Corrigé ED0. Outils mathématiques – Eléments de logique

Exercice 1

1° Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, montrer que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ n'implique pas $a = b$.

2° Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a \geq 0$, $b \geq 0$, montrer que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ implique $a = b$. Faire une démonstration par l'absurde.

1° exemple : $a = 1, b = -2$

2° Maintenant $a \geq 0$ *et* $b \geq 0$.

Supposons $b > a$. Alors $b > 0$ et $\frac{a}{b} < 1$

$$\frac{a}{b} = \frac{1+b}{1+a} \Rightarrow \frac{1+b}{1+a} < 1 \Rightarrow 1+b < 1+a \Rightarrow b < a$$

Contradiction.

Comme a et b joue un rôle symétrique, de même $a > b$ amènera une contradiction.

Donc a et b ne peuvent être qu'égaux.

Exercice 2

Soit n un entier strictement positif. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier. Faire une démonstration par l'absurde : poser $a = \sqrt{n^2+1}$, supposer a entier et trouver une contradiction sur le fait que n est strictement positif.

$$a^2 = n^2 + 1 \Rightarrow a^2 - n^2 = 1 \Rightarrow (a+n)(a-n) = 1 \quad (A)$$

$$a^2 = n^2 + 1 \Rightarrow a^2 > n^2 \Rightarrow a > n \Rightarrow a - n > 0 \Rightarrow a - n \geq 1 \; car \; a\,, n \; entiers \quad (B)$$

(A) et (B) entraînent $a + n \leq 1 \quad (C)$

Alors (B) et (C) : $\begin{cases} a - n \geq 1 \\ a + n \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + n \leq -1 \\ a + n \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 2n \leq 0$

Contradiction avec $n > 0$.

Exercice 3

1° Soient a et b, 2 entiers positifs tels que $b - a \geq 2$.
Montrer par récurrence sur p, que $(a+1)^p + (b-1)^p \leq a^p + b^p$ pour tout entier $p \geq 1$.

Pour $p = 1$ la proposition est facilement vérifiée.

Supposons vrai pour $p - 1$. Montrons que cela reste vrai pour p.

$$(a+1)^p + (b-1)^p = (a+1)(a+1)^{p-1} + (b-1)^{p-1}(b-1) =$$

$$(a+1)[(a+1)^{p-1}+(b-1)^{p-1}]+(b-1)^{p-1}[-(a+1)+(b-1)]$$

On applique l'hypothèse de récurrence :

$$(a+1)[(a+1)^{p-1}+(b-1)^{p-1}] \leq (a+1)[a^{p-1}+b^{p-1}]$$

Donc :

$$(a+1)^p+(b-1)^p \leq (a+1)[a^{p-1}+b^{p-1}]+(b-1)^{p-1}[-(a+1)+(b-1)]$$

$$(a+1)^p+(b-1)^p \leq a^p+a^{p-1}+(a+1)b^{p-1}+(b-1)^{p-1}[-(a+1)+(b-1)]$$

On augmente la partie droite car $b \geq a$ et $-(a+1)+(b-1)=b-a-2 \geq 0$. Ce qui donne :

$$(a+1)^p+(b-1)^p \leq a^p+b^{p-1}+(a+1)b^{p-1}+(b-1+1)^{p-1}[-(a+1)+(b-1)]$$

$$(a+1)^p+(b-1)^p \leq a^p+b^{p-1}[1+(a+1)-(a+1)+(b-1)]$$

Ce qui donne :

$$(a+1)^p+(b-1)^p \leq a^p+b^{p-1}[b]=a^p+b^p$$

2° Soit $p \geq 1$ un entier, $n \geq 2$ un autre entier et un réel (entier ou pas) $K \geq 0$. Ces 3 paramètres sont fixés. On considère le problème (P) suivant :

$$\textbf{minimiser} \sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

$$\textbf{sous la contrainte } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq K$$

$$\textbf{avec } x_i \in \mathbb{N} \ i=1,\ldots,n$$

.

On note x^* une solution optimale et x_i^* ses coordonnées pour $i=1,\ldots,n$. Montrer qu'il existe une solution optimale x^* telle que $\forall i \neq j \ |x_i^*-x_j^*| \leq 1$.

3° Application numérique. Résoudre le problème (P) pour $n=4$, $K=10$, $p=2$.

D'après 1°, pour minimiser l'objectif on a intérêt à ce que les variables soient le plus égales possibles. S'il y a 2 variables $x_i - x_j \geq 2$, on peut baisser l'objectif en baissant x_i de 1 et en augmentant x_j de 1. Et cette opération ne viole pas la contrainte.

A.N. On rend les variables le plus égales possible et telles que leur somme vaille K=10 pour respecter la contrainte.

$$x_1=2, x_2=2, x_3=3, x_4=3$$

L'objectif vaut $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4+4+9+9=26$.

On ne peut pas faire plus petit.