IV – Gramáticas Livres de Contexto

Introdução

Definições de GLC

1 – G = (Vn, Vt, P, S) onde

$P = \{A \rightarrow \alpha \mid A \in Vn \wedge \alpha \in (Vn \cup Vt)^+\}$

2 – GLC ε - LIVRE :

S → ε pode pertencer a P, desde que:

S seja o símbolo inicial de G

S não apareça no lado direito de nenhuma produção de P

3 – G = (Vn, Vt, P, S) onde

$\mathbf{P = \{A \rightarrow \alpha \mid A \in Vn \wedge \alpha \in (Vn \cup Vt)^* \}}$

Ou seja α pode ser ε !!!

IV.1 - Árvore de Derivação

- Representação estruturada das derivações de G

Exemplo: $S \rightarrow a\,S\,c \mid B$

$B \rightarrow b\,B \mid \varepsilon$

IV.2 - Limite de uma AD

- Concatenação das folhas da AD ≡ Forma sentencial

IV.3 - Formas de Derivação

- Derivação + a Esquerda
- Derivação + a Direita

Exemplo: $S \rightarrow A\ B \mid S\ c$

$A \rightarrow a\ A \mid \varepsilon$

$B \rightarrow b\ B \mid \varepsilon$

IV.4 - Gramáticas Ambíguas

- G é ambígua se

$$\exists\ x \in L(G) \mid x \text{ possua mais de uma AD}$$

- Exemplos

1- $S \rightarrow S\ b\ S \mid a$

2- $E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (\ E\ ) \mid id$

3- A gramática do “if”

Linguagens inerentemente ambíguas

- Linguagens que só possuem representações ambíguas

$$L(G) = \{\ a^n\ b^m\ c^k \mid n = m \vee m = k\ \}$$

IV.5 – Transformações (Simplificações) em G.L.C.

IV.5.1 – Eliminação de Símbolos Inúteis

- **Inalcançáveis e/ou inférteis**

$$S \overset{*}{\Rightarrow} w\,X\,y \overset{*}{\Rightarrow} w\,x\,y$$

- **Algoritmo IV.1**

Objetivo – Encontrar o conjunto de Não Terminais Férteis.
Entrada – Uma G.L.C. $G = (Vn, Vt, P, S)$.
Saída – NF – Conjunto de Não-Terminais Férteis.
Método:

Construa conjuntos N0, N1, ..., como segue:
$i \leftarrow 0$
$Ni \leftarrow \phi$
repita
  $i \leftarrow i + 1$
  $Ni \leftarrow Ni\text{-}1 \cup \{A \mid A \rightarrow \alpha \in P \wedge \alpha \in (Ni\text{-}1 \cup Vt)^*\}$
até $Ni = Ni\text{-}1$
$NF \leftarrow Ni$

Fim

Exemplo:

$S \rightarrow a\,S \mid B\,C \mid B\,D$
$A \rightarrow c\,C \mid A\,B$
$B \rightarrow b\,B \mid \varepsilon$
$C \rightarrow a\,A \mid B\,C$
$D \rightarrow d\,D\,d \mid c$

• Algoritmo IV.2:

Objetivo: Eliminar símbolos **Inalcançáveis**.
Entrada: Uma G.L.C. G = (Vn, Vt, P, S).
Saída: Uma G.L.C. G' = (Vn', Vt', P', S') na qual todos os símbolos $\in$ (Vn' $\cup$ Vt') sejam alcançáveis.
Método:

Construa conjuntos V0, V1, ..., como segue:
i $\leftarrow$ 0 ; Vi $\leftarrow$ {S}
repita
  i $\leftarrow$ i +1
  Vi $\leftarrow$ Vi-1 $\cup$ {X | A $\rightarrow$ α X β $\in$ P, A $\in$ Vi-1 $\wedge$ α e β $\in$ $(Vn \cup Vt)^*$}
até Vi = Vi-1
Construa G' = (Vn', Vt', P', S'), como segue:
a) Vn' $\leftarrow$ Vi $\cap$ Vn
b) Vt' $\leftarrow$ Vi $\cap$ Vt
c) P' $\leftarrow$ conjunto de produções de P, que envolvam apenas símbolos de Vi
d) S' $\leftarrow$ S

