Cours 3 – Outils mathématiques pour l’informatique
Résolution des systèmes linéaires

CNAM

Alain Faye

#1
Eléments de calcul matriciel

Rappels, compléments

Matrice

- Une matrice est un tableau m lignes $\times$ n colonnes de nombres
- $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice 2 lignes et 3 colonnes
- L'élément de A à la ligne 1 et la colonne 2 est le nombre -5
- Un élément d'une matrice est souvent désignée par le terme **entrée** dans le monde anglo-saxon
- Les entrées d'une matrice A sont désignés par 2 indices i et j, le **premier** désignant le numéro de **ligne** , le **second** le numéro de **colonne**

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

- Dans l'exemple ci-dessus $a_{12} = -5$

Addition de 2 matrices

- Addition de 2 matrices A, B
- On additionne des matrices de dimensions identiques et on additionne entrée par entrée (terme à terme)
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & -9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Produit scalaire de 2 vecteurs

- Produit scalaire d’un **vecteur ligne** et d’un **vecteur colonne**
- Le nombre de colonnes du premier doit être égal au nombre de lignes du second . Le résultat est un nombre. On dit aussi **scalaire.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 + (-1) \times 2 = 20$$

- Cela revient à multiplier les coordonnées des vecteurs 2 à 2 et à additionner les produits.

Produit de 2 matrices

- Produit de 2 matrices A et B
- On multiplie une matrice A $m \times p$ par une matrice B $p \times n$.
- Attention, le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B.
- Le produit AB est une matrice $m \times n$
- La règle est simple: on multiplie scalairement chaque ligne de A par chaque colonne de B

Produit de 2 matrices

- A=$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
- Ligne 1 par colonne 1: $2 \times 1 + (-4) \times 3 + 1 \times 5 = 15 \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 15 & \\ & \end{pmatrix}$

Produit de 2 matrices

- A=$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
- Ligne 1 par colonne 1: $2 \times 1 + (-4) \times 3 + 1 \times 5 = 15 \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 15 & \\ & \end{pmatrix}$
- Ligne 1 par colonne 2: $2 \times 2 + (-4) \times 1 + 1 \times (-2) = -2 \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 15 & -2 \\ & \end{pmatrix}$

Produit de 2 matrices

- A=$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
- Ligne 1 par colonne 1: $2 \times 1 + (-4) \times 3 + 1 \times 5 = 15 \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 15 & \\ & \end{pmatrix}$
- Ligne 1 par colonne 2: $2 \times 2 + (-4) \times 1 + 1 \times (-2) = -2 \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 15 & -2 \end{pmatrix}$
- Ligne 2 par colonne 1: $3 \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times 5 = 48 \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 15 & -2 \\ 48 & \end{pmatrix}$

Produit de 2 matrices

- A=$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
- Ligne 1 par colonne 1: $2 \times 1 + (-4) \times 3 + 1 \times 5 = 15 \to AB = \begin{pmatrix} 15 & \\ & \end{pmatrix}$
- Ligne 1 par colonne 2: $2 \times 2 + (-4) \times 1 + 1 \times (-2) = -2 \to AB = \begin{pmatrix} 15 & -2 \\ & \end{pmatrix}$
- Ligne 2 par colonne 1: $3 \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times 5 = 48 \to AB = \begin{pmatrix} 15 & -2 \\ 48 & \end{pmatrix}$
- Ligne 2 par colonne 2: $3 \times 2 + 5 \times 1 + 6 \times (-2) = -1 \to AB = \begin{pmatrix} 15 & -2 \\ 48 & -1 \end{pmatrix}$

Cas particuliers: produit vecteur - matrice

- Produit de matrice par vecteur colonne
- Le nombre de colonnes de la matrice doit être égal au nombre de lignes du vecteur . Le résultat est un **vecteur colonne**
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow Au = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$

- Produit de vecteur ligne par matrice
- Le nombre de colonnes du vecteur doit être égal au nombre de lignes de la matrice. Le résultat est un **vecteur ligne**

- $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow vA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale

- ➢Diagonale d'une matrice carrée A: ce sont les éléments a_{ii} $i = 1, \dots, n$
- Exemple n=3 : $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}$
- ➢Matrice diagonale : tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls
- Exemple n=3 : $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

