UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA

Tutoría N°2+pauta

Septiembre de 2013

1. Dado el siguiente sistema $\left.\begin{array}{rcl} 2z+3 & = & y+3x \\ x-3z & = & 2y+1 \\ 3y+z & = & 2-2x \end{array}\right|$

   a) Explique por qué no puede usarse la Regla de Cramer para resolverlo.

   Desarrollo:

   El sistema es equivalente a $\left.\begin{array}{rcl} 3x+y-2z & = & 3 \\ x-2y-3z & = & 1 \\ 2x+3y+z & = & 2 \end{array}\right|$.

   Triangularizando la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{3+(-2)2}]{f_{1+(-3)2}} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{3+(-1)2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Como la matriz A es equivalente por fila a una matriz que posee una fila nula se tiene que $det(A) = 0$.

   No puede utilizarse la regla de cramer ya que esta solo sirve para resolver sistemas con única solución y en este caso como $det(A) = 0$ el sistema puede tener infinitas soluciones o conjunto solución vacío.

   b) Halle la solución del sistema.

   Desarrollo:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{12}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+(-2)1}]{f_{2+(-3)1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{\left(\frac{1}{7}\right)2}]{f_{3+(-1)2}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{1+(2)2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x-z & = & 1 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & z+1 \\ y & = & z \end{array}\right|$$

   Así el conjunto solución del sistema es $S = \left\{ \begin{bmatrix} k+1 \\ k \\ k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R} \right\}$

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. En cada caso expresar en forma matricial.

$$a)\ \left.\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 1\\ 2x+y+3z &=& 2\\ -y+5z &=& 1 \end{array}\right|$$

Desarrollo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{2+(-2)1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 5 & 0\\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{3+(-1)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Luego, $Rg([A|B]) = 3, Rg(A) = 2 \Rightarrow Rg([A|B]) \neq Rg(A)$.

$\therefore$ El sistema no tiene solución.

$$b)\ \left.\begin{array}{rcl} 2a-b-c &=& 4\\ 3a+4b-2c &=& 11\\ 3a-2b+4z &=& 11 \end{array}\right|$$

Desarrollo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4\\ 3 & 4 & -2 & 11\\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{2+(-1)1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4\\ 1 & 5 & -1 & 7\\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{21}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7\\ 2 & -1 & -1 & 4\\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[f_{3+(-3)1}]{f_{2+(-2)1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7\\ 0 & -11 & 1 & -10\\ 0 & -17 & 7 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{(-3)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7\\ 0 & 33 & -3 & 30\\ 0 & -17 & 7 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{2+(2)3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7\\ 0 & -1 & 11 & 10\\ 0 & -17 & 7 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{f_{3+(-17)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7\\ 0 & -1 & 11 & 10\\ 0 & 0 & -180 & -180 \end{array}\right] \xrightarrow[f_{(-\frac{1}{180})3}]{f_{(-1)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7\\ 0 & 1 & -11 & -10\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_{1+(-5)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 54 & 57\\ 0 & 1 & -11 & -10\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[f_{2+(11)3}]{f_{1+(-54)3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a &=& 3\\ b &=& 1\\ c &=& 1 \end{array}\right|$$

Luego es sistema tiene única solución.

$$S = \left\{ \left[\begin{array}{c} 3\\ 1\\ 1 \end{array}\right] \right\}$$

3. Dado el sistema $\left.\begin{array}{rcl} mx+y-z & = & 0 \\ 2x+my+z & = & 0 \\ y+mz & = & 0 \end{array}\right|$

a) ¿Cuál es el valor del determinante de la matriz asociada al sistema?

Desarrollo:

Sea $A=\begin{bmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{bmatrix}$

Luego, $det(A)=(-1)\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+m\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix}=(m-2)(m+1)^2$

b) Determine el valor de $m\in\mathbb{R}$, tal que:

i) El sistema sea inconsistente.

Desarrollo:

El sistema es homogeneo, es decir, siempre tiene solución, por lo tanto no hay valor de $m\in\mathbb{R}$.

ii) El sistema tenga única solución.

