UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA

BAIN 036 ÁLGEBRA LINEAL PARA INGENIERÍA
Guía de Ejercicios Nº 1

1.- a) Sean $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&5\\-1&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-2&0\\1&4\\-7&5\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}-1&1\\4&6\\-7&3\end{bmatrix}$

(i) Calcule $3A,\ 2C-5A,\ 7C-B+2A$

(ii) Encuentre una matriz D tal que $2A+B-D$ sea la matriz cero de orden 3×2.

b) Si $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}0&0&2\\3&1&0\\0&-2&4\end{bmatrix}$

(i) Calcule $2A-B+2C,\ A-B-C$

(ii) Encuentre una matriz E tal que $A\cdot C-2B-4E$ sea la matriz identidad de orden 3×3.

2.- Calcule A^2, A^3, A^4 si $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$. ¿Podría hallar A^n, para $n\geq 4,\ n\in\mathbb{N}$?

3.- Considere las matrices elementales filas de orden 3, siguientes: $F_{23},\ F_{(-5)\,1},\ F_{2+(-3)\,1},\ F_{3+(2)\,1}$

y las matrices $A=\begin{bmatrix}1&-2&4&0&5\\1&0&2&-1&1\\-2&0&-1&1&0\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\1&1\end{bmatrix}$.

a) Escriba explícitamente cada una de estas matrices elementales, y exprese cada una de ellas como la imagen por una operación elemental fila de la identidad.

b) Calcule $F_{23}\cdot F_{(-5)\,1}\cdot A$ y $F_{2+(-3)\,1}\cdot F_{3+(2)\,1}\cdot B$

c) Calcule $f_{23}\left(f_{(-5)\,1}(A)\right)$ y $f_{2+(-3)\,1}\left(f_{3+(2)\,1}(B)\right)$

d) ¿Qué concluye de los cálculos anteriores?.

4.- Halle las inversas de las matrices:

a) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1&a&a^2&\dots&a^n\\0&1&a&\dots&a^{n-1}\\0&0&1&\dots&a^{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\dots&\\0&0&0&\dots&1\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}I_k&U\\0&I_l\end{bmatrix}$, donde I_k, I_l son matrices identidad de ordenes k y l respectivamente,

U matriz $k \times l$ arbitraria y 0 matriz nula.

5.- Pruebe que:

a) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$; A, B, C matrices no singulares.

b) $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$, para A matriz no singular y $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

c) Si A es matriz 2×1 y B matriz 1×2 entonces $A\cdot B$ es singular.

6.- Una matriz cuadrada A se llama INVOLUTIVA si $A^2 = I$ y se llama IDEMPOTENTE si $A^2 = A$. Demuestre que si A es involutiva entonces:

a) A es no singular.

b) $\frac{1}{2}(I+A)$ y $\frac{1}{2}(I-A)$ son idempotentes y $\frac{1}{2}(I+A)\cdot\frac{1}{2}(I-A) = 0$

c) Halle condiciones para que una matriz $A \in M_2$ sea involutiva.

7.- Resuelva las ecuaciones matriciales. Use matrices inversas cuando sea posible; si no es posible, resuelva usando incógnitas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

b) $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

8.- Halle las matrices escalón reducida por filas equivalentes a las matrices siguientes, e indique el rango de cada una:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

b) $[2 \quad 0 \quad -5 \quad 4]$

c) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

9.- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Halle una matriz escalón reducida por filas R, equivalente por fila a A, y una matriz invertible 3×3 , P tal que $R = PA$.

10.- Describa todas las posibles matrices 2×2 que son escalón reducida por filas.
Idem para 2×3, 3×2 y 3×3.