Fim

Exemplo:

S → a S a | d D d
A → a B | C c | a
B → d D | b B | b
C → A a | d D | c
D → b b B | d

• Algoritmo IV.3

Objetivo: Eliminar **símbolos inúteis**.
Entrada: Uma G.L.C. G = (Vn, Vt, P, S).
Saída: Uma G.L.C. G' = (Vn', Vt', P', S') | L(G') = L(G) e nenhum símbolo de G' seja inútil.
Método:

1 – Aplique o algoritmo IV.1 para obter NF;
2 – Construa G1 = (Vn ∩ NF, Vt, P1, S), onde P1 contém apenas produções envolvendo NF ∪ Vt;
3 – Aplique o ALG IV.2 em G1, para obter G' = (Vn', Vt', P', S');

Fim

Exemplo:

$S \rightarrow a\ F\ G \mid b\ F\ d \mid S\ a$
$A \rightarrow a\ A \mid \varepsilon$
$B \rightarrow c\ G \mid a\ C\ G$
$C \rightarrow c\ B\ a \mid c\ a \mid \varepsilon$
$D \rightarrow d\ C\ c \mid \varepsilon$
$F \rightarrow b\ F\ d \mid a\ C \mid A\ b \mid G\ A$
$G \rightarrow B\ c \mid B\ C\ a$

IV.5.2 – Transformação de GLC em GLC ε-Livre

• Eliminação de ε-produções

Algoritmo IV.4:

Objetivo: Transformar uma G.L.C. G em uma G.L.C. ε - LIVRE G' equivalente.
Entrada: Uma G.L.C. G = (Vn, Vt, P, S).
Saída: **Uma G.L.C. ε - Livre G' = (Vn', Vt, P', S') | L(G') = L(G).**
Método:

1 – Construa Ne = $\{A \mid A \in Vn \wedge A \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon\}$.

2 – Construa P' como segue:

a) **Inclua em P' todas as produções de P, com exceção daquelas da forma A → ε.**

b) Para cada produção de P da forma:

$$A \rightarrow \alpha B \beta \mid B \in Ne \wedge \alpha, \beta \in V^*$$

inclua em P' a produção $A \rightarrow \alpha\beta$

c) Se $S \in Ne$, adicione a P' as seguintes produções:

$$S' \rightarrow S \mid \varepsilon$$

Exemplos:

1) S → AB
A → aA | ε
B → bB | ε

2) S → c S c | B A
A → a A | A B C | ε
B → b B | C A | ε
C → c C c | A S

IV.5.3 – Eliminação de Produções Simples

Definição: **A → B, onde A e B ∈ Vn.**

Algoritmo IV.5:

Entrada: Uma G.L.C. ε - **Livre** G = (Vn, Vt, P, S).
Saída: Uma G.L.C. ε - **Livre** G' = (Vn', Vt', P', S') sem produções simples | L(G') = L(G).
Método:

1 – Para todo A ∈ Vn, construa $N_A = \{B \mid A \stackrel{*}{\Rightarrow} B\}$

2 – Construa P' como segue:

se B → α ∈ P e não é uma produção simples, então adicione a P' as produções da forma:

A → α, para todo A | B ∈ N_A

3 – Faça G' = (Vn, Vt, P', S).

Fim.

Exemplos:

1) S → FGH
F → G | a
G → dG | H | b
H → c

2) S → a B c D e
B → b B | E | F
D → d D | F | d
E → e E | e
F → f F | f

IV.5.4 – Fatoração de GLC

- Uma GLC G é dita FATORADA, se ela NÃO possui $A \in V_n$ | A derive seqüências que iniciam com o mesmo símbolo por mais de um caminho

- **Processo de Fatoração**

  - **Não-Determinismo Direto**

    Substituir produções da forma:

    $$A \rightarrow \alpha \beta \mid \alpha \gamma$$

    Pelo seguinte conjunto de produções:

    $$A \rightarrow \alpha A'$$

    $$A' \rightarrow \beta \mid \gamma$$

  - **Não-Determinismo Indireto**

    Transformar em Direto via derivações sucessivas

- Exemplos:

