TD Systèmes linéaires

Exercice1. Système 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. On note le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de 2 coordonnées de nombres réels.

1° Ecrire le système (S) $Ax = b$.

2° Calculer le déterminant de A. Le système aura-t-il une solution ?

3° Résoudre (S).

Exercice 2. Pivot de Gauss

1° Résoudre le système suivant par l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 2 \\ x + y - 2z & = -3 \\ 2x + y - z & = 1 \end{cases}$$

2° Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss

Exercice 3. Problème de production. Système d'équations linéaires

Trois matières premières entrent dans la fabrication de trois produits. Le tableau suivant donne la contribution de chaque unité de matière première à la quantité de chaque produit.

Matière 1	Matière 2	Matière 3	
1	4	7	Produit A
2	5	8	Produit B
3	6	9	Produit C

Par exemple, une unité de Matière 1 contribue pour fabriquer 1 unité de Produit A, une unité de Matière 1 contribue pour fabriquer 2 unités de Produit B et une unité de Matière 1 contribue pour fabriquer 3 unités de Produit C.

Les contributions des matières s'additionnent. Par exemple, si on utilise une unité de chaque produit, on va produire 12 Produit A, 15 Produit B et 18 Produit C.

On veut produire :

- 18 unités de Produit A,
- 24 unités de Produit B,
- 30 unités de Produits C.

Et on voudrait savoir quelles quantités de Matières 1, 2 et 3 sont nécessaires.

1° On note x_i la quantité de Matière i pour i=1,2,3. Ecrire le système d'équations linéaires que doivent vérifier les quantités x_i.

2° Résoudre le système par l'algorithme du pivot de Gauss.

3° Vérifier qu'il y a une infinité de solution. Exprimer les solutions en fonction de x_3 .

4° Supposons que les coûts par unité de matières premières soient les suivants :

Matière 1	Matière 2	Matière 3
1	2	4

Donner la solution qui minimise le coût total. Indication : prendre en compte la question 3°

Exercice 4. Système-boîte noire avec entrée-sortie

On a un système représenté par une boîte « noire » admettant une entrée e et une sortie s. On a effectué 3 relevés de s pour 3 entrées e. Les 3 couples (e, s) mesurés sont les suivants : (1,2), (2,3), (3,3). On voudrait établir une relation entre e et s de la forme suivante : $s = f(e) = x_0 + x_1 e$.

1° Etablir le système d'équations linéaires que doivent satisfaire x_0, x_1 .

2° Vérifier que ce système n'a pas de solution.

3° En s'appuyant sur la méthode des moindres carrés, résoudre l'équation normale pour déterminer x_0, x_1.

4° Calculer la distance euclidienne entre les membres gauche et droit du système obtenue pour la solution trouvée

5° Tracer, dans un repère orthonormé, les 3 points d'entrée-sortie (e, s) et la droite $s = x_0 + x_1 e$ trouvée.

Exercice 5. Mesure la hauteur de collines

Un géomètre doit mesurer les hauteurs h_1, h_2, h_3 de 3 collines C_1, C_2, C_3. Il se place au niveau de la mer et mesure h_1=36, h_2=41, h_3=117 (en mètres). Pour vérifier ces mesures, le géomètre monte sur la colline C1 et mesure la hauteur de C2 relativement à C1. Il trouve 11 mètres. De même, il mesure la hauteur de C3 relativement à C1. Il mesure 77 mètres. De même, il monte sur la colline C2 et mesure la hauteur de C3 relativement à C2. Il trouve 75 mètres. Les mesures sont contradictoires sans doute à cause des incertitudes liées aux appareils de mesures. Le géomètre décide d'appliquer la méthode des moindres carrés pour calculer les 3 hauteurs à partir des relevés effectués. Mais il a oublié le principe.

1° Pour aider le géomètre, appliquer la méthode des moindres carrés pour déterminer h_1, h_2, h_3 .