EA

ENTORNO ACADÉMICO

Año 9, Número 9, JUN de 2012
ISSN: 1870 - 5316
www.itesca.edu.mx

ITESCA
Instituto Tecnológico
Superior de Cajeme

Editorial

Estamos viviendo una época donde las fronteras se desvanecen a partir del intercambio de información y tecnología, esto ha propiciado un ambiente de desarrollo del cual ningún país debe sustraerse, el conocimiento, la investigación y la innovación son las actividades en las que se sustenta el avance de las regiones y de los países.

Generar espacios para el intercambio de información entre especialistas es una actividad de suma importancia para el flujo de conocimientos e ideas que permitan la creación de avances tecnológicos, donde se expongan conocimientos teóricos que puedan ser aplicados por las nuevas generaciones de profesionistas asegurando un desarrollo continuo, bajo el contexto actual de respeto al medio ambiente.

El Instituto Tecnológico Superior de Cajeme, institución comprometida con el desarrollo regional y del país, consciente de los retos actuales pone a disposición un espacio para la comunidad científica, la revista electrónica Entorno Académico.

La Revista Entorno Académico nació con el ánimo de constituir un sitio de referencia de la investigación buscando consolidarse como un espacio de divulgación y desarrollo de nuevas ideas e iniciativas de todas las áreas del conocimiento, ya que los avances tecnológicos actualmente son multidisciplinarios, contemplando al desarrollo regional, desde una perspectiva amplia y diversa la educación, el conocimiento y la ciencia son básicamente estrategias de desarrollo que permiten, al mismo tiempo, el crecimiento económico basado en la competitividad genuina y el acceso a mayores niveles de calidad de vida, de ciudadanía y de igualdad entre las personas.

Sin duda, el porvenir de los países está en manos de la existencia de sistemas universitarios en condiciones de producir, aplicar, recrear y divulgar conocimientos científicos y tecnológicos de calidad, de formar profesionales altamente capacitados y comprometidos, desarrollo de proyectos de investigación científica y tecnológica que aporten nuevos conocimientos de alto impacto para los distintos sectores socio-productivos.

Para la comunidad ITESCA, la revista Entorno Académico, es una respuesta a los retos actuales que presentamos con mucho agrado y orgullo, porque en ella encontrarán información actualizada y estamos seguros les será de gran utilidad.
Entorno Académico es una contribución más del ITESCA al crecimiento de nuestra sociedad.

M.I. Paulino Antonio Sánchez López
Director General, del Instituto Tecnológico Superior de Cajeme

Directorio

Rotación y traslación de cuerpos rígidos utilizando el álgebra de quaterniones.

Juan Enrique Palomares Ruiz. Jefe de la División de Ciencias Básicas. Instituto Tecnológico Superior de Cajeme.
Francisco Javier Ochoa Estrella. Profesor Investigador Tiempo Completo. Instituto Tecnológico Superior de Cajeme.

Resumen
El presente documento tiene por objetivo principal, describir el conjunto de los quaterniones y las operaciones usuales que se definen sobre éste, y demostrar que en realidad éstos forman un espacio vectorial normado. Además de definir las transformaciones lineales que se presentan sobre éstos, de una manera formal, con la finalidad de obtener una metodología que permita modelar la rotación y traslación de multicuerpos rígidos, formando una cadena cinemática abierta, que es la idealización matemática de un robot manipulador.

Abstract
This document is intended primarily to describe the set of quaternions and the usual operations defined, and to prove that they actually form a normed vector space. Besides defining tree linear transformations, in a formal manner, in order to obtain a methodology to model the multi-body rotation and translation of rigid body, forming an open kinematic chain, which is the mathematical idealization of a robot manipulator.

Palabras clave
Modelación, matemática, quaterniones, cinemática, rotación, traslación, espacio vectorial.

Introducción
Para poder modelar el comportamiento mecánico de sistemas articulados de multicuerpos rígidos, es necesario emplear métodos sistemáticos que permitan, por un lado, generar los modelos cinemáticos de tales sistemas, y por otro la posibilidad de poder desarrollar los simuladores computacionales a partir de estos modelos.
Los robots y mecanismos representados por cadenas cinemáticas, han sido modelados usando metodologías tradicionales, como el método de Denavit-Hartenberg [5], el de desplazamientos sucesivos [15], métodos geométricos [9] o el método del álgebra de quaterniones [4, 7, *10*] entre otros.

En la década pasada, se han sistematizado y parametrizado las rotaciones de multicuerpos rígidos [*13*, *14*], tanto en el plano como en el espacio.
Los números complejos para el plano, además del álgebra de quaterniones y el espacio dual quaternio, para movimientos espaciales.
Este reporte de investigación forma parte de un trabajo que consiste, en utilizar el álgebra de quaterniones y la operación de rotación, definida propiamente en este espacio vectorial, para modelar la cinemática directa e inversa de un robot de seis grados de libertad, de la compañía CRS, modelo A465 y construir un simulador que contenga las características básicas del robot.
Actualmente el Instituto Tecnológico Superior de Cajeme (ITESCA) cuenta con equipamiento de tecnología para las áreas de electrónica, robótica y manufactura; dentro de este equipamiento se encuentra una celda de manufactura flexible integrada entre otros equipos por: un robot CRS A465 de 6 grados de libertad para una mesa de ensamble, un robot CRS A465 montado sobre dos ejes de movimiento transversal y longitudinal formando 8 grados de libertad para carga y descarga, y un robot cartesiano neumático para mesa de ensamble.
Para el entrenamiento de los alumnos en el manejo y programación de robots, se hace uso de los dos robots CRS con que cuenta el ITESCA; sin embargo este entrenamiento consiste básicamente, en posicionar el robot en sus diferentes configuraciones y programar algunas tareas simples, esto se lleva a cabo, sin entender la estructura de la modelación matemática con la que este robot puede realizar dichas tareas. Es decir, solo se está aprendiendo a manipular el robot sin entender el trasfondo que está implicado, ya que el software de fábrica solo permite eso.

