UE USSI78 - Outils mathématiques pour l'informatique
Cours 1 - Relations et ordres

Alain Faye

Cnam

2025-2026

Plan du cours

Plan

Plan

Plan

Relations

Définition

- Soient E et F deux ensembles. Une relation entre E et F, ou de E vers F, est définie par la donnée d'un sous-ensemble G du produit cartésien $E \times F$.

Exemple

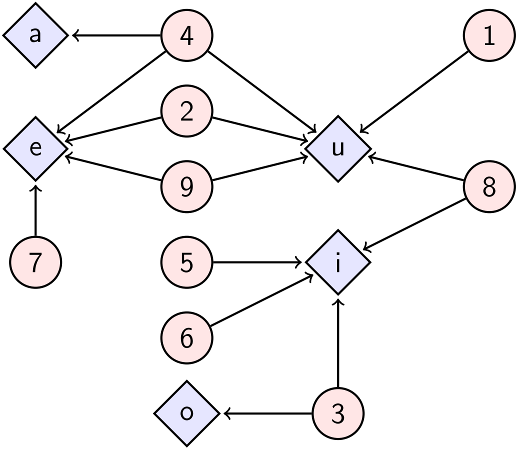
- $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $F = \{a, e, i, o, u\}$
- *$a \in E$ est en relation avec $b \in F$ si la lettre b intervient dans l'écriture du chiffre a.*
- $G = \{(1, u), (2, e), (2, u), (3, i), (3, o), (4, a), (4, e), (4, u), (5, i), (6, i), (7, e), (8, i), (8, u), (9, e), (9, u)\}$

G est le graphe de la relation. C'est l'ensemble des couples des éléments de E et des élèments de F en relation.

Relations

Représentation

- **Diagramme sagittal** : les éléments de E et F sont des points appelés sommets du diagramme et si a est en relation avec b on dessine une flèche du point a au point b.



- **Matrice de la relation** : M matrice binaire comportant autant de lignes que d'éléments de E, autant de colonnes que d'éléments de F et telle que $M_{a,b}$ vaut 1 quand a est en relation avec b, 0 sinon :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Une relation définie sur deux ensembles E et F est appelée parfois relation binaire.
- Lorsque les deux ensembles sont les mêmes, on parle de **relation sur un ensemble** E.

Relations

Définition d'une relation sur un ensemble

Définition

Soit un ensemble E on dit qu'on a défini une relation R sur l'ensemble E si on s'est donné un ensemble $G \subset E \times E$ appelé graphe de la relation.

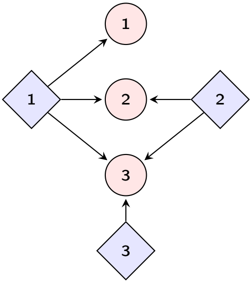
- Cette définition revient à dire que pour définir une relation, on se donne l'ensemble des couples (x, y) d'éléments de E qui vérifient la relation.
- Au lieu de noter $(x, y) \in G$ nous noterons $x \, R \, y$
- Dans ce chapitre, nous étudions deux types classiques de relations :
    - les relations d'équivalence
    - les relations d'ordre

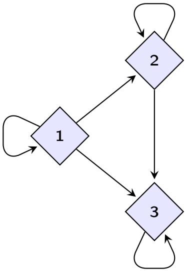
Relation sur un ensemble

Représentation

On peut représenter une relation sur un ensemble par :

- son diagramme sagittal (à gauche)
- son **graphe** (ou digraphe, au centre)
- sa matrice (à droite)





	1	2	3
1	1	1	1
2		1	1
3			1

Plan

- On dit qu'une relation est une **relation d'équivalence** si elle est :
  - **symétrique** : $\forall x \in E, \forall y \in E, x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$,
  - **réflexive** : $\forall x \in E, x\,R\,x$,
  - **transitive** : $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x\,R\,y \text{ et } y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z$.
- Dans le cas d'une relation d'équivalence, deux éléments en relation sont aussi dits équivalents.

Relations d'équivalence

Exemples

1. Sur tout ensemble, l'égalité de deux éléments.
2. Sur l'ensemble des droites (du plan ou de l'espace), la relation "droites parallèles ou confondues".
3. Dans $\mathbb{Z}$ la relation $x \equiv y \pmod{n}$, si est $x - y$ divisible par l'entier n.
   Exemple : n=3. 10 est équivalent à 1 et 4, 23 est équivalent à 2 et 5
4. Dans $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b)\, R\, (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$.
   Exemple : (2,5) est équivalent à (7,10) et (3,6), ...
5. Dans $E = \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, $(p, q)\, R\, (p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$
   Exemple : (6,2) est équivalent à (3,1) et (9,3), ...

Définition (Classe d'équivalence)

Étant donné un ensemble E muni d'une relation d'équivalence R, on appelle ***classe d'équivalence*** *d'un élément x l'ensemble C_x défini par :*

$$C_x = \{y \in E \mid x \, R \, y\}$$

Propriété

Toute classe d'équivalence contient au moins un élément.

En effet, puisque tout élément x est équivalent à lui-même, la classe C_x de x contient au moins l'élément x.

Théorème

Soient les classes C_x et C_y de deux éléments x et y. Ces classes sont disjointes ou sont confondues.

