UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

BAIN036 Álgebra Lineal para Ingeniería
Pauta Prueba Sustitutiva
Lunes 23 de Diciembre de 2013

1.- Se tiene el siguiente producto interno en $\mathbb{R}^4$

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4$$

Considere $W = \langle (1, 0, -1, 0), (0, 2, 3, 1) \rangle$ con el producto interno antes definido y determine:

i) Complemento ortogonal de W.

ii) Base de $W^{\perp}$.

Solución.

i)

$$\begin{aligned} W^{\perp} &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x, y, z, t), (1, 0, -1, 0) \rangle = 0 \wedge \langle (x, y, z, t), (0, 2, 3, 1) \rangle = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \wedge 2y + 3z + 2t = 0\} \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = z \wedge y = \frac{-3z - 2t}{2}\} \\ &= \{(z, \frac{-3z - 2t}{2}, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -3/2, 1, 0), (0, -1, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

ii) El conjunto $B = \{(1, -3/2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$ es l.i. porque los vectores no son múltiplos entre sí y genera a $W^{\perp}$, por lo tanto, B es una base de $W^{\perp}$ y su dimensión es 2.

2.- Se define $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, transformación lineal tal que

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a - b + 2c + 5d)x^3 + (b + c + 2d)x^2 + (c + d)x + (a - b - 3c)$$

Determine:

i) Base y dimensión de $Ker(T)$ e $Im(T)$.

ii) Matriz asociada $[T]_C$, en la base canónica $C = \{x^3, x^2, x, 1\}$

Solución.

i) $Ker(T) = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3(\mathbb{R}) : T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0\}$,

$$T\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} a & - & b & + & 2c & + & 5d & = & 0 \\ & & b & + & c & + & 2d & = & 0 \\ & & & & c & + & d & = & 0 \\ a & - & b & - & 3c & & & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \underset{f_{(-1/5)4}}{\xrightarrow{f_{4+(-1)1}}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{4+(-1)3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{f_{1+(-2)3} \\ f_{1+(1)2}}}{\xrightarrow{f_{2+(-1)3}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$T\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{ccccc} a & + & 4d & = & 0 \\ b & + & d & = & 0 \\ c & + & d & = & 0 \end{array}\right|$$

Por lo tanto, $Ker(T) = \{-4dx^3 - dx^2 - dx + d : d \in \mathbb{R}\} = \langle -4x^3 - x^2 - x + 1 \rangle$, su base es $B = \{-4x^3 - x^2 - x + 1\}$ ya que genera y es l.i. (único vector no nulo) y su dimensión es 1.

Calculemos base de $Im(T)$

$$\begin{aligned} Im(T) &= \langle T(x^3), T(x^2), T(x), T(1) \rangle \\ &= \langle x^3 + 1, -x^3 + x^2 - 1, 2x^3 + x^2 + x - 3, 5x^3 + 2x^2 + x \rangle \end{aligned}$$

La imagen está generado por $\{x^3 + 1, -x^3 + x^2 - 1, 2x^3 + x^2 + x - 3, 5x^3 + 2x^2 + x\}$. Veamos si es l.i.

$$\alpha(x^3 + 1) + \beta(-x^3 + x^2 - 1) + \gamma(2x^3 + x^2 + x - 3) + \delta(5x^3 + 2x^2 + x) = 0$$

resolviendo el sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el $r(A) <$ número de elementos, el conjunto es l.d. Así una base de $Im(T)$ es $B = \{x^3 + 1, -x^3 + x^2 - 1, 2x^3 + x^2 + x - 3\}$ y su dimensión es 3.

ii) Para hallar la matriz asociada en la base canónica debemos evaluar cada vector de la base C y escribirlo como combinación lineal de la base C, entonces, se tiene

$$\begin{aligned} T(x^3) &= x^3 + 1 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1 \\ T(x^2) &= -x^3 + x^2 - 1 = -1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-1) \cdot 1 \\ T(x) &= 2x^3 + x^2 + x - 3 = 2 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + (-3) \cdot 1 \\ T(1) &= 5x^3 + 2x^2 + x = 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 \cdot 1 \end{aligned}$$

Finalmente, la matriz asociada en la base canónica es:

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

3.- Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

i) Demuestre que A es diagonalizable.

ii) Encuentre P matriz invertible, D matriz diagonal tales que $D = P^{-1}AP$ y compruebe esta igualdad.

Solución.

i) Calculemos el polinomio caracterísitico

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) \\
&\overset{f_{1+(-1)3}}{\overrightarrow{=}} \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 1+\lambda \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) \\
&\overset{c_{3+(1)1}}{\overrightarrow{=}} \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 \\
&= -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2
\end{aligned}$$

Los valores propios de A son $\lambda = 1$ con multiplicidad 1 y $\lambda = -1$ con multiplicidad 2. Calculamos ahora los espacios propios asociados a cada valor propio.

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : (A - 1 \cdot I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_{(1/2)3} \\ f_{3+(-1)1}}]{\substack{f_{(1/2)1} \\ f_{(1/2)2}}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{12}]{f_{3+(-1)2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, $V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$$V_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : (A - (-1) \cdot I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_{(1/2)1}]{\substack{f_{2+(-1)1} \\ f_{3+(-1)1}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

El orden de la matriz A es 3 y coincide con la suma de las dimensiones de los subespacios propios de V_1 y V_{-1}. Por lo tanto, A es diagonalizable.

ii) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Calculamos ahora P^{-1}

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{f_{1+(-1)3}}{\xrightarrow{f_{2+(-1)3}}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{f_{3+(1)2}}{\xrightarrow{\substack{f_{2+(1)1} \\ f_{(-1)1}}}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{f_{23}}{\xrightarrow{\substack{f_{(-1)2} \\ f_{31}}}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Luego $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y entonces,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= D \end{aligned}$$