UE UTC501 - Outils mathématiques pour l'informatique
Cours 4 - Suites et séries numériques

Alain Faye

Cnam

2025-2026

Plan du cours

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Suite
Suite définition

Une suite (u_n) est une liste ordonnée de nombres u_n avec n parcourant l'ensemble des entiers naturels. n est un indice, c'est le numéro (on dit aussi le rang) du nombre u_n

- Exemple : $u_n = 2n$.
- $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, \ldots$ c'est l'ensemble des nombres pairs

On peut voir une suite comme une fonction dont l'argument serait un entier n : $f(n)$.

Une suite (u_n) est souvent définie par récurrence c'est-à-dire l'élément de rang n est défini relativement aux éléments de rang inférieur, généralement le rang immédiatement inférieur : $u_n = f(u_{n-1})$.
Dans ce cas, il est nécessaire de définir de façon explicite le premier élément de la suite u_0.

- Exemple : $u_0 = 0$ et $u_n = u_{n-1} + 2$ pour $n > 0$.
- $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, ...$ c'est l'ensemble des nombres pairs

A partir d'une suite (u_n), on définit la série S_n qui est la somme des éléments de la suite jusqu'au rang n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

On peut voir la série comme l'intégrale d'une fonction d'argument entier n.

Suites classiques et séries associées

Nous allons étudier 2 suites particulères

- arithmétique
- géométrique

Et les séries associées.

La suite géométrique intervient dans la modélisation de processus aléatoires. Nous verrons un exemple avec les processus de naissance et de mort.

Plan

Définition :

- Une raison r et un terme initial u_0
- La suite arithmétique est défini par la formule de récurrence

$$u_0; \quad u_{n+1} = u_n + r \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemples :

- $u_0 = 0,\ r = 1\ .\ u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \ldots, u_n = n$
- $u_0 = 0,\ r = 2\ .\ u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, \ldots, u_n = 2n$
- $u_0 = 1,\ r = 2\ .\ u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, \ldots, u_n = 1 + 2n$

Le terme général est :

$$u_n = u_0 + nr \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Somme des termes de la suite arithmétique

Somme des n premiers entiers

Calcul de la somme des n premiers nombres entiers :

- $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
- Calcul de S_n
  - $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n$
  - $S_n = n + n - 1 + n - 2, \ldots + 2 + 1$
  - $S_n + S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)$
  - $2S_n = n(n+1)$
  - D'où la formule :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemples :

- $S_4 = \frac{4 \times 5}{2} = 10$
- $S_9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$
- $S_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

Somme des termes de la suite arithmétique

Somme des termes de la suite arithmétique

Soit la suite arithmétique de terme intial u_0 et de raison r. Calculons la somme des termes de la suite arithmétique :

- $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
- $S_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \ldots + (u_0 + nr)$
- $S_n = (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \cdots + n)$
- $S_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$
- $S_n = (n+1)(u_0 + r\frac{n}{2})$

Somme des termes de la suite arithmétique

Remarques

On peut remarquer que la somme de 2 termes situés symétriquement dans la somme est égale à la somme des 2 termes extrêmes :

$$u_p + u_{n-p} = (u_0 + rp) + (u_0 + r(n-p)) = u_0 + (u_0 + r \times n) = u_0 + u_n$$

On peut aussi réécrire la somme :

$$S_n = (n+1)(u_0 + r\frac{n}{2})$$

$$S_n = (n+1)(\frac{2u_0}{2} + \frac{nr}{2})$$

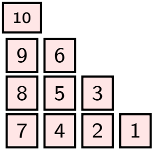
$$S_n = (n+1)(\frac{u_0}{2} + \frac{u_0 + nr}{2})$$

Sous cette forme, on voit que S_n vaut $n+1$ fois la moyenne des 2 termes u_0 et u_n placés aux extrémités de la somme.

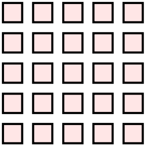
Sommes des termes de la suite arithmétique

Exercices

1° On veut construire, avec des briques carrées identiques, une mosaïque en forme de triangle rectangle avec 2 côtés chacun de longueur n briques. Voir le schéma pour $n = 4$. Combien faudra-t-il de briques ?



2° Imaginons une mosaïque en forme de carré construite avec des briques carrées et identiques. Chaque côté de la mosaïque est de longueur de $n+1$ briques (voir le schéma ci-dessous avec $n+1=5$). A partir de cette mosaïque, montrer comment retrouver facilement la formule donnant la somme des n premiers entiers.



