UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
Instituto de Matemáticas

Nota:

PAUTA DE CORRECCIÓN
MÓDULO II: Cálculo I para Ingeniería. BAIN 037
PRUEBA PARCIAL Nº1

Nombre: ______________________________ **Grupo:** ☐
Fecha: 04/10/2007

PREGUNTAS

1. Considere la curva de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t sent \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

1.1 Determine los valores del parámetro donde la recta tangente es paralela al eje X y encuentre las coordenadas de dichos puntos.

1.2 Determine los puntos de la curva donde la pendiente de la recta tangente no existe.

Sol.: 1.1 La recta tangente es paralela al eje X ssi $\frac{dy}{dx} = 0$, es decir; $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 0$.

$\frac{dy}{dt} = e^t sent + e^t \cos t = 0 \Leftrightarrow sent + \cos t = 0$, luego, $\tan t = -1$ obteniéndose que $t = \frac{3\pi}{4}, t = \frac{7\pi}{4}$.

Luego los puntos pedidos son: $(-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{3\pi/4}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{3\pi/4})$ y $(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{7\pi/4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{7\pi/4})$.

1.2 La pendiente de la recta tangente no existe ssi $\frac{dx}{dt} = 0$, es decir,

$e^t \cos t - e^t sent = 0 \Leftrightarrow \cos t - sent = 0$, luego, $\tan t = 1$ y se tiene que $t = \frac{\pi}{4}, t = \frac{5\pi}{4}$.

Luego los puntos pedidos son: $(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4})$ y $(-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4})$.

2. Sea $f(x) = 2 - x + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x + 1}; x < -1, x > 1$. Determine, de existir:

2.1 Asíntotas verticales de la gráfica de f.

2.2 Asíntotas horizontales de la gráfica de f.

2.3. Asíntotas oblicuas de la gráfica de f.
(Recuerde que la recta de la forma $y = mx + b$ es una asíntota a la gráfica de la función en $+\infty$ ssi $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ existen. Análogo caso $-\infty$).

Sol.: 2.1 $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (2 - x + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x + 1}) = 3 + \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$. La recta $x = -1$ es asíntota vertical.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 - x + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x + 1}) = 1 + \frac{-\infty}{2} = -\infty$. La recta $x = 1$ es asíntota vertical.

2.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2-x+\frac{\ln(x^2-1)}{x+1})$ $(2+\infty+\frac{\infty}{\infty})$. Se debe calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x+1}$ $(\frac{\infty}{\infty})$. Usando L\`Hôpital $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2-1}2x}{1} = 0$ de donde se sigue que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2+\infty+0=+\infty$.
No hay asíntota horizontal a la gráfica de f en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2-x+\frac{\ln(x^2-1)}{x+1})$ $(2-\infty+\frac{\infty}{\infty})$ de donde $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2-\infty+0=-\infty$.
No hay asíntota horizontal a la gráfica de f en $+\infty$.

2.3 $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{x} - 1 + \frac{\ln(x^2-1)}{x(x+1)}$ y se debe calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x(x+1)}$ $(\frac{\infty}{\infty})$. Usando L\`Hôpital $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2-1}2x}{2x+1} = 0$, luego, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{2}{x}-1+\frac{\ln(x^2-1)}{x(x+1)}) = -1 = m$.

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2+\frac{\ln(x^2-1)}{x+1}) = 2$. $\therefore y=-x+2$ es asíntota a la gráfica de f en $-\infty$. El mismo procedimiento para el caso $+\infty$.

3. Considere la función $f(x) = 2x+3\sqrt[3]{x^2}, x\in\mathbb{R}$. Se sabe que $f'(x) = 2+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ y que $f''(x) = \frac{-2}{3x^{4/3}}$.

3.1 Determine, si es que existen:
1. Intervalos de monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento).
2. Extremos relativos y absolutos.
3. Concavidad y puntos de inflexión.
4. Asíntotas.

3.2 Resuma la información anterior en una gráfica.

Sol.: 3.1 1. Como $f'(x) = 2+\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2(\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}}$ entonces $x=-1, x=0$ son puntos críticos (de primera especie).

