Geometria I
Università degli studi di Padova

Giovanni Caberlotto

Contents

Chapter 1

Campo Complesso $\mathbb{C}$

1.1 Richiami di teoria degli insiemi

1.1.1 Numeri Naturali $\mathbb{N}$

Consideriamo noti i numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Operazioni:

- Somma: il numero naturale $m + n$ è l'$n-$essimo successore di m, ovvero $m + n = (((m + 1) + 1) + \dots) + 1$ (n addendi uguali ad 1)
- Prodotto: Il numero naturale mn si ottiene iterando n volte la somma di m con se stesso; ovvero $mn = (((m + m) + m) + \dots) + m$ (n addendi uguali ad m)

$+ : \mathbb{N} \bigtimes \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Godono delle seguenti proprietà; $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

Somma:

- Associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Commutativa: $x + y = y + x$
- Esistenza dell'elementoi neutro: $x + 0 = x = 0 + x$

Prodotto:

- Associativa: $(xy)z = x(yz)$
- Commutativa: $xy = yx$
- Esistenza dell'elementoi neutro: $x1 = x = 1x$
- Distributiva: $(x + y)z = zx + zy$

1.1.2 Numeri Interi $\mathbb{Z}$

Diamo per noti i numeri interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ con le operazioni $+$ e $*$ $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, valgono le seguenti proprietà:

Somma:

- Associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Commutativa: $x + y = y + x$

- Esistenza dell'elementoi neutro: $x + 0 = x = 0 + x$
- Esistenza dell'elemento opposto $\forall x \in \mathbb{Z} \; \exists \; a \in \mathbb{Z} : x + a = 0$

Prodotto:

- Associativa: $(xy)z = x(yz)$
- Commutativa: $xy = yx$
- Esistenza dell'elementoi neutro: $x1 = x = 1x$
- Distributiva: $(x + y)z = zx + zy$

1.1.3 Numeri Razionali $\mathbb{Q}$

L'insieme dei numeri razionali permette di descrivere i suoi elementi sottoforma di frazioni $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$ e due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ rappresentano lo stesso numero razionale se $ab' = a'b \in \mathbb{Q}$ Il numero intero n si identifica con la frazione $\frac{n}{1}$ e in questo modo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{Q}$ sono definite da:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =^{def} \frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b}\frac{c}{d} =^{def} \frac{ac}{bd}$

e non dipendono dalla scelta dei rappresentanti, le operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{Q}$ godono delle seguenti proprietà $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$

Somma:

- Associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Commutativa: $x + y = y + x$
- Esistenza dell'elementoi neutro: $x + 0 = x = 0 + x$
- Esistenza dell'elemento opposto $\forall x \in \mathbb{Z} \; \exists \; a \in \mathbb{Z} : x + a = 0$

Prodotto:

- Associativa: $(xy)z = x(yz)$
- Commutativa: $xy = yx$
- Esistenza dell'elementoi neutro: $x1 = x = 1x$
- Distributiva: $(x + y)z = zx + zy$
- Esistenza dell'inverso: dato $x \neq 0 \; \exists \; x^{-1} : xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$

Definition 1.1.1: Campo

Un insieme dotato di due operazioni con le proprietà appena descritte viene definito campo o (corpo commutativo)

$+ : K \bigtimes K \longrightarrow K$

$* : K \bigtimes K \longrightarrow K$

1.1.4 Numeri Reali

E' noto che il rapporto tra lunghezze non fornisce sempre un numero razionale

ad esempio il rapporto tra la lunghezza della diagonale e quella del lato di un quadrato vale $\sqrt{2}$ O ancora in modo analogo, il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e quella di un suo raggio vale 2π

Per questo viene introdotto il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali

Nei numeri reali possiamo trovare una radice n-essima di un nu8mero reale positivo qualsiasi, ma non possiamo trovare usoluzioni a tutte le equazioni algebriche

