Exercices – Outils mathématiques pour l'informatique -- Prérequis

Cette fiche contient des exercices sur les notions indispensables pré-requises pour le cours USSI78

Mise en facteur

$$2a + ab = a(2 + b)$$

$$2x + 3xy + xz = x(2 + 3y + z)$$

$$2x + 4xy + 2xz = 2x(1 + 2y + z)$$

$$n(n + 1) + 2(n + 1) = (n + 1)(n + 2)$$

Calcul sur les fractions

Somme de fractions : il faut réduire au même dénominateur puis additionner les numérateurs

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{5 \times 2}{5 \times 3} + \frac{3 \times 4}{3 \times 5} = \frac{10 + 12}{15} = \frac{22}{15}$$

Pour réduire au même dénominateur, il est préférable de chercher le PPCM des dénominateurs, pour avoir des calculs plus simples :

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{12} = \frac{4 \times 5}{4 \times 3} + \frac{1}{12} = \frac{20 + 1}{12} = \frac{21}{12}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{3 \times 5}{3 \times 6} + \frac{2 \times 4}{2 \times 9} = \frac{15 + 8}{18} = \frac{23}{18}$$

Calcul avec des littéraux : même règle

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{2b} = \frac{2a}{2b} + \frac{c}{2b} = \frac{2a + c}{2b}$$

$$\frac{n(n + 1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{2(n + 1)}{2} = \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

Calcul Matriciel

Deux matrices M_1 et M_2 à multiplier M_1M_2. La règle est : ligne de M_1 par colonne de M_2.

1° Soient les matrices suivantes

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Donner le nombre de lignes et de colonnes de A et B. Calculer AB

AB=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

2° Soient les matrices suivantes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Donner le nombre de lignes et de colonnes de A et B . Calculer AB

AB=$\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

3° Soit C

$$C=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Calculer C. Donner le nombre de lignes et de colonnes de C.

C=$\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -8\end{pmatrix}$

4° Soit A=$\begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$

Calculer A

A=12+10=22

5° Soit A=$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$

Calculer A

A=5+6-4=7

<u>Système linéaire</u>

Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases}x_1+2x_2=3\\ 2x_1+x_2=4\end{cases}$$

1° Méthode de substitution

$$\begin{cases}x_1=3-2x_2\\ 2(3-2x_2)+x_2=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=3-2x_2\\ 6-4x_2+x_2=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=3-2x_2\\ 3x_2=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=3-2x_2\\ x_2=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3} \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

On peut vérifier la solution en reportant dans le système initial

2° Méthode matricielle

On pose B la matrice constituée des coefficients de x_1 pour la colonne 1 et x_2 pour la colonne 2 :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse de B :

$$B^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que le produit de B par son inverse donne la matrice identité :

$$BB^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ le second membre du système. Maintenant, on obtient la solution du système facilement par le produit $B^{-1}b$

$$B^{-1}b = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$