Taller - Funcionales

1) Porque no es un espacio completo.

En este contexto es importante trabajar con espacios completos, lo cual se refiere a que cualquier sucesión de cauchy converge a un elemento dentro del mismo espacio. En las funciones continuas se pueden encontrar contraejemplos.

2) La integración de Riemann no funciona cuando la función no es continua, por lo cual se utiliza la integral de Lebesgue.

Esta integral funciona si la función tiene discontinuidades en un número finito de puntos. Por lo cual podemos considerar si dos funciones son iguales casi siempre, lo cual significa que las dos funciones son iguales con excepción de conjuntos de medida 0.

En un conjunto finito de reales, cada uno va a tener medida 0 (con respecto a Lebesgue)

Por este motivo la igualdad es c.c.

3) Simétrico

Kokoska - Reimheir

An operator L over an inner product space is called symmetric if for any x, y,

$$\langle L(x), y\rangle = \langle x, L(y)\rangle$$

Para el operador de covarianza

$$C_x(y) = E[\langle X, y\rangle X]$$

$$\mathcal{C}_x(y) = E[\langle x, y \rangle x]$$

$$\langle \mathcal{C}_x(y), z \rangle = \int \mathcal{C}_x(y)(s) z(s)\, ds$$

$$= \int \underbrace{\boxed{\int c(t,s) y(t)\, dt}}_{\text{Operador de covarianza}} z(s)\, ds$$

Fubini $\Rightarrow$ $= \iint c(t,s) z(s)\, ds\; y(t)\, dt$

$$= \int \mathcal{C}_x(z)(t)\; y(t)\, dt$$

$$= \langle y, \mathcal{C}(z) \rangle$$

* Definido positivo

Un operador es definido no negativo si:

$$\langle \mathcal{C}(z), z \rangle \geq 0$$

$$\langle \mathcal{C}_x(z), z \rangle \geq 0$$

$$\int \mathcal{C}_x(z)(s) z(s)\, ds = \iint c(t,s) z(t)\, dt\, z(s)\, ds$$

$$= \iint E[x(t) x(s)]\, z(t) z(s)\, dt\, ds$$

$$= E\left[\iint x(t) x(s) z(t) z(s)\, dt\, ds\right]$$

$$= E\left[\left(\int x(t) z(t)\, dt\right)^2\right)$$

Por propiedades del valor esperado, si una

$$y \geq 0 \Rightarrow E[y] \geq 0$$

Como

$$\left(\int x(t) z(t) dt\right)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$E\left[\left(\int x(t) z(t) dt\right)^2\right] \geq 0$$

Con lo cual queda demostrado que el operador es definido positivo.

* El operador es de Hilbert Schmidt

Por las propiedades mencionadas anteriormente, sabemos que

$$C(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, v_i \rangle v_i$$

Donde λ_i es una secuencia de valores que decrece hacía 0.

El operador es H.S. si $\sum^{\infty} \lambda_i^2 < \infty$

Como la sucesión es decreciente, entonces

$$\lambda_i^2$$

también es decreciente & se encuentra acotada superiormente por λ_1^2 e inferiormente por 0.

Utilizando el teorema de convergencia monotona para sucesiones, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty$$

Luego, el operador es convergente

4) Φ un operador con kernel gaussiano

$$\psi(t,s) = \alpha \exp(-(t^2+s^2)/2)$$

* Valores de α, Φ es un operador HS.

A partir del kernel, el operador es HS si:

$$\iint \psi^2(t,s)\, dt\, ds$$

$$= \alpha \int\int \left(\exp(-(t^2+s^2)/2)\right)^2 dt\, ds$$

* Muestre que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}} \leq \|\Phi\|_{HS}$

* Muestre que $\|\Phi\|_c \leq \|\Phi\|_s$

Sabemos que

$\|\Phi\|_s$ se define como

$$\|\Phi_s\|_s^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|\Phi(e_j)\|^2$$ (Introduction to functional data)

Luego

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\Phi(e_j)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \int \psi(t,s) e_j(s)\, ds \right\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \| \langle \psi(t,s), e_j(s) \rangle \|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int \langle \psi(t,s), e_j(s) \rangle^2 \, dt \quad (*)$$

En esta parte, se reescribe apropiadamente

$$\psi(t,s) = \psi_t(s)$$

Por lo cual

$$(*) = \sum_{j=1}^{\infty} \int \underbrace{\langle \psi(t,s), e_j(s) \rangle}_{\text{coef. de Fourier}}{}^2 \, dt$$

$$= \int \sum_{j=1}^{\infty} \langle \psi_t(s), e_j(s) \rangle^2 \, dt \Rightarrow \text{Acá se usó Fubini !}$$

$$= \int \|\psi_t\|^2 \, dt \Rightarrow \text{Parseval}$$

$$= \iint \psi^2(t,s)\, ds\, dt \Rightarrow \text{Definición de } \|\cdot\| \text{ en } L_2$$

