UNIVERSIDAD AUSTRAL DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CENTRO DE DOCENCIA DE CIENCIAS BÁSICAS PARA INGENIERÍA.

Pauta Parcial 3

BAIN 036 Álgebra Lineal para Ingeniería
Junio 2012

1. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
   Dada la siguiente transformación lineal.
   $T:\ P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow W$ definida por $T(ax^2+bx+c) \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b+c \end{pmatrix}$
   Determine:

   a) $Ker(T), Nul(T)$.
   Solución:
   $Ker(T) = \left\{ ax^2+bx+c \quad /T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
   $Ker(T) = \left\{ ax^2+bx+c \quad / \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
   $Ker(T) = \left\{ ax^2+bx+c \quad /b=-a \quad \wedge \quad c=0 \right\}$
   $Ker(T) = \left\{ ax^2-ax \right\} = \{a(x^2-x) : a \in \mathbb{R}\} = \langle x^2-x \rangle$
   $B = \{x^2-x\}$ base de $Ker(T)$ entonces $n(T)=1$

   b) Una base para la imagen de T y el rango de T.
   $Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b+c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$
   $Im(T) = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$
   $Im(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
   $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$base de $Im(T)$
   Como $Im(T) = \langle B \rangle$ y B es l.i. entonces $r(T)=2$

   c) Si T es biyectiva.

   Solución: $Ker(T) \neq \{0\}$, por lo tanto T no es inyectiva, luego no es biyectiva.

   d) $[T]_B^C$
   $B = \{x^2, x, 1\}$, $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
   $T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   $[T]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Dada la transformación lineal T invertible.

Solución:$T\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \longrightarrow (a+b, b, b+c)$ encuentre T^{-1} explícitamente.

Sea $(u, v, w) \in Im(T)$ entonces existe $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ en W, tal que:

$T\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = (u, v, w)$, entonces: $T^{-1}(u, v, w) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$

$(a+b, b, b+c) = (u, v, w)$ entonces $a = u - v$,$b = v$ $c = w - v$

$T^{-1}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u-v & v \\ 0 & w-v \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   a) La matriz A es diagonalizable indique por qué.
   Solución:A es diagonalizable, si tiene tres vectores propios $l.i.$
   $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$ igualando a cero se obtiene
   $\lambda_1 = 1$(multiplicidad 2), $\lambda_2 = 2$ los cuales son los valores propios de A
   Para $\lambda = 1$
   $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
   $W_1 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
   Para $\lambda = 2$
   $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
   $W_2 = \left\{ z \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
   Entonces $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto de tres vectores propios l.i.de la matriz A luego A es diagonalizable.

   b) Encuentre la matriz P que diagonaliza a A y la matriz diagonal D.
   $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz que diagonaliza a A
   $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Matriz diagonal.