  1) $S \rightarrow a\,S \mid a\,B \mid d\,S$
     $B \rightarrow b\,B \mid b$

  2) $S \rightarrow AB \mid BC$
     $A \rightarrow a\,A \mid \varepsilon$
     $B \rightarrow b\,B \mid d$
     $C \rightarrow c\,C \mid c$

  3) $S \rightarrow a\,S \mid A$
     $A \rightarrow a\,A\,c \mid \varepsilon$

IV.5.5 – Eliminação de Recursão à Esquerda

- **Não Terminal Recursivo**

  $A \overset{+}{\Rightarrow} \alpha\, A\, \beta$, para $\alpha \wedge \beta \in V^*$.

  se $\alpha \overset{*}{\Rightarrow} \varepsilon$ então A é Recursivo à Esquerda

- **G é Rec. à Esquerda se possui NT Rec. à Esquerda**

Processo de eliminação

- **R.E. Direta**

Substituir produções da forma:

$$A \rightarrow A\alpha 1 \mid A\alpha 2 \mid \ldots \mid A\alpha n \mid \beta 1 \mid \beta 2 \mid \ldots \mid \beta m$$

Por produções da forma:

$$A \rightarrow \beta 1A' \mid \beta 2A' \mid \ldots \mid \beta mA'$$
$$A' \rightarrow \alpha 1A' \mid \alpha 2A' \mid \ldots \mid \alpha nA' \mid \varepsilon$$

Exemplos:

1) $S \rightarrow S\ a \mid b$

2) $E \rightarrow E + T \mid T$
   $T \rightarrow T * F \mid F$
   $F \rightarrow (E) \mid id$

• Eliminação de R.E. Indireta

Algoritmo IV.6:

Entrada: **Uma G.L.C. Própria G = (Vn, Vt, P, S).**

Saída: **Uma GLC G' = (Vn', Vt, P', S) | L(G') = L(G) ∧ G' não possui Recursão a Esquerda.**

Método:

1 – Ordene os não-terminais de G em uma ordem qualquer (digamos: A1, A2, ..., An);

2 – Para i = 1, n faça

Para j = 1, i – 1 faça

Substitua as produções da forma

$Ai \rightarrow Aj\ \gamma$

por produções da forma

$Ai \rightarrow \delta 1\ \gamma \mid \delta 2\ \gamma \mid \ldots \mid \delta k\ \gamma$

onde $\delta 1, \delta 2, \ldots, \delta k$ são os lados direitos das Aj – produções ($Aj \rightarrow \delta 1 \mid \delta 2 \mid \ldots \mid \delta k$)

fim para

Elimine as rec. esq. Diretas das Ai – produções

fim para

3 – Fim.

Exemplos:

1) $S \rightarrow Aa \mid S\ b$
$A \rightarrow S\ c \mid d$

2) $S \rightarrow a\ S \mid A\ b$
$A \rightarrow A\ b \mid B\ c \mid a$
$B \rightarrow B\ d \mid S\ a \mid e$

IV.6 – Tipos Especiais de GLC

Gramática Própria:

- **Não possui** Ciclos;
- **É ε - Livre;**
- **Não possui** Símbolos Inúteis.

Gramática Sem Ciclos:

Não possui derivação da forma $A \overset{+}{\Rightarrow} A$

Gramática Reduzida:

- **L(G) não é vazia;**
- **Se $A \rightarrow \alpha \in P$, $A \neq \alpha$;**
- **G não possui Símbolos Inúteis.**

Gramática de Operadores:

Não possui produções cujo lado direito contenha NT consecutivos.

Gramática Unicamente Inversível:

não possui produções com lados direitos iguais.

Gramática Linear:

$A \rightarrow x\,B\,w \mid x$, onde $A, B \in V_n \wedge x, w \in V_t^*$.

