

ED n° 4 – Suites et séries

Exercice 1

Un processus de naissance et de mort est défini par un taux de naissance $\lambda_n \forall n \in \mathbb{N}$ et un taux de mort $\mu_n \forall n \in \mathbb{N}^*$. n est la taille de la population. On note P_n la probabilité que la taille de la population soit égale à n . On démontre que $P_n = P_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$.

On s'intéresse au cas où $\lambda_n = \lambda \forall n \in \mathbb{N}$ et $\mu_n = \mu \forall n \in \mathbb{N}^*$. Donc, taux de naissance et de mort sont constants. On note $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

1° Montrer que P_n est une suite géométrique. Donner sa raison.

2° On suppose $\rho < 1$. Calculer P_0 .

3° On suppose $\rho < 1$. Donner la taille moyenne de la population en fonction de ρ .

4° Application numérique.

— 90 naissances par an et 100 morts par an. Quelle est la taille de la population moyenne ?

Exercice 2

On considère un bureau de renseignement formé d'un guichet et d'une salle d'attente. Les usagers arrivent et si le guichet est libre se dirigent vers le guichet où leur demande est traitée. Si le guichet n'est pas libre les usagers patientent dans la salle d'attente. Une fois le dossier d'un usagé traité, l'usager s'en va. Le taux d'arrivée des usagers est λ et le taux de traitement des demandes est μ . Le nombre d'usagers dans le bureau (salle d'attente + guichet) est un processus de naissance et de mort de taux λ et μ respectivement.

1° Application numérique

— Le traitement d'un dossier dure 5 minutes et il arrive 10 clients par heure. Calculer λ , μ , ρ . Quel est le nombre moyen d'usagers dans le bureau de renseignement (salle d'attente + guichet) ?

2° Donner l'expression du nombre moyen d'usagers dans la salle d'attente.

3° Donner l'expression du nombre moyen d'usagers au guichet.

4° Application numérique.

— Reprendre les paramètres précédents et calculer le nombre moyen d'usagers dans la salle d'attente et le nombre moyen au guichet.

5° Donner l'expression de la probabilité qu'il y ait n personnes ou plus dans la salle d'attente.

6° Application numérique

— Toujours avec les paramètres précédents, calculer la probabilité qu'il y ait 5 personnes ou plus dans la salle d'attente, 10 personnes ou plus dans la salle d'attente.