Una posible solución a esta situación, consiste en desarrollar y programar un modelo cinemático funcional, con el que los alumnos puedan comprender, como es que se configuran los movimientos del robot, su velocidad traslacional y angular y sus aceleraciones. Y que además se pudiese crear un simulador que permita observar los movimientos del robot sin tener que realizarlos físicamente.
La modelación cinemática de n cuerpos rígidos acoplados, formando una cadena cinemática abierta, la cual caracteriza a un robot manipulador, requiere de representaciones matemáticas y algoritmos de solución que puedan ser resueltos en tiempo real mediante herramientas computacionales.

En el modelo matemático se busca, que este sea un planteamiento analítico con soluciones cerradas. Esto es posible en casos donde la arquitectura del robot es sencilla y con no más de seis grados de libertad, pero en general, los modelos resultantes llevan a sistemas de ecuaciones no lineales, los cuales deben de resolverse utilizando métodos numéricos, que solo nos proporcionan una aproximación de la solución real.
Algunos de los métodos más utilizados en la modelación de robots manipuladores y mecanismos son; El método matricial, también conocido como el método de Denavit-Hartenberg [5], este método utiliza matrices de 4×4 para simular las rotaciones y traslaciones de un cuerpo rígido en el espacio. El método de los desplazamientos sucesivos [15], se caracteriza por localizar la posición final del mecanismo o robot manipulador, calculando las rotaciones de los actuadores de cada una de las juntas de los cuerpos rígidos. También existen otros métodos como son el método geométrico, que generalmente se utiliza para robots con dos grados de libertad [9], y el método de los quaterniones [4, 13, 14, 3], donde se utiliza un conjunto isomorfo a R_4, el cual es la primer extensión natural del conjunto de los números complejos. Este conjunto dotado de las operaciones ($\oplus$,$\otimes$, $\bullet$), resulta ser un espacio vectorial normado. En este espacio se definen transformaciones lineales que representan la rotación finita de un cuerpo rígido. Además, las representaciones de las rotaciones mediante quaterniones resultan más convenientes que aquellas que utilizan matrices [7], ya que:

- Las rotaciones sucesivas en un cuerpo rígido, pueden representarse simplemente con la multiplicación sucesiva de quaterniones.
- La rotación inversa de un cuerpo rígido, se obtiene con el conjugado del quaternión que representa la rotación.
- Se puede obtener directamente del quaternión de rotación, su ángulo y eje de rotación.
- Podemos definir una transformación lineal, que convierte al quaternión en un vector de R^3.
- Solo se requiere operar con cuatro elementos en cada rotación, en lugar de 16, que son los que requieren las matrices de rotación.
- No es necesario seguir una convención, para definir las bases en cada uno de los cuerpos rígidos que componen el robot.
- El que el modelo cinemático del robot manipulador sea consistente, no depende de la arquitectura del robot.
- Utilizando el método del álgebra de quaterniones, se evitan las singularidades en la solución del problema cinemático inverso.

Actualmente existen una gran variedad de trabajos realizados en la modelación cinemática y dinámica de mecanismos y robots manipuladores, por ejemplo matricialmente podemos encontrar la modelación de los robots PUMA y SCARA, básicamente en cualquier libro de robótica [12, 16]. Mediante álgebra de quaterniones, se encuentra entre otros el trabajo doctoral de Mario Marquez [10], que contiene la simulación cinemática de un robot de dos grados de libertad y del robot manipulador PUMA siguiendo la parametrización de los quaterniones sistematizada por el Dr. Luís Reyes [13, 14], así también en los trabajos previos de investigación del ITESCA, se encuentra la modelación cinemática de un robot de dos grados de libertad, utilizando la rotación y reflexión de números complejos [1, 3]. Actualmente estos métodos son los más utilizados, sin embargo el método de Denavit-Hartenberg, es utilizado generalmente en robots con no más de 6 grados de libertad y con una arquitectura en particular, ya que su debilidad consiste en las singularidades que se generan al resolver el problema cinemático inverso. Así que, este método no es recomendable en la modelación de manipuladores redundantes, es decir con mas de 6 grados de libertad, éstos robots manipuladores al igual que los robots paralelos, poseen una gran presición en sus movimientos, sin embargo el problema cinemático directo posee diversas soluciones al igual que el cinemático inverso [2], por lo que se han tomado nuevas estrategias para resolver este tipo de configuraciones, por supuesto entre estos métodos se encuentra el álgebra de quaterniones.
Además de la modelación de mecanismos y robots manipuladores, el modelado cinemático y dinámico, utilizando el álgebra de quaterniones ha tomado un gran auge en el desarrollo de la representación gráfica en el plano de imágenes tridimensionales [6], ésto es utilizado frecuentemente en problemas de robótica móvil, para categorizar objetos reales a travez de sus trazas bidimensionales. Los quaterniones también son utilizados en ciencias computacionales, para generar rasgos expresivos en animaciones tridimensionales [8] donde el animar un rostro, es decir mostrar gestos expresivos, es un problema que posee más de 100 grados de libertad.
Otra aplicación sumamente importante, de la modelación cinemática y dinámica, mediante el uso del álgebra de quaterniones, se da en el análisis y modelación de partes humanas, como la columna vertebral [11], que tiene como finalidad, el poder diseñar implantes, semejantes al del ser humano, altamente duraderos y que se comporten como la parte original, y en un futuro no lejano inclusive mejor.
Así que a continuación, se muestran los datos históricos sobre el surgimiento de los quaterniones, y a su vez se demuestra como este conjunto dotado de las operaciones de suma y multiplicación, tanto de quaterniones como de escalares por quaterniones, es en realidad un espacio vectorial normado, sobre el que

se puede construir una operación de rotación, la cual servirá para poder modelar las rotaciones de un cuerpo rígido.
Con esta operación de rotación se podrán generar las ecuaciones que modelan la cinemática del robot manipulador CRS A465, utilizando para esto la ecuación de lazo del mecanismo y la rotación de cuerpo rígido.