11.- Halle detA y $\det A^T$. Compruebe que son iguales en cada caso :

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$ c) $A=\begin{bmatrix}x & y\\ u & v\end{bmatrix}$ d) $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{bmatrix}$

12.- a) Sea A una matriz cuadrada de orden impar, tal que : $a_{ij}=-a_{ji},\ \forall_{i,j}$. Pruebe que det$A$=0.
(Indicación : Observe que $A^T=-A$ y de ahí se obtiene det$A$ = - det$A$).

b) Pruebe que : $\begin{vmatrix}a+d & 3a & b+2a & b+d\\ 2b & b+d & c-b & c-d\\ a+c & c-2d & d & a+3d\\ b-d & c-d & a+c & a+b\end{vmatrix}=0$

c) Sea $A\in M_2(\mathbb{R})$. Pruebe que adj(adj(A)) = A.

d) Sea $A\in M_n(\mathbb{R})$ no singular. Pruebe que $\det\left(A^{-1}\right)=\left(detA\right)^{-1}$.

e) Sea C matriz elemental columna. Calcule det$C$, para cada caso y muestre que $\det C\neq 0$.

f) Los números 204, 255 y 527 son divisibles por 17.

Pruebe, sin calcular, que $\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 2 & 5 & 5\\ 5 & 2 & 7\end{vmatrix}$ es divisible por 17.

13.- Calcule los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix}-3 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 4 & 0\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\\ 0 & e & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & d & 0\end{vmatrix}$

14.- Resuelva las ecuaciones :

a) $\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1}\\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x\end{vmatrix}=0$

15.- Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos:

a) $x_1-2x_2+x_3-3x_4=1$

b) $\left.\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=4\\ 2x_1+5x_2-2x_3&=3\end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+x_4&=0\\ x_1+x_2+x_3-x_4&=4\\ x_1+x_2-x_3+x_4&=-4\\ x_1-x_2+x_3+x_4&=2\end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned}x_1+x_2+2x_3+x_4&=5\\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4&=2\\ 4x_1+5x_2+3x_3&=7\end{aligned}\right\}$

16.- Resuelva los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

a) $\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ 3x - y - 4z &= 0 \\ 4x + y - 7z &= 0 \end{aligned}\right\}$

17.- Determine valores de *k*, en cada caso, para que los sistemas lineales no homogeneos siguientes tengan : i) solución única. ii) infinitas soluciones. iii) ninguna solución.

a) $\left.\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + y + kz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= k \\ 2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x + 2y + kz &= 1 \\ 2x + ky + 8z &= 3 \end{aligned}\right\}$

18.- Determine valores de *k*, en cada caso, para que los sistemas lineales homogeneos siguientes tengan : i) sólo solución trivial ii) solución no trivial

a) $\left.\begin{aligned} x_1 - kx_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x_1 - kx_2 &= 0 \\ -kx_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$

19.- Para el sistema $\left.\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}\right\}$. Determine condiciones acerca de a, b, c, d, e, f para que tenga:

a) Solución única b) Infinitas soluciones c) Ninguna solución

20.- Pruebe que :

a) Si en un sistema de ecuaciones lineales homogeneo, los coeficientes de una de las incógnitas son todos cero, entonces el sistema tiene solución no trivial.

b) Si el sistema $AX=B$, $B \neq 0$, de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única, entonces :
$AX=C$ tendrá también solución única, cualquiera sea la matriz columna C.

c) Si $AX=B$ es sistema de m ecuaciones con n incógnitas, consistente y C es una solución particular, entonces :
(D es solución de $AX=B$) $\Leftrightarrow$ ($D=C+S$, donde S es una solución del "sistemas homogéneo asociado" $AX=0$).

21.- a) Considere el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resuélvalo usando el siguiente método :

1.- Expréselo en la forma $AX=B$.

2.- Pruebe que A es no-singular y calcule A^{-1}.

3.-"Despeje" X de la ecuación multiplicando por A^{-1} por la izquierda.

b) Aplique el método anterior para resolver los sistemas :

i) $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ii) $AX = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ iii) $AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

22.- Resuelva usando Regla de Cramer, para las incógnitas indicadas, o probar que no existe solución única:

a) $\left.\begin{array}{r} x+3y-z=4 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+y+2z=5 \end{array}\right\} y.$

b) $\left.\begin{array}{c} x-2y+z-t=0 \\ y+t=1 \\ x-z=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\} z.$

c) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ x+2y+2z=1 \\ x+5y+3z=-1 \end{array}\right\} x.$

d) $\left.\begin{array}{c} x+y=1 \\ x-z=1 \\ x+t=1 \\ x-w=1 \\ x+y+z+t+w=1 \end{array}\right\}$ Todas.