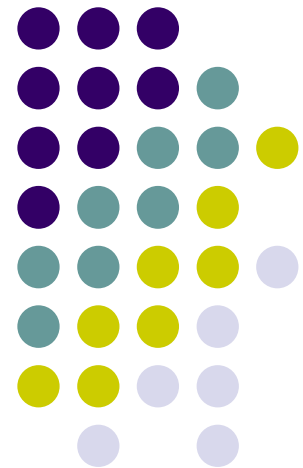
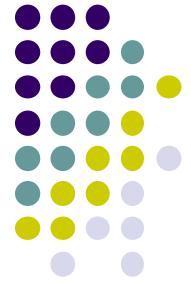


ANÁLISIS NUMÉRICO

Aproximación por mínimos
cuadrados



Aproximación por mínimos cuadrados



En esta unidad vamos a analizar dos situaciones:

(1) Conocida una cierta función, se hace necesario para minimizar propagación de errores o bien para simplificar la programación que involucra en un determinado trabajo de ingeniería, reemplazarla por una más simple.

Veamos gráficamente de que hablamos ...

Aproximación por mínimos cuadrados

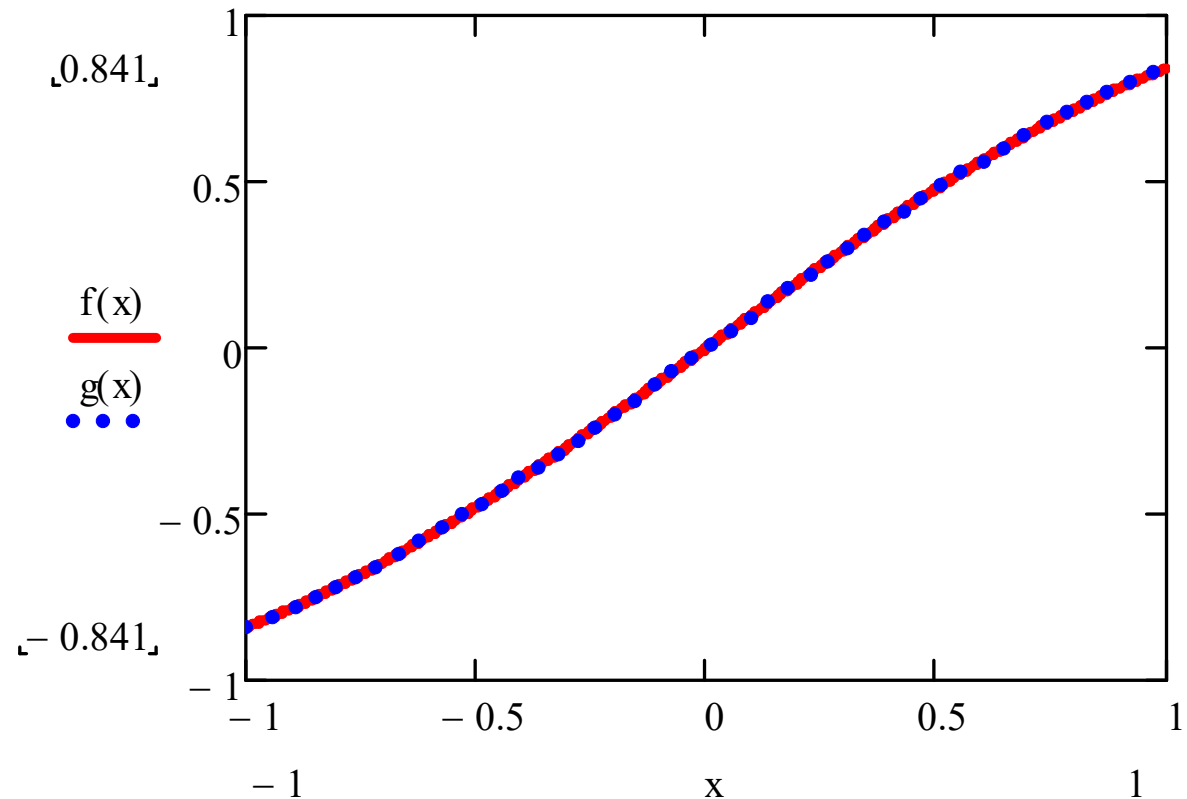


En el primer caso, un ejemplo:

En este caso se aproximó la función real $f(x) = \sin(x)$ con una función polinómica de gr. 5 en el intervalo $[-1, 1]$.



Aproximación continua



Aproximación por mínimos cuadrados



Otra de las situaciones que abordaremos en esta unidad:

(2) Conocido un conjunto de puntos, se quiere obtener la función que mejor los represente.

Veamos gráficamente de que hablamos ...

Aproximación por mínimos cuadrados

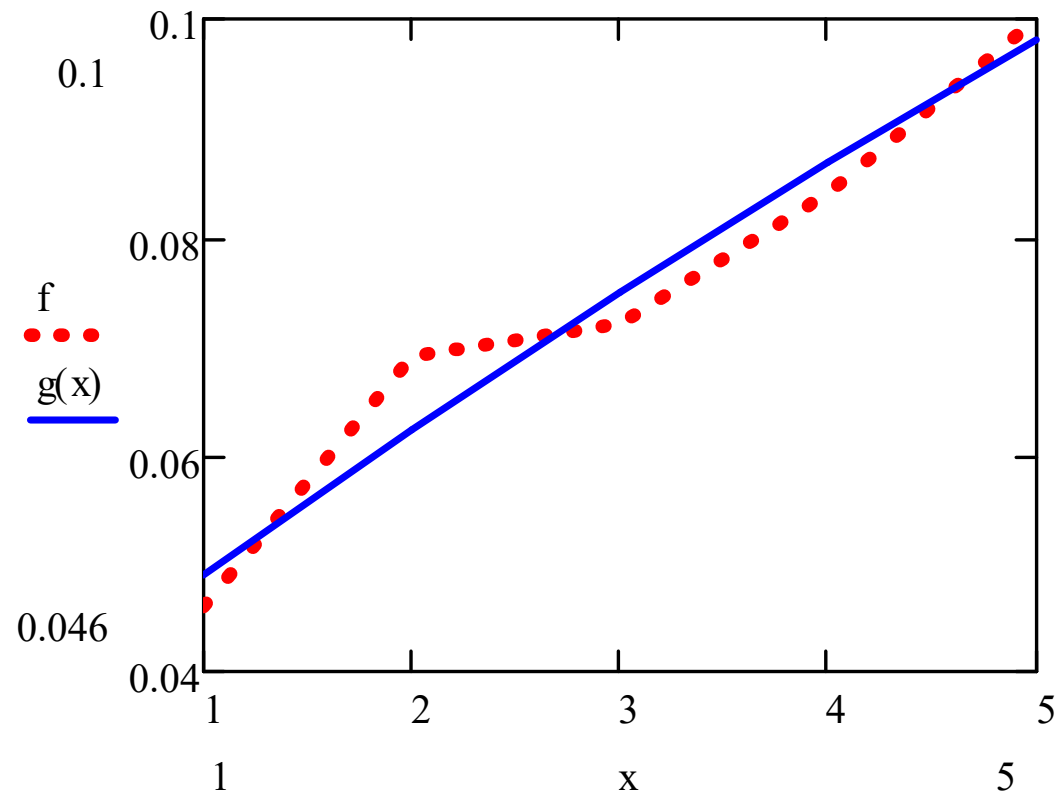


En el segundo caso, un ejemplo:

En este caso se buscó una función polinómica de grado 1 que represente a un conjunto de puntos dados.