Desarrollo
El campo C forma un sistema numérico muy conveniente, sin embargo C es bidimensional y el mundo donde vivimos es tridimensional. Esto fue lo que motivó a Hamilton a buscar un sistema numérico tridimensional T, el cual contuviese a R y a C, y además preservara en lo posible sus propiedades. En otras palabras, así como el impuso una estructura de campo, isomórfica a C, en el plano R^2, buscó hacer un sistema numérico en R^3 que contuviese a C.
Resulta de cierta forma natural el como sumar y restar tripletas, sin embargo Hamilton tuvo grandes problemas en encontrar una definición adecuada para el producto de dos tripletas. Como después escribiría a su hijo : *"Cada mañana, cuando bajaba a tomar mi desayuno, tu solí as preguntarme: ¿ Y bien papá, ya puedes multiplicar tripletas? ' A lo que siempre estuve obligado a replicar, con una triste sacudida de cabeza: 'No, solo puedo sumarlas y restarlas'."*

Ahora es posible observar claramente donde él fallaba. Sea T con bases 1, i, j donde 1, i genera el subcampo C. El producto de ij, debería tener la siguiente forma

$$ij = a + bi + cj \qquad \text{donde} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando por i y utilizando la propiedad $i^2=-1$, tenemos que:

$$i^2 j = ai + bi^2 + cij$$

$$-j = (ac - b) + (c + bc)i + c^2 j$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$ac - b = 0 \quad a + bc = 0 \quad c^2 = -1$$

del que resulta a=0,b=0 y $c=\sqrt{-1}$, pero $c\in R$ lo cual es una contradicción.

A pesar de esta contradicción, Hamilton consideró tripletas z=(a,b,c)=a+bi+cj donde $i^2=j^2=-1$. El requerí a una definición para la multiplicación de tripletas que le permitiese utilizar el módulo $|z|= a^2+b^2+c^2$ y satisfacer la regla del producto $|zw|=|z||w|$, como en el campo C.
En el caso particular z=w, esta regla se convierte en $|z^2|=|z|^2$ con lo que Hamilton encontró que

$$z^2 = (a^2 - b^2 - c^2) + 2abi + 2acj + 2bcij \ , \quad \text{y}$$

$$\|z\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2} =$$

$$\sqrt{(a^2 - b^2 - c^2) + (2ab)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2}$$

Así que este caso en particular de la regla del producto se satisface si ij=0. Hamilton percibió ésto como algo "raro e incómodo", debido a su naturaleza. Después el notó que en la expansión de z^2 asumió que ij=ji; por lo que, si el no hubiese asumido esto, debió de tomar el último término de la expansión como ab(ij+ji), así que la regla se satisface si ij=-ji, por lo que renombró al término ij como k y lógicamente a ji como -k. Permitiendo que ij≠ji nacía un mayor concepto, los matemáticos por ejemplo, sabían que las rotaciones no eran conmutativas, pero los números no conmutativos era algo inusual en esos tiempos.
Después de mucho esfuerzo, Hamilton encontró que k no podía ser una combinación lineal de 1,i y j, por lo que tuvo que considerar un sistema numérico de cuatro dimensiones, con bases 1,i,j y k. Esta solución vino a él de manera espontánea un 16 de Octubre de 1843, mientras caminaba con su esposa en Dublín, Irlanda a la Real Academia Irlandesa, el predijo que las ecuaciones que deberían definir la multiplicación eran

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \ ,$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Como después escribiría a su hijo: "No pude resistir el impulso, de tallar con un cuchillo en la roca del puente de Broughan, la fórmula fundamental con los símbolos i,j,k : $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$.''
Mas tarde ese mismo día obtuvo, un permiso para leer un reporte sobre quaterniones, en la próxima reunión de la academia.
Sacrificando la conmutatividad, y elevando otra dimensión, Hamilton encontró un sistema numérico que satisface todos los demás axiomas de campo, junto con la regla del producto. Éste fue un descubrimiento revolucionario, pero lamentablemente no del todo original: En 1748 Euler , estudiando sumas de raí ces cuartas, escribió ecuaciones equivalentes a las del producto de quaterniones y Gauss, investigando

rotaciones en 1819, escribió un manuscrito no publicado dando las formulas básicas para la multiplicación de quaterniones. Sin embargo Hamilton fué el primero en dar una definición y descripción precisa del sistema numérico de los quaterniones, el cual se denota con el símbolo H en su honor.
Ahora se define de manera formal el conjunto de los quaterniones, las operaciones de suma y multiplicación de quaterniones, y la multiplicación por escalares en éste conjunto, además se prueba que poseen una estructura algebraíca de campo no conmutativo, utilizando para ésto la definición de grupo. De hecho se demuestra que este conjunto bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares forma un espacio vectorial real, por lo que podemos definir una transformación lineal, la cual permite transformar los elementos de éste espacio a elementos del espacio vectorial R^3, los que a su vez son utilizados para obtener una representación geométrica del cuerpo a modelar. Es decir, se utilizarán a los quaterniones para rotar un cuerpo, en un espacio isomórfo a R^4 y después, mediante la transformación lineal definida previamente, se obtendrán vectores de R^3 que representan al cuerpo ya rotado.
Sea $H=\{(p_1,p_2,p_3,p_4) \mid p_1,p_2,p_3,p_4 \in R\}$ el conjunto de los quaterniones, se definen sobre éste, dos operaciones binarias de la siguiente manera. Sean $p=(p1,p2,p3,p4)$ y $q=(q1,q2,q3,q4)$ dos elementos del conjunto de los quaterniones H, entonces las operaciones binarias, basadas en el descubrimiento de Hamilton, quedan definidas como:
i) Una operación aditiva, $\oplus$:H→H definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbf{p}\oplus\mathbf{q} &= (p_1+q_1, p_2+q_2, p_3+q_3, p_4+q_4) \\ & \forall\ \mathbf{p} \text{ y } \mathbf{q} \in \mathbb{H}\end{aligned} \quad (1)$$