$\langle f, f \rangle = \| \ \|^2$

Se mostró que

$$\|\Phi\|_S = \sqrt{\iint \varphi^2(t,s)\,dt\,ds}$$

Por otro lado, para un $x \in \mathbb{C}^2$

$$\|\Phi(x)\|^2 = \left\| \int \varphi(t,s)\,x(s)\,ds \right\|^2$$

$$= \int \left(\int \varphi(t,s)\,x(s)\,ds \right)^2 dt$$

Cauchy Schwarz $\Rightarrow$ $\leq \int \left\{ \left(\int \varphi^2(t,s)\,ds \right) \left(\int x^2(s)\,ds \right) \right\} dt$

$$= \left(\iint \varphi^2(t,s)\,ds\,dt \right) \|x\|^2$$

De donde se tiene que

$$\frac{\|\Phi(x)\|^2}{\|x\|} \leq \iint \varphi^2(t,s)\,ds\,dt$$

Para todo $x \in \mathbb{C}^2$. Por lo tanto si nos restringimos a aquellas funciones tq' $\|x\| = 1$

$$\|\Phi(x)\|^2 \leq \iint \varphi^2(t,s)\,ds\,dt$$

$\forall x$ tq' $\|x\| = 1$

Como se tiene $\forall x \ \|x\| = 1$, se tiene para el supremo i.e.

$$\sup_{\|x\|=1} \|\Phi(x)\| \leq \sqrt{\iint \psi^2(t,s)\,ds\,dt}$$

Por lotanto

$$\|\Phi\|_c \leq \|\Phi\|_s$$

* Encuentre la norma del kernel

$$\psi(t,s) = \alpha \exp\left(-(t^2+s^2)/2\right)$$

$$\psi_t(s) =$$

$$\|\psi_t(s)\| = \sqrt{\int \psi_t(s)^2\,ds}$$

$$= \sqrt{\int \alpha \exp\{-2(t^2+s^2)/2\}\,ds}$$

$$= \sqrt{\alpha}\,\sqrt{\exp(-t^2)} \int \exp(-s^2)\,ds$$

$$= \sqrt{\alpha}\,\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) * \sqrt{\pi}$$

(5)

$$tr(\Gamma) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Gamma(e_j), e_j \rangle$$

Para mostrar que el operador de covarianza es nuclear, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle \mathcal{C}(e_j), e_j \rangle$$

Descomposición espectral

Por ser simétrico HS Def positivo

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle e_j, v_i \rangle v_i, e_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle e_j, v_i \rangle \int v_i(t) e_j(t) dt$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle e_j, v_i \rangle^2 \quad (*)$$

Sujeto a la restricción que $\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_j, v_i \rangle^2 = 1$ ya que

$$\|e_j\| = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_j, v_i \rangle^2 = 1$$

En cuyo caso se sabe que la expresión

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle e_j, v_i \rangle^2$$

se maximiza tomando $e_j = v_i$, por lo cual se reduce a

$$(*) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$$

Que sabemos es una suma de elementos acotados que decrecen, por lo cual la suma es convergente.

Luego $tr(\mathcal{C}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$

Por lo tanto el operador es nuclear

9) De acuerdo con la definición dada en (introduction to functional data), la norma de un operador de HS, se puede re-escribir de la forma

$$\|\Psi\|_{HS}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\Psi(e_j)\|^2 \quad (*)$$

Donde

$$\Psi(e_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle e_j, v_i \rangle v_i$$

$$\|\Psi(e_j)\|^2$$

$$\langle \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle e_j, v_i \rangle v_i, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_j, v_k \rangle v_k \rangle$$

$$\sum \sum \lambda_i \lambda_k \langle e_j, v_i \rangle \langle e_j, v_k \rangle \langle v_i, v_k \rangle$$

$$\sum \lambda_k^2 \langle e_j, v_k \rangle^2$$

e_j representa una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$

En este caso vamos a tomar v_j, por lo cual al reemplazar en •

$$\bullet \quad \|\Phi(v_j)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \langle v_j, v_k \rangle^2$$
$$= \lambda_j^2$$

$\Rightarrow$ la norma $\|\cdot\|_S$ del operador viene dado por

$$\|\Phi\|_S = \sum_{k=1}^{\infty} \|\phi(e_k)\|^2$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$$

8) La prueba se incluye en la parte ④

7) → Página 28 - Inference for FDA

5) } Preguntar a Rubén?
4.d)

10) → Esta en el libro

11) → Aplicado, debería ser sencillo.