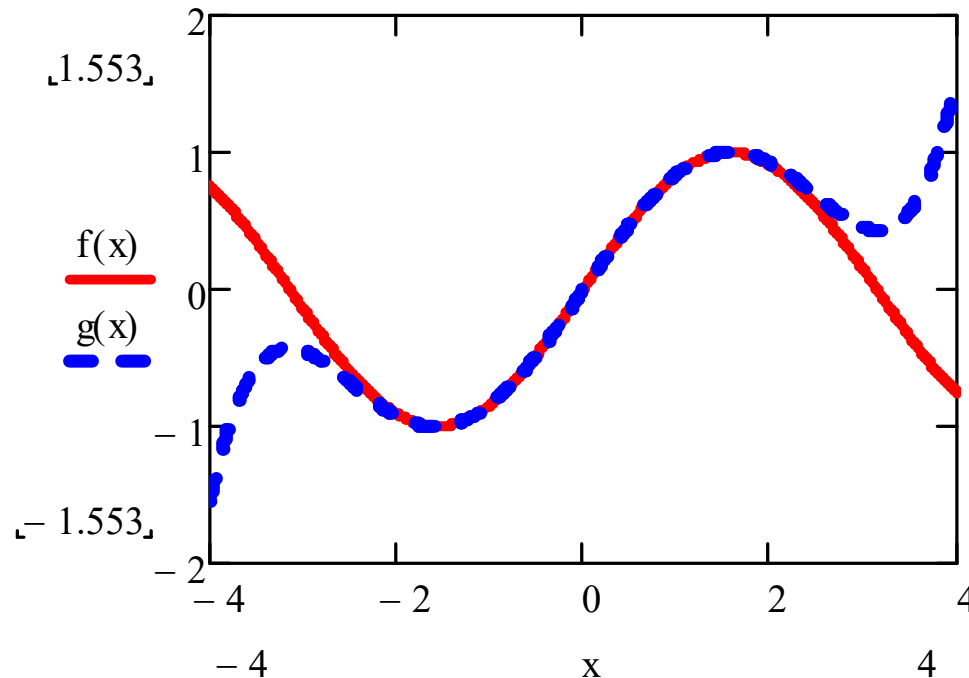
Aproximación discreta



Aproximación por mínimos cuadrados



Antes de entrar en el tema veamos algo, en los problemas de ingeniería que involucran aproximaciones, interesa estudiar una función o un conjunto de puntos en un cierto intervalo, sin importar lo que sucede en el resto del dominio real.



En el primer ejemplo vimos una aproximación en $[-1, 1]$, si ampliamos el intervalo de estudio $[-4, 4]$, esa función polinómica de grado 3 no es una buena aproximación a la función $\sin(x)$.

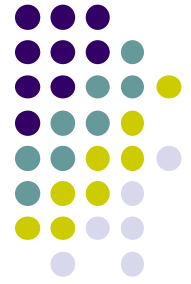
Aproximación por mínimos cuadrados



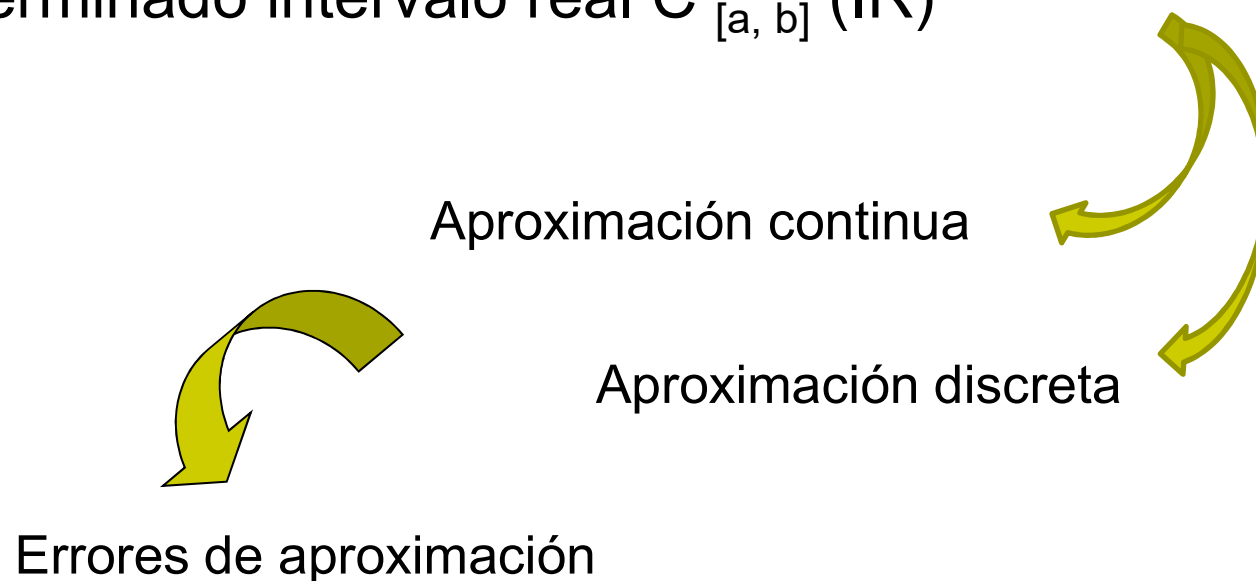
Para poder aplicar el modelo numérico que resuelve estas situaciones que venimos de analizar, vamos a proceder así:

- ✓ En primer lugar vamos a estudiar el modelo numérico de mínimos cuadrados en un espacio vectorial arbitrario, en el cual definiremos una norma y un producto escalar.

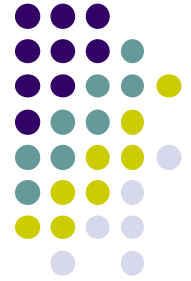
Aproximación por mínimos cuadrados



- ✓ Posteriormente vamos a adecuar ese modelo numérico de mínimos cuadrados al espacio vectorial, prehilbert y normado de las funciones continuas en un determinado intervalo real $C_{[a, b]}(\mathbb{R})$



Aproximación por mínimos cuadrados



Estudiamos el modelo:

Lo primero que hacemos es considerar un espacio vectorial real V (\mathbb{R}) y un subespacio S de V de dimensión finita.

Y determinamos un elemento u del espacio V al cual nos queremos aproximar!!!

Entonces ...