Démonstration

Théorème

Soient les classes C_x et C_y de deux éléments x et y. Ces classes sont disjointes ou sont confondues.

Démonstration

- 1^{er} cas : $C_x \cap C_y = \emptyset$. Les deux classes sont disjointes.

Théorème

Soient les classes C_x et C_y de deux éléments x et y. Ces classes sont disjointes ou sont confondues.

Démonstration

- 1[er] cas : $C_x \cap C_y = \emptyset$. Les deux classes sont disjointes.
- 2[e] cas : $C_x \cap C_y \neq \emptyset$.
  - Soit $z \in C_x \cap C_y$. On a $x\,R\,z$ et $y\,R\,z$, et par transitivité $x\,R\,y$. On en conclut que y est dans la classe de x : $y \in C_x$.
  - Montrons que la classe de y est contenue dans celle de x. Soit $w \in C_y$. On a $y\,R\,w$ et $x\,R\,y$, et donc par transitivité $x\,R\,w$. C'est-à-dire $w \in C_x$ et donc $C_y \subset C_x$. De la même façon, on montre $C_x \subset C_y$.
  - Donc les deux classes et sont confondues.

Définition (Représentant d'une classe)

C_x est la classe d'équivalence de tout élément z de C_x. En effet, si y et z appartiennent à la classe de x, alors leurs classes sont confondues avec celle de x. Ceci justifie d'appeler tout élément d'une classe ***représentant de cette classe*** *.*

Relation d'équivalence

Ensemble quotient

- L'ensemble E est partagé en une réunion disjointe de classes.

$$E = \cup_{x \in E} C_x$$

- Les classes forment une **partition de l'ensemble E** :
  - Chaque élément de E appartient à une classe au moins
  - Chaque élément de E appartient à une seule classe.

Définition (Ensemble quotient)

Étant donnée une relation d'équivalence R sur un ensemble E, l' ***ensemble quotient*** *de E par la relation R, noté E/R est le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ (ensemble des parties de E) des classes d'équivalences.*

$$E/R = \{C_x \in \mathcal{P}(E) \,|\, x \in E\}$$

Relation d'équivalence
Ensemble quotient

- L'ensemble quotient peut aussi être appelé "l'ensemble E *quotienté* par R" ou "l'ensemble E considéré *modulo* R".

- L'idée derrière ces appellations est de travailler dans l'ensemble quotient comme dans E, mais sans distinguer entre eux les éléments équivalents selon R.

Classes d'équivalence

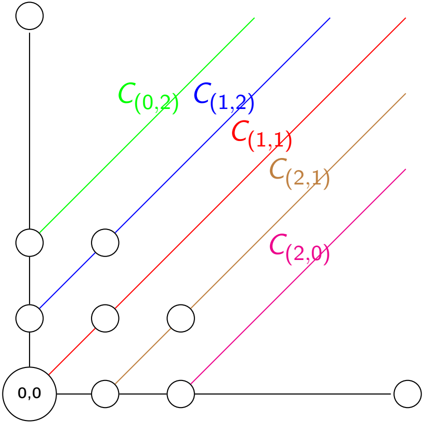
Exemples

- Pour la congruence modulo n, les classes d'équivalence sont représentées par $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ où $C_i = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x - i = kn\}$.
  C'est l'ensemble des nombres qui ont le même reste i dans la division par n.
- par exemple $n = 3$
  - $C_0 = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
  - $C_1 = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
  - $C_2 = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
  - les C_i $(i = 0, 1, 2)$ ne s'intersectent pas et leur union est $\mathbb{Z}$

Classes d'équivalence

Exemples

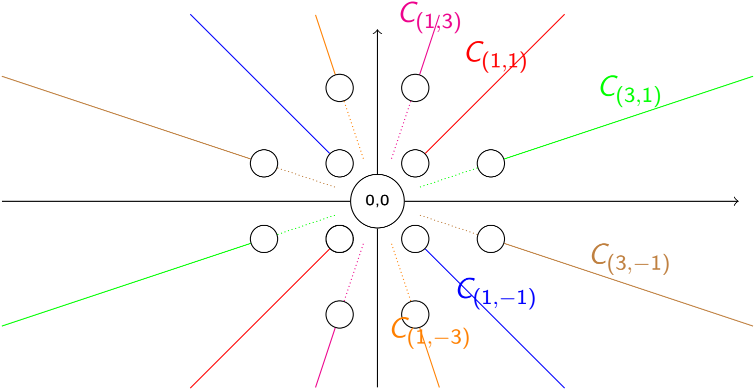
- $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a,b)\,R\,(a',b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$. La classe de (a,b) est par définition les couples (a',b') t.q. $b' = a' + b - a$.
  La classe de (a,b) est l'ensemble des points (a',b') entiers et situés sur la droite de pente 1 et qui passe par (a,b).



Classes d'équivalence

Exemples

- $E = \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, $(p,q)\,R\,(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$. La classe de (p,q) est par définition les couples (p',q') t.q. $q' = \frac{q}{p}p'$.
  C'est l'ensemble des points (p',q') entiers et situés sur la droite de pente $\frac{q}{p}$ et passant par l'origine (et aussi par (p,q)).



Plan

Plan

Plan