Ejercicios resueltos

Matemática aplicada a Economía

Juan Andrés Cabral

Versión 0.2

Sobre este libro

El presente libro contiene ejercicios con resoluciones sugeridas. Pueden existir errores. Si encontrás algún fallo o tenés sugerencias, por favor envía un correo a `jcabral@udesa.edu.ar`

Índice

1 Curvas de nivel y derivadas parciales **4**

1.1 Ejercicio 1 . . . 4
1.2 Ejercicio 2 . . . 6
1.3 Ejercicio 3 . . . 8
1.4 Ejercicio 4 . . . 11
1.5 Ejercicio 5 . . . 13
1.6 Ejercicio 6 . . . 15
1.7 Ejercicio 7 . . . 18
1.8 Ejercicio 8 . . . 24
1.9 Ejercicio 9 . . . 28
1.10 Ejercicio 10 . . . 31
1.11 Ejercicio 11 . . . 35
1.12 Ejercicio 12 . . . 38
1.13 Ejercicio 13 . . . 41
1.14 Ejercicio 14 . . . 43
1.15 Ejercicio 15 . . . 48
1.16 Ejercicio 16 . . . 50
1.17 Ejercicio 17 . . . 53
1.18 Ejercicio 18 . . . 55
1.19 Ejercicio 19 . . . 57
1.20 Ejercicio 20 . . . 60
1.21 Ejercicio 21 . . . 62
1.22 Ejercicio 22 . . . 64
1.23 Ejercicio 23 . . . 66
1.24 Ejercicio 24 . . . 68
1.25 Ejercicio 25 . . . 71
1.26 Ejercicio 26 . . . 73
1.27 Ejercicio 27 . . . 75
1.28 Ejercicio 28 . . . 77
1.29 Ejercicio 29 . . . 79
1.30 Ejercicio 30 . . . 81
1.31 Ejercicio 31 . . . 83
1.32 Ejercicio 32 . . . 85
1.33 Ejercicio 33 . . . 87
1.34 Ejercicio 34 . . . 88
1.35 Ejercicio 35 . . . 90

2 Derivadas compuestas, derivadas implícitas y homogeneidad **94**

2.1 Ejercicio 1 . . . 94
2.2 Ejercicio 2 . . . 101
2.3 Ejercicio 3 . . . 104
2.4 Ejercicio 4 . . . 106
2.5 Ejercicio 5 . . . 109
2.6 Ejercicio 6 . . . 112
2.7 Ejercicio 7 . . . 115
2.8 Ejercicio 8 . . . 117
2.9 Ejercicio 9 . . . 120
2.10 Ejercicio 10 . . . 123
2.11 Ejercicio 11 . . . 126
2.12 Ejercicio 12 . . . 129
2.13 Ejercicio 13 . . . 133
2.14 Ejercicio 14 . . . 136
2.15 Ejercicio 15 . . . 138

2.16 Ejercicio 16 140
2.17 Ejercicio 17 144
2.18 Ejercicio 18 148
2.19 Ejercicio 19 151
2.20 Ejercicio 20 154
2.21 Ejercicio 21 157
2.22 Ejercicio 22 160
2.23 Ejercicio 23 162
2.24 Ejercicio 24 165
2.25 Ejercicio 25 168

3 Autovectores, autovalores y formas cuadráticas **171**
3.1 Ejercicio 1 171
3.2 Ejercicio 2 190
3.3 Ejercicio 3 192
3.4 Ejercicio 4 199
3.5 Ejercicio 5 203
3.6 Ejercicio 6 206
3.7 Ejercicio 7 208
3.8 Ejercicio 8 208
3.9 Ejercicio 9 208
3.10 Ejercicio 10 208
3.11 Ejercicio 11 208
3.12 Ejercicio 12 208
3.13 Ejercicio 13 208
3.14 Ejercicio 14 208
3.15 Ejercicio 15 208
3.16 Ejercicio 16 208
3.17 Ejercicio 17 208

1 Curvas de nivel y derivadas parciales

1.1 Ejercicio 1

Dada la función

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

hallar $f(2,-3)$ y $f(1,1)$.

Solución

Evaluación en el punto $(2, -3)$

$$
\begin{aligned}
f(2,-3) &= \frac{2^2 + (-3)^2}{2 \cdot 2 \cdot (-3)} \\
&= \frac{4+9}{2 \cdot 2 \cdot (-3)} \\
&= \frac{13}{4 \cdot (-3)} \\
&= \frac{13}{-12} \\
&= -\frac{13}{12}
\end{aligned}
$$

Evaluación en el punto $(1, 1)$

$$
\begin{aligned}
f(1,1) &= \frac{1^2 + 1^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} \\
&= \frac{1+1}{2} \\
&= \frac{2}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

1.2 Ejercicio 2

Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

hallar $f(0,-1)$, $f(0,0)$, $f(2,0)$ y $f(3,3)$

Solución

Evaluación en el punto $(0,-1)$

Como $(0,-1) \neq (0,0)$, utilizamos la primera definición de la función:

$$\begin{aligned} f(0,-1) &= \frac{0^2 - 2(-1)}{0^2 + (-1)^2} \\ &= \frac{0+2}{0+1} \\ &= \frac{2}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Evaluación en el punto $(0,0)$

Aquí usamos directamente la segunda definición:

$$f(0,0) = 0$$

Evaluación en el punto $(2,0)$

Como $(2,0) \neq (0,0)$, volvemos a la primera definición:

$$\begin{aligned} f(2,0) &= \frac{2^2 - 2 \cdot 0}{2^2 + 0^2} \\ &= \frac{4-0}{4+0} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Evaluación en el punto $(3,3)$

Como $(3,3) \neq (0,0)$, utilizamos la primera definición:

$$\begin{aligned} f(3,3) &= \frac{3^2 - 2 \cdot 3}{3^2 + 3^2} \\ &= \frac{9-6}{9+9} \\ &= \frac{3}{18} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

1.3 Ejercicio 3

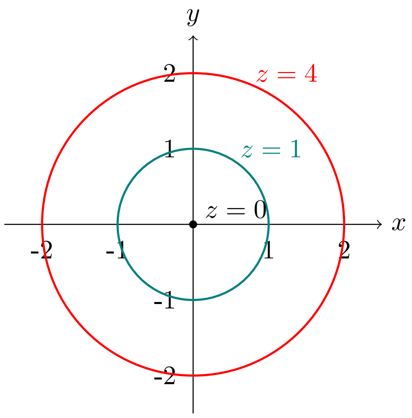
Graficar las curvas de nivel de las siguientes superficies:

1. $z = x^2 + y^2$ para $z = -1,\ z = 0,\ z = 1,\ z = 4$
2. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - z = 0$ para $z = -1,\ z = 0,\ z = 1,\ z = 9$
3. $z = 2xy$ para $z = -2,\ z = 0,\ z = 2,\ z = 4$
4. $2x + 3y - 6z = 0$ para $z = -1,\ z = 0,\ z = 1,\ z = 2$
5. $z = x^2 - y^2$ para $z = -1,\ z = 0,\ z = 1,\ z = 2$

Solución

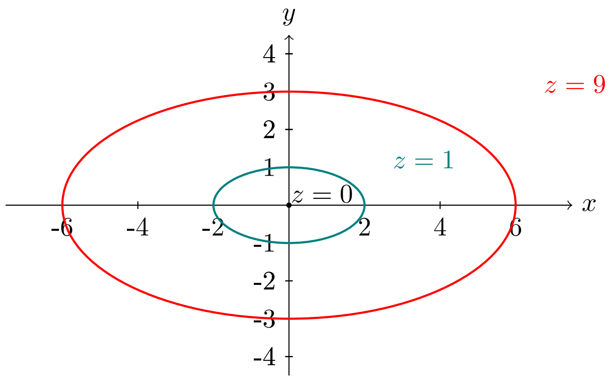
1)

No hay soluciones para $z = -1$

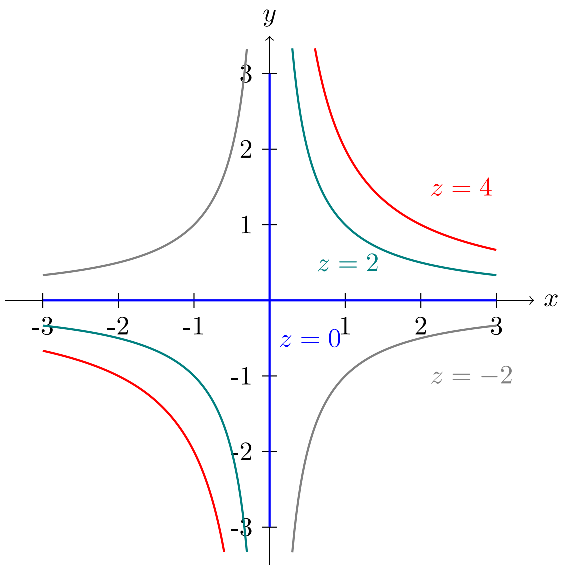


2)

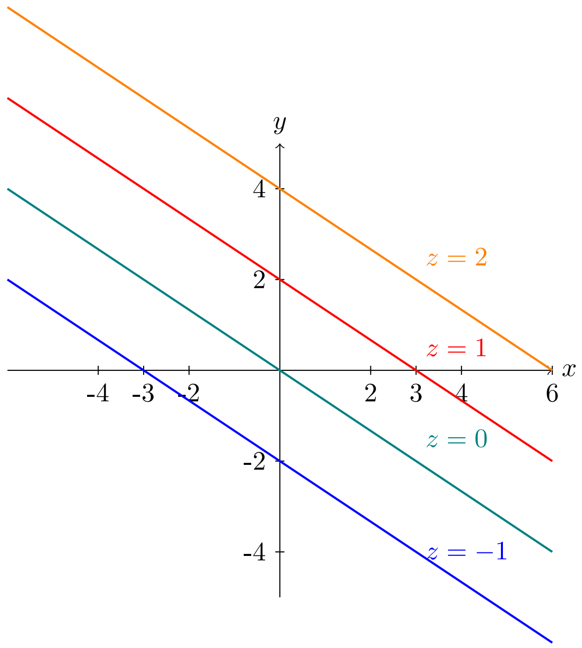
No hay soluciones para $z = -1$



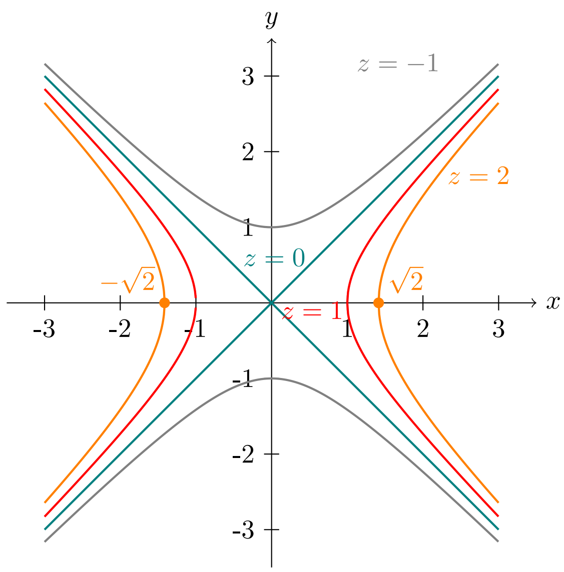
3)



4)


y
x
4
2
-2
-4
-4
-3
-2
2
3
4
6
$z = 2$
$z = 1$
$z = 0$
$z = -1$

5)


y
x
$z = -1$
$z = 2$
$z = 0$
$z = 1$
$-\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$
3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3

1.4 Ejercicio 4

La producción de un bien está dada por

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$$

donde x e y son las cantidades de los factores de producción.

Se pide:

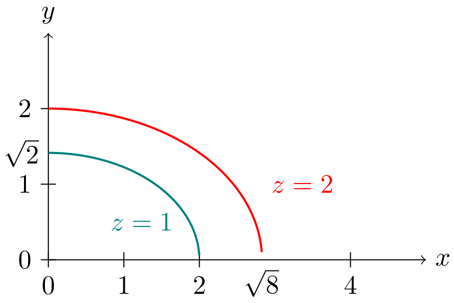
1. Representar las curvas de nivel (isocuantas) para

$$z = 1, \quad z = 2$$

2. Dar el significado de las curvas de nivel e indicar si son convexas hacia el origen, si crecen hacia arriba y a la derecha y si tienen pendiente negativa.

Solución

1



2

Las curvas cumplen crecen hacia arriba y a la derecha, son tienen pendiente negativa pero no son convexas al origen.

1.5 Ejercicio 5

Dada la función de producción $z = 6xy$, donde x es el número de máquinas usadas y y es el número de horas hombre, se pide:

1. Determinar las curvas de producción constante para $z = 6$, $z = 18$. Representar gráficamente.
2. Si se desea obtener un volumen de producción de 300 unidades y se dispone de dos máquinas, ¿cuántas horas hombre se necesitan?
3. Si se deben producir 6000 unidades con 200 horas hombre, ¿cuántas máquinas se deben utilizar?

Solución

1. Curvas de producción constante

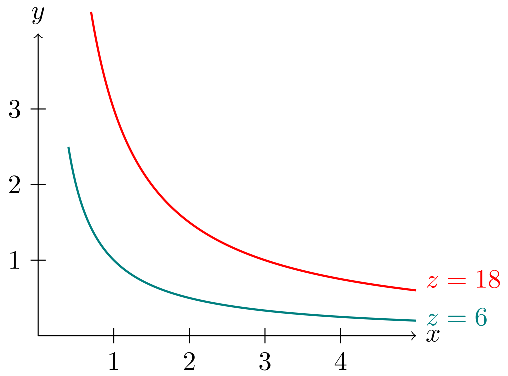
La isocuanta (curva de producción constante) para un nivel z_0 viene dada por

$$z_0 = 6\,x\,y \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{z_0}{6x}$$

Por lo tanto:

- Para $z = 6$:
$$y = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

- Para $z = 18$:
$$y = \frac{18}{6x} = \frac{3}{x}$$



2. Horas hombre necesarias para $z = 300$ con $x = 2$

Dada la función $z = 6xy$, fijamos $x = 2$ y $z = 300$

$$6 \cdot 2 \cdot y = 300 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{300}{12} = 25$$

Por tanto, se necesitan 25 horas hombre

3. Máquinas necesarias para $z = 6000$ con $y = 200$

Fijando $y = 200$ y $z = 6000$:

$$6x \cdot 200 = 6000 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{6000}{1200} = 5$$

Por tanto, se deben emplear 5 máquinas

1.6 Ejercicio 6

Si la función de utilidad es $U = 3x_1x_2$ y, además, $p_1 = 5$, $p_2 = 6$ se pide:

1. Hallar la ecuación de balance.
2. Hallar la máxima utilidad si $R = 120$. Graficar.

Solución

1. Ecuación de balance

La restricción presupuestaria es

$$5x_1 + 6x_2 = R = 120$$

2. Maximización de la utilidad

a) Curva de indiferencia Para $U = \bar{U}$ constante:

$$3x_1x_2 = \bar{U} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{\bar{U}}{3x_2}, \quad \left.\frac{dx_1}{dx_2}\right|_U = -\frac{\bar{U}}{3x_2^2}$$

b) Recta presupuestaria Despejando x_1:

$$x_1 = \frac{120 - 6x_2}{5}, \quad \left.\frac{dx_1}{dx_2}\right|_B = -\frac{6}{5}$$

c) Igualación de pendientes

$$-\frac{\bar{U}}{3x_2^2} = -\frac{6}{5} \quad \Longrightarrow \quad \bar{U} = \frac{18}{5}x_2^2$$

d) Derivadas $\frac{dx_2}{dx_1}$ De $3x_1x_2 = \bar{U}$:

$$x_2 = \frac{\bar{U}}{3x_1}, \quad \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_U = -\frac{\bar{U}}{3x_1^2}$$

De $5x_1 + 6x_2 = 120$:

$$x_2 = \frac{120 - 5x_1}{6}, \quad \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_B = -\frac{5}{6}$$

e) Segunda igualación de pendientes

$$-\frac{\bar{U}}{3x_1^2} = -\frac{5}{6} \quad \Longrightarrow \quad \bar{U} = \frac{5}{2}x_1^2$$

Igualando las dos expresiones de $\bar{U}$:

$$\frac{18}{5}x_2^2 = \frac{5}{2}x_1^2 \quad \Longrightarrow \quad x_2^2 = \frac{25}{18}x_1^2 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{5}{\sqrt{18}}x_1 = \frac{5}{3\sqrt{2}}x_1$$

pero para simplificar usamos la primera relación obtenida:

$$3x_1 = \frac{18}{5}x_2 \implies x_2 = \frac{5}{6}x_1$$

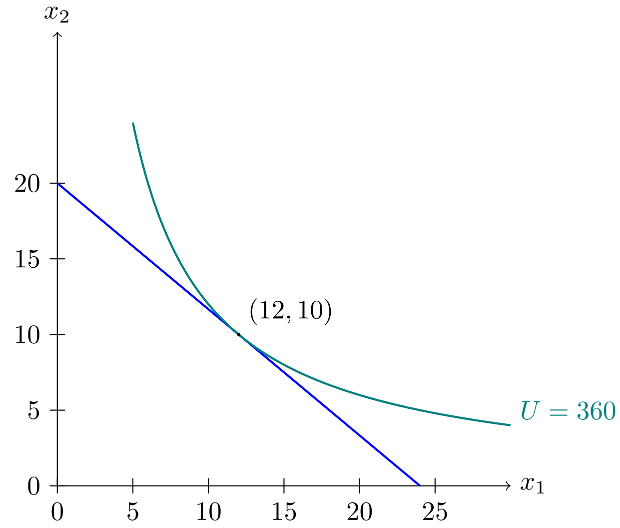
f) Cálculo de la solución óptima Sustituimos $x_2 = \frac{5}{6}x_1$ en la restricción:

$$5x_1 + 6\left(\frac{5}{6}x_1\right) = 10x_1 = 120 \implies x_1^* = 12, \quad x_2^* = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10$$

La máxima utilidad es

$$U_{\max} = 3 \cdot 12 \cdot 10 = 360$$

Gráfico



1.7 Ejercicio 7

Un productor de quesos utiliza como insumo x cantidad de leche en la producción de dos tipos de quesos A y B. Si la función de producción conjunta está dada por

$$x = 4q_1^2 + 2q_2^2$$

donde q_1 y q_2 son las cantidades de queso del tipo A y B respectivamente, producidas en forma conjunta con x cantidad de leche y, además, el precio de cada tipo de queso es 3 y 4 respectivamente, se pide:

1. Hallar la función de ingreso total.
2. Graficar las líneas de isongreso.
3. Dar el valor máximo de ingreso obtenido con 164 toneladas de leche.

Solución

(1) Función de ingreso total

Sea $p_1 = 3$ el precio por unidad del queso tipo A y $p_2 = 4$ el precio por unidad del queso tipo B. Las cantidades producidas de cada tipo de queso se denotan por q_1 y q_2.

La función de ingreso total R se obtiene multiplicando los precios por las cantidades producidas:

$$R = p_1\, q_1 + p_2\, q_2 = 3\, q_1 + 4\, q_2$$

(2) Líneas de isongreso

Las líneas de isongreso se obtienen al fijar un nivel de ingreso $R = \bar{R}$ y representar la relación entre q_1 y q_2. Dado que

$$R = 3\, q_1 + 4\, q_2$$

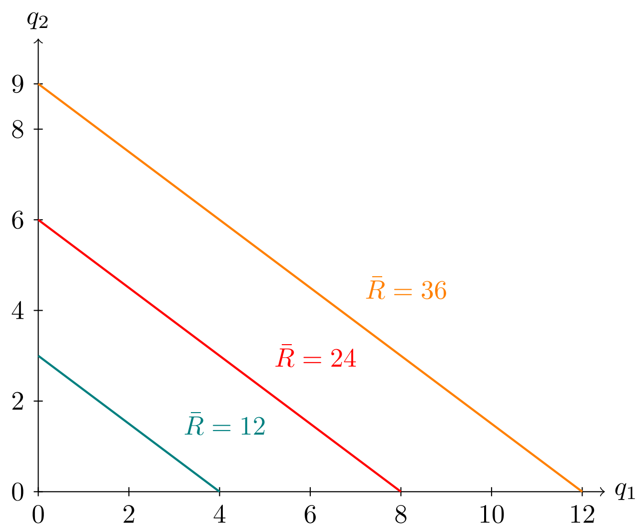
una línea de isongreso para un ingreso constante $\bar{R}$ se describe por

$$3\, q_1 + 4\, q_2 = \bar{R}$$

Despejando q_2 en función de q_1:

$$q_2 = \frac{\bar{R} - 3\, q_1}{4}$$

Esta es la ecuación de una recta con intercepto $\bar{R}/4$ en el eje q_2 y pendiente $-3/4$.



(3) Valor máximo de ingreso con $x = 164$ toneladas de leche

Derivadas de la restricción

1. **Despejando q_1 en función de q_2:** De la restricción tenemos

$$4q_1^2 = 164 - 2q_2^2 \quad\Longrightarrow\quad q_1 = \frac{1}{2}\sqrt{164 - 2q_2^2}$$

Derivando con respecto a q_2:

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{164 - 2q_2^2}} \cdot (-4q_2) = -\frac{q_2}{\sqrt{164 - 2q_2^2}}$$

2. **Despejando q_2 en función de q_1:** De la restricción

$$2q_2^2 = 164 - 4q_1^2 \quad \Longrightarrow \quad q_2 = \sqrt{\frac{164 - 4q_1^2}{2}} = \sqrt{82 - 2q_1^2}$$

Derivando con respecto a q_1:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{1}{2\sqrt{82 - 2q_1^2}} \cdot (-4q_1) = -\frac{2q_1}{\sqrt{82 - 2q_1^2}}$$

Derivadas de la función de ingreso La función de ingreso es:

$$R = 3q_1 + 4q_2$$

Consideramos las dos formas de despejar las variables a partir de una línea de isongreso (nivel constante de ingreso):

1. **Despejando q_1 en función de q_2:** Sea $R = \bar{R}$ constante. Entonces,

$$3q_1 = \bar{R} - 4q_2 \quad \Longrightarrow \quad q_1 = \frac{\bar{R} - 4q_2}{3}$$

Derivando con respecto a q_2:

$$\frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{4}{3}$$

2. **Despejando q_2 en función de q_1:** De $3q_1 + 4q_2 = \bar{R}$, se tiene:

$$q_2 = \frac{\bar{R} - 3q_1}{4}$$

Derivando con respecto a q_1:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{3}{4}$$

Igualación de pendientes La condición de optimalidad requiere que la pendiente de la restricción (derivada obtenida al despejar) sea igual a la pendiente de la línea de isongreso.

Podemos igualar, por ejemplo, la derivada obtenida al despejar q_2 en función de q_1:

De la restricción tenemos:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{2q_1}{\sqrt{82 - 2q_1^2}}$$

y de la línea de isongreso:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{3}{4}$$

Igualamos (sin los signos negativos):

$$\frac{2q_1}{\sqrt{82 - 2q_1^2}} = \frac{3}{4}$$

Multiplicamos ambos lados por $\sqrt{82 - 2q_1^2}$ y por 4:

$$8q_1 = 3\sqrt{82 - 2q_1^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$64q_1^2 = 9(82 - 2q_1^2)$$

Expandiendo y reuniendo términos:

$$64q_1^2 = 738 - 18q_1^2 \quad \Longrightarrow \quad 64q_1^2 + 18q_1^2 = 738 \quad \Longrightarrow \quad 82q_1^2 = 738$$

Dividiendo entre 82:

$$q_1^2 = \frac{738}{82} = 9 \quad \Longrightarrow \quad q_1 = 3 \quad \text{(se toma la solución positiva)}$$

Con $q_1 = 3$, sustituimos en la restricción para obtener q_2:

$$4(3)^2 + 2q_2^2 = 164 \quad \Longrightarrow \quad 36 + 2q_2^2 = 164$$

Restando 36:

$$2q_2^2 = 128 \quad \Longrightarrow \quad q_2^2 = 64 \quad \Longrightarrow \quad q_2 = 8 \quad \text{(se toma la solución positiva)}$$

Sustituyendo en la función de ingreso:

$$R_{\text{max}} = 3q_1 + 4q_2 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 8 = 9 + 32 = 41$$

Otra forma de encontrar maximizar

Recordemos que el problema es maximizar el ingreso

$$R = 3\,q_1 + 4\,q_2$$

sujeto a la restricción

$$4\,q_1^2 + 2\,q_2^2 = 164$$

En lugar de utilizar el método de Lagrange, vamos a **despejar una variable** de la restricción y luego **substituirla** en la función objetivo, de modo que el problema quede en una sola variable.

Despeje de q_2 a partir de la restricción

La restricción es:

$$4\,q_1^2 + 2\,q_2^2 = 164$$

Despejamos q_2^2:

$$2\,q_2^2 = 164 - 4\,q_1^2 \quad \Longrightarrow \quad q_2^2 = \frac{164 - 4\,q_1^2}{2} = 82 - 2\,q_1^2$$

Suponiendo $q_2 \geq 0$ (pues las cantidades físicas de queso no pueden ser negativas), tenemos

$$q_2 = \sqrt{82 - 2\,q_1^2}$$

Función objetivo en términos de q_1

Sustituyendo q_2 en la función de ingreso R, obtenemos

$$R(q_1) = 3\,q_1 + 4\,q_2 = 3\,q_1 + 4\sqrt{82 - 2\,q_1^2}$$

Maximización en una variable

Para hallar el valor de q_1 que maximiza $R(q_1)$, derivamos R con respecto a q_1 y buscamos los puntos críticos en el intervalo anterior.

$$R(q_1) = 3\,q_1 + 4\sqrt{82 - 2\,q_1^2}$$

Calculemos la derivada $R'(q_1)$. Para la segunda parte, notemos que si definimos $f(q_1) = 82 - 2\,q_1^2$ entonces $\sqrt{f(q_1)} = \sqrt{82 - 2\,q_1^2}$

$$R'(q_1) = \frac{d}{dq_1}\Big[3\,q_1\Big] \;+\; 4\,\frac{d}{dq_1}\Big[\sqrt{f(q_1)}\Big]$$

La primera parte es simplemente 3. Para la segunda parte:

$$\frac{d}{dq_1}\Big[\sqrt{f(q_1)}\Big] = \frac{1}{2\sqrt{f(q_1)}}\,\frac{d}{dq_1}[f(q_1)] = \frac{1}{2\sqrt{82 - 2\,q_1^2}}\,(-4\,q_1)$$

pues $\frac{d}{dq_1}[82 - 2\,q_1^2] = -4\,q_1$
Por tanto,

$$R'(q_1) = 3 \;+\; 4\cdot\left(\frac{-4\,q_1}{2\sqrt{82 - 2\,q_1^2}}\right) = 3 \;-\; \frac{16\,q_1}{2\sqrt{82 - 2\,q_1^2}} = 3 \;-\; \frac{8\,q_1}{\sqrt{82 - 2\,q_1^2}}$$

5. Punto crítico

Para un máximo local, buscamos $R'(q_1) = 0$:

$$3 \;-\; \frac{8\,q_1}{\sqrt{82 - 2\,q_1^2}} = 0 \quad\Longrightarrow\quad 3 = \frac{8\,q_1}{\sqrt{82 - 2\,q_1^2}}$$

Despejamos $\sqrt{82 - 2\,q_1^2}$:

$$\sqrt{82 - 2\,q_1^2} = \frac{8\,q_1}{3}$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$82 - 2\,q_1^2 = \left(\frac{8\,q_1}{3}\right)^2 = \frac{64\,q_1^2}{9}$$

Pasamos todo a un lado:

$$82 = 2\,q_1^2 + \frac{64\,q_1^2}{9} = 2\,q_1^2 + \frac{64}{9}\,q_1^2 = \left(2 + \frac{64}{9}\right)q_1^2 = \frac{18}{9}\,q_1^2 + \frac{64}{9}\,q_1^2 = \frac{82}{9}\,q_1^2$$

De modo que

$$82 = \frac{82}{9}\,q_1^2 \quad\Longrightarrow\quad q_1^2 = 9 \quad\Longrightarrow\quad q_1 = 3 \quad \text{(tomamos la raíz positiva, } q_1 \geq 0\text{)}$$

Valor de q_2

Con $q_1 = 3$, hallamos q_2 de la restricción:

$$4\,q_1^2 = 4\cdot 9 = 36$$

$$2\,q_2^2 = 164 - 36 = 128 \quad\Longrightarrow\quad q_2^2 = 64 \quad\Longrightarrow\quad q_2 = 8 \quad \text{(tomando la raíz positiva)}$$

Ingreso máximo

Evaluamos la función de ingreso en $(q_1, q_2) = (3, 8)$:

$$R_{\max} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 8 = 9 + 32 = 41$$

1.8 Ejercicio 8

En un proceso de producción simple, un empresario utiliza dos insumos x_1 y x_2 para producir un solo producto, siendo la función de producción que establece la cantidad de producto

$$q = x_1\, x_2$$

Si el costo unitario de cada insumo es 3 y 6, respectivamente, y existe un costo fijo de 180 unidades monetarias, se pide:

1. Hallar la función de costo total.

2. Hallar el valor del mínimo costo total para un producto de $q = 2$.

Solución

Función de costo total

Dado que el costo unitario del insumo x_1 es 3 y el del insumo x_2 es 6, y además existe un costo fijo de 180, la **función de costo total** se escribe como:

$$C = 3\,x_1 + 6\,x_2 + 180$$

Costo mínimo para producir $q = 2$

El problema consiste en *minimizar*

$$C = 3\,x_1 + 6\,x_2 + 180$$

sujeto a la *restricción*

$$x_1\,x_2 = 2$$

Para encontrar el *costo mínimo*, podemos:

1. Despejar una variable de la restricción
2. Sustituir en la función de costo, reduciendo el problema a una sola variable
3. Hallar el valor de dicha variable que minimiza el costo
4. Calcular el costo correspondiente

1) Despeje de la restricción De $x_1\,x_2 = 2$, podemos, por ejemplo, **despejar** x_2:

$$x_2 = \frac{2}{x_1}$$

2) Sustitución en la función de costo Sustituyendo $x_2 = \frac{2}{x_1}$ en C, obtenemos:

$$C(x_1) = 3\,x_1 + 6\left(\frac{2}{x_1}\right) + 180 = 3\,x_1 + \frac{12}{x_1} + 180$$

3) Minimización de $C(x_1)$ Para hallar el mínimo, derivamos con respecto a x_1 y *igualamos a cero*:

$$\frac{dC}{dx_1} = 3 - \frac{12}{x_1^2} = 0$$

Despejamos:

$$3 = \frac{12}{x_1^2} \quad\Longrightarrow\quad x_1^2 = \frac{12}{3} = 4 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 2 \quad \text{(tomamos la raíz positiva, pues } x_1 > 0\text{)}$$

4) Valor de x_2 Con $x_1 = 2$, la restricción $x_1\,x_2 = 2$ da:

$$2 \cdot x_2 = 2 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = 1$$

5) Costo mínimo Sustituyendo $(x_1, x_2) = (2, 1)$ en la función de costo:

$$C_{\min} = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 180 = 6 + 6 + 180 = 192$$

Costo mínimo para producir $q = 2$ mediante igualación de pendientes

Dado el problema:

$$\min\ C = 3\,x_1 + 6\,x_2 + 180 \quad \text{sujeto a} \quad x_1\,x_2 = 2$$

podemos resolverlo *igualando las pendientes* de la **iso-costo** y la **iso-cuanta** (o **curva de nivel** de la función de producción).