Aproximación por mínimos cuadrados



$V(\mathbb{R})$ espacio vectorial y S subespacio de V

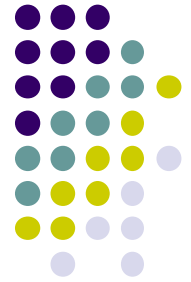
$u \in V$

el elemento φ^* de S (si existe) es la mejor aproximación a u de V , si se verifica que:

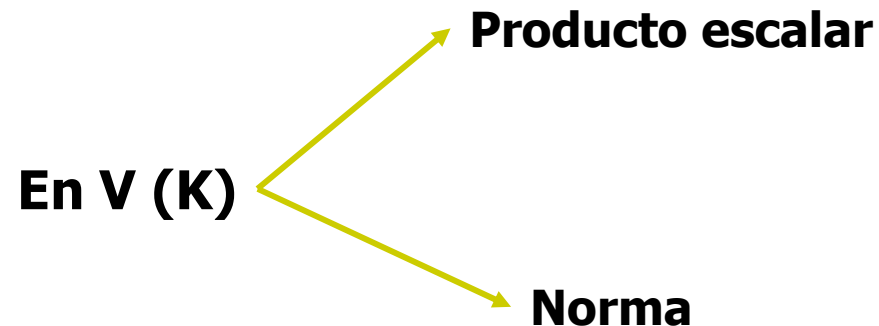
$$d(u, \varphi^*) = \min d(u, \varphi) \quad (\forall \varphi \in S)$$

Es decir: φ^* es el vector de S que está más cerca de u respecto a todos los vectores del subespacio.

Aproximación por mínimos cuadrados



Para garantizar la existencia de esa mejor aproximación φ^* , debemos definir en el espacio vectorial una norma y un producto escalar, a partir de lo cual se verificarán unos teoremas asociados a este tema.



Aproximación por mínimos cuadrados



En el espacio vectorial $V(K)$, hemos definido un producto escalar y una norma, entonces...

Se verifican
estos teoremas

T 1

Siempre existe $\varphi^* \in S$ tal que
 $\|u - \varphi^*\| = \min \|u - \varphi\| \quad (\forall \varphi \in S)$

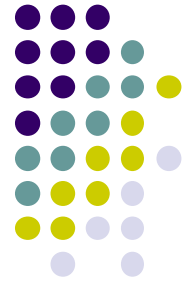
T 2

$\varphi^* \in S$ es tal que
 $\langle u - \varphi^*, \varphi \rangle = 0 \quad (\forall \varphi \in S)$

T 3

$\varphi^* \in S$ es única

Aproximación por mínimos cuadrados



Analizamos un poco estos teoremas:

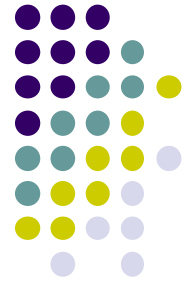
T 1

Siempre existe $\varphi^* \in S$ tal que
 $\|u - \varphi^*\| = \min \|u - \varphi\| \quad (\forall \varphi \in S)$

Vimos en Álgebra lineal que siempre es posible definir una distancia a partir de una norma, por ello tenemos garantía de que siempre se podrá calcular esa distancia y en consecuencia existirá ese vector que verifique estar más cerca que cualquier otro al elemento u .

Siempre es posible calcular: $d(u, \varphi^*) = \|u - \varphi^*\|$

Aproximación por mínimos cuadrados



Analizamos un poco estos teoremas:

T 3

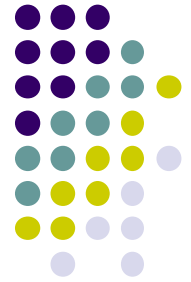
$\varphi^* \in S$ es única

Y se denomina “mejor aproximación a u por elementos de S en el sentido de los mínimos cuadrados”

El número real asignado a una distancia es único lo que garantiza que ese vector que verifica la menor distancia al elemento u , será único.

Es decir: $d(u, \varphi^*) = \|u - \varphi^*\|$ este valor es único para cada dos vectores dados.

Aproximación por mínimos cuadrados



Analizamos un poco estos teoremas:

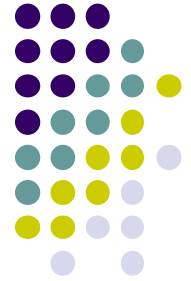
T 2

$\varphi^* \in \mathbf{S}$ es tal que

$$\langle u - \varphi^*, \varphi \rangle = 0 \quad (\forall \varphi \in \mathbf{S})$$

Este teorema permitirá determinar de qué modo vamos a obtener esa mejor aproximación φ^* que siempre existe y es única.

También será la expresión que nos lleve a establecer cuál es el error del método de los mínimos cuadrados (Lo veremos más adelante).



Determinación de la mejor aproximación por el método de los mínimos cuadrados:

Vamos a partir de la expresión del teorema:

$$\langle u - \varphi^*, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in S$$

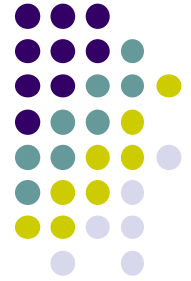
S es un subespacio de dimensión finita

Vimos en Álgebra lineal que una propiedad de producto escalar dice:

$$\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$$

Entonces podemos desdoblar la expresión del teorema:

$$\langle u - \varphi^*, \varphi \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u, \varphi \rangle - \langle \varphi^*, \varphi \rangle = 0$$



Determinación de la mejor aproximación por el método de los mínimos cuadrados:

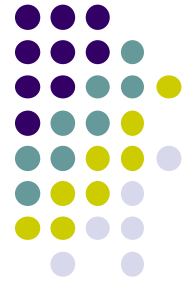
Ahora bien, S es un subespacio vectorial de $V(K)$ de dimensión finita “ n ”, entonces definiremos una base para S :

$$B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

Vimos en Álgebra lineal que todo vector se expresa de manera única en cada base, por lo tanto, dos elementos φ^* y φ se expresarán con coeficientes diferentes en la misma base, por ejemplo:

$$\varphi^* = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_n\varphi_n = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i$$

$$\varphi = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \dots + b_n\varphi_n = \sum_{j=1}^n b_j\varphi_j$$



Determinación de la mejor aproximación por el método de los mínimos cuadrados:

Vamos ahora a reemplazar esas expresiones de φ y de φ^* :

$$\langle u, \varphi \rangle - \langle \varphi^*, \varphi \rangle = 0$$

$$\left\langle u, \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j \right\rangle = 0$$

Vimos también en Álgebra lineal que otra propiedad de producto escalar dice:

$$\langle a, t \cdot b \rangle = t \cdot \langle a, b \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\sum_{j=1}^n b_j \left[\langle u, \varphi_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \varphi_j \right\rangle \right] = 0$$



Determinación de la mejor aproximación por el método de los mínimos cuadrados:

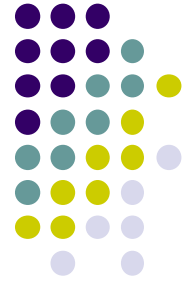
Sabemos que el producto de dos números reales es cero si al menos uno de ellos es cero, entonces, como los coeficientes b_j corresponden a cualquier elemento del subespacio S , resulta:

$$\left[\langle u, \varphi_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \varphi_j \right\rangle \right] = 0$$
$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

Despejando resulta:

$$\langle u, \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Esta expresión es un sistema de ecuaciones lineales.



