Facultad de Ciencias de la Ingeniería

Cálculo I para Ingeniería
BAIN 037_2°Semestre 2011

1. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. Determine condiciones sobre a,b,c y/o d para que f tenga un mínimo en $x = 0$ y un máximo en $x = 1$.
2. Si $a = 1 \, y \, c = 0$, determine b,d de modo que f posea un extremo relativo en el punto $A(2,3)$.
3. Determine los valores de las constantes de modo que f posea un extremo relativo en $A(0,3)$ y su gráfica tenga un punto de inflexión en $B(1,-1)$.

2.
1. Halle dos números positivos cuyo producto sea 16 y la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima.
2. Encuentre dos números reales tales que su diferencia sea d y su producto sea mínimo.
3. Halle el número que excede a su cuadrado en la mayor cantidad.

3.
1. Halle los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa c y de área máxima.
2. Halle las dimensiones de los lados del triángulo rectángulo de área máxima, si la suma de las longitudes de un cateto y de la hipotenusa es constante.
3. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles de base $6cms$ y altura $10cms$.
4. Encuentre el área total mínima de un cuadrado de lado x metros y un círculo de radio r metros, sabiendo que el diámetro del círculo más la diagonal del cuadrado suman 24 metros.
5. Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima de lados paralelos a los ejes coordenados inscrito en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
6. Un campo deportivo tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos en lados opuestos. Si el perímetro del campo es de $500m$, encuentre las dimensiones de éste para que el área sea máxima.
7. Un alambre de longitud L se cortará en dos pedazos. Con uno de ellos se formará un cuadrado y con el otro una circunferencia. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas sea máxima?.

4.
1. Un jardinero desea construir un jardín que tenga la forma de un sector circular. Dispone de $100m.$ de alambre para el contorno. ¿Qué radio deberá tener el sector de forma que el jardín sea el más grande posible?
2. Se desea extraer una viga rectangular de un tronco de madera cilíndrico cuya sección circular posee diámetro $0{,}5mts$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo para que la viga posea volumen máximo?.

3. La resistencia de una viga de sección transversal rectangular varía en forma directamente proporcional con el ancho y con el cubo de su altura. Encuentre las dimensiones de la viga de mayor resistencia que se puede obtener de un tronco circular de medio metro de diámetro.

5. Sea $P(x_0, y_0)$ un punto de la hipérbola $xy = 1$ y sea A el punto donde la recta tangente en P intersecta al eje X.
1. Pruebe que el triángulo OPA es isósceles.
2. Decida si el área del triángulo OPA alcanza un valor extremo cuando P recorre la gráfica de la hipérbola.
3. Análogo al punto anterior para el perímetro del triángulo OPA.

6. Se ha de construir una cisterna subterránea cilíndrica para albergar $100 pies^3$ de desechos radioactivos. La base circular y la cara lateral, todos bajo tierra, tienen un costo de $US\$100$ por pie^2 y la tapa, al nivel del suelo tiene un costo de $US\$300$ por pie^2 debido a la necesidad de protección. Más aún, la profundidad del tanque no puede exceder los $6 pies$ porque una capa de roca dura está por debajo de la superficie, lo que incrementaría enormemente el costo de la excavación si se penetrara. Por último, el radio del tanque no puede exceder $4 pies$ por limitaciones de espacio. ¿Qué dimensiones del tanque hacen el costo mínimo?.

7. Sea $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.
1. Determine $Domf$ y construya la tabla de variación de la función.
2. Concluya que $\ln x < \sqrt{x}$, $\forall x > 0$.
3. Establezca que $\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$ y que $0 \le \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \ge 1$.
4. Concluya que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
5. Usando lo anterior, pruebe que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

8. El propósito de este ejercicio es establecer que $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = e$.
1. Sea f función definida por $f(x) = x - \ln(1+x),\ x > -1$. Construya la tabla de variación de f y de allí deduzca que $\ln(1+x) \le x,\ x > -1$.
2. Sea g función definida por $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x),\ x > -1$. Construya su tabla de variación y establezca que $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x),\ x > -1$.
3. Usando los puntos anteriores, pruebe que $\frac{1}{1+x} \le \ln(1+x)^{1/x} \le 1$, para $x > 0$.
4. Concluya que $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = e$. Justifique.

9. Para cada uno de los ejercicios siguientes, determine si es que existen; asíntotas, extremos relativos y absolutos, intervalos de monotonía, concavidad y puntos de inflexión. Además, determine interceptos con los ejes coordenados. Finalmente, usando la información obtenida, bosqueje la gráfica de cada una de las funciones dadas:

1. $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x-2}$
2. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$
3. $f(x) = \frac{3x}{9 - x^2}$
4. $y = x^2 e^{-x}$
5. $y = x - \arctan x$
6. $y = x \ln^2 x$
7. $y = x + senx$