\therefore$ Las soluciones de la ecuación son $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$.

6. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Determine A^{-1} usando la adjunta de A.

   Desarrollo:

   Primero obtenemos la adjunta de A.

   $$Adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   $det(A) = 1$.

   Luego $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \cdot Adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

   b) Resuelva la ecuación matricial $AX + B = C$ (Use la inversa de A).

   Desarrollo:

   $AX + B = C \Leftrightarrow AX = C - B \Leftrightarrow X = A^{-1}(C - B)$

   $$\therefore X = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -5 \\ -6 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$