Determinación de la mejor aproximación por el método de los mínimos cuadrados:

$$\langle u, \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

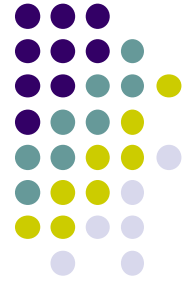
Este sistema recibe el nombre de “sistema de ecuaciones normales”, veremos enseguida porque. Es justamente el modelo que estamos estudiando. Ahora nos preguntamos ...

¿Cuáles son las incógnitas de este sistema?

¿Qué tipo de solución tiene este sistema?

¿Qué haremos con la solución del sistema?

Sistema de ecuaciones normales



$$\langle u, \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Empecemos por expresar el sistema en forma convencional:

$$\boxed{j = 1:} \quad \Rightarrow \quad \langle u, \varphi_1 \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_1 \rangle = a_1 \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle + a_2 \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle + \dots a_n \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle$$

$$\boxed{j = 2:} \quad \Rightarrow \quad \langle u, \varphi_2 \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_2 \rangle = a_1 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle + a_2 \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle + \dots a_n \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle$$

\vdots

$$\boxed{j = n:} \quad \Rightarrow \quad \langle u, \varphi_n \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_n \rangle = a_1 \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle + a_2 \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle + \dots a_n \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle$$

Sistema de ecuaciones normales



¿Cuáles son las incógnitas de este sistema?

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u, \varphi_1 \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_1 \rangle = a_1 \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle + a_2 \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle + \dots a_n \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle u, \varphi_2 \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_2 \rangle = a_1 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle + a_2 \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle + \dots a_n \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, \varphi_n \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_n \rangle = a_1 \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle + a_2 \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle + \dots a_n \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{array} \right.$$

u es un vector de V dado, los elementos φ_i son vectores de una base conocida, entonces, las incógnitas son los coeficientes a_i



a_1, a_2, \dots, a_n

Sistema de ecuaciones normales



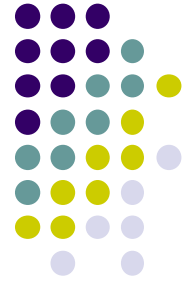
En forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \langle u, \varphi_1 \rangle \\ \dots \\ \langle u, \varphi_n \rangle \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

¿Qué tipo de solución tiene este sistema $A.X = B$?

Observemos la matriz asociada, en álgebra lineal vimos unas propiedades de producto escalar: $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ y también vimos que $\langle a, a \rangle \geq 0$ y $\langle a, a \rangle = 0 \leftrightarrow a = \vec{0}$

Sistema de ecuaciones normales



Entonces ...

$$A = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle & \dots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{pmatrix}$$

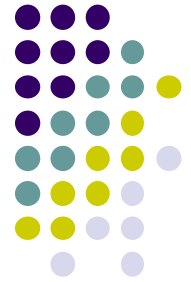
Esta matriz es simétrica y en la diagonal principal no hay elementos negativos ni nulos. Se llama “matriz normal”

Las matrices con estas características tienen determinante no nulo, (se puede demostrar) entonces, qué tipo de solución tiene ...

Solución única

a_1, a_2, \dots, a_n

Sistema de ecuaciones normales



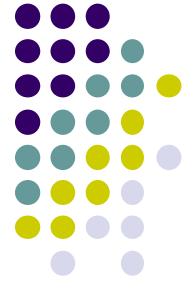
¿Qué hacemos con esa solución única del sistema?

Anteriormente dijimos que en el subespacio S , el elemento φ^* se expresa de manera única en la base B , entonces la solución del sistema sirve para definir al vector:

$$\varphi^* = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_n\varphi_n$$

Que se llama la “mejor aproximación al vector u de V , por elementos del subespacio S , en el sentido de los mínimos cuadrados”

Aproximación por mínimos cuadrados

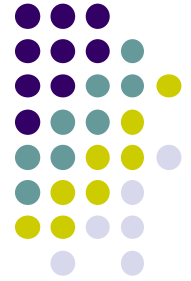


Ya estudiamos el modelo numérico de los mínimos cuadrados, consiste en resolver un sistema de ecuaciones normales, para lo cual necesito los elementos de la base del subespacio por el cual nos vamos a aproximar a un vector dado u de V .

$$\langle u, \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Falta la determinación del error del método, pero primero vamos a ver un ejemplo ...

Ejemplo



Sea el espacio vectorial de las matrices cuadradas de dos filas y dos columnas sobre los reales, en él se tiene la matriz:

$$\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Halle la matriz del subespacio S de la forma :

$$M^* = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

que mejor aproxime a la matriz A en el sentido de la métrica inducida por el siguiente producto interior :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A.B^T)$$

Siendo:

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii} \text{ , para } M = (m_{ij})$$

Ejemplo

$$M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

Tengo el vector al cual quiero aproximar:

$$\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$



El espacio vectorial es $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y el subespacio S , lo dan según la forma de sus elementos:

$$M^* = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

El modelo que estudiamos nos dice que necesitamos ahora una base del subespacio, hay que obtenerla.

Además nos dicen cuál es producto escalar a usar:



$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A \cdot B^T)$$

Ejemplo



Busco la base del subespacio desdoblado según las componentes, visto en Álgebra lineal:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

 M  N

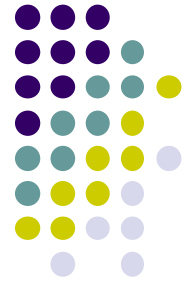
Ya tenemos la base $B = \{M, N\}$

Ahora debemos armar el sistema de ecuaciones normales, cuyo orden lo da el número de elementos de la base.

$$\langle u, \varphi_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

En este ejemplo u es la matriz A y los elementos de la base M y N

Ejemplo



Expresamos el sistema en forma matricial:

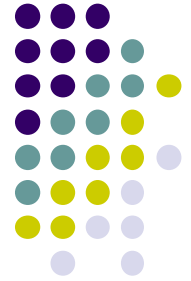
$$\begin{pmatrix} \langle M, M \rangle & \langle N, M \rangle \\ \langle M, N \rangle & \langle N, N \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A, M \rangle \\ \langle A, N \rangle \end{pmatrix}$$

Hay que calcular cada uno de los productos escalares, veamos un ejemplo:

$$\langle M, M \rangle = \text{Tr} (M \cdot M^T) = 2 \qquad M \cdot M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Bueno les toca calcular los demás productos escalares.

