

# UE USSI78 - Outils mathématiques pour l'informatique

## Cours 0 - Outils mathématiques - Introduction

Alain Faye

Cnam

2025-2026

# Plan du cours

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries

# Quelques éléments de logique

Proposition, relation unaire, relation binaire

- Proposition P prend la valeur Vrai = 1 ou Faux = 0
- Relation unaire : négation :=  $\neg$

P	$\neg P$
1	0
0	1

- Relations binaires : et :=  $\wedge$ , ou :=  $\vee$ ,

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

# Quelques éléments de logique

## Implication

- Implication

- ▶ 2 propositions P et Q
- ▶  $P \Rightarrow Q$  est défini par la formule  $(\neg P) \vee Q$

P	Q	$\neg P \vee Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- ▶  $P \Rightarrow Q = (\neg P) \vee Q = Q \vee (\neg P) = (\neg \neg Q) \vee (\neg P) = (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$

# Quelques éléments de logique

## Equivalence de 2 propositions

- Equivalence

- ▶ 2 propositions P et Q
- ▶  $P \Leftrightarrow Q$  est défini par  $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

# Quelques éléments de logique

## Quelques opérations

2 propositions P et Q

- $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$
- $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$

Exemple de calcul : la négation d'une implication

- $\neg(P \Rightarrow Q) = \neg((\neg P) \vee Q) = (\neg(\neg P)) \wedge (\neg Q) = P \wedge (\neg Q)$

# Quantificateur

## Quantificateur

- quelque soit, pour tout  $\forall$
- il existe  $\exists$
- il n'existe pas  $\nexists$
- il existe un seul  $\exists!$

Exemples :

- soit  $E = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $\forall x \in E$   $x$  est pair
- soit  $E = \{1, 3, 6, 8\}$ ,  $\exists x \in E$  tel que  $x$  est pair
- soit  $E = \{1, 3, 6, 7\}$ ,  $\exists!x \in E$  tel que  $x$  est pair
- soit  $E = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $\nexists x \in E$  tel que  $x$  est pair

# Démonstration

## Par implication

- Hypothèses : P proposition de départ (supposée Vrai)
- Conclusion : Q proposition finale que l'on veut montrer Vrai
- Il faut montrer que  $P \Rightarrow Q$  prend la valeur Vrai

Il est équivalent de montrer que  $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$  est Vrai. C'est la preuve par l'absurde. Parfois cette approche est plus simple.

# Démonstration

Par l'absurde

Exemples :

- P = la somme des angles d'un triangle est  $180^\circ$
- Q = dans un triangle il y a au plus un angle obtus (i.e.  $>90^\circ$ )

Montrons  $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ .

- $\neg Q =$  dans un triangle il y a au moins 2 angles obtus
- On additionne les angles et on obtient une somme  $> 180^\circ$ . Donc P est Faux (i.e.  $\neg P$  est Vrai).

# Démonstration

## Par récurrence

Soit une suite de propositions  $P_n$  qui dépendent d'un entier naturel  $n$ . On veut montrer que  $P_n$  prend la valeur Vrai  $\forall n$ .

Il est souvent plus simple de faire cette démonstration progressivement.

- ① Montrer que  $P_0$  est Vrai
- ② Supposer  $P_n$  Vrai (Hypothèse de récurrence) et démontrer  $P_{n+1}$  c'est-à-dire montrer que  $P_n \Rightarrow P_{n+1}$  est Vrai.

# Démonstration

## Par récurrence

Exemple : Monter que la somme des  $n$  premiers entiers vaut  $\frac{n(n+1)}{2}$  pour  $n \geq 1$ . Ici  $P_n$  = la somme des  $n$  premiers entiers vaut  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

- $n = 1$ . La somme vaut 1 et  $\frac{n(n+1)}{2}$  vaut 1 aussi.  $P_1$  a bien pour valeur Vrai.
- Hypothèse de récurrence :  $P_n$  Vrai c'est-à-dire la somme des  $n$  premiers entiers vaut  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Montrons  $P_{n+1}$  c'est-à-dire montrons que la somme des  $n + 1$  premiers entiers vaut  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .
- Démonstration. La somme des  $n + 1$  premiers entiers est égale à la somme des  $n$  premiers entiers plus  $n + 1$ . Ce qui donne en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries

# Plan

- 1 Éléments de logique
- 2 Relations et ordres
- 3 Éléments d'arithmétique
- 4 Calcul matriciel et analyse
- 5 Suites et séries