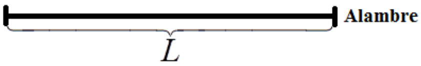
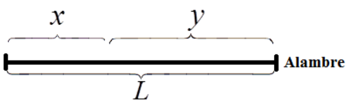
PAUTA CONTROL III – BAIN037 – Cálculo I para Ingeniería

PROBLEMA 1 (3.5 ptos)
Un alambre de longitud L se corta en dos partes, una se dobla para que forme un círculo y la otra para que forme un cuadrado.



a) Basándose en las restricciones físicas del problema: defina explícitamente sus variables, establezca la función que representa la suma de las áreas y determine su dominio.

Solución:



x: Longitud del alambre utilizado para construir el círculo
y: Longitud del alambre utilizado para construir el cuadrado

Además se sabe qué $L = x + y \Rightarrow y = L - x$. Por otro lado si llamamos r al radio del círculo a construir y a al lado del cuadrado se tiene que:

$$2r\pi = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi} \wedge 4a = L - x \Rightarrow a = \frac{L-x}{4}$$

Por lo tanto el área correspondiente a la suma del área del círculo con el cuadrado corresponde a

$$A(x) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi + \left(\frac{L-x}{4}\right)^2$$

$$A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(L-x)^2}{16} \quad ,con\ \ 0 \le x \le L$$

b) Muestre que la función correspondiente al área definida en el apartado “a” no posee puntos críticos en el interior de su dominio.

Solución:
Para determinar los puntos críticos de la función se debe obtener la primera derivada y analizar cuando está se hace cero o indefine dentro del dominio

$$A'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{(L-x)}{8}$$

Luego

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2\pi} - \frac{(L-x)}{8} = 0 \Rightarrow 4x - \pi(L-x)$$
$$\Rightarrow 4x - L\pi + \pi x = 0 \Rightarrow x(4+\pi) = L\pi$$
$$x = L\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)$$

Finalmente la función correspondiente al área si presenta un punto crítico al interior de su dominio el cual corresponde a $L\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)$, ahora debemos observa la naturaleza de dicho punto crítico, para ello se debe determinar la segunda derivada y aplicar el Criterio o test correspondiente para determinar si se alcanza un máximo o mínimo relativo (absoluto)

$$A''(x)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}>0$$

Luego la segunda derivada es siempre positiva (cóncava hacia arriba) por lo tanto en $x=L\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)$ la función alcanza un mínimo absoluto.

c) Determine donde se debe cortar el alambre para que el área sea máxima.

Solución:

Del análisis del apartado anterior se determina que la función correspondiente a la suma de las áreas alcanza un mínimo absoluto en el interior de su dominio. Por otro lado por teorema se sabe que una función continua (parábola cóncava hacia arriba) en un intervalo cerrado alcanza un máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo entonces debemos analizar los extremos del intervalo para determinar el máximo de la función

$$A(x)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(L-x)^2}{16} \quad ,con\ \ 0\le x\le L$$

$$A(0)=\frac{L^2}{16}\Rightarrow No\ \ cortar\ \ construir\ un\ cuadrado\ con\ todo\ el\ alambre$$

$$A(L)=\frac{L^2}{4\pi}\Rightarrow No\ \ cortar\ \ construir\ \ un\ \ círculo\ \ con\ \ todo\ \ el\ alambre$$

$$A(0)<A(L)$$

Por lo tanto para obtener el área máxima no debería cortarse el alambre sino tomarlo y construir un círculo de área máxima. Si es necesario cortar el alambre el problema carece de solución en estos términos.

d) Determine donde se debe cortar el alambre para que el área sea mínima.

Solución:

Del apartado "b" se sabe que para $x=L\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)$ se alcanza un mínimo absoluto de la función por lo tanto como $x=L\left(\frac{\pi}{4+\pi}\right)\approx 0.44L$ esto indica que se debe tomar aproximadamente 44% alambre para construir el círculo y un 66% del alambre para construir el cuadrado para que la suma de las áreas sea mínima.

PROBLEMA 2 (2.5 ptos)

Dada la integral $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(a^2+f^2\left(\sqrt{x}\right)\right)}$

a) Encuentre una integral equivalente haciendo uso del cambio de variable $u=\sqrt{x}$.

Solución:

Si $u=\sqrt{x}$ entonces se tiene que $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Rightarrow 2du=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$, luego sustituyendo se tiene que

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(a^2+f^2\left(\sqrt{x}\right)\right)}=2\int\frac{du}{a^2+f^2(u)}$$

b) Utilizando el resultado anterior determine la integral correspondiente para $f(u) = a\tan(u)$ y $f(u) = a\sqrt{u}$.

Solución:

Si $f(u) = a\tan(u)$

$$2\int \frac{du}{a^2 + f^2(u)} = 2\int \frac{du}{a^2 + a^2\tan^2(u)} = \frac{2}{a^2}\int \frac{du}{1+\tan^2(u)} = \frac{2}{a^2}\int \frac{du}{\sec^2(u)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a^2}\int \cos^2(u)du = \frac{1}{a^2}\int du + \frac{2}{a^2}\int \cos(2u)du = \frac{1}{a^2}\left(u + sen(2u)\right) + C$$

Si $f(u) = a\sqrt{u}$

$$2\int \frac{du}{a^2 + f^2(u)} = 2\int \frac{du}{a^2 + a^2u} = \frac{2}{a^2}\int \frac{du}{1+u} = \frac{2}{a^2}\ln|1+u| + C$$