1) Restricción (iso-cuanta)

1. **Despejando x_1 en función de x_2:**

$$x_1 = \frac{2}{x_2}$$

   Derivando con respecto a x_2:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\,\frac{2}{x_2^2}$$

2. **Despejando x_2 en función de x_1:**

$$x_2 = \frac{2}{x_1}$$

   Derivando con respecto a x_1:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\,\frac{2}{x_1^2}$$

2) Función de costo (iso-costo)

Las *líneas de iso-costo* (para un costo total C constante) se describen por:

$$3\,x_1 + 6\,x_2 = \text{Constante}$$

Para llamarla $\bar{C}$, tenemos

$$3\,x_1 + 6\,x_2 = \bar{C}$$

1. **Despejando x_1 en función de x_2:**

$$x_1 = \frac{\bar{C} - 6\,x_2}{3}$$

   Derivando con respecto a x_2:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\,\frac{6}{3} = -\,2$$

2. **Despejando x_2 en función de x_1:**

$$x_2 = \frac{\bar{C} - 3\,x_1}{6}$$

   Derivando con respecto a x_1:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\,\frac{3}{6} = -\,\frac{1}{2}$$

3) Igualación de pendientes

Para el *óptimo*, la curva de iso-costo debe ser *tangente* a la iso-cuanta. Eso implica que sus pendientes coincidan. Tenemos dos maneras de igualar pendientes (usando cualquiera de las dos formas de despeje):

- $\dfrac{dx_1}{dx_2}$ de la restricción $=$ $\dfrac{dx_1}{dx_2}$ de la iso-costo
- $\dfrac{dx_2}{dx_1}$ de la restricción $=$ $\dfrac{dx_2}{dx_1}$ de la iso-costo

Usando $\dfrac{dx_1}{dx_2}$

$$-\frac{2}{x_2^2} = -2 \implies \frac{2}{x_2^2} = 2 \implies x_2^2 = 1 \implies x_2 = 1 \text{ (el valor positivo)}$$

De la restricción $x_1 x_2 = 2$:

$$x_1 \cdot 1 = 2 \implies x_1 = 2$$

Usando $\dfrac{dx_2}{dx_1}$

$$-\frac{2}{x_1^2} = -\frac{1}{2} \implies \frac{2}{x_1^2} = \frac{1}{2} \implies x_1^2 = 4 \implies x_1 = 2 \text{ (positivo)}$$

Nuevamente, de $x_1 x_2 = 2$:

$$2 \cdot x_2 = 2 \implies x_2 = 1$$

Ambas vías coinciden en $(x_1, x_2) = (2,\ 1)$

1.9 Ejercicio 9

Una función de producción está dada por $q = x^{1/2}y^{1/2}$ donde x e y son las cantidades de insumos cuya función de costo total está dada por $x + 2y + 100 = C$. Determinar gráfica y analíticamente utilizando las curvas de nivel la máxima producción que puede obtener el productor si dispone de un costo total de 124.

Respuesta

Obtenemos primero la pendiente de la curva de nivel de la función a maximizar:

$$\bar{q} = x^{1/2}y^{1/2}$$

$$\frac{\bar{q}^2}{y} = x$$

$$x'y = -\frac{\bar{q}^2}{y^2}$$

$$\frac{\bar{q}^2}{x} = y$$

$$y'x = -\frac{\bar{q}^2}{x^2}$$

La pendiente entonces es el cociente de derivadas:

$$\frac{x'y}{y'x} = \frac{-\frac{\bar{q}^2}{y^2}}{-\frac{\bar{q}^2}{x^2}} = \frac{x^2}{y^2}$$

Obtenemos la pendiente de la curva de nivel de la restricción:

$$x + 2y + 100 = C$$

$$x = C - 100 - 2y$$

$$x'y = -2$$

$$y = C/2 - 100/2 - x/2$$

$$y'x = -1/2$$

La pendiente entonces es el cociente de derivadas:

$$\frac{x'y}{y'x} = \frac{-2}{-1/2} = 4$$

Igualamos las pendientes de las curvas de nivel:

$$\frac{x^2}{y^2} = 4$$

Despejo una variable:

$$x = 2y$$

Inserto en la restricción:

$$2y + 2y + 100 = 124$$

$$4y = 24$$

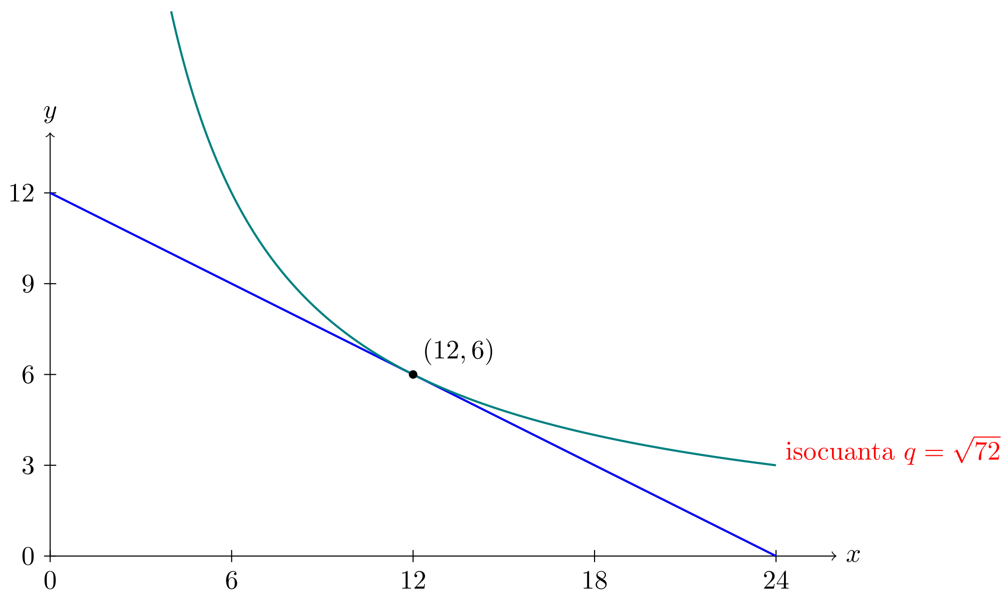
$$y = 6$$

Inserto esto en la ecuación de x

$$x = 2 \cdot 6 = 12$$

Calculamos la producción:

$$12^{1/2}6^{1/2} = 72^{1/2}$$



y
x
12
9
6
3
0
0
6
12
18
24
(12, 6)
isocuanta $q = \sqrt{72}$

1.10 Ejercicio 10

Dada la función de utilidad

$$U(q_1, q_2) = q_1 \cdot q_2$$

de un consumidor con la restricción presupuestaria

$$2q_1 + 5q_2 = 100.$$

1. Hallar las cantidades q_1 y q_2 que maximizan la utilidad y calcular a cuánto asciende esta.
2. Graficar la curva de indiferencia de la función de utilidad dada, la recta presupuestaria y el punto en donde se maximiza la utilidad.

Solución

1. Fijar el nivel óptimo

En el óptimo se asume que la utilidad es constante:

$$q_1 \cdot q_2 = K,$$

donde K es el nivel de utilidad alcanzado en el óptimo.

2. Despejar q_1 en función de q_2

- **Desde la función de utilidad:**

$$q_1 = \frac{K}{q_2}$$

- **Desde la restricción presupuestaria:**

$$2q_1 + 5q_2 = 100 \implies q_1 = \frac{100 - 5q_2}{2}$$

3. Derivar respecto a q_2

Derivamos ambas expresiones respecto a q_2:

- **Desde la función de utilidad:**

$$\left.\frac{dq_1}{dq_2}\right|_{\text{utilidad}} = -\frac{K}{q_2^2}$$

- **Desde la restricción:**

$$\left.\frac{dq_1}{dq_2}\right|_{\text{restricción}} = -\frac{5}{2}$$

4. Igualar las derivadas

En el punto óptimo ambas pendientes deben coincidir, es decir:

$$-\frac{K}{q_2^2} = -\frac{5}{2}$$

Cancelamos el signo negativo:

$$\frac{K}{q_2^2} = \frac{5}{2},$$

de donde se obtiene:

$$K = \frac{5}{2} q_2^2$$

5. Derivar respecto a q_1 y despejar K también

Análogamente, despejamos q_2 en función de q_1:

- **Desde la función de utilidad:**

$$q_1 \cdot q_2 = K \implies q_2 = \frac{K}{q_1}$$

- **Desde la restricción presupuestaria:**

$$2q_1 + 5q_2 = 100 \implies q_2 = \frac{100 - 2q_1}{5}$$

Derivamos ambas expresiones respecto a q_1:

- **Desde la función de utilidad:**

$$\left.\frac{dq_2}{dq_1}\right|_{\text{utilidad}} = -\frac{K}{q_1^2}$$

- **Desde la restricción:**

$$\left.\frac{dq_2}{dq_1}\right|_{\text{restricción}} = -\frac{2}{5}$$

Igualamos las derivadas:

$$-\frac{K}{q_1^2} = -\frac{2}{5}$$

Cancelando el signo negativo:

$$\frac{K}{q_1^2} = \frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{2}{5}\, q_1^2$$

6. Igualación de los valores de K y obtención de la relación entre q_1 y q_2

Hemos obtenido dos expresiones para K:

$$K = \frac{5}{2}\, q_2^2 \quad \text{y} \quad K = \frac{2}{5}\, q_1^2.$$

Igualamos estas expresiones:

$$\frac{5}{2}\, q_2^2 = \frac{2}{5}\, q_1^2.$$

Multiplicamos ambos lados por 10 para simplificar:

$$25\, q_2^2 = 4\, q_1^2,$$

lo que se puede reescribir como:

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 = \frac{25}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{5}{2},$$

ya que q_1 y q_2 son cantidades positivas. De aquí obtenemos:

$$q_1 = \frac{5}{2}\, q_2.$$

7. Sustituir en la restricción y calcular los valores óptimos

Reemplazamos $q_1 = \frac{5}{2}\, q_2$ en la restricción presupuestaria:

$$2\left(\frac{5}{2}\, q_2\right) + 5q_2 = 100 \quad \Longrightarrow \quad 5q_2 + 5q_2 = 100,$$

$$10q_2 = 100 \quad \Longrightarrow \quad q_2 = 10.$$

Luego, se obtiene:

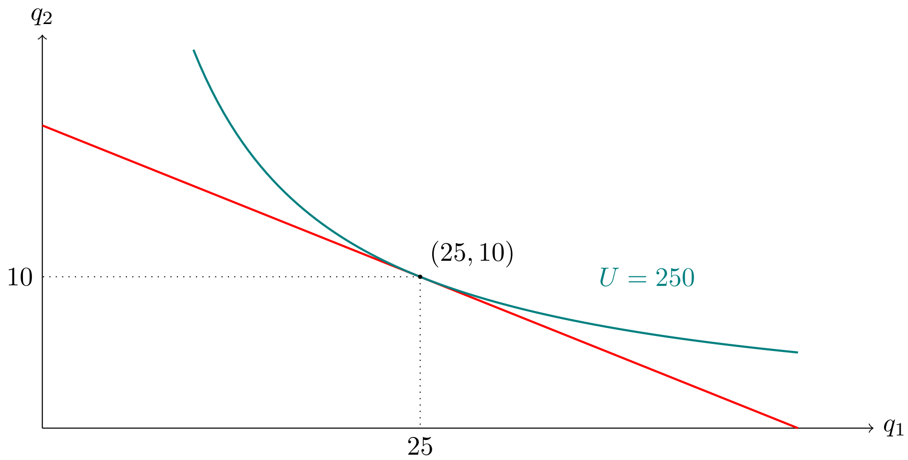
$$q_1 = \frac{5}{2}\, q_2 = \frac{5}{2} \times 10 = 25.$$

8. Valor óptimo de la utilidad

El valor máximo de la utilidad es:

$$U(25, 10) = 25 \times 10 = 250.$$

Por lo tanto, las cantidades que maximizan la utilidad son $q_1 = 25$ y $q_2 = 10$, con una utilidad máxima de 250.



1.11 Ejercicio 11

Dada una función de utilidad $U(x, y) = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$ correspondiente a un consumidor que tiene una restricción presupuestaria dada por la ecuación $2x + 5y = 150$:

a) Hallar las cantidades, x e y que maximizan la utilidad y calcular a cuánto asciende esta.

b) ¿La función de utilidad dada, cumple con tener curvas de nivel con pendiente negativa, convexas al origen y que crezcan hacia arriba y a la derecha?

Solución

Definimos un nivel constante de utilidad, denotado por $\bar{U}$, de modo que:

$$x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{2}{3}} = \bar{U}$$

1. Derivadas de la curva de utilidad

a) Despeje de x en función de y: A partir de

$$x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{2}{3}} = \bar{U}$$

aislamos x:

$$x^{\frac{1}{3}} = \frac{\bar{U}}{y^{\frac{2}{3}}} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\bar{U}^3}{y^2}$$

Derivando respecto de y (tratando $\bar{U}$ como constante):

$$\frac{dx}{dy} = -2\,\frac{\bar{U}^3}{y^3}$$

b) Despeje de y en función de x: También se puede despejar y:

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{\bar{U}}{x^{\frac{1}{3}}} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{\bar{U}^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Derivando respecto de x:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\,\frac{\bar{U}^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

2. Derivadas de la restricción presupuestaria

La restricción es:

$$2x + 5y = 150$$

a) Despeje de x en función de y:

$$2x = 150 - 5y \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{150 - 5y}{2}$$

Derivando respecto de y:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{5}{2}$$

b) Despeje de y en función de x:

$$5y = 150 - 2x \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{150 - 2x}{5}$$

Derivando respecto de x:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{5}$$

3. Igualación de las derivadas

El óptimo se alcanza cuando las pendientes de la curva de utilidad y de la recta presupuestaria son iguales. Se igualan, por ejemplo, las derivadas obtenidas de los despejes de x respecto de y:

$$-2\,\frac{\bar{U}^3}{y^3} = -\frac{5}{2}$$

Eliminando el signo negativo y despejando $\bar{U}^3$:

$$2\,\frac{\bar{U}^3}{y^3} = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad \bar{U}^3 = \frac{5}{4}\,y^3 \tag{1}$$

Por otro lado, igualando las derivadas obtenidas de y respecto de x:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\bar{U}^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{5}$$

Eliminando el signo negativo y despejando $\bar{U}^{\frac{3}{2}}$:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\bar{U}^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad \bar{U}^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{5}\,x^{\frac{3}{2}} \tag{2}$$

Elevamos (2) al cuadrado para obtener $\bar{U}^3$:

$$\bar{U}^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 x^3 = \frac{16}{25}\,x^3 \tag{3}$$

Igualamos las expresiones (1) y (3) para $\bar{U}^3$:

$$\frac{5}{4}\,y^3 = \frac{16}{25}\,x^3$$

Despejamos la relación entre x e y:

$$y^3 = \frac{16}{25}\cdot\frac{4}{5}\,x^3 = \frac{64}{125}\,x^3$$

Tomando la raíz cúbica:

$$y = \frac{4}{5}\,x$$

4. Sustitución en la restricción presupuestaria

Insertamos la relación $y = \frac{4}{5}\,x$ en la restricción:

$$2x + 5\left(\frac{4}{5}x\right) = 150$$

$$2x + 4x = 150 \quad \Longrightarrow \quad 6x = 150$$

$$\Longrightarrow \quad x^* = 25$$

Luego,

$$y^* = \frac{4}{5}\times 25 = 20$$

El valor máximo de la utilidad se obtiene al sustituir en la función original:

$$U(25, 20) = 25^{\frac{1}{3}}\,20^{\frac{2}{3}} \approx 21.54$$

Función de utilidad normal

La función tiene curvas de nivel que son continuas, convexas al origen, crecen hacia la derecha y hacia arriba, no se cortan entre sí y tienen pendiente negativa

1.12 Ejercicio 12

Aplicando la definición, calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x, y) = x^2 - 9y^2 \quad \text{en} \quad (1, -2)$

b) $f(x, y) = (x + 4)y^2 + 5 \quad \text{en} \quad (-3, 2)$

Solution

a) Sea $f(x,y) = x^2 - 9y^2$ **y el punto** $(1,-2)$.

Para la derivada parcial con respecto a x usamos la definición:

$$f_x(1,-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,-2) - f(1,-2)}{h}$$

Calculamos:

$$f(1+h,-2) = (1+h)^2 - 9(-2)^2 = (1+2h+h^2) - 36$$
$$f(1,-2) = 1^2 - 9(-2)^2 = 1 - 36 = -35$$

Entonces,

$$\frac{f(1+h,-2) - f(1,-2)}{h} = \frac{(1+2h+h^2-36) - (-35)}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

Por lo tanto,

$$f_x(1,-2) = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

Para la derivada parcial con respecto a y:

$$f_y(1,-2) = \lim_{k\to 0} \frac{f(1,-2+k) - f(1,-2)}{k}$$

Calculamos:

$$f(1,-2+k) = 1^2 - 9(-2+k)^2 = 1 - 9\left(k^2 - 4k + 4\right) = -9k^2 + 36k - 35$$
$$f(1,-2) = -35$$

Luego,

$$\frac{f(1,-2+k) - f(1,-2)}{k} = \frac{-9k^2+36k}{k} = -9k + 36$$

y tomando el límite:

$$f_y(1,-2) = \lim_{k\to 0}(-9k+36) = 36$$

b) Sea $f(x,y) = (x+4)y^2 + 5$ **y el punto** $(-3,2)$.

Para la derivada parcial con respecto a x:

$$f_x(-3,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h,2) - f(-3,2)}{h}$$

Calculamos:

$$f(-3+h,2) = ((-3+h)+4)(2)^2 + 5 = (h+1)4 + 5 = 4h + 9$$
$$f(-3,2) = ((-3+4)(2)^2 + 5) = 1\cdot 4 + 5 = 9$$

Así,

$$\frac{f(-3+h,2) - f(-3,2)}{h} = \frac{4h+9-9}{h} = 4$$

por lo que,

$$f_x(-3,2) = 4$$

Para la derivada parcial con respecto a y:

$$f_y(-3,2) = \lim_{k\to 0} \frac{f(-3,2+k) - f(-3,2)}{k}$$

Calculamos:

$$f(-3,2+k) = ((-3+4)(2+k)^2 + 5) = (1)((2+k)^2) + 5$$

donde

$$(2+k)^2 = 4 + 4k + k^2$$

Luego,

$$f(-3, 2+k) = 4 + 4k + k^2 + 5 = 9 + 4k + k^2$$

$$f(-3, 2) = 9$$

Así,

$$\frac{f(-3, 2+k) - f(-3, 2)}{k} = \frac{(9 + 4k + k^2) - 9}{k} = \frac{4k + k^2}{k} = 4 + k$$

Finalmente,

$$f_y(-3, 2) = \lim_{k \to 0} (4 + k) = 4$$

1.13 Ejercicio 13

Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Hallar, aplicando la definición, las derivadas parciales en el origen.

Solución

1. Derivada parcial respecto de x en $(0,0)$ Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,\,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - 0}{h}$$

Para $h \neq 0$,

$$f(h,0) = \frac{6\,h \cdot 0}{h^2 + 0^2} = 0$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

2. Derivada parcial respecto de y en $(0,0)$ Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,\,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - 0}{k}$$

Para $k \neq 0$,

$$f(0,k) = \frac{6 \cdot 0 \cdot k}{0^2 + k^2} = 0$$

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

1.14 Ejercicio 14

Calcular las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones, aplicando las reglas de derivación.

a) $z = 4x^2 - 7xy + 2$

b) $z = \dfrac{x + 2y}{x^2 - y}$

c) $z = (x - y)\sin(xy)$

d) $z = e^{(x^3 - y)}$

e) $z = \sqrt{\ln(3x - y)}$

f) $z = \left(\dfrac{x}{y}\right)^3 - 2^y x^2 y + e^2$

g) $z = \dfrac{3x^2 \cdot e^{xy}}{2y^2 + x}$

Solución

a)

Dada la función:

$$z = 4x^2 - 7xy + 2$$

Derivada parcial respecto a x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2) \;-\; \frac{\partial}{\partial x}(7xy) \;+\; \frac{\partial}{\partial x}(2)$$

Calculamos término a término:

$$\frac{\partial}{\partial x}(4x^2) = 8x, \quad \frac{\partial}{\partial x}(7xy) = 7y, \quad \frac{\partial}{\partial x}(2) = 0$$

Por tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x - 7y$$

Derivada parcial respecto a y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2) \;-\; \frac{\partial}{\partial y}(7xy) \;+\; \frac{\partial}{\partial y}(2)$$

Término a término:

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(7xy) = 7x, \quad \frac{\partial}{\partial y}(2) = 0$$

Por tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -7x$$

b)

Dada la función:

$$z = \frac{x + 2y}{x^2 - y}$$

Derivada parcial respecto a x: Usamos la regla del cociente:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x + 2y) \cdot (x^2 - y) - (x + 2y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y)}{(x^2 - y)^2}$$

Calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x + 2y) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) = 2x$$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x^2 - y) - (x + 2y) \cdot 2x}{(x^2 - y)^2} = \frac{x^2 - y - 2x(x + 2y)}{(x^2 - y)^2}$$

Derivada parcial respecto a y: Nuevamente, regla del cociente:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)\cdot(x^2-y) - (x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y)}{(x^2-y)^2}$$

Calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+2y) = 2, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y) = -1$$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(x^2-y)-(x+2y)(-1)}{(x^2-y)^2} = \frac{2(x^2-y)+x+2y}{(x^2-y)^2}$$

c)

Dada la función:

$$z = (x-y)\,\sin(xy)$$

Derivada parcial respecto a x: Aplicamos la regla del producto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x-y)\cdot\sin(xy) \;+\; (x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy)]$$

Calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x-y) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy)] = \cos(xy)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xy) = \cos(xy)\cdot y$$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin(xy) + (x-y)\cdot y\cdot\cos(xy)$$

Derivada parcial respecto a y: Aplicamos la regla del producto:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x-y)\cdot\sin(xy) \;+\; (x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}[\sin(xy)]$$

Calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x-y) = -1, \quad \frac{\partial}{\partial y}[\sin(xy)] = \cos(xy)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy) = \cos(xy)\cdot x$$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin(xy) + (x-y)\cdot x\cdot\cos(xy)$$

d)

Dada la función:

$$z = e^{x^3-y}$$

Derivada parcial respecto a x: Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(e^{x^3-y}\right) = e^{x^3-y}\cdot\frac{d}{dx}(x^3-y) = e^{x^3-y}\cdot 3x^2$$

Por tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2\cdot e^{x^3-y}$$

Derivada parcial respecto a y: Nuevamente, regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d}{dy}\left(e^{x^3-y}\right) = e^{x^3-y} \cdot \frac{d}{dy}(x^3 - y) = e^{x^3-y} \cdot (-1)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{x^3-y}$$

e)

Dada la función:

$$z = \sqrt{\ln(3x - y)}$$

Derivada parcial respecto a x: Aplicamos la regla de la cadena en dos niveles:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dx}[\ln(3x - y)]^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{\ln(3x - y)}} \cdot \frac{d}{dx}[\ln(3x - y)]$$

$$\frac{d}{dx}[\ln(3x - y)] = \frac{1}{3x - y} \cdot 3$$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2(3x - y)\sqrt{\ln(3x - y)}}$$

Derivada parcial respecto a y: Mismo procedimiento:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\ln(3x - y)}} \cdot \frac{d}{dy}[\ln(3x - y)]$$

$$\frac{d}{dy}[\ln(3x - y)] = \frac{1}{3x - y} \cdot (-1)$$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{2(3x - y)\sqrt{\ln(3x - y)}}$$

f)

Derivada parcial respecto a x.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 y^{-3}\right) \; - \; \frac{\partial}{\partial x}(2^y x^2 y) \; + \; \frac{\partial}{\partial x}(e^2)$$

Calculamos término a término:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 y^{-3}) = 3x^2\, y^{-3}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(2^y x^2 y) = 2^y \cdot 2x\, y = 2^{y+1}\, x\, y, \quad \frac{\partial}{\partial x}(e^2) = 0$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\,\frac{x^2}{y^3} \; - \; 2^{y+1}\, x\, y$$

Derivada parcial respecto a y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^3y^{-3}\Big) \; - \; \frac{\partial}{\partial y}(2^yx^2y) \; + \; \frac{\partial}{\partial y}(e^2)$$

De nuevo, término a término:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^{-3}) = x^3 \cdot (-3)y^{-4} = -3\,\frac{x^3}{y^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2^yx^2y) = x^2\frac{d}{dy}(2^yy) = x^2\Big(2^y\ln 2 \cdot y + 2^y\Big) = 2^y\,x^2\,(y\ln 2 + 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^2) = 0$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3\,\frac{x^3}{y^4} \; - \; 2^y\,x^2\,(y\ln 2 + 1)$$

g)

Dada la función:

$$z = \frac{3x^2 \cdot e^{xy}}{2y^2 + x}$$

Derivada parcial respecto a x: Usamos la regla del cociente:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}[3x^2e^{xy}] \cdot (2y^2 + x) \; - \; 3x^2e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(2y^2 + x)}{(2y^2 + x)^2}$$

Calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial x}[3x^2e^{xy}] = 6xe^{xy} + 3x^2ye^{xy} = 3e^{xy}(2x + x^2y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2y^2 + x) = 1$$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3e^{xy}(2x + x^2y)(2y^2 + x) - 3x^2e^{xy}}{(2y^2 + x)^2}$$

Derivada parcial respecto a y: Usamos nuevamente la regla del cociente:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}[3x^2e^{xy}] \cdot (2y^2 + x) \; - \; 3x^2e^{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(2y^2 + x)}{(2y^2 + x)^2}$$

Calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial y}[3x^2e^{xy}] = 3x^2 \cdot xe^{xy} = 3x^3e^{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2y^2 + x) = 4y$$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x^3e^{xy}(2y^2 + x) - 3x^2e^{xy} \cdot 4y}{(2y^2 + x)^2}$$

1.15 Ejercicio 15

Calcular las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{y}{x}} \quad \text{en el punto } (2,1)$$

Solución

Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}$

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(g(x,y))^{-1/2}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

Calculamos primero $\frac{\partial g}{\partial x}$. Dado que

$$g(x,y) = xy + \frac{y}{x}$$

tenemos:

- $\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = y\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-1}\right) = -y\,x^{-2} = -\frac{y}{x^2}$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y - \frac{y}{x^2}$$

Sustituyendo en la fórmula de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{y}{x}}}\left(y - \frac{y}{x^2}\right)$$

Evaluación en el punto $(2,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{5}} \quad (\approx 0.237)$$

Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial y}$

Aplicando nuevamente la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}(g(x,y))^{-1/2}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

Calculamos $\frac{\partial g}{\partial y}$ a partir de:

$$g(x,y) = xy + \frac{y}{x}$$

Para ello:

- $\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}$ (ya que x es constante respecto a y)

Por lo tanto:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x + \frac{1}{x}$$

Sustituyendo en la derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x+\frac{1}{x}}{2\sqrt{xy+\frac{y}{x}}}$$

Evaluación en el punto $(2,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{5}} \quad (\approx 0.791)$$

1.16 Ejercicio 16

Verificar si se cumple la relación de Schwarz en las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad z = x^3 \; - \; 2\,x^2\,y \; - \; 3\,y^2$$

$$\text{(b)} \quad z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\text{(c)} \quad z = e^{xy}$$

Solución

a)

Cálculo de z_x y z_{xy}

Calculamos la derivada parcial de z respecto a x

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 - 2x^2y - 3y^2\right) = 3x^2 - 4xy$$

Luego, se deriva z_x respecto a y

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 4xy) = 0 - 4x = -4x$$

Cálculo de z_y y z_{yx}

Calculamos la derivada parcial de z respecto a y

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 - 2x^2y - 3y^2\right) = 0 - 2x^2 - 6y = -2x^2 - 6y$$

Luego, se deriva z_y respecto a x

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(-2x^2 - 6y) = -4x - 0 = -4x$$

Por lo tanto, se verifica la relation de Schwarz.

b)

Recordamos que la función es

$$z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$$

y se puede escribir como

$$z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$$

Cálculo de z_x y z_{xy}

Calculamos la derivada parcial de z respecto a x:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Luego, se deriva z_x respecto a y:

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Cálculo de z_y y z_{yx}

Calculamos la derivada parcial de z respecto a y:

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Luego, se deriva z_y respecto a x:

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Por lo tanto, se verifica la relación de Schwarz, ya que

$$z_{xy} = z_{yx} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

c)

Recordamos que la función es

$$z = e^{xy}$$

y se desea verificar la relación de Schwarz, es decir, que $z_{xy} = z_{yx}$.

