UE USSI78 - Outils mathématiques pour l'informatique
Cours 1 - Relations et ordres

Alain Faye

Cnam

2025-2026

Plan du cours

Plan

Plan

1. Éléments de logique

2. Relations et ordres
   - Relations d'ordre
   - Treillis

Plan

Relations d'ordre

Définition (Relation d'ordre)

Soit E un ensemble. Une relation binaire R dans E est une ***relation d'ordre*** *si elle est :*

- ***réflexive*** : $\forall x \in E, x\, R\, x$,
- ***antisymétrique*** : $\forall x \in E, \forall y \in E, (x\, R\, y \text{ et } y\, R\, x) \Rightarrow x = y$
- ***transitive*** : $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x\, R\, y \text{ et } y\, R\, z) \Rightarrow x\, R\, z$.

Exemple

- *La relation d'ordre $x \leq y$ sur les nombres réels.*
- *La relation d'ordre $x \geq y$ sur les nombres réels.*
- *La relation d'inclusion $\subset$ sur les parties d'un ensemble.*

Définition

On appelle ***ensemble ordonné*** *tout ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leq$. On note $(E, \leq)$ un tel ensemble.*

Relations d'ordre

Exemple : l'ordre lexicographique

- Rappelons la définition de la **relation d'ordre lexicographique** sur les listes finies d'entiers.
- Étant données deux listes d'entiers $l = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ et $l' = (n'_1, n'_2, \ldots, n'_k)$, l est lexicographiquement plus grande que l' (noté $l > l'$) si :
  - Soit il existe $p \leq \min(k, r)$ tel que :

$$n_i = n'_i \text{ pour } 1 \leq i < p \text{ et } n_p > n'_p$$

  - Soit :

$$n_i = n'_i \text{ pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } r > k$$

- La relation d'ordre large, notée $\leq$, est définie par :

$$l \leq l' \Leftrightarrow \left(l < l' \text{ ou } l = l'\right)$$

Relations d'ordre

Exemple : l'ordre lexicographique

listes de même longueur ($r = k$)

$$(1, 3, 15, 2) > (1, 3, 14, 2)$$

$$(1, 3, 15, 2) > (1, 3, 14, 5)$$

listes de longueur différentes ($r \neq k$)

$$(2, 3, 6) > (2, 3, 5, 7)$$

$$(2, 3, 6, 1, 5) > (2, 3, 6, 1)$$

Relations d'ordre

Remarques

- Par analogie avec la relation d'ordre sur les nombres, on note souvent les relations d'ordre avec le symbole $\leq$ ou $\preceq$.
- Attention :
  La relation $x < y$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'ordre car

Relations d'ordre

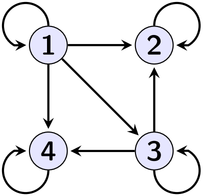
Remarques

- Par analogie avec la relation d'ordre sur les nombres, on note souvent les relations d'ordre avec le symbole $\leq$ ou $\preceq$.
- Attention :
  La relation $x < y$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.
- On dit cependant quelquefois que c'est une *relation d'ordre strict*, ce qui est dangereux puisque ce n'est pas une relation d'ordre.
- Même problème pour l'inclusion stricte des ensembles.

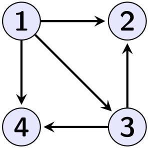
Relations d'ordre

Représentation d'une relation d'ordre par son diagramme de Hasse

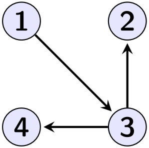
- a On part du digraphe de la relation
- b On *sait* que la relation est réflexive : on peut omettre les boucles
- c On peut également se dispenser de tracer les arcs que l'on peut reconstituer par transitivité
- d On représente tous les arcs de bas en haut (le graphe ne contient aucun circuit de longueur ≥ 2)
- e On peut dès lors se passer de l'orientation



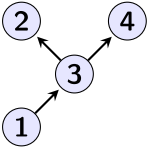
(a)



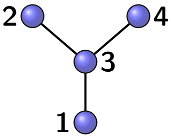
(b)



(c)



(d)



(e)

Relations d'ordre

Définition : ordre total

- La relation d'ordre sur les nombres est une **relation d'ordre total** . En effet deux éléments sont toujours **comparables** . Étant donnés deux nombres réels x et y, on a toujours $x \leq y$ ou $y \leq x$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$$