Ejemplo



Una vez calculados los productos escalares el sistema de ecuaciones normales resulta:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

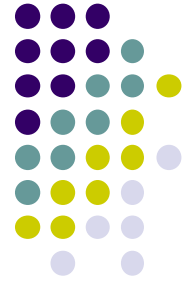
Cuya solución es: $x = 2$ $y = 3$

Entonces la matriz que buscábamos es:

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ de } S$$

Que es la mejor aproximación al elemento A, por el método de los mínimos cuadrados, respecto del subespacio dado.

Aproximación por mínimos cuadrados



Ahora nos queda estudiar cuál es el error del método, anteriormente dijimos que proviene de la expresión del teorema 2:

$$\langle u - \varphi^*, \varphi \rangle = 0 \quad (\forall \varphi \in S)$$

Analicemos: ¿el producto escalar cuando es nulo?, si los vectores son ortogonales o si al menos uno de ellos es el vector nulo, hemos partido de suponer que se verifica para todo subespacio, algunos serán ortogonales, pero en general no, por lo cual, uno de ellos debe ser nulo.

Si fuera el elemento φ nuestro subespacio sería el nulo, porque es válido para todos los elementos de S , no es significativo.



Determinación del error del método

Entonces, debemos suponer que el nulo es el vector: $u - \varphi^*$, esto significaría que $\varphi^* = u$, pero no lo es, es aproximado.

Por lo tanto, el error del método es justamente la distancia que existe entre u y elemento φ^* .

$$d(u, \varphi^*) = \|u - \varphi^*\|$$

En Algebra lineal estudiamos que $\|a\| = +\sqrt{\langle a, a \rangle}$ entonces:

$$\|u - \varphi^*\| = +\sqrt{\langle u - \varphi^*, u - \varphi^* \rangle}$$



Primera expresión
para el error del
método



Determinación del error del método

Trabajamos algebraicamente para ver de qué modo calcularemos el error.

$$\|u - \varphi^*\| = + \sqrt{\langle u - \varphi^*, u - \varphi^* \rangle}$$

Desdoblamos
respecto del 1º vector

$$= + \sqrt{\langle u, u - \varphi^* \rangle - \underbrace{\langle \varphi^*, u - \varphi^* \rangle}_{\text{Es cero}}}$$

Por el teorema 2
 $\langle u - \varphi^*, \varphi \rangle = 0 \quad (\forall \varphi \in S)$

Es cero

$$= + \sqrt{\langle u, u - \varphi^* \rangle}$$

Desdoblamos
respecto del 2º vector

$$= + \sqrt{\langle u, u \rangle - \langle u, \varphi^* \rangle}$$



Determinación del error del método

Trabajamos algebraicamente para ver de qué modo calcularemos el error.

$$= + \sqrt{\langle u, u \rangle - \langle u, \varphi^* \rangle}$$

$$= + \sqrt{\langle u, u \rangle - \left\langle u, \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right\rangle}$$

$$= + \sqrt{\langle u, u \rangle - \sum_{i=1}^n a_i \langle u, \varphi_i \rangle}$$

$$\|u - \varphi^*\| = + \sqrt{\|u\|^2 - \sum_{i=1}^n a_i \langle u, \varphi_i \rangle}$$

Expresamos a φ^* en la base B:

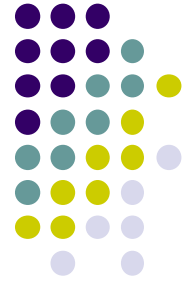
$$\varphi^* = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$$

Sacamos el escalar

Aplicamos

$$\langle u, u \rangle = \|u\|^2$$

Error del método



Determinación del error del método

Retomemos el ejemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Cuya solución es: $x = 2$ $y = 3$

$$\|A - M^*\| = +\sqrt{\|A\|^2 - (x \cdot \langle A, M \rangle + y \cdot \langle A, N \rangle)}$$

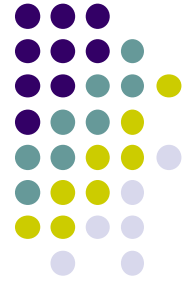
$$\|A\|^2 = (+\sqrt{\langle A, A \rangle})^2 = 30$$

Entonces reemplazando:

$$\|A - M^*\| = +\sqrt{30 - (2 \cdot 4 + 3 \cdot 6)} = +\sqrt{2}$$

Error del método

Aproximación por mínimos cuadrados



Bueno, ya hemos realizado el estudio del método de los mínimos cuadrados, en un espacio vectorial arbitrario.

Ahora debemos adecuar el modelo al espacio vectorial de las funciones continuas en un intervalo real:

$$C_{[a, b]}(\mathbb{R})$$

Vamos entonces a adecuar el sistema de ecuaciones normales y la ecuación del error del método.

Aproximación continua



Estamos en el primer caso, conocemos una función y queremos aproximarnos a ella con otra respecto de algún subespacio por el método de los mínimos cuadrados.

Entonces en el espacio vectorial $C[a, b] (\mathbb{R})$ definimos un producto escalar y una norma:

Producto escalar



$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot w(x) dx$$

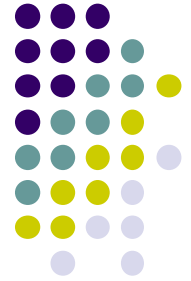
Norma



$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b f(x) \cdot f(x) \cdot w(x) dx$$

La función w es la “Función peso”, no nula al menos en todo x del intervalo $[a, b]$

Aproximación continua



Recuerden que definir un producto escalar y una norma garantiza la existencia de la mejor aproximación.

Definimos una base de un subespacio S del espacio vectorial $C[a, b]$ (\mathbb{R}) en este caso el vector u es la función f y su aproximación será f^* :

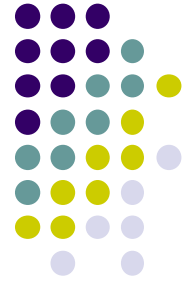
$$B = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

Ahora adecuamos el sistema de ecuaciones normales a ese producto escalar y esa norma:

$$\langle f, f_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle f_i, f_j \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\int_a^b f(x) \cdot f_j(x) w(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int_a^b f_i(x) \cdot f_j(x) w(x) dx \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Aproximación continua



Una vez resuelto el sistema de ecuaciones normales la mejor aproximación se expresará:

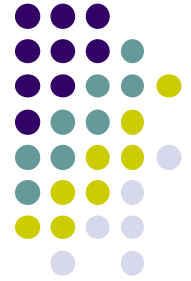
$$f^*(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

Para calcular el error la expresión es:

$$\|f - f^*\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n a_i \langle f_i, f \rangle}$$

$$\|f - f^*\| = \sqrt{\int_a^b \left(f(x)^2 - \sum_{i=1}^n a_i \int_a^b f_i(x) \cdot f_j(x) dx \right)}$$

Aproximación continua



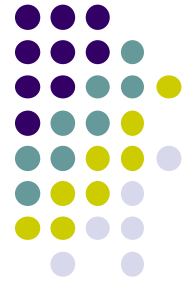
Vamos a trabajar con el práctico!!!