ii) Y una operación multiplicativa, $\otimes$:H→H definida mediante

$$\begin{aligned}&\mathbf{p}\otimes\mathbf{q} = (p_1,p_2,p_3,p_4)\otimes(q_1,q_2,q_3,q_4)\\ &(p_1q_1-p_2q_2-p_3q_3-p_4q_4, p_1q_2+p_2q_1+p_3q_4-p_4q_3,\\ &p_1q_3-p_2q_4+p_3q_1+p_4q_2, p_1q_4+p_2q_3-p_3q_2+p_4q_1)\\ &\forall\ \mathbf{p} \text{ y } \mathbf{q} \in \mathbb{H}\end{aligned} \quad (2)$$

Haciendo analogía con el espacio de los números complejos, se denota como ReH, a los elementos de H que tienen la forma $(p_1,0,0,0)$, es decir los que solo poseen parte real. De manera similar se denota como ImH, a los elementos de H que tienen la forma $(0,p_2,p_3,p_4)$ y se les conoce como quaterniones imaginarios o puros.
De manera similar que en el espacio de los números complejos, se puede definir un quaternión conjugado como:

$$\bar{\mathbf{p}} = (p_1, -p_2, -p_3, -p_4)$$

tal que

$$\mathbf{p}\oplus\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}\oplus\mathbf{p} = (2p_1,0,0,0) = 2\mathrm{Re}\{\mathbf{p}\}$$

$$\mathbf{p}\oplus -\bar{\mathbf{p}} = -\bar{\mathbf{p}}\oplus\mathbf{p} = (0,2p_2,2p_3,2p_4) = 2\mathrm{Im}\{\mathbf{p}\}$$

$$\mathbf{p}\otimes\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}\otimes\mathbf{p} = (p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2,0,0,0) \in \mathrm{Re}\mathbb{H}$$

donde $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2$ es el módulo de $\mathbf{p}$ al cuadrado, es decir, $\|\mathbf{p}\|^2 = p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2$, por lo tanto $\mathbf{p}\otimes\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}\otimes\mathbf{p} = (\|\mathbf{p}\|^2,0,0,0)$

donde $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2$ es el módulo de p al cuadrado, es decir, $|p|^2= p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2$, por lo tanto $p\otimes\bar{p}=\bar{p}\otimes p=(|p|^2,0,0,0)$

Proposición 3.1 La terna (H,$\oplus$,•), forma un espacio vectorial real.
Demostración:
La terna (H,$\oplus$, $\otimes$) forma un campo no conmutativo, i.e., forma un cuerpo. Por lo que solo resta mostrar que la multiplicación por escalares, satisface la propiedad distributiva, definida a continuación:

$$\alpha\bullet(\mathbf{p}\oplus\mathbf{q}) = \alpha\bullet\mathbf{p}\oplus\alpha\bullet\mathbf{q} \quad \forall\ \alpha\in\mathbb{R}, \text{ y } \mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{H}$$

así que desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}&\alpha\bullet(\mathbf{p}\oplus\mathbf{q}) = \alpha\bullet((p_1,p_2,p_3,p_4)\oplus(q_1,q_2,q_3,q_4))\\ &=\alpha\bullet(p_1+q_1,p_2+q_2,p_3+q_3,p_4+q_4)\\ &=(\alpha(p_1+q_1),\alpha(p_2+q_2),\alpha(p_3+q_3),\alpha(p_4+q_4))\\ &=(\alpha p_1+\alpha q_1,\alpha p_2+\alpha q_2,\alpha p_3+\alpha q_3,\alpha p_4+\alpha q_4)\\ &=(\alpha p_1,\alpha p_2,\alpha p_3,\alpha p_4)\oplus(\alpha q_1,\alpha q_2,\alpha q_3,\alpha q_4)\\ &=\alpha\bullet(p_1,p_2,p_3,p_4)\oplus\alpha\bullet(q_1,q_2,q_3,q_4)\\ &=\alpha\bullet\mathbf{p}\oplus\alpha\bullet\mathbf{q}\end{aligned}$$

entonces (H,$\oplus$, •) es un espacio vectorial real.
Por lo tanto, se ha logrado uno de los objetivos principales de este trabajo, que consiste en definir el espacio vectorial de los quaterniones. Ahora se probará que los subconjuntos de H, el conjunto de los quaterniones reales ReH⊂H y el de los quaterniones imaginarios ImH⊂H, son subespacios vectoriales de los quaterniones de suma importancia, ya que como se verá más adelante, todo quaternión se puede expresar como la suma de un quaternión real y un quaternión imaginario.
Proposición3.2 Sea donde ReH⊂H es un subespacio vectorial.
Demostración: i) Primero se debe demostrar que la suma de elementos del subespacio, permanece en éste, ie., es cerrado bajo la suma.