Matrice identité

- Matrice carrée diagonale avec uniquement des 1 sur la diagonale

- Exemple: matrice identité d’ordre 3 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- On peut vérifier que la matrice identité est l’élément neutre pour la multiplication $IA = AI = A$

Matrice inverse

- Matrice (carrée) A est inversible s'il existe une matrice B (de même dimension) telle que $AB = BA = I$
- B est l'inverse de A . Elle est notée A^{-1}
- Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice transposée

- Soit A une matrice m×n : $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$
- La transposée de A est la matrice : $A^T = \left(a_{ji}\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$
- L'élément à la place i, j est permuté avec l'élément à la place j, i
- Cela revient à mettre les lignes de A comme colonnes de A^T
- La matrice A^T est une matrice n×m

- Exemple:

➢ $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

Matrice symétrique

- Soit A une matrice n×n
- A est dite symétrique quand elle est égale à sa transposée

- Exemple:

➢ $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d} & e \\ d & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{f} \\ e & f & \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & d & e \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{b} & f \\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$

➢ Observez la symétrie par rapport à la diagonale :

  ➢ Égalité des éléments situés symétriquement par rapport à la diagonale

Abus de notation: multiplication par un scalaire

- Multiplication d'un vecteur ou d'une matrice par un scalaire :

  on multiplie tous les éléments du vecteur ou de la matrice par le scalaire

- Exemple: un vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, un scalaire α

$$\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}$$

- Normalement on devrait écrire $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ mais c'est un peu long

#2

Système d’équations linéaires

Définition, propriétés, déterminant

Système linéaire

- Système d'équations linéaires avec m équations et n inconnues
- A matrice $m \times n$, b vecteur colonne de m lignes, x vecteur colonne de n lignes, x désigne les inconnues du système :

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Système linéaire

- Système de 2 équations et 2 inconnues
- Exemple

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 = 7 \\ 2x_1 & -x_2 = 0 \end{cases}$$

- Une solution $x_1 = 1, x_2 = 2$
- Ecriture vectorielle du système

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- On voit sous cette forme que le système admet une solution si le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Système linéaire

- Système de 3 équations à 3 inconnues
- Exemple

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & +7x_3 = 18 \\ 2x_1 & +5x_2 & +8x_3 = 24 \\ 3x_1 & +6x_2 & +7x_3 = 28 \end{cases}$$

- Une solution $x_1 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$
- Ecriture vectorielle du système

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 28 \end{pmatrix}$$

- On voit sous cette forme que le système admet une solution si le vecteur $\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 28 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

Cas possibles pour un système linéaire

- 1 solution unique

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 = 5 \\ 2x_1 & +3x_2 = 8 \end{cases}$$

- $x_1 = 1, x_2 = 2$
- les vecteurs $\binom{1}{2}$ et $\binom{2}{3}$ sont non liés (l'un n'est pas multiple de l'autre) donc il n'y a qu'une seule façon d'écrire $\binom{5}{8}$ dans cette base

Cas possibles pour un système linéaire

- Une infinité de solution

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 = 7 \\ 2x_1 & +6x_2 = 14 \end{cases}$$

- La ligne 2 est le double de la ligne 1, donc en fait on a une seule équation avec 2 inconnues. Ce qui fait une infinité de solutions possibles.

Cas possibles pour un système linéaire

- Pas de solution

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 = 7 \\ 2x_1 & +6x_2 = 13 \end{cases}$$

- 2 fois la ligne 1 donne $2x_1 + 6x_2 = 14$ ce qui contredit la ligne 2

Cas possibles pour un système linéaire

- Ceci se généralise dans le cas d’un système m équations à n inconnues, pour m, n quelconques

- 3 cas possibles

- 1 solution unique
- Infinité de solutions
- Pas de solution

Cas de l'unique solution

- Pour m=n=2
- Le système $\begin{cases} ax_1 & +cx_2 = e \\ bx_2 & +dx_2 = f \end{cases}$ admet une unique solution si et seulement si

$$ad - bc \neq 0$$

- Cette quantité est le **déterminant** du système
- Pour $\mathrm{m} = n \geq 3$ le résultat se généralise…

Déterminant d'une matrice carrée

- Pour m=n=2

  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ son déterminant est $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- Pour $\mathrm{m} = n = 3$

  $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ son déterminant est $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$