Desarrollo:

El sistema tendrá única solución si $det(A)\neq 0$.

$$det(A)\neq 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+1)^2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2 \wedge m\neq -1$$

En este caso el conjunto solución es $S=\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

iii) El sistema tenga infinitas soluciones.

Desarrollo:

El sistema tendrá infinitas soluciones si $det(A)=0$.

$$det(A)=0 \Leftrightarrow (m-2)(m+1)^2=0 \Leftrightarrow m=2 \vee m=-1$$

Si $m=-1$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{2+(2)1}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{(-1)1}]{f_{3+(1)2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{1+(1)2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & z \\ z & = & z \end{array}\right|$$

$$\therefore S=\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 : k\in\mathbb{R}\right\}$$

Si $m=2$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{2+(-1)1}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{3+(-1)2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{\left(\frac{1}{2}\right)1}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_{1+\left(-\frac{1}{2}\right)2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{2}z \\ y & = & -2z \\ z & = & z \end{array}\right|$$

$$\therefore S = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}k \\ -2k \\ k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Para el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & a \\ 2x+6y-11z & = & b \\ x-2y+7z & = & c \end{array}\right|$.

   Encuentre las condiciones para a, b, c de modo que el sistema tenga:

   Primero escalonaremos la matriz asociada al sistema.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array}\right] \xrightarrow[f_{3+(-1)1}]{f_{2+(-2)1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & -2a+b \\ 0 & -4 & 10 & -a+c \end{array}\right] \xrightarrow{f_{3+(2)2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & -2a+b \\ 0 & 0 & 0 & -5a+2b+c \end{array}\right]$$

   a) Única solución.

   Desarrollo:

   Para que el sistema tenga única solución se debe cumplir:

$$Rg([A|B]) = Rg(A) = \text{N}^\circ \text{ de incógnitas.}$$

   En este caso $Rg(A) = 2 < 3 = \text{N}^\circ$ de incógnitas. Por lo que este sistema nunca tendrá única solución.

   b) Infinitas soluciones.

   Desarrollo:

   Para que el sistema tenga infinitas soluciones se debe cumplir:

$$Rg([A|B]) = Rg(A) < \text{N}^\circ \text{ de incógnitas.}$$

   En este caso:

$$Rg([A|B]) = Rg(A) < 3 \Leftrightarrow -5a+2b+c = 0$$

   Así el sistema tendrá infinitas soluciones si $-5a+2b+c=0$

c) Conjunto solución vacío.

Para que el sistema tenga conjunto solución vacío se debe cumplir:

$$Rg([A|B]) > Rg(A)$$

En este caso

$$Rg([A|B]) > Rg(A) \Leftrightarrow -5a + 2b + c \neq 0$$

Así el sistema tendrá conjunto solución vacío si $-5a + 2b + c \neq 0$

5. Usando trigonometría se obtiene que: $\left.\begin{array}{rcl} c \cdot \cos(\beta) + b \cdot \cos(\gamma) & = & a \\ c \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(\gamma) & = & b \\ b \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(\beta) & = & c \end{array}\right|$.

   Donde a, b, c son los lados y α, β, γ son los ángulos de un triángulo. Considere estas relaciones como un sistema de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$.

   a) Pruebe que el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero.

   Desarrollo:

   Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$ la matriz de coeficientes del sistema.

$$det(A) = (-c) \cdot \begin{vmatrix} c & a \\ b & 0 \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} c & 0 \\ b & a \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc$$

   Luego $2abc \neq 0$ ya que $a, b, c \neq 0$, pues son los lados de un triángulo.

   b) Utilice la Regla de Cramer para calcular $\cos(\gamma)$. Deduzca la Ley del Coseno ($c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$).

   Desarrollo:

$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c & a \\ c & 0 & b \\ b & a & c \end{vmatrix}}{2abc} = \frac{(-c)\begin{vmatrix} c & b \\ b & c \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} c & 0 \\ b & a \end{vmatrix}}{2abc} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\therefore \cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

   Luego,

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow 2ab\cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$