Cálculo de z_x y z_{xy}

Calculamos la derivada parcial de z respecto a x:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right) = e^{xy} \cdot y$$

Luego, se deriva z_x respecto a y:

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\, y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right)y + e^{xy}\frac{\partial y}{\partial y} = e^{xy} \cdot (x\, y) + e^{xy} = e^{xy}\,(xy + 1)$$

Cálculo de z_y y z_{yx}

Calculamos la derivada parcial de z respecto a y:

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right) = e^{xy} \cdot x$$

Luego, se deriva z_y respecto a x:

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\, x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right)x + e^{xy}\frac{\partial x}{\partial x} = e^{xy} \cdot (y\, x) + e^{xy} = e^{xy}\,(xy + 1)$$

Por lo tanto, se verifica la relación de Schwarz, ya que

$$z_{xy} = z_{yx} = e^{xy}(xy + 1)$$

1.17 Ejercicio 17

Dada la función

$$z(x, y, t) = e^{-t}(\sin x + \cos y)$$

demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

Solución

Sea

$$z(x,y,t) = e^{-t}(\sin x + \cos y)$$

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}[e^{-t}(\sin x + \cos y)] = e^{-t}\cos x \qquad z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-t}\cos x) = -\, e^{-t}\sin x$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}[e^{-t}(\sin x + \cos y)] = -\, e^{-t}\sin y, \qquad z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(-e^{-t}\sin y) = -\, e^{-t}\cos y$$

Por tanto,

$$z_{xx} + z_{yy} = -e^{-t}\sin x \;-\; e^{-t}\cos y = -e^{-t}(\sin x + \cos y)$$

Por otro lado,

$$z_t = \frac{\partial}{\partial t}[e^{-t}(\sin x + \cos y)] = -\, e^{-t}(\sin x + \cos y)$$

Concluimos que

$$z_{xx} + z_{yy} \;=\; -e^{-t}(\sin x + \cos y) \;=\; z_t$$

1.18 Ejercicio 18

Determinar la ecuación del plano tangente a las siguientes superficies en los puntos indicados:

1. $z = 2x^2y + y^2 - x + 1$, en $P_0 = (1,\ 3,\ 15)$
2. $z = x^2 + y^2$, en $P_0 = (2,\ -1,\ z_0)$

Solución

Plano tangente a $z = 2x^2y + y^2 - x + 1$ en $P_0 = (1, 3, 15)$

Calculamos las derivadas parciales:

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + y^2 - x + 1) = 4xy - 1, \qquad z_y = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + y^2 - x + 1) = 2x^2 + 2y$$

En $P_0 = (1, 3)$:

$$z_x(1,3) = 4 \cdot 1 \cdot 3 - 1 = 11, \quad z_y(1,3) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3 = 8$$

La ecuación del plano tangente es

$$z - z_0 = z_x(1,3)\,(x-1) \; + \; z_y(1,3)\,(y-3)$$

esto es

$$z - 15 = 11\,(x-1) + 8\,(y-3)$$

o bien

$$z = 11x + 8y - 20.$$

Plano tangente a $z = x^2 + y^2$ en $P_0 = (2, -1, z_0)$

En el punto

$$z_0 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

por lo que $P_0 = (2, -1, 5)$.

Las derivadas parciales son

$$z_x = 2x, \quad z_y = 2y$$

y en P_0:

$$z_x(2,-1) = 4, \qquad z_y(2,-1) = -2$$

La ecuación del plano tangente es

$$z - z_0 = z_x(2,-1)\,(x-2) + z_y(2,-1)\,(y+1)$$

es decir,

$$z - 5 = 4(x-2) - 2(y+1) \implies z = 4x - 2y - 5$$

1.19 Ejercicio 19

a) Dada la función $z = f(x,y) = x^3 - xy + y^2$, calcular dz y Δz en el punto $P = (1,2)$, considerando

$$\Delta x = -0{,}2 \quad \text{y} \quad \Delta y = 0{,}1$$

b) Dada la función $z = f(x,y) = x^2 y - 3y$, calcular dz y Δz en el punto $P = (4,3)$, considerando

$$\Delta x = -0{,}01 \quad \text{y} \quad \Delta y = 0{,}02$$

c) Dada la función del ejercicio $z = x^2 + y^2$ calcular el valor aproximado de $f(5.12, 6.85)$ aplicando diferencial.

Solución

Solución del inciso (a)

Dada la función

$$f(x,y) = x^3 - xy + y^2$$

El diferencial de z está dado por:

$$dz = f_x(1,2)\,\Delta x + f_y(1,2)\,\Delta y$$

Calculamos primero sus derivadas parciales:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$$

Evaluando en el punto $P = (1,2)$:

$$f_x(1,2) = 3(1)^2 - 2 = 3 - 2 = 1 \quad f_y(1,2) = -1 + 2(2) = -1 + 4 = 3$$

Dado que se tienen $\Delta x = -0{,}2$ y $\Delta y = 0{,}1$, el diferencial dz se obtiene mediante

$$dz = f_x(1,2)\,\Delta x + f_y(1,2)\,\Delta y = 1 \cdot (-0{,}2) + 3 \cdot (0{,}1) = -0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}1$$

El cambio real en z, denotado por Δz, se define como:

$$\Delta z = f(1 + \Delta x,\, 2 + \Delta y) - f(1,2)$$

Calculamos $f(1,2)$:

$$f(1,2) = 1^3 - (1)(2) + 2^2 = 1 - 2 + 4 = 3$$

Luego, evaluamos la función en el punto $(1 + \Delta x,\, 2 + \Delta y) = (1 - 0{,}2,\, 2 + 0{,}1) = (0{,}8,\, 2{,}1)$:

$$f(0{,}8,\, 2{,}1) = (0{,}8)^3 - (0{,}8)(2{,}1) + (2{,}1)^2 = 0{,}512 - 1{,}68 + 4{,}41 = 3{,}242$$

Por lo tanto, el cambio real en z es:

$$\Delta z = f(0{,}8,\, 2{,}1) - f(1,2) = 3{,}242 - 3 = 0{,}242$$

Solución del inciso (b)

Dada la función:

$$f(x,y) = x^2 y - 3y$$

Calculamos primero las derivadas parciales:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3$$

Evaluamos en el punto $P = (4,3)$:

$$f_x(4,3) = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \quad f_y(4,3) = 4^2 - 3 = 16 - 3 = 13$$

Con $\Delta x = -0{,}01$ y $\Delta y = 0{,}02$, el diferencial dz es:

$$dz = f_x(4,3) \cdot \Delta x + f_y(4,3) \cdot \Delta y = 24 \cdot (-0{,}01) + 13 \cdot (0{,}02) = -0{,}24 + 0{,}26 = 0{,}02$$

Ahora calculamos el cambio real Δz, usando:

$$\Delta z = f(4 + \Delta x,\, 3 + \Delta y) - f(4,3)$$

Primero, evaluamos $f(4,3)$:

$$f(4,3) = 4^2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 16 \cdot 3 - 9 = 48 - 9 = 39$$

Luego, evaluamos la función en el punto $(4+\Delta x,\, 3+\Delta y) = (4-0{,}01,\, 3+0{,}02) = (3{,}99,\, 3{,}02)$:

$$\begin{aligned} f(3{,}99,\, 3{,}02) &= (3{,}99)^2 \cdot (3{,}02) - 3 \cdot (3{,}02) \\ &= (15{,}9201) \cdot (3{,}02) - 9{,}06 \\ &= 48{,}078702 - 9{,}06 \\ &= 39{,}018702 \end{aligned}$$

Finalmente, el cambio real en z es:

$$\Delta z = f(3{,}99,\, 3{,}02) - f(4,3) = 39{,}018702 - 39 = 0{,}018702$$

Solución del inciso (c)

Primero proponemos un punto cercano $(5,7)$. Ahora calculamos la diferencia entre el punto que tenemos y el original: $(5.12, 6.85) - (5,7) = (0.12, -0.15)$. Además calculamos cuánto vale la función en el punto propuesto $f(5,7) = 25 + 49 = 74$ Por último calculamos el diferencial primero de la función:

$$dz = 2xdx + 2ydy$$

Insertamos en dx y dy las diferencias entre nuestro punto y el punto original, mientras que valuamos las derivadas en el punto que elegimos:

$$2 * 5(0.12) + 2 * 7(-0.15) = 1.2 - 2.1 = -0.9$$

Y con esta función le restamos la variación que es -0.9.

$$f(5.12, 6.85) \approx 74 - 0.9 = 73.1$$

1.20 Ejercicio 20

Calcular el diferencial total de las siguientes funciones

1. $z = f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + xy^2$
2. $z = f(x, y) = y\ \ln(x^2 + y)$
3. $w = f(x, y, z) = x^3y\,z^2 - 2z + 5y$

Solución

Diferencial total de $z = x^3y + x^2y^2 + xy^2$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^2 + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + 2xy$$

Por lo tanto, el diferencial total es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = (3x^2y + 2xy^2 + y^2)\, dx + (x^3 + 2x^2y + 2xy)\, dy$$

Diferencial total de $z = y\,\ln(x^2 + y)$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2x = \frac{2xy}{x^2 + y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 + y) + y \cdot \frac{1}{x^2 + y} = \ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}$$

Por lo tanto, el diferencial total es

$$dz = \frac{2xy}{x^2 + y}\, dx + \left(\ln(x^2 + y) + \frac{y}{x^2 + y}\right) dy$$

Diferencial total de $w = x^3y\,z^2 - 2z + 5y$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2y\,z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^3z^2 + 5$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2x^3y\,z - 2$$

Por lo tanto, el diferencial total es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\, dx + \frac{\partial w}{\partial y}\, dy + \frac{\partial w}{\partial z}\, dz = 3x^2y\,z^2\, dx + (x^3z^2 + 5)\, dy + (2x^3y\,z - 2)\, dz$$

1.21 Ejercicio 21

Calcular d^2z si

$$z = e^{-x^2-y^2}$$

Solución

Primero hallamos el diferencial total dz:

$$z_x = -2x\, e^{-x^2-y^2}$$

$$z_y = -2y\, e^{-x^2-y^2}$$

$$dz = z_x\, dx + z_y\, dy = -2x\, e^{-x^2-y^2}\, dx \;-\; 2y\, e^{-x^2-y^2}\, dy$$

A continuación calculamos las segundas derivadas parciales:

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(-2x\, e^{-x^2-y^2}) = (4x^2-2)e^{-x^2-y^2}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(-2y\, e^{-x^2-y^2}) = (4y^2-2)e^{-x^2-y^2}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(-2x\, e^{-x^2-y^2}) = 4xy\, e^{-x^2-y^2}$$

Finalmente, el segundo diferencial es

$$d^2z = z_{xx}\, dx^2 + 2\, z_{xy}\, dx\, dy + z_{yy}\, dy^2 = e^{-x^2-y^2}\left[(4x^2-2)\, dx^2 + 8xy\, dx\, dy + (4y^2-2)\, dy^2\right]$$

1.22 Ejercicio 22

En la fabricación de cierta mezcla de combustible intervienen cantidades x, y, z de los productos X, Y, Z respectivamente. Calcular los costos medios y marginales si la función de costo total está dada por

$$C = 40x + 10yz + 5z^2x$$

Solución

1. Costos Medios

En este caso, se definen tres costos medios, uno para cada insumo:

- **Costo Medio respecto a x:**

$$CM_x = \frac{C(x,y,z)}{x} = \frac{40x + 10yz + 5z^2x}{x} = 40 + \frac{10yz}{x} + 5z^2$$

- **Costo Medio respecto a y:**

$$CM_y = \frac{C(x,y,z)}{y} = \frac{40x + 10yz + 5z^2x}{y} = \frac{40x}{y} + 10z + \frac{5z^2x}{y}$$

- **Costo Medio respecto a z:**

$$CM_z = \frac{C(x,y,z)}{z} = \frac{40x + 10yz + 5z^2x}{z} = \frac{40x}{z} + 10y + 5zx$$

2. Costos Marginales

Los costos marginales se obtienen derivando parcialmente la función de costo total respecto a cada variable:

Marginal respecto a x

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(40x + 10yz + 5z^2x\right) = 40 + 5z^2$$

Marginal respecto a y

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(40x + 10yz + 5z^2x\right) = 10z$$

Marginal respecto a z

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(40x + 10yz + 5z^2x\right) = 10y + 10zx$$

1.23 Ejercicio 23

Dadas las funciones de demanda de dos artículos X_1 y X_2, clasificarlos entre sí:

a) $D_1 = 20 - 2p_1 - p_2 \qquad D_2 = 9 - p_1 - 2p_2$

b) $D_1 = 5\,e^{p_1 - p_2} \qquad D_2 = 3\,e^{-p_1 + p_2}$

c) $D_1 = \dfrac{4}{p_1^2\,p_2} \qquad D_2 = \dfrac{16}{p_2^2\,p_1}$

Solución

Clasificación de los bienes (apartado a)

Dadas las funciones de demanda

$$D_1(p_1, p_2) = 20 - 2p_1 - p_2 \qquad D_2(p_1, p_2) = 9 - p_1 - 2p_2$$

calculamos las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = -1 < 0$$
$$\frac{\partial D_2}{\partial p_1} = -1 < 0$$

Como ambas derivadas cruzadas son negativas, un aumento en el precio de un bien reduce la demanda del otro, por lo que los bienes son *complementarios*.

Clasificación de los bienes (apartado b)

Dadas las funciones de demanda

$$D_1(p_1, p_2) = 5\, e^{\,p_1 - p_2} \qquad D_2(p_1, p_2) = 3\, e^{-p_1 + p_2}$$

calculamos las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 5\, \frac{\partial}{\partial p_2}(e^{p_1 - p_2}) = -5\, e^{p_1 - p_2} < 0$$
$$\frac{\partial D_2}{\partial p_1} = 3\, \frac{\partial}{\partial p_1}(e^{-p_1 + p_2}) = -3\, e^{-p_1 + p_2} < 0$$

Como ambas derivadas cruzadas son negativas, un aumento en el precio de uno de los bienes reduce la demanda del otro. Por lo tanto, los bienes 1 y 2 son *complementarios*.

Clasificación de los bienes (apartado c)

Dadas las funciones de demanda

$$D_1(p_1, p_2) = \frac{4}{p_1^2\, p_2} \qquad D_2(p_1, p_2) = \frac{16}{p_2^2\, p_1}$$

calculamos las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 4\, \frac{\partial}{\partial p_2}(p_1^{-2} p_2^{-1}) = 4\, p_1^{-2}\, (-1) p_2^{-2} = -\frac{4}{p_1^2\, p_2^2} < 0$$
$$\frac{\partial D_2}{\partial p_1} = 16\, \frac{\partial}{\partial p_1}(p_2^{-2} p_1^{-1}) = 16\, p_2^{-2}\, (-1) p_1^{-2} = -\frac{16}{p_1^2\, p_2^2} < 0$$

Como ambas derivadas cruzadas son negativas, un aumento en el precio de un bien reduce la demanda del otro. Por lo tanto, los bienes son *complementarios*.

1.24 Ejercicio 24

Si la demanda de un artículo es

$$D_1(p_1, p_2, p_3) = 5000 \; - \; 10\,p_1 \; + \; 20\,p_2 \; - \; p_2\,p_3$$

donde p_1 es el precio del bien y p_2, p_3 son los precios de otros dos bienes, se pide:

1. Calcular las demandas marginales $\dfrac{\partial D_1}{\partial p_i}$ y las elasticidades parciales

$$\varepsilon_{p_i} = \frac{\partial D_1}{\partial p_i}\,\frac{p_i}{D_1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

   para $p_1 = 8,\; p_2 = 12,\; p_3 = 14$

2. Dar la interpretación económica del resultado obtenido

3. Clasificar el bien 1 según su elasticidad precio

Solución

a) Demandas marginales y elasticidades parciales

La demanda es

$$D_1(p_1, p_2, p_3) \;=\; 5000 \;-\; 10\,p_1 \;+\; 20\,p_2 \;-\; p_2 p_3$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = -10$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 20 - p_3$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_3} = -p_2$$

Evaluando en $(p_1, p_2, p_3) = (8, 12, 14)$ obtenemos

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = -10$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 20 - 14 = 6$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_3} = -12$$

La demanda en ese punto es

$$D_1(8, 12, 14) = 5000 - 10 \cdot 8 + 20 \cdot 12 - 12 \cdot 14 = 4992$$

Las elasticidades parciales se definen como

$$\varepsilon_{p_i} = \frac{\partial D_1}{\partial p_i}\,\frac{p_i}{D_1}$$

Por tanto,

$$\varepsilon_{p_1} = -10\,\frac{8}{4992} = -\frac{80}{4992} \approx -0.0160$$

$$\varepsilon_{p_2} = 6\,\frac{12}{4992} = \frac{72}{4992} = \frac{3}{208} \approx 0.0144$$

$$\varepsilon_{p_3} = -12\,\frac{14}{4992} = -\frac{168}{4992} = -\frac{7}{208} \approx -0.0337$$

b) Interpretación económica

En el punto $(p_1, p_2, p_3) = (8, 12, 14)$ obtuvimos las elasticidades parciales

$$\varepsilon_{p_1} \approx -0.0160 \quad \varepsilon_{p_2} \approx +0.0144 \quad \varepsilon_{p_3} \approx -0.0337$$

- $\varepsilon_{p_1} < 0$ y $|\varepsilon_{p_1}| < 1$: un aumento del 1 % en el precio propio p_1 reduce la demanda de D_1 en apenas 0.016 %, por lo que la demanda es *inelástica* y el bien es *ordinario*.
- $\varepsilon_{p_2} > 0$: un aumento del 1 % en p_2 incrementa la demanda de D_1 en 0.0144 %, indicando que los bienes 1 y 2 son *sustitutos*.
- $\varepsilon_{p_3} < 0$: un aumento del 1 % en p_3 reduce la demanda de D_1 en 0.0337 %, lo que muestra que los bienes 1 y 3 son *complementarios*.
- Dado que todas las elasticidades tienen valor absoluto menor que 1, la demanda de D_1 es globalmente *inelástica* frente a cambios en cualquiera de los tres precios.

c) Clasificación del bien 1 según elasticidad precio

La elasticidad-precio propia de la demanda es

$$\varepsilon_{p_1} \approx -0.0160$$

con $|\varepsilon_{p_1}| < 1$. Por tanto:

- La demanda de D_1 es *inelástica* respecto a su propio precio.
- Como $\varepsilon_{p_1} < 0$, al aumentar p_1 la demanda disminuye, por lo que el bien 1 es un *bien ordinario*.

1.25 Ejercicio 25

Dada la función de demanda de un artículo

$$D_1(p_1, p_2) = 1000 \; - \; 3p_1 \; + \; 5p_2$$

se pide:

1. Hallar las elasticidades parciales e interpretar el resultado para $p_1 = 100$ y $p_2 = 60$.
2. Clasificar el bien.
3. Clasificar la demanda en función de los precios.

Solución

Elasticidades parciales de $D_1(p_1, p_2) = 1000 - 3p_1 + 5p_2$ en $(p_1, p_2) = (100, 60)$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = -3$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 5$$

La demanda en ese punto es

$$D_1(100, 60) = 1000 - 3 \cdot 100 + 5 \cdot 60 = 1000 - 300 + 300 = 1000$$

Entonces las elasticidades parciales son

$$\varepsilon_{p_1} = \frac{\partial D_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{D_1} = -3 \frac{100}{1000} = -0.3$$

$$\varepsilon_{p_2} = \frac{\partial D_1}{\partial p_2} \frac{p_2}{D_1} = 5 \frac{60}{1000} = 0.3$$

Interpretación

- $\varepsilon_{p_1} = -0.3$: La demanda es inelástica respecto a su propio precio (una suba del 1 % en p_1 reduce D_1 en 0.3 %)
- $\varepsilon_{p_2} = +0.3$: Un aumento del 1 % en p_2 incrementa D_1 en 0.3 %, señal de que los bienes 1 y 2 son sustitutos

Clasificación de la demanda en función de los precios

Recordando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = -3 < 0$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 5 > 0$$

se concluye que

$$D_1 \text{ es decreciente en } p_1$$

$$D_1 \text{ es creciente en } p_2$$

Es decir, la demanda de D_1 responde negativamente a su propio precio (bien ordinario) y positivamente al precio del bien 2, lo que confirma que son bienes sustitutos.

1.26 Ejercicio 26

Si para un determinado consumidor la función de demanda de un bien en el mercado está dada por

$$D(p, I) = I^{0.6}\, p^{-0.2}$$

donde p es el precio unitario del bien e I es la renta de ese consumidor.

Se pide:

1. Hallar las demandas marginales.
2. Clasificar el bien económicamente y analizar si responde al comportamiento de la mayoría de los bienes.

Solución

Demandas marginales

Dada

$$D(p, I) = I^{0.6}\, p^{-0.2}$$

calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial D}{\partial p} = I^{0.6}\, \frac{d}{dp}(p^{-0.2}) = I^{0.6}\,(-0.2)\, p^{-1.2} = -0.2\, I^{0.6}\, p^{-1.2}$$

$$\frac{\partial D}{\partial I} = p^{-0.2}\, \frac{d}{dI}(I^{0.6}) = p^{-0.2}\,(0.6)\, I^{-0.4} = 0.6\, I^{-0.4}\, p^{-0.2}$$

Clasificación del bien y comparación con los bienes típicos

Recordemos las derivadas marginales:

$$\frac{\partial D}{\partial p} = -0.2\, I^{0.6} p^{-1.2} \qquad \frac{\partial D}{\partial I} = 0.6\, I^{-0.4} p^{-0.2}$$

Elasticidades

$$\varepsilon_p = \frac{\partial D}{\partial p}\,\frac{p}{D} = -0.2\,\frac{I^{0.6}p^{-1.2}\,p}{I^{0.6}p^{-0.2}} = -0.2$$

$$\varepsilon_I = \frac{\partial D}{\partial I}\,\frac{I}{D} = 0.6\,\frac{I^{-0.4}p^{-0.2}\,I}{I^{0.6}p^{-0.2}} = 0.6$$

Interpretación y clasificación

- $\varepsilon_p = -0.2 < 0$: la demanda disminuye al subir el precio, es un bien **ordinario**, y $|\varepsilon_p| < 1$ indica que es *inelástica* al precio
- $\varepsilon_I = 0.6 > 0$: la demanda aumenta con la renta, por lo que el bien es **normal**. Además, como $\varepsilon_I < 1$, es un bien de primera *necesidad*

Este comportamiento—demanda inelástica al precio y positiva pero menos que proporcional con la renta—coincide con el de muchos bienes de primera necesidad en la economía

1.27 Ejercicio 27

En un determinado país la demanda del té está dada por

$$q_1 = p_1^{-1.2}\, p_2^{0.8}$$

donde q_1 es la cantidad demandada de té, p_1 es su precio y p_2 es el precio de la yerba mate.

Se pide:

1. Determinar las demandas marginales y clasificar al té como tipo de bien.
2. Establecer la relación que existe entre los dos artículos.

Solución

Demandas marginales y clasificación

La demanda está dada por

$$q_1(p_1, p_2) = p_1^{-1.2}\, p_2^{0.8}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -1.2\, p_1^{-2.2}\, p_2^{0.8} \qquad \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 0.8\, p_1^{-1.2}\, p_2^{-0.2}$$

Observamos que $\dfrac{\partial q_1}{\partial p_1} < 0$, luego al subir el precio propio p_1 la demanda de té disminuye. Por tanto el té es un *bien ordinario* (no es un bien Giffen).

Además, la elasticidad-precio propia es

$$\varepsilon_{p_1} = \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{q_1} = -1.2$$

con $|\varepsilon_{p_1}| > 1$, lo que indica que la demanda de té es *elástica* respecto a su precio.

Relación entre té y yerba mate

La derivada cruzada es

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 0.8\, p_1^{-1.2}\, p_2^{-0.2} > 0$$

La elasticidad-precio cruzada es

$$\varepsilon_{p_2} = \frac{\partial q_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{q_1} = 0.8 > 0$$

Como $\frac{\partial q_1}{\partial p_2} > 0$ y $\varepsilon_{p_2} > 0$, un incremento en el precio de la yerba mate (p_2) provoca un aumento de la demanda de té (q_1). Por lo tanto, té y yerba mate son bienes *sustitutos*.

1.28 Ejercicio 28

Dadas las funciones de demanda de dos bienes X_1 y X_2:

$$D_1 = \frac{10}{p_1} + p_2^2, \qquad D_2 = 100 + 6\,p_1 - 4\,p_2$$

(a) Halle el ingreso marginal respecto de cada precio si $p_1 = 5$ y $p_2 = 2$

(b) Clasifique los bienes

Solución

Definición de la función de ingreso La función de ingreso total es

$$R(p_1, p_2) = p_1\, D_1(p_1, p_2) + p_2\, D_2(p_1, p_2) = p_1 \left(\frac{10}{p_1} + p_2^2 \right) + p_2\, (100 + 6p_1 - 4p_2)$$

Simplificando,

$$R(p_1, p_2) = 10 + p_1\, p_2^2 + 100\, p_2 + 6\, p_1\, p_2 - 4\, p_2^2$$

(a) Ingreso marginal respecto a cada precio Calculamos las derivadas parciales de R:

$$\frac{\partial R}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1} \left(10 + p_1 p_2^2 + 100 p_2 + 6 p_1 p_2 - 4 p_2^2\right) = p_2^2 + 6 p_2$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_2} = \frac{\partial}{\partial p_2} \left(10 + p_1 p_2^2 + 100 p_2 + 6 p_1 p_2 - 4 p_2^2\right) = 2 p_1 p_2 + 100 + 6 p_1 - 8 p_2$$

Evaluamos en $p_1 = 5$, $p_2 = 2$:

$$\left.\frac{\partial R}{\partial p_1}\right|_{(5,2)} = 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 + 12 = 16$$

$$\left.\frac{\partial R}{\partial p_2}\right|_{(5,2)} = 2 \cdot 5 \cdot 2 + 100 + 6 \cdot 5 - 8 \cdot 2 = 20 + 100 + 30 - 16 = 134$$

(b) Clasificación de los bienes Un bien i es *ordinario* si $\partial D_i / \partial p_i < 0$. Calculamos:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = \frac{d}{d p_1} \left(\frac{10}{p_1} + p_2^2 \right) = -\frac{10}{p_1^2} < 0$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial p_2} = \frac{d}{d p_2} (100 + 6 p_1 - 4 p_2) = -4 < 0$$

Por tanto, ambos bienes son ordinarios

1.29 Ejercicio 29

Sean q_1 y q_2 las cantidades demandadas de manteca y margarina respectivamente, y sean p_1 y p_2 sus precios unitarios. Si las funciones de demanda que vinculan dichos precios para una población determinada son

$$q_1 = p_1^{-1.2}\, p_2^{0.2} \qquad q_2 = p_1^{0.3}\, p_2^{-0.4}$$

se pide:

1. Hallar las elasticidades parciales directas y cruzadas de ambos bienes. Interpretar el resultado.
2. Clasificar el bien manteca y el bien margarina.
3. Clasificar los bienes entre sí.

Solución

Elasticidades parciales

Dadas

$$q_1(p_1, p_2) = p_1^{-1.2}\, p_2^{0.2} \qquad q_2(p_1, p_2) = p_1^{0.3}\, p_2^{-0.4}$$

calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -1.2\, p_1^{-2.2}\, p_2^{0.2} \qquad \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 0.2\, p_1^{-1.2}\, p_2^{-0.8}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = 0.3\, p_1^{-0.7}\, p_2^{-0.4} \qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -0.4\, p_1^{0.3}\, p_2^{-1.4}$$

Las elasticidades se obtienen multiplicando cada derivada parcial por p_i/q_j:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{q_1} = -1.2 \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\partial q_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{q_1} = 0.2$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial q_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{q_2} = 0.3 \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial q_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{q_2} = -0.4$$

Interpretación

- $\varepsilon_{11} = -1.2$ con $|\varepsilon_{11}| > 1$: la demanda de manteca es *elástica* a su propio precio
- $\varepsilon_{22} = -0.4$ con $|\varepsilon_{22}| < 1$: la demanda de margarina es *inelástica* a su propio precio
- $\varepsilon_{12} = 0.2$ y $\varepsilon_{21} = 0.3$: aumentos en el precio de uno de los bienes incrementan la demanda del otro, por lo que manteca y margarina son *sustitutos*

1.30 Ejercicio 30

Sean q_1 y q_2 las cantidades demandadas de tornillos y tuercas respectivamente, y p_1 y p_2 sus precios unitarios. Si las funciones de demanda que vinculan dichos precios para una determinada población son

$$q_1 = \frac{8}{p_1\, p_2} \qquad q_2 = \frac{12}{p_1\, p_2}$$

se pide:

1. Hallar las elasticidades parciales directas y cruzadas de ambos bienes. Interpretar económicamente el resultado.
2. Hallar las demandas marginales directas para $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$. Interpretar económicamente.
3. ¿La clasificación de los artículos depende de los valores de los precios p_1 y p_2?

Solución

Elasticidades parciales de q_1 y q_2

Dadas

$$q_1(p_1, p_2) = \frac{8}{p_1 p_2} \qquad q_2(p_1, p_2) = \frac{12}{p_1 p_2}$$

calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{8}{p_1^2 p_2} \qquad \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = -\frac{8}{p_1 p_2^2}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = -\frac{12}{p_1^2 p_2} \qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -\frac{12}{p_1 p_2^2}$$

Las elasticidades se definen como $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{q_i}$. Para q_1:

$$\varepsilon_{11} = \left(-\frac{8}{p_1^2 p_2}\right) \frac{p_1}{8/(p_1 p_2)} = -1 \qquad \varepsilon_{12} = \left(-\frac{8}{p_1 p_2^2}\right) \frac{p_2}{8/(p_1 p_2)} = -1$$

Para q_2:

$$\varepsilon_{21} = \left(-\frac{12}{p_1^2 p_2}\right) \frac{p_1}{12/(p_1 p_2)} = -1 \qquad \varepsilon_{22} = \left(-\frac{12}{p_1 p_2^2}\right) \frac{p_2}{12/(p_1 p_2)} = -1$$

Interpretación económica

- $\varepsilon_{11} = -1$ y $\varepsilon_{22} = -1$: cada bien es unitariamente elástico a su propio precio (un aumento del 1 % en p_i reduce q_i en 1 %)
- $\varepsilon_{12} = -1$ y $\varepsilon_{21} = -1$: un aumento del 1 % en el precio de un bien reduce la demanda del otro en 1 %, indicando que son bienes complementarios

Demandas marginales directas en $(p_1, p_2) = (2, 3)$

A partir de

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{8}{p_1^2 p_2}, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -\frac{12}{p_1 p_2^2},$$

evaluamos en $p_1 = 2,\ p_2 = 3$:

$$\left.\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right|_{(2,3)} = -\frac{8}{(2)^2 \cdot 3} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \approx -0.6667,$$

$$\left.\frac{\partial q_2}{\partial p_2}\right|_{(2,3)} = -\frac{12}{2 \cdot (3)^2} = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3} \approx -0.6667.$$

Es decir, un incremento marginal de 1 u.m. en el precio propio reduce la cantidad demandada de cada bien en aproximadamente 0.667 unidades (manteniendo fijo el otro precio).

1.31 Ejercicio 31

Sea la función de producción $q = 6\,a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, donde q es la cantidad producida al emplear cantidades a y b de dos insumos A y B.

Si generalmente se trabaja con 64 unidades de A y 8 de B, ¿qué variación aproximada debe producirse en la cantidad del insumo B si se aumenta la cantidad del insumo A en 1 unidad para que el producto permanezca constante (es decir, $\Delta q = 0$)?