	$-\infty$	-1	0 $\quad$ $+\infty$
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

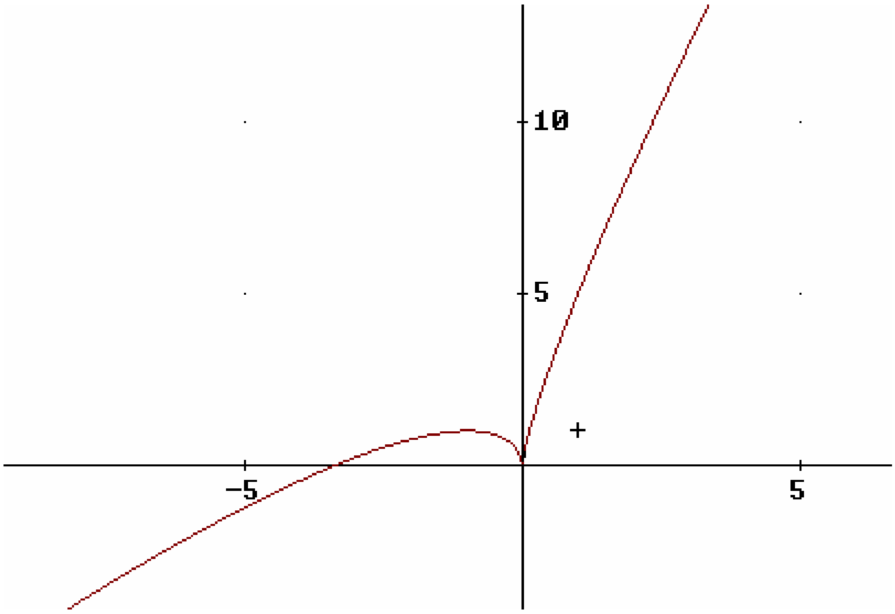
La función es: creciente en $]-\infty,-1]$ y en $[0,+\infty]$.
decreciente en $[-1,0]$.

2. $f(-1)=1$ es máximo relativo y $f(0)=0$ es un mínimo relativo.
$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3\sqrt[3]{x^2}) = \lim\limits_{x\to-\infty} x(2+3x^{-1/3}) = -\infty(2+0) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3\sqrt[3]{x^2}) = +\infty$. No existen extremos absolutos.

3. Como $f''(x) = \frac{-2}{3x^{4/3}}$ entonces $x=0$ es el único punto crítico (de segunda especie) y no hay cambio de concavidad, siempre la curva es cóncava hacia abajo. No existe punto de inflexión.

4. No existen asíntotas verticales ni horizontales (2.). Además es fácil ver $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{2x+3\sqrt[3]{x^2}}{x}) = \lim_{x\to\pm\infty}(2+3x^{-1/3})=2$ pero $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to\pm\infty}3\sqrt[3]{x^2} = +\infty$. Tampoco posee asíntotas oblicuas.

3.2

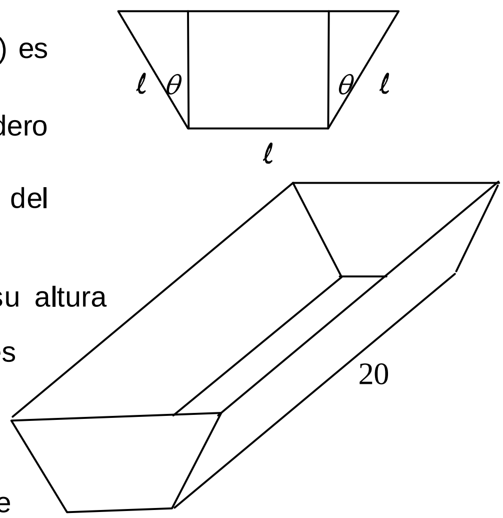


4. El comedero de la figura se debe hacer con las dimensiones que se muestran. Sólo se puede variar el ángulo θ.

4.1 Pruebe que el área de la sección transversal (trapecio) es $A(\theta)=l^2\cos\theta(sen\theta+1)$.

4.2 Escriba una fórmula para el volumen $V(\theta)$ del comedero indicando dominio.

4.3 Determine el valor del ángulo que maximiza el volumen del comedero.



Sol.: 4.1 Sea b la base de un triángulo que se forma y h su altura entonces $A(\theta)=2\cdot\frac{1}{2}bh+lh=h(b+l)$. Como el triángulo es rectángulo se tiene que $\cos\theta=\frac{h}{l}\Rightarrow h=l\cos\theta$ y $sen\theta=\frac{b}{l}\Rightarrow b=lsen\theta$. Reemplazando en $A(\theta)$ se obtiene $A(\theta)=l\cos\theta(lsen\theta+l)=l^2\cos\theta(sen\theta+1)$.

4.2 $V(\theta)=20\cdot A(\theta)$ de donde $V(\theta)=20\cdot l^2\cos\theta(sen\theta+1), 0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

4.3 $V'(\theta)=20l^2(-sen\theta(sen\theta+1)+\cos^2\theta)$

$V'(\theta)=20l^2(-2sen^2\theta-sen\theta+1)$

$V'(\theta)=20l^2(1-2sen\theta)(1+sen\theta)$. Luego, $V'(\theta)=0\Leftrightarrow sen\theta=1/2\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$ es el único punto crítico.

$V''(\theta)=20l^2(-4sen\theta\cos\theta-\cos\theta)<0$ y $V''(\frac{\pi}{6})<0$ por lo tanto cuando $\theta=\frac{\pi}{6}$, el volumen es máximo.