Forma Normal de Chomsky (F.N.C.):

Uma G.L.C. está na F.N.G. se ela é ε - LIVRE e todas as suas produções são da forma:

- **$A \rightarrow BC$, com A, B e $C \in V_n$ ou**
- **$A \rightarrow a$, com $A \in V_n \wedge a \in V_t$.**

Forma Normal de Greibach (F.N.G.):

Uma G.L.C. está na F.N.G. se ela é ε - LIVRE e todas as suas produções são da forma:

$$A \rightarrow a\alpha \mid a \in Vt, \alpha \in Vn^{*} \wedge A \in Vn.$$

Notações de GLC

- BNF – Backus-Naur Form

  Exemplos: 1) <S> :: = a <S> | ε
  2) <E> :: = <E> + id | id

- BNF Estendida (notação de Wirth)

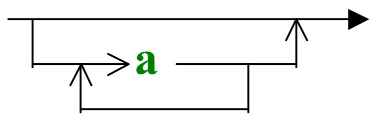
  Exemplos: 1) <S> :: = {a}
  2) <E> :: = id {+ id}

- RRP (ER estendidas com NT)

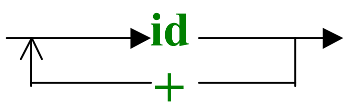
  Exemplos: 1) <S> :: = a*
  2) <E> :: = id £+

- Diagramas Sintáticos (Conway)

  Exemplos: 1) <S> :



2) <E> :



Principais Aplicações de GLC

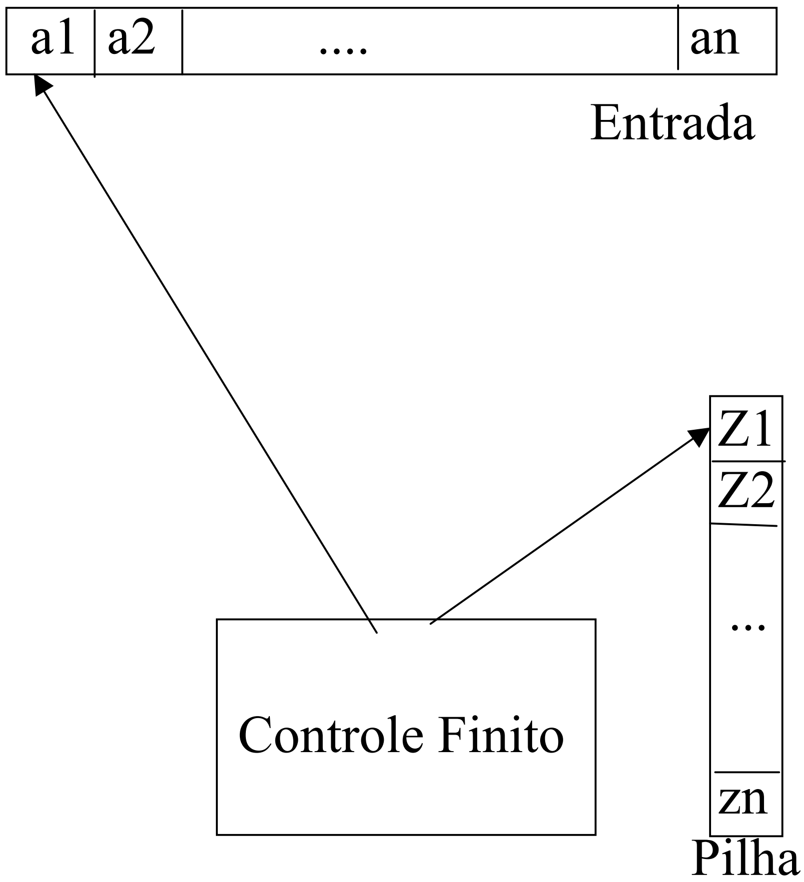
1 – Especificação de linguagens de programação;
2 – Formalização de parsing / implementação de parser's;
3 – Esquemas de tradução dirigidos pela sintaxe
4 – Processamento de string's, de modo geral.

