ED n° 0 – Outils mathématiques - Elément de logique

Exercice 1

1° Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, montrer que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ n'implique pas $a = b$.

2° Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a \geq 0$, $b \geq 0$, montrer que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ implique $a = b$. Faire une démonstration par l'absurde.

Exercice 2

Soit n un entier strictement positif. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier. Faire une démonstration par l'absurde : poser $a = \sqrt{n^2+1}$, supposer a entier et trouver une contradiction sur le fait que n est strictement positif.

Exercice 3

1° Soient a et b, 2 entiers positifs tels que $b - a \geq 2$.

Montrer par récurrence sur p, que $(a+1)^p + (b-1)^p \leq a^p + b^p$ pour tout entier $p \geq 1$.

2° Soit $p \geq 1$ un entier, $n \geq 2$ un autre entier et un réel (entier ou pas) $K \geq 0$. Ces 3 paramètres sont fixés. On considère le problème (P) suivant :

$$\textbf{minimiser} \sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

$$\textbf{sous la contrainte } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq K$$

$$\textbf{avec } x_i \in \mathbb{N} \; i = 1, \ldots, n$$

.

On note x^* une solution optimale et x_i^* ses coordonnées pour $i = 1, \ldots, n$. Montrer qu'il existe une solution optimale x^* telle que $\forall i \neq j \; |x_i^* - x_j^*| \leq 1$.

3° Application numérique. Résoudre le problème (P) pour $n = 4$, $K = 10$, $p = 2$.