  - ➢ Noter
  - l'alternance des signes devant a, b et c .
  - Le déterminant est calculé de façon récursive à partir des déterminants de sous-matrices 2×2

- Pour m=n≥4, le déterminant est calculé récursivement de façon analogue

Matrice carrée inversible

- Une matrice (carrée) est inversible si et seulement si son déterminant est non nul
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

  Son déterminant est $1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$

  A est inversible
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

  Son déterminant est $1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$

  A n’est pas inversible

#3 Résolution d’un système

Substitution, élimination

Résolution

- Méthode par substitution

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 = 5 \\ 2x_1 & +3x_2 = 8 \end{cases}$$

➢ On exprime x_1 en fonction de x_2 par la ligne 1

$$x_1 = 5 - 2x_2$$

➢ On reporte dans la ligne 2

$$2(5 - 2x_2) + 3x_2 = 8 \Longrightarrow -x_2 + 10 = 8 \Longrightarrow x_2 = 2$$

➢ On « remonte » i.e. on reporte la valeur de x_2 dans l'expression de x_1

$$x_1 = 5 - 2 \times 2 = 1$$

Résolution

- Méthode par combinaison et élimination

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 = 5 \\ 2x_1 & +3x_2 = 8 \end{cases}$$

➢On élimine x_1 en remplaçant la ligne 2 par la ligne 2 – 2 × ligne 1

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 = 5 \\ & -x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & +2x_2 = 5 \\ & x_2 = 2 \end{cases}$$

➢On « remonte » i.e. on reporte la valeur de x_2 dans la ligne 1

$$x_1 + 2 \times 2 = 5 \Longrightarrow x_1 = 1$$

- L'algorithme se généralise pour un système m×n
- C'est l'algorithme du pivot de Gauss

#4
Algorithme du pivot de Gauss

Algorithme du pivot de Gauss

- On considère un système Ax=b
- Avec m lignes et n colonnes c'est-à-dire m égalités et n inconnues
- On range les coefficients dans un tableau de m lignes et n+1 colonnes
- Les n premières colonnes correspondent à A
- La dernière colonne n+1 correspond au second membre b
- Tableau [A|b]

Algorithme du pivot de Gauss

- Système m lignes n colonnes Ax=b
- Pour j = 1 à n # parcours colonnes
- Pour k= j à m # parcours lignes tant que pivot non trouvé
- si $A_{kj} \neq 0$ # A_{kj} est le pivot
- diviser ligne k par A_{kj} # diviser ligne du pivot par le pivot A_{kj}
- pour i = 1 à m et $i \neq k$
- ligne i $\leftarrow$ ligne i - $A_{ij} \times$ligne k # pour annuler la case A_{ij}
- fin_pour
- si $k \neq j$ permuter ligne k et ligne j
- break # sortir de la boucle k
- fin_si
- fin_Pour
- Fin_Pour
- # la solution se lit dans la colonne n+1

Exemple

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$
- $\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right]$
- Pivot est A_{11}=1 , le pivot étant égal à 1 pas nécessaire de diviser ligne 1 par le pivot, ligne 2$\leftarrow$ligne 2 - 3$\times$ligne 1 et ligne 3$\leftarrow$ligne3 - 2$\times$ ligne1

Exemple

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$
- $\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right]$
- Pivot est A_{11}=1 , le pivot étant égal à 1 pas nécessaire de diviser ligne 1 par le pivot, ligne 2$\leftarrow$ligne 2 - 3$\times$ligne 1 et ligne 3$\leftarrow$ligne3 - 2$\times$ ligne1
- Cela donne:
- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right]$

- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & \mathbf{5} & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right]$
- Pivot est A_{22}=5, on divise ligne 2 par pivot=5, ligne1$\leftarrow$ligne 1 + nouvelle ligne 2 et ligne3$\leftarrow$ligne3 + nouvelle ligne 2

- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & \mathbf{5} & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right]$
- Pivot est A_{22}=5, on divise ligne 2 par pivot=5, ligne1$\leftarrow$ligne 1 + nouvelle ligne 2 et ligne3$\leftarrow$ligne3 + nouvelle ligne 2
- Cela donne:
- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right]$

Exemple

- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-7} & -21 \end{array}\right]$
- Pivot est A_{33}=-7, on divise ligne 3 par pivot=-7 , ligne 1$\leftarrow$ligne 1 – nouvelle ligne 3 et ligne 2$\leftarrow$ligne2 + nouvelle ligne3