Solución

Sea la función de producción

$$q = 6\,a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$$

donde q es la cantidad producida y a y b son las cantidades de los insumos A y B, respectivamente

Para que la producción se mantenga constante ($dq = 0$) ante cambios en a y b, se cumple:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial a}\,da + \frac{\partial q}{\partial b}\,db = 0$$

Calculamos las derivadas parciales:

La derivada parcial respecto a a es

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 6 \cdot \frac{2}{3} a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} = 4\,a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}$$

y respecto a b

$$\frac{\partial q}{\partial b} = 6 \cdot \frac{1}{3} a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{2}{3}} = 2\,a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{2}{3}}$$

Con $da = 1$ y $dq = 0$, se tiene:

$$0 = 4\,a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} \cdot 1 + 2\,a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{2}{3}}\,db$$

Despejamos db:

$$2\,a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{2}{3}}\,db = -4\,a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}$$

$$db = -\frac{4\,a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}{2\,a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{2}{3}}}$$

Simplificando:

$$db = -2\,\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{2}{3}}} = -2\,\frac{b}{a}$$

Evaluamos en $a = 64$ y $b = 8$:

$$db = -2\,\frac{8}{64} = -2\,\frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$$

Para que la producción se mantenga constante al aumentar a en 1 unidad, la cantidad del insumo B debe disminuir aproximadamente en $\frac{1}{4}$ unidades

Observación sobre el valor exacto

Si en vez de un diferencial usamos la ecuación exacta

$$q(64 + 1,\ 8 + \Delta b) = q(64, 8)$$

se resuelve

$$6\,(65)^{\frac{2}{3}}\,(8 + \Delta b)^{\frac{1}{3}} = 6\,(64)^{\frac{2}{3}}\,(8)^{\frac{1}{3}}$$

Despejando Δb:

$$\Delta b \approx -0.244$$

Este valor (≈ -0.24) difiere ligeramente de -0.25 porque la fórmula del diferencial es un aproximado lineal (válido para cambios Δa muy pequeños)

1.32 Ejercicio 32

Dada $U = 5x_1x_2$, calcular la TMS(x_2/x_1) y TMS(x_1/x_2) en el punto $P_0 = (2, 5)$.

Solución

Dada

$$U(x_1, x_2) = 5\,x_1 x_2$$

sus utilidades marginales son

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = 5\,x_2 \qquad MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 5\,x_1$$

TMS(x_2/x_1)**:** Es la relación $\frac{MU_1}{MU_2}$:

$$\text{TMS}(x_2/x_1) = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{5\,x_2}{5\,x_1} = \frac{x_2}{x_1}$$

En el punto $P_0 = (2, 5)$:

$$\text{TMS}(x_2/x_1)|_{(2,5)} = \frac{5}{2} = 2.5$$

TMS(x_1/x_2)**:** Análogamente,

$$\text{TMS}(x_1/x_2) = \frac{MU_2}{MU_1} = \frac{5\,x_1}{5\,x_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

y en $P_0 = (2, 5)$:

$$\text{TMS}(x_1/x_2)|_{(2,5)} = \frac{2}{5} = 0.4$$

En el punto $P_0 = (2, 5)$:

- $\text{TMS}(x_2/x_1) = 2.5$ Indica que el consumidor está dispuesto a ceder 2.5 unidades de x_2 para obtener una unidad adicional de x_1 sin variar su utilidad
- $\text{TMS}(x_1/x_2) = 0.4$ Indica que el consumidor está dispuesto a ceder 0.4 unidades de x_1 para obtener una unidad adicional de x_2 sin variar su utilidad

1.33 Ejercicio 33

Dada

$$P(a,b) = 20 - a^2 + 7a \; - \; b^2 + 8b$$

calculamos las productividades marginales:

$$P_a = \frac{\partial P}{\partial a} = -2a + 7 \qquad P_b = \frac{\partial P}{\partial b} = -2b + 8$$

En el punto $P_0 = (1,2)$:

$$P_a(1,2) = -2 \cdot 1 + 7 = 5 \qquad P_b(1,2) = -2 \cdot 2 + 8 = 4$$

TST(B/A) Es la relación $\frac{P_a}{P_b}$:

$$\text{TST}(B/A) = \frac{P_a}{P_b} = \frac{5}{4} = 1.25$$

TST(A/B) Es la recíproca, $\frac{P_b}{P_a}$:

$$\text{TST}(A/B) = \frac{P_b}{P_a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Interpretación económica En el punto $(a,b) = (1,2)$:

- $\text{TST}(B/A) = 1.25$ Significa que el productor está dispuesto a reducir la cantidad de b en 1.25 unidades para incrementar a en una unidad, manteniendo constante el nivel de producción
- $\text{TST}(A/B) = 0.8$ Indica que, de forma recíproca, el productor podría reducir a en 0.8 unidades para incrementar b en una unidad sin cambiar la producción

1.34 Ejercicio 34

Considere la función: $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$

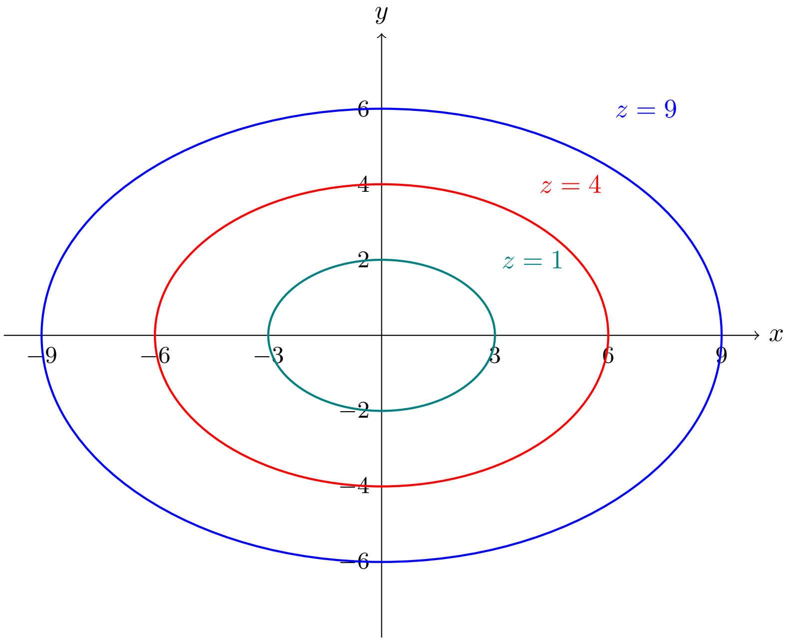
1. Graficar para $z = 1$, $z = 4$ y $z = 9$
2. Si esta fuera una función de utilidad que depende de los bienes x, y. ¿Las curvas de indiferencia cumplen con ser convexas al origen, tener pendiente negativa y crecer hacia arriba a la derecha?

Solución

$$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$$

Las curvas de nivel para $z = 1$, $z = 4$ y $z = 9$ son:

- Para $z = 1$:
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$
Es una elipse con semiejes 3 (en x) y 2 (en y)
- Para $z = 4$:
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$
Es una elipse con semiejes 6 y 4
- Para $z = 9$:
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 9 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$
Es una elipse con semiejes 9 y 6



Interpretación en términos de utilidad:
Si interpretamos z como una función de utilidad dependiente de los bienes x e y, las curvas de indiferencia son las elipses mostradas del primer cuadrante. **Estas no cumplen con la convexidad hacia el origen**

1.35 Ejercicio 35

Suponga que un consumidor busca maximizar su utilidad que está dada por la siguiente función: $u = x^{\alpha}y^2$ Donde $\alpha > 0$. El precio de x es 2 y el precio de y es 4. El presupuesto disponible es 100.

1. Escriba la restricción de este problema de optimización
2. Obtenga la solución de x^* e y^*. ¿Qué significan estos valores?
3. Encuentre el valor de α tal que el $x^* = 40$

Solución

La función de utilidad es

$$u(x,y) = x^{\alpha}y^2, \quad \alpha > 0$$

y el precio de x es 2, el de y es 4, con un presupuesto de 100

Restricción presupuestaria:

$$2x + 4y = 100$$

Paso 1: Despejar x a partir de la función objetivo
Asumimos que en el óptimo $x^{\alpha}y^2 = K$. Despejando x (tomando la raíz positiva),

$$x = \left(\frac{K}{y^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = K^{\frac{1}{\alpha}}\, y^{-\frac{2}{\alpha}}$$

Paso 2: Despejar x a partir de la restricción
La restricción es

$$2x + 4y = 100$$

de donde se obtiene:

$$x = \frac{100 - 4y}{2} = 50 - 2y$$

Paso 3: Derivar ambas expresiones respecto a y
De la función objetivo: Sea

$$x = K^{\frac{1}{\alpha}}\, y^{-\frac{2}{\alpha}}$$

Su derivada con respecto a y es

$$\frac{dx}{dy} = K^{\frac{1}{\alpha}}\left(-\frac{2}{\alpha}\right) y^{-\frac{2}{\alpha}-1} = -\frac{2}{\alpha}\, K^{\frac{1}{\alpha}}\, y^{-\frac{2}{\alpha}-1}$$

De la restricción: Para

$$x = 50 - 2y$$

se tiene:

$$\frac{dx}{dy} = -2$$

Paso 4: Igualar las derivadas
En el óptimo, las pendientes deben coincidir, por lo que igualamos:

$$-\frac{2}{\alpha}\, K^{\frac{1}{\alpha}}\, y^{-\frac{2}{\alpha}-1} = -2$$

Cancelamos el signo negativo y el factor 2:

$$\frac{1}{\alpha}\, K^{\frac{1}{\alpha}}\, y^{-\frac{2}{\alpha}-1} = 1$$

Despejamos $K^{\frac{1}{\alpha}}$:

$$K^{\frac{1}{\alpha}} = \alpha\, y^{\frac{2}{\alpha}+1}$$

Elevando ambos lados a la potencia α:

$$K = \left(\alpha\, y^{\frac{2}{\alpha}+1}\right)^{\alpha} = \alpha^{\alpha}\, y^{2+\alpha}$$

Paso 5: Despejar y a partir de la función objetivo y derivar respecto a x
Dado que la función de utilidad es

$$u(x,y) = x^{\alpha}y^2 = K$$

despejamos y (tomando la raíz positiva):

$$y = \left(\frac{K}{x^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} = K^{\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{\alpha}{2}}$$

Derivamos esta expresión respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = K^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{\alpha}{2}\right) x^{-\frac{\alpha}{2}-1} = -\frac{\alpha}{2}\, K^{\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{\alpha}{2}-1}$$

Paso 6: Despejar y a partir de la restricción y derivar respecto a x
La restricción es:

$$2x + 4y = 100$$

Despejamos y:

$$y = 25 - \frac{x}{2}$$

Por lo tanto, su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$$

Paso 7: Igualar las derivadas obtenidas en ambos despejes respecto a x
Igualamos:

$$-\frac{\alpha}{2}\, K^{\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{\alpha}{2}-1} \;=\; -\frac{1}{2}$$

Cancelando $-\frac{1}{2}$ de ambos lados,

$$\frac{\alpha}{2}\, K^{\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{\alpha}{2}-1} \;=\; \frac{1}{2}$$

Multiplicamos ambos lados por 2:

$$\alpha\, K^{\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{\alpha}{2}-1} \;=\; 1$$

Despejamos $K^{\frac{1}{2}}$:

$$K^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha}\, x^{\frac{\alpha}{2}+1}$$

Elevando al cuadrado,

$$K = \frac{1}{\alpha^2}\, x^{\alpha+2}$$

Paso 8: Igualación de los dos K obtenidos
Del proceso inicial (despeje de x en función de y) se obtuvo:

$$K_x = \alpha^{\alpha}\, y^{\alpha+2}$$

Para que ambas igualdades sean consistentes, deben cumplir:

$$\alpha^{\alpha}\, y^{\alpha+2} \;=\; \frac{1}{\alpha^2}\, x^{\alpha+2}$$

Recordando que, en el punto óptimo, la tangencia implica también la igualdad de pendientes obtenida anteriormente, la relación entre x y y resultante es:

$$x = \alpha\, y$$

Paso 9: Determinar x^* e y^* utilizando la restricción presupuestaria
Dado que $x = \alpha y$ y la restricción es

$$2x + 4y = 100$$

sustituimos:

$$2(\alpha\, y) + 4y = (2\alpha + 4)y = 100$$

De aquí,

$$y^* = \frac{100}{2(\alpha + 2)} = \frac{50}{\alpha + 2}$$

Luego,

$$x^* = \alpha\, y^* = \frac{50\alpha}{\alpha + 2}$$

$$x^* = \frac{50\alpha}{\alpha + 2} \quad \text{y} \quad y^* = \frac{50}{\alpha + 2}$$

Paso 10: Encontrar α tal que $x^* = 40$
Entonces, planteamos la ecuación:

$$\frac{50\alpha}{\alpha + 2} = 40$$

Multiplicando ambos lados por $\alpha + 2$:

$$50\alpha = 40(\alpha + 2) = 40\alpha + 80$$

Restando 40α de ambos lados:

$$50\alpha - 40\alpha = 80 \quad \Longrightarrow \quad 10\alpha = 80$$

de donde se obtiene:

$$\alpha = 8$$

Verificamos:

$$x^* = \frac{50 \cdot 8}{8 + 2} = \frac{400}{10} = 40$$

y, de la relación $y^* = \frac{50}{\alpha+2}$,

$$y^* = \frac{50}{8 + 2} = \frac{50}{10} = 5$$

Por lo tanto, para $\alpha = 8$ se tiene $x^* = 40$ y $y^* = 5$

2 Derivadas compuestas, derivadas implícitas y homogeneidad

2.1 Ejercicio 1

Calcular las derivadas como funciones compuestas

1.
$$z = 3x^2 + 4y - 2xy, \qquad \begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 2t - 1, \end{cases} \qquad \frac{dz}{dt}$$

2.
$$z = \ln(x^2 + y^2), \qquad \begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{t}, \end{cases} \qquad \frac{dz}{dt}$$

3.
$$z = \frac{2xy}{y^2 + 1}, \qquad \begin{cases} x = 2t + 4, \\ y = 5t^3, \end{cases} \qquad \frac{dz}{dt}$$

4.
$$z = x\,\ln y, \qquad \begin{cases} x = uv, \\ y = \dfrac{1}{u+v}, \end{cases} \qquad \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$$

5.
$$z = x^3 + y^2 - 2xy, \qquad \begin{cases} x = u + 3uv, \\ y = v^2 - 3v + uv, \end{cases} \qquad \frac{\partial z}{\partial u} \quad \wedge \quad \frac{\partial z}{\partial v}$$

6.
$$z = \frac{y^3}{\ln x}, \qquad \begin{cases} x = \sin u + \ln t, \\ y = t^u, \end{cases} \qquad \frac{\partial z}{\partial u} \quad \wedge \quad \frac{\partial z}{\partial t}$$

7.
$$z = e^{uv}, \qquad \begin{cases} u = \ln(x + y), \\ v = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right), \end{cases} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Solución

1)

Primero hallamos las derivadas parciales:

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 4y - 2xy) = 6x - 2y, \qquad z_y = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4y - 2xy) = 4 - 2x.$$

Luego,

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2.$$

Por la regla de la cadena,

$$\frac{dz}{dt} = z_x \frac{dx}{dt} + z_y \frac{dy}{dt} = (6x - 2y)(2t) + (4 - 2x)(2).$$

Sustituyendo $x = t^2 + 1$ y $y = 2t - 1$:

$$6x - 2y = 6(t^2 + 1) - 2(2t - 1) = 6t^2 - 4t + 8, \quad 4 - 2x = 4 - 2(t^2 + 1) = 2 - 2t^2,$$

$$\frac{dz}{dt} = (6t^2 - 4t + 8)(2t) + (2 - 2t^2)(2) = 12t^3 - 12t^2 + 16t + 4.$$

2)

La regla de la cadena para $\frac{dz}{dt}$ es:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Primero, calculamos las derivadas parciales de z con respecto a x e y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2x) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (2y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Luego, calculamos las derivadas de x e y con respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{-t}) = -e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{t}) = e^{t}$$

Ahora, sustituimos estas derivadas en la fórmula de la regla de la cadena:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)(-e^{-t}) + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)(e^{t})$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-2xe^{-t} + 2ye^{t}}{x^2 + y^2}$$

Finalmente, sustituimos $x = e^{-t}$ y $y = e^{t}$ en la expresión para $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-2(e^{-t})e^{-t} + 2(e^{t})e^{t}}{(e^{-t})^2 + (e^{t})^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-2e^{-2t} + 2e^{2t}}{e^{-2t} + e^{2t}}$$

Podemos simplificar un poco más factorizando el 2 en el numerador:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2(e^{2t} - e^{-2t})}{e^{2t} + e^{-2t}}$$

3)

La regla de la cadena para $\frac{dz}{dt}$ es:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Primero, calculamos las derivadas parciales de z con respecto a x e y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{y^2+1}\right) = \frac{2y}{y^2+1} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) = \frac{2y}{y^2+1}$$

Para $\frac{\partial z}{\partial y}$, usamos la regla del cociente $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ con $u = 2xy$ y $v = y^2+1$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(2x)(y^2+1)-(2xy)(2y)}{(y^2+1)^2} = \frac{2xy^2+2x-4xy^2}{(y^2+1)^2} = \frac{2x-2xy^2}{(y^2+1)^2} = \frac{2x(1-y^2)}{(y^2+1)^2}$$

Luego, calculamos las derivadas de x e y con respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t+4) = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^3) = 15t^2$$

Ahora, sustituimos estas derivadas en la fórmula de la regla de la cadena:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{2y}{y^2+1}\right)(2) + \left(\frac{2x(1-y^2)}{(y^2+1)^2}\right)(15t^2)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{4y}{y^2+1} + \frac{30xt^2(1-y^2)}{(y^2+1)^2}$$

Finalmente, sustituimos $x = 2t+4$ y $y = 5t^3$ en la expresión para $\frac{dz}{dt}$:

$$y^2 = (5t^3)^2 = 25t^6$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{4(5t^3)}{(5t^3)^2+1} + \frac{30(2t+4)t^2(1-(5t^3)^2)}{((5t^3)^2+1)^2}$$

4)

Las reglas de la cadena para las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Primero, calculamos las derivadas parciales de z con respecto a x e y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\ln y) = \ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x\ln y) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

Luego, calculamos las derivadas parciales de x e y con respecto a u y v:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(uv) = v$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(uv) = u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}((u+v)^{-1}) = -1(u+v)^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial u}(u+v) = -(u+v)^{-2} \cdot 1 = -\frac{1}{(u+v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}((u+v)^{-1}) = -1(u+v)^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial v}(u+v) = -(u+v)^{-2} \cdot 1 = -\frac{1}{(u+v)^2}$$

Ahora, sustituimos estas derivadas en las fórmulas de la regla de la cadena.
Para $\frac{\partial z}{\partial u}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (\ln y)(v) + \left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{1}{(u+v)^2}\right)$$

Sustituimos $x = uv$ y $y = \frac{1}{u+v}$:

$$\ln y = \ln\left(\frac{1}{u+v}\right) = \ln((u+v)^{-1}) = -\ln(u+v)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{uv}{1/(u+v)} = uv(u+v)$$

Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (-\ln(u+v))(v) + (uv(u+v))\left(-\frac{1}{(u+v)^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -v\ln(u+v) - \frac{uv(u+v)}{(u+v)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -v\ln(u+v) - \frac{uv}{u+v}$$

Para $\frac{\partial z}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (\ln y)(u) + \left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{1}{(u+v)^2}\right)$$

Sustituimos $\ln y = -\ln(u+v)$ y $\frac{x}{y} = uv(u+v)$:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (-\ln(u+v))(u) + (uv(u+v))\left(-\frac{1}{(u+v)^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -u\ln(u+v) - \frac{uv(u+v)}{(u+v)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -u\ln(u+v) - \frac{uv}{u+v}$$

5)

1. Regla de la Cadena Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$, usamos la regla de la cadena para funciones de varias variables:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

2. Calcular las derivadas parciales intermedias Calculamos las derivadas parciales de z respecto a x e y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 - 2xy) = 3x^2 - 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^2 - 2xy) = 2y - 2x$$

Calculamos las derivadas parciales de x respecto a u y v:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(u + 3uv) = 1 + 3v$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(u + 3uv) = 3u$$

Calculamos las derivadas parciales de y respecto a u y v:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(v^2 - 3v + uv) = v$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(v^2 - 3v + uv) = 2v - 3 + u$$

3. Sustituir en las fórmulas de la Regla de la Cadena Sustituimos las derivadas calculadas en las fórmulas de la regla de la cadena.

Para $\frac{\partial z}{\partial u}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (3x^2 - 2y)\frac{\partial x}{\partial u} + (2y - 2x)\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (3x^2 - 2y)(1 + 3v) + (2y - 2x)(v)$$

Para $\frac{\partial z}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (3x^2 - 2y)\frac{\partial x}{\partial v} + (2y - 2x)\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (3x^2 - 2y)(3u) + (2y - 2x)(2v - 3 + u)$$

6)

Solución:

Aplicamos la regla de la cadena para funciones de varias variables. Las fórmulas son:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Paso 1: Calcular las derivadas parciales intermedias

Calculamos las derivadas parciales de z con respecto a x e y, y las derivadas parciales de x e y con respecto a u y t.

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3(\ln x)^{-1}\right) = y^3(-1)(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{y^3}{x(\ln x)^2}$

2. $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{\ln x}\right) = \frac{3y^2}{\ln x}$

3. $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(\sin u + \ln t) = \cos u$
4. $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\sin u + \ln t) = \frac{1}{t}$
5. $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(t^u) = t^u \ln t \quad$ (derivada de tipo a^x)
6. $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(t^u) = ut^{u-1} \quad$ (derivada de tipo x^a)

Paso 2: Sustituir en la regla de la cadena
Cálculo de $\frac{\partial z}{\partial u}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(-\frac{y^3}{x(\ln x)^2}\right)(\cos u) + \left(\frac{3y^2}{\ln x}\right)(t^u \ln t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{y^3 \cos u}{x(\ln x)^2} + \frac{3y^2 t^u \ln t}{\ln x}$$

Ahora, sustituimos $x = \sin u + \ln t$ y $y = t^u$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{(t^u)^3 \cos u}{(\sin u + \ln t)(\ln(\sin u + \ln t))^2} + \frac{3(t^u)^2 t^u \ln t}{\ln(\sin u + \ln t)}$$

Cálculo de $\frac{\partial z}{\partial t}$:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(-\frac{y^3}{x(\ln x)^2}\right)\left(\frac{1}{t}\right) + \left(\frac{3y^2}{\ln x}\right)(ut^{u-1})$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{y^3}{tx(\ln x)^2} + \frac{3y^2 ut^{u-1}}{\ln x}$$

Sustituyendo $x = \sin u + \ln t$ y $y = t^u$:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{(t^u)^3}{t(\sin u + \ln t)(\ln(\sin u + \ln t))^2} + \frac{3(t^u)^2 ut^{u-1}}{\ln(\sin u + \ln t)}$$

7)

Aplicamos la regla de la cadena para funciones de varias variables:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Paso 1: Calcular las derivadas parciales intermedias

Calculamos las derivadas parciales de z con respecto a u y v, y las derivadas parciales de u y v con respecto a x e y.

1. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(e^{uv}) = e^{uv} \cdot \frac{\partial}{\partial u}(uv) = e^{uv} \cdot v = ve^{uv}$
2. $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(e^{uv}) = e^{uv} \cdot \frac{\partial}{\partial v}(uv) = e^{uv} \cdot u = ue^{uv}$

3. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\ln(x+y)) = \dfrac{1}{x+y} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}(x+y) = \dfrac{1}{x+y} \cdot 1 = \dfrac{1}{x+y}$

4. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(\ln(x+y)) = \dfrac{1}{x+y} \cdot \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y) = \dfrac{1}{x+y} \cdot 1 = \dfrac{1}{x+y}$

5. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)\right) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{y^2+x^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

6. $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)\right) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \dfrac{\partial}{\partial y}\left(xy^{-1}\right)$

$$= \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot (x(-1)y^{-2}) = \frac{y^2}{y^2+x^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Paso 2: Sustituir en la regla de la cadena
Cálculo de $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (ve^{uv})\left(\frac{1}{x+y}\right) + (ue^{uv})\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{uv}\left(\frac{v}{x+y} + \frac{uy}{x^2+y^2}\right)$$

Sustituyendo $u = \ln(x+y)$ y $v = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\ln(x+y)\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)}{x+y} + \frac{y\ln(x+y)}{x^2+y^2}\right]$$

Cálculo de $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (ve^{uv})\left(\frac{1}{x+y}\right) + (ue^{uv})\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{uv}\left(\frac{v}{x+y} - \frac{ux}{x^2+y^2}\right)$$

Sustituyendo $u = \ln(x+y)$ y $v = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\ln(x+y)\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)}{x+y} - \frac{x\ln(x+y)}{x^2+y^2}\right]$$

2.2 Ejercicio 2

Dadas las siguientes ecuaciones, verificar la condición de existencia de las derivadas parciales de $z = f(x, y)$ en el punto indicado. Si existen, hallarlas:

1. $\ln(xy) + z - \sin z + 4y = 4$ en $P_0 = (1, 1, 0)$
2. $e^{xy} - \cos x + 3z^2 - 4z + 1 = 3x$ en $P_0 = (0, 3, 1)$

Solución

1)

Verificación de las condiciones

Condición 1: Evaluamos F en el punto $P_0 = (1, 1, 0)$.

$$F(1,1,0) = \ln(1 \cdot 1) + 0 - \sin(0) + 4(1) - 4$$

$$F(1,1,0) = \ln(1) + 0 - 0 + 4 - 4$$

$$F(1,1,0) = 0 + 0 - 0 + 0 = 0$$

La primera condición **se cumple**, el punto P_0 pertenece a la superficie definida por $F(x, y, z) = 0$.

Condición 2: Calculamos las derivadas parciales de F respecto a x, y, y z.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(xy) + z - \sin z + 4y - 4) = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy) + z - \sin z + 4y - 4) = \frac{1}{xy} \cdot x + 4 = \frac{1}{y} + 4$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\ln(xy) + z - \sin z + 4y - 4) = 1 - \cos z$$

Ahora, evaluamos la derivada parcial respecto a z en el punto $P_0 = (1, 1, 0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,0) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$$

La segunda condición **no se cumple**.

2)

1. Definir la función $F(x, y, z)$

Reescribimos la ecuación en la forma $F(x, y, z) = 0$:

$$F(x,y,z) = e^{xy} - \cos x + 3z^2 - 4z + 1 - 3x = 0$$

2. Verificar el punto P_0

Sustituimos las coordenadas de $P_0 = (0, 3, 1)$ en $F(x, y, z)$:

$$F(0,3,1) = e^{(0)(3)} - \cos(0) + 3(1)^2 - 4(1) + 1 - 3(0)$$

$$F(0,3,1) = e^0 - 1 + 3(1) - 4 + 1 - 0$$

$$F(0,3,1) = 1 - 1 + 3 - 4 + 1 = 0$$

El punto P_0 satisface la ecuación $F(x, y, z) = 0$.