Problema 1.- Considere el espacio vectorial $C_{[-1,1]}(\mathbb{R})$. Determine la mejor aproximación a la función f si $f(x) = \sin(x)$ en el sentido de los mínimos cuadrados, en los siguientes casos:

- a) Por una función del Subespacio S de los polinomios de grado menor o igual a 2.
- b) Por una función del Subespacio S del cual se conoce una base:

$$B \{f_1, f_2, f_3\} \text{ tal que } f_1(x) = x, f_2(x) = x^3 \text{ y } f_3(x) = x^5$$

- a) Calcule el error del método en ambos casos y analice los méritos de esta aproximación en el intervalo dado.
- b) Grafique o bien, reproduzca algunos valores para confirmar su análisis anterior.



Problema 1.-

Juntos realizamos la parte (a)

$C_{[-1,1]}(\mathbb{R})$. El elemento al cual debo aproximarme es $f(x) = \sin(x)$

Polinomios de grado menor o igual a 2, ustedes ya vieron en Algebra lineal como obtener una base de este subespacio:

$$f^*(x) = a + b.x + c.x^2 = a.f_1(x) + b.f_2(x) + c.f_3(x) \quad \text{Entonces?}$$

Base del subespacio: $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$

Armamos el sistema de ecuaciones normales, el producto escalar ya está definido, si tuviera que utilizar otro, el ejercicio lo debe indicar.

El orden del sistema es el número de elementos de la base o bien la dimensión del subespacio.

No nos dan $w(x)$ por lo tanto la hacemos constante 1 en $[-1, 1]$

Problema 1.- (a)

(Trabajen en radianes)



$$\begin{pmatrix} \langle f1, f1 \rangle & \langle f2, f1 \rangle & \langle f3, f1 \rangle \\ \langle f1, f2 \rangle & \langle f2, f2 \rangle & \langle f3, f2 \rangle \\ \langle f1, f3 \rangle & \langle f2, f3 \rangle & \langle f3, f3 \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, f1 \rangle \\ \langle f, f2 \rangle \\ \langle f, f3 \rangle \end{pmatrix}$$

Resolvemos juntos una integral, ustedes las demás ...

$$\langle f1, f2 \rangle = \int_{-1}^1 f1(x) \cdot f2(x) \cdot w(x) = \int_{-1}^1 1 \cdot x \cdot 1 \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$W(x) = 1 \quad (\forall x \in [-1, 1])$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0.66667 \\ 0 & 0.66667 & 0 \\ 0.66667 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.602 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución del sistema:

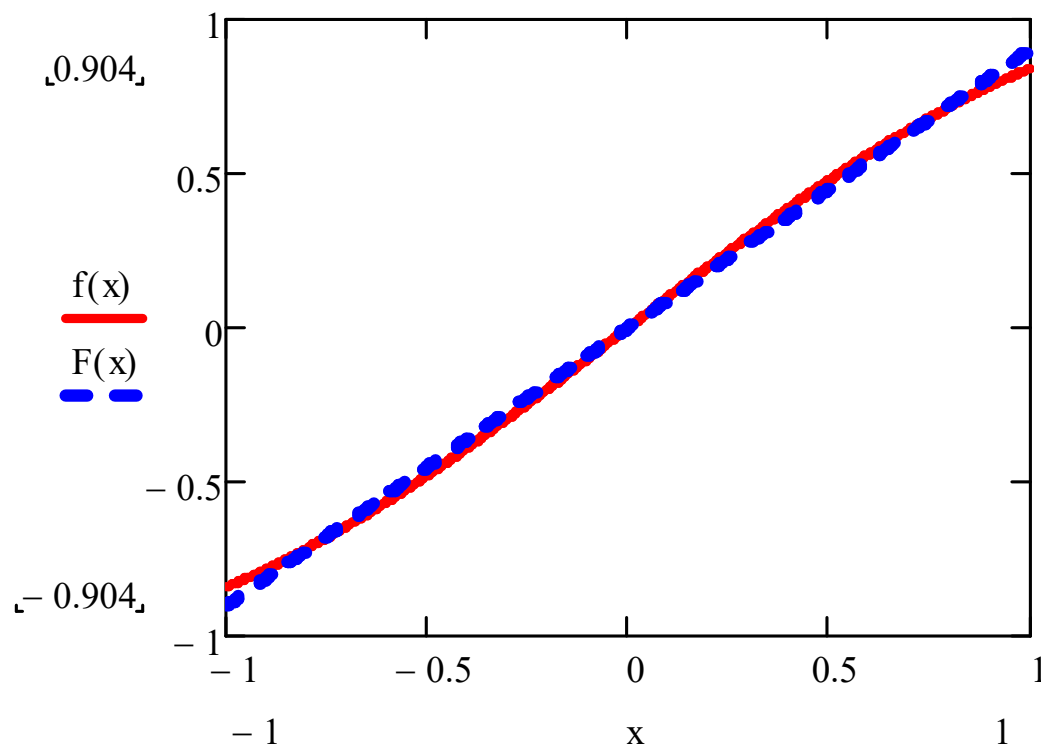
$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.90351 \\ 0 \end{pmatrix}$$



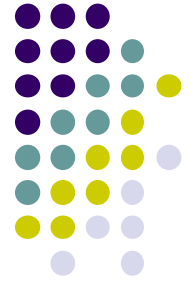
Problema 1.- (a)

Entonces el polinomio de grado dos que mejor aproxima al $\sin(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$ es:

$$f^*(x) = 0 + 0.90351 \cdot x + 0 \cdot x^2$$



Si bien no es necesario graficar, fíjense como resultó la recta que aproxima en este caso, en el intervalo $[-1, 1]$.



Problema 1.- (c) (d) lo resuelven ustedes y comparemos resultados

$$(b) F^*(x) = 0.99998x - 0.16652 x^3 + 0.00802 x^5$$

(c) Error del método. En (a) $E = 0.0337$, en (b) $E = 2.62097 \times 10^{-6}$

Podemos decir que en (b) se obtiene una mejor aproximación en $[-1, 1]$.

$$\|f - f^*\| = \sqrt{\sum_{k=1}^5 \int_{-1}^1 (f(x))^2 - (a_0 \langle f, f_1 \rangle + a_1 \langle f, f_2 \rangle + a_3 \langle f, f_3 \rangle)}$$

Ecuación para calcular el error del método



Problema 1.-

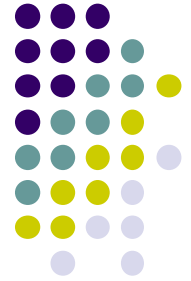
Conclusión:

Podemos observar en el cálculo de error y en la tabla donde se reproducen los valores de la función y de sus dos aproximaciones, que la segunda opción es una mejor representación por este método.

(d) Reproducimos algunos valores:

x	-1	-0.5	-0.25	-0.125	0	0.125	0.25	1
f(x)	-0.84147	-0.47943	-0.2474	-0.12467	0	0.12467	0.2474	0.84147
f*(x)	-0.904	-0.113	-0.014	$-1.765 \cdot 10^{-3}$	0	$1.765 \cdot 10^{-3}$	0.014	0.904
F*(x)	-0.84148	-0.47943	-0.2474	-0.12467	0	0.12467	0.2474	0.84148

Aproximación continua



Les queda realizar a ustedes los ejercicios del 2 y el 3 parte (a) del práctico.