Exemple

- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-7} & -21 \end{array}\right]$
- Pivot est A_{33}=-7, on divise ligne 3 par pivot=-7 , ligne 1$\leftarrow$ligne 1 – nouvelle ligne 3 et ligne 2$\leftarrow$ligne2 + nouvelle ligne3
- Cela donne:
- $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$
- La solution est x_1=1, x_2=2, x_3=3

Remarque 1

- Quand $m<n$, à la fin de l'algorithme, les m premières variables seront exprimées en fonction des $n-m$ autres
- Ceci peut arriver aussi quand $m \geq n$ et quand il y a des égalités redondantes (voir exercice en TD)

Remarque 2

- Il se peut qu'à une itération on arrive à une situation avec une ligne remplie de 0 pour les colonnes de 1 à n . Supposons C la valeur de la colonne n+1 sur cette ligne
  - Si C=0 cela signifie que la ligne correspond à une contrainte redondante
  - Si $C \neq 0$ cela signifie que le système n'a pas de solution

Remarque 2

- Contrainte redondante

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} a \\ \vdots \\ b \\ 0 \end{matrix}$$

- Système sans solution

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} a \\ \vdots \\ b \\ \mathrm{c} \neq 0 \end{matrix}$$

Remarque 3

- On peut utiliser l'algorithme pour calculer l'inverse d'une matrice A (carrée)
- On met dans le tableau [A|*I*] où *I* est la matrice identité.
- A la fin de l'algorithme on aura:
  - ➢ Si la matrice est inversible, dans la partie gauche on aura l'identité et dans la partie droite on aura A^{-1} (à la place de *I*)
  - ➢ Si la matrice n'est pas inversible, on aura dans la partie gauche une ou plusieurs lignes de 0 (donc pas l'identité)

Système inversible

- Soit A carrée et système $Ax=b$
- Si A est inversible alors multipliant gauche et droite par A^{-1}
- On obtient $x=A^{-1}b$
- C’est-à-dire la solution du système

#5
Système surcontraint

Equation normale

Système avec plus d’équations que d’inconnues

- On considère un système surcontraint i.e. avec plus d’équations que d’inconnues

$$Ax = b$$

A matrice m lignes $\times$ n colonnes, b vecteur colonne de m lignes, x vecteur colonne de n lignes (ce sont les inconnues à déterminer) et $m > n$

- Généralement ce genre de système n’a pas de solution
- On cherche une solution x telle que les membres droit et gauche soient le plus proche possible
- A la limite, si le système admet une solution, membre droit et gauche sont égaux
- Ce type de problème se présente notamment en IA dans l’apprentissage supervisé

Exemple

- Soit le système (S) : $\begin{cases} x_1 \quad + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 \quad + \ x_2 = 3 \\ x_1 \quad + \ x_2 = 2 \end{cases}$
- Ce système n'a pas de solutions car ligne 1 + ligne 2 donne $3x_1 + 3x_2 = 8$ ce qui contredit la ligne 3
- Nous allons chercher une solution x telle que la distance (à vol d'oiseau) entre les membres droit et gauche soit minimum
- $\min_{x} f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 - 5)^2 + (2x_1 + x_2 - 3)^2 + (x_1 + x_2 - 2)^2$
- Noter que l'on minimise le carré de la distance (on a retiré la racine carré) ce qui revient au même car la fonction racine est croissante.

Exemple

- $\min_x f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 - 5)^{\mathbf{2}} + (2x_1 + x_2 - 3)^{\mathbf{2}} + (x_1 + x_2 - 2)^{\mathbf{2}}$
- Pour minimiser f, cherchons un point critique:
- $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + 2x_2 - 5) \times 1 + 2(2x_1 + x_2 - 3) \times 2 + 2(x_1 + x_2 - 2) \times 1 \\ 2(x_1 + 2x_2 - 5) \times 2 + 2(2x_1 + x_2 - 3) \times 1 + 2(x_1 + x_2 - 2) \times 1 \end{pmatrix}$
- On écrit l'équation $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour annuler le gradient
- Dans cette équation, les 2 en rouge peuvent être retirés ($2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$)
- Il arrive donc le système :

$$\begin{cases} (x_1 + 2x_2 - 5) \times 1 + (2x_1 + x_2 - 3) \times 2 + (x_1 + x_2 - 2) \times 1 = 0 \\ (x_1 + 2x_2 - 5) \times 2 + (2x_1 + x_2 - 3) \times 1 + (x_1 + x_2 - 2) \times 1 = 0 \end{cases}$$

