



Universidad Austral de Chile
Facultad de Ciencias de la Ingeniería
Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería

Guía de Trabajo 5

1) Analiza si se puede aplicar el teorema de Rolle a las siguientes funciones en los intervalos que se indican. En caso afirmativo, encuentra el punto cuya existencia asegura el teorema.

a) $f(x) = x^2 - (a+b)x + ab$ en el intervalo $[a, b]$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ en el intervalo $[1, 2]$

c) $f(x) = |2x+1|$ en el intervalo $[-2, 1]$

2) Aplique alguno de los teoremas vistos (Rolle, Valor Medio o Valor Intermedio) para demostrar que:

a) La ecuación cúbica $f(x) = x^3 - 3x + 1$ no puede tener más de una raíz en $] -1, 1[$

b) La desigualdad: $e^a(x-a) < e^x - e^a < e^x(x-a)$, con $a < x$

c) La desigualdad: $\frac{x-a}{x} < \ln\left(\frac{x}{a}\right) < \frac{x-a}{a}$, con $0 < a < x$

3) Calcula “a” y “b” para que el Teorema del Valor Medio sea aplicable, encontrando el/los c cuya existencia se asegura:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ en $[0, 3]$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{a+1}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 + b & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$ en $[0, 4]$

4) Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^3} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\lg x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x^2 - 3x + 2} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$

i) $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x + e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

k) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos(2x) \sqrt{\operatorname{tg} x}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

5) Determine las constantes a y b de manera que:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \sin(3x) + ax^{-2} + b) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - b}{2x^2} = -4$