Plan

Suite géométrique
Définition

- Un terme initial $u_0 \neq 0$ et une raison q
- La suite géométrique est définie par la relation de récurrence :

$$u_0; \quad u_{n+1} = q \times u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemples :

- $u_0 = 1,\ q = 1$. $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 1, \ldots, u_n = 1$
- $u_0 = 1,\ q = 2$. $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 8, \ldots, u_n = 2^n$
- $u_0 = 2,\ q = 2$. $u_0 = 2, u_1 = 4, u_2 = 8, u_3 = 16, \ldots, u_n = 2^{n+1}$

La progression des termes est la suivante :
$u_0, \quad u_1 = q \times u_0, \quad u_2 = q^2 \times u_0, \quad u_3 = q^3 \times u_0, \quad \ldots$
Le terme général est :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Suite géométrique

Remarque

Le terme général est la moyenne géométrique de ses 2 termes voisins :

$$u_n = u_0 \times q^n = u_0^{\frac{1}{2}} u_0^{\frac{1}{2}} \times q^{\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)} = u_0^{\frac{1}{2}} u_0^{\frac{1}{2}} \times q^{\frac{1}{2}(n-1)} q^{\frac{1}{2}(n+1)}$$

$$= u_0^{\frac{1}{2}} \times q^{\frac{1}{2}(n-1)} \times u_0^{\frac{1}{2}} \times q^{\frac{1}{2}(n+1)} = u_{n-1}^{\frac{1}{2}} u_{n+1}^{\frac{1}{2}}$$

Somme des termes de la suite géométrique avec $u_0 = 1$

- $S_n = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + + u_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$
- $-qS_n = -q(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = -q - q^2 - q^3 - \ldots - q_n - q^{n+1}$
- $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$
- $S_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$

D'où

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1$$

$$S_n = n + 1 \qquad \text{si } q = 1$$

Somme des termes de la suite géométrique avec u_0 quelconque

Somme des termes de la suite géométrique

- $S_n = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + + u_n = u_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$

D'où en utilisant les expressions précédentes

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1$$

$$S_n = u_0(n+1) \qquad \text{si } q = 1$$

Somme des termes de la suite géométrique

Limite quand $n \to \infty$

- Si $-1 < q < 1$, $q^n \to 0$ et $S_n \to u_0 \frac{1}{1-q}$
- Si $q \leq -1$ ou $q > 1$, q^n diverge et de même S_n
- Si $q = 1$, S_n diverge

Suite géométrique

Exercices

Un processus de naissance et de mort est défini par un taux de naissance λ_n $\forall n \in \mathbb{N}$ et un taux de mort μ_n $\forall n \in \mathbb{N}^*$. n est la taille de la population. On note P_n la probabilité que la taille de la population soit égale à n. On démontre que $P_n = P_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}$.
On s'intéresse au cas où $\lambda_n = \lambda$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\mu_n = \mu$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Donc, taux de naissance et de mort sont constants. On note $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.
1° Montrer que P_n est une suite géométrique. Donner sa raison.
2° On suppose $\rho < 1$. Calculer P_0 .
3° On suppose $\rho < 1$. Donner la taille moyenne de la population en fonction de ρ.
4° Application numérique.

- 90 naissances par an et 100 morts par an. Quelle est la taille de la population moyenne ?

Suite géométrique

Exercices (suite)

5° On considère un bureau de renseignement formé d'un guichet et d'une salle d'attente. Les usagers arrivent et si le guichet est libre se dirigent vers le guichet où leur demande est traitée. Si le guichet n'est pas libre les usagers patientent dans la salle d'attente. Une fois le dossier d'un usagé traité, l'usager s'en va. Le taux d'arrivée des usagers est λ et le taux de traitement des demandes est μ. Le nombre d'usagers dans le bureau (salle d'attente + guichet) est un processus de naissance et de mort de taux λ et μ respectivement.

5°1- Application numérique

- Le traitement d'un dossier dure 5 minutes et il arrive 10 clients par heure. Calculer λ, μ, ρ. Quel est le nombre moyen d'usagers dans le bureau de renseignement (salle d'attente + guichet) ?

Suite géométrique

Exercices (suite)

5°2- Donner l'expression du nombre moyen d'usagers dans la salle d'attente.
5°3- Donner l'expression du nombre moyen d'usagers au guichet.
5°4- Application numérique.

- Reprendre les paramètres précédents et calculer le nombre moyen d'usagers dans la salle d'attente et le nombre moyen au guichet.

5°5- Donner l'expression de la probabilté qu'il y ait n personnes ou plus dans la salle d'attente.
5°6- Application numérique

- Toujours avec les paramètres précédents, calculer la probabilté qu'il y ait 5 personnes ou plus dans la salle d'attente, 10 personnes ou plus dans la salle d'attente.