Ad esempio, non ci può essere soluzione all'equazione $x^2 + 1 = 0$. Se ci fosse un tale numero, -1 sarebbe un quadrato, ma in $\mathbb{R}$ tutti i quadrati sono positivi o 0

Costruendo il campo dei numeri complessi a partire da $\mathbb{R}$ è possibile trovare radici a tutti i polinomi a coefficienti reali

1.2 Numeri Complessi $\mathbb{C}$

Definition 1.2.1: Numeri Complessi

Il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto definite nel seguente modo:

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

qualunque siano $(a, b)e(c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Corollary 1.2.1 Osservazioni sul campo $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ non è un campo ordinato, cioè non è possibile introdurre una relazione d'ordine totale con le operazioni ammesse: $+, *$, se ciò fosse possibile:

$i =^? 0$ $i >^? 0$ $i <^? 0$

Non essendo confrontabili possiamo quindi affermare che $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato

La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ godono delle seguenti proprietà: **Somma:**

- Associativa: $(e, f) + ((a, b) + (c, d)) = (c, d) + ((a, b) + (e, f))$
- Commutativa: $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$
- Esistenza dell'elementoi neutro: $0_{\mathbb{C}=(0,0)}$
- Esistenza dell'elemento opposto: dato $(a, b) \in \mathbb{C}\ \exists\ -(a, b) : -(a, b) + (-a, -b) = 0$

Prodotto:

- Associativa: $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$
- Commutativa: $a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$
- Esistenza dell'elementoi neutro: $1_{\mathbb{C}=(1,0)}$
- Distributiva: $((a, b) + (c, d))(e, f) = (e, f)(a, b) + (e, f)(c, d)$
- Esistenza dell'inverso: se $(a, b) \neq (0, 0)$ l'inverso è: $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$

Identifichiamo $\mathbb{R}$ con il sottoinsieme (sottocampo) di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie $(x, 0)$

Sia $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ e osserviamo che $i^2 = (-1, 0) = -1$, Ogni elemento (a, b) di $\mathbb{C}$ si scrive come:

$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi \longrightarrow$ **Rappresentazione Algebrica**

- Il numero complesso i è detto unità immaginaria
- I numeri reali a e b sono detti, rispettivamente parte reale e parte immaginaria del numero complesso $z = a + bi$ in simboli: $a = \Re(z)$ e $b = \Im(z)$

Costruzione di un campo estendendolo al campo complesso

Question 1

Dato un campo K composto da due elementi $K = 0, 1$:

- Costruire le tabelle somma prodotto in K
- Trovare un equazione non risolvibile nel campo K
- Introdurre un J che sia soluzione dell'equazione
- Determinare il campo $\overline{K}$ e le sue tabelle somma prodotto

Solution: $K = \{0, 1\}$ definiamo le tabelle di somma e prodotto per il campo appena definito rispettando le proprietà che definiscono un campo

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Introduziamo adesso un equazione non risolvibile nel campo appena definito

$x^2 + x = 1$ Per risolvere questa equazione estendiamo il campo introducendo j $\overline{K} = \{0, 1, j, 1 + j\}$

Risolviamo l'equazione per $i + j$

$(1 + j)^2 + 1 + j = 1$

come si può notare basandoci sulle tabelle precedentemente definite $(1 + j)(1 + j)$ risulta essere uguale a j in quanto nel campo $K, 1 + 1 = 0$

Risolvendola per j otteniamo invece che: $j^2 = 1 + j$ questo implica che $(1 + j) * j = j + 1 + j$ otteniamo quindi che $(1 + j) * j = 1$ abbiamo completato quindi la tabella prodotto del campo $\overline{K}$

*	0	1	j	1+j
0	0	0	0	0
1	0	1	j	1+j
j	0	j	1 + j	1
1+j	0	1+j	1	j

Per quanto riguarda la tabella della somma di $\overline{K}$ sappiamo che in un campo deve esistere l'elemento opposto che permetta $a + (-a) = 0$ quindi procedendo analogamente a quanto fatto con la tabella somma nel campo K otteniamo:

+	0	1	j	1+j
0	0	1	j	1 + j
1	1	0	j	1+j
j	j	1+j	0	1
1+j	1+j	j	1	0

1.2.1 Coniugio di un numero complesso

Vi è una corrsipondenza biunivoca $\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, detta coniugio, che associa a ogni numero complesso $z = a + ib$ il suo coniugato $\bar{z} = a + (-b)i = a - ib$

Per ogni coppia di numeri complessi z, w, valgono:

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \overline{zw}$
- $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$
- $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$

Corollary 1.2.2
Somma o prodotto di due numeri complessi non reali può sempre dare un numero reale

1.2.2 Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi

Definition 1.2.2: Modulo di un numero complesso

Il modulo (o valore assoluto) di un numero complesso, $z = a + bi$, è il numero reale (non negativo)

$|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{(a - ib)(a + ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Il valore assoluto di $\mathbb{C}$ coincide col valore assoluto reale sul sottocampo $\mathbb{R} \forall z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| \leqslant |z|$ e $\Im(z) \leqslant |z|$

- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z| \geqslant 0 \forall z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$
- $|z + w| = |z| + |w| \forall z, w \in \mathbb{C}$
- $|zw| = |z||w| \forall z, w \in \mathbb{C}$
- se $z \neq 0$ allora $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ e $|\frac{z}{|z|}| = 1$

Piano di Argand-Gauss Gli elementi di $\mathbb{C}$ sono i punti del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Al numero complesso $z = a + ib$ si associa il punto di coordinate (a, b)

L'asse orizzontale è l'asse reale, l'asse verticale è l'asse immaginario Essendo gli assi ortogonali $|a + ib|$ è la

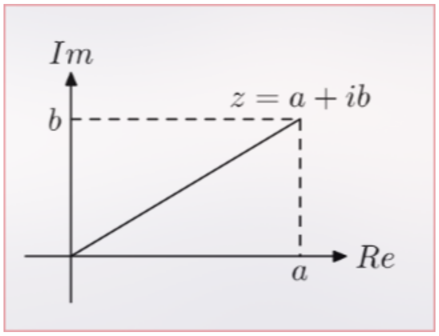

Figure 1.1: Piano di Argand-Gauss

distanza dal punto (a, b) dall'origine nel piano cartesiano

Dati due numeri complessi z e w, il modulo $|z-w|$ è la distanza tra i punti corrispondenti a z e w

Sia r un numero reale positivo. Nel piano di Gauss l'insieme $\{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$ rappresenta i punti interni alla circonferenza di centro z_0 e raggio r

I punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ (centro origine e raggio 1), corrispondono ai numeri complessi $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$, con $\vartheta \in [0, 2k\pi]$

Sia $z \neq 0 \in \mathbb{C}$ e consideriamo:

$z' = \frac{z}{|z|} = c + di$ si ha $|z'| = \sqrt{c^2 + d^2} = 1$

Esiste un numero reale ϑ (unico se lo richiediamo in $[0, 2k\pi]$) tale che $z' = \cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)$ e si ha $|z|z'$ da cui

$z = |z|(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) \rightarrow$ **Rappresentazione Trigonometrica**

ϑ è l'angolo formato dalla semiretta per z uscente dall'origine e la semiretta positiva dell'asse orizzontale

ϑ è detto argomento del numero complesso $z \neq 0$ (ed è determinato da z a meno di multipli di $2k\pi$).