Esta tarde comparto los resultados.


Aproximación discreta




Estamos en el segundo caso, conocemos un conjunto finito de puntos y queremos encontrar una función que los represente, con respecto a algún subespacio, por el método de los mínimos cuadrados.

Disponemos de un conjunto de punto (x_k, y_k) que se supone son parte de una función continua del espacio vectorial $C[a, b]$ (\mathbb{R}), definimos un producto escalar y una norma:

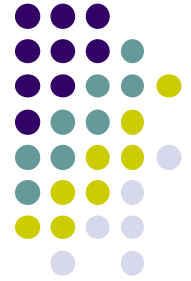
$$(x_k, y_k) \quad k = 1, 2, m$$

Producto escalar  $\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^m f(x_k) \cdot g(x_k) \cdot w(x_k)$

Norma  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^m f(x_k)^2 \cdot w(x_k)$

La función w es la “Función peso”, no nula al menos en todo x del intervalo $[a, b]$

Aproximación discreta



Recuerden que definir un producto escalar y una norma garantiza la existencia de la mejor aproximación.

Definimos una base de un subespacio S del espacio vectorial $C[a, b]$ (\mathbb{R}) en este caso el vector u es la función f y su aproximación será f^* :

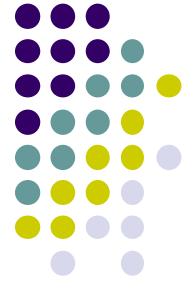
$$B = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

Ahora adecuamos el sistema de ecuaciones normales a ese producto escalar y esa norma:

$$\langle f, f_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle f_i, f_j \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{k=1}^m f(x_k) \cdot f_j(x_k) \cdot w(x_k) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{k=1}^m f_i(x_k) \cdot f_j(x_k) \cdot w(x_k) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Aproximación discreta



Una vez resuelto el sistema de ecuaciones normales la mejor aproximación se expresará:

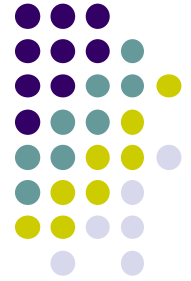
$$f^*(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

Para calcular el error la expresión es:

$$\|f - f^*\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n a_i \langle f_i, f \rangle}$$

$$\|f - f^*\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m (f(x_k))^2 w(x_k) - \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{k=1}^m f_i(x_k) \cdot f(x_k) \cdot w(x_k)}$$

Aproximación discreta



Vamos a trabajar con el práctico!!!

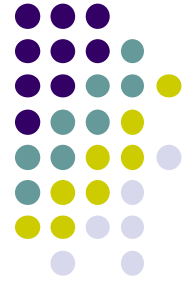
Problema 4.- Se desea predecir aproximadamente el valor de y para:
 $x = 1.30$ y para $x = 2.00$ si se sabe que los valores de la siguiente tabla se obtuvieron experimentalmente pero responden a una ecuación como la siguiente. Calcule el error del método.

$$y = c_0 \ln x + c_1 e^{-x}$$

x	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80
y	0.2420	0.1942	0.1497	0.1109	0.079

La ecuación es la que indica el subespacio por el cual me estoy aproximando, necesitamos obtener una base del mismo.

Aproximación discreta



Problema 4.-

$$y = c_0 \ln(x) + c_1 e^{-x} = c_0 f_1(x) + c_1 f_2(x)$$

Base del subespacio: $B = \{f_1, f_2\}$ $f_1(x) = \ln(x)$, $f_2(x) = e^{-x}$

Armamos el sistema de ecuaciones normales, el producto escalar ya está definido, si tuviera que utilizar otro, el ejercicio lo debe indicar.

El orden del sistema es el número de elementos de la base o bien la dimensión del subespacio. En este caso es de orden 2.

No nos dan $w(x)$ por lo tanto la hacemos constante 1 en $[1, 1.80]$

$$\begin{pmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_2, f_1 \rangle \\ \langle f_1, f_2 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, f_1 \rangle \\ \langle f, f_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Aproximación discreta



Problema 4.-

Ahora tenemos que completar la tabla para las dos funciones básicas, además de lo dado en el problema.

x	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80
y	0,242	0,1942	0,1497	0,1109	0,079
f1=ln(x)	0	0,1823216	0,3364722	0,4700036	0,5877867
f2=e ^{-x}	0,3678794	0,3011942	0,246597	0,2018965	0,1652989

$$w(x) = 1 \quad (\forall x \in [1, 1.80])$$

Resolvemos juntos alguno producto escalares:

$$\langle f1, f2 \rangle = \sum_{k=1}^5 f1(x_k) \cdot f2(x_k) \cdot w(x_k) =$$

$$= 0 \times 0,3678794 + 0,1823216 \times 0,3011942 + 0,3364722 \times 0,246597 + 0,4700036 \times 0,2018965 + 0,5877867 \times 0,1652989 =$$

$$= 0,32993981$$

Aproximación discreta



Problema 4.-

$$A = \begin{bmatrix} 0,71285129 & 0,32993981 \\ 0,32993981 & 0,35494923 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0,18433529 \\ 0,21988324 \end{bmatrix}$$

Solución del sistema:

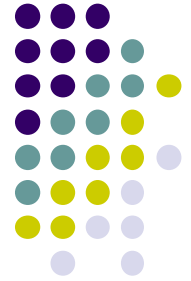
$$\begin{bmatrix} -0,04937766 \\ 0,66537657 \end{bmatrix}$$

Reemplazamos en la ecuación: $y = c_0 \ln x + c_1 e^{-x}$

$$y = -0,04937766 \cdot \ln(x) + 0,66537657 \cdot e^{-x}$$

Es la función que mejor representa a los datos respecto del subespacio dado, por el método de los mínimos cuadrados.

