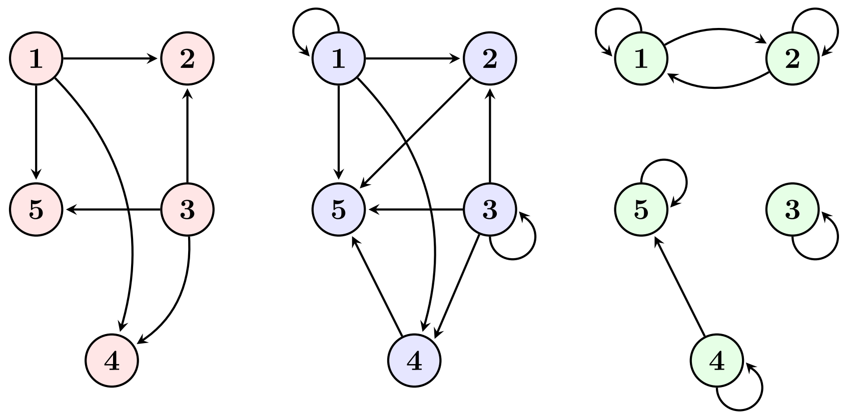
ED n° 1 – Relations et ordre

Exercice 1

Les relations R, S et T sur $A = \{1, 2, \ldots, 5\}$ décrites par les graphes suivants sont-elles réflexives, antisymétriques, symétriques, transitives ?



R S T

On rappelle que l'implication $P \Rightarrow Q$ est par définition l'expression $\rceil P \vee Q$. Ainsi si P est fausse , l'implication est vraie.

Exercice 2

Mêmes questions pour les relations R et S sur $\{1, 2, 3, 4\}$ décrites par les matrices booléennes suivantes :

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit la relation définie ci-dessous sur $E = \mathbb{Z}$:

- $(a \mathrel{\mathrm{R}} b) \iff (a \leq b + 1)$

La relation est-elle réflexive, antisymétrique, symétrique, transitive ?

Exercice 4

La relation suivante est liée à la question : étant donné 2 nombres entiers, est-ce que l'un est une puissance de l'autre ?

Soit la relation définie ci-dessous sur $E = \mathbb{N}$:

. $(a \mathrel{\mathrm{R}} b) \iff (\exists n \in \mathbb{N} : a = b^n)$

R est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

Exercice 5

1- La relation définie ci-dessous est-elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive sur $E = \mathbb{R}^2$?
- $((a, b) \text{ R } (c, d)) \iff ((b - a)(d - c) > 0)$

2- Faire une représentation graphique de la relation. Localiser les points en relation.

3- Vérifier graphiquement que si l'inégalité stricte ($>$) est relachée en inégalité au sens large ($\geq$) la transitivité n'est pas vérifiée.

Exercice 6

Sur $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \text{Div}(18)$ (ensemble des diviseurs de 18), on considère la relation “divise”, notée “$|$”. Représenter le graphe de la relation $(A, |)$, puis son diagramme de Hasse.

Exercice 7

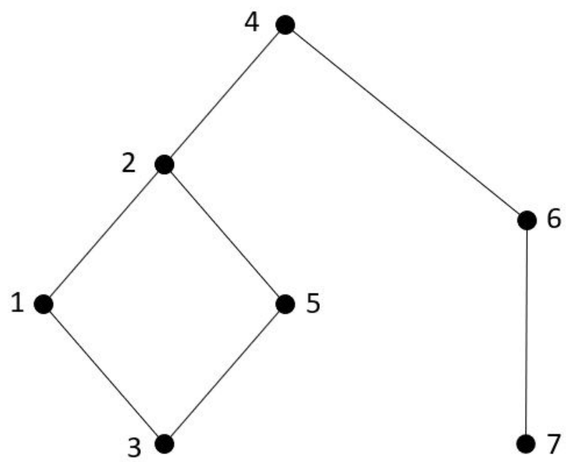
Soit $E = \{a, b, c\}$. Représenter le diagramme de Hasse de $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$.

Exercice 8

Soit $(A, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné. On appelle tri topologique de A toute relation d'ordre total $\leq'$ sur A telle que :

$$\forall a, b \in A : (a \leq b) \Rightarrow (a \leq' b)$$

Un tri topologique est donc simplement une linéarisation d'un ensemble partiellement ordonné. On considère le diagramme de Hasse suivant, associé à un ensemble ordonné $(A, \leq)$:



Effectuer un ou plusieurs tris topologiques de $(A, \leq)$.

Exercice 9 – Relations et ordres

1. Soit R une relation symétrique et transitive sur un ensemble E. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant :
   R étant symétrique, $xRy \Rightarrow yRx$; comme R est transitive, (xRy et yRx) $\Rightarrow xRx$. On en déduit que R est réflexive.

2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ une relation R définie par :

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow |x' - x| \leq y' - y$$

   (a) A-t-on $(2, 3)R(3, 5)$? A-t-on $(2, 3)R(1, 5)$? A-t-on $(2, 3)R(4, 4)$?

   (b) Vérifier que c'est une relation d'ordre. Indication : pour la transitivité, vous pouvez utiliser le résultat suivant (inégalité triangulaire) : $\forall x, x', x''$ réels, $|x'' - x| \leq |x'' - x'| + |x' - x|$.

   (c) L'ordre est-il total ?

   (d) Dessiner l'ensemble des majorants d'un couple (a, b). Indication : exprimer les majorants (x', y') en fonction de (a, b).

   (e) Dessiner l'ensemble des minorants d'un couple (a, b).

   (f) Question bonus (difficile) : Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ (disque de rayon 1 centré en $(0, 0)$). Reprśenter A graphiquement. Déterminer $sup(A)$ le supremum de A.

      Indication : pour répondre simplement à cette question, on pourra considérer les points inférieurs, au sens de R, à un point (a, b).

3. Tracer le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité sur l'ensemble D_{24} des diviseurs de 24.