Si indica con $Arg(z)$

1.3 Richiami di Trigonometria

Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
Radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Figure 1.2: Tabella di conversione gradi radianti

1.4 Operazioni coi numeri complessi

1.4.1 Prodotto

Se $z_1 = |z_1|(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$ e $z_2 = |z_2|(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$ sono numeri complessi non nulli, il loro prodotto è:

$z_1 z_2 = |z_1|(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))|z_2|(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) = |z_1 z_2|(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2))$

Pertanto:

- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$

Per definizione $i = \sqrt{-1}$

Proposition 1.4.1 Valore di i
$i = \sqrt{-1} \iff i^2 = -1$

Corollary 1.4.1
Un prodotto tra due numeri complessi può risultare in un numero reale

1.4.2 Potenze

Se $z_1 = |z_1|(\cos(\vartheta_1) + i\sin(\vartheta_1))$ allora:

$z_1^2 = |z_1|^2(\cos(\vartheta_1)^2 + i\sin(\vartheta_1)^2)$
$z_1^3 = |z_1|^3(\cos(\vartheta_1)^3 + i\sin(\vartheta_1)^3)$
...
$z_1^n = |z_1|^n(\cos(\vartheta_1)^n + i\sin(\vartheta_1)^n)$

Pertanto:

- $|z_1^n| = |z_1|^n$
- $\text{Arg}(z_1^n) = \text{nArg}(z_1)$

Di conseguenza, sappiamo calcolare le radici:

Per $z_0 \neq 0$ e $n \geqslant 1$ si ha

$z^n = z_0$
Se, e solo se, $|z|^n = |z_0|$ e $n\vartheta_0 + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$, ove $\vartheta = \text{Arg}(z)$ e $\vartheta_0 = \text{Arg}(z_0)$

Proposition 1.4.2 formula di de Moivre

$$z^n = z_0 \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|z_0|} \\ Complesso\vartheta = \frac{\vartheta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Ci sono n radici n-esime distinte per ogni numero complesso diverso da 0, che fomrano i vertici di un n-gono regolare centrato nell'origine

Proposition 1.4.3 Esponenziale complesso

Sia $z = x + iy$, con x e y reali, e poniamo

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Al variare di $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ e si ha $e^{z+w} = e^z e^w$

Per ogni numero complesso $z_0 = |z_0|(\cos(\vartheta_0) + i\sin(\vartheta_0) \neq 0$ si ha:

$z_0 = |z_0|e^{i\vartheta_0} = pe^{i\vartheta_0} \rightarrow$ **Rappresentazione Esponenziale**

Ove ϑ_0 è l'argomento di z_0 e $p = |z_0|$

Question 2: Risoluzione di un equazione utilizzando la notazione esponenziale

Dato $z \in \mathbb{C}$ trova le soluzioni di $z^2 * \overline{z} = z$

Solution: $z^2 = r^2e^{i2\vartheta}, \overline{z} = re^{-i\vartheta}, z = re^{i\vartheta}$ abbiamo quindi:

$r^2e^{i2\vartheta}re^{-i\vartheta} = re^{i\vartheta}$

moltiplichiamo r a primo membro e otteniamo

$r^3e^{i2\vartheta}e^{-i\vartheta} = re^{i\vartheta}$

svolgiamo i calcoli in e a primo membro raccogliendo i e otteniamo:

$r^3e^{i(2\vartheta-\vartheta} = re^{i\vartheta}$

$r^3 e^{i\vartheta} = r e^{i\vartheta}$

dividiamo per $e^{i\vartheta}$

Complesso $r^3 = r$

otteniamo quindi:

$r^3 - r = 0$

$r(r^2 - 1)$

otteniamo quindi $r = + - 1$ e $r = 0$

Proposition 1.4.4 Identità di Eulero
$e^{i\pi} + 1 = 0$

I numeri complessi sono un campo algebricamente chiuso. Vale il cosidetto

Theorem 1.4.1 Teorema fondamentale dell'algebra
Sia $P(X$ un polinomio di grado posittivo in $\mathbb{C}[X]$. Allora esiste un numero complesso z_0 tale che $P(z_0) = 0$