- La relation d'inclusion entre sous-ensembles d'un ensemble E

Relations d'ordre

Définition : ordre total

- La relation d'ordre sur les nombres est une **relation d'ordre total** . En effet deux éléments sont toujours **comparables** . Étant donnés deux nombres réels x et y, on a toujours $x \leq y$ ou $y \leq x$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$$

- La relation d'inclusion entre sous-ensembles d'un ensemble En'est pas une relation d'ordre total sur $\mathcal{P}(E)$. Il existe des ensembles tel que le premier ne soit pas inclus dans le second, ni le second inclus dans le premier. Par exemple

Relations d'ordre

Définition : ordre total

- La relation d'ordre sur les nombres est une **relation d'ordre total**. En effet deux éléments sont toujours **comparables**. Étant donnés deux nombres réels x et y, on a toujours $x \leq y$ ou $y \leq x$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$$

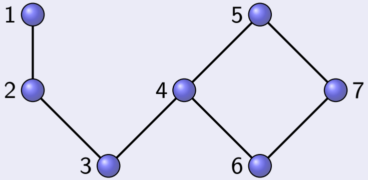
- La relation d'inclusion entre sous-ensembles d'un ensemble E n'est pas une relation d'ordre total sur $\mathcal{P}(E)$. Il existe des ensembles tel que le premier ne soit pas inclus dans le second, ni le second inclus dans le premier. Par exemple $[1, 3] \not\subset [0, 2]$ et $[0, 2] \not\subset [1, 3]$ pour des intervalles de $\mathbb{R}$.
- Lorsqu'un ordre n'est pas total, on parle d' **ordre partiel**.

- Soit $(E, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné et soit $a \in E$. On dit que a est un **élément maximal** de E si :
  $\forall x \in E, (a \leq x) \implies (a = x)$.
- On dira que a est un **élément minimal** de E si :
  $\forall x \in E, (x \leq a) \implies (a = x)$.

Relation d'ordre

Eléments extrémaux

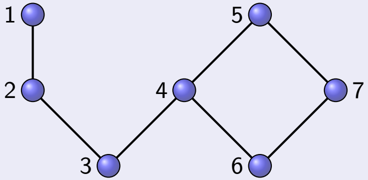
Exemple



Relation d'ordre

Eléments extrémaux

Exemple



Dans l'ensemble ordonné décrit par ce diagramme de Hasse, les éléments 1 et 5 sont maximaux, les éléments 3 et 6 sont minimaux.

- Tout ensemble ordonné $(E, \leq)$ fini et non vide possède au moins un élément maximal et au moins un élément minimal.

Relation d'ordre

Majorant

Définition (majorant)

Soit un ensemble E muni d'une relation d'ordre notée $\leq$ et F un sous-ensemble de E. On dit qu'un élément $M \in E$ est un ***majorant*** *de F s'il est plus grand que tous les éléments de F :*

$$\forall x \in F, x \leq M$$

Si M est un majorant de F, tout élément plus grand que M est aussi un majorant.

Relation d'ordre

Minorant

Définition (minorant)

On dit qu'un élément $m \in E$ est un ***minorant*** *de F s'il est plus petit que tous les éléments de F :*

$$\forall x \in F, m \leq x$$

Si m est un minorant de F, tout élément plus petit que m est aussi un minorant.

Définition (ensemble majoré)

On dit qu'un sous-ensemble F de E ensemble ordonné est ***majoré*** *s'il possède un majorant.*

$$\exists M \in E, \forall x \in F, x \leq M$$

Définition (ensemble minoré)

On dit qu'un sous-ensemble F de E ensemble ordonné est ***minoré*** *s'il possède un minorant.*

$$\exists m \in E, \forall x \in F, m \leq x$$

Définition (ensemble borné)

Un sous-ensemble d'un ensemble ordonné est ***borné*** *s'il possède à la fois un majorant et un minorant, c'est-à-dire s'il est à la fois majoré et minoré.*

$$\exists m \in E, \exists M \in E, \forall x \in F, m \leq x \leq M$$

Relation d'ordre

Plus grand élément

Définition (plus grand élément)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$ et F un sous-ensemble de E.
On dit qu'un élément $M \in F$ est le plus grand élément de F si c'est un majorant de F, *c'est-à-dire s'il est plus grand que tous les éléments de F :*

$$M \in F \text{ et } (\forall x \in F, x \leq M)$$

On définit de la même façon le **plus petit élément** m de F :

$$m \in F \text{ et } (\forall x \in F, m \leq x)$$

Relation d'ordre

Unicité du plus grand élément

- Nous avons écrit **le** plus grand élément de F, car il est facile de voir que si nous supposons dans F deux tels éléments M' et M'' on a $M' \leq M''$ et $M'' \leq M'$ et donc d'après l'antisymétrie de la relation d'ordre, $M' = M''$.
- Si un majorant de F appartient à F alors c'est le plus grand élément de F.
- Un sous-ensemble F majoré peut ne pas avoir de plus grand élément.