3. Calcular las derivadas parciales de F

Calculamos $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ y $F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} - \cos x + 3z^2 - 4z + 1 - 3x) = ye^{xy} - (-\sin x) - 3 = ye^{xy} + \sin x - 3$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} - \cos x + 3z^2 - 4z + 1 - 3x) = xe^{xy}$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(e^{xy} - \cos x + 3z^2 - 4z + 1 - 3x) = 6z - 4$$

4. Evaluar las derivadas parciales en P_0

Evaluamos F_x, F_y, F_z en $P_0 = (0, 3, 1)$:

$$F_x(0,3,1) = (3)e^{(0)(3)} + \sin(0) - 3 = 3 \cdot e^0 + 0 - 3 = 3 \cdot 1 - 3 = 0$$

$$F_y(0,3,1) = (0)e^{(0)(3)} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$F_z(0,3,1) = 6(1) - 4 = 6 - 4 = 2$$

5. Calcular las derivadas parciales de z

Utilizamos las fórmulas del Teorema de la Función Implícita:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,3)} = -\frac{F_x(0,3,1)}{F_z(0,3,1)} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,3)} = -\frac{F_y(0,3,1)}{F_z(0,3,1)} = -\frac{0}{2} = 0$$

2.3 Ejercicio 3

Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones definidas implícitamente, tales que $z = f(x, y)$:

1. $x + y + z = \sin(xyz)$
2. $x + 3y + 2z - \ln z = 0$
3. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = -3$

Solución

1)

Para $x + y + z = \sin(xyz)$ donde $z = f(x, y)$:

Si definimos $F(x, y, z) = x + y + z - \sin(xyz) = 0$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1 - \cos(xyz) \cdot yz}{1 - \cos(xyz) \cdot xy} \tag{1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1 - \cos(xyz) \cdot xz}{1 - \cos(xyz) \cdot xy} \tag{2}$$

2)

Para $x + 3y + 2z - \ln z = 0$ donde $z = f(x, y)$:

Si definimos $F(x, y, z) = x + 3y + 2z - \ln z = 0$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{2 - \frac{1}{z}} \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3}{2 - \frac{1}{z}} \tag{4}$$

3)

Para $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = -3$ donde $z = f(x, y)$:

Si definimos $F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} \tag{5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3z^2 - 3xy} \tag{6}$$

2.4 Ejercicio 4

Calcular las derivadas parciales segundas de $z = f(x, y)$ definida implícitamente por:

1. $4x^3 + z^2y + 3xy^2 = 0$
2. $xyz + e^{xyz} = 0$

Solución

1)

Para $4x^3 + z^2y + 3xy^2 = 0$ donde $z = f(x, y)$:

Si definimos $F(x, y, z) = 4x^3 + z^2y + 3xy^2 = 0$, entonces:

Primero calculamos las derivadas parciales primeras:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{12x^2 + 3y^2}{2zy} \tag{7}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{z^2 + 6xy}{2zy} \tag{8}$$

Ahora calculamos las derivadas segundas. Para $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, derivamos $\frac{\partial z}{\partial x}$ respecto a x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{12x^2 + 3y^2}{2zy}\right) \tag{9}$$

Aplicando la regla del cociente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(2zy)\frac{\partial}{\partial x}(12x^2 + 3y^2) - (12x^2 + 3y^2)\frac{\partial}{\partial x}(2zy)}{(2zy)^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(2zy)(24x) - (12x^2 + 3y^2)(2y\frac{\partial z}{\partial x})}{4z^2y^2} \tag{11}$$

Sustituyendo $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(2zy)(24x) - (12x^2 + 3y^2)(2y)(-\frac{12x^2+3y^2}{2zy})}{4z^2y^2} \tag{12}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, derivamos $\frac{\partial z}{\partial y}$ respecto a y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{z^2 + 6xy}{2zy}\right) \tag{13}$$

Aplicando la regla del cociente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(2zy)\frac{\partial}{\partial y}(z^2 + 6xy) - (z^2 + 6xy)\frac{\partial}{\partial y}(2zy)}{(2zy)^2} \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(2zy)(2z\frac{\partial z}{\partial y} + 6x) - (z^2 + 6xy)(2z + 2y\frac{\partial z}{\partial y})}{4z^2y^2} \tag{15}$$

Sustituyendo $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(2zy)(2z)(-\frac{z^2+6xy}{2zy}) + (2zy)(6x) - (z^2 + 6xy)(2z + 2y)(-\frac{z^2+6xy}{2zy})}{4z^2y^2} \tag{16}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, derivamos $\frac{\partial z}{\partial x}$ respecto a y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{12x^2 + 3y^2}{2zy}\right) \tag{17}$$

Aplicando la regla del cociente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(2zy)\frac{\partial}{\partial y}(12x^2+3y^2) - (12x^2+3y^2)\frac{\partial}{\partial y}(2zy)}{(2zy)^2} \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(2zy)(6y) - (12x^2+3y^2)(2z+2y\frac{\partial z}{\partial y})}{4z^2y^2} \tag{19}$$

Sustituyendo $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{(2zy)(6y) - (12x^2+3y^2)(2z+2y)(-\frac{z^2+6xy}{2zy})}{4z^2y^2} \tag{20}$$

2)

Para $xyz + e^{xyz} = 0$ donde $z = f(x,y)$:

Si definimos $F(x,y,z) = xyz + e^{xyz} = 0$, entonces:

Primero calculamos las derivadas parciales de F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + yz \cdot e^{xyz} \tag{21}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + xz \cdot e^{xyz} \tag{22}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + xy \cdot e^{xyz} \tag{23}$$

Obtenemos las derivadas parciales primeras:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{yz + yz \cdot e^{xyz}}{xy + xy \cdot e^{xyz}} = -\frac{yz(1+e^{xyz})}{xy(1+e^{xyz})} = -\frac{z}{x} \tag{24}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{xz + xz \cdot e^{xyz}}{xy + xy \cdot e^{xyz}} = -\frac{xz(1+e^{xyz})}{xy(1+e^{xyz})} = -\frac{z}{y} \tag{25}$$

Ahora calculamos las derivadas parciales segundas:

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, derivamos $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}$ respecto a x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - z \cdot 1}{x^2} = -\frac{x \cdot (-\frac{z}{x}) - z}{x^2} = -\frac{z+z}{x^2} = -\frac{2z}{x^2} \tag{26}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, derivamos $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{y}$ respecto a y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - z \cdot 1}{y^2} = -\frac{y \cdot (-\frac{z}{y}) - z}{y^2} = -\frac{z+z}{y^2} = -\frac{2z}{y^2} \tag{27}$$

Para $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, derivamos $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}$ respecto a y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{z}{y}\right) = \frac{z}{xy} \tag{28}$$

2.5 Ejercicio 5

Calcular las derivadas pedidas de las funciones definidas implícitamente por los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.
$$\begin{cases} x^3 + 2y^3 - 3z - 13 = 0 \\ x - 6y + z^3 + 5 = 0 \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx}$$

2.
$$\begin{cases} x + y - u - v = 0 \\ x\,u + y\,v - 1 = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

3.
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

Solución

a)

Sea el sistema

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 - 3z - 13 = 0 \\ G(x,y,z) = x - 6y + z^3 + 5 = 0 \end{cases}$$

definiendo $y = y(x)$ y $z = z(x)$. Al derivar implícitamente respecto a x obtenemos

$$F_x + F_y\, y' + F_z\, z' = 0 \qquad G_x + G_y\, y' + G_z\, z' = 0$$

donde

$$\begin{array}{ccc} F_x = 3x^2 & F_y = 6y^2 & F_z = -3 \\ G_x = 1 & G_y = -6 & G_z = 3z^2 \end{array}$$

Escribimos en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_x \\ G_x \end{pmatrix}$$

El determinante del Jacobiano es

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 6y^2 & -3 \\ -6 & 3z^2 \end{pmatrix} = 18(y^2z^2 - 1)$$

Por Cramer:

$$y' = \frac{\det \begin{pmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{\det \begin{pmatrix} -3x^2 & -3 \\ -1 & 3z^2 \end{pmatrix}}{18(y^2z^2-1)} = -\frac{9x^2z^2+3}{18(y^2z^2-1)} = -\frac{3x^2z^2+1}{6(y^2z^2-1)}$$

$$z' = \frac{\det \begin{pmatrix} F_y & -F_x \\ G_y & -G_x \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{\det \begin{pmatrix} 6y^2 & -3x^2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}}{18(y^2z^2-1)} = -\frac{6y^2+18x^2}{18(y^2z^2-1)} = -\frac{y^2+3x^2}{3(y^2z^2-1)}$$

b)

Sea el sistema

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x + y - u - v = 0 \\ G(x,y,u,v) = x\,u + y\,v - 1 = 0 \end{cases}$$

que define $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$. Al diferenciar implícitamente obtenemos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_x \\ G_x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_y \\ G_y \end{pmatrix}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{array}{cccc} F_u = -1 & F_v = -1 & F_x = 1 & F_y = 1 \\ G_u = x & G_v = y & G_x = u & G_y = v \end{array}$$

El determinante común es

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ x & y \end{pmatrix} = x - y$$

Por Cramer:

$$u_x = \frac{\det \begin{pmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -u & y \end{pmatrix}}{x-y} = \frac{-1 \cdot y - (-1)(-u)}{x-y} = -\frac{u+y}{x-y}$$

$$v_x = \frac{\det\begin{pmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ x & -u \end{pmatrix}}{x-y} = \frac{-1\cdot(-u)-(-1)x}{x-y} = \frac{u+x}{x-y}$$

$$u_y = \frac{\det\begin{pmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -v & y \end{pmatrix}}{x-y} = \frac{-y-v}{x-y} = -\frac{v+y}{x-y}$$

$$v_y = \frac{\det\begin{pmatrix} F_u & -F_y \\ G_u & -G_y \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ x & -v \end{pmatrix}}{x-y} = \frac{-1\cdot(-v)-(-1)x}{x-y} = \frac{v+x}{x-y}$$

c)

Sea

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0 \\ G(x,y,u,v) = 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0 \end{cases}$$

definiendo $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$. Al derivar implícitamente respecto a x obtenemos

$$F_x + F_u\, u_x + F_v\, v_x = 0 \qquad G_x + G_u\, u_x + G_v\, v_x = 0$$

donde

$$\begin{aligned} F_x &= 2x & F_u &= -3u^2 & F_v &= 2v \\ G_x &= 2y & G_u &= -4u & G_v &= 12v^3 \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_x \\ G_x \end{pmatrix}$$

El determinante común es

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix} = (-3u^2)(12v^3) - (2v)(-4u) = -36u^2v^3 + 8uv$$

Por Cramer:

$$u_x = \frac{\det\begin{pmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{(-2x)(12v^3) - (2v)(-2y)}{-36u^2v^3 + 8uv} = \frac{-24xv^3 + 4yv}{-36u^2v^3 + 8uv}$$

$$v_x = \frac{\det\begin{pmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{(-3u^2)(-2y) - (-2x)(-4u)}{-36u^2v^3 + 8uv} = \frac{6u^2y - 8xu}{-36u^2v^3 + 8uv}$$

Análogamente, al derivar respecto a y:

$$F_y + F_u\, u_y + F_v\, v_y = 0 \qquad G_y + G_u\, u_y + G_v\, v_y = 0$$

con

$$F_y = -2y \qquad G_y = 2x + 2y$$

Por Cramer:

$$u_y = \frac{\det\begin{pmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{(2y)(12v^3) - (2v)(2x+2y)}{-36u^2v^3 + 8uv} = \frac{24yv^3 + 4v(x+y)}{-36u^2v^3 + 8uv}$$

$$v_y = \frac{\det\begin{pmatrix} F_u & -F_y \\ G_u & -G_y \end{pmatrix}}{\Delta} = \frac{(-3u^2)(-(2x+2y)) - (2y)(-4u)}{-36u^2v^3 + 8uv} = \frac{6u^2(x+y) + 8uy}{-36u^2v^3 + 8uv}$$

2.6 Ejercicio 6

Indicar si las siguientes funciones son homogéneas y, en caso de que lo sean, indicar el grado. Para las funciones que sean homogéneas, verificar el teorema de Euler.

1. $f(x, y) = 3x^2 + 5y - y^2$
2. $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = x^2\, e^{\frac{3}{y^2}}$
4. $f(x, y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$

Solución

1)

Para $f(x,y) = 3x^2 + 5y - y^2$:

Una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n si $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ para todo $t > 0$

Evaluamos $f(tx,ty)$:

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= 3(tx)^2 + 5(ty) - (ty)^2 \\ &= 3t^2x^2 + 5ty - t^2y^2 \end{aligned}$$

Observamos que:

$$f(tx,ty) = 3t^2x^2 + 5ty - t^2y^2 = t^2(3x^2 - y^2) + t(5y)$$

Como tenemos términos con distintos exponentes de t (t^1 y t^2), no podemos factorizar un t^n común. Por lo tanto, la función $f(x,y) = 3x^2 + 5y - y^2$ no es homogénea

Al no ser homogénea, no podemos aplicar el teorema de Euler para esta función

2)

Para $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + y^2}$:

Una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n si $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ para todo $t > 0$

Evaluamos $f(tx,ty)$:

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \sqrt{2(tx)^2 + (ty)^2} \\ &= \sqrt{2t^2x^2 + t^2y^2} \\ &= \sqrt{t^2(2x^2 + y^2)} \\ &= t\sqrt{2x^2 + y^2} \\ &= t \cdot f(x,y) \end{aligned}$$

Como $f(tx,ty) = t^1 \cdot f(x,y)$, la función $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + y^2}$ es homogénea de grado $n = 1$

Verificación del teorema de Euler:

El teorema de Euler establece que si $f(x,y)$ es homogénea de grado n, entonces:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = n \cdot f(x,y)$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2}(2x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2}(2x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{2x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Ahora, evaluamos la expresión del teorema de Euler:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + y^2}} + y \cdot \frac{y}{\sqrt{2x^2 + y^2}} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{2x^2 + y^2}} = \sqrt{2x^2 + y^2} = f(x,y)$$

Como

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot f(x,y)$$

y $n = 1$, se verifica el teorema de Euler

3)

Para $f(x,y) = x^2\, e^{\frac{3}{y^2}}$:

Una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n si $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ para todo $t > 0$

Evaluamos $f(tx,ty)$:

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= (tx)^2\, e^{\frac{3}{(ty)^2}} \\ &= t^2 x^2\, e^{\frac{3}{t^2 y^2}} \\ &= t^2 x^2\, e^{\frac{3}{y^2}\cdot\frac{1}{t^2}} \end{aligned}$$

Observamos que no podemos expresar esto como $t^n f(x,y)$ debido al término exponencial, ya que:

$$e^{\frac{3}{y^2}\cdot\frac{1}{t^2}} \neq t^k \cdot e^{\frac{3}{y^2}}$$

para ningún valor de k

Por lo tanto, la función $f(x,y) = x^2\, e^{\frac{3}{y^2}}$ no es homogénea

Al no ser homogénea, no podemos aplicar el teorema de Euler para esta función

4)

Para $f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$:

Evaluamos $f(tx,ty)$:

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \cos\left(\frac{tx}{ty}\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{t}{t}\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= f(x,y) \end{aligned}$$

Observamos que $f(tx,ty) = f(x,y)$, lo que equivale a decir que $f(tx,ty) = t^0 f(x,y)$

Por lo tanto, la función $f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ es homogénea de grado 0

Verificación del teorema de Euler

Para una función homogénea $f(x,y)$ de grado k, el teorema de Euler establece que:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = k \cdot f(x,y)$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x}{y^2}$$

Ahora verificamos el teorema de Euler:

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} &= x\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right) + y\cdot\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x}{y^2}\right) \\ &= -\frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La función $f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ es homogénea de grado 0 y satisface el teorema de Euler

2.7 Ejercicio 7

La función de demanda de un bien está dada por

$$D_1 = 1000 - 2p_1^2 + 4p_2^3 - 3p_2p_3^2$$

donde la evolución de los precios respecto del tiempo sigue las leyes

$$p_1 = 2 + 3t \qquad p_2 = 3 + t^2 \qquad p_3 = t + t^3$$

Calcular la demanda marginal respecto del tiempo cuando $t = 1$ Interpretar económicamente el resultado

Solución

La demanda marginal respecto del tiempo es la derivada de D_1 con respecto a t, es decir, $\frac{dD_1}{dt}$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{dD_1}{dt} = \frac{\partial D_1}{\partial p_1} \cdot \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial D_1}{\partial p_2} \cdot \frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial D_1}{\partial p_3} \cdot \frac{dp_3}{dt}$$

Calculamos cada término:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = -4p_1$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 12p_2^2 - 3p_3^2$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_3} = -6p_2p_3$$

$$\frac{dp_1}{dt} = 3$$

$$\frac{dp_2}{dt} = 2t$$

$$\frac{dp_3}{dt} = 1 + 3t^2$$

Sustituimos en la fórmula de la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dD_1}{dt} &= (-4p_1)(3) + (12p_2^2 - 3p_3^2)(2t) + (-6p_2p_3)(1 + 3t^2) \\ &= -12p_1 + (24t)p_2^2 - (6t)p_3^2 - 6p_2p_3 - 18t^2p_2p_3\end{aligned}$$

Evaluamos cuando $t = 1$:

$$p_1(1) = 2 + 3(1) = 5$$

$$p_2(1) = 3 + 1^2 = 4$$

$$p_3(1) = 1 + 1^3 = 2$$

Sustituimos estos valores:

$$\left.\frac{dD_1}{dt}\right|_{t=1} = -12 \cdot 5 + 24 \cdot 1 \cdot 4^2 - 6 \cdot 1 \cdot 2^2 - 6 \cdot 4 \cdot 2 - 18 \cdot 1^2 \cdot 4 \cdot 2$$

$$= 108$$

Interpretación económica:

La demanda marginal de 108 unidades por unidad de tiempo significa que cuando $t = 1$, la demanda del bien está aumentando a razón de 108 unidades por cada unidad adicional de tiempo. Este valor positivo indica que la demanda está creciendo.

2.8 Ejercicio 8

La demanda de cebada en una determinada población fue estimada para un período según la ley

$$D_c = \frac{100}{p_c} + p_m^2$$

donde p_c es el precio de la cebada y p_m es el precio del maíz

Si, además, la demanda del maíz fue estimada por la ley

$$D_m = 8p_c - 3p_m + 100$$

se pide:

1. Indicar si ambos bienes son típicos
2. Clasificar ambos bienes entre sí
3. Si la función ingreso está dada por

   $$I = 25\,D_c + 20\,D_m$$

   calcular el ingreso marginal respecto del precio de la cebada y respecto del precio del maíz

Solución

1)

Un bien es típico cuando la demanda disminuye al aumentar su propio precio, es decir, cuando la derivada parcial de la demanda respecto a su propio precio es negativa

Para la cebada:

$$\frac{\partial D_c}{\partial p_c} = \frac{\partial}{\partial p_c}\left(\frac{100}{p_c} + p_m^2\right)$$
$$= -\frac{100}{p_c^2}$$

Como $p_c > 0$ (precios positivos), entonces $-\frac{100}{p_c^2} < 0$. Por lo tanto, la cebada es un bien típico

Para el maíz:

$$\frac{\partial D_m}{\partial p_m} = \frac{\partial}{\partial p_m}(8p_c - 3p_m + 100)$$
$$= -3$$

Como $-3 < 0$, el maíz también es un bien típico

2) Clasificar ambos bienes entre sí

La clasificación de los bienes entre sí depende de cómo la demanda de un bien responde a cambios en el precio del otro bien:

- Si $\frac{\partial D_i}{\partial p_j} > 0$, los bienes i y j son sustitutos
- Si $\frac{\partial D_i}{\partial p_j} < 0$, los bienes i y j son complementarios
- Si $\frac{\partial D_i}{\partial p_j} = 0$, los bienes i y j son independientes

Calculemos:

$$\frac{\partial D_c}{\partial p_m} = \frac{\partial}{\partial p_m}\left(\frac{100}{p_c} + p_m^2\right)$$
$$= 2p_m$$

Como $p_m > 0$ (precios positivos), entonces $2p_m > 0$. Esto indica que cuando aumenta el precio del maíz, aumenta la demanda de cebada, lo que sugiere que son bienes sustitutos desde la perspectiva de la cebada

Por otro lado:

$$\frac{\partial D_m}{\partial p_c} = \frac{\partial}{\partial p_c}(8p_c - 3p_m + 100)$$
$$= 8$$

Como $8 > 0$, cuando aumenta el precio de la cebada, aumenta la demanda del maíz, confirmando que los bienes son sustitutos también desde la perspectiva del maíz

3)

La función ingreso está dada por:

$$I = 25\,D_c + 20\,D_m$$

donde:

$$D_c = \frac{100}{p_c} + p_m^2$$

$$D_m = 8p_c - 3p_m + 100$$

Aplicando la regla de la cadena:
Para calcular el ingreso marginal respecto a p_c (precio de la cebada):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial p_c} &= \frac{\partial I}{\partial D_c} \cdot \frac{\partial D_c}{\partial p_c} + \frac{\partial I}{\partial D_m} \cdot \frac{\partial D_m}{\partial p_c} \\
&= 25 \cdot \left(-\frac{100}{p_c^2}\right) + 20 \cdot 8 \\
&= -\frac{2500}{p_c^2} + 160
\end{aligned}$$

Para calcular el ingreso marginal respecto a p_m (precio del maíz):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial p_m} &= \frac{\partial I}{\partial D_c} \cdot \frac{\partial D_c}{\partial p_m} + \frac{\partial I}{\partial D_m} \cdot \frac{\partial D_m}{\partial p_m} \\
&= 25 \cdot (2p_m) + 20 \cdot (-3) \\
&= 50p_m - 60
\end{aligned}$$

Donde hemos usado:

$$\frac{\partial I}{\partial D_c} = 25$$

$$\frac{\partial I}{\partial D_m} = 20$$

$$\frac{\partial D_c}{\partial p_c} = -\frac{100}{p_c^2}$$

$$\frac{\partial D_c}{\partial p_m} = 2p_m$$

$$\frac{\partial D_m}{\partial p_c} = 8$$

$$\frac{\partial D_m}{\partial p_m} = -3$$

Por lo tanto:

- El ingreso marginal respecto del precio de la cebada es: $\frac{\partial I}{\partial p_c} = -\frac{2500}{p_c^2} + 160$
- El ingreso marginal respecto del precio del maíz es: $\frac{\partial I}{\partial p_m} = 50p_m - 60$

Interpretación económica:

El ingreso marginal respecto a cada precio muestra cómo cambia el ingreso total ante pequeñas variaciones en los precios. El efecto total considera tanto el impacto directo en la demanda del propio bien como el efecto cruzado en la demanda del otro bien, ponderados por sus respectivas contribuciones al ingreso

2.9 Ejercicio 9

Si la función de demanda de cierto bien está dada por

$$D_1^2 p_2^3 p_1 - 100 = 0,$$

se pide:

a) Hallar las elasticidades parciales. Interpretar económicamente el resultado.

b) Clasificar el bien.

Solución

Reescribimos la función de demanda de forma equivalente:

$$D_1^2\, p_2^3\, p_1 = 100$$

Para despejar D_1, dividimos entre $p_2^3\, p_1$ y luego tomamos la raíz cuadrada:

$$D_1^2 = \frac{100}{p_2^3\, p_1} \quad \Longrightarrow \quad D_1 = \sqrt{\frac{100}{p_2^3\, p_1}} = \frac{10}{p_2^{3/2}\, p_1^{1/2}}$$

Para calcular las elasticidades de forma convencional, usamos la fórmula:

$$\varepsilon_{D_1,p_i} = \frac{\partial D_1}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{D_1}$$

Elasticidad respecto a p_1

Expresamos D_1 como:

$$D_1 = 10\, p_2^{-3/2}\, p_1^{-1/2}$$

Su derivada parcial con respecto a p_1 es:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = 10\, p_2^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}p_1^{-3/2}\right) = -\frac{5}{p_2^{3/2}\, p_1^{3/2}}$$

Por lo que la elasticidad es:

$$\varepsilon_{D_1,p_1} = \left(-\frac{5}{p_2^{3/2}\, p_1^{3/2}}\right) \cdot \frac{p_1}{\frac{10}{p_2^{3/2}\, p_1^{1/2}}}$$

Observamos que:

$$\frac{p_1}{p_1^{3/2}} = \frac{1}{p_1^{1/2}} \quad \text{y} \quad \frac{p_2^{3/2}}{p_2^{3/2}} = 1$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon_{D_1,p_1} = -\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{p_1^{1/2}} \cdot p_1^{1/2} = -\frac{1}{2}$$

Elasticidad respecto a p_2

Nuevamente, partiendo de:

$$D_1 = 10\, p_2^{-3/2}\, p_1^{-1/2}$$

Derivamos respecto a p_2:

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = 10\, p_1^{-1/2}\left(-\frac{3}{2}p_2^{-5/2}\right) = -\frac{15}{p_1^{1/2}\, p_2^{5/2}}$$

La elasticidad se calcula como:

$$\varepsilon_{D_1,p_2} = \left(-\frac{15}{p_1^{1/2}\, p_2^{5/2}}\right) \cdot \frac{p_2}{\frac{10}{p_2^{3/2}\, p_1^{1/2}}}$$

Simplificamos usando que:

$$p_2 \cdot p_2^{-5/2} = p_2^{-3/2} \quad \text{y} \quad p_1^{-1/2} \text{ se cancela}$$

llegando a:

$$\varepsilon_{D_1,p_2} = -\frac{15}{10} = -\frac{3}{2}$$

Interpretación económica

- $\varepsilon_{D_1,p_1} = -\frac{1}{2}$: Un aumento del 1% en p_1 reduce la cantidad demandada D_1 en un 0,5%, lo que indica que la demanda es inelástica respecto a su propio precio y que el bien es **ordinario**.
- $\varepsilon_{D_1,p_2} = -\frac{3}{2}$: Un aumento del 1% en p_2 reduce la cantidad demandada D_1 en un 1,5%, lo cual implica una demanda más elástica respecto a p_2. Además, el signo negativo sugiere que los bienes son **complementarios**.

2.10 Ejercicio 10

Si la función de producción de una empresa que depende de las cantidades q y b de los insumos A y B respectivamente, está definida implícitamente por:

$$16P^2 - P - 80 + 4(\alpha - 5)^2 + 2(\beta - 4)^2 = 0$$

hallar las productividades marginales y la tasa de sustitución técnica de A por B

Solución

$$F(P,\alpha,\beta) = 16P^2 - P - 80 + 4(\alpha-5)^2 + 2(\beta-4)^2 = 0$$

1. Cálculo de las productividades marginales

a) Derivada respecto a α

Calculemos cada término:

- $\dfrac{\partial F}{\partial P}$: La parte de F en función de P es $16P^2 - P - 80$, entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial P} = 32P - 1$$

- $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}$: La parte de F que involucra a α es $4(\alpha-5)^2$, así:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 8(\alpha-5)$$

La derivada respecto a α es:

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = -\frac{8(\alpha-5)}{32P-1}$$

b) Derivada respecto a β

Calculemos:

$$\frac{\partial F}{\partial P} = 32P - 1$$
$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = 4(\beta-4)$$

Entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = -\frac{4(\beta-4)}{32P-1}$$

2. Tasa de sustitución técnica (B/A)

La tasa de sustitución técnica de B por A es:

$$\text{TST}(B/A) = \frac{\frac{\partial P}{\partial \alpha}}{\frac{\partial P}{\partial \beta}}$$

Reemplazando los valores calculados:

$$\text{TST}(B/A) = \frac{-\dfrac{8(\alpha-5)}{32P-1}}{-\dfrac{4(\beta-4)}{32P-1}} = \frac{8(\alpha-5)}{4(\beta-4)} = 2\,\frac{\alpha-5}{\beta-4}$$

Interpretación: Esta tasa indica que, para mantener constante la producción, un aumento unitario en el insumo A puede compensarse reduciendo el insumo B en $2\,\frac{\alpha-5}{\beta-4}$ unidades. Es decir, mide cuántas unidades de B se "ahorran" al incrementar A en una unidad

3. Tasa de sustitución técnica (A/B)

La tasa de sustitución técnica de A por B es:

$$\text{TST}(A/B) = \frac{\frac{\partial P}{\partial \beta}}{\frac{\partial P}{\partial \alpha}}$$

Reemplazando los valores:

$$\text{TST}(A/B) = \frac{-\dfrac{4(\beta-4)}{32P-1}}{-\dfrac{8(\alpha-5)}{32P-1}} = \frac{4(\beta-4)}{8(\alpha-5)} = \frac{1}{2}\,\frac{\beta-4}{\alpha-5}$$

Interpretación: Esta tasa expresa cuántas unidades de A se deben reducir para poder aumentar el insumo B en una unidad sin modificar el nivel de producción. Es la medida de la eficiencia relativa de B frente a A en el proceso productivo

2.11 Ejercicio 11

Dada la función de utilidad $U = 2q_1q_2^2$, se pide:

1. Indicar si es homogénea y dar el grado de homogeneidad
2. Comprobar el teorema de Euler
3. Hallar la tasa marginal de sustitución
4. Demostrar que la $T.M.S.$ es invariante frente a cambios proporcionales entre niveles de consumo

Solución

1. Homogeneidad de la función

Una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es homogénea de grado k si:

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \forall t > 0$$

Verificamos si $U = 2q_1 q_2^2$ es homogénea:

$$\begin{aligned} U(tq_1, tq_2) &= 2(tq_1)(tq_2)^2 \\ &= 2(tq_1)(t^2 q_2^2) \\ &= 2t^3 q_1 q_2^2 \\ &= t^3 \cdot 2q_1 q_2^2 \\ &= t^3 \cdot U(q_1, q_2) \end{aligned}$$

Como $U(tq_1, tq_2) = t^3 \cdot U(q_1, q_2)$, la función es homogénea de grado 3

2. Comprobación del teorema de Euler

El teorema de Euler para funciones homogéneas establece que si f es homogénea de grado k, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k \cdot f(x_1, ..., x_n)$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 2q_2^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = 4q_1 q_2$$

Verificamos el teorema:

$$\begin{aligned} q_1 \frac{\partial U}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial U}{\partial q_2} &= q_1 \cdot 2q_2^2 + q_2 \cdot 4q_1 q_2 \\ &= 2q_1 q_2^2 + 4q_1 q_2^2 \\ &= 6q_1 q_2^2 \\ &= 3 \cdot 2q_1 q_2^2 \\ &= 3 \cdot U(q_1, q_2) \end{aligned}$$

Como $q_1 \frac{\partial U}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial U}{\partial q_2} = 3 \cdot U(q_1, q_2)$, se verifica el teorema de Euler para $k = 3$

3. Tasa marginal de sustitución

La tasa marginal de sustitución (TMS) se define como:

$$\text{TMS} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}}$$

Sustituyendo las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\text{TMS} &= -\frac{2q_2^2}{4q_1q_2} \\ &= -\frac{q_2}{2q_1} \\ &= -\frac{q_2}{2q_1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, TMS $= -\frac{q_2}{2q_1}$

4. Invarianza de la TMS frente a cambios proporcionales

Queremos demostrar que la TMS es invariante frente a cambios proporcionales en los niveles de consumo. Es decir, verificar si:

$$\text{TMS}(tq_1, tq_2) = \text{TMS}(q_1, q_2) \quad \forall t > 0$$

Calculamos la TMS modificando proporcionalmente:

$$\begin{aligned}\text{TMS}(tq_1, tq_2) &= -\frac{tq_2}{2tq_1} \\ &= -\frac{q_2}{2q_1} \\ &= \text{TMS}(q_1, q_2)\end{aligned}$$

Como se observa, $\text{TMS}(tq_1, tq_2) = \text{TMS}(q_1, q_2)$, demostrando la invarianza

Esta propiedad es consecuencia de la homogeneidad de la función de utilidad, ya que la TMS depende exclusivamente de la razón entre q_2 **y** q_1**, y esta razón se mantiene constante ante cambios proporcionales en ambas variables**

2.12 Ejercicio 12

Dada la función de producción

$$q = 3x_1^a x_2^b$$

1. ¿Es homogénea la función de producción? Verificarlo mediante la tesis del teorema de Euler
2. Sin realizar cálculos, justifique que la Tasa de Sustitución Técnica (TST) de los factores de la producción es una función homogénea de grado cero
3. Si la función de producción exhibe rendimientos a escala constantes con $a = 0{,}2$ y los precios de los insumos son $p_1 = 8$ y $p_2 = 4$, determinar la ecuación de la trayectoria de expansión

Solución

a) Homogeneidad de la función de producción

Una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es homogénea de grado k si:

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \forall t > 0$$

Verificamos si la función $q = 3x_1^a x_2^b$ es homogénea:

$$\begin{aligned} q(tx_1, tx_2) &= 3(tx_1)^a (tx_2)^b \\ &= 3t^a x_1^a \cdot t^b x_2^b \\ &= 3t^{a+b} x_1^a x_2^b \\ &= t^{a+b} \cdot 3x_1^a x_2^b \\ &= t^{a+b} \cdot q(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Esto demuestra que la función de producción es homogénea de grado $a + b$

Verificación mediante el teorema de Euler

El teorema de Euler establece que si f es homogénea de grado k, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k \cdot f(x_1, ..., x_n)$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x_1} &= 3a x_1^{a-1} x_2^b \\ \frac{\partial q}{\partial x_2} &= 3b x_1^a x_2^{b-1} \end{aligned}$$

Verificando el teorema:

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial q}{\partial x_2} &= x_1 \cdot 3a x_1^{a-1} x_2^b + x_2 \cdot 3b x_1^a x_2^{b-1} \\ &= 3a x_1^a x_2^b + 3b x_1^a x_2^b \\ &= 3x_1^a x_2^b (a + b) \\ &= (a + b) \cdot 3x_1^a x_2^b \\ &= (a + b) \cdot q(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifica que la función es homogénea de grado $a + b$

b) Homogeneidad de grado cero de la TST

La Tasa de Sustitución Técnica (TST) se define como:

$$\text{TST} = -\frac{\frac{\partial q}{\partial x_1}}{\frac{\partial q}{\partial x_2}}$$

Sin realizar cálculos detallados, podemos justificar que la TST es homogénea de grado cero por las siguientes razones:

- Las derivadas parciales de una función homogénea de grado k son funciones homogéneas de grado $k-1$
- Si $q(tx_1, tx_2) = t^{a+b}q(x_1, x_2)$, entonces:

$$\frac{\partial q}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) = t^{a+b-1}\frac{\partial q}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$
$$\frac{\partial q}{\partial x_2}(tx_1, tx_2) = t^{a+b-1}\frac{\partial q}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

- Por lo tanto:

$$\text{TST}(tx_1, tx_2) = -\frac{t^{a+b-1}\frac{\partial q}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{t^{a+b-1}\frac{\partial q}{\partial x_2}(x_1, x_2)} = -\frac{\frac{\partial q}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{\frac{\partial q}{\partial x_2}(x_1, x_2)} = \text{TST}(x_1, x_2)$$

- El factor t^{a+b-1} se cancela en numerador y denominador, lo que demuestra que la TST es homogénea de grado cero

c) Trayectoria de expansión

Si la función de producción exhibe rendimientos a escala constantes, entonces $a + b = 1$. Con $a = 0{,}2$, tenemos que $b = 0{,}8$

La trayectoria de expansión se obtiene a partir de la condición de minimización de costos:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{PMg_2}{PMg_1}$$

o equivalentemente:

$$\frac{PMg_1}{p_1} = \frac{PMg_2}{p_2}$$

donde PMg_i es el producto marginal del factor i. Calculamos los productos marginales:

$$PMg_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} = 3 \cdot 0{,}2 \cdot x_1^{0{,}2-1}x_2^{0{,}8} = 0{,}6 \cdot x_1^{-0{,}8}x_2^{0{,}8}$$
$$PMg_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2} = 3 \cdot 0{,}8 \cdot x_1^{0{,}2}x_2^{0{,}8-1} = 2{,}4 \cdot x_1^{0{,}2}x_2^{-0{,}2}$$

Sustituyendo en la condición de minimización:

$$\frac{0{,}6 \cdot x_1^{-0{,}8}x_2^{0{,}8}}{8} = \frac{2{,}4 \cdot x_1^{0{,}2}x_2^{-0{,}2}}{4}$$
$$\frac{0{,}075 \cdot x_1^{-0{,}8}x_2^{0{,}8}}{1} = \frac{0{,}6 \cdot x_1^{0{,}2}x_2^{-0{,}2}}{1}$$

Igualando:

$$0{,}075 \cdot x_1^{-0{,}8}x_2^{0{,}8} = 0{,}6 \cdot x_1^{0{,}2}x_2^{-0{,}2}$$
$$0{,}075 \cdot x_2^{0{,}8} = 0{,}6 \cdot x_1^{1} \cdot x_2^{-0{,}2}$$

$$0{,}075 \cdot x_2^1 = 0{,}6 \cdot x_1$$
$$0{,}125 \cdot x_2 = x_1$$

Por lo tanto, la ecuación de la trayectoria de expansión es:

$$x_1 = 0{,}125x_2$$

2.13 Ejercicio 13

Dada la función de producción

$$q = 8x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{3}{4}}$$

y siendo los precios de los insumos $p_1 = 2$ y $p_2 = 1$, se pide:

1. Indicar si la función de producción dada es homogénea. Si lo es, indicar el grado y el tipo de rendimiento a escala

2. Calcular la Tasa Marginal de Sustitución Técnica

$$TST\left(\frac{X_2}{X_1}\right)(x_1, x_2)$$

3. Hallar la ecuación de la trayectoria de expansión

Solución

1) Homogeneidad de la función de producción

Una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es homogénea de grado k si:

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \forall t > 0$$

Verificamos si la función $q = 8x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{4}}$ es homogénea:

$$\begin{aligned} q(tx_1, tx_2) &= 8(tx_1)^{\frac{1}{2}}(tx_2)^{\frac{3}{4}} \\ &= 8t^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{4}}x_2^{\frac{3}{4}} \\ &= 8t^{\frac{5}{4}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{4}} \\ &= t^{\frac{5}{4}} \cdot 8x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{4}} \\ &= t^{\frac{5}{4}} \cdot q(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función es homogénea de grado $\frac{5}{4}$

Respecto al tipo de rendimiento a escala:

- Si $k > 1$: rendimientos crecientes - Si $k = 1$: rendimientos constantes - Si $k < 1$: rendimientos decrecientes

Como $\frac{5}{4} > 1$, la función presenta rendimientos crecientes a escala

2) Tasa Marginal de Sustitución Técnica

La Tasa Marginal de Sustitución Técnica (TST) se define como:

$$TST = -\frac{\frac{\partial q}{\partial x_1}}{\frac{\partial q}{\partial x_2}}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = 8 \cdot \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{4}} = 4x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} = 8x_1^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{4}x_2^{-\frac{1}{4}} = 6x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{4}}$$

Ahora, calculamos la TST:

$$\begin{aligned} TST(x_1, x_2) &= -\frac{4x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{4}}}{6x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{4}}} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{x_1^{-\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x_2^{\frac{3}{4}}}{x_2^{-\frac{1}{4}}} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot x_1^{-1}x_2^{1} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

$$TST\left(\frac{X_2}{X_1}\right)(x_1, x_2) = -\frac{2}{3}\frac{x_2}{x_1}$$

3) Ecuación de la trayectoria de expansión

La trayectoria de expansión se obtiene a partir de la condición de minimización de costos:

$$\frac{PMg_1}{p_1} = \frac{PMg_2}{p_2}$$

donde PMg_i representa el producto marginal del factor i: $PMg_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1}$ y $PMg_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2}$
Sustituimos con $p_1 = 2$ y $p_2 = 1$:

$$\frac{4x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{4}}}{2} = \frac{6x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{4}}}{1}$$

$$2x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{4}} = 6x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{4}}$$

Multiplicamos ambos lados por $x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{4}}$:

$$2x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{3}{4}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{4}} = 6x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{4}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{4}}$$

$$2x_1^0x_2^1 = 6x_1^1x_2^0$$

$$2x_2 = 6x_1$$

$$x_2 = 3x_1$$

Por lo tanto, la ecuación de la trayectoria de expansión es:

$$x_2 = 3x_1$$

Alternativamente, podemos expresarla como:

$$\frac{x_2}{x_1} = 3$$

2.14 Ejercicio 14

Dada la función de producción:

$$P(K, L) = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

indique el grado de homogeneidad de la función y el tipo de rendimiento a escala

Solución

La función de producción dada es:

$$P(K, L) = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

Esta función corresponde a una función de producción Cobb-Douglas con parámetros α y $1 - \alpha$

Para determinar el grado de homogeneidad, debemos verificar si la función satisface la definición de función homogénea. Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado k si:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \forall t > 0$$

Aplicamos esta definición a nuestra función de producción:

$$\begin{aligned} P(tK, tL) &= (tK)^{\alpha} \cdot (tL)^{1-\alpha} \\ &= t^{\alpha} K^{\alpha} \cdot t^{1-\alpha} L^{1-\alpha} \\ &= t^{\alpha+(1-\alpha)} K^{\alpha} L^{1-\alpha} \\ &= t^1 K^{\alpha} L^{1-\alpha} \\ &= t \cdot P(K, L) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de producción $P(K, L) = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$ es homogénea de grado 1

Tipo de rendimiento a escala

El tipo de rendimiento a escala está directamente relacionado con el grado de homogeneidad de la función de producción:

- Si el grado de homogeneidad $k > 1$: rendimientos crecientes a escala - Si el grado de homogeneidad $k = 1$: rendimientos constantes a escala - Si el grado de homogeneidad $k < 1$: rendimientos decrecientes a escala

Como hemos determinado que la función $P(K, L) = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$ es homogénea de grado 1, podemos concluir que presenta rendimientos constantes a escala

Esto significa que si aumentamos todos los factores de producción (capital K y trabajo L) en una proporción t, la producción aumentará exactamente en la misma proporción t

2.15 Ejercicio 15

Sea $q = f(k, l)$ una función de producción homogénea de grado n, siendo k, l las cantidades de los insumos de producción.

Demostrar que la suma de las elasticidades parciales con respecto a ambos insumos es igual a n.

Solución

Una función $f(k,l)$ es homogénea de grado n si:

$$f(tk,tl) = t^n f(k,l) \quad \forall t > 0$$

Definición de elasticidad parcial

La elasticidad parcial de la producción con respecto a un insumo mide el cambio porcentual en la producción ante un cambio porcentual en dicho insumo, manteniendo constante el otro insumo.

Para la función $q = f(k,l)$, las elasticidades parciales son:

$$\varepsilon_k = \frac{\partial q}{\partial k} \cdot \frac{k}{q}$$

$$\varepsilon_l = \frac{\partial q}{\partial l} \cdot \frac{l}{q}$$

Demostración

Por el teorema de Euler para funciones homogéneas, si $f(k,l)$ es homogénea de grado n, entonces:

$$k \cdot \frac{\partial f}{\partial k} + l \cdot \frac{\partial f}{\partial l} = n \cdot f(k,l)$$

Dividiendo ambos lados por $f(k,l)$:

$$\frac{k}{f(k,l)} \cdot \frac{\partial f}{\partial k} + \frac{l}{f(k,l)} \cdot \frac{\partial f}{\partial l} = n$$

Observamos que:

$$\frac{k}{f(k,l)} \cdot \frac{\partial f}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial k} \cdot \frac{k}{q} = \varepsilon_k$$
$$\frac{l}{f(k,l)} \cdot \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \frac{l}{q} = \varepsilon_l$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon_k + \varepsilon_l = n$$

2.16 Ejercicio 16

Dada la función de producción:

$$q(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{5}}$$

1. Indicar el grado de homogeneidad
2. Calcular las elasticidades parciales de la producción respecto de las cantidades de los insumos

Solución

1) Grado de homogeneidad

Una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es homogénea de grado k si:

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \forall t > 0$$

Verificamos si la función $q(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{5}}$ es homogénea y determinamos su grado:

$$\begin{aligned}
q(tx_1, tx_2) &= 3(tx_1)^{\frac{1}{3}}(tx_2)^{\frac{2}{5}} \\
&= 3t^{\frac{1}{3}} x_1^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{2}{5}} \\
&= 3t^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{5}} \\
&= 3t^{\frac{5}{15}+\frac{6}{15}} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{5}} \\
&= 3t^{\frac{11}{15}} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{5}} \\
&= t^{\frac{11}{15}} \cdot 3x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{5}} \\
&= t^{\frac{11}{15}} \cdot q(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de producción es homogénea de grado $\frac{11}{15}$

2) Elasticidades parciales

La elasticidad parcial de la producción respecto a un insumo se define como:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial q}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{q}$$

Calculamos primero las derivadas parciales:

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = 3 \cdot \frac{1}{3} x_1^{\frac{1}{3}-1} x_2^{\frac{2}{5}} = x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} = 3x_1^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{5} x_2^{\frac{2}{5}-1} = \frac{6}{5} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{3}{5}}$$

Ahora calculamos las elasticidades parciales:
Elasticidad respecto de x_1:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial q}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{q}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \left(x_1^{-\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{5}} \right) \cdot \frac{x_1}{3x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{5}}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1^{-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{3}}}{1} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$$

Elasticidad respecto de x_2:

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial q}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{q}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= \left(\frac{6}{5} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{3}{5}}\right) \cdot \frac{x_2}{3x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{5}}} \\
&= \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x_2^{-\frac{3}{5}+1-\frac{2}{5}}}{1} \\
&= \frac{6}{15} \\
&= \frac{2}{5} \\
\varepsilon_2 &= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Conclusión:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{5}$$

Ahora calculemos las elasticidades parciales:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial q}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{q} \\
&= x_1^{-\frac{2}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{5}} \cdot \frac{x_1}{3x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{5}}} \\
&= x_1^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{x_1}{3x_1^{\frac{1}{3}}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot x_1^{-\frac{2}{3}} \cdot x_1 \cdot x_1^{-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot x_1^{-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \cdot x_1^0 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= \frac{\partial q}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{q} \\
&= \frac{6}{5} \cdot x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{-\frac{3}{5}} \cdot \frac{x_2}{3x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{5}}} \\
&= \frac{6}{5} \cdot x_2^{-\frac{3}{5}} \cdot \frac{x_2}{3x_2^{\frac{2}{5}}} \\
&= \frac{6}{15} \cdot x_2^{-\frac{3}{5}} \cdot x_2 \cdot x_2^{-\frac{2}{5}} \\
&= \frac{6}{15} \cdot x_2^{-\frac{3}{5}+1-\frac{2}{5}} \\
&= \frac{6}{15} \cdot x_2^0
\end{aligned}$$

$$= \frac{6}{15}$$
$$= \frac{2}{5}$$

Por lo tanto:

- **La elasticidad parcial de la producción respecto al insumo** x_1 **es** $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$
- **La elasticidad parcial de la producción respecto al insumo** x_2 **es** $\varepsilon_2 = \frac{2}{5}$

La función de producción es inelástica (debido a que las elasticidades son menores a 1) ante cambios en los insumos

2.17 Ejercicio 17

Dada la función de Cobb–Douglas

$$P = 4x_1^{0.4}x_2^{0.6}$$

1. Determinar su grado de homogeneidad
2. Hallar las productividades marginales y determinar su grado de homogeneidad
3. Hallar la $TST(X_1/X_2)(2,3)$. Verificar que es homogénea de grado cero
4. Verificar que la suma de elasticidades parciales es igual al grado de homogeneidad y que los exponentes coinciden con las elasticidades parciales
5. Determinar cómo es el rendimiento a escala
6. Hallar la trayectoria de expansión si $p_1 = 4$ y $p_2 = 2$

Solución

1) Grado de homogeneidad

Una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es homogénea de grado k si:

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \forall t > 0$$

Verificamos:

$$\begin{aligned} P(tx_1, tx_2) &= 4(tx_1)^{0.4}(tx_2)^{0.6} \\ &= 4t^{0.4}x_1^{0.4}t^{0.6}x_2^{0.6} \\ &= 4t^{0.4+0.6}x_1^{0.4}x_2^{0.6} \\ &= 4t^1 x_1^{0.4}x_2^{0.6} \\ &= t \cdot 4x_1^{0.4}x_2^{0.6} \\ &= t \cdot P(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función es homogénea de grado 1

2) Productividades marginales y su grado de homogeneidad

Calculamos las productividades marginales:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 4 \cdot 0.4 \cdot x_1^{-0.6}x_2^{0.6} = 1.6x_1^{-0.6}x_2^{0.6}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 4 \cdot 0.6 \cdot x_1^{0.4}x_2^{-0.4} = 2.4x_1^{0.4}x_2^{-0.4}$$

Ahora verificamos su grado de homogeneidad:
Para $\frac{\partial P}{\partial x_1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) &= 1.6(tx_1)^{-0.6}(tx_2)^{0.6} \\ &= 1.6t^{-0.6}x_1^{-0.6}t^{0.6}x_2^{0.6} \\ &= 1.6t^0 x_1^{-0.6}x_2^{0.6} \\ &= t^0 \cdot 1.6x_1^{-0.6}x_2^{0.6} \\ &= t^0 \cdot \frac{\partial P}{\partial x_1}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Para $\frac{\partial P}{\partial x_2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_2}(tx_1, tx_2) &= 2.4(tx_1)^{0.4}(tx_2)^{-0.4} \\ &= 2.4t^{0.4}x_1^{0.4}t^{-0.4}x_2^{-0.4} \\ &= 2.4t^0 x_1^{0.4}x_2^{-0.4} \\ &= t^0 \cdot 2.4x_1^{0.4}x_2^{-0.4} \\ &= t^0 \cdot \frac{\partial P}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, ambas productividades marginales son homogéneas de grado 0

3) Tasa de Sustitución Técnica (TST)

La Tasa de Sustitución Técnica (TST) se define como:

$$TST = -\frac{\frac{\partial P}{\partial x_1}}{\frac{\partial P}{\partial x_2}}$$

Sustituyendo las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} TST(x_1, x_2) &= -\frac{1.6x_1^{-0.6}x_2^{0.6}}{2.4x_1^{0.4}x_2^{-0.4}} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{x_1^{-1}x_2}{1} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Para $TST(2, 3)$:

$$\begin{aligned} TST(2, 3) &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Verificación de homogeneidad de grado cero:

$$\begin{aligned} TST(tx_1, tx_2) &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{tx_2}{tx_1} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{x_2}{x_1} \\ &= TST(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la TST es homogénea de grado 0

4) Verificación de la suma de elasticidades parciales

Las elasticidades parciales se definen como:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial P}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{P}$$

Elasticidad respecto a x_1:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1.6x_1^{-0.6}x_2^{0.6} \cdot \frac{x_1}{4x_1^{0.4}x_2^{0.6}} \\ &= 0.4x_1^0 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

Elasticidad respecto a x_2:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= 2.4x_1^{0.4}x_2^{-0.4} \cdot \frac{x_2}{4x_1^{0.4}x_2^{0.6}} \\ &= 0.6x_2^0 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

La suma:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0.4 + 0.6 = 1$$

Además:

- Exponente de $x_1 = 0.4 = \varepsilon_1$
- Exponente de $x_2 = 0.6 = \varepsilon_2$

5) Rendimiento a escala

Como el grado de homogeneidad es 1, la función de producción presenta rendimientos constantes a escala

6) Trayectoria de expansión

La trayectoria de expansión se obtiene igualando el cociente de las productividades marginales al cociente de los precios:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x_1}}{\frac{\partial P}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Sustituyendo:

$$\frac{1.6x_1^{-0.6}x_2^{0.6}}{2.4x_1^{0.4}x_2^{-0.4}} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 2$$

$$\frac{x_2}{x_1} = 3$$

Por lo tanto, la ecuación de la trayectoria de expansión es:

$$x_2 = 3x_1$$

2.18 Ejercicio 18

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = \alpha + \beta(Y - T) \\ T = \gamma + \delta Y \end{cases}$$

La primera ecuación es la renta total, siendo el ingreso (Y) y el consumo (C), ambas variables endógenas, la inversión (I_0) y el gasto (G_0), variables exógenas. La función de consumo está compuesta por necesidades básicas (α) que es un parámetro y por el ingreso disponible $(Y - T)$ que depende de la propensión marginal a consumir (β) que está determinada de manera exógena. Por último, los impuestos del sector privado (T) se componen de impuestos indirectos (γ) y del impuesto a la renta (δ) que depende del ingreso de cada individuo.

Se supone que los parámetros tienen los respectivos signos:

$$I_0 > 0 \quad G_0 > 0 \quad \alpha > 0 \quad 0 < \beta < 1 \quad \gamma > 0 \quad 0 < \delta < 1$$

Bajo el supuesto de que se produzca un aumento del gasto público y luego una disminución del impuesto a las ganancias, la pregunta es: **¿Cómo afectaría el cambio de estos parámetros al ingreso dentro del modelo planteado?**

Solución con 3 ecuaciones

1. Derivación respecto a G_0

Derivamos con respecto a G_0 y reordenamos:

$$\begin{aligned} Y'_{G_0} - C'_{G_0} &= 1 \\ -\beta\, Y'_{G_0} + C'_{G_0} + \beta\, T'_{G_0} &= 0 \\ -\delta\, Y'_{G_0} + T'_{G_0} &= 0 \end{aligned}$$

Esto lo podemos expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & 1 & \beta \\ -\delta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'_{G_0} \\ C'_{G_0} \\ T'_{G_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea $|J|$ el determinante de la matriz:

$$|J| = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & 1 & \beta \\ -\delta & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \beta + \beta\delta$$

Para hallar Y'_{G_0} sustituimos la primera columna por el vector de constantes y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det = 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{dY}{dG_0} = Y'_{G_0} = \frac{1}{1 - \beta + \beta\delta} > 0$$

2. Derivación respecto a δ

Derivamos respecto a δ y reordenamos:

$$\begin{aligned} Y'_{\delta} - C'_{\delta} &= 0 \\ -\beta\, Y'_{\delta} + C'_{\delta} + \beta\, T'_{\delta} &= 0 \\ -\delta\, Y'_{\delta} + T'_{\delta} &= Y \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & 1 & \beta \\ -\delta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'_{\delta} \\ C'_{\delta} \\ T'_{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y \end{pmatrix}$$

Como antes, $|J| = 1 - \beta + \beta\delta$. Para hallar Y'_{δ} reemplazamos la primera columna por el vector de términos constantes:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ Y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$-\beta\, Y$$

Entonces, por la regla de Cramer:

$$\frac{dY}{d\delta} = Y'_{\delta} = \frac{-\beta\, Y}{1 - \beta + \beta\delta} < 0$$

Conclusión

Estos resultados muestran que:

- Un aumento en el gasto público G_0 incrementa el ingreso Y en $\frac{1}{1-\beta+\beta\delta}$ unidades
- Un aumento en δ (mayor sensibilidad impositiva) reduce Y en proporción a $\frac{\beta Y}{1-\beta+\beta\delta}$

Solución con sistema de 2 ecuaciones

Despejamos T de la tercera ecuación y la insertamos en la segunda. Operando algebraicamente obtenemos:

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = \alpha - \beta\gamma + \beta(1-\delta)\,Y$$

El sistema derivado es:

$$Y'_{G_0} - C'_{G_0} = 1$$
$$-\beta(1-\delta)\,Y'_{G_0} + C'_{G_0} = 0$$

Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\beta(1-\delta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'_{G_0} \\ C'_{G_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante del sistema es:

$$|J| = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot [-\beta(1-\delta)] = 1 - \beta(1-\delta) = 1 - \beta + \beta\delta$$

Para hallar Y'_{G_0}, sustituimos la primera columna por el vector de constantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 1$$

Por la regla de Cramer se obtiene:

$$Y'_{G_0} = \frac{1}{1-\beta+\beta\delta}$$

Derivación respecto a δ

El sistema derivado es:

$$Y'_\delta - C'_\delta = 0$$
$$-\beta(1-\delta)\,Y'_\delta + C'_\delta = -\beta Y$$

Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\beta(1-\delta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'_\delta \\ C'_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta Y \end{pmatrix}$$

El determinante es, como antes:

$$|J| = 1 - \beta + \beta\delta$$

Para hallar Y'_δ, sustituimos la primera columna por el vector constante:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\beta Y & 1 \end{pmatrix} \quad \det = 0 \cdot 1 - (-1)(-\beta Y) = -\beta Y$$

Por la regla de Cramer:

$$Y'_\delta = \frac{-\beta\,Y}{1-\beta+\beta\delta}$$

2.19 Ejercicio 19

Dado el modelo IS – LM:

$$\begin{cases} Y = C(Y_d) + I(r) + g \\ M_p = L(Y, r) \\ Y_d = Y - T(Y, \theta) \end{cases}$$

Las variables endógenas son el ingreso (Y), la tasa de interés (r) y el ingreso disponible (Y_d); la variable exógena es M_p y los parámetros del modelo son el gasto público (g) y un determinante de la masa impositiva que tienen que pagar los consumidores (θ).

Se supone que el modelo presenta derivadas parciales continuas con signos:

$$0 < \frac{\partial C}{\partial Y_d} < 1 \quad ; \quad \frac{\partial I}{\partial r} < 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial Y} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial r} < 0 \quad ; \quad 0 < \frac{\partial T}{\partial Y} < 1 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} > 0$$

(a) Determinar si este modelo cumple con las condiciones del teorema de la función implícita (sabiendo que existen todas las derivadas parciales). **Importante:** reemplazar Y_d en la primera ecuación para que quede un sistema de dos ecuaciones.

(b) Determinar cuál es el efecto que causa un aumento del gasto público sobre las variables endógenas Y y r.

Solución

Paso 1: Derivadas parciales

Derivamos ambas ecuaciones respecto a g, recordando que tanto Y como r dependen de g, por lo que aplicamos la regla de la cadena:

$$F'_g = \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial g} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial g} + \frac{\partial F}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial g} = 0$$
$$G'_g = \frac{\partial G}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial g} + \frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial g} + \frac{\partial G}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial g} = 0$$

Desarrollando:

$$\frac{\partial}{\partial g}\Big[Y - C(Y - T(Y,\theta)) - I(r) - g\Big] = \Big(1 - C'(Y - T(Y,\theta))\,[1 - T_Y(Y,\theta)]\Big)\,\frac{\partial Y}{\partial g} - I'(r)\,\frac{\partial r}{\partial g} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial g}[L(Y,r) - M_p] = L_Y(Y,r)\,\frac{\partial Y}{\partial g} + L_r(Y,r)\,\frac{\partial r}{\partial g} = 0$$

Es decir, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \Big(1 - C'(Y - T(Y,\theta))\,[1 - T_Y(Y,\theta)]\Big)\,\dfrac{\partial Y}{\partial g} - I'(r)\,\dfrac{\partial r}{\partial g} = 1 \\[2ex] L_Y(Y,r)\,\dfrac{\partial Y}{\partial g} + L_r(Y,r)\,\dfrac{\partial r}{\partial g} = 0 \end{cases}$$

Paso 2: Sistema matricial

Expresamos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 - C'(Y - T(Y,\theta))\,[1 - T_Y(Y,\theta)] & -I'(r) \\ L_Y(Y,r) & L_r(Y,r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial g} \\ \frac{\partial r}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Resolver con la Regla de Cramer

El determinante del sistema es:

$$J = \Big(1 - C'(Y - T(Y,\theta))\,[1 - T_Y(Y,\theta)]\Big) \cdot L_r(Y,r) + I'(r) \cdot L_Y(Y,r)$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$\frac{\partial Y}{\partial g} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -I'(r) \\ 0 & L_r(Y,r) \end{vmatrix}}{J} = \frac{L_r(Y,r)}{J}$$

$$\frac{\partial r}{\partial g} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - C'(Y - T(Y,\theta))\,[1 - T_Y(Y,\theta)] & 1 \\ L_Y(Y,r) & 0 \end{vmatrix}}{J} = \frac{-L_Y(Y,r)}{J}$$

Paso 4: Signos e interpretación

Dado que

$$0 < C'(Y - T(Y,\theta)) < 1, \quad 0 < T_Y(Y,\theta) < 1, \quad I'(r) < 0, \quad L_Y(Y,r) > 0, \quad L_r(Y,r) < 0,$$

se cumple

$$1 - C'(Y - T(Y,\theta))\,[1 - T_Y(Y,\theta)] > 0, \quad -I'(r) > 0.$$

Por tanto, el determinante:

$$J = \underbrace{\Big[1 - \overbrace{\underbrace{C'(Y - T(Y,\theta))}_{0<\cdot<1} \times \underbrace{(1 - T_Y(Y,\theta))}_{0<\cdot<1}}^{0<\cdot<1}\Big]}_{>0} \times \underbrace{L_r(Y,r)}_{<0} - \underbrace{(-I'(r))}_{>0} \times \underbrace{L_Y(Y,r)}_{>0} \;<\; 0$$

Como $L_r < 0$ y $L_Y > 0$, el numerador de $\partial Y/\partial g$ es negativo y el de $\partial r/\partial g$ también:

$$\frac{\partial Y}{\partial g} = \frac{L_r}{J} > 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial g} = \frac{-L_Y}{J} > 0$$

Cuando el gobierno aumenta su gasto g, se desencadenan dos efectos:

Más demanda ⇒ más producción (Y)

- *Gasto directo*: el gobierno inyecta recursos pagando obras, sueldos, compras de insumos, etc.
- *Cadena de efectos*: esos pagos se convierten en ingresos para empresas y trabajadores, que a su vez consumen parte de ese ingreso extra, generando más ventas e ingresos en otros sectores.
- *Multiplicador*: cada unidad de gasto público produce más de una unidad de aumento en el ingreso agregado, pues el dinero circula y se vuelve a gastar varias veces.

Mayor Y ⇒ mayor demanda de dinero ⇒ sube r

- *Demanda de dinero transaccional*: al crecer Y, hogares y empresas realizan más transacciones y necesitan más liquidez.
- *Curva LM*: $L(Y,r)$ crece con Y y cae con r. Con M_p fijo, un aumento de L empuja la tasa r al alza hasta reequilibrar oferta y demanda monetaria.
- *Crowding-out parcial*: al subir r, el crédito se encarece y la inversión privada se modera, atenuando algo el impulso inicial sobre Y, pero sin anularlo.

2.20 Ejercicio 20

Dado el siguiente modelo:

$$\begin{cases} A = B(A - T(A)) + D(e) + F_0 \\ M = L(A, e) \end{cases}$$ siendo las variables endógenas: A y e, las exógenas: M y F_0

El modelo presenta derivadas parciales continuas y se cumplen las siguientes relaciones:

$$0 < \frac{\partial B}{\partial(A - T(A))} < 1, \qquad \frac{\partial D}{\partial e} < 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial A} > 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial e} < 0, \qquad 0 < \frac{\partial T}{\partial A} < 1$$

Diferenciar el sistema y escribirlo en forma matricial.

(a) Diferenciar el sistema y escribirlo en forma matricial.

(b) Plantear el determinante Jacobiano y mostrar que es distinto de cero.

(c) Hallar las expresiones que permiten calcular las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial A}{\partial F_0}, \qquad \frac{\partial e}{\partial F_0}$$

y determinar su signo. Interpretar en términos del impacto que tiene sobre las variables endógenas (A, e) un cambio en el valor de la variable exógena F_0.

Solución

a)

Partimos del sistema:

$$\begin{cases} A = B(A - T(A)) + D(e) + F_0 \\ M = L(A, e) \end{cases}$$

y definimos las derivadas parciales:

$$B'(s) = \frac{\partial B}{\partial s}, \quad T_A = \frac{\partial T}{\partial A}, \quad D_e = \frac{\partial D}{\partial e}, \quad L_A = \frac{\partial L}{\partial A}, \quad L_e = \frac{\partial L}{\partial e}$$

Diferenciación de la primera ecuación. Aplicando la regla de la cadena:

$$dA = B'(A - T(A))\,(1 - T_A)\,dA + D_e\,de + dF_0$$

Reordenando los términos que contienen dA y de:

$$[1 - B'(A - T(A))(1 - T_A)]\,dA - D_e\,de = dF_0$$

Diferenciación de la segunda ecuación.

$$dM = d[L(A, e)] = L_A\,dA + L_e\,de$$

Forma matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 - B'(A - T(A))(1 - T_A) & -D_e \\ L_A & L_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA \\ de \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dF_0 \\ dM \end{pmatrix}$$

b) Determinante Jacobiano

Definimos la matriz Jacobiano:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - B'(A - T(A))(1 - T_A) & -D_e \\ L_A & L_e \end{pmatrix}$$

Su determinante es:

$$\begin{aligned} \det J &= [1 - B'(A - T(A))(1 - T_A)]\,L_e - (-D_e)\,L_A \\ &= [1 - B'(A - T(A))(1 - T_A)]\,L_e + D_e\,L_A \end{aligned}$$

Por hipótesis:

$$0 < B'(A - T(A)) < 1, \qquad 0 < T_A < 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - B'(A - T(A))(1 - T_A) > 0$$

$$D_e < 0, \qquad L_A > 0, \qquad L_e < 0$$

De donde:

$$[1 - B'(A - T(A))(1 - T_A)]\,L_e < 0, \qquad D_e\,L_A < 0$$

y por tanto:

$$\det J < 0 \quad \Longrightarrow \quad \det J \neq 0$$

c)

Partimos del sistema linealizado:

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA \\ de \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dF_0 \\ dM \end{pmatrix}$$

donde:

$$J_{11} = 1 - B'(A - T(A))(1 - T_A), \qquad J_{12} = -D_e, \qquad J_{21} = L_A, \qquad J_{22} = L_e$$

y fijamos $dM = 0$.