Ogni polinomio a coefficienti in $\mathbb{R}$ si fattorizza come prodotto di polinomi lineari $X - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e polinomi di grado due $(X - \beta)(X - \overline{\beta})$ con $\beta \in \mathbb{C}$

1.5 Interpretazione Geometrica

Le operazioni in $\mathbb{C}$ hanno una rappresentazione geometrica nel piano di Gauss La somma per un numero z_2 è la

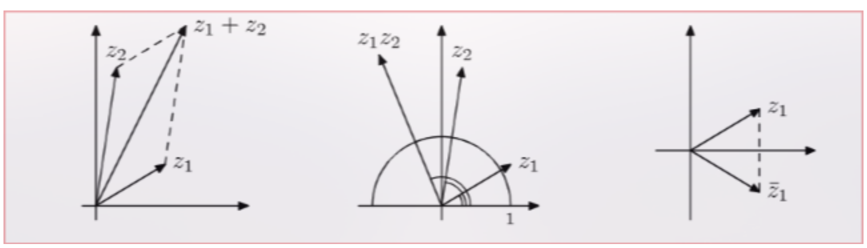

Figure 1.3: Interpretazione Geometrica su Piano di Argand-Gauss

traslazione corrispondente a quel vettore.

Il prodotto per un numero $z_2 = pe^{i\alpha} \neq 0$ è una dilatazione di rapporto p seguita da una rotazione di angolo α =Arg(z_2)

Chapter 2

Spazi Vettoriali

Definition 2.0.1: Spazi Vettoriali

Uno spazio vettoriale su K è un insieme non vuoto V dotato di due operazione (Moltiplicazione e Addizione)

$+ : K \bigtimes K \to V$

$* : K \bigtimes K \to V$

2.1 Proprietà degli spazi vettoriali

- $(u + v) + w = v + (u + w) \forall u, v \in V$
- $u + v = v + u \forall u, v \in V$
- $\exists\ \vec{o} \in V : v + \vec{o} = \vec{o} + v \forall u, v \in V$
- $\forall v \in V$ esiste un vettore indicato come $-v$ tale che: $v + (-v) = 0$
- $(\alpha * \beta) * v = \alpha * (\beta * v) \forall \alpha, \beta \in K \forall u, v \in V$
- $\alpha + \beta) * v = + \forall \alpha, \beta \in K \forall u, v \in V$
- $1 * v = v \forall v \in V$

2.2 Vettori Geometrici

Vettori geometrici anche detti segmenti orientati sono rappresentazioni dei vettori su un piano $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R} \bigtimes \mathbb{C}$
Proprietà

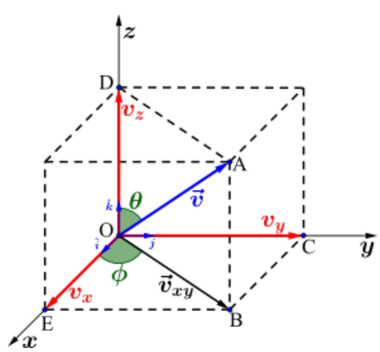

Figure 2.1: Vettore sul piano

- $\vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v}$
- $V = K$ Spazio vettoriale su K
- K campo, $V = L$ un altro campo tale che $V \subset K$

  Esempi:

  $K = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} = L; K = \mathbb{R} \subset \mathbb{C} = L$

  V è uno spazio vettoriale su K
- $V = K^m = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} | a_1, a_2, \ldots, a_m \in K$

  $(a_1, a_2, \ldots, a_m) + (b_1, b_2, \ldots b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots a_m + b_n)$ e si scrive $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$

  $\lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in V = \mathbb{K}^M \quad$ definisco $\quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_m \end{pmatrix}$
- $V =$ insieme dei polinomi in x con coefficienti in K e si scrive $K[x]$ il quale è uno spazio vettoriale
- $V =$ insieme di funzioni da $R \rightarrow R$ e anch'esso rappresenta uno spazio vettoriale