Relation d'ordre

Unicité du plus grand élément

- Nous avons écrit **le** plus grand élément de F, car il est facile de voir que si nous supposons dans F deux tels éléments M' et M'' on a $M' \leq M''$ et $M'' \leq M'$ et donc d'après l'antisymétrie de la relation d'ordre, $M' = M''$.
- Si un majorant de F appartient à F alors c'est le plus grand élément de F.
- Un sous-ensemble F majoré peut ne pas avoir de plus grand élément. Par exemple, l'ensemble des nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$ est majoré par exemple par 2 mais il n'a pas de plus grand élément.

Relation d'ordre

Borne supérieure, borne inférieure

Définition (borne supérieure)

Soit un ensemble E ordonné et F un sous-ensemble de E. On suppose que F est majoré. Si l'ensemble des majorants de F admet un plus petit élément, il est appelé ***borne supérieure*** *(ou supremum) de F et noté $\sup F$.*

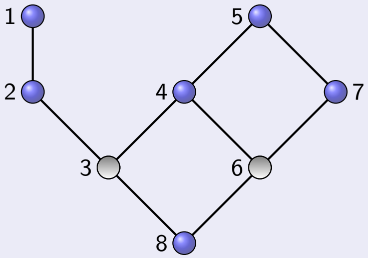
Définition (borne inférieure)

Soit un ensemble E ordonné et F un sous-ensemble de E. On suppose que F est minoré. Si l'ensemble des minorants de F admet un plus grand élément, il est appelé ***borne inférieure*** *(ou infimum) de F et noté $\inf F$.*

Relation d'ordre

Borne supérieure, borne inférieure

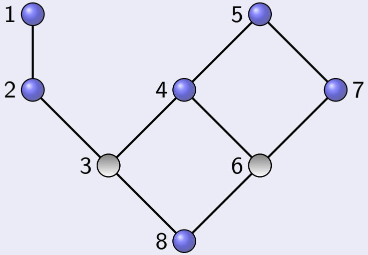
Exemple



Relation d'ordre

Borne supérieure, borne inférieure

Exemple



Dans l'ensemble ordonné décrit par ce diagramme de Hasse, l'ensemble $F = \{3, 6\}$ a 2 majorants 4 et 5, le plus petit de ces majorants est 4. C'est la borne sup de F.
F a un minorant 8. Comme c'est le seul, 8 est aussi borne inf.

Exemple

Soit $F = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ *sous-ensemble des rationnels* $\mathbb{Q}$.

- F *admet* -1 *comme borne inférieure et* $\frac{3}{2}$ *comme borne supérieure.*
- $-1 \notin F$ *et* $\frac{3}{2} \in F$ *donc* $\frac{3}{2}$ *est le plus grand élément de* F. F *n'admet pas de plus petit élément.*

Propriété

Soit un ensemble ordonné E et un sous-ensemble F de E.

- *Si F admet un plus grand élément M, alors M est la borne supérieure de F.*
- *Si F admet une borne supérieure a, alors a est un majorant de F.*
- *Si F a une borne supérieure qui appartient à F, alors c'est aussi le plus grand élément de F.*
- *Si F admet un plus petit élément m, alors m est la borne inférieure de F.*
- *Si F admet une borne inférieure a, alors a est un minorant de F.*
- *Si F a une borne inférieure qui appartient à F, alors c'est aussi le plus petit élément de F.*

Plan

Treillis

Définition (treillis)

Soit $(L, \leq)$ *un ensemble ordonné. On dit que* $(L, \leq)$ *est un* ***treillis*** *si, pour toute paire* $\{a, b\}$ *d'éléments de* L*, le supremum et l'infimum de* $\{a, b\}$ *existent.*

- Dans un treillis $(L, \leq)$, nous utiliserons les notations $a \vee b$ et $a \wedge b$ pour désigner, respectivement, le supremum et l'infimum de $\{a, b\}$.

Treillis

Exemple : les parties d'un ensemble muni de la relation d'ordre inclusion