Aproximación discreta



Problema 4.-

Vamos a aproximar los valores que corresponden a $x = 1,30$ y $x = 2,00$ con la función obtenida:

$$y = -0,04937766 \cdot \ln(x) + 0,66537657 \cdot e^{-x}$$

0,16838134	$f(1,30)$
0,05582294	$f(2,00)$

Si observamos los datos originales vemos que efectivamente los obtenidos están en los rangos factibles.

x	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80
y	0.2420	0.1942	0.1497	0.1109	0.079

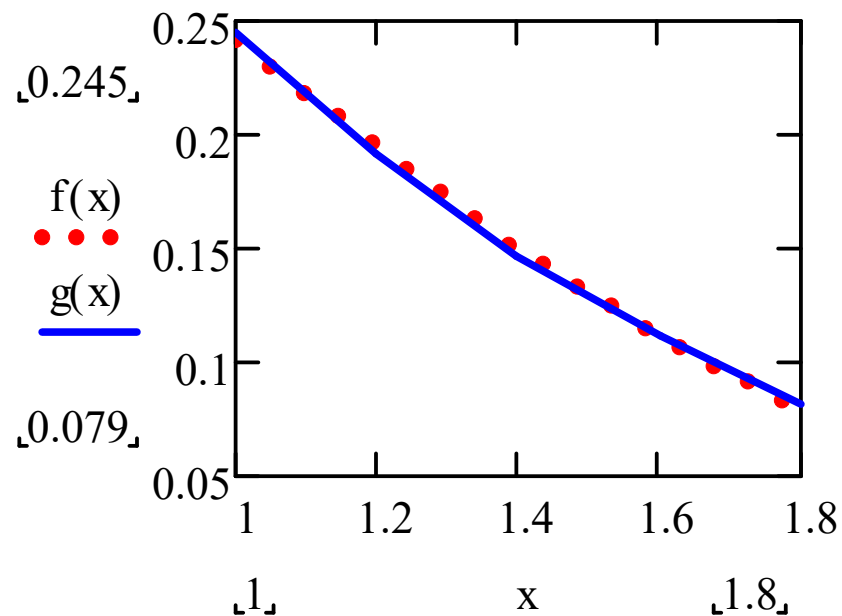
Aproximación discreta



Problema 4.- Calculamos el error del método:

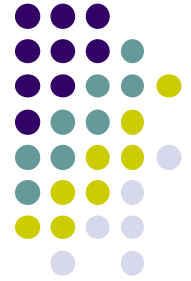
$$\|f - f^*\| = \sqrt{\sum_{k=1}^5 (f(x_k)^2 - (c_0 \langle f, f_1 \rangle + c_1 \langle f, f_2 \rangle))}$$

$$E = 0,00494246$$



Podemos ver en la gráfica que es una buena aproximación la obtenida.

Aproximación discreta

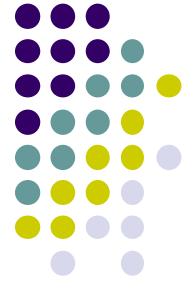


Les queda realizar a ustedes el ejercicio
3 parte (b) (c) y (d) del práctico.

Luego comparto los resultados.

Continuamos con el último tema de la
unidad.

Aproximación discreta



Si la función a la que quiero aproximar, conociendo un conjunto de puntos, no tiene esta forma:

$$f^*(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

Estaremos en presencia de un “**caso no lineal**” (así se denomina) .

Si decimos que una secuencia de puntos debe responder a una ecuación de la forma: $f(x) = a \cdot e^{3x}$

Esto es un “caso no lineal”, entonces, se intentará por medio de propiedades algebraicas llevar la ecuación a la forma del “caso lineal”.

Cada situación es diferente!!!

Veamos un ejemplo.

Aproximación discreta

Caso no lineal



$$(x_k, y_k) \quad k = 1, 2, m$$

$$(x_k, y_k) \in f \text{ de } C_{[a, b]}(\mathbb{R})$$

La función que mejor representa al conjunto de puntos NO esta expresada:

$$\varphi^*(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$$

Obtenga una ecuación de la forma $p(x) = a \cdot e^{m \cdot x}$ que represente a los datos mostrados en la siguiente tabla:

x	1	2	3	4
y	7	11	17	27

Analice los méritos de la aproximación hallada verificando los datos de la tabla.

Aproximación discreta

Caso no lineal



Trabajamos algebraicamente: $p(x) = a \cdot e^{m \cdot x}$

Aplico logaritmo natural en ambos miembros:

$$\ln(p(x)) = \ln(a \cdot e^{m \cdot x})$$

Aplico propiedades de logaritmos:

$$\underbrace{\ln(p(x))}_{f^*(x)} = \ln(a) + \ln(e^{m \cdot x}) = \underbrace{\ln(a)}_{h \cdot f_1(x)} + \underbrace{m \cdot x}_{k \cdot f_2(x)}$$

Ahora si estoy en un “caso lineal”.

Aproximación discreta

Caso no lineal



$$f(x) = \ln(p(x)) \quad h = \ln(a) \quad f_1(x) = 1 \quad k = m \quad f_2(x) = x$$

Aplicamos el método con esta sustitución:

$$\begin{pmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_2, f_1 \rangle \\ \langle f_1, f_2 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, f_1 \rangle \\ \langle f, f_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 13,6816144 \\ 28,4246882 \end{vmatrix}$$

Solución del sistema:

1,49693935

0,44850982

Entonces: $h = 1,49693935$ por lo tanto $a = 4,46799317$
 $k = m = 0,44850982$

$$p(x) = 4,46799317 \cdot e^{0,44850982 \cdot x}$$

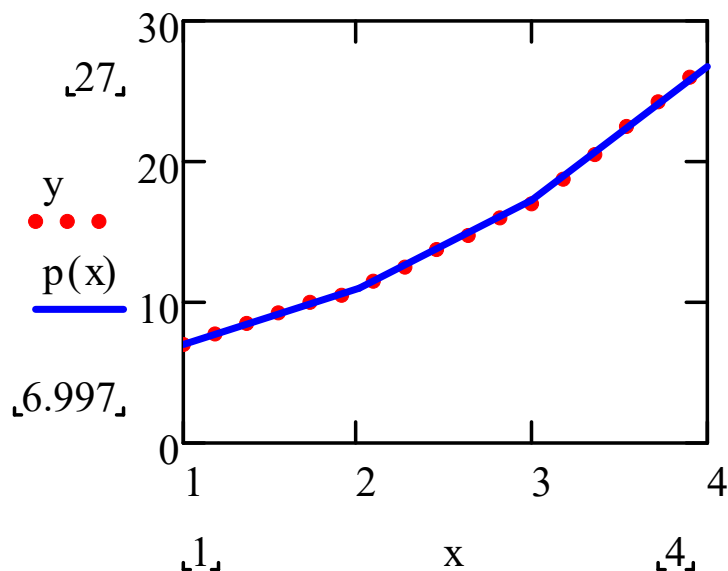
Aproximación discreta

Caso no lineal

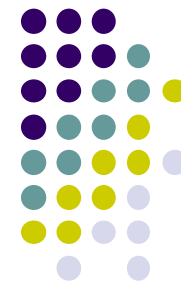
$$p(x) = 4,46799317 \cdot e^{0,44850982 \cdot x}$$

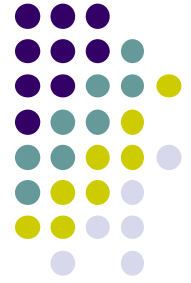
Reproducimos los datos de la tabla:

x	1	2	3	4
y	7	11	17	27
p(x)	6,99677392	10,9567861	17,1580735	26,869146



Reproducir los valores de la tabla o ver el gráfico nos permite verificar que es una muy buena aproximación.
La curva representa muy bien al conjunto de puntos.





Les queda realizar a ustedes los demás ejercicios del práctico.

Luego compartiremos los resultados.

Y trataremos de hacer los ejercicios de laboratorio.