Por la regla de Cramer:

$$\frac{\partial A}{\partial F_0} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & J_{12} \\ 0 & J_{22} \end{pmatrix}}{\det J} = \frac{1 \cdot J_{22} - 0 \cdot J_{12}}{\det J} = \frac{L_e}{\det J}$$

$$\frac{\partial e}{\partial F_0} = \frac{\det \begin{pmatrix} J_{11} & 1 \\ J_{21} & 0 \end{pmatrix}}{\det J} = \frac{J_{11} \cdot 0 - J_{21} \cdot 1}{\det J} = -\frac{L_A}{\det J}$$

Como en el apartado b) vimos que $\det J < 0$ y por hipótesis $L_e < 0$, $L_A > 0$, se concluye que:

$$\frac{\partial A}{\partial F_0} > 0, \qquad \frac{\partial e}{\partial F_0} > 0$$

Por tanto, un aumento de la variable exógena F_0 induce simultáneamente:

- un incremento en A
- un mayor valor de e

2.21 Ejercicio 21

Considere las siguientes funciones de demanda para dos bienes, x e y, donde p_x y p_y son los precios de los bienes x e y, respectivamente, e I es el ingreso del consumidor:

$$D_x = \frac{100}{p_x} - 30\,p_y + \sqrt{I}$$

$$D_y = -p_y - 30\,p_x^2 + \ln(I)$$

1. Clasifique los bienes entre sí
2. Clasifique los bienes respecto a sus propios precios.
3. Clasifique los bienes respecto a cambios en el ingreso.
4. Hallar la elasticidad ingreso de la demanda del bien x, considere el punto: $p_x = 2$, $p_y = 1$ e $I = 100$

Solución

Se consideran las siguientes funciones de demanda para dos bienes, x e y:

$$D_x = \frac{100}{p_x} - 30\,p_y + \sqrt{I}$$

$$D_y = -p_y - 30\,p_x^2 + \ln(I)$$

Donde p_x y p_y son los precios de x e y, respectivamente, e I es el ingreso del consumidor.

Clasificación de los bienes entre sí: Se determina la relación cruzada entre las demandas:

1. En D_x, el efecto del precio de y es:
$$\frac{\partial D_x}{\partial p_y} = -30 < 0$$
Esto indica que, al aumentar p_y, la demanda de x disminuye.

2. De forma similar, en D_y se observa que el término relacionado con p_x es $-30\,p_x^2$. Al aumentar p_x (considerando $p_x > 0$), el efecto es negativo:
$$\frac{\partial D_y}{\partial p_x} = -60\,p_x < 0$$

Dado que un incremento en el precio de uno de los bienes reduce la demanda del otro, se concluye que los bienes son **complementarios**

Clasificación respecto a sus propios precios: Se analiza el efecto de un cambio en el precio propio sobre la demanda:

1. Para x:
$$\frac{\partial D_x}{\partial p_x} = -\frac{100}{p_x^2} < 0$$

2. Para y:
$$\frac{\partial D_y}{\partial p_y} = -1 < 0$$

En ambos casos, la demanda disminuye al incrementarse el precio, los bienes son **típicos/ordinarios**

Clasificación frente a cambios en el ingreso: Se observa cómo varían las demandas ante cambios en I:

1. Para x:
$$\frac{\partial D_x}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{I}} > 0$$

2. Para y:
$$\frac{\partial D_y}{\partial I} = \frac{1}{I} > 0$$

Como un aumento en el ingreso incrementa la demanda de ambos bienes, estos se clasifican como **bienes normales**

Elasticidad ingreso de la demanda del bien x: La elasticidad ingreso se define como

$$E_I = \frac{\partial D_x}{\partial I} \cdot \frac{I}{D_x}$$

Evaluamos en el punto $p_x = 2$, $p_y = 1$ e $I = 100$:

$$D_x = \frac{100}{2} - 30(1) + \sqrt{100} = 50 - 30 + 10 = 30$$

Además,

$$\frac{\partial D_x}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{I}} = \frac{1}{2 \cdot 10} = \frac{1}{20} = 0.05$$

Así, la elasticidad ingreso es:

$$E_I = 0.05 \cdot \frac{100}{30} = 0.05 \cdot \frac{10}{3} = \frac{0.5}{3} \approx 0.167$$

Un valor de $E_I \approx 0.167$ indica que una variación del 1% en el ingreso provoca aproximadamente un incremento del 0.167% en la demanda de x; en otras palabras, el bien x es un bien de primera necesidad (o inelástico respecto al ingreso)

2.22 Ejercicio 22

Considere la función de producción: $Y(K, L, A) = A(R) \cdot F(K(R), L)$ donde Y es la producción, K es el capital, L es el trabajo y A es el factor tecnológico. Suponga que el factor tecnológico depende del gasto en I+D, llamado R, de la siguiente forma: $A = \ln(1 + R)$ Por otro lado K también depende de R: $K = R^2$ Además, la función de producción es: $F(K(R), L) = K^{0.5}L^{0.5}$

1. Calcule como varía Y cuando aumenta el gasto en I+D

2. Evalue en el siguiente punto e interprete el resultado anterior. $K = 100$, $L = 100$ y $R = 9$

Solución

Por regla de la cadena para funciones compuestas se tiene:

$$\frac{dY}{dR} = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{dK}{dR} + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{dL}{dR} + \frac{\partial Y}{\partial A} \cdot \frac{dA}{dR}$$

Dado que en este ejercicio L es constante respecto a R (es decir, $\frac{dL}{dR} = 0$), se simplifica a:

$$\frac{dY}{dR} = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{dK}{dR} + \frac{\partial Y}{\partial A} \cdot \frac{dA}{dR}$$

Recordemos que la función de producción es:

$$Y = A \cdot F(K, L) = A \cdot K^{0.5} L^{0.5}$$

y las relaciones son:

$$A = \ln(1 + R), \quad K = R^2$$

Procedemos a calcular cada derivada parcial e interna:

1. Derivadas parciales de Y:

$$\frac{\partial Y}{\partial A} = K^{0.5} L^{0.5} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Y}{\partial K} = A \cdot \frac{\partial}{\partial K}\left(K^{0.5} L^{0.5}\right) = A \cdot \frac{1}{2} K^{-0.5} L^{0.5}$$

2. Derivadas de las funciones internas respecto a R:

$$\frac{dA}{dR} = \frac{d}{dR} \ln(1 + R) = \frac{1}{1 + R}$$

$$\frac{dK}{dR} = \frac{d}{dR}(R^2) = 2R$$

Observa que, al tener $K = R^2$, se cumple:

$$K^{0.5} = (R^2)^{0.5} = R \quad \text{y} \quad K^{-0.5} = \frac{1}{R}$$

3. Sustituyendo en la regla de la cadena:

$$\frac{dY}{dR} = \left[A \cdot \frac{1}{2} K^{-0.5} L^{0.5}\right] \cdot (2R) + \left[K^{0.5} L^{0.5}\right] \cdot \frac{1}{1 + R}$$

Reemplazamos $A = \ln(1 + R)$, $K^{-0.5} = \frac{1}{R}$ y $K^{0.5} = R$:

$$\frac{dY}{dR} = \ln(1 + R) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot L^{0.5} \cdot (2R) + R\, L^{0.5} \cdot \frac{1}{1 + R}$$

El primer término se simplifica ya que:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot (2R) = 1$$

Quedando:

$$\frac{dY}{dR} = L^{0.5} \ln(1 + R) + \frac{R\, L^{0.5}}{1 + R}$$

Recordemos que en el primer inciso se obtuvo:
Para $L = 100$ se tiene $L^{0.5} = \sqrt{100} = 10$
Evaluamos en el punto $R = 9$:

$$\left.\frac{dY}{dR}\right|_{R=9} = 10 \left[\ln(10) + \frac{9}{10}\right] \approx 10\,[2.3026 + 0.9] \approx 10 \times 3.2026 \approx 32.03$$

Este resultado indica que, en $R = 9$, un incremento marginal en el gasto en I+D incrementa la producción en aproximadamente 32 unidades

2.23 Ejercicio 23

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en tres variables x, y y z:

$$\begin{cases} x^3 + y^2 - 2z^2 - 10 = 0 \\ \ln(x) + 4y^2 + 2^z - 3 = 0 \end{cases}$$

Suponga que y y z se definen implícitamente como funciones de x; es decir, $y = y(x)$ y $z = z(x)$. Se pide:

1. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$
2. Hallar $\dfrac{dz}{dx}$

Solución

Consideramos el sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^2 - 2z^2 - 10 = 0 \\ \ln(x) + 4y^2 + 2^z - 3 = 0 \end{cases}$$

donde suponemos que y y z son funciones de x, es decir, $y = y(x)$ y $z = z(x)$.

Definimos

$$F(x, y, z) = x^3 + y^2 - 2z^2 - 10 \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = \ln(x) + 4y^2 + 2^z - 3$$

Como $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$, al derivar respecto a x y usando la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \tag{2}$$

Derivación de la primera ecuación

La función

$$F(x, y, z) = x^3 + y^2 - 2z^2 - 10 = 0$$

al derivar respecto a x se obtiene:

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^2) - 2\frac{d}{dx}(z^2) = 3x^2 + 2y\frac{dy}{dx} - 4z\frac{dz}{dx} = 0$$

Es decir,

$$2y\,\frac{dy}{dx} - 4z\,\frac{dz}{dx} = -3x^2 \tag{1}$$

Derivación de la segunda ecuación

La función

$$G(x, y, z) = \ln(x) + 4y^2 + 2^z - 3 = 0$$

al derivar respecto a x se tiene:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) + \frac{d}{dx}(4y^2) + \frac{d}{dx}(2^z) = \frac{1}{x} + 8y\frac{dy}{dx} + 2^z\ln(2)\frac{dz}{dx} = 0$$

O lo que es igual a:

$$8y\,\frac{dy}{dx} + 2^z\ln(2)\,\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} \tag{2}$$

Resolución del sistema para $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$

Las ecuaciones (1) y (2) se resumen en el sistema lineal:

$$\begin{cases} 2y\,\dfrac{dy}{dx} - 4z\,\dfrac{dz}{dx} = -3x^2 \\ 8y\,\dfrac{dy}{dx} + 2^z\ln(2)\,\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

El sistema anterior se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2y & -4z \\ 8y & 2^z\ln(2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{dz}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2 \\ -\dfrac{1}{x} \end{pmatrix}$$

El determinante (jacobiano) de la matriz de coeficientes es:

$$|J| = \begin{vmatrix} 2y & -4z \\ 8y & 2^z\ln(2) \end{vmatrix} = 2y\,(2^z\ln(2)) - (-4z)(8y) = 2y\Big(2^z\ln(2) + 16z\Big)$$

Cálculo de $\dfrac{dz}{dx}$

Para hallar $\frac{dz}{dx}$ se reemplaza la segunda columna por el vector de constantes:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2y & -3x^2 \\ 8y & -\dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = (2y)\left(-\frac{1}{x}\right) - (-3x^2)(8y) = -\frac{2y}{x} + 24x^2y$$

Factorizando,

$$\Delta_z = 2y\left(12x^2 - \frac{1}{x}\right)$$

Por la regla de Cramer:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\Delta_z}{|J|} = \frac{2y\left(12x^2 - \frac{1}{x}\right)}{2y\Big(2^z\ln(2) + 16z\Big)} = \frac{12x^2 - \frac{1}{x}}{2^z\ln(2) + 16z}$$

Cálculo de $\dfrac{dy}{dx}$

Para hallar $\frac{dy}{dx}$ se reemplaza la primera columna por el vector de constantes:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -3x^2 & -4z \\ -\dfrac{1}{x} & 2^z\ln(2) \end{vmatrix} = (-3x^2)(2^z\ln(2)) - \left[-4z\left(-\frac{1}{x}\right)\right] = -3x^2\,2^z\ln(2) - \frac{4z}{x}$$

Entonces, por Cramer:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta_y}{|J|} = \frac{-3x^2\,2^z\ln(2) - \frac{4z}{x}}{2y\Big(2^z\ln(2) + 16z\Big)}$$

2.24 Ejercicio 24

Consideremos el siguiente modelo IS–LM:

$$\begin{cases} Y = C_0 + c\,Y_d + I_0 - r + g, \\ \dfrac{M}{P} = h\,Y - k\,r, \\ Y_d = Y - \theta\,Y \end{cases}$$

Las variables *endógenas* son

$$Y, \quad r,$$

y las *exógenas* son

$$C_0,\ c,\ I_0,\ g,\ M,\ P,\ h,\ k,\ \theta.$$

Signos de los parámetros (hipótesis de comportamiento)

$$C_0 > 0, \quad 0 < c < 1, \quad I_0 > 0, \quad g > 0, \quad M > 0, \quad P > 0, \quad h > 0, \quad k > 0, \quad 0 < \theta < 1$$

Calcular el efecto de un aumento de g (gasto) y de un aumento de c (propensión marginal al consumo) sobre las variables Y y r, es decir, hallar

$$\frac{\partial Y}{\partial g}, \quad \frac{\partial r}{\partial g}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial Y}{\partial c}, \quad \frac{\partial r}{\partial c}$$

Solución

Paso 1: Reducción a dos ecuaciones

Sustituimos $Y_d = Y - \theta Y = (1-\theta)Y$ en la primera ecuación del modelo:

$$\begin{cases} Y = C_0 + c\,(1-\theta)Y + I_0 - r + g, \\ \dfrac{M}{P} = h\,Y - k\,r \end{cases}$$

Reescribimos ambas en forma $F_i(Y, r; g, c) = 0$:

$$\begin{cases} F_1(Y, r; g, c) \equiv Y - [C_0 + c(1-\theta)Y + I_0 - r + g] = 0, \\ F_2(Y, r) \equiv h\,Y - k\,r - \dfrac{M}{P} = 0 \end{cases}$$

Paso 2: Derivamos

Derivamos ambas ecuaciones respecto a g, manteniendo fijos los demás parámetros:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial g} + \frac{\partial F_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial g} + \frac{\partial F_1}{\partial g} = 0$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial g} + \frac{\partial F_2}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial g} = 0$$

Aquí:

$$F_{1Y} = 1 - c(1-\theta), \quad F_{1r} = 1, \quad F_{1g} = -1, \quad F_{2Y} = h, \quad F_{2r} = -k$$

Por tanto:

$$\begin{cases} (1 - c(1-\theta))\,\frac{\partial Y}{\partial g} + \frac{\partial r}{\partial g} - 1 = 0, \\ h\,\frac{\partial Y}{\partial g} - k\,\frac{\partial r}{\partial g} = 0 \end{cases}$$

Paso 3: Forma matricial y Cramer

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 - c(1-\theta) & 1 \\ h & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial g} \\ \frac{\partial r}{\partial g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - c(1-\theta) & 1 \\ h & -k \end{vmatrix} = -k[1 - c(1-\theta)] - h$$

Por Cramer:

$$\frac{\partial Y}{\partial g} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-k}{\Delta}$$

$$\frac{\partial r}{\partial g} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - c(1-\theta) & 1 \\ h & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-h}{\Delta}$$

Análisis de signos Sabemos que

$$0 < c < 1, \quad 0 < \theta < 1 \implies 1 - c(1-\theta) > 0, \quad k > 0,\ h > 0 \implies \Delta < 0$$

Además, $-k < 0$ y $-h < 0$. Luego

$$\frac{\partial Y}{\partial g} = \frac{-k}{\Delta} > 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial g} = \frac{-h}{\Delta} > 0$$

Es decir, un incremento en g aumenta tanto Y como r.

Efecto de un aumento de c sobre Y y r

1. Derivadas parciales de F_1 y F_2 respecto a c) Recordamos:

$$F_1(Y,r;c) \equiv Y - [C_0 + c(1-\theta)Y + I_0 - r + g] = 0, \quad F_2(Y,r) \equiv h\,Y - k\,r - \frac{M}{P} = 0$$

De aquí:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Y} = 1 - c(1-\theta), \quad \frac{\partial F_1}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial c} = -(1-\theta)\,Y$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial Y} = h, \quad \frac{\partial F_2}{\partial r} = -k, \quad \frac{\partial F_2}{\partial c} = 0$$

2. Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1-c(1-\theta))\,\dfrac{\partial Y}{\partial c} + \dfrac{\partial r}{\partial c} - (1-\theta)\,Y = 0, \\ h\,\dfrac{\partial Y}{\partial c} - k\,\dfrac{\partial r}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

3. Forma matricial y Cramer

$$\begin{pmatrix} 1-c(1-\theta) & 1 \\ h & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial r}{\partial c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\theta)\,Y \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante es $\Delta = -k[1-c(1-\theta)] - h$. Por Cramer:

$$\frac{\partial Y}{\partial c} = \frac{\begin{vmatrix} (1-\theta)Y & 1 \\ 0 & -k \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-k(1-\theta)Y}{\Delta}$$

$$\frac{\partial r}{\partial c} = \frac{\begin{vmatrix} 1-c(1-\theta) & (1-\theta)Y \\ h & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-h(1-\theta)Y}{\Delta}$$

4. Análisis de signos Dado $0 < c < 1$, $0 < \theta < 1$, $h > 0$, $k > 0$, $Y > 0$, sabemos que $\Delta < 0$ y $(1-\theta)Y > 0$. Además, los numeradores $-k(1-\theta)Y$ y $-h(1-\theta)Y$ son negativos. Por tanto:

$$\frac{\partial Y}{\partial c} > 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial c} > 0$$

Es decir, un aumento de la propensión marginal a consumir c eleva tanto Y como r.

2.25 Ejercicio 25

Dada la siguiente función de utilidad:

$$U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$$

en donde $x_1 = f(t)$ y $x_2 = g(t)$ están definidos por el sistema:

$$\begin{cases} x_1\, x_2 = t^2 + 1 \\ x_1^3 + \sqrt{x_2 x_1} = 3t \end{cases}$$

(a) Umg x_2. Interpretar el resultado.

(b) ¿Cuánto aumenta la utilidad con un incremento de t, desde $t = 1$?

Solución

a)

Dado

$$U(x_1, x_2) = x_1^2\, x_2$$

calculamos

$$U_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial (x_1^2\, x_2)}{\partial x_2} = x_1^2$$

Por tanto,

$$U_{x_2} = x_1^2 > 0$$

- La utilidad marginal de x_2 es positiva, de modo que un aumento de x_2 incrementa la utilidad
- Además, la utilidad que proviene de x_2 crece con x_1^2: cuanto mayor sea x_1, mayor es el aporte al bienestar de una unidad adicional de x_2

b)

Por la regla de la cadena para funciones compuestas,

$$\frac{dU}{dt} = U_{x_1}\frac{dx_1}{dt} \; + \; U_{x_2}\frac{dx_2}{dt} = 2\, x_1\, x_2\, x_1'(t) \; + \; x_1^2\, x_2'(t)$$

Ahora determinamos $x_1'(t)$ y $x_2'(t)$ a partir del sistema implícito

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, t) \; = \; x_1\, x_2 \; - \; (t^2+1) \; = \; 0 \\ G(x_1, x_2, t) \; = \; x_1^3 \; + \; \sqrt{x_1\, x_2} \; - \; 3t \; = \; 0 \end{cases}$$

Derivando implícitamente respecto a t:

$$\begin{aligned} F_{x_1}\, x_1' \; + \; F_{x_2}\, x_2' \; + \; F_t &= 0 \\ G_{x_1}\, x_1' \; + \; G_{x_2}\, x_2' \; + \; G_t &= 0 \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$F_{x_1} = x_2, \quad F_{x_2} = x_1, \quad F_t = -2t$$

$$G_{x_1} = 3x_1^2 + \frac{x_2}{2\sqrt{x_1\, x_2}}, \quad G_{x_2} = \frac{x_1}{2\sqrt{x_1\, x_2}}, \quad G_t = -3$$

El jacobiano del sistema es

$$J = \begin{vmatrix} F_{x_1} & F_{x_2} \\ G_{x_1} & G_{x_2} \end{vmatrix} = x_2\, \frac{x_1}{2\sqrt{x_1 x_2}} - x_1\left(3x_1^2 + \frac{x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}}\right)$$

Por el método de Cramer:

$$x_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} -F_t & F_{x_2} \\ -G_t & G_{x_2} \end{vmatrix}}{J} = \frac{\begin{vmatrix} 2t & x_1 \\ 3 & \dfrac{x_1}{2\sqrt{x_1 x_2}} \end{vmatrix}}{J} \qquad x_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} F_{x_1} & -F_t \\ G_{x_1} & -G_t \end{vmatrix}}{J} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & 2t \\ 3x_1^2 + \dfrac{x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} & 3 \end{vmatrix}}{J}$$

Finalmente, la derivada de U es

$$\frac{dU}{dt} = 2\, x_1\, x_2\, \frac{\begin{vmatrix} 2t & x_1 \\ 3 & \dfrac{x_1}{2\sqrt{x_1 x_2}} \end{vmatrix}}{J} + x_1^2\, \frac{\begin{vmatrix} x_2 & 2t \\ 3x_1^2 + \dfrac{x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} & 3 \end{vmatrix}}{J}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{2\,x_1\,x_2\left(\frac{t\,x_1}{\sqrt{x_1x_2}} - 3\,x_1\right) + x_1^2\left(3\,x_2 - 6t\,x_1^2 - \frac{t\,x_2}{\sqrt{x_1x_2}}\right)}{J}$$

Para $t = 1$ el sistema

$$\begin{cases} x_1\,x_2 = 2 \\ x_1^3 + \sqrt{x_1\,x_2} = 3 \end{cases}$$

y como $\sqrt{x_1x_2} = \sqrt{2}$, se sigue

$$x_1^3 = 3 - \sqrt{2} \implies x_1(1) = \sqrt[3]{3 - \sqrt{2}}$$

$$x_2(1) = \frac{2}{x_1(1)} = \frac{2}{\sqrt[3]{3 - \sqrt{2}}}$$

Para $t = 1$:

$$x_1(1) = \sqrt[3]{3 - \sqrt{2}} \approx 1.1661 \qquad x_2(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{3 - \sqrt{2}}} \approx 1.7151$$

Valuando la derivada en el punto

$$\left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=1} = \left.\frac{2\,x_1\,x_2\left(\frac{1\cdot x_1}{\sqrt{x_1x_2}} - 3\,x_1\right) + x_1^2\left(3\,x_2 - 6\cdot 1\cdot x_1^2 - \frac{1\cdot x_2}{\sqrt{x_1x_2}}\right)}{J}\right|_{t=1} = \frac{-16.4431}{-4.7574} \approx 3.4563$$

Por lo tanto un aumento de t, desde $t = 1$, genera un aumento de la utilidad de aproximadamente 3.4

3 Autovectores, autovalores y formas cuadráticas

3.1 Ejercicio 1

Para cada una de las matrices anteriores, se solicita: Hallar el polinomio característico y los autovalores y los autovectores asociados

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -8 & -6 \\ -4 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 4 & -8 & -6 \\ -4 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

f)

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

g)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

h)

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

i)

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

j)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

a) **Polinomio característico**

El polinomio característico de A se obtiene calculando

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

En este caso,

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - (3 \cdot 2)$$

Realizando el producto y la resta:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = (2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Podemos factorizarlo:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

Por tanto, el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Autovalores y autovectores

Dada la factorización anterior, se obtienen los autovalores:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1$$

Autovalor $\lambda_1 = 4$

Para encontrar el autovector asociado, resolvemos

$$(A - 4I)\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. El sistema lineal resultante es:

$$\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones son equivalentes. De la primera,

$$-3x + 2y = 0 \implies 2y = 3x \implies y = \frac{3}{2}x$$

Escogiendo, por ejemplo, $x = 2$, se obtiene $y = 3$. Un autovector correspondiente es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_2 = -1$

Para el segundo autovalor, resolvemos

$$(A - (-1)I)\mathbf{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (A + I)\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial:

$$A + I = \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 3 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. El sistema lineal resultante es:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación,

$$2x + 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -x$$

Escogiendo, por ejemplo, $x = 1$, se obtiene $y = -1$. Un autovector correspondiente es:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Polinomio característico

El polinomio característico de A se obtiene calculando

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

En este caso, considerando

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -8 & -6 \\ -4 & 11 & 9 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 4 & -8-\lambda & -6 \\ -4 & 11 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 4 & -8-\lambda & -6 \\ -4 & 11 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

Utilizando la expansión por cofactores en la primera fila se llega a la expresión:

$$p(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

Notamos que

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

Por tanto, el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

Autovalores y autovectores

Dada la factorización anterior, se obtienen los autovalores:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -2$$

Autovalor $\lambda_1 = 2$

Para encontrar el autovector asociado, resolvemos

$$(A - 2I)\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial,

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2-2 & -1 & -1 \\ 4 & -8-2 & -6 \\ -4 & 11 & 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & -10 & -6 \\ -4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. El sistema resultante es:

$$\begin{cases} -y - z = 0 \\ 4x - 10y - 6z = 0 \\ -4x + 11y + 7z = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación se tiene que $y = -z$. Sustituyendo en la segunda:

$$4x - 10(-z) - 6z = 4x + 10z - 6z = 4x + 4z = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -z$$

Eligiendo, por ejemplo, $z = 1$, se obtiene:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_2 = 3$

Para encontrar el autovector asociado, resolvemos

$$(A - 3I)\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial,

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2-3 & -1 & -1 \\ 4 & -8-3 & -6 \\ -4 & 11 & 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & -11 & -6 \\ -4 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. El sistema resultante es:

$$\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ 4x - 11y - 6z = 0 \\ -4x + 11y + 6z = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, $x + y + z = 0$, es decir, $x = -y - z$. Sustituyendo en la segunda:

$$4(-y - z) - 11y - 6z = -4y - 4z - 11y - 6z = -15y - 10z = 0$$

de donde se tiene:

$$15y + 10z = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{2}{3}z$$

Luego,

$$x = -\left(-\frac{2}{3}z\right) - z = \frac{2}{3}z - z = -\frac{1}{3}z$$

Eligiendo $z = 3$, se obtiene:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_3 = -2$

Para encontrar el autovector asociado, resolvemos

$$(A + 2I)\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial,

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2+2 & -1 & -1 \\ 4 & -8+2 & -6 \\ -4 & 11 & 9+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & -6 \\ -4 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. El sistema resultante es:

$$\begin{cases} 4x - y - z = 0 \\ 4x - 6y - 6z = 0 \\ -4x + 11y + 11z = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación se tiene $4x = y + z$, es decir, $x = \frac{y+z}{4}$. Sustituyendo en la segunda:

$$4\left(\frac{y+z}{4}\right) - 6y - 6z = y + z - 6y - 6z = -5y - 5z = 0$$

lo que implica que $y + z = 0$ o $y = -z$. Entonces, $x = 0$. Un autovector correspondiente es:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) **Polinomio característico**

El polinomio característico de A se obtiene calculando

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

En este caso,

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

Dado que la matriz es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda)$$

Por tanto, el polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda)$$

Autovalores y autovectores

Los autovalores son los valores de λ que anulan el polinomio característico:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 7$$

Autovalor $\lambda_1 = 1$

Para encontrar el autovector asociado, resolvemos

$$(A - I)\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

El sistema lineal resultante es:

$$\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \\ 6z = 0 \end{cases}$$

De la última ecuación, $z = 0$. Sustituyendo en las otras ecuaciones, $y = 0$, y x puede tomar cualquier valor. Tomando $x = 1$, un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_2 = 3$

Para este autovalor, resolvemos:

$$(A - 3I)\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El sistema lineal resultante es:

$$\begin{cases} -2x + 2y + 3z = 0 \\ 4z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

De la última ecuación, $z = 0$. La primera ecuación se reduce a $-2x + 2y = 0$, es decir, $x = y$. Tomando $x = 1$, se obtiene $y = 1$, con $z = 0$. Un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_3 = 7$

Para este autovalor, resolvemos:

$$(A - 7I)\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial:

$$A - 7I = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema lineal resultante es:

$$\begin{cases} -6x + 2y + 3z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $-4y + 4z = 0$ implica $y = z$. La primera ecuación se reescribe como $-6x + 2y + 3z = 0$, que con $y = z$ da $-6x + 5z = 0$, es decir, $x = \frac{5}{6}z$. Tomando $z = 6$, se obtiene $x = 5$ y $y = 6$. Un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d) Polinomio característico

El polinomio característico de A se obtiene calculando

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Para la matriz

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 \\ 4 & -8-\lambda & -6 \\ -4 & 11 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -8-\lambda & -6 \\ 11 & 9-\lambda \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 9-\lambda \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 4 & -8-\lambda \\ -4 & 11 \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)\Big[(-8-\lambda)(9-\lambda) + 66\Big] + \Big[4(9-\lambda) - 24\Big] \\ &\quad - \Big[44 - 4(8+\lambda)\Big] \\ &= (-2-\lambda)\Big[\lambda^2 - \lambda - 6\Big] \\ &= -(\lambda+2)(\lambda^2 - \lambda - 6) \\ &= -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda+2) \\ &= -(\lambda+2)^2(\lambda-3) \end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = -(\lambda+2)^2(\lambda-3)$$

Autovalores y autovectores

Los autovalores son los valores de λ que anulan el polinomio característico:

$$\lambda_1 = -2 \quad (\text{multiplicidad } 2), \qquad \lambda_2 = 3$$

Autovalor $\lambda_1 = -2$

Para encontrar un autovector asociado a $\lambda = -2$, resolvemos

$$(A - (-2)I)\mathbf{v} = (A + 2I)\mathbf{v} = 0$$

donde

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -2+2 & -1 & -1 \\ 4 & -8+2 & -6 \\ -4 & 11 & 9+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & -6 \\ -4 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} -y - z = 0, \\ 4x - 6y - 6z = 0, \\ -4x + 11y + 11z = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación se tiene $y = -z$. Al sustituir en la segunda, se obtiene $4x = 0$, es decir, $x = 0$. La tercera ecuación se verifica de forma automática. Tomando $z = 1$, un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_2 = 3$

