Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

Geometría Analítica en el Espacio

Distancia

Distancia entre $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ es $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Esfera

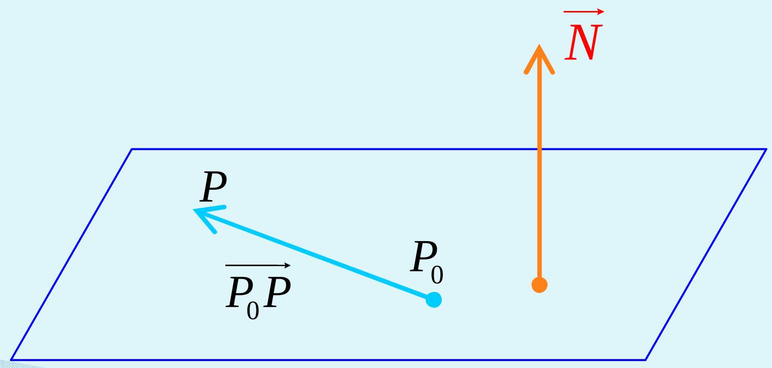
Ecuación de esfera de centro (h, k, l) y radio $r, \ r > 0$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

En particular, si el centro es el origen del sistema, entonces $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Plano

Punto $P(x, y, z)$ está en plano π que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con vector normal $\vec{N} = (A, B, C), \vec{N} \neq \vec{0}$ si $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$



Ecuaciones de un plano

- Punto-normal : $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
- General : $Ax+By+Cz+D=0$
- Segmentos : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
- Por tres puntos:

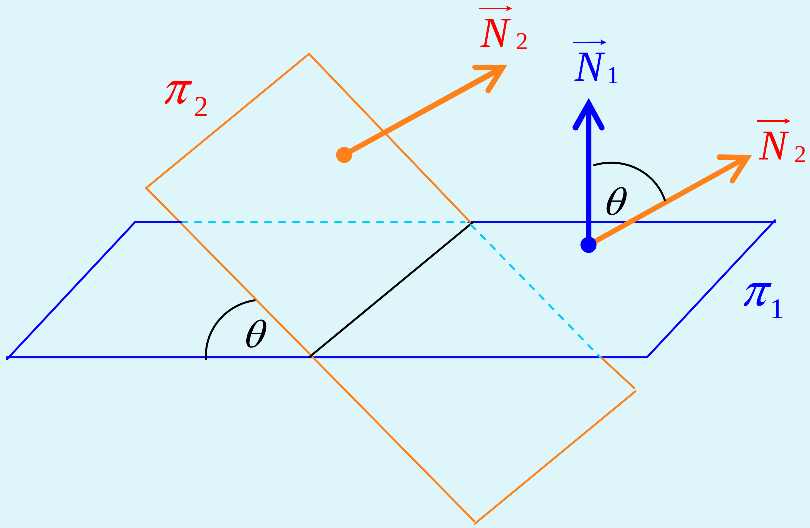
Sean : $P_0(x_0,y_0,z_0), P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2)$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$$

: plano por P_1, P_2, P_3

Ángulo entre planos

El ángulo entre dos planos π_1, π_2 de vectores normales $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ respectivamente, con ángulo θ, está dado por:

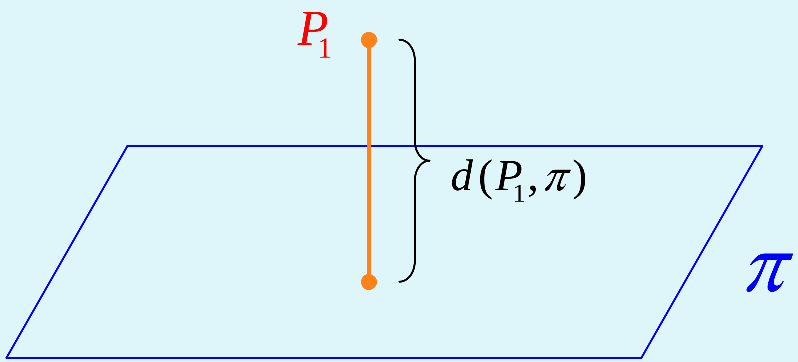


$$\cos\theta = \frac{\left|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right|}{\left\|\vec{N}_1\right\|\left\|\vec{N}_2\right\|}$$

Distancia

de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a un plano π de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$d(P_1, \pi) = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Paralelismo y Perpendicularidad (entre Planos)

Sean π, π' dos planos de ecuaciones $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, con vectores normales $\vec{N} = (A, B, C)$, $\vec{N}' = (A', B', C')$, respectivamente.

$$\pi \parallel \pi' \Leftrightarrow \vec{N} = k\vec{N}' \Leftrightarrow \vec{N} \times \vec{N}' = \vec{0}$$

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{N}' = 0$$

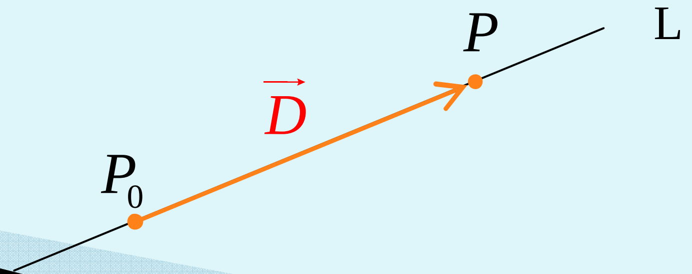
Distancia entre planos paralelos

Si π, π' son planos paralelos con $\vec{N} = \vec{N}'$

$$d(\pi, \pi') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Recta

Punto $P(x, y, z)$ está en la recta L que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con vector dirección $\vec{D} = (a, b, c)$ si $\overrightarrow{P_0P} \times \vec{D} = \vec{0}$, esto es, $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{D}$.