Así que sean p,q∈ReH entonces p⊕q∈ReH, ésto se muestra fácilmente, ya que

$$\mathbf{p} \oplus \mathbf{q} = (p_1, 0, 0, 0) \oplus (q_1, 0, 0, 0)$$

$$= (p_1 + q_1, 0, 0, 0) \in \mathrm{Re}\mathbb{H}$$

ii) Ahora se debe mostrar, que es cerrado bajo la multiplicación por escalares.
Sea α∈R entonces α•p∈ReH

$$\alpha \bullet \mathbf{p} = \alpha \bullet (p_1, 0, 0, 0) = (\alpha p_1, 0, 0, 0) \in \mathrm{Re}\mathbb{H}$$

por lo tanto, se ha demostrado que el subconjunto ReH es en realidad un subespacio vectorial real.
A continuación, se hace lo mismo para el conjunto de los quaterniones imaginarios, que son aquellos que solo poseen las partes imaginarias i,j,k.
Proposición3.3 Sea ImH=

$$\{(0, p_2, p_3, p_4) | p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R})\}$$

donde ImH⊂H es un subespacio vectorial.
Demostración: La demostración de esta proposición es similar, a la demostración de la proposición 3.2 de tal manera que:
i) Primero se debe demostrar que la suma de elementos del subespacio, permanece en éste, ie., es cerrado bajo la suma. Así que sean p,q∈ImH entonces p⊕q∈ImH, ésto se muestra fácilmente, ya que

$$\mathbf{p} \oplus \mathbf{q} = (0, p_2, p_3, p_4) \oplus (0, q_2, q_3, q_4)$$

$$= (0, p_2 + q_2, p_3 + q_3, p_4 + q_4) \in \mathrm{Im}\mathbb{H}.$$

ii) Ahora se debe mostrar, que es cerrado bajo la multiplicación por escalares.
Sea α∈R entonces α•p∈ImH

$$\alpha \bullet \mathbf{p} = \alpha \bullet (0, p_2, p_3, p_4) = (0, \alpha p_2, \alpha p_3, \alpha p_4) \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$$

Por lo tanto, se ha demostrado que el subconjunto ImH es en realidad un subespacio vectorial real. Nuevamente, haciendo referencia al espacio de los números complejos, y sin perder de vista el objetivo al que se quiere llegar, se define una función de H → R sobre el espacio vectorial de los quaterniones de la siguiente manera:

$$(\mathbf{p}|\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^{4} p_n q_n = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 \quad (3)$$

Es decir, el producto punto de vectores, este producto punto de vectores es de hecho un producto interno, como se demuestra a continuación.
Proposición 3.4 El producto de quaterniones mostrado en 3, es un producto interno.
Demostración: i) Primero se debe demostrar que el producto de la función definida, es en efecto un número real

$$(\mathbf{p}|\mathbf{q}) \in \mathbb{R} \text{ Se cumple de la definición}$$

ii) Después se prueba que este producto es conmutativo

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}|\mathbf{q}) &= \textstyle\sum_{n=1}^{4} p_n q_n = \underbrace{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4}_{p_n q_n \in \mathbb{R} \text{ para } n=1,2,3,4} \\ &= \underbrace{q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 + q_4 p_4}_{\text{propiedad conmutativa}} = \textstyle\sum_{n=1}^{4} q_n p_n \\ &= (\mathbf{q}|\mathbf{p})\end{aligned}$$

iii) Enseguida, se muestra que el producto de un elemento sobre sí mismo debe de ser positivo o igual a cero. Y el caso igual a cero, se debe de presentar sí y solo si el elemento es el neutro aditivo.

$$(\mathbf{p}|\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^{4} p_n p_n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = ||\mathbf{p}|| \geq 0$$

$$\text{y } ||\mathbf{p}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

iv) Solo resta mostrar que el producto interno es lineal en cada uno de sus argumentos.

$$\begin{aligned}(\alpha \bullet \mathbf{p} + \beta \bullet \mathbf{q}|\mathbf{r}) &= \textstyle\sum_{n=1}^{4} (\alpha p_n + \beta q_n) r_n \\ &= \alpha \textstyle\sum_{n=1}^{4} p_n r_n + \beta \sum_{n=1}^{4} q_n r_n \\ &= \alpha(\mathbf{p}|\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{q}|\mathbf{r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}|\alpha \bullet \mathbf{q} + \beta \bullet \mathbf{r}) &= \textstyle\sum_{n=1}^{4} p_n (\alpha q_n + \beta r_n) \\ &= \alpha \textstyle\sum_{n=1}^{4} p_n q_n + \beta \sum_{n=1}^{4} p_n r_n \\ &= \alpha(\mathbf{p}|\mathbf{q}) + \beta(\mathbf{p}|\mathbf{r})\end{aligned}$$

Por lo tanto se ha demostrado, que el producto punto de quaterniones, definido en 3, es de hecho un producto interno. Así que, se ha construido un espacio vectorial real, con producto interno.
Además el producto punto de quaterniones, está relacionado directamente con el concepto de módulo del quaternión mediante:

$$\sqrt{(\mathbf{p}|\mathbf{p})} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2} = ||\mathbf{p}||$$

Es decir, el producto punto de vectores, este producto punto de vectores es de hecho un producto interno, como se demuestra a continuación.
Proposición 3.4 El producto de quaterniones mostrado en 3, es un producto interno.
Demostración: i) Primero se debe demostrar que el producto de la función definida, es en efecto un número real

$$(\mathbf{p}|\mathbf{q}) \in \mathbb{R} \text{ Se cumple de la definición}$$

ii) Después se prueba que este producto es conmutativo

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}|\mathbf{q}) &= \textstyle\sum_{n=1}^{4} p_n q_n = \underbrace{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4}_{p_nq_n \in \mathbb{R} \text{ para } n=1,2,3,4} \\ &= \underbrace{q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 + q_4p_4}_{\text{propiedad conmutativa}} = \textstyle\sum_{n=1}^{4} q_n p_n \\ &= (\mathbf{q}|\mathbf{p})\end{aligned}$$

iii) Enseguida, se muestra que el producto de un elemento sobre sí mismo debe de ser positivo o igual a cero. Y el caso igual a cero, se debe de presentar sí y solo si el elemento es el neutro aditivo.