Para este autovalor, resolvemos:

$$(A - 3I)\mathbf{v} = 0$$

donde

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2-3 & -1 & -1 \\ 4 & -8-3 & -6 \\ -4 & 11 & 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 4 & -11 & -6 \\ -4 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} -5x - y - z = 0, \\ 4x - 11y - 6z = 0, \\ -4x + 11y + 6z = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce:

$$5x + y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -5x - z.$$

Sustituyendo en la segunda:

$$4x - 11(-5x - z) - 6z = 4x + 55x + 11z - 6z = 59x + 5z = 0,$$

lo que implica:

$$z = -\frac{59}{5}x.$$

Luego,

$$y = -5x - \left(-\frac{59}{5}x\right) = \frac{34}{5}x.$$

Tomando $x = 5$ se tiene:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 34 \\ -59 \end{pmatrix}$$

e) Polinomio característico

El polinomio característico de A se obtiene calculando

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Para la matriz

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -\lambda\Big[(2-\lambda)(3-\lambda) - 2\cdot 1\Big] + \Big[(3-\lambda) - 2\Big] - \Big[2 - 2(2-\lambda)\Big] \\ &= -\lambda\Big[\lambda^2 - 5\lambda + 4\Big] + (1-\lambda) - \Big[2\lambda - 2\Big] \\ &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4) - (\lambda-1) - 2(\lambda-1) \\ &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4) - 3(\lambda-1) \\ &= -(\lambda-1)\Big[\lambda(\lambda-4) + 3\Big] \\ &= -(\lambda-1)\Big[\lambda^2 - 4\lambda + 3\Big] \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda-3) \end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

Autovalores y autovectores

Los autovalores son los valores de λ que anulan el polinomio característico:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{(multiplicidad 2)}, \quad \lambda_2 = 3$$

Autovalor $\lambda_1 = 1$

Para encontrar los autovectores asociados, resolvemos

$$(A - I)\mathbf{v} = 0$$

donde

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La única condición resultante es:

$$x + y + z = 0.$$

Esto define un subespacio propio de dimensión 2, por lo que podemos elegir dos autovectores linealmente independientes. Por ejemplo, una base del subespacio es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Autovalor $\lambda_2 = 3$

Para este autovalor, resolvemos:

$$(A - 3I)\mathbf{v} = 0$$

donde

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} -3x - y - z = 0, \\ x - y + z = 0, \\ 2x + 2y = 0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $2x + 2y = 0$ se deduce $y = -x$. Sustituyendo en la segunda:

$$x - (-x) + z = 2x + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -2x.$$

Tomando $x = 1$, obtenemos:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

f) Polinomio característico

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para hallar el polinomio característico de A, calculamos:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

En este caso:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

Su determinante es:

$$(3 - \lambda)(2 - \lambda) - (-2)(-1) = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2$$

Desarrollando:

$$(3 - \lambda)(2 - \lambda) = 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

por lo que:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Por lo tanto, el polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Autovalores y autovectores

Los autovalores son las raíces de $p(\lambda)$:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$$

por lo que:

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 1$$

Autovalor $\lambda_1 = 4$

Para encontrar el autovector asociado, resolvemos:

$$(A - 4I)\,\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 3-4 & -2 \\ -1 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

El sistema lineal resultante es:

$$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

Ambas ecuaciones son equivalentes a $x = -2y$

Eligiendo $y = 1$, obtenemos $x = -2$

Un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_2 = 1$

Para este autovalor, resolvemos:

$$(A - I)\,\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial:

$$A - I = \begin{pmatrix} 3-1 & -2 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema lineal resultante es:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Ambas ecuaciones implican $x = y$

Eligiendo $x = 1$, se sigue que $y = 1$

Un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g) Polinomio característico

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Para hallar el polinomio característico de A, calculamos:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Se tiene:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Usando la expansión por cofactores, obtenemos:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 2 & 2-\lambda \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\Big[(2-\lambda)(4-\lambda)+1\Big] - \Big[2(4-\lambda)-2\Big] - \Big[2(-1)-2(2-\lambda)\Big] \end{aligned}$$

Calculamos:

$$(2-\lambda)(4-\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

por lo tanto:

$$(2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

Además:

$$2(4-\lambda) - 2 = 8 - 2\lambda - 2 = 6 - 2\lambda$$

y:

$$2(-1) - 2(2-\lambda) = -2 - 4 + 2\lambda = 2\lambda - 6$$

Entonces:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)^2 - (6-2\lambda) - (2\lambda-6)$$

Notamos que:

$$-(6-2\lambda) - (2\lambda-6) = -6 + 2\lambda - 2\lambda + 6 = 0$$

Por lo tanto:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)^2$$

Es decir, el polinomio característico es:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)^2$$

Autovalores y autovectores

Los autovalores son las raíces de $p(\lambda) = 0$:

$$1 - \lambda = 0 \implies \lambda = 1$$

$$(\lambda-3)^2 = 0 \implies \lambda = 3 \quad \text{(multiplicidad doble)}$$

Autovalor $\lambda_1 = 1$

Para encontrar el autovector asociado a $\lambda = 1$, resolvemos:

$$(A - I)\,\mathbf{v} = 0$$

Se tiene:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esto conduce al sistema:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce $y = z$. Sustituyendo en la segunda:

$$2x + 2y = 0 \implies x = -y$$

La tercera ecuación se verifica automáticamente. Tomando $y = 1$, se obtiene $x = -1$ y $z = 1$. Así, un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_2 = 3$

Para $\lambda = 3$, se resuelve:

$$(A - 3I)\,\mathbf{v} = 0$$

Se tiene:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación implica:

$$-2x + y - z = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 2x + z$$

Por lo tanto, la solución general se expresa como:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, el subespacio propio asociado a $\lambda = 3$ es generado por los vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Estos vectores, al ser determinados hasta un factor multiplicativo, forman una base del subespacio propio asociado a $\lambda = 3$

h) Polinomio característico

Sea

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Para hallar el polinomio característico de A, se calcula:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

donde:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -5-\lambda & -5 & -9 \\ 8 & 9-\lambda & 18 \\ -2 & -3 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones correspondientes, se obtiene:

$$p(\lambda) = -(\lambda + 1)^3$$

Multiplicando por -1, se obtiene el polinomio mónico:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^3$$

Autovalores y autovectores

La ecuación $p(\lambda) = 0$ se reduce a:

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

de donde se deduce que el único autovalor es:

$$\lambda = -1 \quad \text{(con multiplicidad algebraica 3)}$$

Para determinar los autovectores asociados a $\lambda = -1$, resolvemos:

$$(A + I)\,\mathbf{v} = 0$$

Se tiene:

$$A + I = \begin{pmatrix} -5+1 & -5 & -9 \\ 8 & 9+1 & 18 \\ -2 & -3 & -7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -9 \\ 8 & 10 & 18 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Denotando $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} -4x - 5y - 9z = 0 \\ 8x + 10y + 18z = 0 \\ -2x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$$

Se observa que la segunda ecuación es -2 veces la primera y que la tercera es proporcional a la primera. Por tanto, el sistema se reduce a:

$$-4x - 5y - 9z = 0$$

Despejando x en función de y y z:

$$x = -\frac{5y + 9z}{4}$$

Esto implica que el subespacio propio es de dimensión 1. Por ejemplo, fijando una relación entre y y z para obtener coeficientes enteros, podemos tomar $y = -3t$ y $z = t$, de manera que:

$$x = -\frac{5(-3t) + 9t}{4} = \frac{15t - 9t}{4} = \frac{6t}{4} = \frac{3t}{2}$$

Si elegimos $t = 2$, se obtiene:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Así, un autovector asociado a $\lambda = -1$ es:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i) Polinomio característico

Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

Para hallar el polinomio característico de A, calculamos:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

En este caso:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -9 \\ 0 & 5-\lambda & 18 \\ 0 & -2 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

Podemos hacer expansión por cofactor en la primera columna. Dado que las entradas en la segunda y tercera fila de la primera columna son cero, el determinante se reduce a:

$$p(\lambda) = (-1-\lambda)\ \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 18 \\ -2 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el menor 2×2:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 18 \\ -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-7-\lambda) - (18)(-2)$$

Desarrollando:

$$(5-\lambda)(-7-\lambda) = -35 - 5\lambda + 7\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + 2\lambda - 35$$

por lo que:

$$(5-\lambda)(-7-\lambda) + 36 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

De este modo:

$$p(\lambda) = (-1-\lambda)(\lambda+1)^2 = -(\lambda+1)^3$$

Si deseamos el polinomio en forma mónica, factorizamos -1:

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^3$$

Autovalores y autovectores

La ecuación $p(\lambda) = 0$ se reduce a:

$$(\lambda+1)^3 = 0$$

de donde se deduce que el único autovalor es:

$$\lambda = -1 \quad \text{(con multiplicidad algebraica 3)}$$

Para hallar los autovectores asociados a $\lambda = -1$, resolvemos:

$$(A + I)\,\mathbf{v} = 0$$

En forma matricial:

$$A + I = \begin{pmatrix} -1+1 & -3 & -9 \\ 0 & 5+1 & 18 \\ 0 & -2 & -7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$. El sistema que impone $(A+I)\mathbf{v} = 0$ se lee:

$$\begin{cases} -3y - 9z = 0 \\ 6y + 18z = 0 \\ -2y - 6z = 0 \end{cases}$$

Las tres ecuaciones son equivalentes a la condición:

$$y + 3z = 0$$

sin imponer restricciones sobre x. Por lo tanto, x es libre y $y = -3z$.

Parametrizando con $x = s$ y $z = t$, se tiene:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, el espacio propio de $\lambda = -1$ es de dimensión 2, lo que indica que la *multiplicidad geométrica* del autovalor -1 es 2, mientras que su *multiplicidad algebraica* es 3.

Por consiguiente, existe un vector adicional (generalizado) que completa la cadena de Jordan, pero que *no* satisface $(A + I)\mathbf{v} = 0$.

Una base posible para el espacio propio es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cualquier combinación lineal de estos dos vectores también es un autovector asociado a $\lambda = -1$.

j) Polinomio característico

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar el polinomio característico de A, calculamos:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

En este caso:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Expandiendo a lo largo de la primera fila, obtenemos:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\Big[(2-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(-1)\Big] + (1-\lambda) \end{aligned}$$

Notemos que:

$$(2-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

por lo tanto:

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

Entonces:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) + (1-\lambda) = (1-\lambda)\Big[(\lambda^2 - 3\lambda + 1) + 1\Big]$$

es decir:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

Como:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

se tiene:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Observando que:

$$(1-\lambda)(\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^2$$

podemos escribir el polinomio característico en forma mónica (multiplicando por -1):

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

Por lo tanto, los autovalores son:

$$\lambda_1 = 1 \quad (\text{multiplicidad } 2), \qquad \lambda_2 = 2 \quad (\text{multiplicidad } 1)$$

Autovalores y autovectores

Autovalor $\lambda_1 = 1$

Para encontrar los autovectores asociados a $\lambda = 1$, resolvemos:

$$(A - I)\,\mathbf{v} = 0$$

donde:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$. El sistema es:

$$\begin{cases} -y = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

De la primera y tercera ecuación se deduce inmediatamente:

$$y = 0$$

Sustituyendo en la segunda:

$$-x - z = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -z$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_2 = 2$

Para $\lambda = 2$, resolvemos:

$$(A - 2I)\,\mathbf{v} = 0$$

donde:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El sistema es:

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$x = -y$$

De la segunda:

$$x = -z$$

Entonces:

$$-y = -z \quad \Longrightarrow \quad y = z$$

Sustituyendo en las anteriores:

$$x = -y = -z$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce $x = y$ y de la tercera $z = y$. Sustituyendo, se obtiene:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_2 = 1$

Para $\lambda = 1$, resolvemos:

$$(A - I)\,\mathbf{v} = 0$$

Se tiene:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema correspondiente es:

$$\begin{cases} -y = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

De aquí se deduce $y = 0$. Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$-x - z = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -z$$

Por tanto, la solución general es:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovalor $\lambda_3 = 3$

Para $\lambda = 3$, resolvemos:

$$(A - 3I)\,\mathbf{v} = 0$$

Se tiene:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

El sistema correspondiente es:

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$y = -2x$$

Sustituyendo en la tercera:

$$-(-2x) - 2z = 2x - 2z = 0 \quad \Longrightarrow \quad z = x$$

La segunda ecuación se verifica automáticamente al reemplazar. Así, la solución general es:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un autovector asociado es:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Ejercicio 2

Dadas las siguientes matrices, sus polinomios característicos, autovalores y autovectores, se solicita verificar en los polinomios característicos hallados (ejercicio 1 **a)** y **g)**):

1. La relación entre los coeficientes del polinomio y los autovalores
2. La relación entre los coeficientes del polinomio y la traza y el determinante de la matriz

Primera matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Autovalores y autovectores:

$$\lambda_1 = 4, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Segunda matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 3)^2$$

Autovalores y autovectores:

$$\lambda_1 = 1, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 3, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Primera matriz

(1) Relación entre coeficientes y autovalores

Para una matriz 2×2, el polinomio característico se expresa como:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Aquí:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 4 + (-1) = 3, \quad \lambda_1\lambda_2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

Esto coincide con el polinomio:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4$$

(2) Relación con la traza y el determinante

La traza de A es:

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + 2 = 3$$

y el determinante es:

$$\det(A) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 2 - 6 = -4$$

Observamos que:

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \det(A) = \lambda_1\lambda_2$$

lo que confirma la verificación.

Segunda matriz

(1) Relación entre coeficientes y autovalores

Para una matriz 3×3, el polinomio característico en forma monómica es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + \cdots + (-1)^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

En nuestro caso:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 3 + 3 = 7$$

y:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

Expandiendo $p(\lambda)$:

$$\begin{aligned}(1-\lambda)(\lambda-3)^2 &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9)\\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 9 - \lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda\\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9\end{aligned}$$

Multiplicando por -1 para obtener la forma estándar:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9$$

Aquí el coeficiente de λ^2 es -7, lo que confirma que $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -7$, y el término independiente es -9, confirmando que $(-1)^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -9$.

(2) Relación con la traza y el determinante

La traza de A es:

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + 2 + 4 = 7$$

y el determinante es:

$$\det(A) = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

Estos valores coinciden con la suma y el producto de los autovalores, respectivamente, verificando la relación con los coeficientes del polinomio.

3.3 Ejercicio 3

Dadas las siguientes formas cuadráticas, se solicita:

1. Escribir cada forma cuadrática en forma matricial
2. Calcular los autovalores de la matriz asociada

a) En $\mathbb{R}^2$

$$\phi(x_1, x_2) = 4\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + 7\,x_2^2$$

b) En $\mathbb{R}^2$

$$\phi(x_1, x_2) = x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_2^2$$

c) En $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = 2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + 2\,x_2^2 - 3\,x_3^2$$

d) En $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 - 3x_2^2 - 3x_3^2$$

e) En $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$$

f) En $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_2x_3$$

g) En $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_3$$

Solución

a)

Sea la forma cuadrática:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, x_2) = 4\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + 7\,x_2^2$$

1) Forma matricial

Para escribir ϕ en forma matricial, buscamos una matriz simétrica Q tal que:

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Notemos que el término $4\,x_1\,x_2$ corresponde a $2\,q_{12}\,x_1\,x_2$. Por ello, si $q_{11} = 4$ y $q_{22} = 7$, entonces $2\,q_{12} = 4$, de donde $q_{12} = 2$. La matriz asociada es:

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Así:

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2) Autovalores de la matriz asociada

Para hallar los autovalores de Q, resolvemos:

$$\det(Q - \lambda I) = 0$$

Esto equivale a:

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(7-\lambda) - (2)(2) = 0$$

Desarrollando:

$$(4-\lambda)(7-\lambda) - 4 = (28 - 4\lambda - 7\lambda + \lambda^2) - 4 = \lambda^2 - 11\lambda + 24$$

Buscamos las raíces del polinomio $\lambda^2 - 11\lambda + 24$:

$$\lambda^2 - 11\lambda + 24 = (\lambda - 8)(\lambda - 3)$$

por lo que:

$$\lambda_1 = 8, \qquad \lambda_2 = 3$$

b)

Sea la forma cuadrática:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, x_2) = x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_2^2$$

1) Forma matricial

Buscamos una matriz simétrica Q tal que:

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Notemos que el término $2\,x_1\,x_2$ corresponde a $2\,q_{12}\,x_1\,x_2$. Si el coeficiente de x_1^2 es 1 (es decir, $q_{11} = 1$) y el de x_2^2 también es 1 (es decir, $q_{22} = 1$), entonces:

$$2\,q_{12} = 2 \quad \Longrightarrow \quad q_{12} = 1$$

La matriz asociada es:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así:

$$\phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2) Autovalores de la matriz asociada

Para hallar los autovalores de Q, resolvemos:

$$\det(Q - \lambda I) = 0$$

Esto equivale a:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

Desarrollando la ecuación:

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

o lo que es lo mismo:

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

De donde se obtienen los autovalores:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$$

c)

Sea la forma cuadrática:

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = 2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 + 2\,x_2^2 - 3\,x_3^2$$

1) Forma matricial

Para escribir ϕ en forma matricial, buscamos una matriz simétrica Q tal que:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

- El coeficiente de x_1^2 es 2, por lo que $q_{11} = 2$
- El coeficiente de x_2^2 es 2, por lo que $q_{22} = 2$
- El coeficiente de x_3^2 es -3, por lo que $q_{33} = -3$
- El término $4\,x_1\,x_2$ corresponde a $2\,q_{12}\,x_1\,x_2$, de donde $q_{12} = 2$
- No aparecen términos mixtos que involucren x_3, por lo que $q_{13} = q_{23} = 0$

Por lo tanto, la matriz asociada es:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Así:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2) Autovalores de la matriz asociada

Para hallar los autovalores de Q, resolvemos:

$$\det(Q - \lambda I) = 0$$

Notemos que Q tiene forma bloque-diagonal, ya que:

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

El bloque 2×2 es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y el bloque 1×1 es -3.

Los autovalores del bloque 2×2 se obtienen resolviendo:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda$$

Es decir:

$$\lambda(\lambda - 4) = 0$$

de donde se deducen los autovalores:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 4$$

El tercer autovalor, correspondiente al bloque 1×1, es:

$$\lambda = -3$$

Por lo tanto, los autovalores de Q son:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -3$$

d)

Sea la forma cuadrática:

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = -2\,x_1^2 + 4\,x_1x_2 + 4\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3 - 3\,x_2^2 - 3\,x_3^2$$

1) Forma matricial

Buscamos la matriz simétrica Q tal que

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

De los coeficientes:

$$q_{11} = -2, \quad q_{22} = -3, \quad q_{33} = -3,$$

$$2\,q_{12} = 4 \implies q_{12} = 2, \quad 2\,q_{13} = 4 \implies q_{13} = 2, \quad 2\,q_{23} = -2 \implies q_{23} = -1$$

y simetría $q_{ij} = q_{ji}$. Así,

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

y

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2) Autovalores de la matriz asociada

Para hallar los autovalores resolvemos

$$\det(Q - \lambda I) = 0$$

El polinomio característico monico es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q) = \lambda(\lambda + 2)(\lambda + 6)$$

de donde

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -6$$

e)

Sea la forma cuadrática:

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4\,x_1x_2 + 4\,x_2^2 + 3\,x_3^2$$

1) Forma matricial

Buscamos la matriz simétrica Q tal que

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

De los coeficientes:

$$q_{11} = 1, \quad q_{22} = 4, \quad q_{33} = 3, \quad 2\,q_{12} = -4 \implies q_{12} = -2, \quad q_{13} = q_{23} = 0$$

Así,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2) Autovalores de la matriz asociada

Para hallar los autovalores de Q, resolvemos:

$$\det(Q - \lambda I) = 0$$

Como Q es bloque-diagonal:

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

los autovalores del bloque 2×2 vienen de resolver $\det(A - \lambda I) = 0$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)(-2) \\ &= (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 \\ &= (4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2) - 4 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda \end{aligned}$$

La ecuación característica para este bloque es $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, que se factoriza como $\lambda(\lambda - 5) = 0$. Las soluciones (autovalores del bloque 2×2) son $\lambda = 0$ y $\lambda = 5$.

El tercer autovalor, del bloque 1×1, es $\lambda = 3$.

Por tanto, los autovalores de Q son:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 3$$

f)

Sea la forma cuadrática:

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_2x_3$$

1) Forma matricial

Buscamos la matriz simétrica Q tal que

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

De los coeficientes:

$$q_{11} = -5, \quad q_{22} = -6, \quad q_{33} = -7,$$

$$2\, q_{12} = -4 \implies q_{12} = -2, \quad 2\, q_{23} = -4 \implies q_{23} = -2, \quad q_{13} = 0$$

por simetría $q_{ij} = q_{ji}$. Así,

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2) Autovalores de la matriz asociada

Para hallar los autovalores resolvemos:

$$\det(\lambda I - Q) = 0$$

El polinomio característico mónico es:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q) = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 99\lambda + 162 = (\lambda + 3)(\lambda + 6)(\lambda + 9)$$

De donde:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -6, \quad \lambda_3 = -9$$

g)

Sea la forma cuadrática:

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = 10\, x_1^2 + 6\, x_2^2 + 7\, x_3^2 + 4\, x_1 x_3$$

1) Forma matricial

Buscamos la matriz simétrica Q tal que

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

De los coeficientes:

$$q_{11} = 10, \quad q_{22} = 6, \quad q_{33} = 7, \quad 2\,q_{13} = 4 \implies q_{13} = 2, \quad q_{12} = q_{23} = 0$$

por simetría $q_{ij} = q_{ji}$. Así,

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2) Autovalores de la matriz asociada

Para hallar los autovalores resolvemos:

$$\det(Q - \lambda I) = 0$$

Como Q es bloque-diagonal en $\{x_1, x_3\}$ y x_2, tenemos

$$\det(Q - \lambda I) = (6 - \lambda)\, \det \begin{pmatrix} 10 - \lambda & 2 \\ 2 & 7 - \lambda \end{pmatrix} = (6 - \lambda)[(10 - \lambda)(7 - \lambda) - 4]$$

$$= (6 - \lambda)[\lambda^2 - 17\lambda + 66] = (6 - \lambda)^2(\lambda - 11)$$

De donde se deducen:

$$\lambda_1 = 6 \quad \text{(multiplicidad 2)}, \qquad \lambda_2 = 11$$

3.4 Ejercicio 4

Dadas las siguientes formas cuadráticas, se solicita decidir si son definidas positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas o indefinidas.

- A partir de los autovalores.
- A partir del cálculo de los menores de la matriz.

1. $$Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = 3$$

2. $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$$

3. $$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 4$$

4. $$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -6$$

5. $$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 5$$

6. $$Q = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -6, \quad \lambda_3 = -9$$

7. $$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 = 6 \quad \text{(raíz doble)}, \quad \lambda_2 = 11$$

Solución

1) Matriz Q y sus autovalores

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 3$$

a) A partir de los autovalores

Como ambos autovalores son positivos,

$$\lambda_1 = 8 > 0, \quad \lambda_2 = 3 > 0$$

se concluye que Q es **definida positiva**.

b) A partir de los menores principales

Calculamos los menores principales:

$$M_1 = Q_{11} = 4 > 0, \quad M_2 = \det(Q) = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 2 = 28 - 4 = 24 > 0$$

Al ser ambos menores principales positivos, se confirma que Q es **definida positiva**.

2) Matriz Q y sus autovalores

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$$

a) A partir de los autovalores

Aquí uno de los autovalores es cero y el otro positivo:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2 > 0$$

Por tanto, Q es **semidefinida positiva**.

b) A partir de los menores principales

Calculamos los menores principales:

$$M_1 = Q_{11} = 1 > 0, \quad M_2 = \det(Q) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

Como el primer menor es positivo y el segundo es cero, se confirma que Q es **semidefinida positiva**.

3) Matriz Q y sus autovalores

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 4$$

a) A partir de los autovalores

Dado que hay un autovalor positivo ($\lambda_3 = 4$) y uno negativo ($\lambda_2 = -3$), junto con un cero ($\lambda_1 = 0$), concluimos que Q es **indefinida**.

b) A partir de los menores principales

Calculamos los menores principales:

$$M_1 = Q_{11} = 2 > 0, \quad M_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0, \quad M_3 = \det(Q) = 0$$

Como los menores no son todos del mismo signo (y el segundo y tercer menores son cero en lugar de positivos o negativos puros), esto confirma que Q es **indefinida**.

4) Matriz Q y sus autovalores

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -6$$

a) A partir de los autovalores

Los autovalores son todos no positivos, con uno igual a cero y los demás negativos:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -6$$

Por tanto, Q es **semidefinida negativa**.

b) A partir de los menores principales

Calculamos los menores principales:

$$M_1 = Q_{11} = -2 < 0, \quad M_2 = \det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (-2)(-3) - 4 = 6 - 4 = 2 > 0, \quad M_3 = \det(Q) = 0$$

Observamos que $M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 = 0$, lo cual es consistente con el patrón *alternante* de los criterios de Sylvester para semidefinidas negativas. Por tanto, se confirma que Q es **semidefinida negativa**.

5) Matriz Q y sus autovalores

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 5$$

a) A partir de los autovalores

Los autovalores son no negativos, con uno igual a cero y dos positivos:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3 > 0, \quad \lambda_3 = 5 > 0$$

Por tanto, Q es **semidefinida positiva**.

b) A partir de los menores principales

Calculamos los menores principales:

$$M_1 = Q_{11} = 1 > 0, \quad M_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0, \quad M_3 = \det(Q) = 0$$

Como el primer menor es positivo y los siguientes son cero, se confirma que Q es **semidefinida positiva**.

6) Matriz Q y sus autovalores

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -6,\ \lambda_3 = -9$$

a) A partir de los autovalores

Como todos los autovalores son estrictamente negativos:

$$\lambda_1 = -3 < 0, \quad \lambda_2 = -6 < 0, \quad \lambda_3 = -9 < 0$$

se concluye que Q es **definida negativa**

b) A partir de los menores principales

Calculamos los menores principales:

$$M_1 = Q_{11} = -5 < 0, \quad M_2 = \det\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = (-5)(-6) - (-2)^2 = 30 - 4 = 26 > 0, \quad M_3 = \det(Q) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -162 <$$

Dado que los menores principales alternan de signo ($M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 < 0$), se confirma que Q es **definida negativa**

7) Matriz Q y sus autovalores

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 6 \text{ (raíz doble)}, \quad \lambda_2 = 11$$

a) A partir de los autovalores

Todos los autovalores son estrictamente positivos:

$$\lambda_1 = 6 > 0, \quad \lambda_2 = 11 > 0$$

Por tanto, Q es **definida positiva**

b) A partir de los menores principales

Calculamos los menores principales:

$$M_1 = Q_{11} = 10 > 0, \quad M_2 = \det\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 60 > 0, \quad M_3 = \det(Q) = 396 > 0$$

Al ser todos los menores principales positivos, se confirma que Q es **definida positiva**

3.5 Ejercicio 5

Indicar para qué valores del parámetro a la forma cuadrática dada por la matriz A es definida positiva o negativa.

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Solución

Indicar para qué valores del parámetro a la forma cuadrática dada por la matriz A es definida positiva o negativa

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & a & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Para ello utilizamos el *criterio de Sylvester*, que afirma que una matriz simétrica es definida positiva si y solo si todos sus menores principales son positivos, y es definida negativa si los menores principales alternan de signo empezando por negativo

Cálculo de los menores principales

$$\Delta_1 = \det[a] = a$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} = a^2 - 4$$

$$\Delta_3 = \det A = a \det \begin{pmatrix} a & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{8} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= a\left(\frac{3}{2}a - 8\right) - 2(2 \cdot \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}a^2 - 8a - 6$$

Definida positiva

Para A definida positiva debe cumplirse

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0$$

- $\Delta_1 > 0 \implies a > 0$
- $\Delta_2 > 0 \implies a^2 > 4 \implies |a| > 2 \implies a > 2$
- $\Delta_3 > 0 \implies \frac{3}{2}a^2 - 8a - 6 > 0 \implies a < -\frac{2}{3}$ o $a > 6$

Combinando $a > 2$ con $\Delta_3 > 0$ obtenemos

$$a > 6$$

Por lo tanto,

$$A \text{ es definida positiva} \iff a > 6$$

Definida negativa

Para A definida negativa se requiere

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0$$

- $\Delta_1 < 0 \implies a < 0$
- $\Delta_2 > 0 \implies |a| > 2 \implies a < -2$
- $\Delta_3 < 0 \implies -\frac{2}{3} < a < 6$

No existe a que cumpla simultáneamente $a < -2$ y $-\dfrac{2}{3} < a$

Así,

$$\text{No hay valores de } a \text{ para que } A \text{ sea definida negativa}$$

3.6 Ejercicio 6

Indicar para qué valores del parámetro a la siguiente forma cuadrática es definida positiva o definida negativa:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + ax_2^2 + ax_3^2$$

Solución

Consideremos la forma cuadrática

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = a\,x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + a\,x_2^2 + a\,x_3^2$$

La matriz simétrica asociada es

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Menores principales

$$\Delta_1 = \det[a] = a$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = a^2 - 1$$

$$\Delta_3 = \det A = (a+2)(a-1)^2$$

Condición de definida positiva

Por el criterio de Sylvester, A es definida positiva si y solo si

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0$$

- $\Delta_1 > 0 \implies a > 0$
- $\Delta_2 > 0 \implies a^2 > 1 \implies |a| > 1 \implies a > 1$ (junto con $a > 0$)
- $\Delta_3 > 0 \implies (a+2)(a-1)^2 > 0 \implies a + 2 > 0 \iff a > -2$, lo cual se satisface si ya $a > 1$

Por tanto,

$$A \text{ es definida positiva} \iff a > 1$$

Condición de definida negativa

Para que A sea negativa definida se requiere

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0$$

- $\Delta_1 < 0 \implies a < 0$
- $\Delta_2 > 0 \implies |a| > 1 \implies a < -1$
- $\Delta_3 < 0 \implies (a+2)(a-1)^2 < 0 \implies a + 2 < 0 \iff a < -2$

Combinando $a < -1$ con $a < -2$ obtenemos $a < -2$. Entonces

$$A \text{ es definida negativa} \iff a < -2$$

3.7 Ejercicio 7

3.8 Ejercicio 8

3.9 Ejercicio 9

3.10 Ejercicio 10

3.11 Ejercicio 11

3.12 Ejercicio 12

3.13 Ejercicio 13

3.14 Ejercicio 14

3.15 Ejercicio 15

3.16 Ejercicio 16

3.17 Ejercicio 17