Ecuaciones de una recta

- Paramétricas : $\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}\right\}, \quad t \in \mathbb{R}$

- Simétricas : $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \qquad (a, b, c \neq 0)$

- Por dos puntos : $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ ((x_1, y_1, z_1) es otro punto de L)

- Intersección de dos planos:: $\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned}\right\}$

Ángulo entre Rectas

El ángulo entre dos rectas L_1, L_2 de vectores dirección $\vec{D}_1, \vec{D}_2$ respectivamente, es el ángulo θ entre $\vec{D}_1$ y $\vec{D}_2$:

$$\cos\theta = \frac{\left|\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2\right|}{\left\|\vec{D}_1\right\| \left\|\vec{D}_2\right\|}$$

Paralelismo y Perpendicularidad (entre Rectas)

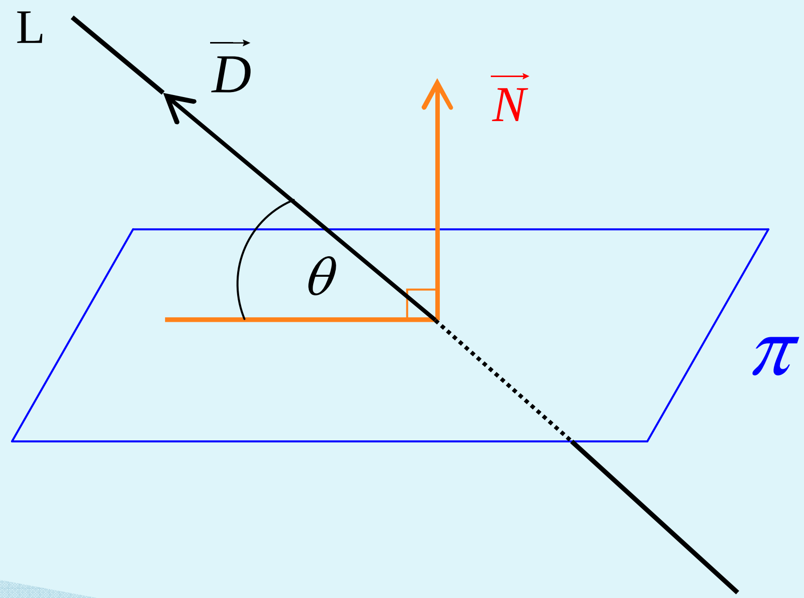
$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{D}_1 = t\vec{D}_2 \Leftrightarrow \vec{D}_1 \times \vec{D}_2 = \vec{0}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2 = 0$$

Ángulo entre Recta y Plano

El ángulo entre una recta L de vector dirección $\vec{D}$ y un plano π de vector normal $\vec{N}$, está dado por

$$sen\theta = \frac{\left|\vec{N} \cdot \vec{D}\right|}{\left\|\vec{N}\right\|\left\|\vec{D}\right\|}$$



Instituto de Matemática
Universidad Austral de Chile

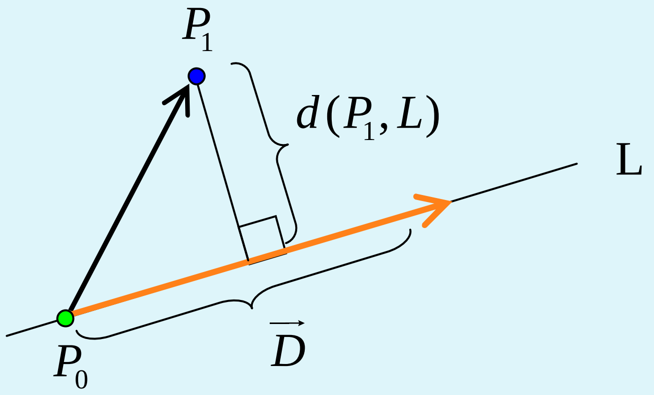
Paralelismo y Perpendicularidad (entre Planos y Rectas)

$$L \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{D} \cdot \vec{N} = 0$$

$$L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{D} \times \vec{N} = \vec{0}$$

Distancia de Punto a Recta

$d(P_1, L) = \left\| \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{D}^0 \right\|$, con P_0 punto de L.



Distancia entre dos rectas

L_1, L_2 rectas que no se intersectan, de vectores dirección $\vec{D}_1, \vec{D}_2$
con P_1 y P_2 puntos de L_1 y de L_2 respectivamente.

- Si $\vec{D}_1, \vec{D}_2$ paralelos $\Rightarrow d(L_1, L_2) = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{D}_1^0 \right\| = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{D}_2^0 \right\|$
- Si $\vec{D}_1, \vec{D}_2$ no paralelos $\Rightarrow d(L_1, L_2) = \dfrac{\left\| \left[\overrightarrow{P_1P_2} \ \vec{D}_1 \ \vec{D}_2 \right] \right\|}{\left\| \vec{D}_1 \times \vec{D}_2 \right\|}$