Exemple

- Il arrive donc le système :

$$\begin{cases}(x_1+2x_2-5)\times \mathbf{1}+(2x_1+x_2-3)\times \mathbf{2}+(x_1+x_2-2)\times \mathbf{1}=0\\(x_1+2x_2-5)\times \mathbf{2}+(2x_1+x_2-3)\times \mathbf{1}+(x_1+x_2-2)\times \mathbf{1}=0\end{cases}$$

- Ce qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(x_1+2x_2-5)\\(2x_1+x_2-3)\\(x_1+x_2-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

- Et encore:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

- Et finalement :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$$

Exemple

- Par ailleurs (S) s'écrit matriciellement :
- $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- On a vu page précédente que $\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Ce qui revient à multiplier (S) gauche et droite par $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ qui est la transposée de A

Exemple

- Le système (S) s'écrit $Ax = b$
- Et on a vu page précédente que
- $\nabla f(x) = \binom{0}{0} \Leftrightarrow A^T Ax = A^T b$
- Donc chercher le minimum de f revient à résoudre

$$A^T Ax = A^T b$$

- C'est ce qu'on appelle **l'équation normale**
- On l'obtient en multipliant le système (S) gauche et droite par A^T

Exemple (suite)

- Résolvons **l'équation normale**
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
- $\begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 1 \\ 2 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 1 & 2 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 3 + 1 \times 2 \\ 2 \times 5 + 1 \times 3 + 1 \times 2 \end{pmatrix}$
- Ce qui donne : $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix}$
- La solution est : $x_1 = \frac{3}{11}, x_2 = \frac{25}{11}$

Exemple (suite)

- Solution $x_1 = \frac{3}{11}, x_2 = \frac{25}{11}$
- Reportons dans (S)

$$\begin{cases} \frac{3}{11} \quad + 2\frac{25}{11} = \frac{53}{11} \quad \approx 5 \\ 2\frac{3}{11} \quad + \frac{25}{11} = \frac{31}{11} \quad \approx 3 \\ \frac{3}{11} \quad + \frac{25}{11} = \frac{28}{11} \quad \approx 2 \end{cases}$$

- Calculons la distance entre membre gauche et membre droit dans (S)

$$\sqrt{\left(\frac{53}{11} - 5\right)^2 + \left(\frac{31}{11} - 3\right)^2 + \left(\frac{28}{11} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-2}{11}\right)^2 + \left(\frac{-2}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2} = \frac{\sqrt{44}}{11}$$

- $0{,}5 < \frac{6}{11} < \frac{\sqrt{44}}{11} < \frac{7}{11} < 0{,}7$
- On voit que l'écart est faible . Toute autre solution donnera un écart plus grand

Résumons

- Ce que nous avons vu sur un exemple se généralise. C’est la **méthode des moindres carrés**
- Soit le système (S) : $Ax = b$

  avec A matrice m lignes et n colonnes avec m>n
- Poser l’équation normale

$$A^T A x = A^T b$$

- L’équation normale est un système carré n×n
- Résoudre l’équation normale
- La solution de l’équation normale est la solution qui minimise la distance entre les membres droit et gauche de (S)
- Sous certaines conditions l’équation normale admet une solution unique
  - ➢ Si les colonnes de A sont des vecteurs linéairement indépendants, l’équation normale admet une solution unique

#6
Conclusion

Bilan et prolongement

- Rappels sur les matrices

- Systèmes d’équations linéaires: définition, propriétés, déterminant

- Algorithme de résolution du pivot de Gauss
  - ➢ Le pivot de Gauss est à la base de l’algorithme du simplexe
  - ➢ L’algorithme du simplexe est une méthode utilisée dans les problèmes d’optimisation et en particulier en Programmation Linéaire

- Méthode des moindres et équation normale
  - ➢ La méthode des moindres carrés est une méthode utilisée en sciences expérimentales pour le lissage des données, en apprentissage supervisé dans le domaine de l’IA