Cnam Ile-de-France
Année 2024 / 2025

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS

Examen UTC 501
Outils mathématiques pour l'informatique
Session 1
25 mars 2025

Durée : 3 heures
Document (s) autorisé(s) : supports de cours sur papier
Calculatrice : non autorisée
Téléphone portable : non autorisé
Le sujet comporte 3 page (s).

Relation d'ordre – Diagramme de Hasse (2pt)

1° Donner Div_n l'ensemble des diviseurs de $n=36$.

2° Dessiner le diagramme de Hasse de l'ensemble Div_n pour la relation d'ordre « divise » pour $n=36$.

PGCD – PPCM – Algorithme d'Euclide (3 pt)
Soit la suite de couples de nombres entiers suivants :

Couple 1	32	6
Couple 2	48	5
Couple 3	118	12
Couple 4	120	16
Couple 5	149	21

1° Calculer par l'algorithme d'Euclide, le PGCD de chacun de ces couples
2° Quels sont les couples de nombres premiers entre eux ?
3° Déduire de la question 1°, le PPCM des couples 1 et 2.

Inverse modulo (4 pt)
Soient les couples (e, p) de nombres premiers entre eux :

e	p
21	149
48	5
5	48

Cnam Ile-de-France
Année 2024 / 2025

1° Rappeler la définition de l'inverse de e modulo p.
2° Calculer d l'inverse de e modulo p pour les e et p précédents par l'algorithme d'Euclide étendu (i.e. avec « remontée » de l'algorithme). On fournira un $d > 0$.

Système d'équations linéaires – Algorithme de Gauss-Jordan (2 pt)

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 10 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 14 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = 13 \end{cases}$$

1° Résoudre ce système en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan. Bien préciser les opérations effectuées.
2° Vérifier la solution obtenue en la reportant dans le système.

Système linéaire – Equation normale (6 pt)

Nous avons une expérience qui prend en entrée e et donne en sortie s. L'expérience coûte cher et nous n'avons que 3 échantillons d'entrée-sortie qui sont :

e	s
2	2
3	4
4	4

On voudrait exprimer la relation entre e et s par une fonction f affine de la forme $s = f(e) = x_0 + x_1 e$.
On note S le système linéaire que doivent vérifier x_0 et x_1 selon les 3 échantillons (e,s).

1° Donner le système S.
2° En utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, montrer que ce système S n'a pas de solution.
3° On décide tout de même de déterminer des valeurs pour x_0 et x_1.
On prend 2 valeurs au hasard $x_0 = 1$ et $x_1 = 1$. Calculer le carré de la distance euclidienne (cf. ci-dessous) entre le membre de gauche et le membre de droite du système S pour cette solution.
4° On espère trouver mieux. Pour cela, on applique la méthode des moindres carrés.
4°a. Etablir l'équation *normale* associée à S.
4°b. Résoudre l'équation *normale.*
4°c. Calculer le carré de distance euclidienne entre les membres gauche et droit du système S pour cette solution trouvée. Comparer avec le résultat précédent.

Rappel : on rappelle que le carré de la distance euclidienne entre 2 vecteurs $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est $(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2$.

Suite géométrique - Processus de naissance et de mort. (3+2+3 pt)

On considère le processus de naissance et de mort où le taux de naissance λ et le taux de mort μ ne dépendent pas de la taille n de la population. La probabilité que la taille de la population soit n est donnée par la suite géométrique de raison $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ et de terme initial P_0 suivante :

$$P_n = P_0 \rho^n \text{ pour } n \geq 1$$

On suppose par la suite que $\rho < 1$.

1° Poser l'équation que doit vérifier P_0
2° A partir de l'équation précédente, calculer P_0
3° Etablir la série (somme infinie) qui donne la taille moyenne $\overline{N}$ de la population.
4° A partir de la série précédente, déterminer la formule fermée qui donne la taille moyenne de la population $\overline{N}$ en fonction de ρ.

File d'attente et guichet – Processus de naissance et de mort
On considère un bureau de poste constitué d'une file d'attente et d'un guichet. Les clients attendent dans la file d'attente que le guichet soit libre. Dès que le guichet est libre, un client se rend au guichet où son dossier est traité. Le taux de traitement d'un dossier est μ (cette quantité est le nombre de dossiers traités par heure). Le taux d'arrivée des clients est λ. On note $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ et on suppose que $\rho < 1$.

5° Etablir la série (somme infinie) qui permet de calculer le nombre moyen de clients au guichet.
6° A partir de la série précédente, donner l'expression, en fonction de ρ, du nombre moyen de clients au guichet. On note $\overline{N}_g$ le nombre moyen de clients au guichet.
7° A partir du nombre moyen $\overline{N}$ de clients dans le bureau de poste et de $\overline{N}_g$ le nombre moyen de clients au guichet, retrouver l'expression de $\overline{N}_f$ le nombre moyen de clients dans la file d'attente.

Application numérique - Bureau de poste – Processus de naissance et de mort
On considère toujours le même bureau de poste constitué d'un guichet et d'une salle d'attente.
Le traitement d'un dossier de client dure 10 minutes. Il arrive 4 clients par heure.
8° Déterminer ρ.
9° Calculer P_0, P_1
10° Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 clients dans le bureau de poste ?
11° Calculer le nombre moyen de clients dans le bureau de poste.
12° Calculer le nombre moyen de clients au guichet.
13° Calculer le nombre moyen de clients dans la file d'attente.