IV.7 – Autômatos de Pilha (PDA)

(Push Down Automata)

- **Um PDA é um dispositivo não-determinístico reconhecedor de Ling. Livres de Contexto (LLC).**

- **Estrutura Geral:**



- **Definição Formal**

  P = (K, ∑, Γ, δ, qo, Zo, F), onde

  - **K é um conjunto finito de** Estados
  - **∑ é o <u>alfabeto</u> finito de** Entrada
  - **Γ é o <u>alfabeto</u> finito de** Pilha
  - **δ é uma** Função De Mapeamento**, definida por:**

    $$(K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \rightarrow \{K \times \Gamma^*\}$$

  - **q0 ∈ K, é o** Estado Inicial **de P**
  - **Z0 ∈ Γ , é o** Símbolo Inicial da Pilha
  - **F ⊆ K, é o conjunto de** Estados Finais.

- **Exemplo: P = (K, ∑, Γ, δ, qo, Zo, F), onde**

  - **K = {q0, q1, q2}**
  - **∑ = { 0, 1 }**
  - **Γ = { Z, B }**
  - **δ = { δ(q0, 0, Z) = (q1, BZ), δ(q1, 0,B) = (q1, BB),**
    δ(q1, 1, B) = (q2, ε), δ(q2, 1, B) = (q2, ε),
    δ(q2, ε ,Z) = (q0, ε)}
  - **q0 = q0**
  - **Z0 = Z**
  - **F = {q0]**

- **Representação gráfica:**

  Os rótulos das arestas devem ser da forma:

  $$(a, Z) \rightarrow \gamma, \text{ onde } a \in \Sigma,\ Z \in \Gamma,\ \gamma \in \Gamma^*$$

- **Movimentos de um PDA**

1 – Movimento dependente da entrada (a-move)

$\delta(q, a, Z) = \{(p1, \gamma 1), (p2, \gamma 2), ..., (pm, \gamma m)\}$

onde: $a \in \sum$, $Z \in \Gamma$
$q, p1, p2, ..., pm \in K$
$\gamma i \in \Gamma^*$, para $1 \leq i \leq m$

2 – Movimento independente da entrada (ε -move)

$\delta(q, \varepsilon, Z) = \{(p1, \gamma 1), (p2, \gamma 2), ..., (pm, \gamma m)\}$

onde: ε é a sentença vazia, $Z \in \Gamma$
$q, p1, p2, ..., pm \in k$
$\gamma i \in \Gamma^*$, para $1 \leq i \leq m$

- **Descrição Instantânea (ou Configuração) de um PDA**

A configuração de um PDA é dada por

(q, w, γ)

onde: $q \in K$, é o estado atual (corrente);
$w \in \sum^*$, é a parte da entrada não analisada;
$\gamma \in \Gamma^*$, é o conteúdo (corrente) da pilha.

- **Notação dos movimentos de um PDA**

Se $(q, aw, Z\gamma)$ é uma configuração e
se P contém a transição $\delta\ (q, a, Z) \rightarrow (q', \alpha)$

então $(q, aw, Z\gamma) \vdash (q', w, \alpha\gamma)$

- **Linguagem Aceita por um PDA**

1 – Linguagem Aceita por Estado Final (T(P))

$T(P)=\{w \mid (q0, w, Z0) \vdash^{*} (p, \varepsilon, \gamma),\ p \in F \wedge \gamma \in \Gamma^{*}\}$

2 – Linguagem Aceita Por Pilha Vazia (N(P))

$N(P) = \{w \mid (q0, w, Z0) \vdash^{*} (p, \varepsilon, \varepsilon), \text{ para } \forall\ p \in K\}$

- **Autômato de Pilha Determinístico**

Um PDA P=(K, ∑, Γ, δ, q0, Z0, F) é determinístico se:

1 – se $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \phi$
então $\delta(q, a, Z) = \phi$ para todo $a \in \Sigma$.