$$(\mathbf{p}|\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^{4} p_n p_n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = ||\mathbf{p}|| \geq 0$$

$$\text{y } ||\mathbf{p}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

iv) Solo resta mostrar que el producto interno es lineal en cada uno de sus argumentos.

$$\begin{aligned}(\alpha \bullet \mathbf{p} + \beta \bullet \mathbf{q}|\mathbf{r}) &= \textstyle\sum_{n=1}^{4} (\alpha p_n + \beta q_n) r_n \\ &= \alpha \textstyle\sum_{n=1}^{4} p_n r_n + \beta \textstyle\sum_{n=1}^{4} q_n r_n \\ &= \alpha(\mathbf{p}|\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{q}|\mathbf{r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}|\alpha \bullet \mathbf{q} + \beta \bullet \mathbf{r}) &= \textstyle\sum_{n=1}^{4} p_n (\alpha q_n + \beta r_n) \\ &= \alpha \textstyle\sum_{n=1}^{4} p_n q_n + \beta \textstyle\sum_{n=1}^{4} p_n r_n \\ &= \alpha(\mathbf{p}|\mathbf{q}) + \beta(\mathbf{p}|\mathbf{r})\end{aligned}$$

Por lo tanto se ha demostrado, que el producto punto de quaterniones, definido en 3, es de hecho un producto interno. Así que, se ha construido un espacio vectorial real, con producto interno.
Además el producto punto de quaterniones, está relacionado directamente con el concepto de módulo del quaternión mediante:

$$\sqrt{(\mathbf{p}|\mathbf{p})} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2} = ||\mathbf{p}||$$

y un espacio vectorial con una norma y un producto interno, relacionados mediante |p|=(p|p) se llama espacio de Hilbert, y en él se puede construir una geometría definiendo los conceptos de ángulo y distancia.
En resumen, el conjunto H, con las operaciones definidas en *1* y 2 es un espacio vectorial, y sobre éste el producto punto de vectores (quaterniones), resulta un producto interno relacionado con la norma (módulo), lo que genera un espacio de Hilbert o como se conoce comúnmente un espacio vectorial normado, que de ahora en adelante será nombrado como, el espacio vectorial de quaterniones.[*12*]

Se ha construido sistemáticamente el espacio vectorial de los quaterniones, así que ahora se puede "hablar" de una base en el espacio vectorial.
Definición *3.1* Una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ se dice ortonormal si sus vectores son unitarios y ortogonales; equivalentemente, si $(e_i|e_j)=\delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la llamada delta de Kronecker, cuyo valor es 1 si i=j y 0 cuando i≠j.
Las bases ortonormales $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tienen dos propiedades muy importantes que permiten operar con mucha facilidad los vectores cuando se expresan en esas bases:
a) Para cualquier base ortonormal $e_1, e_2, \ldots, e_n$ todo vector p se escribe en la forma
; esta expresión se conoce como desarrollo ortonormal de p.
b) Para cualquier base ortonormal $e_1, e_2, \ldots, e_n$ si $p=p_1e_1+p_2e_2+\ldots p_ne_n$ y $q=q_1e_1+q_2e_2+\ldots+q_ne_n$, entonces $(p|q)=p_1q_1+p_2q_2+\ldots$+pnqn, es decir, en las bases ortonormales sigue siendo válido el procedimiento usado para calcular el producto interno, cuando los vectores están expresados respecto a la base canónica.
Ahora se construirán dos transformaciones, sobre dos subespacios vectoriales del espacio vectorial de los quaterniones. De una manera muy sencilla.
Sea Tr:ReH→R, una función definida de la siguiente manera:

$$\mathrm{T_r}(p_1, 0, 0, 0) = p_1 \ \forall \ (p_1, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}, \text{ donde } p_1 \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Sea T_v :ImH→R^3, una función definida de la siguiente manera:

$$T_v(0,p_2,p_3,p_4) = (p_2,p_3,p_4)\ \forall\ (0,p_2,p_3,p_4) \in \mathbb{H},$$
$$\text{donde } p_1,p_2,p_3 \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Ahora se debe demostrar que estas transformaciones son en realidad, transformaciones lineales definidas sobre los espacios vectoriales.

Proposición 3.5 Las transformaciones 4 y 5, de la parte real y la parte imaginaria de los quaterniones, definidas anteriormente, son transformaciones lineales

Demostración: Primero se demostrará 4, así que; Sean p,q∈ReH y α∈R entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{T_r}(\mathbf{p}\oplus\mathbf{q}) &= \mathrm{T_r}((p_1,0,0,0)\oplus(q_1,0,0,0))\\
&= \mathrm{T_r}((p_1+q_1,0,0,0))\\
&= p_1+q_1\\
&= \mathrm{T_r}((p_1,0,0,0))\oplus\mathrm{T_r}((q_1,0,0,0))\\
&= \mathrm{T_r}(\mathbf{p})\oplus\mathrm{T_r}(\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{T_r}(\alpha\bullet\mathbf{p}) &= \mathrm{T_r}(\alpha\bullet(p_1,0,0,0))\\
&= \mathrm{T_r}((\alpha p_1,0,0,0))\\
&= \alpha p_1\\
&= \alpha\bullet\mathrm{T_r}((p_1,0,0,0))\\
&= \alpha\bullet\mathrm{T_r}(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

