

BAIN 036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA
Guía de Ejercicios N° 1

1.- a) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

(i) Calcule $3A$, $2C - 5A$, $7C - B + 2A$

(ii) Encuentre una matriz D tal que $2A + B - D$ sea la matriz cero de orden 3×2 .

b) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

(i) Calcule $2A - B + 2C$, $A - B - C$

(ii) Encuentre una matriz E tal que $A \cdot C - 2B - 4E$ sea la matriz identidad de orden 3×3 .

2.- Calcule A^2, A^3, A^4 si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ¿Podría hallar A^n , para $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$?

3.- Considere las matrices elementales filas de orden 3, siguientes: F_{23} , $F_{-5 \ 1}$, $F_{2+ -3 \ 1}$, $F_{3+ 2 \ 1}$

y las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Escriba explícitamente cada una de estas matrices elementales, y exprese cada una de ellas como la imagen por una operación elemental fila de la identidad.

b) Calcule $F_{23} \cdot F_{-5 \ 1} \cdot A$ y $F_{2+ -3 \ 1} \cdot F_{3+ 2 \ 1} \cdot B$

c) Calcule $f_{23} \ f_{-5 \ 1} \ A$ y $f_{2+ -3 \ 1} \ f_{3+ 2 \ 1} \ B$

d) ¿Qué concluye de los cálculos anteriores?.

4.- Halle las inversas de las matrices:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} I_k & U \\ 0 & I_l \end{bmatrix}$, donde I_k, I_l son matrices identidad de ordenes k y l respectivamente,

U matriz $k \times l$ arbitraria y 0 matriz nula.

5.- Pruebe que:

a) $ABC^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$; A, B, C matrices no singulares.

b) $kA^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, para A matriz no singular y $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

c) Si A es matriz 2×1 y B matriz 1×2 entonces $A \cdot B$ es singular.

6.- Una matriz cuadrada A se llama INVOLUTIVA si $A^2 = I$ y se llama IDEMPOTENTE si $A^2 = A$. Demuestre que si A es involutiva entonces:

a) A es no singular.

- b) $\frac{1}{2} I + A$ y $\frac{1}{2} I - A$ son idempotentes y $\frac{1}{2} I + A \cdot \frac{1}{2} I - A = 0$
- c) Halle condiciones para que una matriz $A \in M_2$ sea involutiva.

7.- Resuelva las ecuaciones matriciales. Use matrices inversas cuando sea posible; si no es posible, resuelva usando incógnitas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ b) $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

8.- Halle las matrices escalón reducida por filas equivalentes a las matrices siguientes, e indique el rango de cada una:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ b) $[2 \ 0 \ -5 \ 4]$ c) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

9.- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Halle una matriz escalón reducida por filas R , equivalente por fila a A , y una matriz invertible 3×3 , P tal que $R = PA$.

10.- Describa todas las posibles matrices 2×2 que son escalón reducida por filas.
Idem para 2×3 , 3×2 y 3×3 .

11.- Halle $\det A$ y $\det A^T$. Compruebe que son iguales en cada caso :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$

12.- a) Sea A una matriz cuadrada de orden impar, tal que : $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall_{i,j}$. Pruebe que $\det A = 0$.
(Indicación : Observe que $A^T = -A$ y de ahí se obtiene $\det A = -\det A$).

b) Pruebe que : $\begin{vmatrix} a+d & 3a & b+2a & b+d \\ 2b & b+d & c-b & c-d \\ a+c & c-2d & d & a+3d \\ b-d & c-d & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$

c) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$. Pruebe que $\text{adj}(\text{adj}(A)) = A$.

d) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ no singular. Pruebe que $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

e) Sea C matriz elemental columna. Calcule $\det C$, para cada caso y muestre que $\det C \neq 0$.

f) Los números 204, 255 y 527 son divisibles por 17.

Pruebe, sin calcular, que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ es divisible por 17.

13.- Calcule los determinantes siguientes:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

14.- Resuelva las ecuaciones :

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1-x \end{vmatrix} = 0 \end{array}$$

15.- Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases} \end{array}$$

16.- Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \\ 4x + y - 7z = 0 \end{cases} \end{array}$$

17.- Determine valores de k , en cada caso, para que los sistemas lineales no homogéneos siguientes tengan : i) solución única. ii) infinitas soluciones. iii) ninguna solución.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases} \end{array}$$

18.- Determine valores de k , en cada caso, para que los sistemas lineales homogéneos siguientes tengan : i) sólo solución trivial ii) solución no trivial

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + kx_3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 - kx_2 = 0 \\ -kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \end{array}$$

19.- Para el sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$. Determine condiciones acerca de a, b, c, d, e, f para que tenga:

a) Solución única b) Infinitas soluciones c) Ninguna solución

20.- Pruebe que :

- Si en un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, los coeficientes de una de las incógnitas son todos cero, entonces el sistema tiene solución no trivial.
- Si el sistema $AX=B$, $B \neq 0$, de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única, entonces :
 $AX=C$ tendrá también solución única, cualquiera sea la matriz columna C .
- Si $AX=B$ es sistema de m ecuaciones con n incógnitas, consistente y C es una solución particular, entonces :
 $(D \text{ es solución de } AX=B) \Leftrightarrow (D=C+S, \text{ donde } S \text{ es una solución del "sistema homogéneo asociado" } AX=0).$

21.- a) Considere el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Resuélvalo usando el siguiente método :

1.- Expréselo en la forma $AX=B$.

2.- Pruebe que A es no-singular y calcule A^{-1} .

3.-"Despeje" X de la ecuación multiplicando por A^{-1} por la izquierda.

b) Aplique el método anterior para resolver los sistemas :

$$\text{i) } AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{ii) } AX = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{iii) } AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

22.- Resuelva usando Regla de Cramer, para las incógnitas indicadas, o probar que no existe solución única:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left. \begin{aligned} x + 3y - z &= 4 \\ 2x - y + z &= 1 \\ 3x + y + 2z &= 5 \end{aligned} \right\} y. & \quad \text{b) } \left. \begin{aligned} x - 2y + z - t &= 0 \\ y + t &= 1 \\ x - z &= 1 \\ x + y &= 1 \end{aligned} \right\} z. \\ \\ \text{c) } \left. \begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ x + 5y + 3z &= -1 \end{aligned} \right\} x. & \quad \text{d) } \left. \begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - z &= 1 \\ x + t &= 1 \\ x - w &= 1 \\ x + y + z + t + w &= 1 \end{aligned} \right\} \text{Todas.} \end{aligned}$$