2 – Para $q \in K$, $Z \in \Gamma$ e $a \in \Sigma$, existe no máximo uma transição envolvendo $\delta(q, a, Z)$

PDA's não-determinísticos x PDA's determinísticos

- **DPDA's não são equivalentes a NDPDA's**

- **Exemplo:**
  Não existe DPDA's para representar

$$T(P)=\{ww^r \mid w \in (0,1)^+\}$$

- **T(P) pode ser representada pelo seguinte NDPDA:**
  $P = (K, \sum, \Gamma, \delta, q_o, Z_o, F)$, onde

  $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\sum = \{ 0, 1 \}$, $\Gamma = \{ Z, A, B \}$,
  $q_0 = q_0$, $Z_0 = Z$, $F = \{q_2\}$
  $\delta = \{ \delta(q_0,0,Z) = (q_0,AZ)$, $\delta(q_0,1,Z) = (q_0,BZ)$,
  $\delta(q_0,0,A) = (q_0,AA)$, $\delta(q_0,0,A) = (q_1, \varepsilon)$,
  $\delta(q_0,0,B) = (q_0, AB)$, $\delta(q_0,1,B) = (q_1, \varepsilon)$,
  $\delta(q_0,1,A) = (q_0, BA)$, $\delta(q_0,1,B) = (q_0, BB)$,
  $\delta(q_1,0,A) = (q_1,\varepsilon)$, $\delta(q_1,1,B) = (q_1,\varepsilon)$, $\delta(q1,\varepsilon,Z) = (q_2, Z)\}$

- **Exercício:**
  O PDA abaixo é Determinístico?

  $P = (K, \sum, \Gamma, \delta, qo, Zo, F)$, onde
  $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\sum = \{ a,b \}$, $\Gamma = \{ Z, B \}$, $q0 = q0$, $Z0 = Z$, $F = \{q_2\}$
  $\delta = \{ \delta(q_0,a,Z) = (q_0,BZ)$, $\delta(q_0,a,B) = (q_0,BB)$, $\delta(q_0,b,B) = (q_1, B)$,
  $\delta(q_0,b,Z) = (q_1,Z)$, $\delta(q_1,b,B) = (q_1, \varepsilon)$, $\delta(q_1,b,B) = (q_1, B)$,
  $\delta(q_1,b,Z) = (q_1, Z)$, $\delta(q_1, \varepsilon,Z) = (q_2, \varepsilon) \}$

  Existe DPDA $P' \equiv P$?

Equivalência Entre PDA e G.L.C.

Teorema: "Se L é uma L.L.C. gerada por uma GLC G, então existe um PDA P | P aceita L".

Prova: Para provar este teorema, basta mostrar que:

1 – É sempre possível construir um PDA P (pilha vazia) a partir de uma GLC G de forma que N(P) = L(G).

- **Algoritmo (idéia geral): Seja G uma GLC na FNG**

  Se $A \rightarrow a\,\alpha \in P$ entao $\delta\ (q, a, A) = (q, \alpha) \in \delta$

- **Exemplo:**

  G: $S \rightarrow a\,B \mid b\,A$ **P: ?**

  $A \rightarrow a \mid a\,S \mid b\,A\,A$

  $B \rightarrow b \mid b\,S \mid a\,B\,B$

2 – É sempre possível construir uma GLC G a partir de um PDA P de forma que L(G) = N(P)

- **Algoritmo (idéia geral): Seja P um PDA que aceita por pilha vazia (com 1 estado)**

  Se $\delta\ (q, a, A) = (q, \alpha) \in \delta$ entao $A \rightarrow a\,\alpha \in P$

  Se $\delta\ (q, \varepsilon, A) = (q, \alpha) \in \delta$ entao $A \rightarrow \alpha \in P$

- **Exemplo: $P = (K, \sum, \Gamma, \delta, qo, Zo, F)$, onde**

  $K = \{q_0\}$, $\sum = \{a,b\}$, $\Gamma = \{Z, B\}$, $q_0 = q_0$, $Z_0 = Z$, $F = \phi$

  $\delta = \{\ \delta(q_0, \varepsilon, Z) = (q_0, \varepsilon),\ \ \delta(q_0, a, Z) = (q_0, ZB),$

  $\delta(q_0, b, B) = (q_0, \varepsilon)\}$

  G: $Z \rightarrow a\,Z\,B \mid \varepsilon$

  $B \rightarrow b$