de manera similar para 5, tenemos que; Sean r,s∈ImH y α∈R entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{T_v}(\mathbf{r}\oplus\mathbf{s}) &= \mathrm{T_v}((0,r_2,r_3,r_4)\oplus(0,s_2,s_3,s_4))\\
&= \mathrm{T_v}((0,r_2+s_2,r_3+s_3,r_4+s_4))\\
&= (r_2+s_2,r_3+s_3,r_4+s_4)\\
&= (r_2,r_3,r_4)+(s_2,s_3,s_4)\\
&= \mathrm{T_v}((0,r_2,r_3,r_4))\oplus\mathrm{T_v}((0,s_2,s_3,s_4))\\
&= \mathrm{T_v}(\mathbf{r})\oplus\mathrm{T_v}(\mathbf{s})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{T_v}(\alpha\bullet\mathbf{r}) &= \mathrm{T_v}(\alpha\bullet(0,r_2,r_3,r_4))\\
&= \mathrm{T_v}((0,\alpha r_2,\alpha r_3,\alpha r_4))\\
&= (\alpha r_2,\alpha r_3,\alpha r_4)\\
&= \alpha(r_2,r_3,r_4)\\
&= \alpha\bullet\mathrm{T_v}((0,r_2,r_3,r_4))\\
&= \alpha\bullet\mathrm{T_v}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

por lo tanto, las transformaciones definidas anteriormente, son de hecho transformaciones lineales entre los quaterniones reales ReH y los números reales R, y entre los quaterniones imaginarios ImH y el espacio R3 respectivamente.

Si además estas transformaciones lineales son biyectivas, se habrá construido un isomorfismo entre los espacios vectoriales, como lo enuncia la siguiente definición.

Definición 3.2 Dos espacios vectoriales reales n-dimensionales Vn y Wn son isomorfos si existe una función $\Phi:V_n \rightarrow W_n$ lineal y biyectiva.

El que la función sea biyectiva, nos dice que la relación entre los espacios vectoriales debe de ser uno a uno y sobre, ésto se cumple de manera inmediata por la forma en que está definida la transformación lineal, y por tanto no será demostrado en este trabajo.

3.1 Quaterniones y vectores

Los quaterniones (0,$\hat{i}$),(0,$\hat{j}$) y (0,$\hat{k}$) generan un subespacio tridimensional

Como espacio vectorial, el conjunto ImH es isomorfo a R3, y sus elementos son llamados vector quaternio. Si a su vez se identifica a R con el conjunto de los quaterniones escalares (p_1,0,0,0), entonces tenemos la descomposición directa

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathrm{Im}\mathbb{H}$$

esta descomposición permite escribir cualquier quaternión en la forma

$$\mathbf{p} = a + \mathbf{v}$$

donde a∈R representa la parte escalar de p y v∈ImH es la parte vectorial o imaginaria de p. Si u,v∈ImH entonces su producto como quaterniones, se descompone como

$$\mathbf{uv} = -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{u}\times\mathbf{v}),$$

donde u∈v y u×v son el producto punto y el producto cruz usuales en R3, similarmente

$$\mathbf{vu} = -(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) + (\mathbf{v}\times\mathbf{u}) = -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{u}\times\mathbf{v})$$

así que sumando y restando estas ecuaciones, tenemos

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -\frac{1}{2}(\mathbf{uv}+\mathbf{vu}) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{uv}-\mathbf{vu})$$

estas ecuaciones muestran que el álgebra vectorial de R3 puede ser interpretada en términos de los quaterniones. Por ejemplo el producto vectorial $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$ corresponde al producto de los quaterniones ij=k.

3.2 Quaterniones y las rotaciones

Hamilton encontró sumamente útil pensar en los números complejos de módulo uno, como rotaciones en el plano, y el presentí a que debería existir una relación similar entre los quaterniones y las rotaciones en R^3. En *1775* Euler ya había estudiado las rotaciones, probando que la composición de dos rotaciones es una rotación, y una teoría completa fue publicada ya en *1840* por Rodrigues , pero al parecer Hamilton no estuvo al tanto de estos desarrollos. De tal manera que su descripción de las rotaciones, en términos de los quaterniones, no concordaba con la forma propuesta por Euler-Rodrigues. Esto contribuyó a la controversia sobre el status de los quaterniones, y su aplicación durante el siglo XIX.

Los quaterniones unitarios, es decir, aquellos que satisfacen $|p|=1$, forman la 3-esfera unitaria

$$S^3 = \{(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{H} | p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 1\}$$

como ya se sabe, éste es un grupo no abeliano, bajo la multiplicación $\otimes$. Cada $p \in S^3$ se puede descomponer como la suma de un escalar y un vector, en la forma

$$\mathbf{p} = a + \mathbf{u} \text{ donde } a \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$$

Ya que $a^2+|u|^2=|p|=1$, entonces se puede decir que

$$a = \cos\phi, \qquad \|\mathbf{u}\| = \mathrm{sen}\phi$$

Para un único $\Phi \in [0,\pi]$. Ahora las transformaciones

$$l_p : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{pv} \quad \text{y} \quad r_p : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{vp}^{-1}$$

ambas inducen rotaciones del plano

$$\Pi_{\mathbf{u}} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\}$$

en R^3 perpendicular a u a travez del ángulo Φ. Desafortunadamente éstas no mapean a R^3 en sí mismo, pero su composición

$$\rho_{\mathbf{p}} = l_{\mathbf{p}} \circ r_{\mathbf{p}} = r_{\mathbf{p}} \circ l_{\mathbf{p}} : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{pvp}^{-1}$$

que fija a u y rota a Π_u a travez de 2Φ, es una rotación de R^3 por 2Φ alrededor del eje u. Escribiendo esto de otra manera, cualquier rotación ρ de R^3 un ángulo θ alrededor del vector unitario $\hat{u}$ tiene la forma

$$\rho = \rho_{\mathbf{p}} : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{pvp}^{-1} \qquad (6)$$

donde $p=a+u$ con $a=\cos(\theta/2)$ y $\hat{u}=\mathrm{sen}(\theta/2) \bullet \hat{u}$

Finalmente queda definida la rotación mediante el uso de quaterniones, utilizando la transformación lineal ρ, esta transformación será utilizada en futuros trabajos para modelar la rotación de un cuerpo rígido, y finalmente las rotaciones consecutivas de un multicuerpo rígido, en forma de cadena cinemática abierta, para así poder modelar el brazo robótico CRS A465.

Conclusiones

Se ha mostrado de manera formal como el conjunto de los quaterniones, dotado de las operaciones definidas forma en realidad un espacio vectorial normado. Y como sobre este espacio vectorial, es posible definir transformaciones lineales que permiten representar la rotación finita de un cuerpo rígido. Con esto fue posible definir una primer parte de la metodología a seguir para obtener la modelación y simulación de un multicuerpo rígido formando una cadena cinemática abierta que caracteriza a un robot manipulador.

Referencias

[1] Hyrum Esquer A. Modelación cinemática y de trayectoria de un robot de 2gdl usando la rotación usual de números complejos. Maestría en ingeniería, Universidad Nacional Autónoma De México, 2004. Área mecánica.

[2] H. Albala & J. Angeles. Numerical solution to the input-output displacement equation of the general 7r spatial mechanism. In Proc. 5th world congress on theory of machines and mechanism, pages 1008–1011, *1979*.

[3] Francisco Javier Ochoa E. Modelación y simulación de un problema de evasión de obstáculos en el plano mediante un robot de 2 gdl, aplicando secuencias por complementos y algoritmo eoptce. Maestría en ingeniería, Universidad Nacional Autónoma De México, 2004. Área mecánica.

[4] A. T. Yang & F. Freudenstein. Application of dual number quarterian algebra to the analysis of spatial mechanisms. ASME J. Appl. Mech., Vol. 86:300–308, *1964*.

[5] J. Denavit & R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices. ASME J. Appl. Mech., Vol. *77:215–221, 1955*.

[6] O.D. Faugeras & Martial Hebert. The representation, recognition, and locating of 3-d objects. Intl. J. Robot, Vol. 3(No. 5):27–52, *1986*.

[7] Mark D. Wheeler & Katsushi Ikeuchi. Iterative stimation of rotation and translation using the quaternion. School of computer science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, December 1995. CMU-CS-95-215.

[8] Michael Patrick Jonhson. Exploiting quaternions to support expressive interactive character motion. Doctor of philosophy, Massachusetts institute of technology, 2003.

[9] H. Y. Lee & C. G. Liang. A new vector theory for the analysis of spatial mechanisms. Mech. Mach. Theory, Vol. 23(No. 3):209–217, 1988.

[10] Mario Márquez M. Modelado cinemático y dinámico de robots utilizando quaterniones. Doctorado en ingeniería, Universidad Anáhuac del Sur, 2000.

[11] Deepak Tolani & Others. Real-time inverse kinematics techniques for anthropomorphic limbs. Academic press, Vol. 1(No. 62):353–388, 2000. Graphical models.

[12] Robert E. Parkin. Applied robotic analysis. Industrial robot series. Pretince-Hall, 1st. edition, 1991. ISBN 0-13-773391-7.

[13] Luís Reyes Ávila. Une representation parametrique systematique des rotations finies: Le cadre theorique. Rapport de recherche INRIA, Roquencourt, France, (No. 1), 1990.

[14] Luís Reyes Ávila. Sobre la p arametrización de las rotaciones y reflexiones de multicuerpos rígidos en el plano: Modelación cinemática de un robot de dos grados de libertad. Reporte interno de investigación, UNAM, (ISBN 968-36-9841-7), 2002.

[15] D. Kohli & A. H. Soni. Kinematic analysis of spatial mechanisms via succesive screw displacements. ASME J. Eng. Ind., Vol. 97(No. 2):739–747, 1975.

[16] Lung-Wen Tsai. Robot analysis. Wiley-Interscience, 1st. edition, 1999. ISBN 0-471-32593-7.

Nota Autobiográfica

M.I. Juan Enrique Palomares Ruiz. Jefe de la División de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico Superior de Cajeme. Desarrolla proyectos de Modelación matemática mediante el uso de sistemas dinámicos aplicados a sistemas físicos y tejidos blandos. jepalomares@itesca.edu.mx

M.I. Francisco Javier Ochoa Estrella. Profesor Investigador Tiempo Completo Titular B adscrito a la División de Ingeniería Electrónica. Desarrolla el proyecto de microrezonador piezoeléctrico para la generación de potencia de baja escala en la línea de investigación Modelación, diseño y análisis de macro, micro y nanosistemas. fochoa@itesca.edu.mx

ITESCA®
Instituto Tecnológico Superior de Cajeme

El Instituto Tecnológico Superior de Cajeme tiene el compromiso social y académico de impulsar proyectos de vinculación o desarrollo tecnológico sobre diversos temas o necesidades del sector productivo y social.

A través de los diferentes centros de investigación, cuerpos académicos y planta docente ofrece los siguientes servicios:

Asesoría y asistencia técnica. Capacidad de profesionales docentes para aportar soluciones a problemas específicos del sector industrial y empresarial.

Desarrollo de proyectos en colaboración con el sector productivo.

Asesoría de trámites y propiedad industrial. Servicio de gestión de patentes, aspectos legales de propiedad intelectual, patentes, marcas, derechos de autor y estudios legales. Conveniencia de solicitar marcas o patentes y realizar tramites.

Programas de capacitación.

Líneas de Generación y Aplicación del Conocimiento al servicio de las empresas:

- Administración de la pequeña y mediana empresa
- Aprovechamiento sustentable de recursos naturales
- Arquitectura sustentable y gestión urbana
- Sistemas integrados de producción
- Procesos de logística y distribución
- Procesos ergonómicos y de seguridad industrial
- Sistemas mecatrónicos
- Instrumentación y control
- Diseño y análisis de esfuerzos
- Análisis por elemento finito
- Diseño mecánico, análisis y simulación computacional de macro, micro y nano sistemas.
- Ingeniería de Software
- Diseño y desarrollo de las TIC's
- Ingeniería multimedia